MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE HASSIBA BENBOUALI DE CHLEF

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جـامعة حسيبة بن بوعلي بالشلف

كلية العلوم

قسم الرياضيات

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER en Mathématiques

Option :

Analyse des Équations aux Dérivées Partielles

Intitulé

Transformation d'Aluthge

Présenté par

BENZAMIA Sakina

SADAOUI Nesrine

Soutenu le 05/06/2016 devant le jury composé de :

Dr CHABAN Aicha	MCB	Présidente
Mr KAINANE MEZADEK Mourad	MAA	Examinateur
Dr NASLI BAKIR Aissa	MCB	Encadreur

Année universitaire : 2015/2016

بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciements

LOUANGE ET AMPLES REMERCIEMENTS A ALLAH LE TOUT PUISSANT

Nous remercions le bon **ALLAH** qui nous a donné le courage et la patience jusqu'au bout de nos études.
Nous tenons à exprimer ici notre vive gratitude et notre immense respect et nos remerciements à

notre encadreur de thèse Monsieur **A. NASLI BAKIR**, pour la qualité de son encadrement, son suivi attentif, sa précieuse assistance, sa disponibilité et ses hautes qualités morales et scientifiques et d'avoir fait le nécessaire pour faciliter autant que possible, pour le temps et la patience qu'il nous a accordés tout au long de ce travail.
De plus, les conseils qu'il nous a divulgués tout au long de la rédaction, ont toujours été clairs et nets pour nous facilite grandement la tâche et nous permette d'aboutir à la production de cette thèse.
Il a su nous épauler aux moments importants, par ses conseils, ses réflexions et sa patience dans l'avancement de ce travail.
Bien sûr, nous remercions chaleureusement les membres du jury de l'intérêt qu'ils nous ont clairement manifesté pour ce travail, et des remarques et corrections qu'ils ont apportées à ce document.
Nos remerciements vont également à tous nos chers professeurs qui nous ont tout au long de notre cursus apporté formation et connaissances.
Nous remercions nos parents et nos familles pour leurs soutiens moraux et ces encouragements pendant toutes ces années.
Il y a un certain nombre de moments difficiles où leurs aides et leurs présences nous ont permis de garder le cap sur ambitions hier.
nous tenons à remercier chaleureusement nos amis et nos collègues de l'université de Chlef, pour nous avoir aidé et encouragé au cours de notre thèse dans les bons et moins bons moments.
Nous vous remercions beaucoup des agréables moments qu'on a passé ensemble.

Merci pour leurs confiances.
SAKINA ET NESRINE

Table des matières

Symboles et notations

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$	Espace de Banach des opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{H}$;
$\ker A$	Noyau de l'opérateur $\mathcal{A}$;
$\mathcal{R}(A)$	Image de A ;
$\vert A\vert$	Module de A ;
$\widetilde{A}$	Transformation d'Aluthge de A ;
$\widehat{A}$	Seconde transformation d'Aluthge de A ;
$\oplus$	Somme directe orthogonale ;
$\langle .,. \rangle$	Produit scalaire hilbertien ;
(N)	Classe des opérateurs normaux ;
(HN)	Classe des opérateurs hyponormaux ;
$(\mathbb{D})$	Classe des opérateurs dominants.

Introduction et historique

L'objectif de ce mémoire est de généraliser le théorème célèbre de Fuglede-Putnam. Qui affirme qu'un opérateur linéaire borné qui bicommute avec deux opérateurs normaux, il bicommute également avec leurs adjoints. La généralisation étant étudiée sur certaines classes des opérateurs non normaux définis sur des espaces de Hilbert séparables complexes de dimension infinie.

Pour atteindre ce but, on procédera à classifier les opérateurs en question, puis on établira le théorème de Fuglede-Putnam pour des couples d'opérateurs de classes différentes.

L'idée du théorème de Fuglede-Putnam est due à B. Fuglede, qui a montré en premier lieu, que si A est un opérateur normal dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et si $AX = XA$ pour certain $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$; alors $A^*X = XA^*$, **i.e** tout opérateur qui commute avec un opérateur normal, commute aussi avec son adjoint.

Ce résultat est en général faux si A n'est pas normal. En effet, on prend S le shift unilatéral à poids sur l'espace ℓ_2 des suites complexes à carré sommable

$$S : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$$

$$\sum_{i\geq 1} \alpha_i \mathrm{e}_i \longmapsto \sum_{i\geq 1} \alpha_i \mathrm{e}_{i+1}$$

et $X = S$. De plus, si X est auto-adjoint, le résultat est trivial sans la normalité de l'opérateur S.

Puis, C.R. Putnam a généralisé ce résultat pour le cas de deux opérateurs normaux A et B comme suit : Pour deux opérateurs normaux A et B dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et pour un opérateur $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$; l'équation $AX = XB$ implique $A^*X = XB^*$, **i.e** tout opérateur qui bicommute avec deux opérateurs normaux, bicommute aussi avec leurs adjoints.

Donc, le but de ce résultat est l'étude de la commutativité et la bicommutativité dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Nous adoptons des outils mathématiques pour atteindre cet objectif qui se résument en la transformation d'Aluthge, et les sous-espaces invariants et la décomposition d'un opérateur linéaire.

Le travail se compose de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions et propriétés fondamentales des opérateurs de l'espace de Hilbert. Nous définissons aussi la notion de décomposition polaire d'un opérateur linéaire borné, avec quelques propriétés.

Dans le second chapitre, on introduit la transformation d'Aluthge et on présente ses propriétés principales qui nous permettent de passer d'une classe d'opérateurs à une autre classe qui jouit de la propriété de Fuglede-Putnam.

Sont classifiés dans le troisième chapitre les opérateurs non normaux tels que les opérateurs p-hyponormaux, $\log$-hyponormaux, dominants.
Nous étudierons aussi certaines de leurs propriétés et leurs transformations d'Aluthge.
Nous établissons également leurs restrictions sur des sous-espaces invariants.
Le dernier chapitre est consacré à la généralisation du théorème de **Fuglede-Putnam** pour des opérateurs non normaux.

Tout au long de ce travail, $\mathcal{H}$ désigne un espace de Hilbert séparable complexe de dimension infinie, muni d'un produit scalaire noté $< .,. >$, et $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ désigne l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{H}$.

Chapitre 1

Préliminaires

Soit $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'espace des opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{H}$. Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on note par $\ker(T)$ le noyau de T et par $\mathcal{R}(T)$ l'image de T. T est dit un opérateur positif si

$$< Tx, x > \geq 0, \ \ \forall x \in \mathcal{H}$$

Un opérateur $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est dit isométrie partielle si $U|_{\ker(U)^\perp}$ est une isométrie.

Lorsque $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ T^*T$ est un opérateur positif. Donc il possède une unique racine carrée positive, que l'on note $|T|$. Cet opérateur est appelé module de T. Un opérateur T a une unique décomposition polaire $T = U|T|$ tel que U est une isométrie partielle (avec $\ker(U) = \ker(T)$ et $\ker(U^*) = \ker(T^*)$).

1.1 Définitions et notations

Définition 1.1. *Deux vecteurs x et y de $\mathcal{H}$ sont dits orthogonaux dans $\mathcal{H}$ et l'on écrit $x \perp y$, si $< x, y >= 0$.*

Définition 1.2. *Soit M un sous-ensemble de $\mathcal{H}$. Le complémentaire orthogonal de M dans $\mathcal{H}$ est l'ensemble*

$$M^\perp = \{x \in \mathcal{H} / \forall y \in M :< x, y >= 0\}$$

Proposition 1.1. *[5] Soit M un sous-ensemble de $\mathcal{H}$. $M^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$.*

Proposition 1.2. *[5] Si M est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$, alors $\mathcal{H}$ est la somme directe orthogonale de M et $M^{\perp}$. On écrit donc*

$$\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$$

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ deux espaces de Hilbert. On note par $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ à l'espace des opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{K}$.

Proposition 1.3. *[5] $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ est un espace de Banach.*

Si $\mathcal{H} = \mathcal{K}$, on note $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ à l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. L'opérateur A^*A étant positif. On pose donc

$$|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$$

L'opérateur $|A|$ est appelé module de A.

Proposition 1.4. *[5] Soit A et B deux opérateurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. A commute avec B^2 si est seulement s'il commute avec B.*

Proposition 1.5. *[17] Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, alors*

$$\forall x \in \mathcal{H}, \;\; < Tx, x >= 0 \Rightarrow T = 0$$

Proposition 1.6. *[5] Si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, alors $\mathcal{H} = \ker(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A^*)}$.*

Théorème 1.1 (l'inégalité de Furuta)**.** *[11] Si A et B sont des opérateurs auto-adjoints tels que $A \geq B \geq 0$. Alors pour tout $r \geq 0$, on a*

$$(B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}} \geq B^{(p+2r)/q} \tag{1.1}$$

Et

$$A^{(p+2r)/q} \geq (A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}} \tag{1.2}$$

tel que $p \geq 0, \;\; q \geq 1$, et $(1 + 2r)q \geq p + 2r$.

Soit M est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ et soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Définition 1.3. *On dit que M est invariant pour A si $Ax \in M$ pour tout $x \in M$.*

Définition 1.4. *M est dit réduisant pour A (ou M réduit A), si M est invariant pour A et A^*.*

On a donc les résultats suivants :

Proposition 1.7. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Si M est invariant pour A, alors $M^\perp$ est invariant pour A^*.*

Démonstration. Soit $x \in M$ et $y \in M^\perp$;
on a $< Ax, y >= 0$ (car M est invariant pour A),
et on a d'autre part $0 =< Ax, y >=< x, A^*y >$, et par conséquent $A^*y \in M^\perp$.
Alors $M^\perp$ est invariant pour A^*. □

Proposition 1.8. *[5] Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$*

i) M est invariant pour A si et seulement si A s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

sur $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$.

ii) M est réduisant pour A si et seulement si A s'écrit

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

sur $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$.

