

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Hassiba Ben Bouali – Chlef

Faculté d'Architecture et de Génie Civil

Département de Génie civil

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة حسيبة بن بوعلي - الشلف

كلية الهندسة المعمارية و المدنية

قسم الهندسة المدنية



THESE

De Doctorat 3^{ème} Cycle (LMD)

Filière : Génie Civil

Spécialité : Géomatériaux

Présentée par :

Benferhat Rabia

Thème :

Analyse et modélisation de l'influence du cisaillement transverse sur le comportement mécanique des plaques en matériaux à gradient de propriétés

Soutenue publiquement le : 02 Février 2017

Devant le jury composé de :

EZZIANE Karim	Professeur	UHB Chlef	Président
GHRICI Mohamed	Professeur	UHB Chlef	Examineur
YEGHNEM Redha	MCA	UMT Saïda	Examineur
ZIDOUR Mohamed	MCA	UIK Tiaret	Examineur
HASSAINE DAOUADJI Tahar	MCA	UIK Tiaret	Rapporteur
SAID MANSOUR Mohamed	MCB	UHB Chlef	Co-Rapporteur

REMERCIEMENTS

J'exprime mes profonds remerciements à Monsieur **Hassaine Daouadji Tahar**, Maître de conférence à l'université de Tiaret, encadreur de cette thèse, pour son aide précieuse, sa confiance, ses encouragements, sa patience et son soutien favorable pour l'aboutissement de ce travail.

Je désire exprimer toute ma gratitude à mon co-directeur de thèse Monsieur **Said Mansour Mohamed** Maître de conférence à l'Université de Chlef pour la confiance qu'il m'a témoignée et pour son soutien constant.

Je tiens à remercier profondément les membres de jury :

- Monsieur **Ezziane Karim**, Professeur à l'Université de Chlef, d'avoir accepté d'examiner ce travail et de m'avoir honoré de présider le jury.
- Monsieur **Ghrici Mohamed**, Professeur à l'Université de Chlef et directeur du Laboratoire du Géomatériaux, qui m'a fait l'honneur d'examiner ce travail et je lui en suis profondément reconnaissant.
- Monsieur **Yeghnem Redha**, Maître de conférence à l'Université de Saida, qui a accepté d'être examinateur. Je le remercie très sincèrement.
- Monsieur **Zidour Mohamed**, Maître de conférence à l'Université de Tiaret, qui a accepté lui aussi d'examiner cette thèse. Je tiens à le remercier pour son extrême gentillesse.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance et mes sincères remerciements à Monsieur **Hadji Lazreg** maître de conférence à l'Université de Tiaret pour toute l'aide qu'il m'a apportée et sa disponibilité tout au long de ce travail.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers l'ensemble de mes collègues du Laboratoire du Géomatériaux.

Je tiens à remercier ma famille, pour le soutien continu qu'elle m'a apporté tout aux longs de ces années d'études.

RÉSUMÉ

L'effet de porosité sur la flexion et la vibration libre des plaques en matériaux à gradient de propriétés simplement appuyées reposant sur fondation de type Winkler-Pasternak est étudié analytiquement dans le présent travail. La règle modifiée du mélange couvrant les phases de porosité est utilisée pour décrire les propriétés des matériaux des plaques FGM poreuses. L'effet de cisaillement transverse est inclus en utilisant une nouvelle théorie raffinée de déformation de cisaillement. Le nombre de variables inconnues impliqués dans la présente théorie est seulement quatre contre cinq ou plus en cas d'autres théories de déformation de cisaillement. Le coefficient de Poisson est maintenu constant. Sur la base de la théorie de déformation de cisaillement de forme sinusoïdal, la position de la surface neutre est déterminée et l'équation du mouvement pour les plaques FGM reposant sur une fondation élastique est obtenue par le principe des travaux virtuels et le principe d'Hamilton.

La convergence de la méthode est démontrée et pour valider les résultats, les comparaisons sont faites avec les solutions disponibles pour les deux matériaux isotropes et en gradient de propriétés. L'effet de la fraction volumique de porosité sur les plaques en Al / Al₂O₃, Al/ZrO₂ et Ti-6Al-4V / oxyde d'aluminium sont présentés sous formes numériques et graphiques. Les rôles joués par l'indice de la fraction volumique des constituants, les paramètres de rigidité de la fondation et la géométrie de la plaque sont également étudiés.

Mots-clés : Matériaux à gradient de propriété, Théorie raffinée de déformation de cisaillement, Flexion et vibration libre, Fondation élastique.

ABSTRACT

The effect of porosity on bending and free vibration behavior of simply supported functionally graded plate reposed on the Winkler-Pasternak foundation is investigated analytically in the present paper. The modified rule of mixture covering porosity phases is used to describe and approximate material properties of the FGM plates with porosity phases. The effect due to transverse shear is included by using a new refined shear deformation theory. The number of unknown functions involved in the present theory is only four as against five or more in case of other shear deformation theories. The Poisson ratio is held constant. Based on the sinusoidal shear deformation theory, the position of neutral surface is determined and the equation of motion for FG rectangular plates resting on elastic foundation is obtained through the minimum total potential energy and Hamilton's principle.

The convergence of the method is demonstrated and to validate the results, comparisons are made with the available solutions for both isotropic and functionally graded material (FGM). The effect of porosity volume fraction on Al/Al₂O₃, Al/ZrO₂ and Ti-6Al-4V/Aluminum oxide plates are presented in numerical and graphical forms. The roles played by the constituent volume fraction index, the foundation stiffness parameters and the geometry of the plate is also studied.

Keywords: Functionally graded material, Refined shear deformation theory, Bending and free vibration, Elastic foundation.

ملخص

تأثير المسامية على سلوك الانحناء و الاهتزاز الحر للوحة متدرجة الخصائص موضوعة على أساس من نوع وينكلر-باسترنالك درست في هذا البحث. تم استخدام القانون المعدل للخليط لوصف خصائص المواد التقريبية للوحات متدرجة الخصائص مع المسامات. التأثير المقرر للقص العرضي أخذ بعين الاعتبار باستخدام نظرية جديدة مبسطة للتشوه القصي. عدد المجاهيل في النظرية الحالية هو فقط أربعة مقابل خمسة أو أكثر في حالة النظريات الأخرى للتشوه القصي. يعتبر نسبة بواسون ثابت. وإستنادا إلى نظرية التشوه القصي الجيبية الحالية، تم الحصول على موقع السطح المحايد وأيضا معادلة الحركة للوحات المستطيلة متدرجة الخصائص موضوعة على أساس مرن تم الحصول عليها عن طريق مبدأ مجموع الطاقة الكامنة ومبدأ هاملتون.

الطريقة الحالية تم برهنتها وللتحقق من صحة النتائج، تم إجراء مقارنات مع الحلول المتاحة لكل من المواد متساوية الخصائص و المواد متدرجة الخصائص. تأثير حجم المسامية على اللوحات المصنوعة من عدة مواد قد وضح على شكل رقمي و بياني. الدور الذي يقوم به مؤشر حجم جزء التأسيسية، عامل صلابة الاساسات و هندسة اللوحة أيضا تم دراستها.

الكلمات المفتاحية: مواد متدرجة الخصائص، نظرية مبسطة للتشوه القصي، الانحناء و الاهتزاز الحر، قاعدة مرنة.

SOMMAIRE

Résumé.....	i
Abstract.....	ii
ملخص.....	iii
Liste des figures.....	viii
Liste des tableaux.....	xv
Liste des notations.....	xviii
Liste des abréviations.....	xxi

INTRODUCTION GENERALE.....	1
-----------------------------------	----------

CHAPITRE I : INTRODUCTION AUX MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES

I.1. Introduction.....	5
I.2. Définition et aperçu historique sur les matériaux FGM.....	6
I.3. La différence entre les matériaux composites classiques et les FGM.....	8
I.4. Modélisation des propriétés matérielles effectives.....	11
I.4.1. La loi des mélanges.....	11
I.4.2. Le modèle du Mori-Tanaka.....	15
I.4.3. Le modèle auto-cohérent.....	17
I.5. Caractérisation des propriétés.....	18
I.5.1. Propriétés thermiques.....	18

I.5.2. Module d'élasticité.....	19
I.5.3. La déformation et la résistance.....	19
I.6. Une revue sur les techniques de fabrication des matériaux à gradient de propriétés.....	19
I.6.1. Procédé de poudre sèche.....	19
I.6.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting).....	20
I.6.3. Coulage centrifuge (centrifugal casting).....	21
I.6.4. Coulage en bande.....	22
I.6.5. Pressage à chaud.....	23
I.6.6. Processus de frittage.....	23
I.6.7. Processus d'infiltration.....	24
I.6.8. Projection thermique.....	24
I.7. Application.....	24
I.7.1. Dans l'aérospatiale et l'automobile.....	25
I.7.2. Dans la médecine.....	25
I.7.3. Dans la défense.....	26
I.7.4. Dans l'industrie.....	26
I.7.5. Articles de sports.....	27
I.8. Conclusion.....	27

**CHAPITRE II : UNE REVUE DE LITTÉRATURE DES THEORIES ET DES
ETUDES SUR LES PLAQUES FGM**

II.1. Introduction.....	28
II.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles.....	28
II.2.1. Approche monocouche équivalente.....	28
II.2.2. Approche par couche.....	36

II.3. Une revue de littérature des études sur les structures FGM.....	40
II.3.1. Les études sur les contraintes résiduelles dans les structures FGM.....	40
II.3.2. Les études sur l'analyse thermoélastique des structures FGM.....	42
II.3.3. Les études sur l'analyse du flambement des structures FGM.....	45
II.3.4. Les études sur l'analyse statique et dynamique des structures FGM.....	48
II.4. Conclusion.....	51

CHAPITRE III : EFFET DE POROSITE SUR LE COMPORTEMENT STATIQUE ET DYNAMIQUE DES PLAQUES P-FGM

III.1. Introduction.....	52
III.2. Formulation du problème.....	54
III.2.1. Théorie d'ordre élevée.....	54
III.2.2. La nouvelle théorie raffinée sinusoïdale de déformation de cisaillement de la plaque.....	55
III.2.3. Equations constitutives et conditions aux limites.....	58
III.3. Résultats et discussions.....	63
III.4. Conclusions.....	78

CHAPITRE IV : ANALYSE DE LA FLEXION ET LA VIBRATION LIBRE DES PLAQUES FGM REPOSANT SUR UNE FONDATION ELASTIQUE

IV.1. Introduction.....	79
IV.2. Formulation de la problématique.....	80
IV.3. Champ de déplacements et de déformations.....	82
IV.4. Les équations principales et les conditions aux limites.....	83
IV.5. Résultats.....	87

IV. Conclusions..... 109

**CHAPITRE V : INFLUENCE DE LA FRACTION VOLUMIQUE DE POROSITE ET
LES PARAMETRES DE FONDATION SUR LE COMPORTEMENT MECANIQUE
DES PLAQUES FGM**

V.1. Introduction..... 110

V.2. Configuration géométriques et propriétés matérielles..... 111

V.3. Champ de déplacements et déformations..... 113

V.4. Les équations du mouvement..... 115

V.5. Résultats..... 118

V.6. Conclusions..... 135

Conclusion générale et perspectives..... 137

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I : INTRODUCTION AUX MATERIAUX A GRADIENTS DE PROPRIETES

Figure I.1	Microstructure d'un FGM qui est gradué de Cuivre à Nickel.....	5
Figure I.2	Exemple de différentes exigences des propriétés des matériaux dans différent endroit.....	7
Figure I.3	La variation des déformations et des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée.....	9
Figure I.4	Une vue microscopique d'un FGM.....	10
Figure I.5	La microstructure d'un FGM.....	10
Figure I.6	Microphotographie d'un FGM Cu/Ni à l'aide d'un microscope optique.....	10
Figure I.7	Une plaque à gradient de propriété.....	11
Figure I.8	La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque P-FGM.....	13
Figure I.9	La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM.....	14
Figure I.10	La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM.....	15
Figure I.11	Matériaux à deux phase (a) des particules en microstructure (b) Squelette en microstructure.....	15
Figure I.12	Organigramme de technique de la métallurgie des poudres pour la production des FGM.....	20

Figure I.13	Représentation schématique du : (a)- procédure de coulage centrifuge Horizontale (b)- Le produit final obtenu (Al : haute ténacité et SiC : résistance à l'usure élevée).....	21
Figure I.14	Installation du coulage centrifuge verticale.....	22
Figure I.15	Système de processus de coulage en bande.....	23

CHAPITRE II : UNE REVUE DE LITTERATURE DES THEORIES ET DES ETUDES SUR LES PLAQUES FGM

Figure II.1	Paramètres géométriques d'une structure monocouche avec le modèle de Love-Kirchhoff.....	31
Figure II.2	Paramètres géométriques d'une structure monocouche avec le modèle de Mindlin-Reissner.....	32
Figure II.3	Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.....	34
Figure II.4	Géométries non déformées et déformées d'une plaque selon les trois Théories CLPT, FSDT et HSDT.....	35
Figure II.5	Champ de déplacements des modèles Zig-Zag du premier ordre.....	38
Figure II.6	Champ de déplacements des modèles Zig-Zag d'ordre supérieur.....	38

CHAPITRE III : EFFET DE POROSITE SUR LE COMPORTEMENT STATIQUE ET DYNAMIQUE DES PLAQUES P-FGM

Figure III.1	La flèche adimensionnelle au centre en fonction du rapport de géométrie (a/b) d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃ avec et sans porosité.....	68
Figure III.2	La flèche adimensionnelle au centre en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃ avec et sans porosité.....	68
Figure III.3	Variation de la contrainte longitudinale (σ_{xx}) à travers l'épaisseur de plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃ pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité.....	69

Figure III.4	Variation de la contrainte normale (σ_{yy}) à travers l'épaisseur de plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃ pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité....	69
Figure III.5	Variation de la contrainte transversale τ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃ pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité.....	70
Figure III.6	Variation de la contrainte transversale τ_{xz} à travers l'épaisseur de la plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃ pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité.....	70
Figure III.7	La flèche adimensionnelle au centre en fonction du rapport de géométrie (a/b) d'une plaque FGM en Al/ZrO ₂ avec et sans porosité.....	71
Figure III.8	La flèche adimensionnelle au centre en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) d'une plaque FGM en Al/ZrO ₂ avec et sans porosité.....	72
Figure III.9	Variation de la contrainte longitudinale (σ_{xx}) à travers l'épaisseur de la plaque FGM en Al/ZrO ₂ pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité.....	72
Figure III.10	Variation de la contrainte normale (σ_{yy}) à travers l'épaisseur de la plaque FGM en Al/ZrO ₂ pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité.....	73
Figure III.11	Variation de la contrainte transversale τ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque FGM en Al/ZrO ₂ pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité.....	73
Figure III.12	Variation de la contrainte transversale τ_{xz} à travers l'épaisseur de la plaque FGM en Al/ZrO ₂ pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité.....	74
Figure III.13	Variation de la fréquence non dimensionnelle en fonction du rapport d'épaisseur (a / h) pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃	77
Figure III.14	Variation de la fréquence non dimensionnelle en fonction du rapport de géométrie (a / b) pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃	77

**CHAPITRE IV : ANALYSE DE LA FLEXION ET LA VIBRATION LIBRE DES
PLAQUES FGM REPOSANT SUR UNE FONDATION ELASTIQUE**

Figure IV.1	Géométrie et dimension d'une plaque FGM reposé sur une fondation élastique.....	81
Figure IV.2	Variation de la flèche adimensionnelle au centre en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃ reposée sur une fondation élastique.....	90
Figure IV.3	Variation de la flèche adimensionnelle en fonction de l'anisotropie du matériau d'une plaque FGM carrée en Al/Al ₂ O ₃ reposée sur une fondation de type Winkler.....	91
Figure IV.4	Variation de la flèche adimensionnelle en fonction de l'anisotropie du matériau d'une plaque FGM carrée en Al/Al ₂ O ₃ reposée sur une fondation de type Pasternak.....	91
Figure IV.5	Variation de la contrainte longitudinale dans le plan à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃ reposée sur une fondation de type Winkler.....	92
Figure IV.6	Variation de la contrainte longitudinale dans le plan à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃ reposée sur une fondation de type Pasternak.....	92
Figure IV.7	Variation de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃ reposée sur une fondation de type Winkler.....	93
Figure IV.8	Variation de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃ reposée sur une fondation de type Pasternak.....	94
Figure IV.9	Variation de la contrainte tangentielle longitudinale à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃ reposée sur une fondation de type Winkler.....	94
Figure IV.10	Variation de la contrainte tangentielle longitudinale à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃ reposée sur une fondation de type Pasternak.....	95
Figure IV.11	Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{w} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$ en fonction de l'indice de puissance pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃	103

Figure IV.12	Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{w} = \omega\alpha^2 / h\sqrt{\rho_m / E_m}$ en fonction de l'indice de puissance pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur d'une plaque FGM en Al / ZrO2.....	104
Figure IV.13	Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{w} = \omega\alpha^2 / h\sqrt{\rho_m / E_m}$ en fonction de l'indice de puissance pour différentes valeurs du rapport de géométrie (a / b) d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃	105
Figure IV.14	Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{w} = \omega\alpha^2 / h\sqrt{\rho_m / E_m}$ en fonction de l'indice de puissance pour différentes valeurs du rapport de géométrie (a / b) d'une plaque FGM en Al / ZrO2.....	105
Figure IV.15	Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{w} = \omega\alpha^2 / h\sqrt{\rho_m / E_m}$ en fonction de l'indice de puissance d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃ reposée sur une fondation de type Winkler.....	106
Figure IV.16	Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{w} = \omega\alpha^2 / h\sqrt{\rho_m / E_m}$ en fonction de l'indice de puissance d'une plaque FGM en Al / ZrO2 reposée sur une fondation de type Winkler.....	106
Figure IV.17	Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{w} = \omega b^2 \sqrt{SH / A} / \pi^2$ en fonction du rapport d'épaisseur ($\delta = h / a$) d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃ reposée sur une fondation élastique.....	107
Figure IV.18	Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{w} = \omega b^2 \sqrt{SH / A} / \pi^2$ en fonction du rapport d'épaisseur ($\delta = h / a$) d'une plaque FGM en Al / ZrO2 reposée sur une fondation élastique.....	108
Figure IV.19	Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{w} = \omega\alpha^2 / h\sqrt{\rho_m / E_m}$ en fonction de l'indice de puissance d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃ reposée sur une fondation de type Winkler-Pasternak.....	108

**CHAPITRE V : INFLUENCE DE LA FRACTION VOLUMIQUE DE POROSITE ET
LES PARAMETRES DE FONDATION SUR LE COMPORTEMENT MECANIQUE
DES PLAQUES FGM**

Figure V.1	Géométrie et dimension d'une plaque FGM reposé sur une fondation élastique.....	113
Figure V.2	Effet de porosité sur la flèche adimensionnelle au centre en fonction à travers l'épaisseur d'une plaque FGM.....	127
Figure V.3	Effet de porosité sur la contrainte longitudinal, la contrainte de cisaillement transversale et la contrainte tangentielle à travers l'épaisseur d'une plaque FGM.....	127
Figure V.4	Effet de porosité sur la contrainte longitudinal, la contrainte de cisaillement transversale et la contrainte tangentielle à travers l'épaisseur d'une plaque FGM.....	128
Figure V.5	Effet de porosité sur la contrainte longitudinal, la contrainte de cisaillement transversale et la contrainte tangentielle à travers l'épaisseur d'une plaque FGM.....	128
Figure V.6	Effet de porosité sur la fréquence naturelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ on fonction de l'indice de puissance d'une plaque FGM.....	129
Figure V.7	Effet de porosité sur la fréquence naturelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ on fonction de l'indice de puissance d'une plaque FGM.....	129
Figure V.8	Effet de porosité sur la fréquence naturelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ en fonction du rapport d'épaisseur d'une plaque FGM.....	131
Figure V.9	Effet de porosité sur la fréquence naturelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ en fonction du rapport d'épaisseur d'une plaque FGM.....	131
Figure V.10	Effet de porosité sur la fréquence fondamentale naturelle $\bar{\omega} = \alpha \alpha^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ en fonction du rapport de géométrie d'une plaque FGM.....	132
Figure V.11	Effet de porosité sur la fréquence fondamentale naturelle $\bar{\omega} = \alpha \alpha^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ en fonction du rapport de géométrie d'une plaque FGM.....	132
Figure V.12	Effet de porosité sur la fréquence fondamentale naturelle $\bar{\omega} = \alpha \alpha^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ d'une plaque FGM reposé sur Winkler fondation.....	133
Figure V.13	Effet de porosité sur la fréquence fondamentale naturelle $\bar{\omega} = \alpha \alpha^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ d'une plaque FGM reposé sur Winkler fondation.....	133

Figure V.14	Effet de porosité sur la fréquence fondamentale naturelle $\bar{\omega} = \omega \alpha^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ d'une plaque FGM reposé sur Pasternak fondation.....	134
Figure V.15	Effet de porosité sur la fréquence fondamentale naturelle $\bar{\omega} = \omega \alpha^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ d'une plaque FGM reposé sur Pasternak fondation.....	134

LISTE DES TABLEAUX

CHAPITRE III : EFFET DE POROSITE SUR LE COMPORTEMENT STATIQUE ET DYNAMIQUE DES PLAQUES P-FGM

Tableau III.1	Etude comparative du déplacement central non-dimensionnelle et la contrainte de cisaillement maximale d'une plaque carrée FGM en alumine / aluminium simplement appuyée sous une charge uniformément répartie, ($a/h = 100$).....	65
Tableau III.2	Etude comparative du déplacement central non-dimensionnelle la contrainte dans le plan d'une plaque carrée FGM en alumine / aluminium sous des charges uniformément répartie et sinusoïdales, ($a/h = 10$).....	66
Tableau III.3	Etude comparative de la flèche au centre d'une plaque isotrope et homogène ($k=0, E_m=E_c=E=1$ et $a/b=1$).....	66
Tableau III.4	Comparaison des déplacements et des contraintes d'une plaque FGM rectangulaire ($b=3a$ and $k=2$).....	67
Tableau III.5	Etude comparative de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{w} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_{11} / E_{11}}$ d'une plaque FGM carrée en Al/Al ₂ O ₃ , ($b/a=1, a=0$).....	75
Tableau III.6	Etude comparative des trois premières fréquences naturelles des plaques FGM carrées pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur h/a , ($k=1, a=0$).....	75
Tableau III.7	Etude comparative de la fréquence fondamentale d'une plaque FGM carrée en Al/Al ₂ O ₃ pour différentes valeurs de l'indice de puissance k , ($a/h = 5, a=0$).....	76

**CHAPITRE IV : ANALYSE DE LA FLEXION ET LA VIBRATION LIBRE DES
PLAQUES FGM REPOSANT SUR UNE FONDATION ELASTIQUE**

Tableau IV.1	Etude comparative de la flèche d'une plaque carrée et homogène reposé sur une fondation de type inkler.....	89
Tableau IV.2	Etude comparative de la flèche au centre d'une plaque carrée mince et homogène reposée sur une fondation de type Winkler-asternak.....	89
Tableau IV.3	Etude comparative du paramètre de la fréquence fondamentale $\bar{w} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque FGM en Al/Al2O3, (a/b = 1).....	96
Tableau IV.4	Etude comparative du paramètre de la fréquence fondamentale $\bar{w} = \omega a^2 \sqrt{\rho_c / E_c} / h$ d'une plaque FGM carrée, h/a = 0.1.....	97
Tableau IV.5	Etude comparative de la fréquence naturelle non-dimensionnelle $\bar{w} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ d'une plaque carrée et isotrope simplement appuyée.....	97
Tableau IV.6	Etude comparative de la fréquence naturelle non-dimensionnelle $\bar{w} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ d'une plaque isotrope.....	98
Tableau IV.7	Etude comparative de la fréquence naturelle non-dimensionnelle $\bar{w} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ d'une plaque carrée et isotrope reposée sur une fondation élastique, (h/b = 0.2).....	99
Tableau IV.8	Etude comparative du paramètre de la fréquence fondamentale $\bar{w} = \omega b^2 \sqrt{Sh / A} / \pi^2$ * d'une plaque carrée et homogène (a/b = 1).....	100
Tableau IV.9	Comparaison de la fréquence naturelle non-dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ d'une plaque isotrope et homogène, h/a=0.05.....	101
Tableau IV.10	Fréquence fondamentale naturelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_{11} / E_{11}}$ d'une plaque FGM en Al/Al2O3 ($K_0=K_I=0$, h/a = 0.15).....	102
Tableau IV.11	Les trois premières fréquences naturelles non-dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_{22} / E_{22}}$ d'une plaque FGM rectangulaire en Al/ZrO2, (b/a = 0.5).....	102

**CHAPITRE V : INFLUENCE DE LA FRACTION VOLUMIQUE DE POROSITE ET
LES PARAMETRES DE FONDATION SUR LE COMPORTEMENT MECANIQUE
DES PLAQUES FGM**

Tableau V.1	La flèche adimensionnelle et la contrainte normale d'une plaque FGM carrée sous un chargement sinusoïdale ($K_0=K_I=0$).....	120
Tableau V.2	La flèche adimensionnelle et les contraintes d'une plaque FGM rectangulaire sous un chargement uniforme, ($K_0=K_I=0$).....	121
Tableau V.3	Comparaison de la flèche adimensionnelle d'une plaque mince et isotrope simplement appuyée sous un chargement uniforme.....	121
Tableau V.4	Comparaison du paramètre de la fréquence fondamentale d'une plaque carrée ($a/b=1$) $\hat{\omega} = \omega\alpha^2 \sqrt{\rho/E} / h$	122
Tableau V.5	Fréquence fondamentale $\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_{22}/E_{22}}$ d'une plaque carrée $k=0$	122
Tableau V.6	Les huit paramètres de fréquences $\bar{\omega} = \omega\alpha^2 \sqrt{\rho_0 h/G}$ d'une plaque rectangulaire.....	123
Tableau V.7	Fréquence fondamentale d'une plaque carrée et isotrope $\bar{\omega} = \omega\alpha^2 \sqrt{\rho_0 h/G}$ $h/a=0.05$	124
Tableau V.8	Comparaison d'une fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m/E_m}$ d'une plaque carrée en Al/ZrO ₂	124
Tableau V.9	Les premier 10 fréquences naturelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m/E_m}$ d'une plaque carrée en Al/ZrO ₂ avec $k = 1$ et différentes valeurs du rapport d'épaisseur.....	125
Tableau V.10	Fréquence naturelle fondamentale $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_{11}/E_{11}}$ d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃ ($a/b=0.5$).....	125
Tableau V.11	Fréquence naturelle fondamentale $\bar{\omega} = \omega\alpha^2 \sqrt{\rho_0 h/G}$ d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃ ($a/b=0.5$, $h/a=0.1$).....	126

LISTE DES NOTATIONS

G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
E	Module de Young suivant x
E_c	Module de Young de la céramique
E_m	Module de Young du métal
w	Déplacement transversale
w_b	Déplacement dû à la flexion
w_s	Déplacement dû au cisaillement
ν	Coefficient de Poisson
$V(z)$	Fraction volumique
K	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Épaisseur de la plaque
q	La charge trigonométrique transverse
q_0	L'intensité de la charge au centre de la plaque
D	La rigidité de la plaque à la flexion
Z_{ms}	Mesurée à partir de la surface intermédiaire de la plaque
Z_{ns}	Mesurée à partir de la surface neutre de la plaque

a	Le volume fraction de porosité
f_e	La densité de la force de réaction de la fondation
U	L'énergie de déformation de la plaque
K	L'énergie cinétique de la plaque
U_F	L'énergie de déformation de la fondation
K_0	Rigidité de Winkler
K_1	Rigidité de cisaillement
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Les rotations autour des axes x, y et z
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
δW_{int}	Travail virtuel intérieur
δW_{ext}	Travail virtuel extérieur
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Les rotations autour des axes x, y et z ,
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)

N_x, N_y, N_z, N_{xy}	Efforts normaux
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion
S_x, S_y, S_{xy}	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
Q_{xz}, Q_{yz}	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
i et j	Sont des nombres naturels.
A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
B_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de couplage
D_{ij}	Termes de la matrice de flexion
A_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
F_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{f\}$	Le vecteur des efforts généralisés

LISTE DES ABREVIATIONS

FGM :	Functionally graded material.
STA:	The science and technology agency.
SFF:	Solid freeform fabrication.
CTE:	Coefficient of thermal expansion.
LFB :	Line-focus-beam.
PM :	Powder metallurgy.
ZrO ₂ :	Zirconia.
NiCr :	Nickel-chromium.
Al ₂ O ₃ :	Alumine ou oxyde d'aluminium.
Ti-6Al-4V :	Titanium
CSPM :	Centrifugal solid-particle method.
FEM :	Le modèle de l'élément fini.
FGMMCs :	Les composites à gradient de propriétés à matrice métallique.
ESL :	Les théories des couches équivalentes.
CLPT :	La théorie classique de la plaque laminée.
FSDT :	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre.
HSDT :	Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé.
LW :	L'approche par couche.
TSDT :	La théorie de la déformation de cisaillement du troisième ordre.
ESDPT :	La théorie de déformation de cisaillement exponentielle de la plaque.

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale:

Les matériaux composites sont des matériaux à phases multiples obtenus par la combinaison artificielle de différents matériaux afin d'obtenir des propriétés que les composants individuels en eux-mêmes ne peuvent pas atteindre. Contrairement aux alliages métalliques, chaque matériau conserve ses propriétés chimiques, physiques et mécaniques séparées. Les deux constituants sont un renfort et une matrice. Les principaux avantages des matériaux composites sont leurs hautes résistances et une rigidité combinée à une faible densité, par rapport à des matériaux en vrac, ce qui permet une réduction de poids dans la pièce finie. On appelle maintenant de façon courante "matériaux composites" des arrangements de fibres, les renforts qui sont noyés dans une matrice dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible. La matrice assure la cohésion et l'orientation des fibres, elle permet également de transmettre les sollicitations auxquelles sont soumises les pièces. Les matériaux ainsi obtenus sont très hétérogènes et anisotropes.

Les matériaux composites sont à travers notre monde et comprennent les composites naturels et artificiels. Les matériaux composites ont été utilisés par l'humanité depuis des milliers d'années. Cependant, avec l'apparition de fibres synthétiques à haute résistance et les énormes progrès de la chimie des polymères au cours du XXe siècle, dans de nombreux cas les matériaux composites peuvent offrir des avantages comparables à ceux des matériaux concurrents. L'avantage de ces matériaux composites avancés sont nombreux ; un poids plus léger, la capacité de composites sur mesure pour une résistance optimale et une rigidité, une meilleure résistance à la fatigue, résistance à la corrosion et de réduire les coûts d'assemblage en raison de moins de pièces de détail et les fixations.

Contrairement aux matières premières classiques dont on connaît à l'avance les caractéristiques mécaniques, celles des composites ne sont réellement connues qu'après fabrication, car on réalise, en même temps, le matériau et le produit. Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases. Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de renforcer les propriétés mécaniques de la structure.

Le collage direct des métaux et céramiques peut générer des contraintes thermiques dans des applications pratiques à haute température qui sont dues principalement aux inadéquations du coefficient de dilatation thermique. La contrainte thermique provoque la formation de fissures, décohésion aux interfaces hétéro et aboutit souvent à la délamination de la couche de céramique. Un concept de couche intermédiaire graduée pour le métal / céramique a été proposé pour la première fois par Kawasaki et Watanabe dans lequel la contrainte thermique a effectivement été éliminée par une couche intermédiaire à gradient de composition. Ces matériaux gradués possèdent simultanément une propriété super-résistante à la chaleur et une ténacité suffisante pour arrêter la propagation des fissures. Ce concept, on lui a donné le nom de matériaux à gradient de propriétés FGM et il a été appliqué initialement pour créer le fuselage extérieur des matériaux de moteur pour les avions spatiaux qui sont soumis à des échauffements par frottement sévère à cause des flux d'air. La réponse optimale des propriétés du matériau à des conditions dans un environnement réel est la principale exigence dans la conception de FGM. La différence la plus remarquable entre les FGM et les matériaux homogènes classiques réside dans leur besoin plus orientés de conception du matériau et le contrôle de la microstructure non homogène.

Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques, pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, constructions, couches minces optiques, etc.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Le développement de l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés dans les structures nécessite une bonne compréhension du comportement mécanique des structures FGM afin d'offrir un profil optimum aux concepteurs.

Actuellement, plusieurs articles concernant l'étude du comportement mécanique des plaques FGM sont annoncés sur l'analyse de la vibration libre, flambement et la flexion des plaques et sur l'étude de l'effet thermique du comportement non linéaire des plaques circulaires FGM.

De nombreux travaux de recherche ont traité le comportement mécanique des plaques composites, la mise en évidence de l'effet du cisaillement transverse dans l'étude du comportement en flexion et en vibration des plaques FGM permet de décrire avec une

bonne précision les champs des contraintes et des déformations induites à travers leur épaisseur.

L'objectif de cette investigation est de présenter une nouvelle théorie raffinée de forme sinusoïdale pour l'analyse du comportement statique et dynamique des plaques à gradient de propriétés simplement appuyées. L'influence de la fraction volumique de porosité sur les plaques FGM reposant sur une fondation élastique est également étudiée. Cette théorie ne nécessite pas de facteurs de correction de cisaillement et seulement quatre fonctions de déplacements inconnus sont utilisées contre cinq ou plusieurs fonctions de déplacements inconnues utilisées dans celles correspondantes. Ce nouveau modèle satisfait la nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. La distribution parabolique des contraintes de cisaillement transverse suivant l'épaisseur de la plaque est prise en considération dans cette analyse, les propriétés matérielles de la plaque FGM varient selon une distribution de loi de puissance en termes de fraction volumique des constituants.

Le présent travail commence par un état de connaissance et un aperçu historique sur les matériaux à gradient de propriétés ainsi que les diverses techniques appliquées pour la fabrication des FGM. Cette partie présente aussi les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du FGM suivant l'épaisseur de la plaque ainsi que leur domaine d'application.

Dans le chapitre II, on a présenté une revue bibliographique sur les différents types de modèles ou approches employés pour les matériaux composites ainsi que les différents travaux qui ont été effectués et publiés dans les deux dernières décennies sur l'analyse des structures FGM.

Le chapitre III consiste à mettre en œuvre une théorie raffinée de déformation de cisaillement basée sur l'axe médian qui prend en considération l'effet de cisaillement transverse pour l'analyse statique et dynamique des plaques FGM simplement appuyées avec porosités, cette dernière peut éventuellement se produire à l'intérieur des matériaux à gradient de propriétés (FGM) au cours de leur fabrication. La loi du mélange modifiée couvrant les phases de porosité est utilisée pour décrire approximativement les propriétés des plaques FGM poreuses. Les plaques sont fabriquées d'un matériau isotrope ayant des propriétés matérielles différentes dans seulement la direction d'épaisseur. Les propriétés matérielles de la

plaque FGM composée de deux matériaux différents: céramique et métal varient selon une distribution de loi de puissance en termes de fraction volumique des constituants.

L'exactitude de la présente théorie est aussi testée pour l'analyse des plaques FGM à la flexion et à la vibration libre reposant sur fondation élastique à deux paramètres est présentée dans le chapitre IV. Le développement est basé sur le concept de surface neutre. Des exemples numériques et graphiques sont fournis pour montrer l'effet des paramètres de fondation (K_0 et K_1) présentés pour les plaques minces et épaisses.

Dans le chapitre V, l'influence de la fraction volumique de porosité et les paramètres de fondation élastique sur la flexion et la vibration libre des plaques FGM sont étudiées. L'effet dû au cisaillement transversal est inclus en utilisant la présente nouvelle théorie de déformation de cisaillement. La convergence de la théorie est démontrée et pour valider les résultats, des comparaisons sont faites avec les solutions disponibles pour le matériel isotrope et en gradient de propriétés (FGM). L'effet de la fraction volumique de porosité sur les plaques FGM en Al/Al₂O₃ et Ti-6Al-4V/Aluminum oxide reposant sur une fondation élastique est présenté sous forme graphique.

L'étude se conclura par une conclusion relative à ce travail ainsi que des perspectives envisagées à l'avenir.