1.2 Opérateurs positifs

Définition 1.5. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. On dit que T est positif, s'il existe un opérateur S tel que $T = S^*S$*

Théorème 1.2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) Il existe un opérateur T auto-adjoint tel que $P = T^2$;

b) P est positif : $\exists\, S$ tel que $P = S^*S$;

c) P est auto-adjoint et $\forall u \in \mathcal{H}.\ u \neq 0,\ < P(u), u >\geq 0$.

Démonstration. 1) **(a $\Rightarrow$ b)** : on a $P = T^2$, avec $T = T^*$, alors $P = TT^* = T^*T$ alors (a) entraine (b).

2) **(b $\Rightarrow$ c)** : $P = S^*S \Rightarrow P^* = (S^*S)^* = S^*S = P$, ce qui implique que P est auto-adjoint. De plus :

$$< Pu, u >=< S^*Su, u >=< Su, Su >= \|Su\|^2 \geq 0$$

Par conséquent (b) entraine (c)

3) **(c $\Rightarrow$ a)** : P étant auto-adjoint, il existe une base orthonormée $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ de $\mathcal{H}$ constituée des vecteurs propres de P, soit $Pu_i = \lambda_i u_i$; les λ_i sont réels (car P auto-adjoint). Montrons que (c) implique que les λ_i sont positif. Pour tout i, on a :

$$0 \leq< Pu_i, u_i >=< \lambda_i u_i, u_i >= \lambda_i < u_i, u_i >= \lambda_i \|u_i\|^2.$$

$< u_i, u_i >\geq 0$ entraîne $\lambda \geq 0$, et donc $\sqrt{\lambda_i}$ est un nombre réel. Soit T l'opérateur linéaire définie par :

$$Tu_i = \sqrt{\lambda_i} u_i \quad \text{pour} \quad i = 1, ..., n$$

T étant par construction représenté par une matrice diagonale réelle sur une base orthonormée, il est auto-adjoint. De plus, pour tout i :

$$T^2 u_i = T(\sqrt{\lambda_i} u_i) = \sqrt{\lambda_i} T u_i = \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_i} u_i = \lambda_i u_i = Pu_i$$

L'action de T^2 et de P sur les vecteurs d'une base de $\mathcal{H}$ est la même, ils sont donc égaux $P = T^2$, ce qui achève la démonstration.

□

Remarque 1.1. *L'opérateur T défini ci-dessus est le seul opérateur positif vérifiant $P = T^2$. T est dit racine carrée positive de P.*

1.3 Isométrie partielle

Définition 1.6. *Une isométrie partielle sur $\mathcal{H}$ est un opérateur $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, sa restriction sur* $\ker(U)^{\perp}$ *est une isométrie.*
$\ker(U)^{\perp}$ *et $\mathcal{R}(U)$ sont appelés respectivement sous-espace initial et sous-espace final de U. On a donc*

$$U^*U = \mathcal{P}_i \quad \text{et} \quad UU^* = \mathcal{P}_f$$

où $\mathcal{P}_i$ et $\mathcal{P}_f$ sont les projections orthogonales sur $\ker(U)^{\perp}$, $\mathcal{R}(U)$ *respectivement.*
Si U est une isométrie partielle sur $\mathcal{H}$, alors

$$\mathcal{H} = \ker(U) \oplus \ker(U)^{\perp} = \mathcal{R}(U) \oplus \mathcal{R}(U)^{\perp}$$

et $U : \ker(U)^{\perp} \longrightarrow \mathcal{R}(U)$ est unitaire, ***i.e*** *U est inversible et $U^{-1} = U^*$.*

Exemple 1.1. *Soit S le shift défini sur l'espace $\mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, muni de sa base canonique $(e_1, ..., e_n)$, par*

$$S(e_i) = \begin{cases} e_{i+1} & i \in [1; n-1] \\ 0 & i = n \end{cases}$$

S est une isométrie partielle.

Proposition 1.9. *Un opérateur $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est une isométrie partielle si est seulement si U^*U est une projection orthogonale.*

Démonstration. Supposons que U est une isométrie partielle. On a alors

$$(U^*U)^* = U^*U$$

Reste donc à montrer que $(U^*U)^2 = U^*U$.
Comme $\mathcal{H} = \ker(U)^{\perp} \oplus \ker(U)$, on a pour tout $x \in \mathcal{H}$

$$U^*Ux = U^*Ux_1$$

Où $x_1 \in \ker(U)^{\perp}$ vérifiant $x - x_1 \in \ker(U)$. Comme $\|Ux_1\| = \|x_1\|$ Alors

$$< U^*Ux_1, x_1 >=< x_1, x_1 > \Rightarrow U^*Ux_1 = x_1$$

On a donc

$$(U^*U)^2x = U^*Ux$$

Montrons la réciproque ;

Comme U^*U est une projection orthogonale, on a

$$\|U^*Ux\|^2 =< U^*Ux, x >= \|Ux\|^2$$

On déduit que,

$$\ker(U^*U) = \ker(U)$$

Soit U^*U est une projection orthogonale sur $\ker(U)^\perp$. D'où, pour tout $x \in \ker(U)^\perp$

$$\|Ux\|^2 =< U^*Ux, x >= \|x\|^2$$

□

Proposition 1.10. *U est une isométrie partielle si et seulement si U^* l'est aussi.*

Proposition 1.11. *Si T est une isométrie partielle, alors $\mathcal{R}(T)$ est fermée.*

1.4 Décomposition polaire

Théorème 1.3. *Soient $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, et W un isométrie partielle, alors $T = W|T|$ telle que $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$. De plus, si $T = UP$ où P un opérateur positif et U est une isométrie partielle avec $\ker(U) = \ker(P)$, alors $P = |T|$ et $U = W$.*

Démonstration. Si $x \in \mathcal{H}$, alors

$$\|Tx\|^2 =< Tx, Tx >=< T^*Tx, x >=< |T|x, |T|x >$$

Ainsi

$$\|Tx\| = \||T|x\| \tag{1.3}$$

D'après (1.3), $\ker(T) = \ker(|T|)$. On obtient alors

$$\ker(T)^\perp = \ker(|T|)^\perp = \overline{\mathcal{R}(|T|)}$$

Soit $W : Im|T| \longrightarrow \mathcal{R}(T)$ définie par

$$W(|T|x) = Tx, \tag{1.4}$$

d'après (1.3) W définit bien une isométrie. Elle est donc continue, et on peut l'étendre en une isométrie

$$W : \ker(T)^{\perp} \longrightarrow \overline{\mathcal{R}(T)}$$

Si $x \in \ker(T)\ \ W = 0,\ W$ est une isométrie partielle. et d'après (1.4) $W|T| = T$.

De l'unicité, notons que $T^*T = PU^*UP$. D'autre part, puisque U est une isométrie partielle, alors U^*U est une projection orthogonale sur

$$\ker(U)^{\perp} = \ker(P)^{\perp} = \overline{\mathcal{R}(P)}$$

Il en résulte que $T^*T = PU^*UP = P^2$. Par l'unicité de la racine carré positif, $P = |T|$ Puisque $T = UP = U|T|$, on a aussi

$$U|T|x = Tx = W|T|x, \quad \forall\, x \in \mathcal{H}$$

Ceci implique que $U = W$ sur

$$\overline{\mathcal{R}(|T|)} = \ker(P)^{\perp} = \ker(U)^{\perp} = \ker(|T|)^{\perp} = \ker(W)^{\perp}$$

Finalement, $U = W$. $\square$

Exemple 1.2. *Soient a,b sont des nombres réels et considérons l'opérateur T défini sur $\mathbb{R}^2$ avec sa norme usuelle défini par :*

$$T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Alors, pour $z \in \mathbb{R}^2$, $z = (x, y)$, nous avons

$$Tz = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax - by, bx + ay)$$

donc,

$$\begin{aligned}\|Tz\| &= \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 + a^2y^2 + 2abxy} \\ &= \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)} \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\|z\|\end{aligned}$$

Alors,

$$\textit{soient} \quad a = r\cos\theta \quad \textit{et} \quad b = r\sin\theta \quad \textit{avec} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \quad \textit{et } r = \sqrt{a^2+b^2}$$

Alors

$$\begin{aligned}T &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Par conséquent, T est écrit en termes de deux matrices, la première est une isométrie, qui est une rotation du vecteur par θ et le second est un opérateur positif, étirement par r, ce qui est exactement$\sqrt{T^*T}$.

Exemple 1.3. *Soit la matrice*

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La première étape est le calcul de la matrice P. On calcule tout d'abord T^*T.

$$\begin{aligned}T^*T &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Puisque le polynôme caractéristique de T^*T *est* $x^2-10x+9=(x-1)(x-9)$. *Donc les valeurs propres de cet opérateur sont* 1 *et* 9. *On trouve que* $(1,-1)^t$ *et* $(1,1)^t$ *sont des vecteurs propres de* T^*T *pour ces valeurs propres.*

Alors la matrice de passage est

$$W=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Et sa matrice inverse est

$$W^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

telle que la matrice diagonale

$$D=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

On prend la racine carrée de la matrice D *on obtient*

$$\sqrt{D}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Alors la matrice

$$\begin{aligned}|T|=\sqrt{T^*T}&=W\sqrt{D}W^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=P\end{aligned}$$

Pour calculer U *il faut calculer* p^{-1}

$$p^{-1}=1/3\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

Donc

$$U = TP^{-1} = 1/3 \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors T admet une décomposition polaire $T = U|T|$ telle que

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad |T| = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposition 1.12. *Soit $T = U|T|$ la décomposition polaire d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors*

a) $T^* = U^*|T^*|$ est la décomposition polaire de T^*.

b) $U|T| = |T^*|U$.

Lemme 1.1. *[12] Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur positif. Alors :*

a) $\forall x \in \mathcal{H}$, $< Sx, x >= 0$ si et seulement si $Sx = 0$ pour tout $x \in \mathcal{H}$.

Démonstration. a) On a

$$U^*U|T| = |T| \quad \text{donc} \quad U^*T = |T|$$

Et on a d'autre part :

$$TT^* = U|T||T|U^* = (U|T|U^*)(U|T|U^*)$$

$$\Rightarrow U|T|U^* = |T^*| \tag{1.5}$$

Alors

$$U^*|T^*| = U^*U|T|U^* = |T|U^* = T^*$$

Maintenant, il suffit montrer que $\ker(U^*) = \ker(|T^*|)$

On a :

$$\begin{aligned} x \in \ker(U^*) &\Leftrightarrow U^*x = 0 \\ &\Leftrightarrow \|U^*x\|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow < U^*x, U^*x > = < UU^*x, x > = 0 \\ &\Leftrightarrow UU^*x = 0 \quad \text{d'après le lemme } (1.1) \\ &\Leftrightarrow |T|U^*x = 0 \quad (\ker(U) = ker(|T|)) \\ &\Leftrightarrow T^*x = 0 \ \ (T^* = |T|U^*) \\ &\Leftrightarrow |T^*|x = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \ker(|T^*|) \end{aligned}$$

Alors

$$\ker(U^*) = \ker(|T^*|) = \ker(T^*)$$

b) On a d'après (1.5)

$$|T^*|U = U|T|U^*U = U|T|$$

□

Remarque 1.2. *Comme conséquence directe de la proposition précédente, on a les identités suivantes :*

i. $T = U|T| = |T^*|U = UT^*U.$

ii. $|T| = U^*T = T^*U = U^*|T^*|U.$

iii. $T^* = U^*|T^*| = |T|U^* = U^*TU^*.$

iv. $|T^*| = U|T|U^* = TU^* = UT^*.$

Théorème 1.4. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, et soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de T. Alors on a :*

$$|T^*|^q = U|T|^qU^*, \quad \forall q \geq 0$$

Lemme 1.2. *[12] Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et soit $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur positif. Alors* *a)* $\ker(S^q) = \ker(S)$, *pour tout réel positif* q.

Démonstration. On a

$$<|T|^2x, x> = <T^*Tx, x> = <Tx, Tx> = \|Tx\|^2 \geq 0$$

Alors $|T|$ est positif, donc d'après le lemme 1.2

$$\ker(|T|) = \ker(|T|^q)\ , \quad \forall q \geq 0$$

Donc $\ker(|T|)^\perp = \ker(|T|^q)^\perp = \overline{\mathcal{R}(|T|)} = \overline{\mathcal{R}(|T|^q)}$. Mais U^*U est une projection initiale dans $\overline{(\mathcal{R}|T|)}$, alors dans $\overline{\mathcal{R}(|T|^q)}$. Donc $U^*U|T|^q = |T|^q$. De plus,

$$T^* = (U|T|)^* = |T|U^*$$

ainsi on a

$$|T^*|^2 = TT^* = U|T||T|U^* = U|T|U^*U|T|U^* = (U|T|U^*)^2$$

Alors, pour tout entier naturel n

$$\begin{aligned}(|T^*|^2)^n &= [(U|T|U^*)^2]^n \\ &= (U|T|U^*U|T|U^*)^n \\ &= (U|T|U^*U|T|U^*...U|T|U^*) \\ &= (U|T|^{2n}U^*)\end{aligned}$$

Alors, pour tout polynôme $f_n(t)$ on a

$$f_n(|T^*|^2) = f_n((U|T|U^*)^2) = Uf_n(|T|^2)U^*$$

Car $|T|$ est un opérateur positif, alors $<U|T|U^*x, x> = <|T|U^*x, U^*x> \geq 0$. Alors $U|T|U^*$ est aussi un opérateur positif. Alors on met $f_n(t) \longrightarrow t^{1/2}$, donc $|T^*| = U|T|U^*$. On a $|T^*|^{\frac{n}{m}} = U|T|^{\frac{n}{m}}U^*$ pour tous entiers naturels n, m, soit $\frac{n}{m} \longrightarrow q$.
Alors

$$|T^*|^q = U|T|^qU^*$$

□

Corollaire 1.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, et soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de T, alors*

$$|T|^q = U^*|T^*|^q U\ , \qquad \forall q \geq 0$$

Démonstration. $T^* = U^*|T^*|$ est la décomposition polaire de T^*.

On utilise le théorème précédent pour T^*, on obtient

$$\begin{aligned}|T|^q &= |(T^*)^*|^q \\ &= U^*|T^*|^q(U^*)^* \\ &= U^*|T^*|^q U\end{aligned}$$

□

Chapitre 2

Transformation d'Aluthge

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $T = U|T|$ la décomposition polaire de T. Dans [1] A. Aluthge [1] définit la transformation $\widetilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ dite transformation d'Aluthge.

Un opérateur est dit quasinormal si $T^*TT = TT^*T$, **i.e** $[T^*T, T] = 0$), un opérateur est dit binormal si $[|T|, |T^*|] = 0$, avec $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$.

Dans ce chapitre nous allons prouver d'abord que

$$\widetilde{T} = T \Leftrightarrow \quad T \text{ est quasi normal}$$

En second lieu,on montrera que $\widetilde{T} = VU|\widetilde{T}|$ est la décomposition polaire de $\widetilde{T}$ tel que $|T|^{\frac{1}{2}}|T^*|^{\frac{1}{2}} = V\Big||T|^{\frac{1}{2}}|T^*|^{\frac{1}{2}}\Big|$ est la décomposition polaire.
Finalement, nous montrons que $\widetilde{T} = U|\widetilde{T}|$ si est seulement si T est binormal.

Définition 2.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, et soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de T. La transformation d'Aluthge de T est l'opérateur $\widetilde{T}$ défini par*

$$\widetilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$$

Exemple 2.1. *Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base de $\mathcal{H}$ et soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive. Considé-*

1. A. Aluthge : Professeur au Département de mathématiques à Marshall University, Huntington, Ouest Virginie.

rons le shift uniltéral S à poids, défini comme suit

$$S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

$$\mathrm{e}_n \longmapsto \alpha_n \mathrm{e}_{n+1}$$

Calculons la transformation d'Aluthge

Tout d'abord on calcule U et $|S|$

On a

$$S(\mathrm{e}_n) = \alpha_n \mathrm{e}_{n+1} \ \textbf{\textit{i.e}} \ S(x) = (0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ...)$$

$$\begin{aligned} < Sx, y > &=< (0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ...), (y_1, y_2, y_3, ...) > \\ &= \alpha_1 x_1 y_2 + \alpha_2 x_2 y_3 + ... \\ &=< (x_1, x_2, x_3, ...), (\alpha_1 y_2, \alpha_2 y_3, ...) > \\ &=< x, S^* y > \end{aligned}$$

Alors

$$S^*(y) = (\alpha_1 y_2, \alpha_2 y_3, ...) \quad \textbf{\textit{i.e}} \quad S^*(\mathrm{e}_n) = \alpha_{n-1} \mathrm{e}_{n-1}$$

La représentation matricielle de S est

$$\begin{aligned} a_{ij} &=< Se_j, e_i > \\ &=< \alpha_j e_{j+1}, e_i > \\ &= \begin{cases} 0 & i \neq j+1 \\ \alpha_j & i = j+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & \cdots & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} ; \quad S^* = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Alors

$$|S| = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 & \cdots & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \Rightarrow |S|^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 1/\alpha_2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1/\alpha_3 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1/\alpha_4 & \cdots & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Alors

$$U = S|S|^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

D'ou

$$\widetilde{S} = |S|^{\frac{1}{2}}U|S|^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \sqrt{\alpha_1\alpha_2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \sqrt{\alpha_2\alpha_3} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{\alpha_3\alpha_4} & 0 & \cdots & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Alors

$$\widetilde{S}\mathrm{e}_n = \sqrt{\alpha_n\alpha_{n+1}}\mathrm{e}_{n+1}$$

Exemple 2.2. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et on considère $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La transformation d'Aluthge est

$$\widetilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tel que

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad |T|^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1 Propriétés

Proposition 2.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, Alors*

i) $\|\widetilde{T}\| \leq \|T\|$

ii) $\widetilde{T} = T$ *si et seulement si* T *est quasi-normal* $(T^*T^2 = TT^*T)$

iii) Si $T = U|T|$ *est la décomposition polaire de* T*, alors*

$$\widetilde{T} = VU|\widetilde{T}|$$

est la décomposition polaire de $\widetilde{T}$*, où* V *est l'isométrie partielle vérifiant la décomposition polaire*

$$|T|^{\frac{1}{2}}|T^*|^{\frac{1}{2}} = V\Big||T|^{\frac{1}{2}}|T^*|^{\frac{1}{2}}\Big|$$