CHAPITRE I
INTRODUCTION AUX
MATERIAUX A GRADIENT DE
PROPRIETES

I.1. Introduction :

La technologie moderne essaie à plusieurs fois de concevoir aux matériaux de construction une bonne rigidité, une haute résistance mécanique, une ténacité élevée et une grande légèreté. Il est donc du ressort de l'ingénieur de concevoir des structures tout en plaçant le bon matériau sous la bonne forme (morphologie des renforts), et au bon endroit (notion de répartition dans l'espace).

Les matériaux composites connaissent actuellement un développement intense dans toutes les branches de l'industrie. Ils sont des matériaux artificiels constitués de plusieurs composants élémentaires dont leur association confère un ensemble des propriétés qu'aucun des composants pris séparément ne possède.

Le collage direct de métaux et céramiques peut générer des contraintes thermiques dans des applications pratiques à haute température, la contrainte thermique provoque la formation de fissures et le décollement au niveau des interfaces. Un concept de gradation intermédiaire pour le métal et la céramique a été proposé pour la première fois par Kawasaki et Watanabe dans lequel la contrainte thermique a été effectivement éliminée par une couche graduée intermédiaire. Ces matériaux gradués possèdent simultanément une propriété super-résistante à la chaleur et une ténacité suffisante pour arrêter la propagation des fissures. Ce concept a donné la naissance d'un matériau à gradient de propriétés FGM et il a été initialement appliqué pour les applications aéronautiques et les réacteurs à fusions. La réponse optimale des propriétés du matériau dans des conditions d'environnement extrême est la principale exigence dans la conception d'un FGM. Pour remplir cette exigence la composition et la microstructure sont variées tout au long de la structure, et on obtient un gradient de propriété dans les matériaux combinés, voir figure I.1.

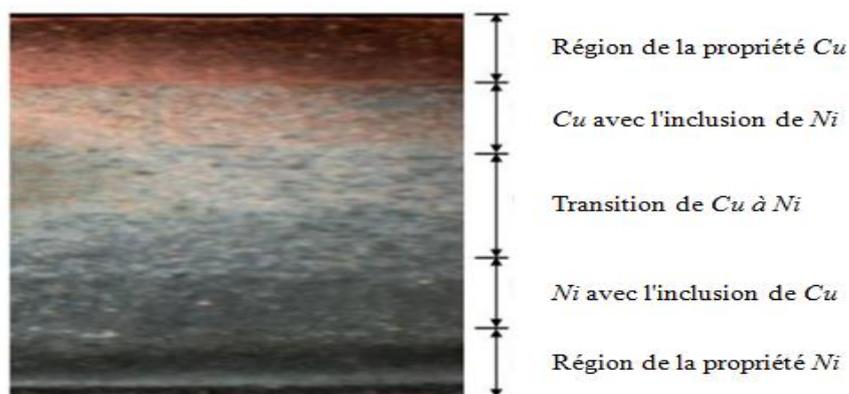


Figure I.1. Microstructure d'un FGM qui est gradué de Cuivre à Nickel [Hashmi. 2014]

I.2. Définition et aperçu historique sur les matériaux FGM:

Le concept de matériaux à gradient de propriétés (FGM) a été proposé en 1984 par les scientifiques de matériaux dans la région de Sendai du Japon comme un moyen de préparer les matériaux de barrière thermique, des changements continus dans la composition microstructure et de la porosité de ces matériaux ont donné lieu à des gradients de propriétés telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique, en 1987 un projet national a été lancé, intitulé la recherche sur la technologie de base pour le développement de matériaux à gradient de propriétés pour la relaxation de la contrainte thermique par l'agence japonaise des sciences et de la technologie (STA).

À ce moment-là, de nombreux chercheurs et entreprises intéressées par les FGM voulaient participer à ce projet. Toutefois, puisque les fonds sont limités, il était impossible d'accepter tous les chercheurs à participer. Par conséquent, suivant le début du projet FGM, le STA a créé le Forum FGM en 1988 afin de permettre une plus grande participation.

Grâce à ce Forum, de nombreux chercheurs sans financement du gouvernement ont réussi à rejoindre le projet FGM, permettant une plus grande quantité de la recherche sur le développement des FGM. Depuis 1988, le Forum FGM a non seulement joué un rôle important dans le développement des FGM au niveau national, mais aussi au niveau international [Miyamoto. 1999].

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) sont une forme de composite où les propriétés changent progressivement avec la position. Le gradient peut être adapté pour répondre aux besoins spécifiques grâce à l'utilisation d'éléments composites. Le changement dans la propriété du matériau est provoquée par une composition chimique dépendant de la position, la microstructure ou de l'ordre atomique [Hirai. 1996, Hopkinson. 2006]. Un type de composite vise à renforcer les propriétés des matériaux en mélangeant une phase dispersée de façon homogène dans la matrice. Un autre type de composite est caractérisée par des caractéristiques différentes de matériaux sur des surfaces séparées ou dans des parties séparées.

La plupart des FGM ont une composition graduellement varié entre les différents constituants. Ceci élimine l'inadéquation des propriétés des matériaux ; ainsi les contraintes thermiques (résiduelles) dans des pièces qui peuvent causer de la fatigue peuvent être diminuées de façon significative. Dans le même temps, les propriétés d'un FGM sont conçues

pour répondre aux différentes exigences, comme on le voit sur la figure I.2, lorsque ces exigences sont plus difficiles à satisfaire complètement à travers l'approche des matériaux composites ou des méthodes de traitement des matériaux conventionnels.

Au début des années 1980 une recherche systématique sur les procédés de fabrication des FGM a été menée activement au Japon et visant à éliminer la limite microscopique pour améliorer les propriétés des matériaux [Hopkinson. 2006].

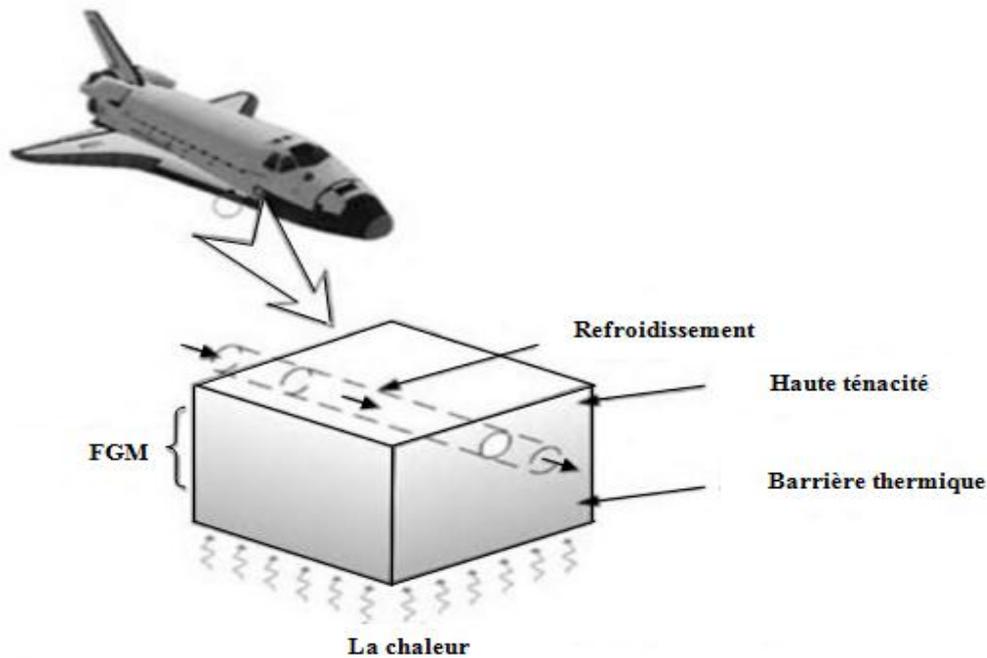


Figure I.2. Exemple de différentes exigences des propriétés des matériaux dans différent endroit [Hopkinson. 2006]

Dans le cas des plaques et coques à gradient de propriétés; la gradation de la propriété apparait à travers l'épaisseur. La gradation de la propriété est obtenue soit par traitement chimique d'un matériau unique localement modifier ses propriétés ou en combinant deux ou plusieurs matières séparées avec des fractions de volume prescrites localement.

La distribution de matériau à travers une plaque a été souvent décrite en adoptant convenablement une fonction de loi de puissance V_1^f pour définir la fraction volumique de la matière constitutive 1, à n'importe quelles coordonnées à travers l'épaisseur de la plaque :

$$V_1^f(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n \quad (I.1)$$

V_1^f est la fraction volumique du constituant 1. z est la hauteur mesurer à partir de la surface médiane de la plaque, h est l'épaisseur totale de la plaque et n est exposant de valeur arbitraire supérieure ou égale à zéro. La fraction volumique du constituant 2 dans n'importe quel point z est donnée par la relation :

$$V_2^f(z) = 1 - V_1^f(z) \quad (I.2)$$

Les distributions particulières des FGM à l'aide de la relation de loi de puissance comprennent (1) $n = 0$, une plaque entièrement composée de matériau 1, (2) $n = \infty$, une plaque entièrement composée de matériaux 2. et (3) $n = 1$, une gradation linéaire de constituant 1 au constituant 2. La répartition de la loi de puissance des constituants est simplement un exemple d'une formule qui pourrait être utilisé pour décrire la gradation à travers une épaisseur des plaques ou des coques. L'exposant n dans ce cas, contrôle la forme de la transition entre le constituant 2 sur la surface inférieure en constituant 1 sur la surface supérieure. Pratiquement toute fonction mathématique pourrait être conçue pour servir le même but que la fonction de loi de puissance ici. Le FGM peut être personnalisé pour une application en spécifiant la forme de la gradation pour répondre aux exigences de conception.

Une caractéristique très intéressante de matériaux à gradient de propriétés est qu'ils peuvent être adaptés localement pour répondre à des applications spécifiques, Par exemple, un FGM métal-céramique pourrait offrir une résistance à la corrosion et à la protection thermique sur une surface tout en fournissant simultanément la résistance aux sollicitations mécaniques à travers la structure restante, la fusion de la résistance thermique et la capacité portante mécanique dans une seule construction a un potentiel évident pour un gain de poids sur un véhicule aérien ou spatial.

I.3. La différence entre les matériaux composites classiques et les FGM :

Les propriétés supérieures de matériaux composites avancés, telles que la résistance spécifique et la rigidité élevée, ont conduit à leur utilisation généralisée dans les avions à haute performance, astronefs, des pièces automobiles et des structures spatiales. Dans les structures classiques de composites stratifiés, lames élastiques homogènes sont liés ensemble pour obtenir des propriétés mécaniques et matérielles améliorées. Les matériaux composites sont fabriqués par l'homme et, par conséquent, les constituants des matériaux composites peuvent être sélectionnés et combinés de manière à produire un matériau utile qui a les

propriétés souhaitées, tels que la haute résistance, une rigidité élevée, une plus grande résistance à la corrosion, une plus grande résistance à la fatigue, un faible poids et ainsi de suite.

La constitution d'anisotropie des structures composites stratifiées souvent se traduit par une concentration de contraintes dans les matériaux et des discontinuités géométriques, fig I.3, qui peut conduire à des dommages sous la forme de délaminage, la fissure de la matrice et la séparation des assemblages.

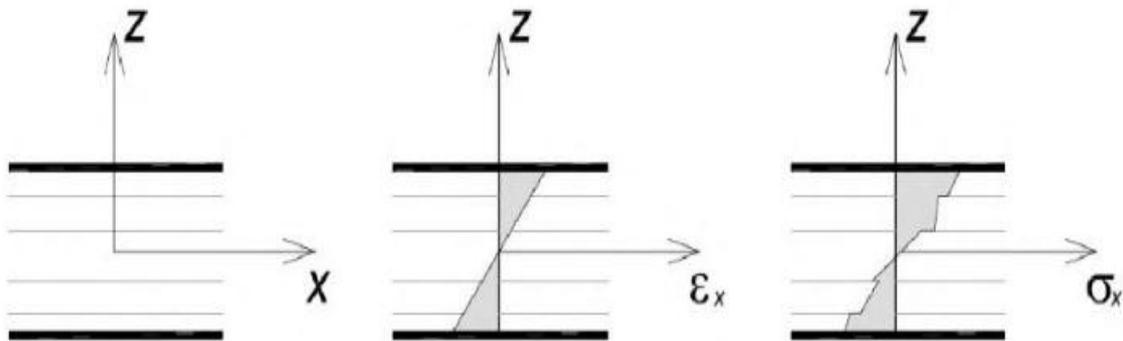


Figure I.3. La variation des déformations et des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) sont une classe de composites qui ont une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à une autre et alléger ainsi les concentrations de contraintes trouvées dans les composites stratifiés.

La gradation des propriétés du matériau réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les facteurs de concentration de contrainte. La variation progressive dans un matériau est très efficace elle est adaptée pour répondre aux besoins de la structure. Les FGM sont généralement fabriqués à partir de composants d'isotropie tels que des métaux et des céramiques, puisqu'ils sont utilisés aussi comme structures de barrière thermique dans des environnements avec des gradients thermiques sévères (par exemple des dispositifs thermoélectriques pour la conversion de l'énergie, l'industrie des semi-conducteurs). Dans de telles applications, la céramique présente une résistance à la chaleur et à la corrosion; parallèlement le métal fournit la force et la ténacité.

Les FGM sont donc des matériaux composites à caractère non homogène macroscopiquement. Les changements continus dans leur microstructure distinguent les FGM par rapport aux matériaux composites classiques, voir figure, I.4, I.5 et I.6.

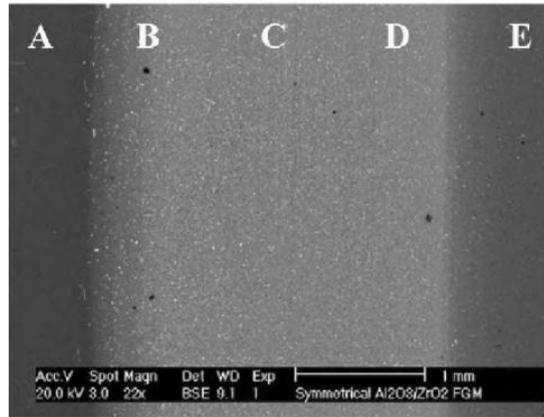


Figure I.4. Une vue microscopique d'un FGM [Hashmi, 2014]

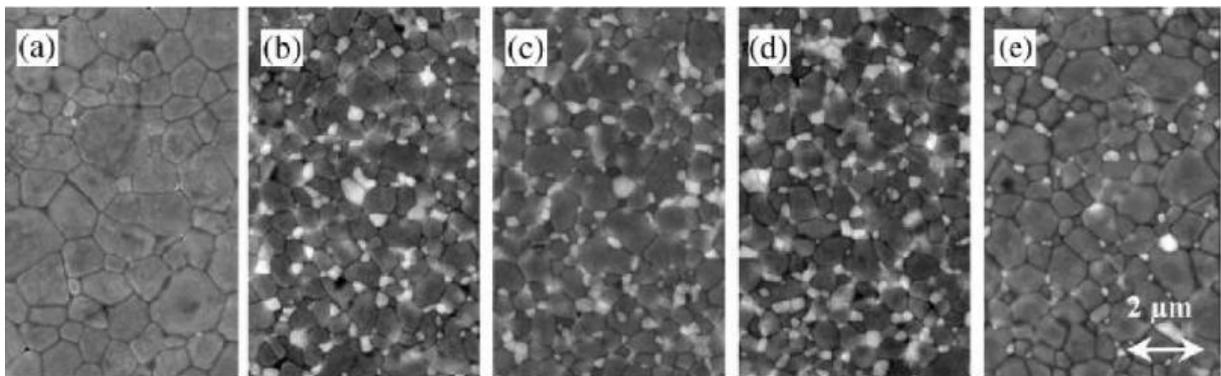


Figure I.5. La microstructure d'un FGM [Hashmi, 2014]

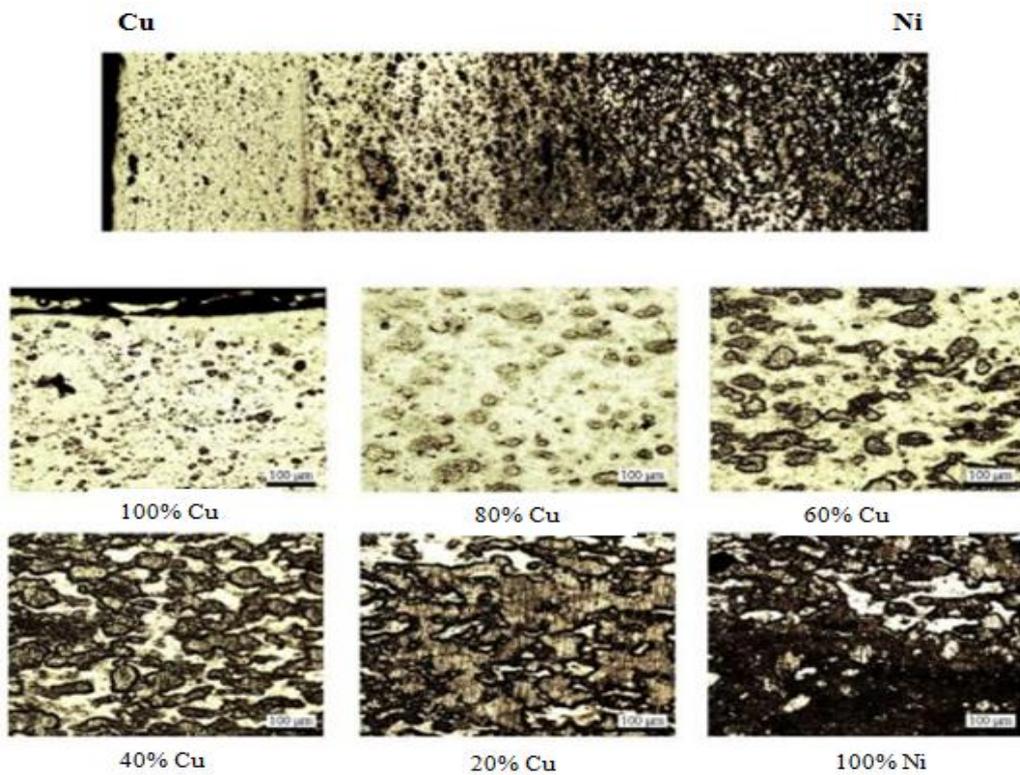


Figure I.6. Microphotographie d'un FGM Cu/Ni à l'aide d'un microscope optique [Hashmi, 2014]

I.4. Modélisation des propriétés matérielles effectives :

Considérons un matériau composite à gradient de propriétés fabriquées par le mélange de deux phases distinctes de matériaux, par exemple, un métal et une céramique. Souvent, des informations précises sur la taille, la forme et la distribution des particules peut ne pas être disponible et le module élastique effective du composite graduée doit être évalué que sur la base de la distribution de la fraction volumique et la forme approximative de la phase dispersée. Plusieurs modèles micromécanique ont été développées au fil des ans pour déduire les propriétés efficaces de matériaux composites macroscopiquement homogènes.

Les techniques d'homogénéisation plus courantes pour modéliser les propriétés des matériaux efficaces sont la loi des mélanges [Markworth et Saunders. 1995], la méthode Mori-Tanaka [Mori et Tanaka. 1973] et l'approche du modèle auto-cohérent de Hill [Hill. 1965].

Ces modèles sont disponibles pour estimer les propriétés globales des matériaux composites à partir de la connaissance de la composition du matériau et les propriétés caractéristiques. Les inclusions et la matrice sont supposés être faits de matériaux isotropes et la réponse macroscopique du composite est modélisée comme isotrope.

I.4.1. La loi des mélanges :

Selon la règle des mélanges, une propriété de matériau arbitraire, notée P , d'un FGM est supposée varier en douceur le long d'une direction, en fonction des fractions de volume et les propriétés des matériaux constitutifs. Considérant des plaques FGM, la direction variable est le sens de l'épaisseur, voir figure I.7.



Figure I.7. Une plaque à gradient de propriété

Dans ce contexte, P peut représenter, par exemple, le module d'élasticité, la masse volumique et / ou le coefficient de Poisson. Cette propriété peut être exprimée comme une combinaison linéaire.

$$P(z) = P_1 V_1 + P_2 V_2 \quad (\text{I.3a})$$

Où z est la direction variable, P_1, V_1 et P_2, V_2 sont les propriétés du matériau et les fractions volumiques du matériau constitutif 1 et 2, respectivement. La somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs doivent être égal à 1 :

$$V_1 + V_2 = 1 \quad (\text{I.3b})$$

La fraction volumique V_1 est supposée avoir une distribution de loi de puissance suivante [Markworth et Saunders. 1995] :

$$V_1 = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \quad (\text{I.3c})$$

Et par conséquence :

$$V_2 = 1 - \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \quad (\text{I.3d})$$

Où h est l'épaisseur de la plaque. Le paramètre n est l'indice de loi de puissance qui conte des valeurs réelles positives et donne le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur. Les matériaux constitutifs 1 et 2 peuvent être, par exemple, en céramique et en métal, respectivement. Selon cette répartition, la surface inférieure, $z = -x / 2$, de la plaque à gradient de propriété est en métal pur et la surface supérieure, $z = h / 2$, est en céramique pure. Cette hypothèse loi de puissance reflète une simple loi de mélanges utilisée pour obtenir les propriétés réelles d'un FGM. La teneur en matières 2 dans la plaque augmente à mesure que la valeur de n augmente. La valeur de $n = 0$ représente une plaque en matériau 1 homogène.

Le modèle (I.3a) fournit des valeurs exactes de la masse volumique p et assez bonnes valeurs pour d'autres propriétés mécaniques. Une détermination plus précise des propriétés des matériaux macroscopiques nécessite une meilleure compréhension de la microstructure.

Afin de décrire les fractions de volume d'un matériau FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction de loi de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde.

I.4.1.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme :

$$g(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (I.4)$$

P : paramètre de matériau

h : l'épaisseur de la plaque

z : la coordonne suivant l'épaisseur

Le module d' Young de la plaque P-FGM est défini comme suit :

$$E(z) = g(z)E_1 + (1 - g(z))E_2 \quad (I.5)$$

Où : E_1 , E_2 sont les modules d' Young des matériaux constituant la plaque P-FGM pour ($z = h/2$), ($z = -h/2$), respectivement.

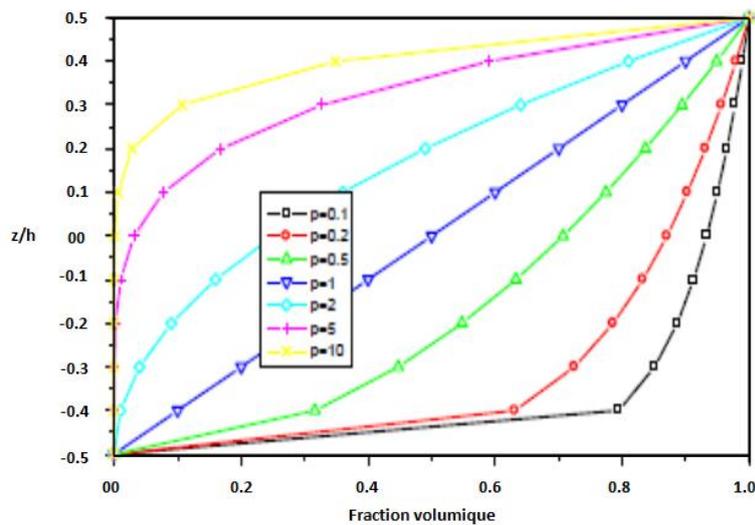


Figure I.8. La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque P-FGM [Bao. 1995].

I.4.1.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Afin d'assurer une bonne distribution des contraintes à travers toutes les interfaces, Chi et Chung [Chi. 2003] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance. Les deux fonctions de loi puissance sont définies par :

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{z}{h} - \frac{z}{h}}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.6)$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{z}{h} + z}{\frac{h}{2}} \right) \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.7})$$

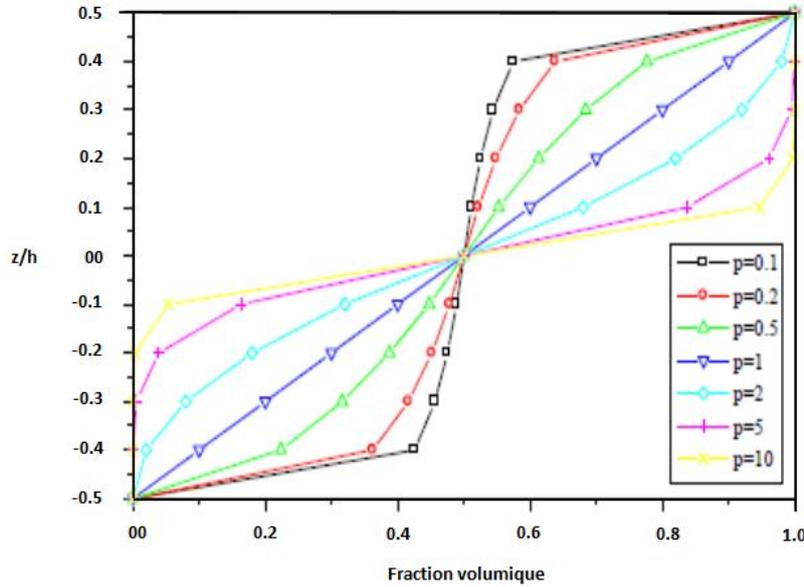


Figure I.9. La variation du module d' Young à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM [Chi. 2003].

En utilisant la loi de mélanges, le module d' Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = g_1(z)E_1 + (1 - g_1(z))E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.8})$$

$$E(z) = g_2(z)E_1 + (1 - g_2(z))E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.9})$$

La figure I.9 montre que la variation du module de Young des équations (I.8) et (I.9) représente des distributions sigmoïdes, donc la plaque FGM est ainsi appelée plaque S-FGM.

I.4.1.3. Propriétés matérielles de plaque E-FGM :

La fonction exponentielle est utilisée largement par les chercheurs pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la figure I.10 représente la variation du module d' Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM.

La fonction exponentielle est donnée par Delale [Delale. 1983]:

$$E(z) = Ae^{\beta(z+\frac{h}{2})} \quad (\text{I.10a})$$

Avec :
$$A=E_2, \text{ et } \beta = \frac{1}{h} \ln \frac{E_1}{E_2} \quad (\text{I.10b})$$

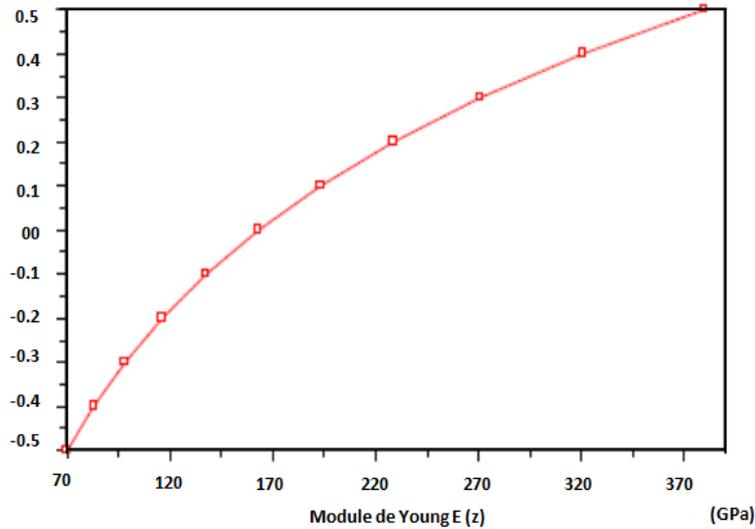


Figure I.10. La variation du module d' Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM [Delale. 1983].

I.4.2. Le modèle du Mori-Tanaka:

Le modèle Mori-Tanaka [Tanaka. 1997] est utilisé pour estimer les propriétés effectives du matériau. Elle représente à peu près l'interaction entre les inclusions voisines et elle est généralement applicable à des régions de la microstructure graduée ayant une matrice continue bien définie et une phase particulière discontinue, telle que représentée sur la figure I.11 (a). Il est supposé que la phase de matrice, indiquée par l'indice 1 est renforcée par des particules sphériques d'une phase particulière, désignée par l'indice 2. Dans cette notation, K_1 , μ_1 et V_1 représentent la masse volumique, le module de cisaillement et la fraction volumique de la phase de matrice, respectivement. μ_2 et V_2 représentent les propriétés du matériau correspondant et la fraction volumique de la phase particulière. Il est connu que la constante λ est reliée à la masse volumique et le modules de cisaillement par la relation suivante :

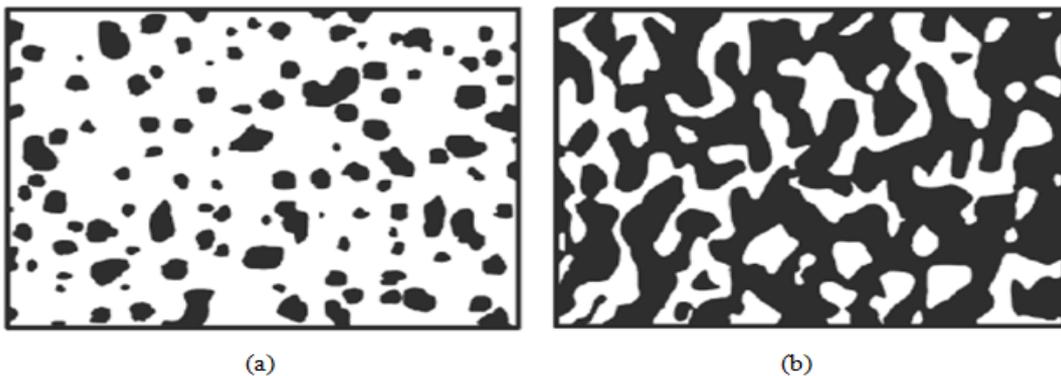


Figure I.11. Matériaux à deux phases (a) des particules en microstructure (b) Squelette en microstructure [Kanaun. 2008]

$$\lambda = K - \frac{2\mu}{3} \quad (\text{I.11})$$

La densité de la masse effective est donnée exactement par la règle des mélanges, eq. (I.3).

$$\rho = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 \quad (\text{I.12})$$

Selon le procédé de Mori-Tanaka pour une distribution aléatoire des particules isotropes dans une matrice isotrope, le module de compressibilité K localement efficace et le module de cisaillement μ sont donnés par:

$$\frac{K - K_1}{K_2 - K_1} = \frac{V_2}{1 + (V_1 - V_2) \frac{K_2 - K_1}{3K_1 + 4\mu_1}} \quad (\text{I.13})$$

$$\frac{\mu - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} = \frac{V_2}{1 + (V_1 - V_2) \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + f_1}} \quad (\text{I.14})$$

Où :

$$f_1 = \mu_1 \frac{9K_1 + 8\mu_1}{6(K_1 + 2\mu_1)} \quad (\text{I.15})$$

La variation à travers l'épaisseur de V_2 est supposée être donnée par la fonction de puissance suivante:

$$V_2 = V_2^- + (V_2^+ - V_2^-) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^N \quad (\text{I.16})$$

Où les exposants + et - signifient respectivement les valeurs de la quantité sur la partie supérieure et les surfaces inférieures de l'élément structural et le paramètre N décrit la variation de la phase 2.

Par exemple, $N = 0$ et $N = \infty$ correspondent à des distributions uniformes de phase 2 avec des fractions de volume V_2^+ et V_2^- respectivement. Rappelant que le module de compressibilité K et le module de cisaillement μ sont liés au module Young E et le coefficient de poisson par les formules suivantes [Kanaun. 2008] :

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{I.17})$$

Les valeurs effectives du module d' Young et le coefficient de Poisson sont données comme :

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu}, \quad \nu = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)} \quad (\text{I.18})$$

I.4.3. Le modèle auto-cohérent :

Le procédé auto-cohérent [Hill. 1965] suppose que chaque inclusion de renforcement est noyé dans un matériau continu, dont les propriétés efficaces sont celles du composite. Cette méthode ne permet pas de distinguer entre la matrice et les phases de renforcement et le même module d'ensemble sont prévus dans un autre composite, dans lequel les rôles respectifs des phases sont remplacés. Cela le rend particulièrement approprié pour la détermination des modules effectifs dans les régions qui ont du squelette en microstructure interconnecté comme représenté sur la figure I.11 (b). Les modules élastiques locale, K et μ par la méthode d'auto-cohérent sont donnés par :

$$\frac{\delta}{K} = \frac{V_1}{K - K_2} \frac{V_2}{K - K_1} \quad (\text{I.19})$$

$$\frac{\eta}{\mu} = \frac{V_1}{\mu - \mu_2} \frac{V_2}{\mu - \mu_1} \quad (\text{I.20})$$

Ou :

$$\delta = 3 - 5\eta = \frac{K}{K + \frac{3\mu}{3}} \quad (\text{I.21})$$

Ces expressions sont implicites pour les inconnues K et μ . Après substitution pour δ équ (I.19) peut être résolue pour K en termes de μ sous la forme :

$$\frac{1}{K + \frac{4\mu}{3}} = \frac{V_1}{K_1 + \frac{4\mu}{3}} + \frac{V_2}{K_2 + \frac{4\mu}{3}} \quad (\text{I.22})$$

Ça donne :

$$K = \frac{1}{\frac{V_1}{K_1 + \frac{4\mu}{3}} + \frac{V_{2,1}}{K_2 + \frac{4\mu}{3}}} - \frac{4\mu}{3} \quad (I.23)$$

Le paramètre μ est obtenu en résolvant de l'équation suivante :

$$(1 - \eta)\mu^2 + [\eta(\mu_1 + \mu_2) - (V_1\mu_1 + V_2\mu_2)]\mu - \eta\mu_1\mu_2 = 0 \quad (I.24)$$

Où le paramètre η peut être trouvé à partir de l'équation. (I.21). Etant donné que l'équation (I.24) doit être résolue pour trouver le module de cisaillement μ , en général, il est plus facile d'utiliser la méthode Mori-Tanaka que le modèle d'auto-cohérent.

Il convient de noter que les différences dans la distribution de propriétés matérielles entre le Mori-Tanaka et le modèle d'auto-cohérent sont négligeables.

I.5. Caractérisation des propriétés :

La méthode la plus simple pour estimer la composition transitoire d'un FGM est d'appliquer la règle des mélanges. En utilisant un procédé similaire à calculer un problème classique de la conduction thermique dans un corps constitué de couches multiples, la conductivité thermique et le gradient de température d'un FGM unidimensionnel peut alors être déterminé [Hopkinson. 2006].

I.5.1. Propriétés thermiques :

I.5.1.1. Coefficient de dilatation thermique :

L'expansion ou la contraction thermique d'un matériau est donnée par le coefficient de dilatation thermique et la différence de température connue. En raison de la composition et de la structure variée dans un FGM, la dilatation thermique de différents composants affecte de manière significative la performance fonctionnelle et mécanique des FGM.

La recherche a été consacrée à l'étude de la dilatation thermique dans les FGM afin d'optimiser la composition graduelle à travers la relaxation des contraintes thermiques. Le coefficient de dilatation thermique (CTE) peut être mesuré à l'aide d'un dilatomètre. Une mesure détaillée en deux ou trois dimensions peut être faite en utilisant l'interférométrie laser ou corrélation d'images numériques [Miyamoto. 1999, Hopkinson. 2006].

I.5.2. Module d'élasticité :

Pour déterminer le module d' Young globale d'un FGM, la courbe contrainte-déformation habituelle peut être mesurée par la fixation d'une jauge de contrainte à la surface de l'échantillon lors d'un essai de flexion à quatre points.

La dépendance du module d'Young de la composition d'un FGM peut être estimée par la mesure des fréquences de résonance en flexion d'un spécimen de barres rectangulaires en utilisant une technique de résonance forcée.

Alternativement, la distribution du module d' Young et le coefficient de Poisson peut être mesurée simultanément en utilisant LFB (line-focus-beam) microscope acoustique. L'intensité relative de l'onde de la surface-reflétée reçue est mesurée en fonction de la distance entre la lentille acoustique et l'échantillon [Miyamoto. 1999, Hopkinson. 2006].