Démonstration. i) Soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de T

Si $U \neq 0,\ \ \|U\| = 1$

$$\|T\| = \||T|^2\|^{\frac{1}{2}} = \||T|\| = \||T|^{\frac{1}{2}}\|^2$$

$$\Rightarrow \||T|^{\frac{1}{2}}\| = \|T\|^{\frac{1}{2}}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|\widetilde{T}\| &= \||T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}\| \\ &\leq \||T|^{\frac{1}{2}}\|\|U\|\||T|^{\frac{1}{2}}\| \\ &= \||T|^{\frac{1}{2}}\|^2\|U\| \\ &= \|T\| \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
T = \widetilde{T} &\Leftrightarrow T = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}} \\
&\Leftrightarrow T|T|^{\frac{1}{2}} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T| \\
&\Leftrightarrow T|T|^{\frac{1}{2}} = |T|^{\frac{1}{2}}T \\
&\Leftrightarrow [T, |T|^{\frac{1}{2}}] = 0 \\
&\Leftrightarrow [T, |T|] = 0 \\
&\Leftrightarrow [T, T^*T] = 0 \\
&\Leftrightarrow T \text{ est quasi-normal}
\end{aligned}$$

iii) a)

$$\begin{aligned}
VU|\widetilde{T}| &= VU\Big||T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}\Big| \\
&= VU((|T|^{\frac{1}{2}}U^*|T|^{\frac{1}{2}})(|T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}))^{\frac{1}{2}} \\
&= VU(|T|^{\frac{1}{2}}U^*|T|U|T|^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}U^*U \\
&= V(U|T|^{\frac{1}{2}}U^*|T|U|T|^{\frac{1}{2}}U^*)^{\frac{1}{2}}U \\
&= V(|T^*|^{\frac{1}{2}}|T|^{\frac{1}{2}}|T|^{\frac{1}{2}}|T^*|^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}U \\
&= V\Big||T|^{\frac{1}{2}}|T^*|^{\frac{1}{2}}\Big|U \\
&= |T|^{\frac{1}{2}}|T^*|^{\frac{1}{2}}U \\
&= |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}} \\
&= \widetilde{T}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
x \in \ker VU &\Leftrightarrow VUx = 0 \\
&\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}}|T^*|^{\frac{1}{2}}Ux = 0 \quad (\ker(V) = ker(|T|^{\frac{1}{2}}|T^*|^{\frac{1}{2}}) \\
&\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}x = 0 \\
&\Leftrightarrow \widetilde{T}x = 0 \\
&\Leftrightarrow x \in \ker(\widetilde{T})
\end{aligned}$$

Alors $\ker VU = \ker \widetilde{T}$

c) d'après le précédent, on a

$$\ker(VU)^{\perp} = \ker(|\widetilde{T}|)^{\perp} = \overline{\mathcal{R}|\widetilde{T}|}$$

Alors

$$\forall x \in \ker(VU)^{\perp}, \ \exists\, y_n \subset \mathcal{H}, \ \text{telque} \ \lim_{n\to+\infty} |\widetilde{T}|y_n = x$$

$$\begin{aligned}
\|VUx\| &= \|VU \lim_{n\to+\infty} |\widetilde{T}|y_n\| \\
&= \|\lim_{n\to+\infty} VU|\widetilde{T}|y_n\| \\
&= \|\lim_{n\to+\infty} \widetilde{T}y_n\| \\
&= \lim_{n\to+\infty} \|\widetilde{T}y_n\| \\
&= \lim_{n\to+\infty} \||\widetilde{T}|y_n\| \\
&= \|\lim_{n\to+\infty} |\widetilde{T}|y_n\| \\
&= \|x\|
\end{aligned}$$

Alors VU est une isométrie partielle.

□

Proposition 2.2. *Soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

i) $|T||T^*| = |T^*||T|,$ *T est dit binormal ;*

ii) $\widetilde{T} = U|\widetilde{T}|$.

Démonstration. $(ii \Rightarrow i)$ $\widetilde{T} = U|\widetilde{T}|$, on a

$$\begin{aligned}
|T|^{\frac{1}{2}}|T^*|^{\frac{1}{2}} &= |T|^{\frac{1}{2}}UU^*|T^*|^{\frac{1}{2}}UU^* \\
&= |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}U^* \\
&= \widetilde{T}U^* \\
&= U|\widetilde{T}|U^* \\
&= |T^*|^{\frac{1}{2}}|T|^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Alors T est binormal

$(i \Rightarrow ii)$ T est binormal, alors on a $|T|^{\frac{1}{2}}|T^*|^{\frac{1}{2}} = \left||T^*|^{\frac{1}{2}}|T|^{\frac{1}{2}}\right|$

Donc

$$\begin{aligned}
\widetilde{T} &= |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}} \\
&= |T|^{\frac{1}{2}}|T^*|^{\frac{1}{2}}U = \left||T|^{\frac{1}{2}}|T^*|^{\frac{1}{2}}\right|U \\
&= UU^*(|T^*|^{\frac{1}{2}}|T||T^*|^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}U \\
&= U(|T|^{\frac{1}{2}}U^*|T|U|T|^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \\
&= U|\widetilde{T}|
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.1. $\widetilde{T} = U|\widetilde{T}|$ *dans cette proposition n'est pas une décomposition polaire parce que* $ker(U) \neq ker(\widetilde{T})$.

Exemple 2.3. *Il exits un opérateur binormal* T, *mais* $\widetilde{T}$ *n'est pas binormal.*

Soit

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$T^*T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \Rightarrow |T| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Et

$$TT^* = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |T^*| = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$|T||T^*| = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = |T^*||T|$$

Alors, T est binormal.

Et on a aussi

$$\widetilde{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{15}/2 & -\sqrt{5}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

tel que

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad |T|^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Alors on a

$$\widetilde{T}^*\widetilde{T}.\widetilde{T}\widetilde{T}^* = \begin{pmatrix} 20 & -\sqrt{3} & 0 \\ -5\sqrt{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

Et

$$\widetilde{T}\widetilde{T}^*.\widetilde{T}^*\widetilde{T} = \begin{pmatrix} 20 & -5\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

Alors $\widetilde{T}$ n'est pas binormal.

Proposition 2.3. *Soit $T = U|T|$ la décomposition polaire d'un opérateur binormal T. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $\widetilde{T}$ *est binormal ;*

ii) $[U^2|T|(U^2)^*, |T|] = 0.$

Démonstration. On a

$$T \text{ est binormal si et seulement si } [U|T|U^*, |T|] = 0 \tag{2.1}$$

On obtient

$$[U|T|U^*, U^2|T|(U^2)^*] = 0 \tag{2.2}$$

Car

$$\begin{aligned}
U^2|T|(U^2)^*U|T|U^* &= UU|T|U^*|T|U^* \\
&= U|T|U|T|U^*U^* \quad \text{d'après(2.1)} \\
&= U|T|U^*U^2|T|(U^2)^*
\end{aligned}$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}
|\widetilde{T}|^2|\widetilde{T}^*|^2 &= |T|^{\frac{1}{2}}U^*|T|U|T|^{\frac{1}{2}}|T|^{\frac{1}{2}}U|T|U^*|T|^{\frac{1}{2}} \\
&= U^*U|T|^{\frac{1}{2}}U^*|T|U|T|U^*U^2|T|(U^2)^*U|T|^{\frac{1}{2}}U^*U \\
&= U^*[|T|U^2|T|(U^2)^*]U|T|^2U^*U \quad \text{d'après (2.1) et (2.2)} \\
&= U^*[|T|U^2|T|(U^2)^*]U|T|^2
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Et

$$\begin{aligned}
|\widetilde{T}^*|^2|\widetilde{T}|^2 &= |T|^{\frac{1}{2}}U|T|U^*|T|^{\frac{1}{2}}|T|^{\frac{1}{2}}U^*|T|U|T|^{\frac{1}{2}} \\
&= U^*U|T|^{\frac{1}{2}}U^*U^2|T|(U^2)^*U|T|U^*|T|U|T|^{\frac{1}{2}}U^*U \\
&= U^*[U^2|T|(U^2)^*|T|]U|T|^2U^*U \quad \text{d'après (2.1) et (2.2)} \\
&= U^*[U^2|T|(U^2)^*|T|]U|T|^2
\end{aligned} \tag{2.4}$$

D'après (2.3) et (2.4) on a l'équivalence. □

Proposition 2.4. *Soit T une isométrie partielle de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors sa transformation d'Aluthge est donnée par l'égalité*

$$\widetilde{T} = T^*T^2$$

Démonstration. On a

$$|T|^2 = T^*T = \mathcal{P}|_{\ker(T)^\perp} = \mathcal{P}|_{\overline{\mathcal{R}(T^*)}} = \mathcal{P}|_{\mathcal{R}(T^*)}$$

Puisque, T est une isométrie partielle, $\mathcal{R}(T^*)$ est fermée.

Donc

$$|T|^{\frac{1}{2}} = \mathcal{P}|_{\mathcal{R}(T^*)}$$

On a $\mathcal{H} = \ker T \oplus \ker(T)^{\perp} = \ker T \oplus \mathcal{R}(T^*)$.

Soit $x \in \mathcal{H},\ x = x_1 + x_2$.

Donc

$$Tx = Tx_2 = T(\mathcal{P}x)$$

Alors

$$U|_{\mathcal{R}(T^*)} = T|_{\mathcal{R}(T^*)} \quad \text{et} \quad \ker U = \ker T$$

Alors

$$U = T$$

Alors

$$\begin{aligned}\widetilde{T} &= |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}\\ &= \mathcal{P}|_{\mathcal{R}(T^*)}T\mathcal{P}|_{\mathcal{R}(T^*)}\\ &= \mathcal{P}|_{\mathcal{R}(T^*)}T\\ &= T^*TT\\ &= T^*T^2\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 2.5. $\widetilde{T} = 0$ *si et seulement si* T *est nilpotent d'ordre deux,* ***i.e*** $T^2 = 0$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de de T

Si $\widetilde{T} = 0,\ \ T^2 = U|T|U|T| = U|T|^{\frac{1}{2}}\widetilde{T}|T|^{\frac{1}{2}} = 0$, alors T est nilpotent d'ordre deux.

($\Leftarrow$) Si $T^2 = 0$, alors

$$U|T|U|T| = 0 \Rightarrow |T|U|T| = 0$$

(Car U^*U est la projection orthogonal dans $\overline{\mathcal{R}|T|}$). ce qui implique que $|T|^{\frac{1}{2}}\widetilde{T}|T|^{\frac{1}{2}} = 0$.

Car $\widetilde{T}$ est nulle sur $\ker|T|$, il suffit de montrer qu' elle est aussi nulle sur $\overline{\mathcal{R}|T|}$.

On suppose que $y \in \mathcal{R}(|T|)$ mais $z = \widetilde{T}y \neq 0$, on écrit $y = |T|^{\frac{1}{2}}x$, par conséquent

$$0 = |T|^{\frac{1}{2}}\widetilde{T}|T|^{\frac{1}{2}}x = |T|^{\frac{1}{2}}\widetilde{T}y = |T|^{\frac{1}{2}}z \neq 0$$

Car z est différent de zéro sur $\mathcal{R}(|T|)$. alors on a la contradiction, et par conséquent $\widetilde{T} = 0$ sur $\mathcal{R}(|T|)$ alors sur $\overline{\mathcal{R}(|T|)}$ aussi, alors $\widetilde{T} = 0$. $\square$

2.2 Second transformation d'Aluthge

Définition 2.2. *Soit $\widetilde{T}$ est la transformation d'Aluthge de T et $\widetilde{T} = V|\widetilde{T}|$ sa décomposition polaire, la second transformation d'Aluthge de T est l'opérateur $\widehat{T}$ défini par*

$$\widehat{T} = |\widetilde{T}|^{\frac{1}{2}} V |\widetilde{T}|^{\frac{1}{2}}$$

Exemple 2.4. *Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base de $\mathcal{H}$ et soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive. Considérons le shift uniltéral S à poids, défini comme suit*

$$S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$
$$\mathrm{e}_n \longmapsto \alpha_n \mathrm{e}_{n+1}$$

Et par suite

$$\widetilde{S}\mathrm{e}_n = \sqrt{\alpha_n \alpha_{n+1}} \mathrm{e}_{n+1}$$

Alors la second transformation d'Aluthge

$$\widehat{S}e_n = \sqrt{\sqrt{\alpha_n {\alpha_{n+1}}^2 \alpha_{n+2}} e_{n+1}}$$

Chapitre 3

Classes des opérateurs

Soit $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'espace des opérateurs linéaires bornés. Un opérateur T est dit normal si $T^*T = TT^*$. Un opérateur T est dit p-hyponormal si $(T^*T)^p \geq (TT^*)^p, \ \ 0 < p \leq 1$, en particulier T est dit hyponormal si $p = 1$, et semi-hyponormal si $p = \frac{1}{2}$ [31]. L'inégalité de Löwner Heinz [14] implique qu'un opérateur p-hyponormal est q-hyponormal pour $q \leq p$.

Un opérateur T est dit dominant d'après J.Stamphli et B.L Wadhwa [24] si pour tout complexe $\lambda, \ \ \mathcal{R}(T-\lambda) \subset \mathcal{R}(T-\lambda)^*$. Ceci équivalent à l'existence d'un réel M_λ tel que

$$\|(T-\lambda)^*x\| \leq M_\lambda \|(T-\lambda)x\|, \ \ \forall x \in \mathcal{H}$$

Si $M_\lambda = 1, \ \ T$ est hyponormal. Par conséquent nous avons les inclusions suivantes :

$$(N) \subset (HN) \subset (\mathbb{D})$$

Un opérateur est dit $\log$-hyponormal si T est inversible et

$$\log(T^*T) \geq \log(TT^*)$$

3.1 Classe des opérateurs normaux

Définition 3.1. *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est dit normal si T commute avec son adjoint T^** ***i.e***

$$TT^* = T^*T$$

Exemple 3.1. *Soit le shift bilatéral tel que* $n \in \mathbb{Z}$

$$N : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$
$$\mathrm{e}_n \longmapsto \mathrm{e}_{n+1}$$

où $(\mathrm{e}_n)_n$ *est une base orthonormale de* $\mathcal{H}$
On a

$$N^* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$
$$\mathrm{e}_n \longmapsto \mathrm{e}_{n-1}$$

Alors

$$N^*N = NN^* = \mathrm{e}_n$$

Alors N *est un opérateur normal.*

Proposition 3.1. *Si* T *est normal, alors*

$$UP = PU \qquad \textit{tel que} \qquad P = |T|$$

Démonstration. On a $TT^* = UP^2U^*$ et par définition de P, $T^*T = P^2$. Donc si T est normal

$$UP^2U^* = P^2 \quad \text{et donc} \quad UP^2U^*U = P^2U$$

Par ailleurs, comme U^*U est la projection orthogonale sur

$$\ker(T)^{\perp} = \ker(P)^{\perp}$$

L'opérateur $I - U^*U$ est la projection orthogonale sur $\ker(P)$ et donc en particulier

$$P(I - U^*U) = 0$$

D'où $PU^*U = P$ et donc finalement

$$UP^2 = P^2U$$

Donc U commute avec P^2. Il commute donc avec $(P^2)^{\frac{1}{2}} = P$ d'après le théorème (1.4)

□

Proposition 3.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, alors T est normal si et seulement s'il existe $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auto adjoints, tel que $T_1T_2 = T_2T_1$ et $T = T_1 + iT_2$*

Démonstration.

$$\begin{aligned} T^*T - TT^* &= (T_1 - iT_2)(T_1 + iT_2) - (T_1 + iT_2)(T_1 - iT_2) \\ &= 2i(T_1T_2 - T_2T_1) \end{aligned}$$

Donc, $T^*T = TT^* \Leftrightarrow T_1T_2 = T_2T_1$ □

Proposition 3.3. *$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est normal si et seulement si $\|Tx\| = \|T^*x\|, \ \forall x \in \mathcal{H}$.*

Démonstration. $\forall x \in \mathcal{H}, \ \|Tx\|^2 =< x, T^*Tx >=< x, TT^*x >= \|T^*x\|^2$

Réciproquement

Si $\forall x \in \mathcal{H}, \ \|Tx\| = \|T^*x\|$ alors $\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2$

On a

$$\|T(x + y)\|^2 = \|T^*(x + y)\|^2 \text{ et } \|T(x + iy)\|^2 = \|T^*(x + iy)\|^2,$$

Ce qui donne

$$\mathcal{R}e < Tx, Ty >= \mathcal{R}e < T^*x, T^*y >$$

$$\mathcal{I}m < Tx, Ty >= \mathcal{I}m < T^*x, T^*y >$$

Donc

$$\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2 \quad < Tx, Ty >=< T^*x, T^*y >$$

Ainsi, pour tout $y \in \mathcal{H}$, on a

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad < x, T^*Ty - TT^*y >= 0$$

Et donc

$$T^*T = TT^*$$

□

Proposition 3.4. *Si T est normal, alors $\|T^n\| = \|T\|^n$*

Démonstration. On a $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ est évident, donc il suffit montrer que

$$\|T\|^n \leq \|T^n\| \tag{3.1}$$

On a

$$\begin{aligned}
\|T^k u\|^2 &=< T^k u, T^k u > \\
&=< T^* T^k u, T^{k-1} u > \\
&\leq \|T^* T^k u\| \|T^{k-1} u\| \\
&= \|T^{k+1} u\| \|T^{k-1} u\|
\end{aligned}$$

Alors

$$\|T^k\|^2 \leq \|T^{k+1}\| \|T^{k-1}\| \tag{3.2}$$

l'égalité (3.1) est vérifiée pour $n = 1$, On suppose qu'elle est vérifiée pour tout $n \leq k$, donc d'après (3.2) on a

$$\|T\|^{2k} \leq \|T^{k+1}\| \|T\|^{k-1}$$

Ce qui donne (3.1) pour $n = k + 1$. Alors l'inégalité (3.1) est vérifiée pour tout n. □

3.2 Classe des opérateurs p-hyponormaux

Définition 3.2. *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est dit p-hyponormal si*

$$(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$$

Autrement dit, l'opérateur $(T^*T)^p - (TT^*)^p$ est positif, Si $p = 1$ on dit que T est hyponormal, ***i.e***

$$\|Tx\| \geq \|T^*x\| \ , \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

Exemple 3.2. *Soit l'opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ défini par*

$$T(e_n) = a^{2n} e_{n+1} \quad \textit{tel que} \quad a \geq 1$$

Cet opérateur est hyponormal, en effet

On a

$$T^*(e_n) = a^{2(n-1)}e_{n-1}$$

Par conséquent

$$T^*T(e_n) = a^{4n}e_n \quad \text{et} \quad TT^*e_n = a^{4(n-1)}e_n$$

Alors

$$(T^*T - TT^*)e_n = a^{4n}(1 - a^{-4})e_n \geq 0$$

Exemple 3.3. *Soit l'opérateur* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ T_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & I & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & I & 0 & \cdots & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

On a

$$TT^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & T_1^2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & I & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & I & \cdots & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} T_1^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & I & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & I & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & I & \cdots & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = T^*T$$