I.5.3. La déformation et la résistance :

La résistance et la déformation d'un FGM sont généralement évaluées par des essais de traction et des essais de flexion à trois ou quatre points. La contrainte résiduelle, provenant du refroidissement de la température de traitement, a une forte influence sur le comportement à la traction des FGM en changeant l'état de contrainte à la traction ou à la compression, et par écrouissage lorsque la limite élastique est dépassée [Miyamoto. 1999, Hopkinson. 2006].

I.6. Une revue sur les techniques de fabrication des matériaux à gradient de propriétés :

Afin de fabriquer avec succès les spécimens FGM, les chercheurs ont appliqué la combinaison optimale de plusieurs méthodes en fonction des propriétés des composants de matériaux [Kiebeck. 2003, Miyamoto. 1999, Li. 2003, Jamaludin. 2013]. Les techniques existantes et les plus à jour pour la fabrication des FGM seront examinés en ci-dessous [Jamaludin. 2013] :

I.6.1. Procédé de poudre sèche:

PM (powder metallurgy) est une technologie apparente pour la fabrication du FGM et elle est de plus en plus utilisée pour créer des gradients sur les matériaux. Cette méthode est appropriée pour la fabrication du FGM utilisant des matériaux solides.

Ici la technique est utilisée pour produire des matériaux à gradient de propriétés en trois étapes de base à savoir : le pesage et le mélange de poudre en fonction de la répartition

spatiale de préconçue comme dictée par l'exigence fonctionnelle, d'empilage et de damage des poudres pré-mélangées, et enfin, le frittage comme illustré à la figure I.12.

La méthode de métallurgie des poudres est l'une des techniques les plus couramment utilisées en raison de son contrôle de la grande plage de la composition, la microstructure et la capacité de mettre des formes [Ramachandran. 2015, Wazery. 2012, Saiyathibrahim. 2015].

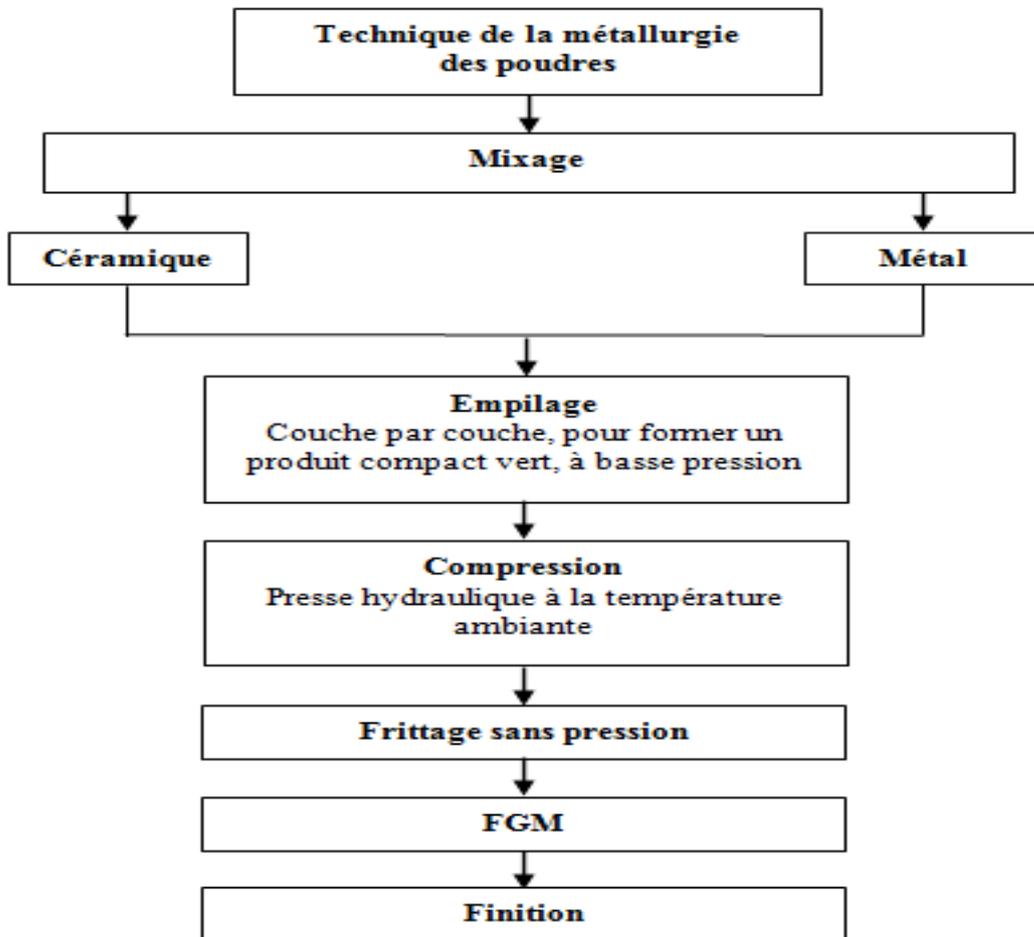


Figure I.12. Organigramme de technique de la métallurgie des poudres pour la production des FGM [Saiyathibrahim. 2015]

I.6.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting) :

Le coulage en barbotine est une poudre basée sur une méthode de mise en forme traditionnelle appliquée dans l'industrie céramique. En général le coulage en barbotine est un procédé de filtration où la poudre suspendue est versée dans un moule en plâtre poreux. En raison des forces capillaires résultantes le liquide élimine la suspension et les particules de poudre sont forcées vers les parois. Le gradient sera formé en changeant la composition ou la taille des grains de la suspension de poudre appliquée pendant la procédure de coulée en

barbotine. Cette technique nécessite également l'étape ultérieure de consolidation, où la poudre est densifiée (frittée) et une structure de gradient de propriétés FGM sera produite [Katayama. 2011].

I.6.3. Coulage centrifuge (centrifugal casting):

La force centrifuge peut être utilisée pour créer une composition de gradient dans une masse fondue métallique qui contient une autre phase solide. En général, la fabrication du FGM par le procédé de centrifugation est classée en deux catégories en fonction de la température de fusion de la particule de renforcement. Si le point de fusion est significativement plus élevé que la température de traitement, la particule de renfort reste solide dans une matrice liquide.

Cette méthode est appelée la méthode particule-solide centrifuge (CSPM). Le renforcement sélectif de la surface du composant obtenu par les résultats CSPM une résistance à l'usure plus élevée dans la surface extérieure ainsi que le maintien de haute ténacité en vrac. D'un autre côté, si le point de la particule de renfort de fusion est inférieur à la température de traitement, la force centrifuge peut être appliquée au cours de la solidification à la fois à la particule de renfort et à la matrice.

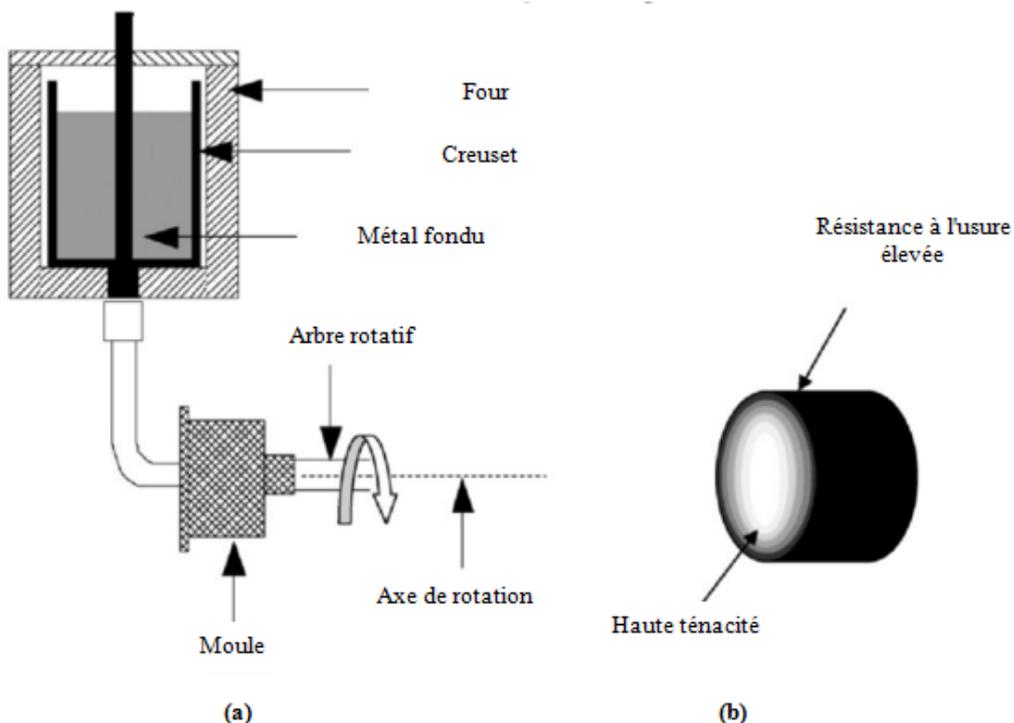


Figure I.13. Représentation schématique du : (a)- procédure de coulage centrifuge Horizontale (b)- Le produit final obtenu (Al : haute ténacité et SiC : résistance à l'usure élevée) [Saiyathibrahim . 2015]

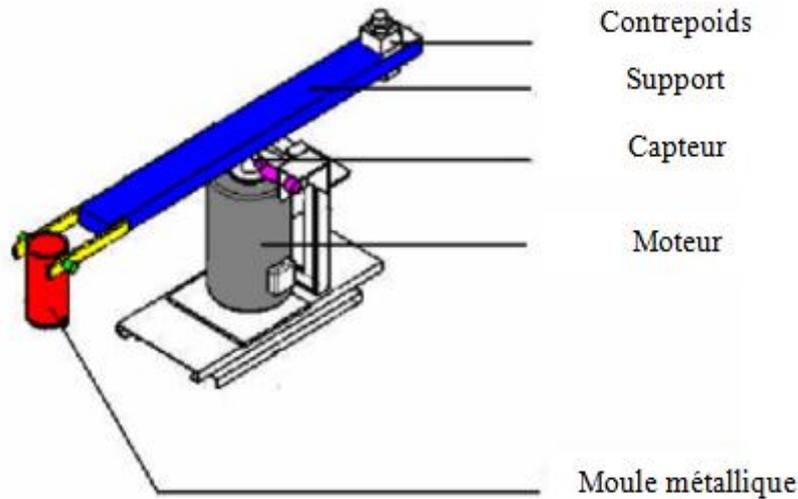


Figure I.14. Installation du coulage centrifuge verticale [Saiyathibrahim. 2015]

I.6.4. Coulage en bande :

Le procédé de coulée de bande est représenté sur la figure I.15. L'épaisseur de la bande coulée est généralement comprise dans l'intervalle de 25 μ m et 1mm. Les bandes minimales inférieures à 1 μ m pourraient être produites.

Les différentes étapes de coulage en bande sont, 1)- élaboration de la matière qui contient de l'eau, des particules de poudre et de liant, 2)- le séchage du corps vert ou de la bande, 3)- la consolidation de la matière dense de bande. Afin d'obtenir un FGM des bandes ou des différents composites ont été préparés. Des unités carrées ont été coupées à partir des bandes vertes qui ont ensuite été placés les uns sur les autres.

Les bandes d'épaisseur appliquée est de l'ordre de 200 μ m. La densification de la bande est obtenue par frittage. Gradients superposés des matériaux en métal-céramique et céramique-céramique sont produits par la coulée de bandes de composition différente et de laminage subséquent.

Anne-Laure Dumont *et al.* [Dumont. 2001] ont fabriqué un FGM en MoSi₂/Al₂O₃ avec des teneurs en alumine variant de 20 à 80% mole en utilisant une combinaison de coulage en bande et la réaction auto-entretenue à haute température (SHS). Après déliantage, les échantillons verts ont été mis à feu à une température ambiante. Les réactions de combustion ont été effectuées sous une charge faible pour améliorer la densification de composition progressive des composites [Dumont. 2001].

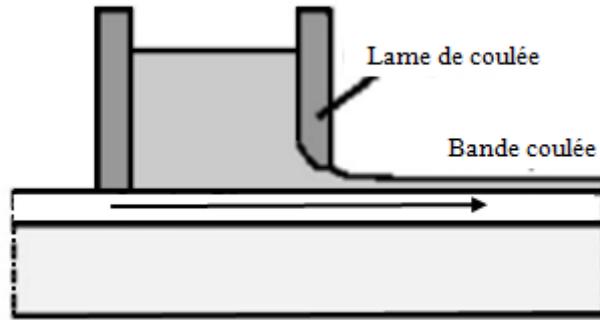


Figure I.15. Système de processus de coulage en bande [Saiyathibrahim. 2015]

I.6.5. Pressage à chaud :

La zircone stabilisée par l'yttria (YSZ) et le nickel 20 chrome (NiCr) sont les deux matériaux combinés en utilisant YSZ-NiCr FGM inter-couche via la méthode de pressage à chaud [Li. 2003]. À l'étape initiale du traitement, la poudre YSZ et NiCr ont été mélangés dans la boule fraiseuse pendant 12 h avant d'être empilés couche par couche en graphite filière revêtue de nitrure de bore. Cette étude applique le concept de dégradation progressive en disposant la composition de chaque couche pour être en pourcentage désiré.

Le pré-compactage de chaque couche a été réalisé sous une pression inférieure avant de stocker la couche adjacente sous une pression supérieure (10 MPa) pour assurer la distribution de composition exacte dans les couches. La jonction de YSZ-NiCr qui a été effectuée à 1200 °C pour 1h présente une bonne stabilité thermique et une résistance à l'oxydation jusqu'à 1000 °C avant d'initier la fissure [Ramachandran. 2015, Wu. 2005, Jamaludin. 2013].

I.6.6. Processus de frittage :

La gradation qui a été effectuée dans la poudre compacte doit être préservée au cours du processus de frittage ou de consolidation. Certains des poudres métalliques légers, tels que le magnésium et l'aluminium aura tendance à réagir avec l'oxygène et de se disperser dans l'atmosphère qui doit être évitée afin d'obtenir des matériaux appropriés qui en résultent.

Le procédé de frittage est réalisé en même temps que le processus de compactage si le FGM est préparé au moyen du traitement de pressage à chaud. Cependant dans le processus de pressage à froid, le procédé de frittage est effectué seulement après que les poudres ont été compactés [Watari. 2003, Jamaludin. 2013].

I.6.7. Processus d'infiltration :

Infiltration ou le terme scientifique appelé l'hydrologie est le processus pour lequel le fluide sur la surface précipite dans le sol. Ce processus est dirigé soit par la gravité ou la forces d'action capillaire. Le taux d'infiltration est dépend des caractéristiques du sol tels que la capacité de stockage, le taux de transmission à travers le sol et la facilité d'entrée. Le taux et la capacité du processus d'infiltration peut être contrôlée en ajustant certains paramètres, y compris la texture du sol, les types de végétation et de la couverture, la teneur en eau dans le sol, la température du sol et de l'intensité des précipitations. Comme le processus commun pour la mise en forme du moule est le chauffage de la poudre à une température qui est supérieure à la phase liquide.

D'après la littérature, il existe un nombre limité de mise en œuvre du processus d'infiltration. La méthode d'infiltration a été mise en place pour le traitement des FGM depuis de nombreuses années auparavant. Un gradient de composition Al-SiCp a été fabriqué avec succès en utilisant la méthode d'infiltration sans pression au début de la dernière décennie. Il a été indiqué que la conductivité thermique du FGM produit de plus en plus tendance non linéaire tandis que la fraction volumique de l'élément en céramique diminue [Cho. 2004, Jamaludin. 2013].

I.6.8. Projection thermique :

La projection thermique est une technique pour laquelle une structure est revêtue de matériaux fondus à travers d'un processus de pulvérisation. Concernant le processus avec la préparation FGM, les matières fondues seront les matériaux à gradient variés qu'ont construit des couches de revêtement. Dans ce procédé, le précurseur de revêtement est chauffé électriquement ou chimiquement. Un des avantages de l'utilisation de cette technique est que ce revêtement peut fournir des revêtements épais (20 μm to mm). En 2002, trois types de revêtements à gradient de propriétés de barrière thermique (TBCs) ainsi que des revêtements en double avec la même résistance thermique ont été conçus dans le but d'étudier le comportement thermique à la rupture des structures FGM [Jamaludin. 2013].

I.7. Application :

Le concept du FGM est applicable à de nombreux domaines. Dans les applications d'ingénierie à des outils de coupe, pièces de machines, et les composants du moteur, des propriétés incompatibles telles que la chaleur, l'usure et résistance à la corrosion ainsi que la

ténacité et l'usinage sont incorporés dans une seule pièce. Diverses combinaisons de ces fonctions habituellement incompatibles peuvent être appliquées afin de créer de nouveaux matériaux pour l'aéronautique, les usines chimiques et les réacteurs nucléaires. Quelques-unes des applications des FGM sont discutées ci-dessous :

I.7.1. Dans l'aérospatiale et l'automobile :

Le secteur de l'aérospatiale est l'un des secteurs qui montre plus d'intérêt au développement des FGM. NASA et la JAXA ont montré un grand intérêt au développement de cette technologie. Comme le coût de lancement des navettes spatiales dépend du poids qu'ils soulèvent dans l'espace, la création de pièces avec des éléments de connexion moins est une solution. En outre, la conception optimale, l'équilibre entre le poids et la performance peut réduire les coûts de lancement. La performance et la sécurité sont toujours très préoccupantes dans l'aérospatiale. La protection de bouclier thermique des navettes spatiales pourrait être optimisée pour réduire le poids et augmenter la fiabilité en utilisant des plaques FGM.

Bhatt [Bhatt. 2000] a montré l'utilisation de céramiques à base de nitrure de silicium pour les aubes de distributeur de turbine. Le nitrure de silicium supporte des températures élevées, mais a un coût de traitement élevé et faible résistance aux chocs. En utilisant des technologies SFF, la métallurgie des poudres et la coulée de gel ont été étudiés comme des alternatives pour produire des pièces viables. Aboudi, Pindera et Arnold [Aboudi. 2000] ont présenté l'utilisation des FGM pour adapter la réponse des composants structurels par la théorie d'ordre élevé. L'objectif était d'analyser la performance du gradient par la modélisation de la microstructure en utilisant le modèle de l'élément fini (FEM). Des travaux ultérieurs présentés par Arnold [Arnold. 2001] appliquent le modèle théorique pour simuler la réponse du FGM pour le refroidissement des plaques de blindage thermique pour les navettes spatiales [Hopkinson. 2006, Saiyathibrahim. 2015].

I.7.2. Dans la médecine :

Parmi les applications pour les FGM, les implants médicaux semblent un fort champ de la recherche. Le but d'utiliser les FGM pour produire des implants est d'utiliser les propriétés mécaniques des alliages, céramiques et composites gradué avec des matériaux biocompatibles. Ainsi, un implant osseux peut être constitué par un matériau solide et dur

dans le noyau avec le tissu osseux gradué compatible à la surface et un matériau de faible coefficient de frottement dans les articulations.

Watari *et al.* [Watari. 2003] ont présenté un procédé pour la fabrication d'implants dentaires en titane et hydroxyapatite en céramique. La base de l'implant a été faite de l'hydroxyapatite à insérer dans la mâchoire. L'implant était en titane gradué vers le haut, afin de recevoir la prothèse dentaire. L'expérience a montré le tissu osseux succès croissant autour de l'insert. L'implant a été produit par une graduation de titane et hydroxyapatite en poudre dans un moule en caoutchouc de silicone qui a été soumise à une pression isostatique à froid et ensuite fritté dans un four.

Chu *et al.* [Chu. 1999] ont également étudié les FGM avec le titane et hydroxyapatite et les résultats ont montré que l'amélioration des propriétés mécaniques de l'implant a été obtenue et aucun problème interfaciale n'a été détecté. Roop Kumar et Maruno [Kumar. 2002] ont également ajouté le verre à la poudre d'hydroxyapatite et des implants en titane revêtus pour une meilleure biocompatibilité. Les couches de verre et de verre/zircone graduée ont été utilisées pour enrober l'alumine substrats par Vitale Brovarone *et al.* [Brovarone. 2001]. La graduation était nécessaire en raison du coefficient de dilatation différent et l'incompatibilité entre le substrat et les revêtements. Les revêtements fournis une bonne biocompatibilité et l'alumine fourni de bonnes propriétés mécaniques [Hopkinson. 2006, Saiyathibrahim. 2015].

I.7.3. Dans la défense :

L'une des caractéristiques les plus importantes du matériau à gradient de propriétés est la capacité à empêcher la propagation de fissure. Un FGM en métal et céramique est utilisés dans les structures comme les portes incombustibles et matériaux résistants à la pénétration pour les plaques de blindage et les gilets pare-balles. Une des compositions disponible de matériaux à gradient de propriétés est la combinaison entre le titanium et le titanium diboride, combinant la céramique capable à absorber l'énergie avec la tenacité du métal- idéal pour les solutions de blindage du véhicule [Hopkinson. 2006, Saiyathibrahim. 2015].

I.7.4. Dans l'industrie :

Un rouleau en céramique adapté pour diverses applications dans les industries hybrides constitué de nitrure de silicium comme matériau de base. Ce matériau possède d'excellentes propriétés mécaniques, idéal pour les applications de support de charge. Dans de nombreux

cas, les composants entiers sont réalisés en carbure de tungstène, pour une application nécessitant des propriétés de résistance à l'usure. Avec un gradient, l'utilisation de carbures coûteux peut être réduite au minimum; réduisant ainsi le coût total du composant. Les composites à gradient de propriétés à matrice métallique (FGMMCs), particulièrement gradient à matrice d'aluminium, ont été utilisés dans des applications importantes dans l'industrie tels que l'emballage électronique, les ensembles de frein de rotor dans l'industrie automobile et les matériaux de blindage [Saiyathibrahim. 2015].

I.7.5. Articles de sports :

Divers composants et accessoires sportifs peuvent bénéficier de l'utilisation du FGM. Par exemple, pointes en carbure ont été fabriqués pour les chaussures de baseball afin de réduire l'usure. Entre la pointe et de la structure des chaussures une région à matériau gradué a été produite afin de réduire l'impact sur les extrémités [JAXA and JST. 2004]. Ceci est un excellent exemple comment les FGM pourraient être utilisées pour produire des articles de sport de haute performance. Avec la même idée de réduction d'usure, des outils d'escalade sur glace tels que crampons et piolets pourraient être gradué avec le carbure de tungstène dans les arêtes vives qui capte la glace. Les outils de l'escalade de rocher auraient également le même avantage de réduire l'usure tels que sur les surfaces de came [Hopkinson. 2006, Saiyathibrahim. 2015].

I.8. Conclusion :

Les matériaux à gradient de propriétés sont une classe de composites qui ont une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à une autre et ainsi élimine les concentrations de contraintes trouvées dans les composites stratifiés. La gradation des propriétés du matériau réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et la concentration de contrainte. Ce chapitre a présenté une définition et un aperçu historique sur les matériaux à gradient de propriétés ainsi que les diverses techniques appliquées pour la fabrication des FGM. Les techniques comprennent la méthode de coulage séquentiel en barbotine, le processus d'infiltration, les processus de coulée graduées et la projection thermique, chaque technique à ses propres avantages et inconvénients en point de vue de différentes applications d'ingénierie. Cette partie a présenté aussi les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du FGM suivant l'épaisseur de la plaque ainsi que leur domaine d'application.

CHAPITRE II

**UNE REVUE DE LITTERATURE
DES THEORIES ET DES ETUDES
SUR LES PLAQUES FGM**

II.1. Introduction :

La modélisation d'un matériau est un moyen de transcrire son comportement et les lois qui le régissent. Il existe de nombreuses possibilités de modélisation qu'elle soit analytique, numérique. Dans ces dernières années beaucoup de recherches ont été effectuées pour répondre aux problèmes liés à la modélisation des structures avec une forte anisotropie. Ce chapitre présente une revue bibliographique sur les différents types de modèles ou approches employés pour les matériaux composites et les théories qui s'y rattachent. En général, ces hypothèses permettent la réduction d'un problème en trois dimensions à un problème bidimensionnelle.

Une revue exhaustive de la littérature décrivant l'état de l'art de la recherche sur les structures en matériaux à gradient de propriétés sera présenté aussi dans ce chapitre. Au cours des 20 dernières années, l'ensemble des travaux de recherche sur les FGM a été augmenté considérablement. Cette partie résume quelques-unes des dernières œuvres dans l'analyse des structures FGM et démontrera qu'il existe un besoin réel pour des recherches plus approfondies sur le problème des structures FGM.

II.2. Les différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles :

II.2.1. Approche monocouche équivalente :

Les théories des couches équivalentes (ESL) sont dérivées de la théorie de l'élasticité 3-D en faisant des hypothèses appropriées concernant la cinématique de déformation ou de l'état de contrainte à travers l'épaisseur du stratifié, Nous présentons ici une revue des théories monocouches équivalentes.

Les théories monocouches équivalentes en stratifié sont celles dans lesquelles une plaque stratifiée hétérogène est traitée comme un équivalent statique, la couche unique ayant un comportement constitutif isotrope, ce qui réduit le problème continu 3-D à un problème 2-D.

Les théories ESL sont développées en supposant par la forme du champ de déplacement ou de champ de contrainte comme une combinaison linéaire de fonctions inconnues et les coordonnées d'épaisseur.

La théorie stratifiée ESL la plus simple est la théorie classique de la plaque laminée (CLPT), qui est une extension de la théorie de la plaque de Kirchhoff (classique) des plaques

composites stratifiées. L'hypothèse Kirchhoff implique que les lignes droites perpendiculaires au plan médian de la plaque avant déformation restent droites et normales à la surface moyenne après la déformation, et par conséquent, à la fois l'effet du cisaillement transverse et l'effet transverse normal sont négligés. Dans la plupart des cas, ces hypothèses tiennent. Cependant, pour les stratifiés épais et les stratifiés avec un haut degré d'anisotropie, les effets de déformation transversales peuvent être importants.

La prochaine théorie dans la hiérarchie des théories de stratifié ESL est le premier ordre. Les théories de déformation de cisaillement (FSDT), qui prolongent la cinématique du CLPT en incluant une déformation de cisaillement transversal brut dans ses hypothèses cinématiques, à savoir, la déformation de cisaillement transversal est supposée être constante par rapport aux coordonnées de l'épaisseur. L'inclusion de cette forme rudimentaire de déformation de cisaillement permet la restriction de la normalité de la théorie classique des stratifiés pour être détendu. La théorie du premier ordre de déformation de cisaillement nécessite des facteurs de correction de cisaillement, qui sont difficiles à déterminer pour les structures composites stratifiées arbitrairement. Les facteurs de correction de cisaillement dépendent non seulement des paramètres de laminage et géométriques, mais aussi de la charge et les conditions aux limites [Carlos. 1999].

Les théories de la plaque laminée ESL de deuxième et d'ordre supérieur utilisent des polynômes d'ordre supérieur dans l'expansion des composantes de déplacement à travers l'épaisseur du stratifié. Les théories d'ordre supérieur introduisent des inconnues supplémentaires qui sont difficiles à interpréter en termes physiques.

En plus de leur simplicité inhérente et le faible coût de calcul, les modèles d'ESL fournissent souvent une description suffisamment précise de la réponse globale mince à modérément épaisse stratifiés, par exemple, les flèches brutes, les charges du flambement critique, les fréquences fondamentales de vibration et les formes de mode associés. Parmi les théories de l'ESL, la théorie FSDT avec l'extensibilité transversale semble fournir une solution précise, économique et simple. Cependant, les modèles d'ESL ont des limitations qui les empêchent d'être utilisé pour résoudre l'ensemble du spectre des problèmes de stratifiés composites. Tout d'abord, la précision de la réponse globale prédite par les modèles d'ESL se détériore lorsque le stratifié devient plus épais. Deuxièmement, les modèles d'ESL sont souvent incapables de décrire avec précision l'état de contrainte et de déformation au niveau du pli près de géométriques et matérielles discontinus ou régions proches de chargement

intense - les zones où les contraintes précises sont le plus nécessaires. Dans de tels cas, les théories 3D ou des modèles d'approches multiples sont requis [Carlos. 1999].

II.2.1.1. Théorie classique des plaques:

Une plaque est un élément structurel de forme plane avec des dimensions qui sont importantes par rapport à son épaisseur et est soumis à des charges qui provoquent une déformation de flexion en plus de l'étirement.

Dans la plupart des cas, l'épaisseur ne dépasse pas un dixième de la plus petite dimension dans le plan. En raison de la petitesse de dimension d'épaisseur, il n'est pas souvent nécessaire de les modéliser en utilisant des équations d'élasticité 3D. Les théories simples 2D de la plaque peuvent être développées pour étudier la déformation et les contraintes dans les structures de la plaque.

Les théories de plaques sont développées en utilisant la méthode semi-inverse dans lequel une supposition est faite quant à la forme du champ de déplacement ou de champ de contrainte, en laissant assez de liberté dans le champ supposé pour satisfaire les équations de l'élasticité. Dans le cas des poutres, des plaques et des coques, le champ de déplacement est en termes de fonctions inconnues φ_i^j des coordonnées de surface (x, y) et le temps t:

$$u_i(x, y, z, t) = \sum_{j=0}^N (z)^j \varphi_i^j(x, y, t) \quad (\text{II.1})$$

Les équations régissant φ_i^j sont déterminées de telle sorte que le principe des déplacements virtuels est satisfait.

L'extension de la théorie des poutres d'Euler -Bernoulli aux plaques est connue comme la théorie des plaques de Kirchhoff ou de la théorie classique de la plaque (CPT). La théorie classique de la plaque est celui dans laquelle le champ de déplacement est basé sur l'hypothèse Kirchhoff, qui se compose des trois parties suivantes :

- 1- Les lignes droites perpendiculaires à la surface médiane (les normales transversales) avant déformation restent droites après déformation.
- 2- Les normales transversales ne subissent pas élongation (ils sont inextensibles).
- 3- Les normales transversales tournent de telle sorte qu'ils restent perpendiculaires à la surface du milieu après déformation.

Les hypothèses de Kirchhoff impliquent, comme discuté ci-dessus, la forme suivante du champ de déplacement qui suit des déformations dépendant du temps [Reddy. 2007] :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

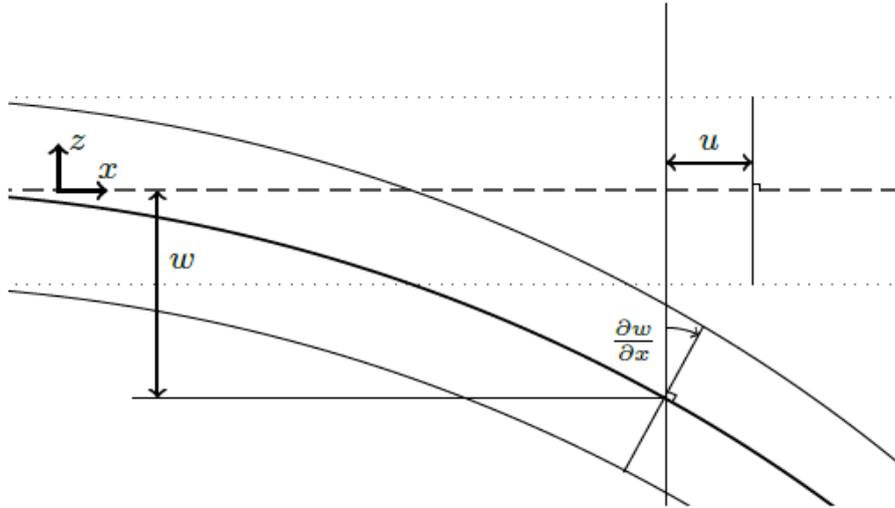


Figure II.1. Paramètres géométriques d'une structure monocouche avec le modèle de Love-Kirchhoff.

II.2.1.2. Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre FSDT :

La théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre est plus communément connue comme la théorie de la plaque de Mindlin; l'idée originale d'une telle expansion peut être trouvée dans les travaux de Basset [Basset. 1890], Hildebrand [Hildebrand.1949] et Hencky [Hencky. 1947]. La théorie du premier ordre de déformation de cisaillement donne une valeur constante de déformation de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la plaque, et nécessite donc des facteurs de correction de cisaillement.

Les facteurs de correction de cisaillement sont des quantités adimensionnelles introduites pour tenir compte de l'écart entre l'état constant de contraintes de cisaillement dans la théorie du premier ordre et la distribution quadratique ou d'ordre supérieur des contraintes de cisaillement dans la théorie de l'élasticité. Pour les composites stratifiés, les facteurs de correction de cisaillement, en général, dépendent des propriétés constitutives de la couche, dispositif de stratification, et le type de structure (à savoir, la géométrie et les conditions aux limites) [Ochoa. 1992].

Le champ de déplacement dans la théorie de déformation du cisaillement du premier ordre est [Carlos. 1999] :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Où $(u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y)$ sont des fonctions inconnues à déterminer. (u_0, v_0, w_0) indiquent les déplacements d'un point dans le plan $z=0$.

Avec :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \phi_x, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \phi_y \quad (\text{II.4})$$

ϕ_x, ϕ_y indiquent les rotations du normal transversal autour les axes y et x respectivement

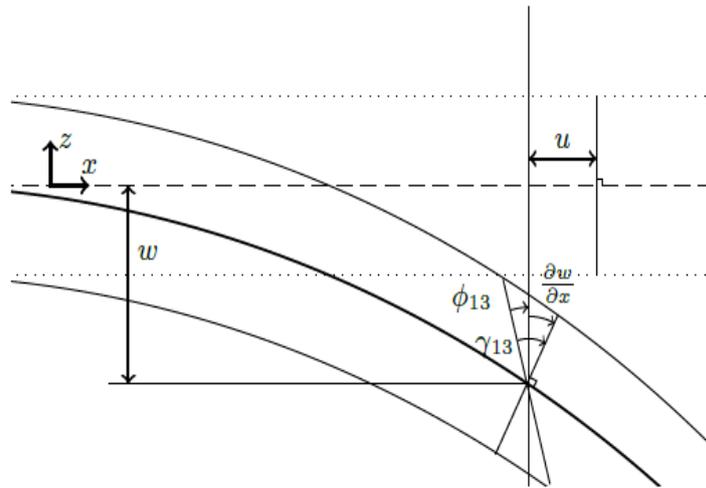


Figure II.2. Paramètres géométriques d'une structure monocouche avec le modèle de Mindlin-Reissner.

II.2.1.3. Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé HSDT :

Pour franchir les limites des théories du premier ordre et pour estimer correctement la distribution non linéaire des déformations de cisaillement transversales le long de l'épaisseur de la plaque, un certain nombre de théories d'ordre supérieur de déformation de cisaillement de la plaque ont été développés. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement dans l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (voir figure II.3). Comme les

théories HSDT se sont avérées être tout à fait applicable à des plaques composites stratifiés. Les théories développées de la plaque de Murthy [Murthy. 1981] qui emploient des polynômes du troisième ordre pour étendre le déplacement dans un plan à travers l'épaisseur de la plaque, qui à son tour exclut la nécessité de facteurs de correction de cisaillement. Cependant, dans les théories de la plaque de Murthy [Murthy. 1981] il a utilisé les équations d'équilibres de la théorie classique de la plaque, qui est variationnellement incompatible avec la cinématique des déplacements.

Afin de remédier à ce défaut, Reddy [Reddy. 1984] a présenté sa théorie de la plaque en 1984, qui développe des équations d'équilibre variationnellement cohérentes pour les plaques.

La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'expriment suivant les directions comme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{II.5})$$

En principe, ces modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision est augmentée avec l'ordre du développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cette technique est peu adoptée par les chercheurs à cause de son coût élevé en termes de calcul. Dans ce contexte, plusieurs simplifications ont été proposées afin de réduire le nombre de paramètres de déplacement. Une de ces simplifications consiste à raccourcir les derniers termes de la série de Taylor en introduisant une "fonction de cisaillement". La forme du déplacement proposée à travers l'épaisseur est alors la suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

$f(z)$ peut être considérée comme la fonction de cisaillement qui permet de déterminer la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur. Selon cette fonction $f(z)$, nous pouvons distinguer quelques modèles d'ordre supérieurs importants dans la littérature qui sont décrites comme suit:

La théorie de la plaque d'ordre supérieur de J. N. Reddy [Reddy. 1984] est considérée comme la théorie la plus populaire utilisée pour l'analyse de plaques composites stratifiées.

Selon Liu [Liu. 2011], un autre HSDT a été développé par Ambartsumian [Ambartsumian. 1969] dans lequel il propose une autre fonction de contrainte de cisaillement transversale afin d'expliquer la déformation des couches de plaques anisotropes. Les théories de Reddy et Ambartsumian forment une référence solide pour le développement d'un nouveau HSDT simple. En 2007, Shi [Shi. 2007] a présenté une nouvelle HSDT qui est développée sur la base des théories de Murthy [Murthy. 1981] et de Reddy.

En 2007 Guangyu Shi [Shi. 2007] a présenté une nouvelle théorie de la déformation de cisaillement des plaques, semblable à Reddy dans le sens où elles ont toutes les deux proposé une variation parabolique de la déformation de cisaillement transversal. Les deux théories de Reddy [Reddy. 1998] et Shi [Shi. 2007] sont des théories de troisième ordre, ce qui signifie que le champ de déplacement est supposé être décrit par une fonction de troisième ordre.

Les théories de Touratier [Touratier. 1991] (Distribution de déformation transversale en fonction sinus). Soldatos [Soldatos. 1992] (théorie des déformations de cisaillement hyperbolique). Mechab [Mechab. 2010] (théorie de déformation de cisaillement hyperbolique). Karama [Karama. 1998] (Variation exponentielle pour la déformation transversale).

Aydogdu [Aydogdu. 2006] a présenté en 2006 une étude dans laquelle il a comparé diverses théories HSDT avec l'analyse en trois dimensions disponibles. Il a montré que, bien que le déplacement transversal et les contraintes soient mieux prédits par la théorie de la déformation de cisaillement exponentielle [Karama. 1998], les théories de déformation de cisaillement parabolique (Reddy) et la déformation de cisaillement hyperbolique (Soldatos) donnent des prévisions plus précises pour les fréquences naturelles et les charges de flambement.

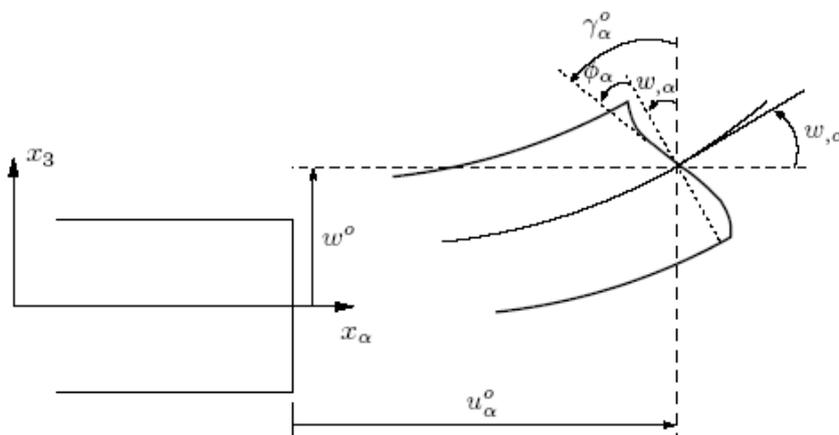


Figure II.3. Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

La figure II.4 montre une illustration de la façon dont la CPT, FSDT et HSDT diffèrent les uns des autres en termes de déplacements dans le plan

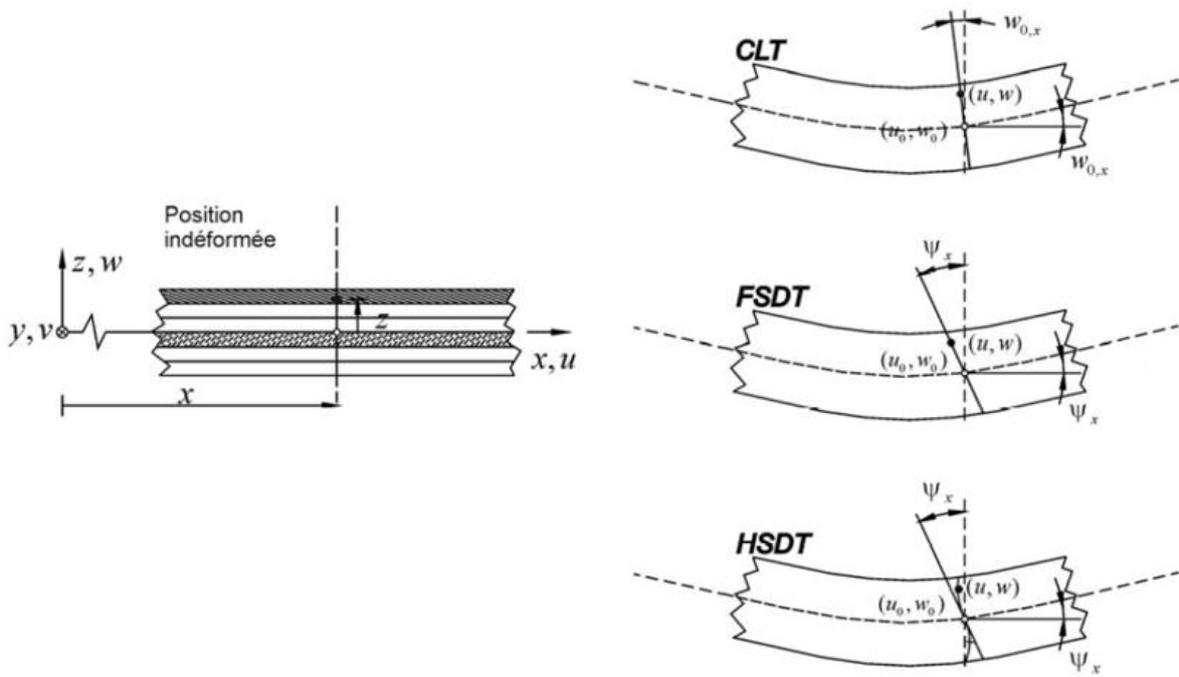


Figure II.4. Géométries non déformées et déformées d'une plaque selon les trois théories CLPT, FSDT et HSDT

On représente ci-dessous quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui diffèrent par la fonction de cisaillement $f(z)$:

Ambarsumyan
$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$$

Murthy et Reddy
$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$$

Touratier
$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$$

Ferreira
$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$$

Reissner
$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - 4 \frac{z^2}{3h^2} \right)$$

Karrama	$f(z) = ze^{-2(z/h)^2}$
Aydogdu	$f(z) = za^{\frac{-2(\frac{z}{h})^2}{\ln(a)}} \quad a > 0$
Soldatos	$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$

II.2.2. Approche par couche :

Les théories précédentes de l'approche monocouche équivalente n'arrivent pas à prédire avec exactitude les déformations et les contraintes locales, parce que ces dernières dépendent de l'ordre d'empilement des couches et leur rigidité élastique constitutives. Pour cela, l'utilisation d'une description par-couche devient nécessaire pour l'obtention d'une description complète en 3D des états des contraintes et des déformations dans les stratifiés. Au contraire d'une cinématique globale, cette approche suppose des champs de déplacement séparément propres à chaque couche matérielle. Elle permet la détermination exacte des contraintes aux niveaux des plis et à fournir une représentation cinématiquement correcte de la déformation dans les couches discrètes stratifiées.

Les théories couche par couche sont développés pour des stratifiés ou des sandwichs avec des couches épaisses simples. Des approximations de déplacement de l'approche par couche fournissent une représentation plus cinématiquement correcte des fonctions de déplacement à travers l'épaisseur, y compris la déformation associée à la coupe transversale de déformation des structures composites épaisses. Par rapport aux modèles monocouche équivalent du modèle par couches partielles fournit une description plus réaliste de la cinématique des stratifiés composites et le comportement de la couche discrète des composants dans le plan [Altenbach. 2004].

Contrairement aux théories ESL, les théories par couche sont développées en supposant que le champ de déplacement est seulement continu à travers l'épaisseur du stratifié. Ainsi, les éléments de déplacement sont continus à travers l'épaisseur du stratifié, mais les dérivés transversaux des déplacements peuvent être discontinu en différents points à travers l'épaisseur, permettant ainsi la possibilité de contraintes transversales continues au niveau d'interfaces séparant des matériaux dissemblables. Les champs de déplacement des théories

par couches fournissent une représentation beaucoup plus cinématiquement correcte de la moyenne à la déformation en coupe sévère associée à la déformation des stratifiés moyennement épais à très épais.

Les idées utilisées de Di sciuva [Di sciuva. 1985] similaires à ceux de Swift [Swift. 1974] et Seide [Seide. 1980] à formuler une théorie basée sur les déplacements, appelé la théorie en zig-zag ou de la théorie de la couche discrète. Le champ de déplacement est supposé être sous la forme [Sih. 1995]:

$$\begin{aligned} u_a(x_\beta, x_3, t) &= u_a^0(x_\beta, t) - x_3 u_{3,a}^0(x_\beta, t) + f_{a\gamma}(x_3) \phi_\gamma(x_\beta, t) \\ u_3(x_\beta, x_3, t) &= u_3^0(x_\beta, t) \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Les fonctions $f_{a\gamma}$ et ϕ_γ sont alors déterminés de telle sorte que les déplacements et les contraintes transversales sont continus au niveau des interfaces des couches. Les fonctions $f_{a\gamma}$ sont présentés à dépendre uniquement sur x_3 et la rigidité de la couche. La théorie du stratifié résultant ne contient que cinq inconnues dépendantes, comme dans la théorie du premier ordre ou la théorie du troisième ordre de Reddy. Ainsi, la théorie de la couche discrète est une théorie monocouche raffinée.

Pour surmonter la violation de la déformation et la contrainte discontinues à travers l'épaisseur de la coque des théories du premier ordre et d'ordre supérieur, les théories de la couche discrète et Zig-Zag ont été développées. Les théories de couches discrètes supposent que la plaque est composée de couches de matières différentes avec une répartition différente du déplacement dans les différentes couches. Cette approche est appliquée tant pour les plaques composites. Pour les plaques en sandwich le parement et le noyau sont généralement définis comme des couches séparées.

Ces théories aboutissent généralement à une représentation assez précise du comportement de la plaque composite mais un inconvénient majeur est qu'elles nécessitent un grand nombre de degrés de liberté pour être en mesure de la représenter grâce à des fonctions de déplacement à travers l'épaisseur. Ce qui affecte de manière significative l'efficacité de calcul qui les rend appropriés que pour les petits problèmes. Les théories zig-zag exigent habituellement un plus petit nombre de degrés de liberté, mais toujours donne une bonne représentation des conditions de continuité et de traction au niveau des interfaces de couche. Certaines de ces théories semblent suffisantes pour les plaques composites.

II.2.2.1. Les modèles zig-zag :

Le modèle zig-zag a été présenté par Di Sciuva [Di sciuva. 1985] Murakami [Murakami. 1986], Cho et Parmerter [Cho. 1993], lu et Liu [Lu. 1996] et d'autres auteurs afin de réduire le nombre de paramètres inconnus. Les déplacements plans de ce modèle ont une variation linéaire (Figure II.5) ou d'ordre supérieur (Figure II.6), dans la direction de l'épaisseur. L'avantage principal du champ de déplacements des modèles zig-zag réside dans l'introduction de la perturbation de l'interface sans augmenter le degré de l'ordre des équations fondamentales de la théorie de couche équivalente. La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en z mais sa dérivée première est discontinue à l'interface. Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

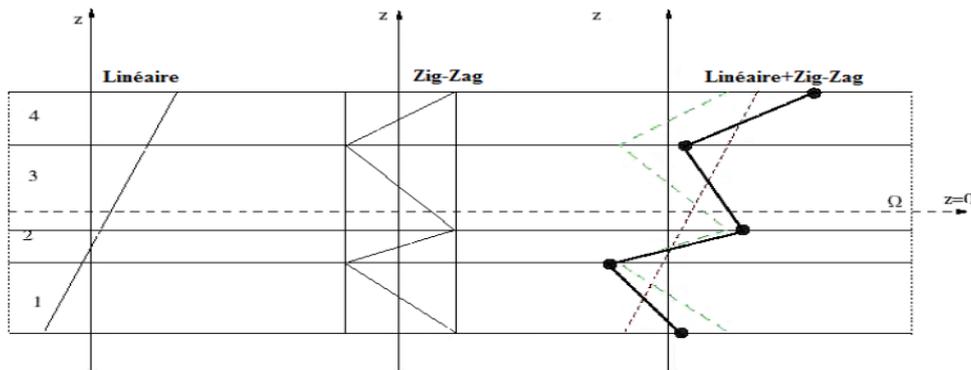


Figure II.5. Champ de déplacements des modèles Zig-Zag du premier ordre [Nguyen. 2004]

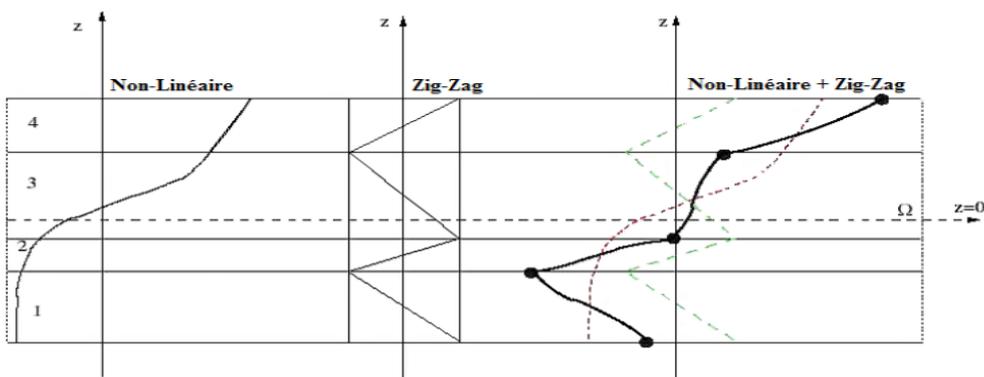


Figure II.6. Champ de déplacements des modèles Zig-Zag d'ordre supérieur [Nguyen. 2004]

Pour trouver un équilibre entre la précision et l'efficacité, l'efficacité des théories de couches discrètes (théories en zigzag) ont été développés pour des plaques élastiques. Di Sciuva [Di sciuva. 1985] et Murakami [Murakami. 1986] ont présenté des théories en zigzag par la superposition d'une couche par couche (zigzag) variation pour les déplacements dans le

plan d'une variation linéaire global, dans lequel l'état zéro des contraintes de cisaillement au niveau de la partie supérieure et inférieure de la plaque n'est pas satisfait.

Di Sciuva [Di sciuva. 1986], Cho et Parmerter [Cho. 1993], Shu et Sun [Shu. 1994] ont présentés des théories en zigzag en utilisant une variation globale de troisième ordre des déplacements dans le plan avec une variation par couches linéaire et satisfaisant aux conditions de traction- libres de cisaillement à la surface supérieure et inférieure de la plaque. Cho et Kim [Cho. 2001] ont développé une théorie zig zag pour plaques stratifiées avec plusieurs décollements.

Toledano et Murakami [Toledano. 1987] ont adopté l'approche de formulation mixte pour développer une théorie en zigzag d'ordre supérieur en termes de 11 déplacements primaires et les variables de contrainte transversales. Un bon article de synthèse a été présenté sur les théories en zigzag pour les plaques et les coques multicouches par Carrera [Carrera. 1996]. De nombreux chercheurs ont proposé des modèles FE sur la base des théories en zigzag.

Robbins et Reddy [Robbins. 1993] ont proposé une théorie de la plaque stratifiée par couches généralisé, qui peut représenter n'importe quel degré d'approximation de la distribution du plan de déplacement transversal et par un choix approprié de variables et de fonctions. Ils ont également proposé un modèle FE basé sur cette théorie avec des fonctions d'interpolation de Lagrange et d'Hermite à travers l'épaisseur. Ces théories donnent des résultats précis à la fois une réponse globale et au niveau local en stratifié, même pour les stratifiés épais, mais l'effort de calcul augmente avec le nombre de couches discrètes que le nombre de variables de déplacement primaire est proportionnel au nombre de couches.

Le développement de type zig-zag est effectué pour les approches de monocouche équivalente mais également pour des approches par couche (layer-wise). Le nombre de degré de liberté devient alors dépendant du nombre de couches.

Il existe trois principales approches indépendantes qui illustrent cette méthodologie zig-zag :

- Théorie multicouche de Reissner - Murakami - Carrera (TMR).
- Théorie multicouche de Lekhnitskii - Ren (TML)
- Théorie multicouche d' Ambartsumian - Whitney - Rath - Das(TMA)

Le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le cout de calcul. Cependant quand l'élanement diminue, le calcul des contraintes de cisaillement transverse devient moins précis.

II.3. Une revue de littérature des études sur les structures FGM :

II.3.1. Les études sur les contraintes résiduelles dans les structures FGM :

L'étude sur l'analyse des contraintes résiduelles pour les matériaux à gradients de propriétés, dites FGM est l'un des sujets les plus importants en génie et sciences des matériaux grâce à leurs utilisations dans les plus importants secteurs d'industrie (réacteurs nucléaires, réacteurs de fusion, navettes spatiales et le génie civil), la différence des propriétés thermiques des plis successifs et la fabrication des pièces à haute température de traitement vers la température ambiante fait naître des contraintes résiduelles à leurs interfaces.

Les contraintes résiduelles peuvent se produire lorsque deux matériaux ayant un coefficient de dilatation thermique différent sont liés ensemble en un composite à deux phases. Les contraintes résiduelles importantes dans une structure FGM peuvent potentiellement diminuer la capacité d'un FGM pour survivre à une charge d'impact ultérieure en service sur une plateforme d'aérospatiale.

Comme dans de nombreux problèmes d'assemblage et de composites, l'effet des contraintes résiduelles, résultant soit de traitement ou par des variations de température de service, prend un rôle important. La détermination de l'état thermique optimal de contrainte doit intégrer les propriétés thermiques et mécaniques des constituants ainsi que leur variation. L'optimisation de ces contraintes est un objectif critique de la conception et une force motrice dans la recherche FGM. En effet, plusieurs études ont porté sur le plan théorique et expérimental [Delfosse.1992] l'évaluation de ces contraintes dans FGM. L'effet de la forme de composition sur les contraintes thermiques résiduelles a été étudié pour les deux cas élastique et élastique- plastique [Rabin. 1998; Giannakopoulos. 1995; Grujicic. 1998 ; Becker. 2000].

Abualnour *et al* [Abualnour. 2015] ont déterminé les contraintes résiduelles dues aux sollicitations mécaniques et thermiques des structures en matériaux à gradient de propriétés, en vue d'optimiser leur valeur en fonction des propriétés du matériau suivant la fonction de loi de puissance (P-FGM). Dans cette étude tous les problèmes ont été traités en élasticité linéaire sur un disque FGM et pour une température de traitement de 1373 K. Les calculs ont été effectués par considération de ces deux paramètres du matériau (E , α) indépendant de la température ainsi que dépendante de la température. Ils ont conclu que la distribution et l'importance des contraintes résiduelles dans un disque FGM peuvent être adaptées en maîtrisant le gradient de la composition appelé le paramètre du matériau (p) et en choisissant

une combinaison appropriée à la géométrie dans le cas de la présence des régions monolithiques. Une gradation linéaire des constituants donne un affaiblissement accentué des contraintes résiduelles après un traitement à haute température.

Carpinteri *et al* [Carpinteri. 2006] ont analysé le champ de contrainte et de la propagation de fracture due à la charge thermique dans les matériaux composites multicouches et / ou à gradient de propriétés. Les effets de taille et de forme connexes sont également étudiés. Le champ de contrainte de cisaillement à l'interface, ainsi que les contraintes normales dans les couches ont été calculées. Le phénomène de délaminage entre les couches a été prédit par une analyse mécanique de la rupture. Les influences des paramètres géométriques, décrivant la forme et la taille ont également été discutés.

Le comportement des poutres et des plaques FGM en un cycle thermique a été étudié par Giannakopoulos *et al* [Giannakopoulos. 1995]. Les éléments de structure sont essentiellement trois couches composites similaires à ceux présentés par Williamson *et al*. Les FGM, ont été construits avec des constituants en Al₂O₃-Ni. La couche supérieure des poutres et des plaques a été construit avec du nickel et la couche inférieure était Al₂O₃ en céramique d'épaisseur égale. Une région graduée en FGM, composée d'un mélange d'Al₂O₃-Ni, est prise en sandwich entre les couches de céramique et de métal. Il a utilisé la règle de mélanges classiques pour déterminer le coefficient de Poisson et le coefficient de dilatation thermique dans la couche graduée. La règle de mélanges modifiée a été utilisée pour estimer la contrainte d'écoulement et le module tangent plastique. Des cycles de température ont été imposés qui ont induit une déformation plastique dans les membres. Les chercheurs ont mis au point des équations analytiques pour prédire les distributions de contraintes et l'apparition de la plasticité des membres en fonction de la hauteur de la poutre et l'épaisseur de la plaque. Les modèles d'éléments finis ont été développés dans ABAQUS pour prédire la déformation plastique accumulée sous forme de cycles thermiques ont progressé au fil du temps. Le travail a présenté un cadre pour l'analyse des problèmes de cette nature [Larson. 2008].

Becker *et al*. [Becker. 2000] ont développé une méthode pour estimer l'influence des gradients élastiques sur l'état des contraintes résiduelles d'un FGM. Des solutions analytiques de la contrainte thermique ainsi que des calculs par éléments finis sont utilisés pour une variété de problèmes avec un module variable. Un système de matériaux de modèle, Mo-SiO₂ et Ni-Al₂O₃, ont été utilisés pour des exemples numériques. La méthode approximative a été jugée très précise pour un certain nombre de problèmes importants. L'utilisation de cette

méthodologie permet l'application de solutions de la contrainte thermique pour les matériaux homogènes et FGM.

Les contraintes résiduelles dans les Al₂O₃-Ni en FGM qui se produisent lors de la fabrication à haute température ont été examinées par Ravichandran [Ravichandran. 1995] en 1995. L'objectif de cette étude était de déterminer les effets des contraintes résiduelles et les lignes directrices proposées pour des conditions optimales de traitement. Le module d'élasticité et le coefficient de dilatation thermique ont été considérés comme dépendants de la température, bien que les contraintes résiduelles sont révélées ne pas modifier sensiblement à partir des analyses réalisées avec des propriétés de température indépendante. Les propriétés nettes du matériau dans les régions échelonnées ont été déterminées en fonction des fonctions des rapports des constituants de la fraction volumique. Ces fonctions ont été spécifiquement développées pour cette étude et ne sont pas associées à certains des modèles les plus couramment utilisés.

Jamaludin *et al* [Jamaludin. 2013] ont analysé la contrainte thermique résiduelle pour la conception de la plaque à gradient de propriété en hydroxyapatite-titane comme une solution aux interfaces pointues. La méthode des éléments finis (FEM) a été mise en œuvre pour l'étude paramétrique pour voir la corrélation entre certains paramètres et la performance de la structure FGM. Les valeurs de contrainte thermique résiduelles calculées ont été vérifiées par la comparaison avec les résultats établis précédemment. Ils ont conclu que la méthode des éléments finis est prouvée applicable pour la conception et l'évaluation de la contrainte thermique résiduelle élastique d'une structure FGM.

II.3.2. Les études sur l'analyse thermoélastique des structures FGM:

Comme l'utilisation des FGM augmente, de nouvelles méthodologies doivent être développées pour caractériser les FGM, et aussi pour analyser et concevoir des composants structurels en ces matériaux. Il y a eu quelques études traitant l'analyse thermoélastique dans les composants structurels des FGM. Noda [Noda. 1991] a présenté une revue approfondie qui couvre une large gamme de sujets, de thermoélastique aux problèmes de thermoélastique. Il a discuté de l'importance des propriétés dépendant de la température sur les contraintes et a suggéré que les propriétés de la matière doivent être prises en compte afin d'effectuer une analyse plus précise. En outre, Tanigawa [Tanigawa. 1995] a compilé une revue complète sur l'analyse thermoélastique des FGM.

Une enquête approfondie sur la littérature indique que dans la dernière décennie, les chercheurs se sont concentrés sur l'analyse thermoélastique du cylindre FGM avec une longueur infinie. Lorsque le rapport de la longueur par rapport au rayon du cylindre diminue, l'effet de conditions aux limites devient important. Dans ce cas, la répartition des déplacements et des contraintes le long de la direction longitudinale du cylindre est non uniforme et doit être considérée.

La réponse thermoélastique de structures FGM soumis à des charges thermiques et mécanique ont été étudié par des théories simplifiées avec des approches différentes. D'autre part, certaines tentatives ont été faites pour analyser la réponse thermoélastique dans des structures FGM en trois dimensions. L'intégration de la protection thermique (céramique) et de la structure portante mécanique (métal) en une seule construction est la caractéristique souhaitable des FGM. Un système en FGM candidat pour une application donnée doit démontrer sa capacité à résister à une charge thermique et mécanique simultanée. Les FGM étudiés dans ce travail ont été soumis à des environnements à température ambiante afin de simplifier la portée du projet, cependant, un candidat FGM pour une utilisation dans diverses applications doit être étudié avec des effets thermiques. La raison en est que les propriétés du matériau et de la géométrie inhérente de l'élément structurel peuvent changer avec les changements de température. Les changements importants et configurationnelles peuvent affecter la capacité d'une FGM pour résister à des charges d'impact à partir d'objets étrangers. En outre, la réponse quasi-statique de tout élément de structure sous charge sur une plateforme de l'aérospatiale doit être envisagée avant l'effet dynamique de vol de chargement sont adressées.

Les développements les plus anciens et les plus largement utilisés de comportement thermoélastique de plaques rectangulaires à gradient de propriétés qui comprenaient des effets non linéaires ont été examinés par Praveen *et al* [Praveen. 1998]. Ils ont essentiellement adapté la théorie des plaques de composites stratifiés et adaptés aux paramètres rigidité du matériau (à savoir le $[A_{ij}]$, $[B_{ij}]$, $[D_{ij}]$ matrices et d'autres paramètres de matériau) de sommations sur des couches discrètes à des intégrales de la fonction continue définir la variation de matériau à travers l'épaisseur de la plaque et la coque [Larson. 2008].

Alibeigloo [Alibeigloo. 2011a; Alibeigloo. 2011b] a fourni une solution thermoélastique pour les déformations d'une coque et un panneau cylindrique en FGM simplement appuyée et lié à des couches piézoélectriques.

Darabseh *et al* [Darabseh. 2013] ont étudié l'analyse thermoélastique du cylindre creux à paroi épaisse en matériau à gradient de propriétés en deux dimensions par la méthode des éléments finis. Le cylindre en FGM avec une longueur finie est simplement appuyé et soumis à une sollicitation thermique et mécanique [Hosseini Kordkheili. 2007].

Arefi *et al.* [Arefi. 2016] ont étudié l'analyse thermoélastique bidimensionnelle d'un cylindre à gradient de propriétés à parois épaisses sous des charges thermiques et mécaniques et sur la base d'une fondation Pasternak. La théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre est utilisée pour décrire le champ de déplacement. L'effet de la gradation des propriétés des matériaux et les paramètres de fondation Pasternak sont considérés comme des résultats importants de cette étude.

Hosseini Kordkheili *et al* [Hosseini Kordkheili. 2007] ont obtenu une formulation des éléments finis pour l'analyse thermoélastique géométriquement non linéaire des plaques et des coques FGM dans lequel les propriétés du matériau sont supposées variées de manière continue à travers l'épaisseur selon une distribution en loi de puissance de la fraction volumique. Pour déterminer la distribution de température non linéaire dans la direction de l'épaisseur de la coque FGM, la méthode d'analyse de Rayleigh-Ritz est utilisée pour la résolution de l'équation différentielle de direction non linéaire. En ce qui concerne les plaques FGM, les résultats sont comparés à la solution analytique pour une déformation modérément grande des plaques FGM. Il a été démontré que les déplacements sont en bon accord pour une gamme modérée de déplacement. En outre, dans le cas des coques FGM les résultats ont été comparés avec les résultats ABAQUS pour le même problème de coque en matériaux de base en raison du manque de résultats pour des coques FGM sous des grandes déformations.

Les petites déformations élastiques des plaques FGM épaisses simplement appuyées ont été étudiées par Vel *et al* [Vel. 2002]. Les champs de déplacement et de température ont été générés en imposant des contraintes thermiques et mécaniques sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque, soit simultanément, soit individuellement. Les champs de déplacement et de température de trois dimensions ont été supposés avoir la forme d'une solution de puissance de la série qui résout les équations constitutives pour un matériau isotrope thermoélastique linéaire et satisfaire les conditions aux limites. L'hypothèse clé est que les propriétés des matériaux d'une plaque graduée à travers l'épaisseur varient légèrement. Les solutions de la série de puissance au problème FGM ont ensuite été comparées à des solutions générées par la théorie de la plaque classique, ainsi que les théories

de premier ordre et de troisième ordre de la plaque de déformation de cisaillement [Larson. 2008].

Zhou *et al* [Zhou. 2011] ont étudié la réponse thermoélastique transitoire de plaques rectangulaires à gradient de propriétés. Ils ont développé une simulation numérique pour une température transitoire et des contraintes thermiques transitoires d'une plaque rectangulaire à gradient de propriétés avec des conditions aux limites. Il a été constaté que, pour le cas de choc thermique, la température, les déplacements et les contraintes changent rapidement à l'état transitoire, et la non-homogénéité des propriétés des matériaux à une influence significative sur l'ampleur et la répartition de ces quantités. Ainsi, la conception optimisée des structures FGM peut être réalisée par le choix de la forme de distribution des fractions de volume des constituants du matériau.

II.3.3. Les études sur l'analyse du flambement des structures FGM :

Les FGM ont de nombreux avantages par rapport aux composites traditionnels. Les propriétés du matériau varient de façon continue d'une surface à une autre, en particulier à partir d'un métal à la céramique. De ce changement continu dans la composition, les FGM peuvent résister à des environnements à haute température tout en maintenant leur intégrité structurelle.

Dans les applications pratiques des éléments de structure tels que des poutres, des plaques et des coquilles sont souvent soumises à une élévation de température uniforme. Lorsque les déplacements sont limités, des contraintes de compression peuvent exposer le système à des conditions instables potentielles. Le flambement des éléments structuraux minces représente en effet un mode de défaillance dangereux et doit être évalué de manière adéquate dans la phase de conception.

Plusieurs auteurs ont étudié le comportement des structures FGM soumises à des charges thermiques et mécaniques, et des travaux complets sur le flambement des plaques rectangulaires et circulaires en FGM sont également rapportés dans la littérature. Shen [Shen. 2002] a réalisé en 2002 l'une des premières études sur les problèmes de flambement des structures FGM. Shen a été préoccupé par l'analyse du post-flambement des panneaux FGM cylindriques chargés axialement qui en outre soutenu à des environnements thermiques. Les panneaux ont été gradués à travers l'épaisseur et une approche classique de règle de mélanges a été utilisée pour modéliser les propriétés du matériau dépendant de la température. Shen a

utilisé une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur de la coque pour décrire l'équation régissant sous un chargement thermo-mécanique. Shen vérifie ses équations développées par rapport aux résultats publiés pour les panneaux cylindriques isotropes, puis fournit des données de flambement pour différents systèmes de FGM [Larson. 2008].

Samsam Shariat *et al* [Samsam Shariat. 2006] ont étudiés l'analyse de flambement mécanique et thermique des plaques rectangulaires à gradient de propriétés sur la base de la théorie de la déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT). Ils ont supposés que les propriétés mécaniques varient linéairement inhomogènes à travers l'épaisseur de la plaque. La plaque est supposée être de trois types de sollicitations mécaniques, à savoir la compression uniaxiale, de compression biaxiale, et la compression biaxiale et de tension; et deux types de charges thermiques, à savoir la montée en température uniforme et non linéaire du gradient de température à travers l'épaisseur. Ils ont conclu que la théorie classique de la plaque surestime les charges critiques de flambement, en particulier pour les plaques épaisses. Pour les plaques épaisses à gradient de propriétés, la théorie de la déformation de cisaillement de troisième ordre fournit plus des valeurs précises de la charge de flambement.

Abolghasemi *et al* [Abolghasemi. 2014] ont analysés le flambement des plaques à gradient de propriétés avec une découpe elliptique sous des charges thermiques et mécaniques combinés en utilisant la méthode des éléments finis. Contrairement à d'autres études dans lesquelles les plaques sont exposées à des contraintes thermiques ou mécaniques, dans cette étude, ils ont supposés que les charges mécaniques et thermiques sont appliquées simultanément. Les propriétés du matériau sont supposées varier dans l'épaisseur de la plaque selon la répartition de la loi de puissance de la fraction volumique des constituants. Les formulations sont basées sur la théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (FSDT) et les éléments de matrices de rigidité sont dérivés à partir du principe de l'énergie potentielle minimale. Ils ont conclu que la température critique de flambement thermique des plaques rectangulaires est plus grande que les plaques carrées.

Aghelinejad *et al* [Aghelinejad. 2011] ont étudié la flexion non linéaire et axisymétrique de flambement thermique des plaques annulaires minces à gradient de propriétés selon la théorie classique de la plaque non linéaire de Von-Karman. Les conditions aux limites sont considérées encastrees-encastrees. Les propriétés matérielles de la plaque FGM sont supposées varier de manière continue à travers l'épaisseur de la plaque en fonction de la loi de puissance simple. Les effets de l'indice de puissance et les charges mécaniques et thermiques

sur la flexion non linéaire, la température critique de flambement et post-flambement de la plaque à gradient de propriétés sont discutés en détail dans ce travail. Ils ont conclu que la constante du matériau (n) a un effet significatif sur la flexion et le flambement de la plaque FGM et avec l'augmentation de l'indice des FGM, que la plaque atteint entièrement en céramique, la charge de température critique augmente grandement. Une plaque entièrement métallique ($n = 0$) avec la plus faible raideur présente une flèche maximale la plus élevée pour une sollicitation thermique et mécanique spécifiée.

Kyung-Su *et al* [Kyung-Su. 2006] ont analysé en trois dimensions le flambement thermomécanique des structures à gradient de propriétés composées de matériau céramique, à gradient de propriétés (FGM), et des couches métalliques. Les propriétés des matériaux sont supposées être dépendantes de la température, et dans la couche FGM, sont variés en continu dans le sens de l'épaisseur selon une distribution de loi de puissance simple en termes de fractions de volume de céramique et de métal. Le modèle d'éléments finis est adopté à l'aide d'un élément solide de 18 nœuds afin d'analyser de façon plus précise la variation des propriétés des matériaux et du champ de température dans la direction de l'épaisseur. Ils ont conclu que le gradient de température critique décroît rapidement lorsque a/h augmente, mais il augmente avec l'augmentation du rapport d'épaisseur. En outre, l'effet du rapport d'épaisseur est diminuée lorsque a/h est important [Larson. 2008].

Yang *et al.* [Yang. 2006] ont présenté une autre analyse post-flambage où la sensibilité à l'imperfection de d'ordre supérieur de déformation de cisaillement des plaques FGM a été envisagée. Le chargement mécanique sous la forme de compression uniforme et la charge thermique sous la forme d'un changement de température uniforme ont été appliquées à la plaque FGM. Diverses gradations, conditions aux limites, et configurations de plaques ont été étudiées paramétriquement avec des imperfections locales et globales appliquées à la plaque. Une observation importante dans l'article est que la force post-flambage n'a pas été significativement affectée par les imperfections globales à la plaque, mais les imperfections locales à proximité du centre de la plaque pourraient réduire de manière significative la résistance post-flambage.

Le comportement de flambement et post-flambement de poutres minces soumis à des charges axiales mécaniques reposant sur les fondations élastiques ont été étudiés par Timoshenko *et al* [Timoshenko. 1961], Den Hartog [Den Hartog. 1952], Hetenyi [Hetenyi. 1966]. Vaz *et al* [Vaz. 2016] ont proposé une solution analytique pour la réponse initiale

thermomécanique du post-flambement d'une poutre épaisse reposant sur une fondation élastique linéaire et soumis à une élévation de température uniforme sur toute sa section transversale. La contrainte thermique est supposée suivre une loi linéaire avec l'augmentation de la température et les propriétés des matériaux sont considérés comme indépendantes de la température.