Alors, T est hyponormal sous la condition $(I - T_1^2) \geq 0$

Théorème 3.1. *Soit $T = U|T|$ est p-hyponormal, $\dfrac{1}{2} \leq p < 1$ et U est unitaire. Alors l'opérateur $\widetilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ est hyponormal.*

Lemme 3.1. *Soient $A, B, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, sachant que $\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{H}$, alors on a la relation*

$$A \geq B \Leftrightarrow T^*AT \geq T^*BT \tag{3.3}$$

Démonstration. Soit $A \geq B$, alors on a la relation suivante

$$< T^*ATx, x >=< ATx, Tx >$$

Pour $y = Tx \in \mathcal{H}$, on a

$$< Ay, y >\geq< By, y >=< BTx, Tx >=< T^*BTx, x >\Rightarrow T^*AT \geq T^*BT$$

Réciproquement, soit $T^*AT \geq T^*BT$, car $\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{H}$, on a

$$< T^*ATx, x >\geq< T^*BTx, x >\Rightarrow< ATx, Tx >\geq< BTx, Tx >$$

Pour y=Tx,

$$< Ay, y >\geq< By, y >\Rightarrow A \geq B$$

□

Démonstration. Comme tout opérateur p-hyponormal $(\dfrac{1}{2} \leq p < 1)$ est semi-hyponormal, on a $(T^*T)^{\frac{1}{2}} \geq (TT^*)^{\frac{1}{2}}$ où, d'après le lemme (3.1), **i.e**

$$U^*|T|U \geq |T| \geq U|T|U^* \tag{3.4}$$

Donc, et d'après (3.4) on a

$$(\widetilde{T}^*\widetilde{T}) - (\widetilde{T}\widetilde{T}^*) = |T|^{\frac{1}{2}}(U^*|T|U - U|T|U^*)|T|^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

Alors, $\widetilde{T}$ est hyponormal. □

Théorème 3.2. *Soit $T = U|T|$ est p-hyponormal, $0 < p < \frac{1}{2}$ et U est unitaire. Alors l'opérateur $\widetilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ est $(p + \frac{1}{2})$-hyponormal.*

Démonstration. Comme T est p-hyponormal on a

$$(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$$

i.e

$$U^*|T|^{2p}U \geq |T|^{2p} \geq U|T|^{2p}U^* \tag{3.5}$$

Soit

$$A = U^*|T|^{2p}U, \;\; B = |T|^{2p}, \;\; C = U|T|^{2p}U^* \tag{3.6}$$

Donc, d'après (1.1)

$$\begin{aligned}(\widetilde{T}^*\widetilde{T})^{p+\frac{1}{2}} &= (|T|^{\frac{1}{2}}U^*|T|U|T|^{\frac{1}{2}})^{p+\frac{1}{2}} \\ &= (B^{\frac{1}{4p}}A^{\frac{1}{2p}}B^{\frac{1}{4p}})^{p+\frac{1}{2}} \\ &\geq B^{(\frac{1}{2p}+\frac{2}{4p})(p+\frac{1}{2})} = B^{1+\frac{1}{2p}}\end{aligned}$$

D'après (1.2)

$$\begin{aligned}(\widetilde{T}\widetilde{T}^*)^{(p+\frac{1}{2})} &= (|T|^{\frac{1}{2}}U|T|U^*|T|^{\frac{1}{2}})^{(p+\frac{1}{2})} \\ &= (B^{\frac{1}{4p}}C^{\frac{1}{2p}}B^{\frac{1}{4p}})^{(p+\frac{1}{2})} \\ &\leq B^{(\frac{1}{2p}+\frac{2}{4p})(p+\frac{1}{2})} = B^{1+\frac{1}{2p}}\end{aligned}$$

Alors, $(\widetilde{T}^*\widetilde{T})^{(p+\frac{1}{2})} \geq (\widetilde{T}\widetilde{T}^*)^{(p+\frac{1}{2})}$ et $\widetilde{T}$ est $(p+\frac{1}{2})$-hyponormal. □

Corollaire 3.1. *Si T est un opérateur $p-$hyponormal, $0 < p < 1$, Alors l'opérateur*

$$\hat{T} = |\widetilde{T}|^{\frac{1}{2}}\widetilde{U}|\widetilde{T}|^{\frac{1}{2}}$$

est hyponormal, tel que $\widetilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ et $\widetilde{T} = \widetilde{U}|\widetilde{T}|$ la décomposition polaire de $\widetilde{T}$.

Décomposition polaire de l'opérateur $\widetilde{T}$:

Lemme 3.2. *Soient H et K deux opérateurs positifs, et on suppose que H^{-1} existe. Alors la condition nécessaire et suffisante de l'existence de l'opérateur positif S tel que*

$$SHS = K$$

est

$$(H^{\frac{1}{2}}KH^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \leq aH \tag{3.7}$$

$\forall a > 0$. *Si cette condition est satisfaite, alors $S = H^{-\frac{1}{2}}(H^{\frac{1}{2}}KH^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{1}{2}}$*

Si $T = U|T|$ est p-hyponormal, on a

$$U^*|T|^{2p}U \geq |T|^{2p} \geq U|T|^{2p}U^* \qquad \text{d'après (3.5)}$$

Où, équivalent à $A \geq B \geq C$ d'après (3.6)
Soit $\widetilde{T} = \widetilde{U}|\widetilde{T}|$ la décomposition polaire de $\widetilde{T}$. Alors

$$|\widetilde{T}| = (|T|^{\frac{1}{2}}U^*|T|U|T|^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \tag{3.8}$$

Soit $H = U^*|T|U$ et $K = |T|$. Alors

$$\begin{aligned}(H^{\frac{1}{2}}KH^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} &= (A^{\frac{1}{4p}}B^{\frac{1}{2p}}A^{\frac{1}{4p}})^{\frac{1}{2}}\\ &\leq A^{(\frac{1}{2p}+\frac{2}{4p})\frac{1}{2}}\\ &= A^{\frac{1}{2p}} = H\end{aligned}$$

On a d'après les lemmes (1.4 et 3.1), il existe un opérateur positif S tel que $SHS = K$ **i.e** $SU^*|T|US = |T|$. Car H et K sont inversibles, $S = H^{-\frac{1}{2}}(H^{\frac{1}{2}}KH^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{1}{2}}$ est aussi inversible. Donc d'après (3.8), on a

$$|\widetilde{T}| = (|T|^{\frac{1}{2}}S^{-1}|T|S^{-1}|T|^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = |T|^{\frac{1}{2}}S^{-1}|T|^{\frac{1}{2}}$$

Pour obtenir $\widetilde{U}$ dans la décomposition polaire $\widetilde{T} = \widetilde{U}|\widetilde{T}|$, on utilise

$$|T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}} = \widetilde{T} = \widetilde{U}|T|^{\frac{1}{2}}S^{-1}|T|^{\frac{1}{2}}$$

Alors

$$\widetilde{U} = |T|^{\frac{1}{2}}US|T|^{-\frac{1}{2}}$$

Espaces propres de U :

Théorème 3.3. *Soit $T = U|T|$ un opérateur $p-$ hyponormal, $0 < p < 1$, tel que U est unitaire. Alors les espaces propres de U réduisent T.*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas $p = \frac{1}{2^n}$. On a

$$Q_n = (T^*T)^{\frac{1}{2^n}} - (TT^*)^{\frac{1}{2^n}} = |T|^{\frac{1}{2^{n-1}}} - U|T|^{\frac{1}{2^{n-1}}}U^* \geq 0$$

Soit $M_\lambda = \{f \in \mathcal{H} | Uf = \lambda f, |\lambda| = 1\}$ l'espace propre de U correspondant à le valeur propre λ. Puisque U est unitaire, on a $U^* f = \overline{\lambda} f$ pour tout $f \in M_\lambda$, alors

$$\begin{aligned} < Q_n f, f > &=< |T|^{\frac{1}{2^{n-1}}} f, f > - < U|T|^{\frac{1}{2^{n-1}}} U^* f, f > \\ &=< |T|^{\frac{1}{2^{n-1}}} f, f > - < |T|^{\frac{1}{2^{n-1}}} \overline{\lambda} f, U^* f >= 0 \end{aligned}$$

Car $Q_n \geq 0$, on a $Q_n f = 0$. c-à-d $U|T|^{\frac{1}{2^{n-1}}} U^* f = |T|^{\frac{1}{2^{n-1}}} f$ **i.e** $U|T|^{\frac{1}{2^{n-1}}} f = \lambda |T|^{\frac{1}{2^{n-1}}} f$, donc $|T|^{\frac{1}{2^{n-1}}} f \in M_\lambda$. Et d'autre part, M_λ est invariant à $|T|^{\frac{1}{2^{n-1}}}$, et donc à $|T|$. Alors M_λ réduit $|T|$ et donc il réduit T. □

Proposition 3.5. *Soit $T = U|T|$ est semi-hyponormal, alors $V = U|T|^2$ est $\frac{1}{4}$-hyponormal.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} (V^*V)^{\frac{1}{4}} - (VV^*)^{\frac{1}{4}} &= (|T|^2 U^* U |T|^2)^{\frac{1}{4}} - (U|T|^2 |T|^2 U^*)^{\frac{1}{4}} \\ &= (|T|^4)^{\frac{1}{4}} - (U|T|^4 U^*)^{\frac{1}{4}} \\ &= |T| - |T^*| \geq 0 \quad (\text{car } T \text{ est } \frac{1}{2}\text{-hyponormal}) \end{aligned}$$

□

Théorème 3.4 (L'inégalité de Löuner Heinz)**.** *[14] Soit $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $A \geq B \geq 0$, alors $A^\alpha \geq B^\alpha \geq 0, \forall \alpha \in [0, 1]$.*

Proposition 3.6. *Un opérateur p-hyponormal est q-hyponormal pour $(p \geq q)$*

Démonstration. Car,

$$(T^*T)^q = (|T|^2)^q = ((|T|^2)^p)^{\frac{q}{p}}$$

Et

$$(TT^*)^q = (|T^*|^2)^q = ((|T^*|^2)^p)^{\frac{q}{p}}$$

Comme T est p-hyponormal on a

$$(|T|^2)^p \geq (|T^*|^2)^p$$

Et d'après le théorème (3.4)

$$((|T|^2)^p)^\alpha \geq ((|T|^2)^p)^\alpha \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

Et comme

$$0 < q \leq p \Rightarrow 0 < \frac{q}{p} < 1$$

Alors la condition de α dans le théorème (l'inégalité de Löuner Heinz) est satisfaite. Alors T est q-hyponormal. $\square$

L'inverse n'est pas vraie. En effet, soit un opérateur $V = U|T|^2$ est $\frac{1}{4}$-hyponormal qui n'est pas $\frac{1}{2}$-hyponormal.

$$\begin{aligned}(V^*V)^{\frac{1}{2}} - (VV^*)^{\frac{1}{2}} &= (|T|^2U^*U|T|^2)^{\frac{1}{2}} - (U|T|^2|T|^2U^*)^{\frac{1}{2}} \\ &= |T|^2 - |T^*|^2 \\ &= T^*T - TT^*\end{aligned}$$

Alors V n'est pas $\frac{1}{2}$-hyponormal.

Théorème 3.5. *Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est p-hyponormal inversible, alors T^{-1} est p-hyponormal*

Démonstration. Comme $(T^*T)^p - (TT^*)^p \geq 0$, on a

$$(T^*T)^{-\frac{p}{2}}((T^*T)^p - (TT^*)^p)(T^*T)^{-\frac{p}{2}} \geq 0$$

Qui est équivalent à

$$I \geq (T^*T)^{-\frac{p}{2}}(TT^*)^p(T^*T)^{-\frac{p}{2}}$$

On sait que si $A \geq I$ alors $A^{-1} \leq I$, donc

$$0 \leq (T^*T)^{\frac{p}{2}}(TT^*)^{-p}(T^*T)^{\frac{p}{2}} - I = (T^*T)^{\frac{p}{2}}((TT^*)^{-p} - (T^*T)^{-p})(T^*T)^{\frac{p}{2}}$$

Ce qui est équivalent à

$$0 \leq (TT^*)^{-p} - (T^*T)^{-p} = ((T^{-1})^*T^{-1})^p - (T^{-1}(T^{-1})^*)^p$$

Alors, T^{-1} est p-hyponormal. $\square$

Théorème 3.6. *[26] Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur p-hyponormal, $0 < p \leq 1$, avec $T = U|T|$. Si $\widetilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ est normal, alors $|T|U = U|T|$ et T est normal.*

Théorème 3.7. *[22] Si T est hyponormal, et M invariant pour T, alors $T|_M$ est hyponormal.*

Théorème 3.8. *[22] Soit T est hyponormal, et M invariant pour T où $T|_M$ est normal, alors M réduit T.*

3.3 Classe des opérateurs dominants

Définition 3.3. *$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est dit dominant si pour tout $\lambda \in \sigma(T) \subset \mathbb{C}$*

$$\mathcal{R}(T-\lambda) \subset \mathcal{R}(T-\lambda)^*$$

i.e, $\forall x \in \mathcal{H},\ \forall \lambda \in \sigma(T) \subset \mathbb{C}, \exists M_\lambda > 0$ *tel que :*

$$\|(T-\lambda)^* x\| \leq M_\lambda \|(T-\lambda)x\|$$

Exemple 3.4. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, et $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}$, telle que*

$$T_{e_n} = 2^{-|n|}e_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

1. *Montrons que T n'est pas normal*

   On a

   $$T^* e_n = 2^{-|n-1|}e_{n-1}$$

   Alors

   $$T^*T(e_n) = 2^{-2|n|}e_n \neq 2^{-2|n-1|}e_n = TT^*(e_n)$$

   Alors T n'est pas normal.

2. *Montrons que T est compact : Comme l'opérateur T est défini le shift à poids, alors*

   $$\lim_{n\longrightarrow+\infty} 2^{-|n|} = 0$$

   Donc T est compact d'où : $\sigma(T) = 0$

3. *Montrons que l'opérateur T est dominant*

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \|T^*e_n\| \leq 2\|Te_n\| \leq 4\|T^*e_n\|$$

d'où : T est dominant.

Théorème 3.9. *[18] Soit T un opérateur dominant et soit M un sous-espace invariant de T. Alors $T|_M$ est un opérateur dominant.*

Théorème 3.10. *[18] Soit T un opérateur dominant et soit M un sous-espace invariant de T tel que $T|_M$ soit normal. Alors M réduit T.*

3.4 Classe des opérateurs log-hyponormaux

Définition 3.4. *Soit T un opérateur dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. On dit que T est* log*-hyponormal si T est inversible et satisfait l'inégalité suivante*

$$\log(A^*A) \geq \log(AA^*)$$

Rappelons que pour tout opérateur A inversible et positif , nous avons

$$\log A = \lim_{p \to 0^+} \frac{A^p - I}{p}, \quad (p > 0)$$

Exemple 3.5. *Soient $\mathcal{H} = \oplus_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{C}^2$ et $x = (......, x_{-1}, x_0, x_1, ...) \in \mathcal{H}$ avec $\|x\|^2 = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \|x_j\|^2 < \infty$. Soient A, B deux matrices positives telles que*

$$\log A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad , \quad \log B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On défini $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ avec $(Px)_n = P_n x_n$ et

$$P_n = \begin{cases} B & \text{pour } n \leq 0 \\ A & \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

Soit U le shift unitaire $(Ux)_n = x_{n-1}$ et $T = UP$. Alors

$$((T^*T)x)_n = P_n^2 x_n \quad , \quad ((TT^*)x)_n = P_{n-1}^2 x_n$$

Et par conséquent

$$[(\log(T^*T) - \log(TT^*))x]_n = \begin{cases} 0 & si\ n \neq 1 \\ (2\log A - 2\log B)x_1 & si\ n = 1 \end{cases}$$

Alors T est log*-hyponormal.*

Théorème 3.11. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur* log*-hyponormal. Alors T^{-1} est aussi* log*-hyponormal.*

Démonstration. Comme T est log-hyponormal, on a

$$\begin{aligned} \log((T^{-1})^*T^{-1}) &= \log(TT^*)^{-1} \\ &= -\log(TT^*) \\ &\geq -\log(T^*T) = \log(T^*T)^{-1} = \log(T^{-1}(T^{-1})^*) \end{aligned}$$

□

Théorème 3.12. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Si T est un opérateur* log*-hyponormal avec une décomposition polaire $T = U|T|$. Alors sa transformation d'Aluthge $\widetilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ est semi hyponormal.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} (\widetilde{T}^*\widetilde{T})^{\frac{1}{2}} &= (|T|^{\frac{1}{2}}U^*|T|U|T|^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \\ &= U^*(U|T|^{\frac{1}{2}}U^*|T|U|T|^{\frac{1}{2}}U^*)^{\frac{1}{2}}U \\ &= U^*(|T^*|^{\frac{1}{2}}|T||T^*|^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}U \\ &\geq U^*|T^*|U = |T| \end{aligned}$$

Alors

$$(\widetilde{T}^*\widetilde{T})^{\frac{1}{2}} \geq |T|$$

Et d'autre part

$$\begin{aligned} (\widetilde{T}\widetilde{T}^*)^{\frac{1}{2}} &= (|T|^{\frac{1}{2}}U|T|U^*|T|^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \\ &= (|T|^{\frac{1}{2}}|T^*||T|^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \leq |T| \end{aligned}$$

Donc

$$(\widetilde{T}^*\widetilde{T})^{\frac{1}{2}} \geq |T| \geq (\widetilde{T}\widetilde{T}^*)^{\frac{1}{2}}$$

Alors $\widetilde{T}$ est semi-hyponormal. $\square$

Théorème 3.13. *[13] Soit T un opérateur* log-*hyponormal et M invariant pour T. Si $T|_M$ inversible, alors $T|_M$ est* log-*hyponormal.*

Théorème 3.14. *[28] Si A est log-hyponormal et M un sous espace invariant de A pour laquelle $A\,|_M$ est normal. Alors M réduit A.*

Chapitre 4

Théorème de Fuglede-Putnam

Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espace d'Hilbert complexes séparables de dimension infinie. Rappelons que le théorème de Fuglede-Putnam [20] assure que si A et B sont des opérateurs normaux et

$$AX = XB$$

Pour certain $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, alors

$$A^*X = XB^*$$

Ce théorème a été généralisé par plusieurs auteurs notamment K. Tanahashi et A. Uchiyama pour les opérateurs p-hyponormaux et log-hyponormaux.
Dans ce chapitre on prouve que le théorème de Fuglede-Putnam reste valable pour A un opérateur dominant et B^* p-hyponormal.