En outre, le modèle est approprié pour décrire le comportement des poutres courtes car il prend en compte les déformations de cisaillement transversales. Les résultats indiquent que la charge de compression diminue de manière plus significative pour des valeurs élevées de coefficient de cisaillement, en particulier pour des valeurs plus élevées de la raideur de la fondation. Les résultats montrent également que la température de déformation est plus élevée pour les modes de flambement supérieur, mais les déflexions sont plus petites.

Woo *et al* [Woo. 2003] ont étudié le comportement de post-flambement des plaques et coques cylindriques en matériaux à gradient de propriétés sous des charges de compression de pointe et un champ de température. Les propriétés du matériau des coques à gradient de propriétés sont supposées varier de manière continue à travers l'épaisseur de la coque selon une distribution en loi de puissance de la fraction volumique des constituants. Les équations fondamentales pour les coques minces rectangulaires FGM sont obtenues en utilisant la théorie de Von Karman pour une grande déflexion transversale, et la solution est obtenue en termes de séries de Fourier. Les résultats révèlent que les effets de couplage thermomécanique et les conditions aux limites jouent un rôle majeur dans la réponse des plaques et des coques FGM sous l'action des charges de compression de pointe.

II.3.4. Les études sur l'analyse statique et dynamique des structures FGM:

Plusieurs modèles théoriques ont été proposés afin de mieux comprendre le comportement statique et dynamique des structures FGM. Quand il y a une fissure ou un défaut dans un FGM, de nombreux chercheurs ont étudié la dépendance de facteurs d'intensité de contrainte avec les variations de gradient pour diverses charges statiques et dynamiques [Ozturk. 1996 ; Li. 2007]. Par contre, en l'absence de fissures, le comportement mécanique des structures FGM ont été largement étudiés. Par rapport aux plaques et coques à gradient de propriétés des études liées à des poutres FGM sont très peu nombreux. Par exemple, une solution d'élasticité exacte pour une poutre FGM simplement appuyée a été donnée par Sankar [Sankar. 2001], qui a traité un cas particulier où le module de Young obéit à une variation de gradient de propriétés de type exponentielle dans le sens de l'épaisseur et le coefficient de Poisson reste

constant. Au lieu du type exponentiel du module d'Young, Zhu *et al* [Zhu. 2004] traitent un problème similaire avec le module de Young ayant une variation polynomiale dans la direction de l'épaisseur.

Xian *et al* [Xian. 2010] ont étendu la théorie d'ordre supérieur pour les poutres à gradient de propriétés dont les propriétés des matériaux varient de façon continue. Une équation principale unique pour une fonction auxiliaire F pour les poutres à gradient de propriétés avec la déformation de cisaillement prise en compte, est dérivée à partir des équations de base de l'élasticité. Il peut être utilisé pour faire face aux vibrations forcées et libres ainsi que les comportements statiques des poutres à gradient de propriétés. Une solution générale est construite, et toutes les grandeurs physiques, y compris flèche transversale, la déformation longitudinale, le moment de flexion, la force de cisaillement et des contraintes internes peuvent être représentés en termes des dérivés de F . Les résultats numériques ont été calculés et représentés graphiquement pour une poutre en porte à faux à gradient de propriétés avec la variation de l'indice de puissance soumise à une pression uniforme.

Le champ de déplacement basé sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur est mis en œuvre par Ravikiran *et al.* [Ravikiran. 2008] pour étudier le comportement statique des poutres à gradient de propriétés dans une température ambiante. Les résultats numériques sur la flèche transversale, axiale et les contraintes de cisaillement dans une poutre FGM modérément épaisse sous une charge uniformément répartie pour des conditions aux limites encastree-encastree et simplement appuyée sont discutés dans ce travail. Les études révèlent que, selon que le chargement est sur la surface de la poutre riche en métal ou riche en céramique, la flèche et les contraintes dans la poutre ne restent pas les mêmes. Il a été aussi observé que les déviations d'une condition limite donnée sont plus pour une poutre riche en métal par rapport à une poutre riche en céramique, et la flèche augmente que l'indice de loi de puissance augmente.

L'analyse des plaques et des coques cylindriques FGM simplement appuyée à la vibration a été étudiée en première fois en 1999 par Loy *et al.* [Loy. 1999]. Les coques FGM cylindriques sont d'un intérêt particulier dans les technologies des navires et dans la tuyauterie. Les auteurs supposent une variation de loi de puissance en fraction volumique des constituants de l'intérieur vers extérieure de la surface de la coque et les propriétés des matériaux variés à travers l'épaisseur de la coque en fonction de la loi classique des mélanges. Une fois que les relations constitutives ont été formulées, les auteurs ont utilisé la méthode de

Rayleigh-Ritz pour résoudre les fréquences naturelles de la structure de la coque. Les auteurs ont comparé les résultats pour les différentes distributions de fraction de volume d'un système FGM en métal-céramique et ont constaté que les fréquences naturelles pour une coque en FGM s'allonge entre les fréquences naturelles calculées pour une coque en métal pure ou purement en céramique. Une étude qualitative a également été réalisée lorsque la géométrie de la coque a été autorisée à varier [Larson. 2008].

Qian *et al.* [Qian. 2004] ont analysé la déformation statique, la vibration libre et forcée des plaques rectangulaires épaisses en matériaux à gradient de propriétés en utilisant une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieure. Toutes les composantes du tenseur des contraintes sont calculées à partir des équations de la théorie de la plaque. La plaque est composée de deux constituants isotropes, est supposé être macroscopiquement isotrope ayant des propriétés matérielles différentes dans la direction d'épaisseur seulement. Les modules matériels effectifs sont calculés en utilisant la technique d'homogénéisation de Mori-Tanaka. Aucun facteur de correction de cisaillement n'est employé. Ils ont conclu que les fréquences naturelles calculées de la plaque FGM correspondent très bien avec leurs valeurs analytiques. Tant pour les charges statiques et dynamiques, la flèche au centre de la plaque FGM se trouve être entre ceux pour une plaque en céramique pure et en métallique pur. Les gradients dans les propriétés du matériau ne touchent pas de manière significative la fréquence naturelle fondamentale d'une plaque FGM carrée simplement appuyée.

La réponse dynamique des plaques FGM rectangulaires a été initialement étudiée par Yang *et al* [Yang. 2001] en 2001. Une plaque rectangulaire, graduée à travers l'épaisseur avec une distribution en loi de puissance et les propriétés des matériaux régis par la loi classique de mélanges, était supposée être encastré sur tous les côtés ou sur les deux côtés encastré et simplement appuyée sur les deux autres côtés. La plaque a été laissée à reposer sur une fondation élastique et être soumise initialement dans le plan à des contraintes uniaxiales ou biaxiales, bien que les deux ou aucune de ces caractéristiques doivent être incluses. Yang *et al* [Yang. 2001] ont développé une théorie très générale de la plaque où la réponse de la plaque pourrait être déterminée semi-analytiquement sous une charge générale et des conditions aux limites [Larson. 2008].

Une solution approchée pour l'analyse statique de trois dimensions, anisotropes, des plaques élastiques composées de matériaux à gradient de propriétés a été étudiée par Ramirez *et al.* [Ramirez. 2006]. La solution est obtenue en utilisant une théorie de la couche discrète en

combinaison avec la méthode de Ritz, dans lequel la plaque est divisée en un nombre quelconque de couches homogènes et / ou du FGM. Deux types de matériau à gradient de propriétés ont été considéré: une variation exponentielle des propriétés mécaniques à travers l'épaisseur de la plaque, et des propriétés mécaniques en fonction de l'orientation des fibres qui varie de façon quadratique à travers l'épaisseur du stratifié. La présente approche ne dépend pas d'une fonction spécifique de transition, et toute fonction continue représentative de la variation des propriétés du matériau dans le sens de l'épaisseur peut être incorporée dans le modèle. Afin de démontrer l'applicabilité de cette solution, différentes conditions aux limites et des configurations matérielles différentes sont présentées. La présente méthode peut être appliquée à des plaques de FGM en divisant le stratifié en couches homogènes discrètes ayant des propriétés mécaniques obtenues comme valeurs moyennes pour la couche correspondante. La précision des résultats dépend du nombre de couches utilisées dans l'analyse et la finesse de la gradation matériau.

II.4. Conclusion :

Ce chapitre présente une revue bibliographique sur les différents types de modèles ou approches employés pour les matériaux composites à savoir l'approche monocouche (ESL) équivalente et l'approche par couche (LW). Le modèle ESL fournissent souvent une description suffisamment précise de la réponse globale mince à modérément épaisse et il est mieux adaptée pour les matériaux à gradient de propriétés car il n'ya pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques. Donc en a eu recoure au modèle ESL pour les plaques à gradient de propriétés pour une nouvelle théorie d'ordre élevé afin d'estimer correctement la distribution non linéaire des déformations de cisaillement transversales le long de l'épaisseur de la plaque FGM.

Cette partie présente aussi une revue de littérature sur les différents travaux qui ont été effectués sur l'analyse des structures FGM. La quasi-totalité des recherches menées purement analytique ou dans la simulation numérique considère que la structure FGM est parfaite. Par contre, dans la fabrication des FGM, des micro-porosités peuvent se produire dans les structures FGM au cours de leurs fabrications. Ce travail décrira plus en détail une méthode analytique basée sur une nouvelle théorie raffinée de déformation de cisaillement pour caractériser la réponse statique et dynamique des plaques FGM poreuses et sans porosités avec la prise en considération de l'effet des paramètres de fondations.

CHAPITRE III

EFFET DE POROSITE SUR LE COMPORTEMENT STATIQUE ET DYNAMIQUE DES PLAQUES P-FGM

III.1. Introduction :

Le matériau à gradient de propriétés (FGM) est un nouveau matériau hétérogène. Il est l'une des formes les plus fonctionnelles des structures composites développées par l'industrie des composites. Il a atteint une large acceptation dans l'aérospatiale et de nombreuses autres industries, et il est largement utilisé dans les avions et les véhicules spatiaux, des navires, des bateaux, des conteneurs et des constructions résidentielles. La technique de gradation de la céramique ainsi que des métaux initiés par le scientifique du matériel japonais à Sendai a marqué le début d'explorer la possibilité d'utiliser les FGM pour diverses applications structurelles [Reddy. 2000].

Les FGM sont considérés comme un matériau structurel potentiel pour les industries futures d'engins spatiaux à grande vitesse et de production d'énergie. Les FGM sont des nouveaux matériaux, non homogènes microscopiquement, dans lesquels les propriétés mécaniques varient en douceur et de façon continue d'une surface à une autre. Dans un FGM, la composition et la structure changent progressivement, ce qui entraîne des changements correspondants dans les propriétés du matériau. En appliquant les nombreuses possibilités inhérentes à la conception d'un FGM, il est prévu que les matériaux seront améliorés et de nouvelles fonctions seront créées.

Au cours des dernières années, il y a eu des rapports de recherche considérables sur le comportement mécanique, flambage, vibration libre, etc., sur les éléments structuraux des FGM. Plusieurs études ont été réalisées pour analyser le comportement des plaques et coques à gradient de propriétés. Bourada *et al.* [Bourada. 2015] donnent une nouvelle théorie simple de déformations de cisaillement pour les poutres à gradient de propriétés. Carrera *et al.* [Carrera. 2010] étudient le problème de la réponse statique des plaques et coques multicouches en matériaux à gradient de propriétés (FGM). Kiani *et al.* [Kiani. 2011] ont analysé le comportement statique et dynamique d'un panneau en FGM doublement incurvé reposant sur une fondation élastique de type Pasternak. Al-Basyouni *et al.* [Al-Basyouni. 2015] ont analysé la flexion et la vibration des micro-poutres à gradient de propriétés basées sur la théorie de contrainte doublée modifiée et la position de la surface neutre.

Mahi *et al.* [Mahi. 2015] ont présenté une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour la flexion et la vibration libre des plaques isotropes, en gradient de propriétés, sandwich et en composites stratifiées. Cinefra *et al.* [Cinefra. 2012] ont présenté un modèle raffiné basé sur la formulation unifiée du Carrera (CUF) pour l'analyse statique des

plaques et coques en matériau à gradient de propriété (FGM), soumis à des charges mécaniques. Neves *et al.* [Neves. 2011] ont présenté une étude utilisant la méthode de collocation de fonction de base radiale pour analyser les déformations statiques des plaques à gradient de propriétés en utilisant une formulation de déformation de cisaillement sinusoïdale. Ravikiran *et al.* [Ravikiran. 2008] ont étudié le comportement statique des poutres à gradient de propriétés (FGM) métal-céramique à température ambiante. Neves *et al.* [Neves. 2012a] ont présenté une théorie hyperbolique originale de déformation de cisaillement sinusoïdale pour la flexion et la vibration libre des plaques à gradient de propriétés, la théorie prit en considération les déformations à travers l'épaisseur.

Sepahi *et al.* [Sepahi. 2010] ont étudié les effets de trois paramètres de fondations élastiques et le chargement thermo-mécanique sur une plaque annulaire en FGM simplement appuyée. Neves *et al.* [Neves.2012b] ont étudié l'analyse statique et la vibration libre des plaques à gradient de propriétés en utilisant une théorie quasi-3D de déformation de cisaillement sinusoïdale. Hadji *et al.* [Hadji. 2015b] ont proposé une théorie de déformation de cisaillement exponentielle raffiné pour l'analyse de la vibration libre des poutres en FGM avec porosités. Bennoun *et al.* [Bennoun. 2016] donnent une nouvelle théorie raffinée de cinq variables pour l'analyse des vibrations des plaques sandwich à gradient de propriétés.

Néanmoins, dans la fabrication des FGM, des micro-porosités ou des vides peuvent se produire dans les matériaux au cours du processus de frittage. Ceci est dû à la grande différence de températures de solidification entre les constituants des matériaux [Zhu. 2001].

Wattanasakulpong *et al.* [Wattanasakulpong. 2012] ont également donné la discussion sur les porosités qui se développent à l'intérieur des échantillons en FGM fabriqués par une technique d'infiltration séquentielle en plusieurs étapes. Par conséquent, il est important de prendre en compte l'effet de porosité lors de la conception des structures FGM soumises à des charges mécaniques. Récemment, Wattanasakulpong et Ungbhakorn [Wattanasakulpong. 2014] ont étudié les problèmes linéaires et non linéaires de la vibration des poutres FGM ayant des porosités.

Dans cette étude, une nouvelle théorie raffinée est proposée pour l'analyse à la flexion et à la vibration libre des plaques FGM simplement appuyées avec porosités, cette dernière peut éventuellement se produire à l'intérieur des matériaux à gradient de propriétés (FGM) au cours de leur fabrication.

Les plaques sont fabriquées d'un matériau isotrope ayant des propriétés matérielles différentes dans seulement la direction d'épaisseur. Les équations sont obtenues à partir du principe des travaux virtuels et le principe d'Hamilton. Des exemples numériques sont présentés pour illustrer la précision et l'efficacité de la présente théorie ainsi que l'influence du paramètre du matériau, la fraction volumique de la porosité et le rapport d'épaisseur sur le comportement mécanique de la plaque P-FGM.

III.2. Formulation du problème :

La plaque FGM est considérée comme une plaque à couche unique d'épaisseur uniforme elle à une longueur a , une largeur b , et une épaisseur totale h en matériau anisotrope de métal et de céramique et la gradation est supposée être seulement à travers l'épaisseur, dans laquelle la composition varie de surface supérieure en surface inférieure.

III.2.1. Théorie d'ordre élevé :

Les déplacements d'un point matériel situé au (x, y, z) dans la plaque peuvent être écrit comme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} - \psi(z) \cdot \theta_x \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} - \psi(z) \cdot \theta_y \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (III.1)$$

Où u, v, w sont les déplacements dans les directions x, y, z . u_0, v_0 et w_0 sont des déplacements au plan médian et θ_x et θ_y sont les rotations de normales au plan médian autour des axes, y et x , respectivement. $\psi(z)$ représente la fonction de forme qui détermine la répartition des déformations et des contraintes de cisaillement transversales le long de l'épaisseur. Le champ de déplacement de la théorie classique de la plaque mince (CPT) est obtenu facilement en fixant $\psi(z) = 0$. Le déplacement de la théorie de la plaque de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDPT) est obtenu par $\psi(z) = z$. En outre, le déplacement de la théorie parabolique de déformation de cisaillement de la plaque (PSDPT) de [Reddy. 1984] est obtenu en fixant :

$$\psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) \quad (III.2a)$$

En outre, la théorie de déformation de cisaillement exponentielle de la plaque (ESDPT) de Karama *et al.* [Karama. 2003] est obtenue en fixant :

$$\psi(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{III.2b})$$

III.2.2. La nouvelle théorie raffinée sinusoïdale de déformation de cisaillement de la plaque :

Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues dans la présente théorie est seulement quatre, contre cinq en cas d'autres théories de déformation de cisaillement [Reddy. 1984, Karama. 2003]. La présente théorie est variationnellement cohérente, ne nécessite pas de facteur de correction, et les contraintes de cisaillement transversales varient de manière parabolique à travers l'épaisseur satisfaisant la nullité des contraintes aux bords de la plaque.

III.2.2.1. Hypothèses de base :

Les hypothèses de la présente théorie raffinée de la plaque sont les suivantes [Sid Ahmed Houari. 2013]:

- Les déplacements sont faibles par rapport à l'épaisseur de la plaque et, par conséquent, les déformations impliquées sont infinitésimales.
 - Le déplacement transversal W comprend une composante de flexion w_b , et une composante de cisaillement w_s . Ces composants sont en fonction des coordonnées x, y .

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{III.3a})$$

- La contrainte transversale normale σ_z est négligeable en comparaison avec les contraintes dans le plan σ_x et σ_y .
- Les déplacements U dans la direction x et V dans la direction y sont constitués des composants d'extension, de flexion, et de cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s \quad v = v_0 + v_b + v_s \quad (\text{III.3b})$$

Les composants de cisaillement u_s et v_s donne lieu, en collaboration avec w_s , aux variations paraboliques de déformations de cisaillement γ_{xz} , γ_{yz} et donc à des contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque d'une manière telle que les contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} sont nulles au niveau des faces supérieures et inférieures de la plaque. Par conséquent, l'expression pour u_s et v_s ne peut être donnée par :

$$u_s = -\left(z - \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad v_s = -\left(z - \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III.3c})$$

III.2.2.2. Champs de déplacement et les déformations :

Basant sur la théorie d'ordre élevée, le champ du déplacement est obtenu comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
 \end{aligned} \tag{III.4}$$

La fonction du cisaillement proposée est donnée comme suit :

$$f(z) = z - \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \tag{III.5}$$

Les déformations linéaires peuvent être obtenues sous forme de :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \\
 \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y^b + f(z) k_y^s \\
 \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f(z) k_{xy}^s \\
 \gamma_{yz} &= g(z) \gamma_{yz}^s \\
 \gamma_{xz} &= g(z) \gamma_{xz}^s \\
 \varepsilon_z &= 0
 \end{aligned} \tag{III.6}$$

Où :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\
 \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\
 \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \quad k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\
 \gamma_{yz}^s &= \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad g(z) = 1 - f'(z) \text{ et } f'(z) = \frac{df(z)}{dz}
 \end{aligned} \tag{III.7}$$

Il convient de noter que les déformations ci-dessus sont dérivées pour des problèmes géométriquement linéaires. Pour les plaques FGM élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme :

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

$$\begin{cases} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{cases}$$

Ou $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ sont les composants de la contrainte et la déformation respectivement.

Les coefficients de rigidité, Q_{ij} peuvent être exprimés comme :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{III.9})$$

III.2.2.3. propriétés des matériaux efficaces d'une plaque en céramique-métal à gradient de propriétés :

Une plaque FGM fabriquée à partir d'un mélange de deux matériaux, par exemple, un métal et une céramique. Les propriétés du matériau de la plaque FGM est supposée varier de manière continue à travers l'épaisseur de la plaque. Dans cette étude, la plaque imparfaite est supposée avoir des porosités réparties dans l'épaisseur en raison de défaut pendant la production. Considérons un FGM imparfait avec une fraction volumique de porosité, α ($\alpha \ll 1$), répartie uniformément entre le métal et la céramique, la loi du mélange modifiée proposée par Wattanasakulpong et Ungbhakorn [Wattanasakulpong, 2014] est utilisée comme [Hadji, 2015a] :

$$P = P_m \left(V_m - \frac{\alpha}{2} \right) + P_c \left(V_c - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (\text{III.10})$$

Maintenant, la fraction du volume total du métal et de la céramique est: $V_m + V_c = 1$, et la loi de puissance de la fraction volumique de la céramique est décrit comme :

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (\text{III.11})$$

Par conséquent, toutes les propriétés d'un FGM imparfait peuvent être écrites comme [Hadji, 2015a] :

$$P = (P_c - P_m)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + P_m - (P_c + P_m)\frac{a}{2} \quad (\text{III.12})$$

Il est à noter que le nombre réel positif k ($0 \leq k < \infty$) est l'indice de loi de puissance ou d'une fraction de volume, et z est la distance entre le plan médian de la plaque à gradient de propriétés. La plaque FGM est une plaque entièrement en céramique lorsque k est mis à zéro et entièrement métallique pour une valeur de k égal à l'infini.

Ainsi, les équations du module de Young (E) et la densité du matériau (ρ) de la plaque FGM avec porosité peut être exprimée comme [Ait Atmane. 2015, Ait Yahia. 2015, Hadji. 2015a] :

$$E(z) = (E_c - E_m)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + E_m - (E_c - E_m)\frac{a}{2} \quad (\text{III.13})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + \rho_m - (\rho_c - \rho_m)\frac{a}{2}$$

Cependant, le coefficient de Poisson (ν) est supposé être constant. Les propriétés matérielles d'une plaque FGM parfaite peuvent être obtenues lorsque α est réglé à zéro.

III.2.3. Equations constitutives et conditions aux limites :

Les équations d'équilibre sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels, qui peuvent être écrites pour la plaque comme :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \int_{\Omega} (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) . d\Omega . dz - \int_{\Omega} q . \delta w . d\Omega = 0 \quad (\text{III.14})$$

Où Ω est la surface supérieure.

Substituant Eqs. (III.7) et (III.8) dans l'équation. (III.14) et par l'intégration à travers l'épaisseur de la plaque, l'Eq. (III.14) peut être réécrite comme [Hassaine Daouadji. 2012] :

$$\int_{\Omega} (N_x . \delta \epsilon_x^0 + N_y . \delta \epsilon_y^0 + N_{xy} . \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b . \delta k_x^b + M_y^b . \delta k_y^b + M_{xy}^b . \delta k_{xy}^b + M_x^s . \delta k_x^s + M_y^s . \delta k_y^s + M_{xy}^s . \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s . \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s . \delta \gamma_{xz}^s) d\Omega - \int_{\Omega} q (\delta w + \delta w_b) d\Omega = 0 \quad (\text{III.15})$$

Ou :

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (\text{III.16})$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \quad (\text{III.17})$$

Les équations d'équilibre peuvent être dérivées de l'équation. (III.18) en intégrant les gradients de déplacement par parties et en prenant les coefficients δu_0 , δv_0 , δw_s et δw_b égal à zéro séparément. On peut obtenir les équations d'équilibres associées à la déformation de cisaillement de la présente théorie.

$$\begin{cases} \delta u : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \delta v : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\ \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = 0 \\ \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + q = 0 \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

En utilisant l'équation. (III.8) dans l'équation. (III.16), les résultantes des contraintes de la plaque peuvent être liés aux déformations total par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ A & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}; S = A^s \gamma \quad (\text{III.19})$$

Ou :

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad (\text{III.20})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0\}^t, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \quad (\text{III.21})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{III.22})$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

$$S = \{S_{xz}^z, S_{yz}^s\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \quad (\text{III.24})$$

Les coefficients de rigidités A_{ij} et B_{ij} etc., sont définis comme :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Q_{11}(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{III.25})$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad Q_{11} = \frac{E(z)}{1-\mu^2} \quad (\text{III.26})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz \quad (\text{III.27})$$

Substituant l'équation. (III.19) dans l'équation. (III.18), on obtient l'équation suivante
[Hassaine Daouadji. 2012]

$$A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}D_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - B_{11}d_{11}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}w_s - B_{11}^s d_{111}w_s = 0 \quad (\text{III.28})$$

$$A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{112}w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}w_s - B_{22}^s d_{222}w_s = 0 \quad (\text{III.29})$$

$$B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 - D_{11}d_{1111}w_b - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_b - D_{22}d_{2222}w_b - D_{11}^s d_{1111}w_s - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_s - D_{22}^s d_{2222}w_s + q = 0 \quad (\text{III.30})$$

$$B_{11}^s d_{111}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}v_0 + B_{22}^s d_{222}v_0 - D_{11}^s d_{1111}w_b - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_b - D_{22}^s d_{2222}w_b - H_{11}^s d_{1111}w_s - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)d_{1122}w_s - H_{22}^s d_{2222}w_s + A_{55}^s d_{11}w_s + A_{44}^s d_{22}w_s + q = 0 \quad (\text{III.31})$$

Où d_{ij} , d_{ijl} , et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, (i, j, l, m=1,2) \quad (\text{III.32})$$

Pour une plaque FGM simplement appuyée, la limite suivante des conditions sont imposées aux bords latéraux [Hassaine Daouadji.2012]:

$$v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial y} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \quad \text{à} \quad x = -a/2, a/2, \quad (\text{III.33})$$

$$u_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \quad \text{à} \quad y = -b/2, b/2, \quad (\text{III.34})$$

Basant la solution de Navier, les charges transversales mécaniques q sont supposées sous la forme d'une double série trigonométrique comme :

$$q = q_0 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (\text{III.35})$$

Où :

$$\lambda = m\pi / a, \quad \mu = n\pi / b \quad (\text{III.36})$$

q_0 est l'intensité de la charge au centre de la plaque.

Nous supposons que la forme de solution suivante pour u_0 , v_0 , w_b et w_s qui satisfait aux conditions aux limites [Hassaine Daouadji. 2012] :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \\ V \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \\ W_b \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \\ W_s \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.37})$$

Où ω est la fréquence naturelle. U , V , W_b et W_s sont des paramètres arbitraires. On peut réduire les équations à la forme suivante:

Pour l'analyse à la flexion :

$$[C]\{\Delta\} = \{P\} \quad (\text{III.38})$$

Pour l'analyse dynamique :

$$([C] - \omega[G])\{\Delta\} = \{0\} \quad (\text{III.39})$$

Avec :

$$\{\Delta\} = \{U, V, W_b, W_s\}^t \quad (\text{III.40})$$

Ou $[C]$ et $[G]$ se réfère aux rigidités à la flexion et les matrices de masse et ω à la fréquence correspondante [Hassaine Daouadji.2012].

$$[C] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad [G] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{III.41})$$

Dans lequel:

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2 \\ a_{12} &= \lambda\mu(A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= -\lambda[B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2] \\ a_{14} &= -\lambda[B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2] \\ a_{22} &= A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2 \\ a_{23} &= -\mu[(B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{22}\mu^2] \\ a_{24} &= -\mu[(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2] \\ a_{33} &= D_{11}\lambda^4 + 2D_{12}\lambda^2\mu^2 + 4D_{66}\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 \\ a_{34} &= D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4 \\ a_{44} &= H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{11}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2 \\ a_{45} &= \lambda\mu(G_{12} + G_{66}) \\ a_{55} &= F_{44} + G_{66}\lambda^2 + G_{22}\mu^2 \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

Et :

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= m_{22} = I_1 \\
 m_{33} &= I_1 + I_3 (\lambda^2 + \mu^2) \\
 m_{34} &= I_1 + I_5 (\lambda^2 + \mu^2) \\
 m_{44} &= I_1 + I_6 (\lambda^2 + \mu^2)
 \end{aligned} \tag{III.43}$$

Ou :

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f(z), zf(z), [f(z)]^2) \rho(z) dz \tag{III.44}$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \rho_m \tag{III.45}$$

III.3. Résultats et discussions :

Dans l'analyse numérique, les déplacements, les contraintes et les fréquences fondamentales de la plaque FGM sans et avec porosité simplement appuyée sont évalués. La plaque FGM est faite d'aluminium et d'alumine ou zircone présentant les propriétés suivantes:

Alumine, Al_2O_3 : $E_c = 380$ GPa; $\rho_c = 3800 \text{ kg/m}^3$

Zirconia, ZrO_2 : $E_c = 200$ GPa; $\rho_c = 5700 \text{ kg/m}^3$

Aluminium, Al: $E_m = E_m = 70$ GPa; $\rho_m = 2702 \text{ kg/m}^3$

Et leurs propriétés changent à travers l'épaisseur de la plaque selon la loi de puissance. Les surfaces inférieures de la plaque FGM sont riches en aluminium, tandis que les surfaces supérieures de la plaque est riche en alumine.

Pour plus de commodité, les formules suivantes sont utilisées :

$$\begin{aligned}
 w^* &= \frac{100D_c}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \quad \sigma_x^* = -\frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{h}{2}\right), \quad \sigma_y^* = -\frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{h}{2}\right), \\
 \sigma_{xy}^* &= \frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_{xy}\left(0, 0, -\frac{h}{2}\right), \quad \bar{w} = 10 \frac{E_c h^3}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \quad \bar{\sigma}_x = \frac{h}{hq_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right), \\
 \bar{\sigma}_y &= \frac{h}{hq_0} \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right), \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{h}{hq_0} \tau_{xy}\left(0, 0, -\frac{h}{2}\right), \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{hq_0} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right), \\
 \bar{\tau}_{yz} &= \frac{h}{hq_0} \tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{h}{2}\right). \quad D_c = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)}
 \end{aligned} \tag{III.46}$$

Nous testons d'abord la précision de la théorie actuelle en comparant les résultats avec ceux prédits par Singha *et al.* [Singha. 2011] qui utilise des solutions basées sur la méthode des éléments finis pour une plaque FGM parfaite. Dans tous les exemples, aucun facteur de correction transversale de cisaillement n'est utilisé car une représentation correcte de la contrainte de cisaillement transversale est donnée.

Le tableau III.1 montre la comparaison du déplacement central non-dimensionnelle et la contrainte de cisaillement d'une plaque FGM carré en alumine / aluminium. La plaque FGM est considérée mince ($a / h = 100$) et simplement appuyée sous une charge uniformément répartie. Les résultats obtenus par la théorie actuelle sont comparés avec ceux donnés par Singha *et al.* [Singha. 2011]. On peut voir que la théorie raffinée proposée en utilisant une solution analytique et la solution des éléments finis donne des résultats identiques pour le déplacement central non-dimensionnel, et des résultats convergents pour la contrainte de cisaillement et cela pour toutes les valeurs de l'indice de puissance k .

La capacité de la présente solution est également testée pour le déplacement central non-dimensionnelle et les contraintes dans le plan $\overline{\sigma_{xx}}$ d'une plaque FGM en alumine / aluminium avec le rapport d'épaisseur égal ($a / h = 10$) sous des charges uniformément réparties et sinusoïdales dans le tableau III.2. Une corrélation étroite est obtenue. Il est important d'observer que la répartition uniforme de la charge surestime toujours les déplacements et les contraintes; également les contraintes d'une plaque entièrement en céramique sont les mêmes que pour une plaque entièrement en métal. En effet, la plaque pour ces deux cas est totalement homogène et les contraintes ne dépendent pas du module d'élasticité.

Après la validation de la présente théorie pour des plaques FGM parfaites avec les résultats obtenus par la méthode des éléments finis de Singha *et al.* [Singha. 2011]. Nous passons maintenant à étudier l'effet de la fraction volumique de porosité sur les plaques FGM. La présente solution est réalisée pour une plaque carrée dans le tableau III.3, avec les données fixes suivantes: $a = 1$, $b = 1$, $E_m = E_c = E = 1$, $q_0 = 1$, le coefficient de poisson est pris égal à $\nu = 0,3$ et deux valeurs pour le rapport d'épaisseur de la plaque: $a/h = 0,01$, $a/h = 0,1$. Il est à noter que les résultats actuels de la flèche au centre se comparent très bien avec la solution 3-D pour une plaque FGM sans porosité et prend des valeurs maximales pour une plaque FGM poreuse ($\alpha = 0,1$ et $\alpha = 0,2$). Ceci est prévu parce que la plaque FGM imparfaite est

celle qui a la rigidité la plus basse et la plaque FGM parfaite est celui avec la plus grande rigidité.

Tableau III.1. Etude comparative du déplacement central non-dimensionnelle et la contrainte de cisaillement maximale d'une plaque carrée FGM en alumine / aluminium simplement appuyée sous une charge uniformément répartie, ($a/h = 100$)

L'indice de puissance k	Théorie	Facteur de correction	\bar{w}	$\bar{\tau}_{xz}(z=0)$
Céramique	Singha (2011)	0.83333	0.004064	0.50699
	présente	-	0.004064	0.51644
0.5	Singha (2011)	0.84515	0.006269	0.53114
	présente	-	0.006269	0.52799
1	Singha (2011)	0.82921	0.008154	0.54043
	présente	-	0.008154	0.51714
1.5	Singha (2011)	0.80016	0.009525	0.53804
	présente	-	0.009525	0.49742
2	Singha (2011)	0.76778	0.010449	0.53039
	présente	-	0.010449	0.47644
3	Singha (2011)	0.71661	0.011482	0.51386
	présente	-	0.011482	0.44339
3.3	Singha (2011)	0.70611	0.011672	0.50975
	présente	-	0.011672	0.43679
4	Singha (2011)	0.68888	0.012011	0.50197
	présente	-	0.012011	0.42716
5	Singha (2011)	0.67677	0.012359	0.49427
	présente	-	0.012359	0.42445
10	Singha (2011)	0.1196	0.013569	0.47897
	présente	-	0.013569	0.46202
20	Singha (2011)	0.74102	0.015362	0.47352
	présente	-	0.015362	0.49050
Métal	Singha (2011)	0.83333	0.022064	0.50699
	présente	-	0.022064	0.51644

Tableau III. 2. Etude comparative du déplacement central non-dimensionnelle la contrainte dans le plan d'une plaque carré FGM en alumine / aluminium sous des charges uniformément répartie et sinusoïdales.

$$(a / h = 10)$$

L'indice de puissance k	\bar{w}		$\bar{\sigma}_x (z = h/2)$	
	Singha (2011)	présente	Singha (2011)	présente
Charge uniformément répartie				
Céramique	0.4666	0.4665	2.8688	2.8932
k=1	0.9290	0.9287	4.4303	4.4499
k=2	1.1952	1.1936	5.1689	5.1737
k=4	1.3908	1.3952	5.8035	5.8132
Métal	2.5327	2.5326	2.8687	2.8932
Charge latérale sinusoïdale				
Céramique	0.2961	0.2960	1.9679	1.9955
k=1	0.5891	0.5889	3.0389	3.1212
k=2	0.7582	0.7575	3.5456	3.6720
k=4	0.8831	0.8822	3.9813	4.1647
Métal	1.6072	1.6070	1.9679	1.9955

Tableau III.3. Etude comparative de la flèche au centre d'une plaque isotrope et homogène

$$(k=0, E_m=E_C=E=1 \text{ et } a/b=1).$$

a/h	Karama ESDPT (2003)	Reddy PSDPT (2000)	Hassaine. D NHPSDT (2012)	Werner 3D (1999)	Présente	
	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.2$
0.01	44380.05	44383.88	44383.86	44384.7	44383.84	49315.39
0.1	46.2763	46.6588	46.65655	46.7443	46.65480	51.83867

La flèche au centre w et la variation à travers l'épaisseur de la plaque des contraintes sont présentées dans le tableau III.4 pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur de la plaque ($a / h = 4, 10, 20$ et 100). Le rapport de géométrie est pris égal à $b=3a$, et l'indice de puissance est égal à $k=2$. Il est à noter que les présents résultats se comparent très bien avec la solution de d'autres théories de Karama ESDPT et de Reddy PSDPT. De plus, ce tableau montre l'effet

de la porosité sur la flèche et les contraintes de la plaque FGM avec deux types de la fraction volumique de porosité différente ($\alpha = 0,1$ et $\alpha = 0,2$). Les résultats montrent que les résultats de la flèche augmentent à mesure que la fraction volumique de porosité (α) augmente car la présence des pores aux niveaux des plaques FGM affaiblie sa rigidité.