4.1 Le théorème de Fuglede-Putnam pour les opérateurs p-hyponormal et dominant

Définition 4.1. *On dit que la paire (A,B) vérifie le théorème de Fuglede-Putnam. Si AX = XB pour un certain $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, alors*

$$A^*X = XB^*$$

Théorème 4.1. *[9] Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ et $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *(A, B) satisfait la propriété de (FP) ;*

ii) *Si $AC = CB$ pour tout $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, alors $\overline{\mathcal{R}(C)}$ réduit A, $\ker(C)^{\perp}$ réduit B. $A|_{\overline{\mathcal{R}(\mathcal{C})}}$ et $B|_{\ker(C)^{\perp}}$ sont des opérateurs normaux.*

Théorème 4.2. *[7] Soient $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ et $B^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ sont p-hyponormaux. Si*

$$AX = XB$$

pour certain $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, alors

$$A^*X = XB^*$$

$\overline{\mathcal{R}(X)}$ réduit A, $ker(X)^{\perp}$ réduit B et A $|_{\overline{\mathcal{R}(X)}}$, B $|_{Ker(X)^{\perp}}$ sont des opérateurs normaux.

Théorème 4.3. *[9] Si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ est dominant et $B^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ hyponormal, alors la paire (A ;B) vérifie le théorème de Fuglede-Putnam.*

Théorème 4.4. *[1] Si $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ est p-hyponormal et $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ dominant tels que*

$$XA = BX$$

pour tout $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, alors

$$XA^* = B^*X$$

.

Démonstration. **Cas 1 :**$(1/2 < p \leq 1)$
Supposons que

$$XA = BX$$

pour certain $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Comme $\overline{\mathcal{R}(X)}$ est invariant pour B et $ker(X)^{\perp}$ est invariant pour A^*, nous considérons les décompositions suivantes :

$$H_1 = ker(X)^{\perp} \oplus ker(X) \quad , \quad H_2 = \overline{\mathcal{R}(X)} \oplus \overline{\mathcal{R}(X)}^{\perp}$$

Alors

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : ker(X)^{\perp} \oplus ker(X) \longrightarrow \overline{\mathcal{R}(X)} \oplus \overline{\mathcal{R}(X)}^{\perp}$$

De

$$XA = BX$$

On obtient

$$X_1 A_1 = B_1 X_1 \tag{4.1}$$

Soit $A_1 = U|A_1|$ la décomposition polaire de A_1. Étant donné que

$$U|A_1| = |A_1{}^*|U$$

l'égalité (4.1) prend la forme

$$X_1 |A_1{}^*| U = B_1 X_1 \tag{4.2}$$

Multipliant les deux côés de (4.2) a $|A_1{}^*|^{1/2}$, on obtient

$$(X_1 |A_1{}^*|^{1/2}) |A_1{}^*|^{1/2} U |A_1{}^*|^{1/2} = B_1 X_1 |A_1{}^*|^{1/2}$$

Ainsi, la transformation d'Aluthge

$$\widetilde{A_1{}^*} = |A_1{}^*|^{1/2} U^* |A_1{}^*|^{1/2}$$

est hyponormal d'après le théorème 3.1, et B_1 est dominant.

D'où la paire $((\widetilde{A_1{}^*})^*, B_1)$ satisfait le théorème de Fuglede-Putnam d'après le théorème (4.3). Par conséquent

$$B_1 \mid_{\overline{\mathcal{R}(X_1|A_1{}^*|^{1/2})}} \quad \text{et} \quad \widetilde{A_1{}^*} \mid_{Ker(X_1|A_1{}^*|^{1/2})^{\perp}}$$

Sont des opérateurs normaux d'après le théorème 4.1.

Comme X_1 est injectif à image dense et $|A_1{}^*|^{1/2}$ est injectif ainsi

$$\overline{\mathcal{R}(X_1|A_1{}^*|^{1/2})} = \overline{\mathcal{R}(X_1)} = \overline{\mathcal{R}(X)}$$

et

$$Ker(X_1|A_1{}^*|^{1/2}) = Ker(X_1) = Ker(X)$$

Par conséquent $\widetilde{A_1}^*$ est normal d'après [23]. A_1 est donc normal d'après le théorème 3.6.

Puisque B_1 est dominant d'après le théorème 3.9 et la restriction B_1 est normal, $\overline{R(X)}$ réduit B d'après le théorème 3.10, de même, étant donné que$A_1{}^*$ et p-hyponormal et la restriction $A_1{}^*$ est normal, $ker(X)^\perp$ réduit A^* d'après le théorème 3.8. Par conséquent le paire (A_1, B_1) satisfait le théorème de Fuglede-Putnam,

$$X_1A_1{}^* = B_1{}^*X_1$$

D'où

$$XA^* = B^*X$$

Cas 2 :$(0 < p \leq 1/2)$

Il suffit de prendre $p' = p + 1/2$, où $p' \in [1/2, 1]$. Il revient que $A_1{}^*$ est p'-hyponormal et on continue la preuve par la même manière que la premièe partie. $\square$

Corollaire 4.1. *$A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est normal si et seulement si A est dominant et A^* est $P-$hyponormal.*

Bibliographie

[1] **A. Nasli Bakir and S. Mecheri**. *Another Version of Fuglede-Putnam Theorem*. Georgian Mathematical Journal Volume 16 (2009), **Number 3** , 427–433.

[2] **A. Aluthge**. *p-hyponormal opérators for $0 < p < 1$*. Integ. Equa. Oper. Theo, **13** (1990), 307-315.

[3] **J. Charles, M. Mbekhta, H. Queffélec**. *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs*. Dunod, Paris, 2010.

[4] **J.B. Conway**. *A Course in Functional Analysis, **Second édition***. Springer-Verlag New York, Inc,1990 .

[5] **B. K. Driver**. *Analysis Tools with Applications*. Springer, Berlin Heidelberg, New York, Paris, London, Milan, Tokyo. June 2003.

[6] **B.P. Duggal**. *On majorization, factorization and range inclusion of operators on Hilbert sapce*. Proc. Amer. Math. Soc, **17**(1996), 413-415.

[7] **B.P. Duggal**. *Quasi-similar p-hyponormal operators*. Integral Equations Operator Theory, **26**(1996), 338-345.

[8] **B.P. Duggal**. *On dominant operators. Arch. Math, **46** (1986), 353-359.*

*[9] **B.P. Duggal**.* On intertwining operators*. Mh. Math, **106**(1988), 139-148.*

*[10] **M.Fujii**.* An application of Aluthge transform to Putnam inequality for log-hyponormal operators. *preprint.*

*[11] **T. Furuta**.* $A \geq B \geq 0$ assures $(B^r\ A^p\ B^r)^{\frac{1}{q}} \geq (B^{\frac{p+2r}{q}})$ and $A^{\frac{p+2r}{q}} \geq (A^r\ B^p\ A^r)^{\frac{1}{q}}$ *for* $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ with $(1+2r)\,q \geq p+2r$.. *Proc. Amer. Math. Soc, **101**(1987), 85-88.*

[12] ***T. Furuta***. Invitation to linear opérators, Taylor and francis. *London, New York, 2002.*

[13] ***I.H. Jeon, K. Tanahashi, A. Uchiyama*** . On quasisimilarity for log-hyponormal operators. *Glasgow Math.J, **46**(2004), 169-176.*

[14] ***E. Heinz***. Beitrage zur Strungstheorie der Spektralzerlegung. *Math. Annalen, **123**(1951),629-638.*

[15] ***M. Ito, T. Yamazaki and M. Yanagida***. On the polar decomposition of the Aluthge transformation and related results. *J. Oper. Ther, **51**(2004), 303-319.*

[16] ***G. Lacombe, P. Massât***. Analyse fonctionnelle exercice corrigé. *Dunod, Paris, 1999.*

[17] ***S. Lipschutz, M. Lipson***. Algèbre linéaire, **3**^{ème} **Edition**. *Dunod, Paris, 2003 .*

[18] ***F. Lombarkia***. Thèse de doctorat. *Univ. Batna 2010.*

[19] ***M. CHO, I.H. JEON, J.I. LEE***. Spectral and structural properties of log-hyponormal operators. *Glasgow Math. J, **42**(2000), 345-350*

[20] ***C.R. Putnam***. On normal operators in Hilbert space. *Amer. J. Math, **73**(1951), 357–362.*

[21] ***M. Schechter***. Principles of functional analysis. *The American Mather1atical Society, 2002.*

[22] ***J.G. Stampfli***. Hyponormal operators. *Pacific J. Math, **12**(1962), 1453-1458.*

[23] ***J.G. Stampfli, B.L. Wadhwa***. An Asymmetric Putnam-Fuglede Theorem for Dominant Operators. *Indiana University Mathematics Journal, **25**(1976), 359-365.*

[24] ***J.G. Stampfli, B.L. Wadhwa***. On Dominant Operators. *Monatshefte für Mathematik, **84**(1977),143-153.*

[25] ***Stephan Ramon Garcia***. Aluthge Transforms of Complex Symmetric operators. *Integr. equ. oper. theory,**60**(2008), 357–367.*

[26] ***H. Tadashi***. A note on p-hyponormal operators. *Proc. Amer. Math. Soc, **125**(1997), 221-230.*

[27] ***K. Tanahashi***. On log-hyponormal operators. *Integ. Equa. Oper. Theo,* ***34****(1999), 364-372.*

[28] ***A. Uchiyama, K. Tanahashi***. Fuglede-Putnam's theorem for p-hyponormal or log-hyponormal operators. *Glaskow Math.J,* ***44****(2002), 397-410.*

[29] ***J. Verliat***. Thèse de doctorat. *Univ. Claude Bernard - Lyon 1, 2010.*

[30] ***T. Yoshino***. Remark on the generalized Putnam-Fuglede theorem. *Proc. Amer. Math. Soc,* ***95****(1985), 571-572.*

[31] ***D. Xia***. Spectral theory of hyponormal operators. *Birkhauser Verlag, Boston, London, 1983.*