Tableau III.4. Comparaison des déplacements et des contraintes d'une plaque FGM rectangulaire ($b=3a$ and $k=2$)

a/h	Théorie	α	w	σ_x	σ_y	τ_{yz}	τ_{xz}	τ_{xy}
4	ESDPT (2003)	$\alpha = 0$	4.0569	5.2804	0.6644	0.6084	0.6699	0.5900
	PSDPT (2000)	$\alpha = 0$	4.0529	5.2759	0.6652	0.6058	0.6545	0.5898
	Présente	$\alpha = 0$	3.8716	5.4197	0.66778	0.6096	0.6802	0.5395
		$\alpha = 0.1$	4.7346	5.9455	0.6796	0.6312	0.6717	0.4940
		$\alpha = 0.2$	6.2567	6.8649	0.6809	0.6598	0.6624	0.4148
	10	ESDPT (2003)	$\alpha = 0$	3.5543	12.9252	1.6938	0.61959	0.6841
PSDPT (2000)		$\alpha = 0$	3.5537	12.9234	1.6941	0.6155	0.6672	1.4898
Présente		$\alpha = 0$	3.5231	12.9841	1.6995	0.6211	0.6922	1.4659
		$\alpha = 0.1$	4.3921	14.2925	1.7073	0.6431	0.6821	1.3695
		$\alpha = 0.2$	5.9992	16.6660	1.7174	0.6723	0.6679	1.1948
20		ESDPT (2003)	$\alpha = 0$	3.4824	25.7712	3.3971	0.6214	0.6878
	PSDPT (2000)	$\alpha = 0$	3.48225	25.7703	3.3972	0.6171	0.6704	2.9844
	Présente	$\alpha = 0$	3.4745	25.8012	3.4001	0.6231	0.6951	2.9719
		$\alpha = 0.1$	4.3452	28.4167	3.4167	0.6452	0.6845	2.7851
		$\alpha = 0.2$	5.9665	33.1876	3.4388	0.6745	0.6687	2.4428
	100	ESDPT (2003)	$\alpha = 0$	3.4593	128.728	17.0009	0.6220	0.6894
PSDPT (2000)		$\alpha = 0$	3.45937	128.7283	17.0009	0.6177	0.67176	14.9303
Présente		$\alpha = 0$	3.4591	128.734	17.0015	0.6238	0.6962	14.9278
		$\alpha = 0.1$	4.3305	141.8106	17.0863	0.6459	0.6854	14.0039
		$\alpha = 0.2$	5.9566	165.7058	17.2002	0.6752	0.6689	12.3036

Les figures III.1 et III.2 montrent la variation de la flèche adimensionnelle en fonction du rapport de géométrie et rapport d'épaisseur, respectivement, pour des plaques FGM en

Al/Al₂O₃ sans et avec porosités simplement appuyée. Le rapport d'épaisseur est pris égal à 10 dans la figure III.1, et le rapport de géométrie est pris égal à 1 dans la figure III.2. La flèche est maximale pour une plaque FGM avec porosité ($\alpha = 0,1$ et $\alpha = 0,2$) et minimale pour une plaque FGM parfaite ($\alpha = 0$). L'écart diminue à mesure que le rapport de géométrie augmente et reste constant avec l'augmentation du rapport d'épaisseur.

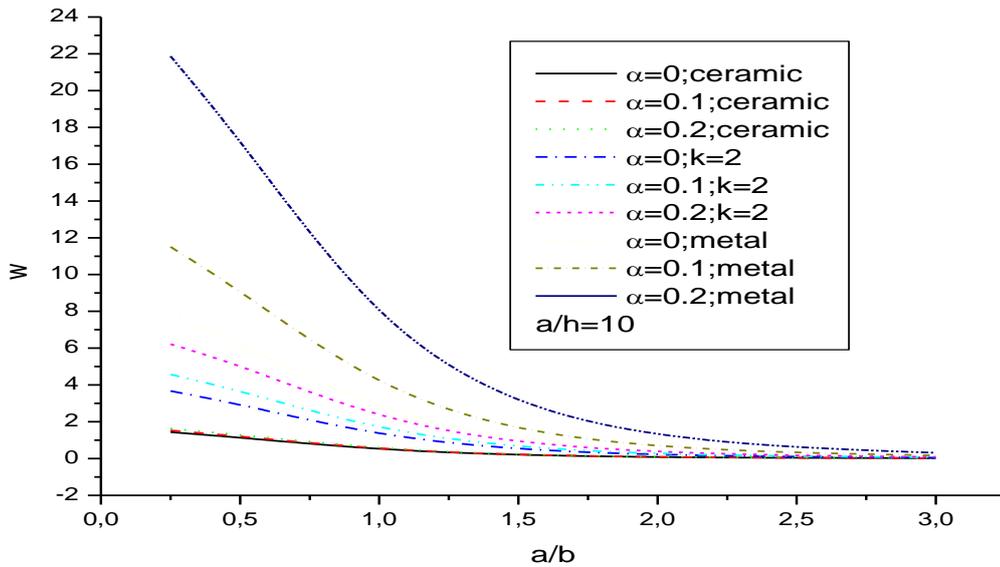


Figure III.1. La flèche adimensionnelle au centre en fonction du rapport de géométrie (a/b) d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ avec et sans porosité

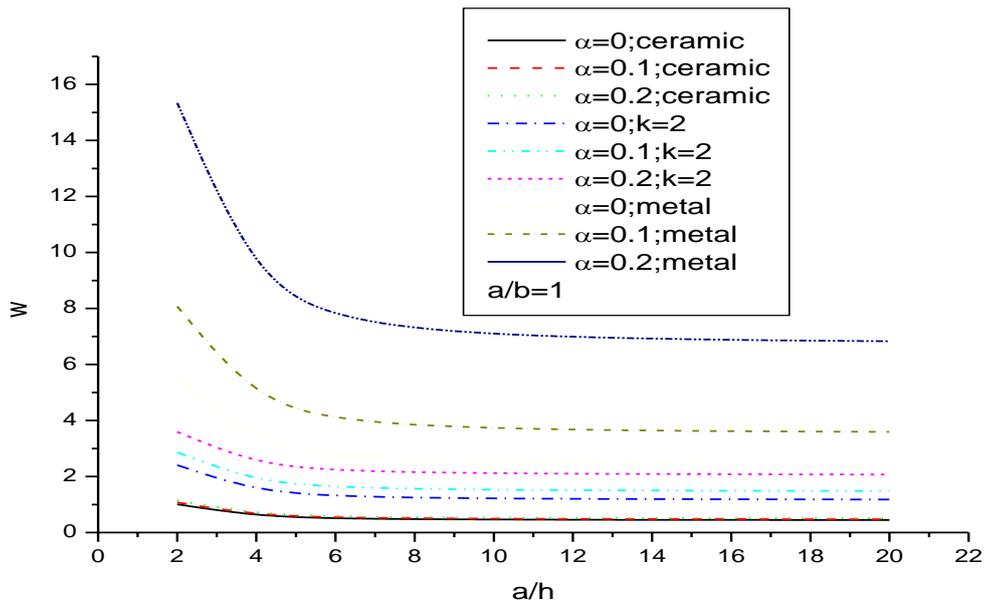


Figure III.2. La flèche adimensionnelle au centre en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ avec et sans porosité

Les figures III.3 et III.4 contiennent les tracés de la contrainte médiane longitudinale dans le plan la contrainte normales σ_x et σ_y à travers l'épaisseur de la plaque FGM en Al/Al₂O₃ avec et sans porosité. L'indice de puissance est pris égal $k = 2$ et le rapport d'épaisseur $a/h=10$. Les contraintes sont à la traction dans la surface supérieure et la compression à la surface inférieure et prennent les valeurs maximales pour la plaque de FG imparfaite.

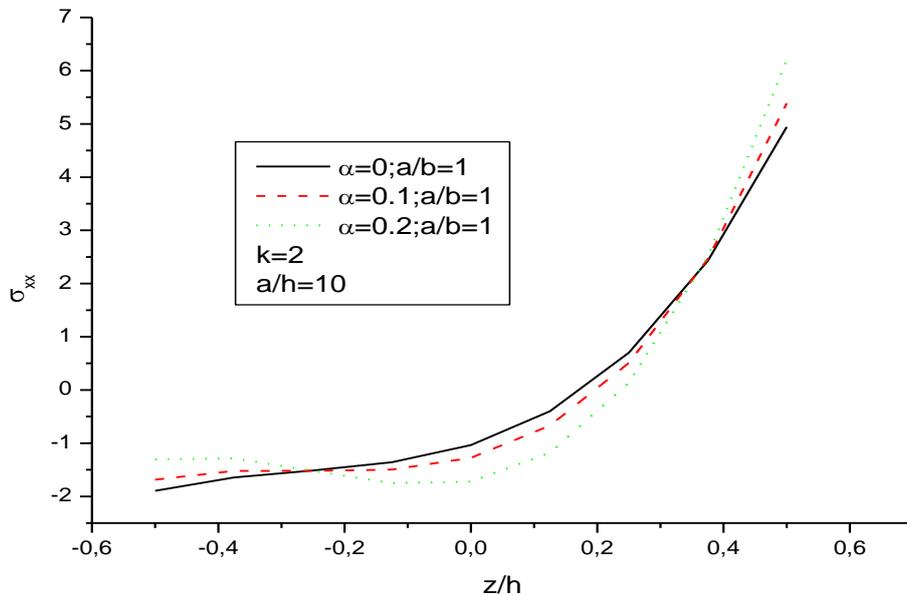


Figure III.3. Variation de la contrainte longitudinale (σ_{xx}) à travers l'épaisseur de plaque FGM en Al/Al₂O₃ pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité

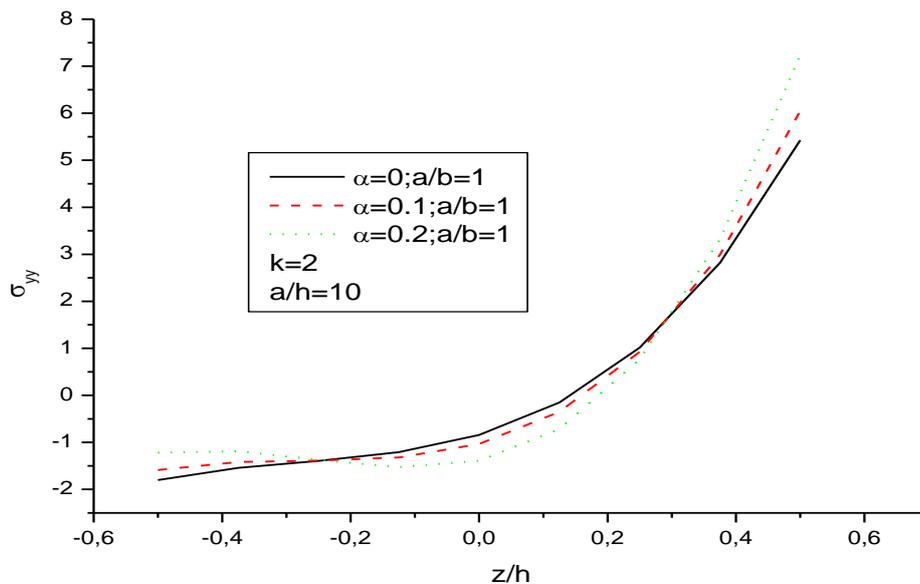


Figure III.4. Variation de la contrainte normale (σ_{yy}) à travers l'épaisseur de plaque FGM en Al/Al₂O₃ pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité

Les figures III.5 et III.6, montre la répartition des contraintes de cisaillement τ_{yz} et τ_{xz} à travers l'épaisseur de la plaque FGM. L'exposant de la fraction volumique de la plaque FGM est pris égal $k = 2$. Il est clair que les distributions ne sont pas paraboliques, et la fraction volumique de porosité influe sur la répartition des contraintes de cisaillement.

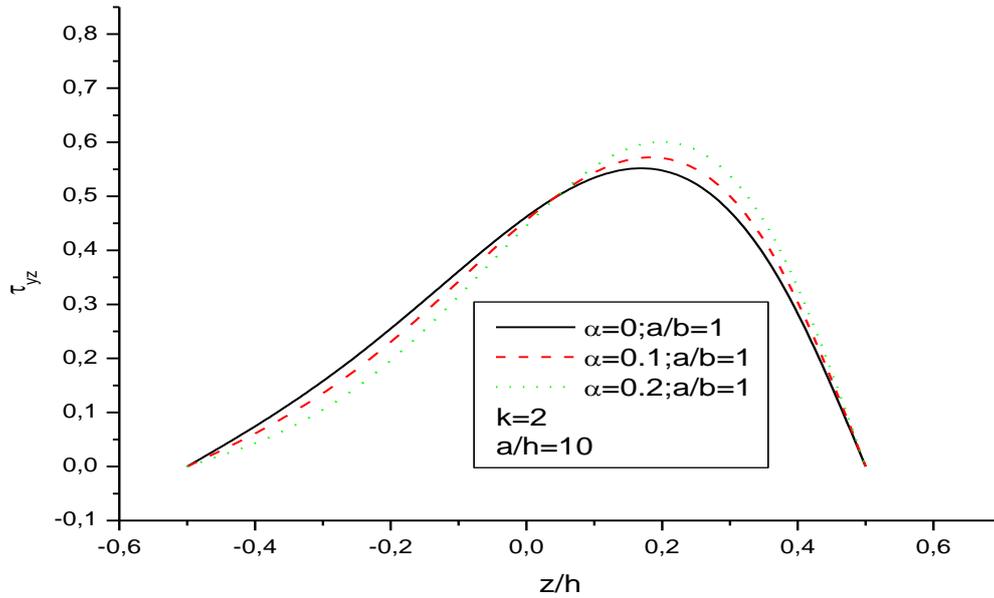


Figure III.5. Variation de la contrainte transversale τ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque FGM en Al/Al₂O₃ pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité.

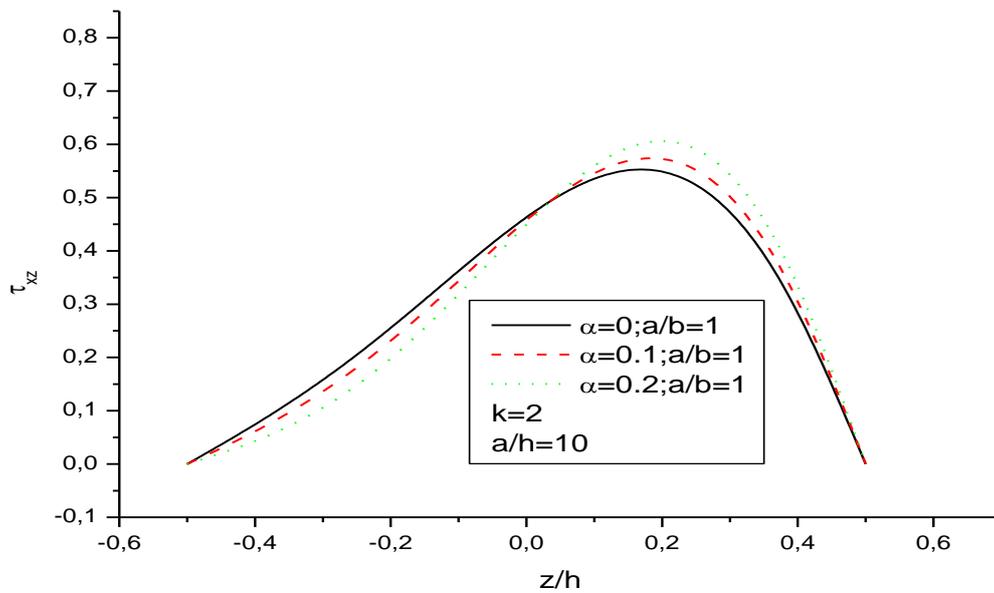


Figure III.6. Variation de la contrainte transversale τ_{xz} à travers l'épaisseur de la plaque FGM en Al/Al₂O₃ pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité.

L'effet de la fraction volumique de porosité est ainsi étudié pour l'analyse statique des plaques avec un autre type de combinaison pour un FGM en Al/ZrO₂. L'influence de la fraction volumique de porosité (α) sur la flèche adimensionnelle au centre en fonction du rapport de géométrie et d'épaisseur sont illustrés sur les figures III.7 et III.8, respectivement, pour une plaque FGM en Al / ZrO₂ simplement appuyées. L'indice de la loi de puissance est considéré égal à 5. La fraction volumique de porosité est considéré égal $\alpha=0, 0.1$ et 0.2 . On peut constater que la flèche adimensionnelle au centre augmente avec l'augmentation de la fraction volumique de porosité (α). La différence diminue à mesure que le rapport de géométrie (a / b) augmente, tandis qu'elle reste constante avec l'augmentation du rapport d'épaisseur (a / h).

Les figures III.9 et III.10 contiennent les variations de la contrainte longitudinale dans le plan $\bar{\sigma}_x$ et la contrainte normale $\bar{\sigma}_y$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM en Al/ZrO₂. L'exposant de la fraction volumique de la plaque FGM est pris égal à $k = 5$, le rapport de géométrie $a/b=1.5$ et le rapport d'épaisseur $h/a=0.2$. La fraction volumique de porosité est considéré égal $\alpha=0, 0.1$ et 0.2 . Il est à noter que les contraintes sont en traction à la surface supérieure de la plaque et à la compression à la surface inférieure de la plaque.

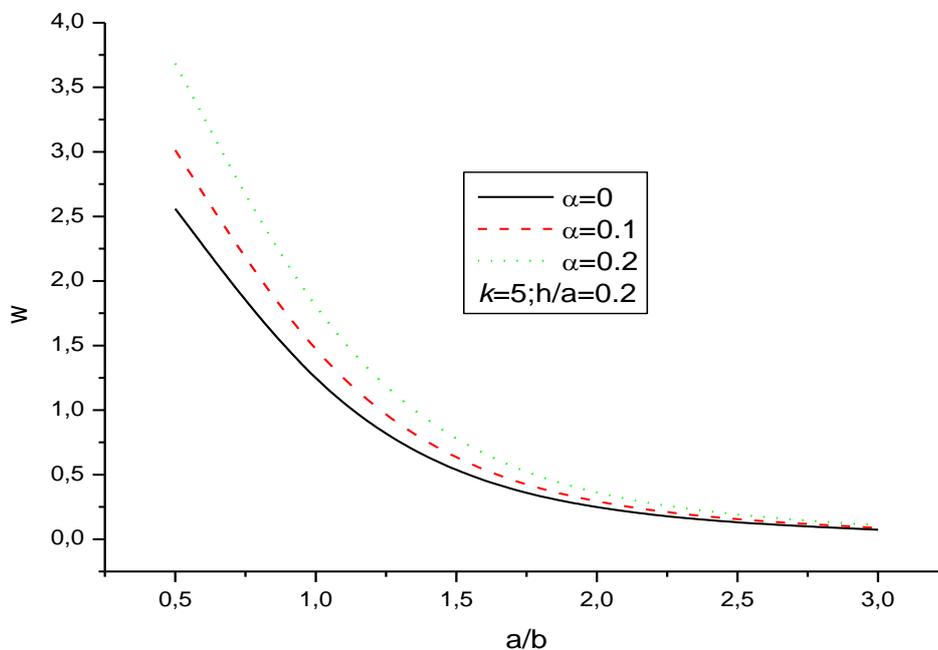


Figure III.7. La flèche adimensionnelle au centre en fonction du rapport de géométrie (a/b) d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ avec et sans porosité

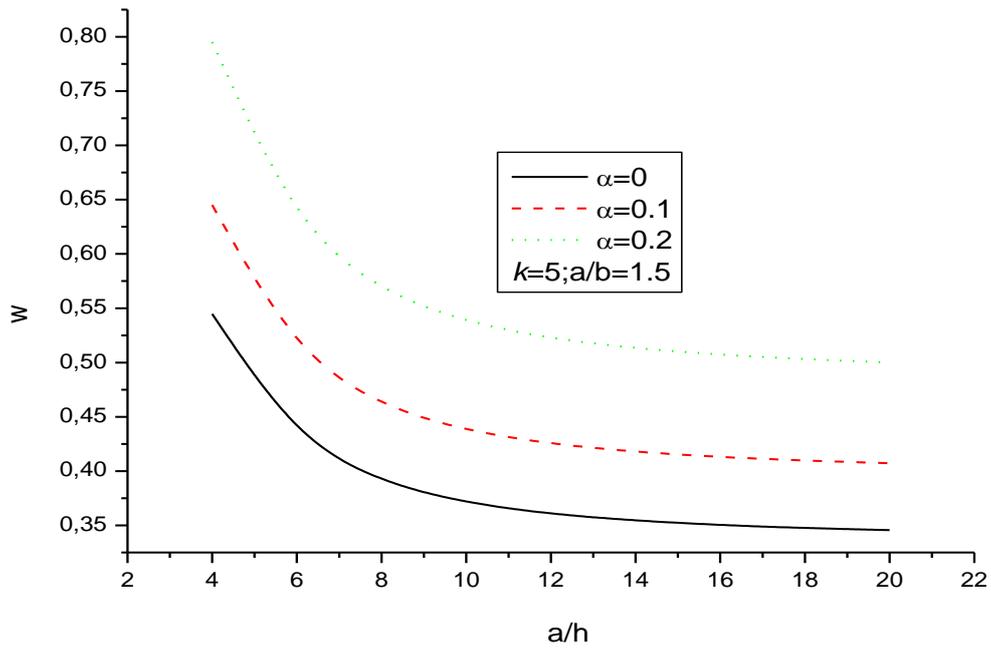


Figure III.8. La flèche adimensionnelle au centre en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ avec et sans porosité

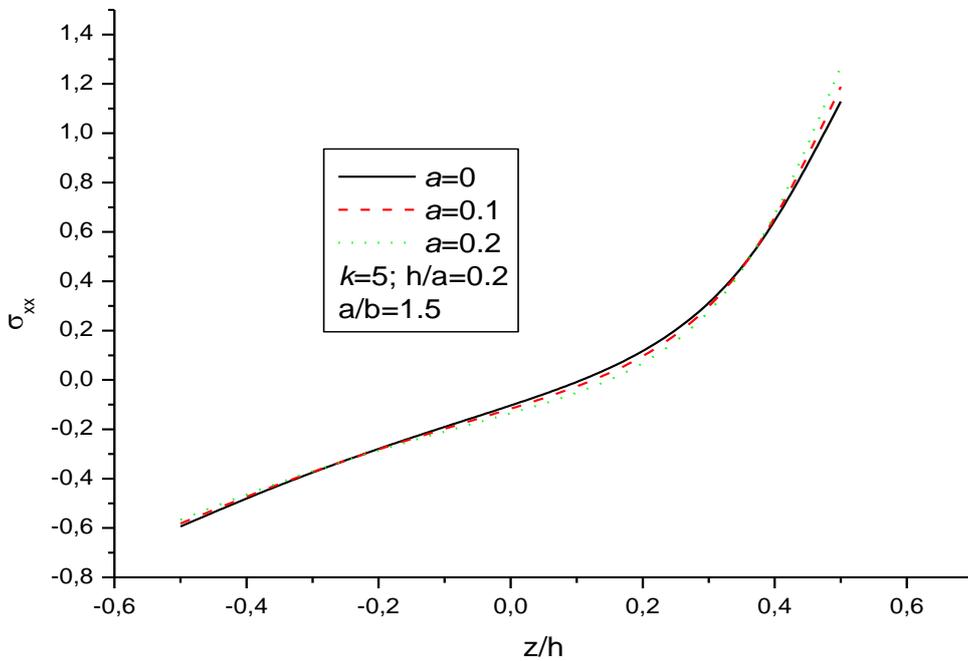


Figure III.9. Variation de la contrainte longitudinale (σ_{xx}) à travers l'épaisseur de la plaque FGM en Al/ZrO₂ pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité

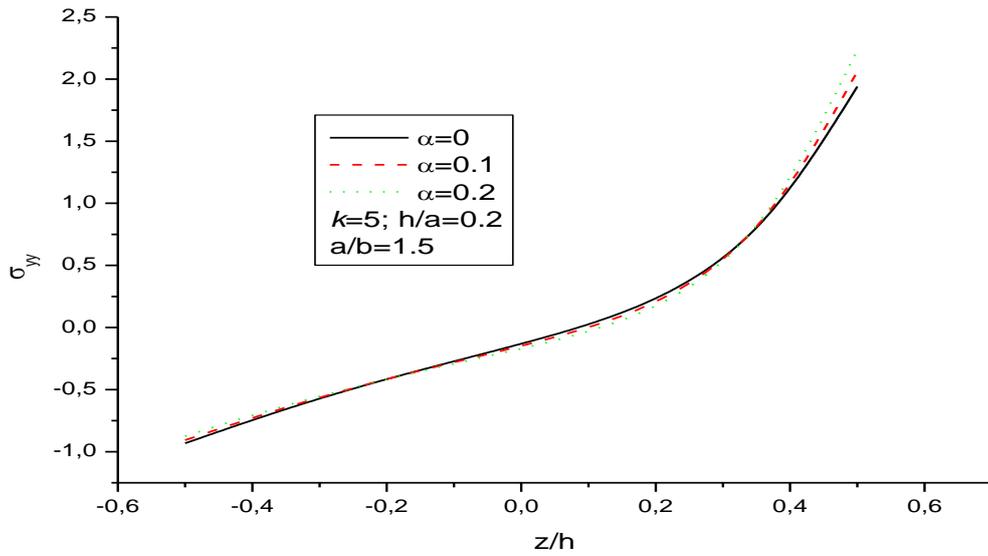


Figure III.10. Variation de la contrainte normale (σ_{yy}) à travers l'épaisseur de la plaque FGM en Al/ZrO₂ pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité

Les figures III.11 et III.12 montrent la répartition des contraintes de cisaillement et à travers l'épaisseur de la plaque FGM en Al/ZrO₂. L'exposant de la fraction volumique de la plaque FGM est pris égal $k = 5$, le rapport de géométrie $a/b=1.5$ et le rapport d'épaisseur $h/a=0.2$. Il est à noter que les valeurs maximales des contraintes de cisaillement corresponde à la position de l'axe neutre de la plaque FGM, cette position de la plaque FGM parfaite ($a = 0$) ne soit pas la même pour une plaque avec porosité.

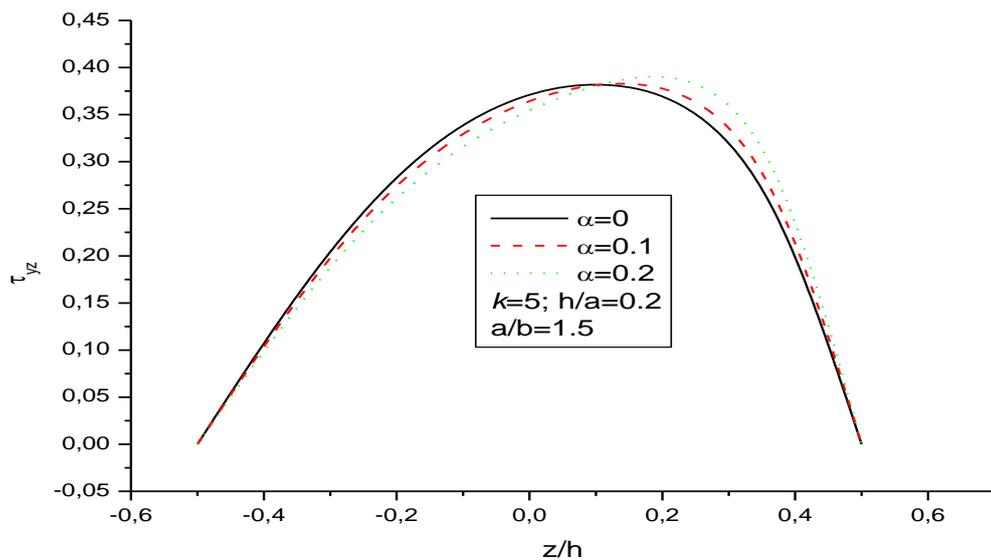


Figure III.11. Variation de la contrainte transversale τ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque FGM en Al/ZrO₂ pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité.

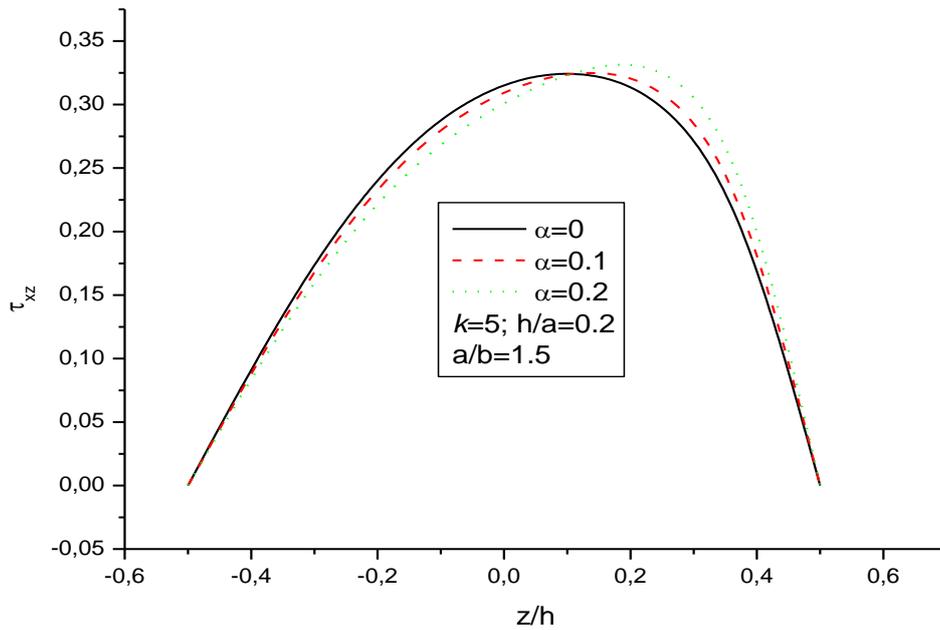


Figure III.12. Variation de la contrainte transversale τ_{xz} à travers l'épaisseur de la plaque FGM en Al/ZrO₂ pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité.

L'analyse dynamique des plaques FGM poreuses est également considérée dans cette étude. Les résultats de la présente théorie ont été comparés avec ceux qui sont disponibles dans la littérature obtenus par Hasani Baferani *et al* [Hasani Baferani. 2011], Thai *et al* [Thai. 2014], Matsunaga *et al* [Matsunaga. 2008], Reddy [Reddy. 2000], Trung *et al* [Trung. 2008], la solution 3D de Vel *et al* [Vel. 2004] et Hassaine Daouadji *et al* [Hassaine Daouadji. 2012].

Le tableau III.5 montre également l'exactitude de la théorie actuelle en comparant les résultats de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle des plaques FGM carrées en Al/Al₂O₃ avec celles rapportées dans la littérature obtenus par Hasani Baferani *et al* [Hasani Baferani. 2011] et avec Thai [Thai. 2014]. Encore une fois de bons accords sont obtenus.

La présente solution est ainsi réalisée pour une plaque FGM carrée en Al/Al₂O₃ pour les trois premières fréquences naturelles avec l'indice de puissance égal à $k = 1$ et des différentes valeurs pour le rapport d'épaisseur de la plaque dans le tableau III.6. Les résultats ont été comparés avec Reddy [Reddy. 2000], Trung *et al* [Trung. 2008], la solution 3D de Vel *et al* [Vel. 2004] et Hassaine Daouadji *et al* [Hassaine Daouadji. 2012]. Il est à noter que les résultats actuels des fréquences naturelles se comparent très bien avec la solution 3-D pour une plaque FGM parfaite (sans porosité).

Tableau III.5. Etude comparative de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{w} = \omega \alpha^2 / h \sqrt{\rho_{11} / E_{11}}$ d'une plaque FGM carrée en Al/Al₂O₃, (b/a=1, a=0)

h/a	Méthode	L'indice de puissance k			
		0	1	2	5
0.05	Hasani. B (2011)	0.0291	0.0227	0.0209	0.0197
	Thai (2014)	0.0291	0.0222	0.0202	0.0191
	Présente	0.0291	0.0196	0.0186	0.0169
0.1	Hasani. B (2011)	0.1134	0.0891	0.0819	0.0767
	Thai (2014)	0.1134	0.0868	0.0788	0.0740
	Présente	0.1133	0.0768	0.0727	0.0660
0.15	Hasani. B (2011)	0.2454	0.1939	0.1778	0.1648
	Thai (2014)	0.2452	0.1885	0.1706	0.1589
	Présente	0.2452	0.1678	0.1581	0.1425
0.2	Hasani. B (2011)	0.4154	0.3299	0.3016	0.2765
	Thai (2014)	0.4150	0.3205	0.2892	0.2667
	Présente	0.4151	0.2869	0.2689	0.2401

Tableau III.6. Etude comparative des trois premières fréquences naturelles des plaques FGM carrées pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur h / a, (k=1, a=0)

h/a	Méthode	Mode de séquence		
		Mode 1	Mode 2	Mode 3
0.2	Reddy (2000)	5.6914	15.3408	25.9257
	Trung (2008)	5.7123	15.339	25.776
	Vel (2004)	5.4806	14.558	24.381
	Hassaine Daouadji (2012)	5.6777	15.3438	25.7764
	Présente	5.6781	15.3438	25.7766
0.1	Reddy (2000)	6.1863	30.6861	51.8665
	Trung (2008)	6.1932	30.685	51.795
	Vel (2004)	5.9609	29.123	49.013
	Hassaine Daouadji (2012)	6.1813	30.6876	51.7915
	Présente	6.1815	30.6876	51.7916
0.05	Reddy (2000)	6.3371	61.3744	103.7404
	Trung (2008)	6.339	61.374	103.71
	Vel (2004)	6.1076	58.25	98.145
	Hassaine Daouadji (2012)	6.3358	61.3751	103.7029
	Présente	6.3358	61.3751	103.7029

Le tableau III.7 présente une comparaison des résultats avec la fréquence fondamentale d'une plaque FGM carrée en Al/Al₂O₃ pour différentes valeurs de l'indice de puissance $k=1, 2, 3$ et 5 avec ceux qui sont obtenus par Matsunaga *et al* [Matsunaga. 2008], Reddy [Reddy. 2000], Trung *et al* [Trung. 2008], la solution 3D de Vel *et al* [Vel. 2004] et Hassaine Daouadji *et al* [Hassaine Daouadji. 2012]. Il est à noter que la présente théorie prédit les résultats avec plus de précision que les autres modèles en comparaison avec les solutions d'élasticité 3D.

Tableau III.7. Etude comparative de la fréquence fondamentale d'une plaque FGM carrée en Al/Al₂O₃ pour différentes valeurs de l'indice de puissance k , ($a/h = 5, a=0$)

Méthode	L'indice de puissance k			
	1	2	3	5
Matsunaga (2008)	5.882	5.8907	5.889	5.8523
Reddy (2000)	5.6914	5.6421	5.6571	5.6795
Trung (2008)	5.7123	5.6599	5.6757	5.702
Vel (2004)	5.4806	5.4923	5.5285	5.5632
Hassaine Daouadji (2012)	5.6777	5.6229	5.6385	5.6651
Présente	5.6781	5.6232	5.6385	5.6649

La figure III.13 montre l'effet de la fraction volumique de la porosité sur la fréquence non-dimensionnelle d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ en fonction du rapport d'épaisseur. L'indice de puissance est considéré égal à $k = 2$. Dans cette figure, la plaque est considérée dans le premier cas de forme carrée et rectangulaire dans le deuxième cas. Il est clair que la fréquence fondamentale est maximale pour une plaque FGM imparfaite ($\alpha = 0,1$ et $\alpha = 0,2$) et dans le cas d'une plaque rectangulaire et devienne minimale pour une plaque FGM parfaite ($\alpha = 0$) et dans le cas d'une plaque carrée. On peut également remarquer que la fréquence diminue avec l'augmentation du rapport d'épaisseur a/h .

L'effet de la fraction volumique de la porosité sur la fréquence non-dimensionnelle d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ en fonction du rapport de géométrie est présenté dans la figure III.14. L'indice de puissance est pris égal à $k = 2$. Le rapport d'épaisseur de la plaque est considéré égal à $a/h=5$ et 10 . Il est à noter que la fréquence non-dimensionnelle augmente avec l'augmentation du rapport de géométrie a/b . On peut également remarquer que la fréquence fondamentale est toujours maximale pour une plaque FGM avec une fraction

volumique de porosité égal à ($\alpha = 0,1$ et $\alpha = 0,2$) et minimale pour une plaque FGM avec une fraction volumique de porosité est égal à ($\alpha = 0$)

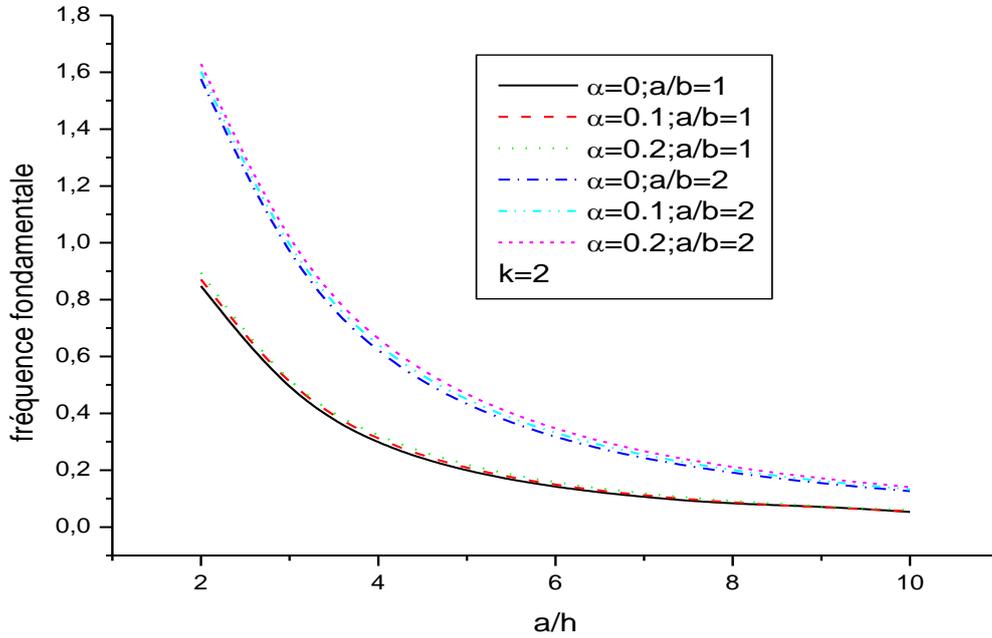


Figure III.13. Variation de la fréquence non dimensionnelle en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité d'une plaque FGM en Al/Al_2O_3 .

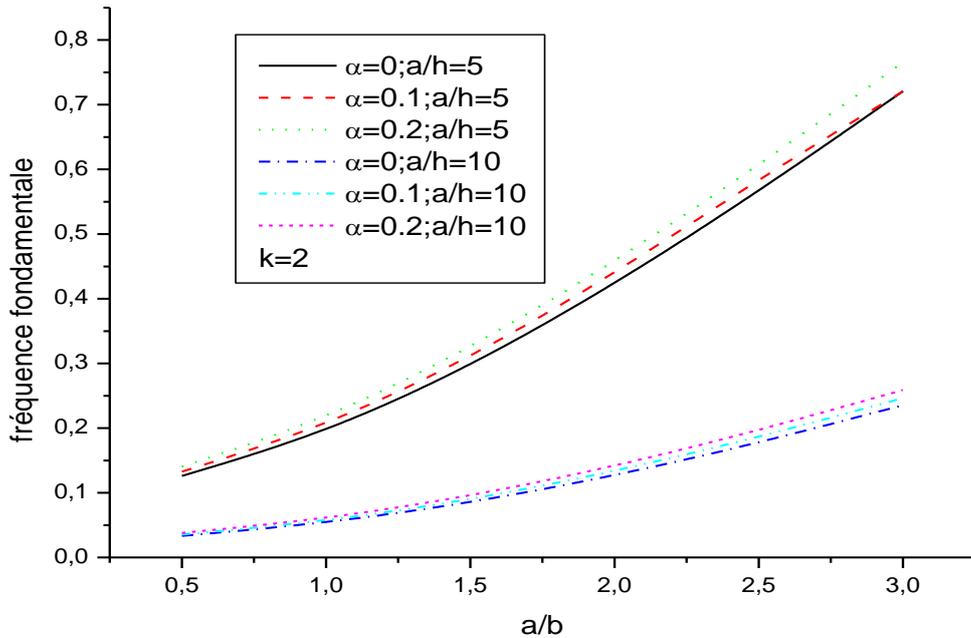


Figure III.14. Variation de la fréquence non dimensionnelle en fonction du rapport de géométrie (a/b) pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité d'une plaque FGM en Al/Al_2O_3 .

III.4. Conclusions :

Une nouvelle théorie raffinée de déformation de cisaillement de la plaque est proposée pour l'analyse statique et dynamique des plaques FGM en Al/Al₂O₃ et Al/ZrO₂. La théorie prit en considération la distribution parabolique de la déformation de cisaillement transverse et satisfait la nullité des contraintes aux surfaces supérieures et inférieures de la plaque sans utiliser le facteur de correction de cisaillement. La loi du mélange modifiée couvrant les phases de porosité est utilisée pour décrire approximativement les propriétés des plaques FGM avec porosité. Sur la base de la présente théorie de la plaque, les équations d'équilibre sont dérivées du principe des travaux virtuels et le principe d'Hamilton. L'influence de porosité sur la flèche, les contraintes et les fréquences fondamentales sont discutées. A partir de cette étude les conclusions suivantes ont été tirées :

- La théorie proposée donne des solutions qui sont presque identiques à ceux obtenus avec d'autres théories de déformation de cisaillement.
- La flèche est maximale pour une plaque FGM avec porosité ($\alpha = 0,1$ et $\alpha = 0,2$) et minimale pour une plaque FGM parfaite ($\alpha = 0$).
- Les contraintes σ_x et σ_y sont à la traction dans la surface supérieure et la compression à la surface inférieure.
- La flèche adimensionnelle au centre augmente avec l'augmentation de la fraction volumique de porosité (a). La différence diminue à mesure que le rapport de géométrie (a / b) augmente tandis qu'elle reste constante avec l'augmentation du rapport d'épaisseur (a / h).
- La fraction volumique de porosité influe sur la position de l'axe neutre d'une plaque FGM
- La fréquence non-dimensionnelle augmente avec l'augmentation du rapport de géométrie a/b .
- La fréquence fondamentale est maximale pour une plaque FGM avec porosité ($\alpha = 0,1$ et $\alpha = 0,2$)
- La fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation du rapport d'épaisseur a/h .

CHAPITRE IV

ANALYSE DE LA FLEXION ET LA VIBRATION LIBRE DES PLAQUES FGM REPOSANT SUR UNE FONDATION ELASTIQUE

IV.1. Introduction :

La technique de gradation de la céramique ainsi que le métal initié par les spécialistes des matériaux japonais à Sendai a marqué le début de l'exploration de la possibilité d'utiliser des FGM pour diverses applications structurelles [Koizumi. 1997]. Depuis lors, un effort a été consacré au développement de matériaux à gradient de propriétés de haute performance résistant à la chaleur. Les FGM sont donc des matériaux composites à caractère non homogène microscopiquement. Il présente une transition graduelle dans la microstructure et / ou la composition dans une direction définie. Les FGM possèdent une caractéristique d'adaptation de composition graduelle et la microstructure selon la distribution des propriétés nécessaires à la fonction désirée obtenue qui le distingue à des matériaux conventionnels.

Les plaques reposant sur une fondation élastique sont très adoptées en génie des structures au cours des dernières décennies. De nombreuses études de flexion linéaires pour des plaques épaisses soumises à des charges transversales avec des fondations élastiques sont disponibles dans la littérature. Dans certaines des analyses de plaques sur fondation élastique, un seul paramètre est utilisé pour décrire le comportement de base selon le modèle Winkler [Katsikadelis. 1984, Liu. 2000]. Dans ce modèle, on suppose qu'il existe une interaction proportionnelle entre la pression et la flexion d'un point appliqué sur la fondation. Cette fondation est modélisée par des ressorts verticaux discrets et ne tient pas compte de la déformation de cisaillement transversal.

D'autres chercheurs ont modélisé la fondation avec deux paramètres selon le modèle Pasternak [Pasternak. 1954]. Ce modèle à deux paramètres prend en compte l'effet de l'interaction de cisaillement entre les points de la fondation [Buczowski. 2001, Shen. 2000, Zenkour. 2009].

Plusieurs investigations ont été présentées pour l'analyse des plaques et des poutres FGM. Mojdehi *et al* [Mojdehi. 2011] ont présenté une analyse 3D statique et dynamique des plaques épaisses à gradient de propriétés sur la base des approches MLPG. Ma *et al* [Ma. 2012] ont obtenu une solution exacte pour les réponses statiques non linéaires de poutres en matériaux à gradient de propriétés soumis à un chargement thermique uniforme dans le plan. Cheng et Batra [Cheng. 2000] ont étudiés la flexion d'une plaque polygonale à gradient de propriétés simplement appuyée donnée par une théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT).

Praveen et Reddy [Praveen. 1998] ont analysé également la réponse statique et dynamique non-linéaire des plaques en céramique-métal à gradient de propriétés dans un champ de température constante et soumis à des charges latérales dynamiques par la méthode des éléments finis. Park *et al* [Park. 2006] ont présenté le comportement du post-flambement et de la vibration thermique de la plaque FGM à gradient de propriétés, les équations non linéaires des éléments finis sont basés sur la théorie des plaques de déformation de cisaillement de premier ordre et la relation de contrainte-déplacement non linéaire de Von Karman est utilisé pour tenir compte du grand déplacement de la plaque. Shen [Shen. 2002] ont étudié la réponse non-linéaire de la flexion des plaques à gradient de propriétés soumises à des charges transversales et dans un environnement thermique.

L'objectif de cette étude est d'utiliser la présente théorie raffinée de déformation de cisaillement pour étudier la flexion et la vibration libre des plaques FGM simplement appuyées reposant sur une fondation de type Winkler-Pasternak. Nous supposons que la plaque est réalisée en matériau isotrope ayant des propriétés matérielles varient d'une façon continues dans seulement la direction d'épaisseur. Nous considérons un matériau à gradient de propriétés à deux phases, avec une variation de la loi de puissance des fractions en volume des constituants dans l'épaisseur. Nous comparons les résultats analytiques avec ceux disponibles dans la littérature et nous avons trouvé des bons accords avec eux.

IV.2. Formulation de la problématique :

Considérons une plaque rectangulaire de longueur a , une largeur b et une épaisseur h en matériau à gradient de propriétés, dans lequel la composition varie de haut en surface inférieure. Pour spécifier la position de la surface neutre de la plaque FGM, deux plans différents sont considérés pour la mesure des z , à savoir z_{ms} et z_{ns} , mesurée à partir de la surface intermédiaire et la surface neutre de la plaque, respectivement, comme représenté sur la figure IV.1 [Ait Atmane. 2015, Ait Yahia. 2015, Hadji. 2015a, b]

$$V_c(z) = \left(\frac{z_{ms}}{h} + \frac{1}{2} \right)^k = \left(\frac{z_{ns} + c}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (\text{IV.1})$$

Où k représente la propriété de matériau efficace tel que le module d'Young E et la densité de la masse ρ . En outre, le paramètre C est la distance de la surface neutre à la surface du milieu. La fraction volumique de métal est exprimée sous la forme :

$$V_m(z) = 1 - V_c(z) \quad (IV.2)$$

Le module du Young efficace E est exprimé comme [Hadji. 2015a]:

$$E(z) = E_m V_m(z) + E_c V_c(z) \quad (IV.3)$$

Lorsque la valeur de k égale à zéro représente une plaque entièrement en céramique, alors que k infinie indique une plaque entièrement métallique.

La position de la surface neutre de la plaque FGM est déterminée pour satisfaire le premier moment en ce qui concerne le module d'Young étant égale à zéro comme suit [Bodaghi. 2011]

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})(z_{ms} - C) dz_{ms} = 0 \quad (IV.4)$$

Par conséquent, la position de la surface neutre peut être obtenue sous forme [Bodaghi. 2011] :

$$C = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) z_{ms} dz_{ms}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz_{ms}} \quad (IV.5)$$

On peut voir que la surface neutre physique et la surface moyenne géométrique sont les mêmes dans une plaque homogène et isotrope.

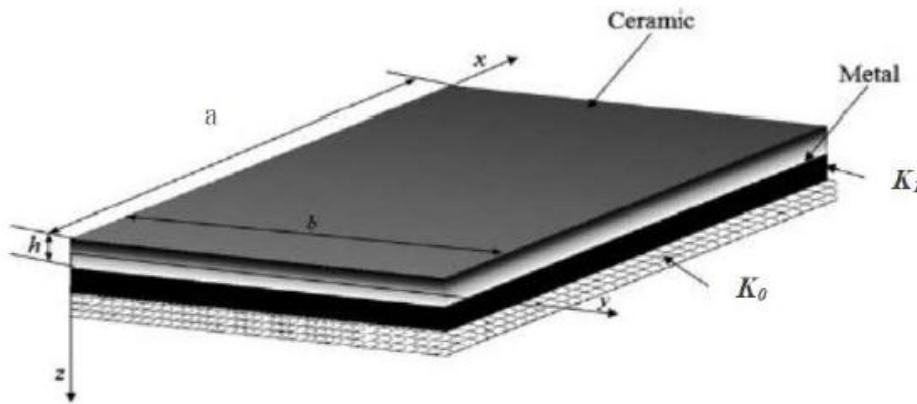


Figure IV.1. Géométrie et dimension d'une plaque FGM reposé sur une fondation élastique

IV.3. Champ de déplacements et de déformations :

Sur la base de la théorie de la plaque de déformation de cisaillement d'ordre supérieur, les éléments de déplacement sont supposés :

$$\begin{aligned} u(x, y, z_{ns}) &= u_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z_{ns}) &= v_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z_{ns}) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (IV.6)$$

L'origine des coordonnées de matériau est à la surface neutre de la plaque. La déformation linéaire peut être obtenue à partir des relations cinématiques comme :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z_{ns} k_x^b + f(z_{ns}) k_x^s \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z_{ns} k_y^b + f(z_{ns}) k_y^s \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z_{ns} k_{xy}^b + f(z_{ns}) k_{xy}^s \\ \gamma_{yz} &= g(z_{ns}) \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz} &= g(z_{ns}) \gamma_{xz}^s \\ \varepsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad (IV.7)$$

Ou

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \quad k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{yz}^s &= \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad g(z_{ns}) = 1 - f'(z_{ns}), \quad f'(z_{ns}) = \frac{df(z_{ns})}{dz_{ns}} \end{aligned} \quad (IV.8)$$

Avec:

$$f(z) = z_{ns} + C - \sin\left(\frac{\pi(z_{ns} + C)}{h}\right) \quad (IV.9)$$

Les relations constitutives linéaires d'une plaque FGM peuvent être écrites comme :

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{cases} \quad (IV.10)$$

$$\begin{cases} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{cases}$$

Ou :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z_{ns})}{1-\nu^2}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z_{ns})}{1-\nu^2} \quad (IV.11)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z_{ns})}{2(1+\nu)}$$

IV.4. Les équations principales et les conditions aux limites :

Le principe d'Hamilton est utilisé ici pour obtenir les équations de mouvement appropriées pour le champ de déplacement et les équations constitutives. Le principe peut être énoncé sous forme analytique:

$$\mathbf{0} = \delta \int_{t_1}^{t_2} (U + U_F - K - W) dt \quad (IV.12)$$

Où U est la variation de l'énergie de déformation et K est la variation de l'énergie cinétique de la plaque FGM, U_F est l'énergie de déformation de la fondation et W est le travail des forces extérieures.

En employant du principe de l'énergie totale conduit à une équation générale de mouvement et des conditions aux limites. En prenant la variation de l'équation ci-dessous et de l'intégrer par parties:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} - \rho(\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) dv + \int_A [f_e \delta w] dA \right] dt = 0 \quad (IV.13)$$

Où $(\bullet\bullet)$ représente la dérivée seconde par rapport au temps et f_e est la densité de la force de réaction de la fondation. Pour le modèle de fondation Pasternak:

$$f_e = k_0 w - k_1 \nabla^2 w \quad (\text{IV.14})$$

Les contraintes et les moments résultants sont définis comme :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B^s \\ 0 & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}; \quad S = A^s \gamma \quad (\text{IV.15})$$

Dans lequel:

$$\begin{aligned} N &= \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \\ M^s &= \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \quad \varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0\}^t, \\ k^b &= \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \\ A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \\ B^s &= \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \\ H^s &= \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \\ \gamma &= \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^t, \quad S = \{S_{xz}^z, S_{yz}^s\}^t \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

Et les composants de rigidité et d'inertie sont donnés comme:

$$\{A_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, G_{ij}\} = \int_{-h/2-c}^{h/2-c} \{1, f(z_{ns}), z_{ns}^2, z_{ns}f(z_{ns}), [f(z_{ns})]^2\} Q_{ij} dz_{ns} \quad (IV.17)$$

Où :

$$(i, j = 1, 2, 6)$$

$$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 = \int_{-h/2-c}^{h/2-c} \rho(1, z_{ns}, z_{ns}^2, f(z_{ns}), z_{ns}f(z_{ns}), [f(z_{ns})]^2) dz_{ns} \quad (IV.18)$$

Pour les plaques FGM, les équations d'équilibre prennent les formes:

$$A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}D_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}w_s - B_{11}^s d_{111}w_s = I_0 \ddot{u} \quad (IV.19)$$

$$A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}w_s - B_{22}^s d_{222}w_s = I \ddot{v} \quad (IV.20)$$

$$-D_{11}d_{1111}w_b - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_b - D_{22}d_{2222}w_b - D_{11}^s d_{1111}w_s \quad (IV.21)$$

$$-2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_s - D_{22}^s d_{2222}w_s = I_0 (\ddot{w}_b + w_s) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b$$

$$B_{11}^s d_{111}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}v_0 + B_{22}^s d_{222}v_0 - D_{11}^s d_{1111}w_b - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_b - D_{22}^s d_{2222}w_b - H_{11}^s d_{1111}w_s - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)d_{1122}w_s \quad (IV.22)$$

$$-H_{22}^s d_{2222}w_s + A_{55}^s d_{11}w_s + A_{44}^s d_{22}w_s = I_0 (\ddot{w}_b + w_s) - \frac{I_2}{84} \nabla^2 \ddot{w}_b$$

Où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad (IV.23)$$

$$d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m},$$

Ou:

$$(i, j, l, m = 1, 2)$$

La représentation suivante pour les déplacements des théories de déformation de cisaillement est appropriée dans le cas du problème de vibration libre :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) e^{i\omega t} \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (IV.24)$$

Où $\lambda = m\pi / a$, $\mu = n\pi / b$ et U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} , W_{smn} étant des paramètres arbitraires et ω représente la fréquence propre associé à $(m, n)^{\text{ième}}$ mode propre.

Nous pouvons obtenir les équations ci-dessous pour toute valeur fixe de m et n , pour le problème de vibration libre:

$$([K] - \omega^2 [M])\{\Delta\} = \{0\} \quad (IV.25)$$

Où $[K]$ et $[M]$ sont les matrices de rigidité et de masse, respectivement, et représentées comme suit:

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (IV.26)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \quad (IV.27)$$

Dans lequel:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2 \\
 a_{12} &= \lambda \mu (A_{12} + A_{66}) \\
 a_{14} &= -\lambda [B_{11}^s \lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \mu^2] \\
 a_{22} &= A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2 \\
 a_{24} &= -\mu [(B_{12}^s + 2B_{66}^s) \lambda^2 + B_{22}^s \mu^2] \\
 a_{33} &= D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2 \mu^2 + D_{22}\mu^4 + k_0 + k_1(\lambda^2 + \mu^2) \\
 a_{34} &= D_{11}^s \lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2 \mu^2 + D_{22}^s \mu^4 + k_0 + k_1(\lambda^2 + \mu^2) \\
 a_{44} &= H_{11}^s \lambda^4 + 2(H_{11}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2 \mu^2 + H_{22}^s \mu^4 - A_{55}^s \lambda^2 - A_{44}^s \mu^2 + k_0 + k_1(\lambda^2 + \mu^2) \\
 m_{11} &= m_{22} = -I_0, m_{13} = \lambda I_1, m_{14} = \lambda J_1, m_{23} = \mu I_1 \\
 m_{24} &= \mu J_1, m_{33} = -(I_0 + I_2(\lambda^2 + \mu^2)), \\
 m_{34} &= -(I_0 + J_2(\lambda^2 + \mu^2)), m_{44} = -(I_0 + K_2(\lambda^2 + \mu^2)),
 \end{aligned} \tag{IV.28}$$

Ou:

$$\lambda = m\pi / a, \mu = n\pi / b \tag{IV.29}$$

Les fréquences naturelles de la plaque FGM peuvent être trouvées à partir de la solution de l'équation. (IV.25).

IV.5. Résultats :

Dans cette partie, nous présentons le comportement d'une plaque FGM simplement appuyée soumise à une charge mécanique sur sa face supérieure. Le développement analytique est basé sur le concept de surface neutre. Pour obtenir des résultats numériques, une plaque FGM composé d'aluminium (en métal) et d'alumine ou zircon (comme céramique) est considérée. La surface inférieure de la plaque FGM est riche en aluminium, tandis que la surface supérieure de la plaque est riche en alumine ou en zircon.

Les propriétés des matériaux pris en charge dans la présente analyse sont les suivantes:

Céramique:

$$(P_C: \text{Alumine, Al}_2\text{O}_3): E_c = 380\text{GPa}, \rho_c = 3800\text{kg/m}^3$$

$$(P_C: \text{Zircone (ZrO}_2\text{)}): E_c = 200\text{GPa}, \rho_c = 5700\text{kg/m}^3$$

Métal:

$$(P_M: \text{Aluminium, Al}): E_m = 70\text{GPa}, \rho_m = 2700\text{kg/m}^3$$

Le coefficient de Poisson est pris égal à 0,3 à la fois de l'alumine et de l'aluminium. Et leurs propriétés changent à travers l'épaisseur de la plaque selon la loi de puissance.

pour fins de comparaison, les résultats obtenus sont comparés pour l'analyse à la flexion avec Kobayashi *et al* [Kobayashi. 1989], lam *et al* [Lam. 2000] basé sur la fonction de Green, Benyoucef *et al* [Benyoucef. 2010] basé sur une nouvelle théorie hyperbolique de déformation de cisaillement et pour l'analyse à la vibration libre avec Hosseini-Hashemi *et al.* [Hosseini-Hashemi. 2010] basé sur la base d'une forme exacte de la solution de Levy, Zhou *et al.* [Zhou. 2002] basé sur une méthode de Ritz de trois dimensions, Matsunaga [Matsunaga. 2008] basé sur des théories de déformation de cisaillement d'ordres élevées, la solution exacte de trois dimensions de Leissa [Leissa. 1973], Liu *et al.* [Liu. 1999] basé sur une méthode d'éléments en quadrature différentielle et d'autres disponibles dans la littérature.

Dans tous les exemples, aucun facteur de correction transversale de cisaillement n'est utilisé car une représentation correcte de la contrainte transversale de cisaillement est donnée. Pour plus de commodité, les résultats suivants sont présentés sous forme numérique et graphique.

Le tableau IV.1 présente une comparaison de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée ($a/b=1$) et homogène reposée sur une fondation de type Winkler. La plaque est simplement appuyée et soumise à un chargement uniformément réparti. Différentes valeurs du paramètre de Winkler ont été prises en considération ($K_0 = 1, 3^4$ et 5^4). Les résultats de la présente théorie sont proches de ceux obtenus par Kobayashi *et al* [Kobayashi. 1989], Lam *et al* [Lam. 2000] et Benyoucef *et al* [Benyoucef. 2010]. Il est clair que la flèche diminue lorsque le paramètre de Winkler augmente.

Une étude comparative de la flèche au centre d'une plaque carrée, mince ($a/h=100$) et homogène reposée sur une fondation de type Winkler-Pasternak est présente dans le tableau

IV.2. La plaque est simplement appuyée et soumise à un chargement uniformément réparti. Bon accord est observé. On peut constater que le paramètre de Winkler a plus d'effet sur la flèche au centre d'une plaque carrée et mince que le paramètre de Pasternak.

Tableau IV.1. Etude comparative de la flèche d'une plaque carrée et homogène reposée sur une fondation de type Winkler

K_0	Dw (0.5a,0.5a)/qa ⁴ .10 ³			
	Kobayashi (1989)	Lam (2000)	Benyoucef (2010)	Présente
1	4.052	4.053	4.053	4.0538
3 ⁴	3.347	3.349	3.348	3.3485
5 ⁴	1.506	1.507	1.506	1.5060

Tableau IV.2. Etude comparative de la flèche au centre d'une plaque carrée mince et homogène reposée sur une fondation de type Winkler-Pasternak

K_0	K_1	Dw (0.5a,0.5a)/qa ⁴ .10 ³		
		Lam (2000)	Benyoucef (2010)	Présente
1	1	3.853	3.8550	3.855024
	3 ⁴	0.763	0.7630	0.762973
	5 ⁴	0.115	0.1153	0.115304
3 ⁴	1	3.210	3.2108	3.210791
	3 ⁴	0.732	0.7317	0.731729
	5 ⁴	0.115	0.1145	0.114524
5 ⁴	1	1.476	1.4765	1.476523
	3 ⁴	0.570	0.5704	0.570364
	5 ⁴	0.109	0.1095	0.109471

La figure IV.2 présente la flèche adimensionnelle au centre d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation de type Winkler-Pasternak en fonction du rapport d'épaisseur (a/h). Les paramètres de fondation sont pris égaux ($K_0=100$, $K_1=10$). La plaque est considérée purement céramique ($k=0$), purement métallique ($k=\infty$) et en FGM ($k=1, 2, 5$ et

10). Il est clair que la flèche adimensionnelle devienne plus faible lorsque le rapport d'épaisseur (a/h) augmente et quand la plaque FGM devienne plus riche en céramique.

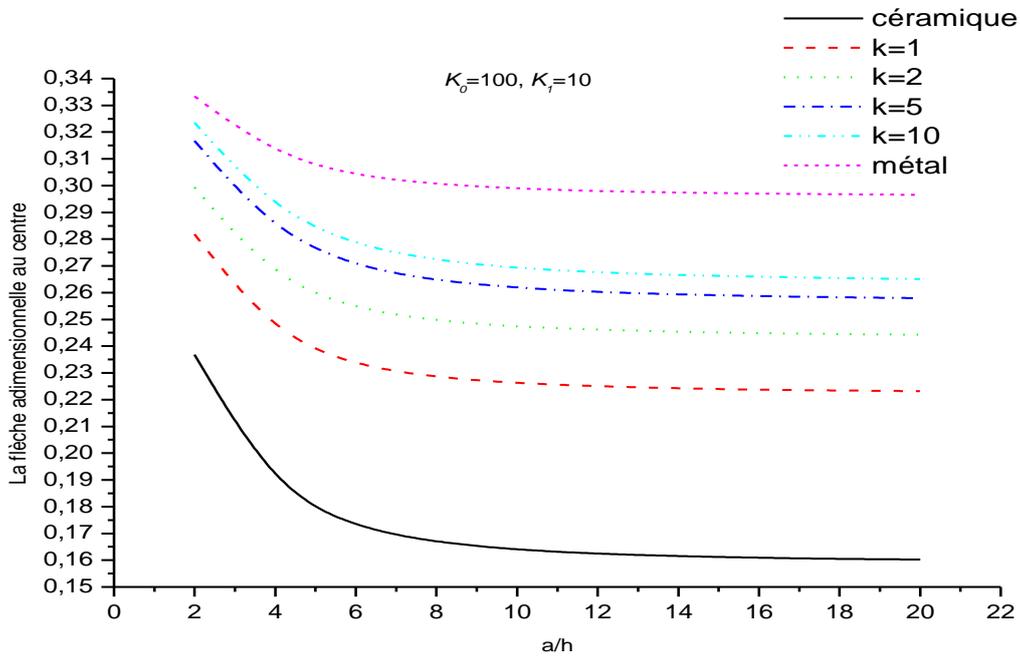


Figure IV.2. Variation de la flèche adimensionnelle au centre en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation élastique

La variation de la flèche adimensionnelle au centre en fonction du l'anisotropie du matériau (E_m/E_c) d'une plaque FGM carrée en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation de type Winkler et de type Pasternak est présenté dans les figures IV.3 et IV.4, respectivement. On peut constater que la flèche adimensionnelle au centre diminue avec l'augmentation du rapport (E_m/E_c). La flèche adimensionnelle au centre devienne plus faible lorsque la plaque est reposée sur une fondation de type Winkler ou de type Pasternak.

Les figures IV.5 et IV.6 montrent l'effet du paramètre de Winkler et le paramètre de Pasternak sur la contrainte longitudinale dans le plan à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃, respectivement. Le rapport d'épaisseur est pris égal à ($a/h=10$) tandis que l'indice de puissance est considérée égal à ($k=2$). Il à noter que la position de l'axe neutre correspond à une contrainte longitudinale dans le plan nulle donc $Z \approx 0,18$. La contrainte longitudinale dans le plan est en compression à travers l'épaisseur jusqu'à $Z \approx 0,18$ (surface inférieure), puis il devienne en traction (surface supérieure). On peut observer que les paramètres de fondation réduisent La contrainte longitudinale dans le plan à travers l'épaisseur de la plaque FGM.

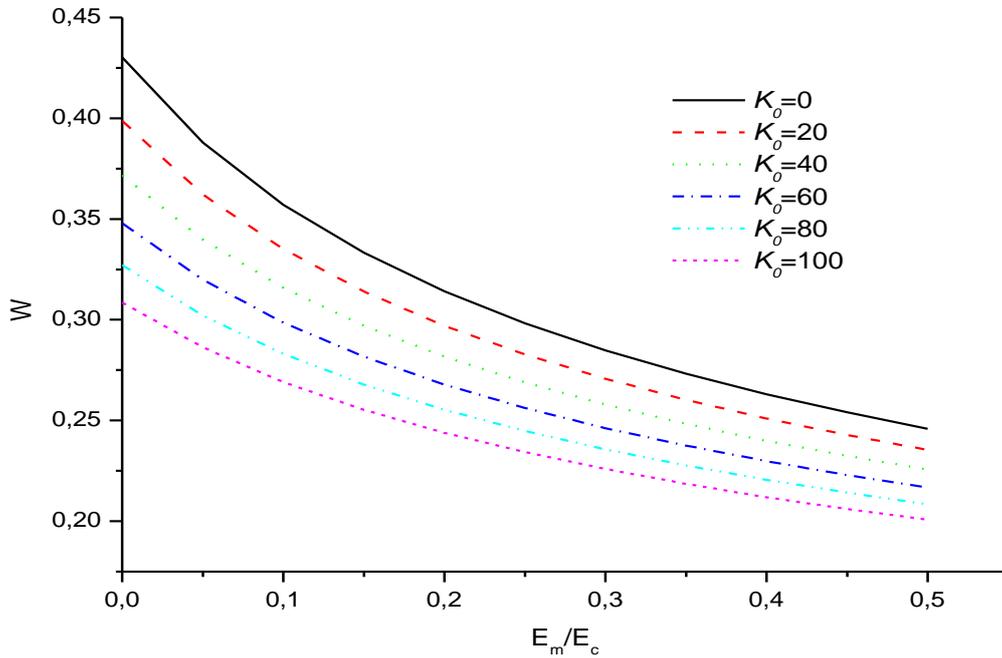


Figure IV.3. Variation de la flèche adimensionnelle en fonction de l'anisotropie du matériau d'une plaque FGM carrée en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation de type Winkler

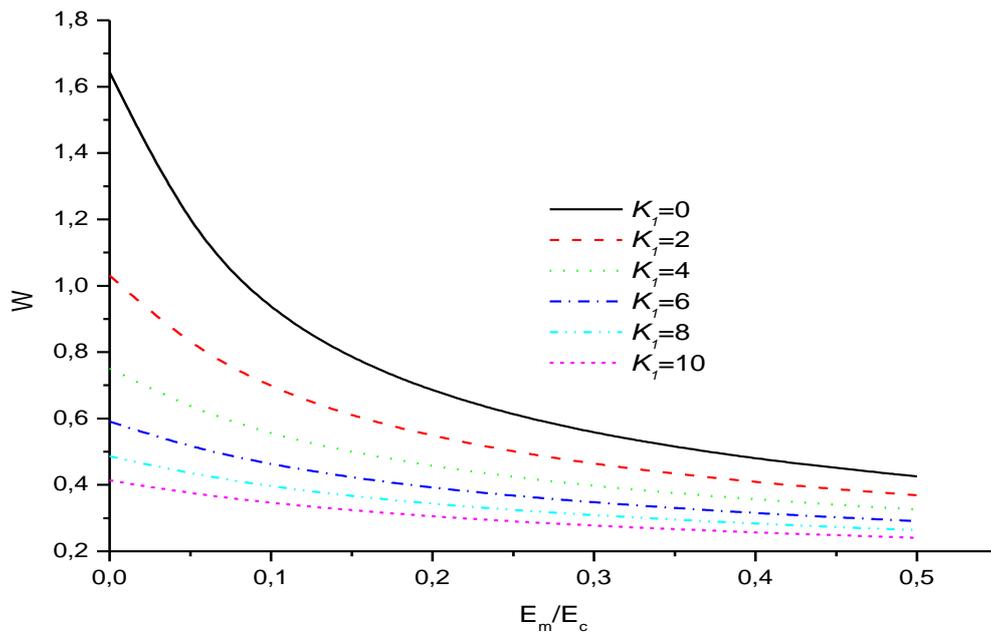


Figure IV.4. Variation de la flèche adimensionnelle en fonction de l'anisotropie du matériau d'une plaque FGM carrée en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation de type Pasternak

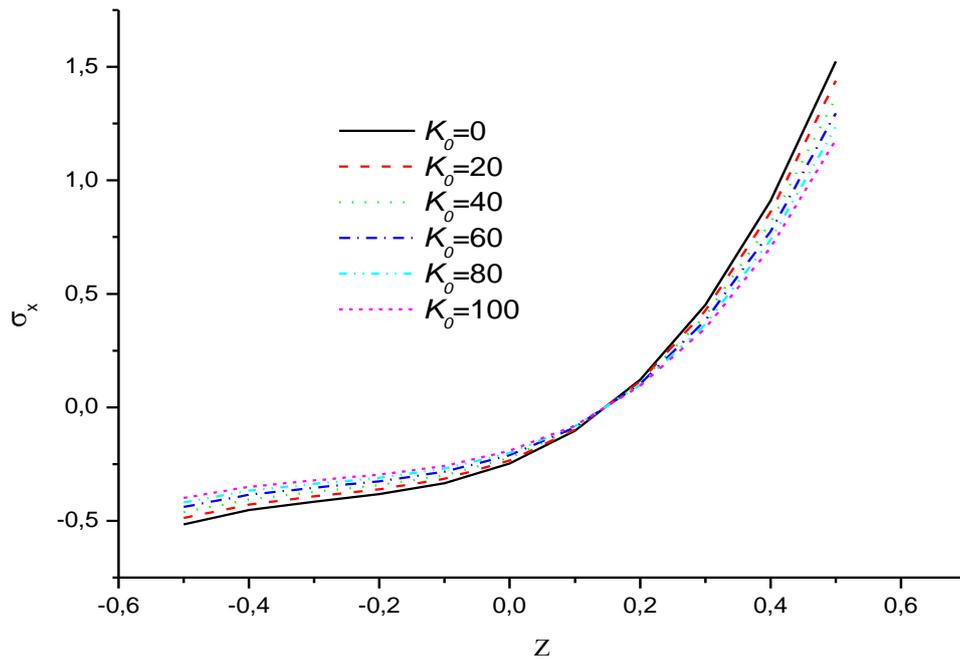


Figure IV.5. Variation de la contrainte longitudinale dans le plan à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation de type Winkler

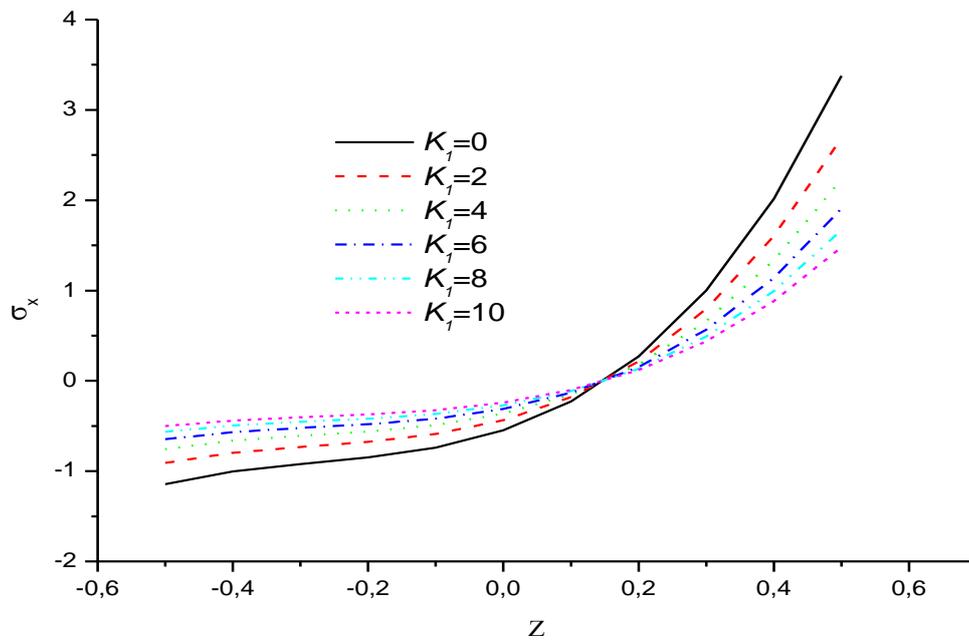


Figure IV.6. Variation de la contrainte longitudinale dans le plan à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation de type Pasternak

L'effet du paramètre de Winkler et le paramètre de Pasternak sur la variation de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ est présenté sur les figures IV.7 et IV.8, respectivement. La plaque FGM ($k=2$) est considérée modérément épaisse ($a/h=10$). La valeur maximale de la contrainte de cisaillement transversale correspond à la position de l'axe neutre de la plaque FGM ($Z \approx 0.18$). La contrainte de cisaillement transversale prend une valeur nulle à la surface supérieure et inférieure de la plaque FGM. Il est clair que les paramètres de fondation élastique réduisent la contrainte de cisaillement transversale.

Les figures IV.9 et IV.10 présentent la variation de la contrainte tangentielle longitudinale à travers l'épaisseur d'une plaque FGM ($k=2$) en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation de type Winkler ou de type Pasternak, respectivement. Le rapport de géométrie est pris égal à ($a/h=10$). Il est à noter que la contrainte tangentielle longitudinale est maximale à la surface supérieure et inférieure de plaque FGM et nulle au niveau de l'axe neutre de la plaque. On peut aussi constater que la contrainte tangentielle longitudinale devienne plus faible lorsque la plaque FGM est reposée sur une fondation de type Winkler ou de type Pasternak.

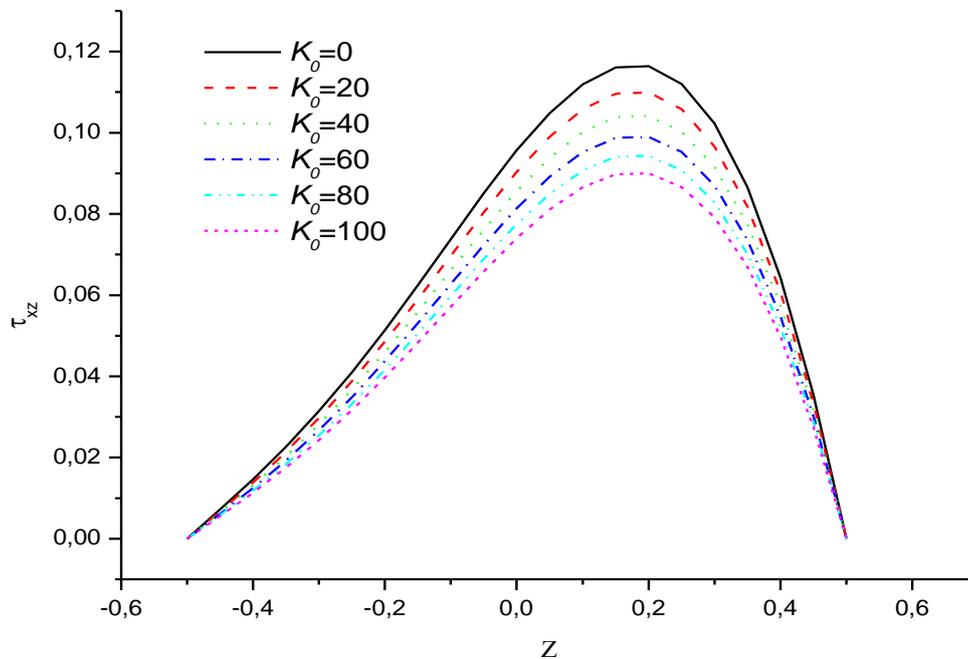


Figure IV.7. Variation de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation de type Winkler

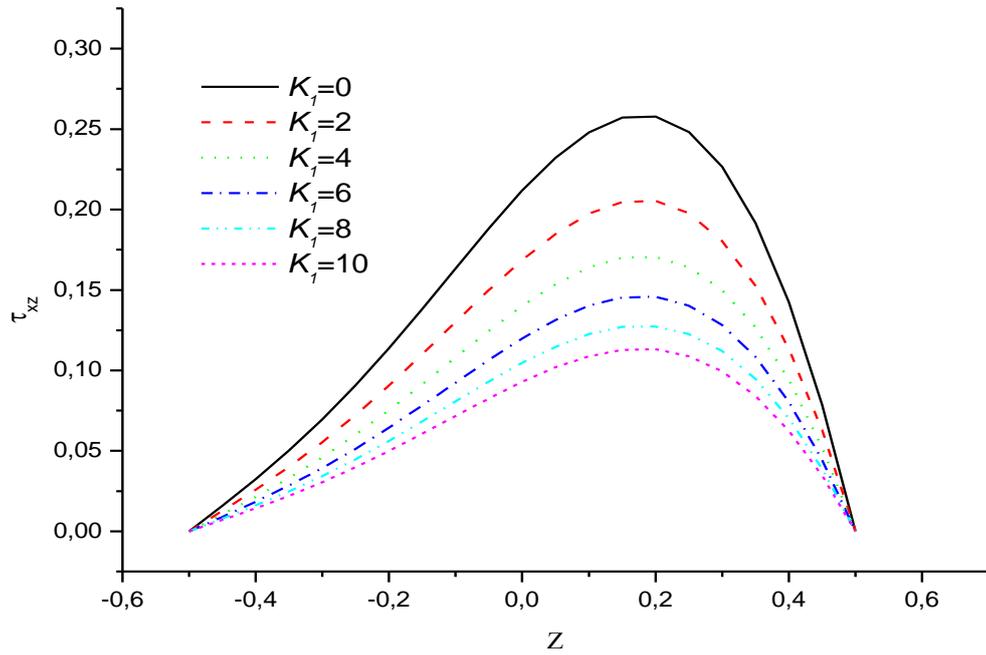


Figure IV.8. Variation de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation de type Pasternak

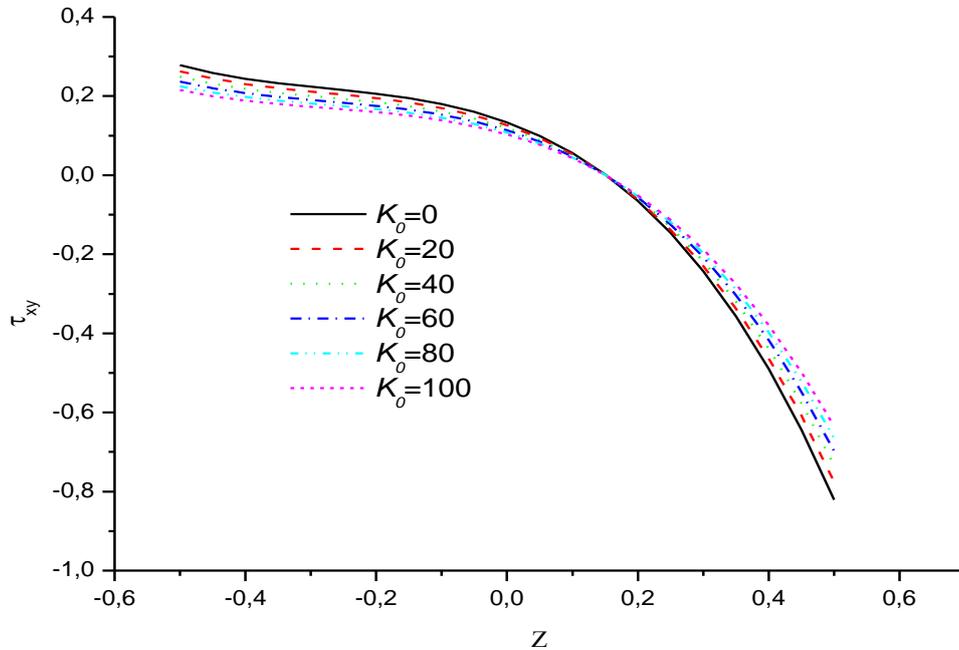


Figure IV.9. Variation de la contrainte tangentielle longitudinale à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation de type Winkler

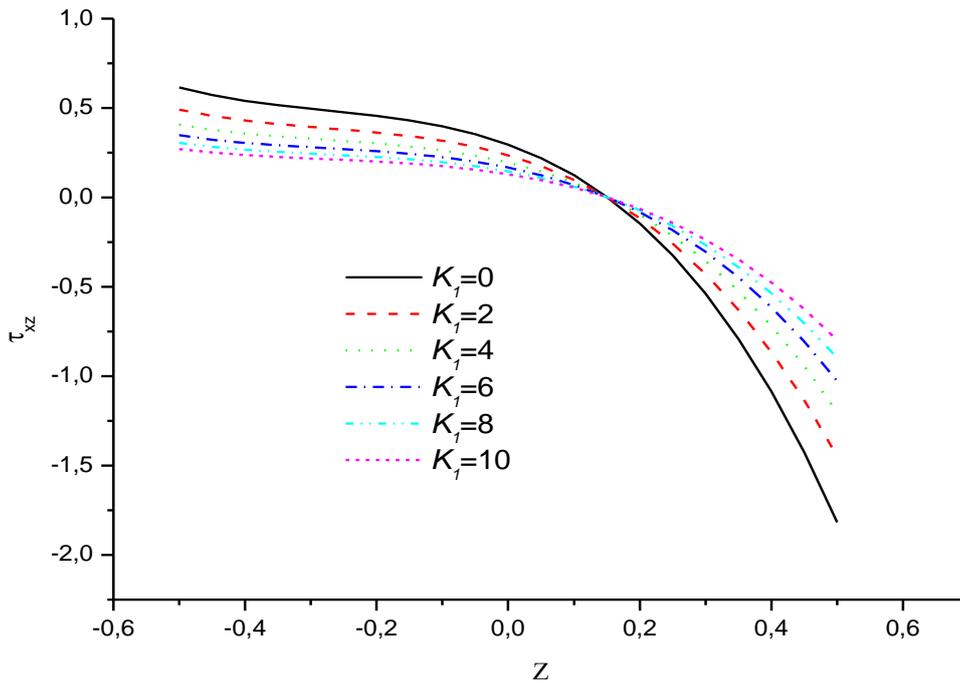


Figure IV.10. Variation de la contrainte tangentielle longitudinale à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation de type Pasternak

Pour illustrer l'exactitude de la présente théorie raffinée de déformation de cisaillement de forme sinusoïdale, des plaques carrées ($a/b=1$) avec deux types de combinaison des matériaux (Un FGM en Al / Al₂O₃ et un FGM en Al / ZrO₂) simplement appuyée ont été analysées pour une large gamme de l'indice de loi de puissance k et le rapport d'épaisseur h / a , les variations de la fréquence naturelle non-dimensionnelle et la fréquence fondamentale sont illustrés dans les exemples suivants.

Le tableau IV.3 montre une comparaison du paramètre de la fréquence fondamentale ($\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$) pour une plaque carrée ($a/b=1$) en Al / Al₂O₃ avec trois valeurs du rapport d'épaisseur ($h / a = 0,05, 0,1$ et $0,2$). L'indice de puissance est considéré égal à ($k=0, 1, 4$ et 10). On peut voir que la théorie analytique proposée basée sur le concept de la surface neutre et les autres théories de Hosseini-Hashemi *et al* [Hosseini-Hashemi. 2010], Matsunaga *et al* [Matsunaga. 2008] et Zhao *et al* [Zhao. 2009] donnent des résultats presque identiques pour toutes les valeurs de l'indice de loi puissance k . On peut également indiquer que le paramètre de la fréquence fondamentale devienne plus faible dans des plaques minces et lorsque l'indice de loi puissance augmente.

Tableau IV.3. Etude comparative du paramètre de la fréquence fondamentale $\bar{w} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃, (a/b = 1).

Rapport d'épaisseur h/a	Méthode	L'indice de puissance k			
		0	1	4	10
0.05	Hosseini-Hashemi (2010)	0.01480	0.01150	0.01013	0.00963
	Matsunaga (2008)	-	-	-	-
	Zhao (2009)	0.01464	0.01118	0.00970	0.00931
	Présente	0.01479	0.00997	0.00883	0.00810
0.1	Hosseini-Hashemi (2010)	0.05769	0.04454	0.03825	0.03627
	Matsunaga (2008)	0.05777	0.04427	0.03811	0.03642
	Zhao (2009)	0.05673	0.04346	0.03757	0.03591
	Présente	0.05769	0.03913	0.03443	0.03150
0.2	Hosseini-Hashemi (2010)	0.2112	0.1650	0.1371	0.1304
	Matsunaga (2008)	0.2121	0.1640	0.1383	0.1306
	Zhao (2009)	0.2055	0.1587	0.1356	0.1284
	Présente	0.2112	0.1460	0.1255	0.1142

La capacité de la présente solution est également testée pour le paramètre de la fréquence fondamentale $\bar{w} = \omega \alpha^2 \sqrt{\rho_c / E_c} / h$ avec deux types de combinaison de matériau, des plaques en Al / Al₂O₃ et en Al / ZrO₂ pour une vaste gamme d'indice de loi de puissance ($k = 0, 1, 2, 5, 8$ et 10) dans le tableau IV.4. Le rapport d'épaisseur est pris égal à ($h/a = 0.1$). Une corrélation étroite est obtenue. Il à noter que le paramètre de la fréquence fondamentale d'une plaque en Al / ZrO₂ est plus important qu'une plaque en Al/Al₂O₃.

Le tableau IV.5 examine l'effet du rapport d'épaisseur h / a sur les huit premières fréquences naturelles non-dimensionnelles $\bar{w} = \omega \alpha^2 \sqrt{\rho h / D}$ pour plaque FGM carrée et isotrope simplement appuyée. Comme on le voit à partir du ce tableau, non seulement pour des plaques minces, mais aussi pour les plaques modérément épaisses, les fréquences naturelles sont prédits avec précision par la présente méthode. On peut constater que les huit premières fréquences naturelles non-dimensionnelles diminuent lorsque le rapport d'épaisseur h/a augmente.

Tableau IV.4. Etude comparative du paramètre de la fréquence fondamentale $\bar{w} = \omega \alpha^2 \sqrt{\rho_c / E_c} / h$ d'une plaque FGM carrée, $h/a = 0.1$.

FGM	Méthode	L'indice de puissance k					
		0	1	2	5	8	10
Al/Al ₂ O ₃	Hosseini-Hashemi (2010)	5.7693	4.4545	4.0063	3.7837	3.6830	3.6277
	Zhao (2009)	5.6763	4.3474	3.9474	3.7218	3.6410	3.5923
	Présente	5.7696	3.9138	3.7034	3.3635	3.2093	3.1500
Al/ZrO ₂	Hosseini-Hashemi (2010)	5.7693	5.2532	5.3084	5.2940	5.2312	5.1893
	Zhao (2009)	5.6763	4.8713	4.6977	4.5549	4.4741	4.4323
	Présente	5.7696	5.0800	5.1148	5.1381	5.1156	5.1000

Tableau IV.5. Etude comparative de la fréquence naturelle non-dimensionnelle $\bar{w} = \omega \alpha^2 \sqrt{\rho h / D}$ d'une plaque carrée et isotrope simplement appuyée

Rapport d'épaisseur h/a	Méthode	Mode							
		1,1	1,2	2,1	2,2	3,1	1,3	3,2	2,3
0.001	Leissa (1973)	19.7392	49.348	49.348	78.9568	98.696	98.696	128.3021	128.3021
	Zhou (2002)	19.7115	49.347	49.347	78.9528	98.6911	98.6911	128.3048	128.3048
	Akavci (2014)	19.7391	49.3476	49.3476	78.9557	98.6943	98.6943	128.3020	128.3020
	Présente	19.7391	49.3475	49.3475	78.9556	98.6942	98.6942	128.3018	128.3018
0.01	Liu (1999)	19.7319	49.3027	49.3027	78.8410	98.5150	98.5150	127.9993	127.9993
	Nagino (2008)	19.732	49.305	49.305	78.846	98.525	98.525	128.01	128.01
	Akavci (2014)	19.7322	49.3045	49.3045	78.8456	98.5223	98.5223	128.012	128.012
	Présente	19.7320	49.3032	49.3032	78.8422	98.5171	98.5171	128.0027	128.0027
0.1	Liu (1999)	19.0584	45.4478	45.4478	69.7167	84.9264	84.9264	106.5154	106.5154
	Hosseini-Hashemi (2011b)	19.0653	45.4869	45.4869	69.8093	85.0646	85.0646	106.7350	106.7350
	Akavci (2014)	19.0850	45.5957	45.5957	70.0595	85.4315	85.4315	107.3040	107.3040
	Présente	19.0660	45.4917	45.4917	69.8212	85.0829	85.0829	106.7652	106.7652
0.2	Shufrin (2005)	17.4524	38.1884	38.1884	55.2539	65.3130	65.3130	78.9864	78.9864
	Hosseini-Hashemi (2011b)	17.4523	38.1883	38.1883	55.2543	65.3135	65.3135	78.9865	78.9865
	Akavci (2014)	17.5149	38.4722	38.4722	55.8358	66.1207	66.1207	80.1637	80.1637
	Présente	17.4553	38.2052	38.2052	55.2943	65.3731	65.3731	79.0812	79.0812

Les tableaux IV.6 et IV.7 montrent des comparaisons de la fréquence naturelle non-dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ des plaques FGM rectangulaires reposées sur une fondation élastique avec celles rapportées par Akhavan *et al.* [Akhavan. 2009], Ait Atmane *et al.* [Ait Atmane. 2011], Matsunaga [Matsunaga. 2008] et Thai *et al.* [Thai. 2012] avec des valeurs différentes du rapport d'épaisseur et les paramètres de rigidité de la fondation. On peut constater que les résultats obtenus sont en excellent accord avec les autres. Il est clair que la fréquence naturelle non-dimensionnelle est plus importante lorsque la plaque est reposée sur une fondation élastique.

Tableau IV.6. Etude comparative de la fréquence naturelle non-dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ d'une plaque isotrope.

Rapport d'épaisseur h/a	K_0	K_1	Méthode		
			Akhavan (2009)	Ait Atmane (2010)	Présente
0.001	0	0	19.7391	19.7392	19.7320
	10^2	10	26.2112	26.2112	26.2048
	10^3	10^2	57.9961	57.9962	57.9894
0.1	0	0	19.0840	19.0658	19.0660
	10^2	10	25.6368	25.6236	25.5989
	10^3	10^2	57.3969	57.3923	57.2775
0.2	0	0	17.5055	17.4531	17.4553
	10^2	10	24.3074	24.2728	24.1068
	10^3	10^2	56.0359	56.0311	56.0260

Les paramètres de la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega b^2 \sqrt{Sh / A} / \pi^2$ d'une plaque FGM carrée ($a / b = 1$) simplement appuyée avec un rapport d'épaisseur égal à ($h / a = 0.01, 0.1$ et 0.2) sont énumérés dans le tableau IV.8. Les présents résultats sont calculés et comparés avec ceux qui sont publiés pour différentes valeurs de paramètres de rigidité de la fondation élastique (K_0 et K_1). Les résultats sont en bon accord. On peut également constater que le paramètre de la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega b^2 \sqrt{Sh / A} / \pi^2$ d'une plaque reposée sur une fondation de type Winkler-Pasternak est plus grand qu'une plaque reposée sur une fondation de type Winkler.

Tableau IV.7. Etude comparative de la fréquence naturelle non-dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ d'une plaque carrée et isotrope reposée sur une fondation élastique, (h/b = 0.2).

K_0	K_I	$\hat{\omega}_{11}$			$\hat{\omega}_{12}$			$\hat{\omega}_{13}$		
		Matsunaga (2000)	Akavci (2014)	Présente	Matsunaga (2000)	Akavci (2014)	Présente	Matsunaga (2000)	Akavci (2014)	Présente
0		17.5260	17.5149	17.45533	38.4827	38.4722	38.2052	65.9961	66.1207	65.3731
10		17.7847	17.7859	17.7196	38.5929	38.5929	38.3203	66.0569	66.1899	65.4378
10^2	0	19.9528	20.0603	19.9413	39.5669	39.6620	39.3417	66.5995	66.8087	66.0178
10^3		34.3395	35.5261	35.1278	47.8667	47.0757	48.3829	71.5577	72.6997	71.5586
10^4		45.5260	45.5260	45.5260	71.9829	71.9829	71.98299	97.4964	101.7990	101.79922
10^5		45.5260	45.5260	45.5260	71.9829	71.9830	71.9829	101.7992	101.7990	101.7992
0			22.0429	22.2607	22.0950	43.4816	44.0294	43.5262	71.4914	72.6178
10		22.2453	22.4745	22.3043	43.5747	44.1347	43.6274	71.5423	72.6806	71.5406
10^2	10	23.9830	24.3133	24.1068	44.3994	45.0711	44.5271	71.9964	73.2430	72.0713
10^3		36.6276	38.0839	37.6468	51.6029	53.5296	52.6856	76.1848	78.6389	77.1762
10^4		45.5260	45.5260	45.5260	71.9829	71.9829	71.9829	99.0187	101.7990	101.7992
10^5		45.5260	45.5260	45.5260	71.9829	71.9829	71.9829	101.7992	101.7990	101.7992

Le tableau IV.9 présente les résultats de la fréquence naturelle non-dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ pour une plaque isotrope et homogène. Le rapport d'épaisseur est pris égal à (h/a=0.05). Ces résultats, comme dans les tableaux précédents, sont comparés avec les solutions exactes de Levy-plaques de Lam *et al.* [Lam. 2000] et avec la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre de la plaque de Hasani Baferani *et al.* [Hasani Baferani. 2011]. Une corrélation étroite est obtenue pour différentes valeurs des paramètres de fondations (K_0 et K_I). On peut également constater que la fréquence naturelle non-dimensionnelle d'une plaque reposée sur une fondation de type Pasternak est plus importante qu'une plaque reposée sur une fondation de type Winkler donc l'effet du paramètre du cisaillement est plus important que le paramètre de Winkler sur le comportement dynamique des plaques FGM.

Tableau IV.8. Etude comparative du paramètre de la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega b^2 \sqrt{Sh/A} / \pi^2$ * d'une plaque carrée et homogène (a/b = 1).

Rapport d'épaisseur h/a	Méthode	Fréquence fondamentale naturelle			
0.01	Paramètre de rigidité de la fondation (K_0, K_I)	(100,0)	(500,0)	(100,10)	(500,10)
	Hosseini-Hashemi (2010)	2.2413	3.0215	2.6551	3.3400
	Xiang (1994)	2.2413	3.0215	2.6551	3.3400
	Zhou (2004)	2.2413	3.0214	2.6551	3.3398
	Présente	2.2413	3.0214	2.6551	3.3399
0.1	Paramètre de rigidité de la fondation (K_0, K_I)	(200,0)	(1000,0)	(200,10)	(1000,10)
	Hosseini-Hashemi (2010)	2.3989	3.7212	2.7842	3.9805
	Xiang (1994)	2.3989	3.7212	2.7842	3.9805
	Zhou (2004)	2.3951	3.7008	2.7756	3.9566
	Présente	2.3971	3.7153	2.7811	3.9738
0.2	Paramètre de rigidité de la fondation (K_0, K_I)	(0,10)	(10,10)	(100,10)	(1000,10)
	Hosseini-Hashemi (2010)	2.2505	2.2722	2.4590	3.8567
	Xiang (1994)	2.2505	2.2722	2.4591	3.8567
	Zhou (2004)	2.2334	2.2539	2.4300	3.7111
	Présente	2.2386	2.2599	2.4425	3.8144

$$* S = (k(8+3k+k^2)\rho_m + 3(2+k+k^2)\rho_c) / (1+k)(2+k)(3+k);$$

$$A = 1/12(h^3/(1-\nu^2))(k(8+3k+k^2)E_m + 3(2+k+k^2)E_c) / (1+k)(2+k)(3+k)$$

La fréquence fondamentale naturelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_{11}/E_{11}}$ d'une plaque FGM en Al / Al₂O₃ sans une fondation élastique est présentée dans le tableau IV.10 correspondant à différents indice de la loi de puissance (k=0, 1, 5 et ∞) et rapport de géométrie (a / b = 0.5, 1, 2). Le rapport d'épaisseur est considéré égal à (h/a = 0.15). Les résultats obtenus sont également correspondent très bien avec les résultats de Fallah *et al.* [Fallah. 2013] et Hosseini-Hashemi *et al.* [Hosseini-Hashemi. 2011b]. Il est à noter que la fréquence

fondamentale naturelle diminue lorsque la plaque devienne plus riche en métal et accroit lorsque le rapport de géométrie augmente.

Tableau IV.9. Comparaison de la fréquence naturelle non-dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ d'une plaque isotrope et homogène, $h/a=0.05$

K_0	K_l	Méthode	$\bar{\omega}$
0	0	Lam (2000)	19.74
		Hasani Baferani (2011)	19.7374
		Présente	19.5626
0	100	Lam (2000)	48.62
		Hasani Baferani (2011)	48.6149
		Présente	48.4520
0	1000	Lam (2000)	141.92
		Hasani Baferani (2011)	141.8730
		Présente	141.5214
100	0	Lam (2000)	22.13
		Hasani Baferani (2011)	22.1261
		Présente	21.9600
100	100	Lam (2000)	49.63
		Hasani Baferani (2011)	49.6327
		Présente	49.4685
100	1000	Lam (2000)	142.20
		Hasani Baferani (2011)	142.2250
		Présente	141.8725
1000	0	Lam (2000)	37.28
		Hasani Baferani (2011)	37.2763
		Présente	37.1232
1000	100	Lam (2000)	58.00
		Hasani Baferani (2011)	57.9945
		Présente	57.8187
1000	1000	Lam (2000)	145.43
		Hasani Baferani (2011)	145.3545
		Présente	144.9943

Tableau IV.10. Fréquence fondamentale naturelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_{11} / E_{11}}$ d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ ($K_0=K_I=0$, $h/a = 0.15$)

a/b	k	Fallah (2013)	Hosseini-Hashemi (2011b)	Présente
0.5	0	0.08006	0.08006	0.0800
	1	0.06335	0.06359	0.0544
	5	0.05379	0.05379	0.0465
	∞	0.04100	0.04076	0.0407
1	0	0.12480	0.12480	0.1248
	1	0.09644	0.09644	0.0853
	5	0.08027	0.08027	0.0724
	∞	0.06353	0.06352	0.0635
2	0	0.28514	0.28513	0.2853
	1	0.20592	0.20592	0.1986
	5	0.16315	0.16315	0.1642
	∞	0.14513	0.14591	0.1450

Tableau IV.11. Les trois premières fréquences naturelles non-dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_{22} / E_{22}}$ d'une plaque FGM rectangulaire en Al/ZrO₂, ($b/a = 0.5$).

(K_0, K_I)	h/a	k	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$
(0, 0)	0.1	0	0.1603 _(1,1)	0.2461 _(2,1)	0.3763 _(3,1)
		1	0.1419 _(1,1)	0.2187 _(2,1)	0.3364 _(3,1)
		2	0.1423 _(1,1)	0.2187 _(2,1)	0.3350 _(3,1)
	0.15	0	0.3323 _(1,1)	0.4942 _(2,1)	0.8917 _(1,2)
		1	0.2965 _(1,1)	0.4437 _(2,1)	0.8077 _(1,2)
		2	0.2957 _(1,1)	0.4403 _(2,1)	0.7928 _(1,2)
(100,100)	0.1	0	0.2161 _(1,1)	0.5379 _(1,2)	0.3055 _(2,1)
		1	0.2206 _(1,1)	0.5191 _(1,2)	0.3039 _(2,1)
		2	0.2292 _(1,1)	0.5280 _(1,2)	0.3134 _(2,1)
	0.15	0	0.4610 _(1,1)	1.0568 _(1,2)	1.7500 _(1,3)
		1	0.4759 _(1,1)	0.6411 _(2,1)	1.1533 _(2,2)
		2	0.4940 _(1,1)	1.0542 _(1,2)	1.6679 _(1,3)

L'influence des paramètres de fondation (K_0 et K_I), le rapport d'épaisseur et l'indice de la loi de puissance sur les trois premières fréquences naturelles non-dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_{22} / E_{22}}$ sur une plaque FGM en Al / ZrO₂ rectangulaire simplement appuyée est indiqué dans le tableau IV.11. Le rapport de géométrie est pris égal à ($b / a = 0,5$). On peut constater que les trois premières fréquences naturelles non-dimensionnelles sont importantes lorsque la plaque est considérée en céramique ($k=0$) et deviennent plus faible lorsque l'indice de puissance augmente.

Les figures IV.11 et IV.12 contiennent les variations de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{w} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$ des plaques FGM carrées en Al / Al₂O₃ et en Al / ZrO₂, respectivement, en fonction de l'indice de loi de puissance ($k = 0$ à 10). La plaque est considérée sans fondation élastique ($K_0 = K_I = 0$). La variation de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle est présentée pour les plaques minces et épaisses. Il est clair que l'augmentation de l'indice de puissance k (la plaque devienne plus riche en métal) provoque une diminution de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle. Cette dernière augmente quand le rapport d'épaisseur a/h augmente (plaque mince).

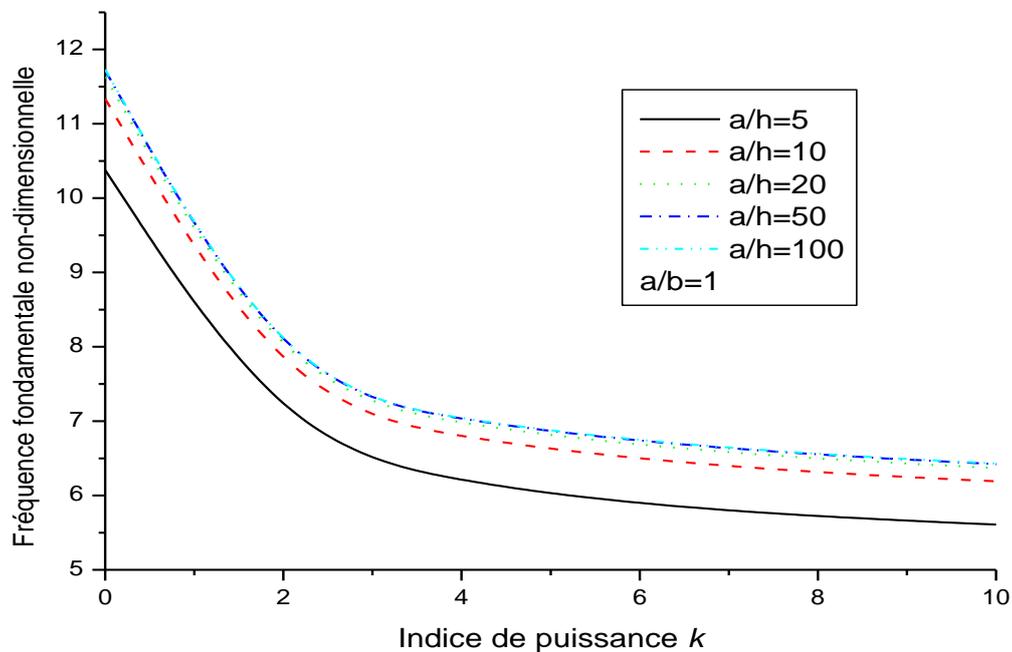


Figure IV.11. Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{w} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$ en fonction de l'indice de puissance pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃.

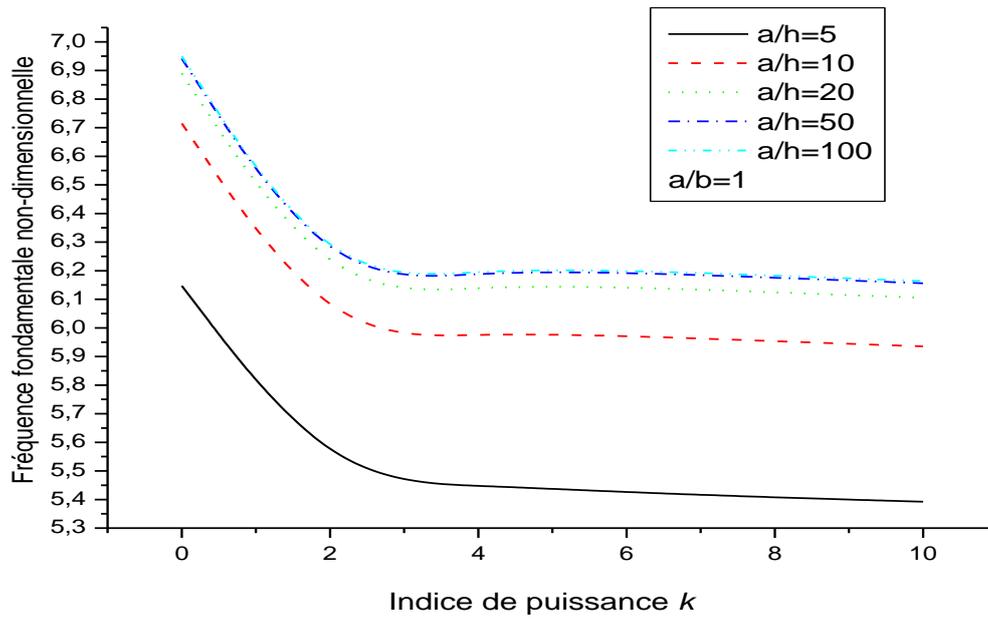


Figure IV.12. Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{w} = \omega \alpha^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$ en fonction de l'indice de puissance pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur d'une plaque FGM en Al / ZrO₂.

Les figures IV.13 et IV.14 présentent la variation de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{w} = \omega \alpha^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$ des plaques FGM en Al / Al₂O₃ et en Al / ZrO₂, respectivement, en fonction de l'indice de loi de puissance ($k = 0$ à 10). Les paramètres de fondation sont pris égaux à ($K_0 = K_1 = 0$). Le rapport d'épaisseur est considéré égal à ($a/h=10$). On peut conclure que la fréquence fondamentale non-dimensionnelle accroît quand le rapport de géométrie a/b augmente. Il est clair que la fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque FGM en Al / Al₂O₃ est plus importante qu'une plaque FGM en Al / ZrO₂.

Les variations de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{w} = \omega \alpha^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque FGM carrée ($a/b=1$) en Al / Al₂O₃ et en Al / ZrO₂ reposée sur une fondation de type Winkler sont présentées dans les figures IV.15 et IV.16, respectivement. Le rapport de d'épaisseur est pris égal à ($a/h=10$). On peut observer que la fréquence fondamentale non-dimensionnelle accroît avec l'augmentation du paramètre de Winkler (K_0). La fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque FGM en Al / Al₂O₃ est plus élevée qu'une plaque FGM en Al / ZrO₂ reposée sur une fondation de type Winkler.

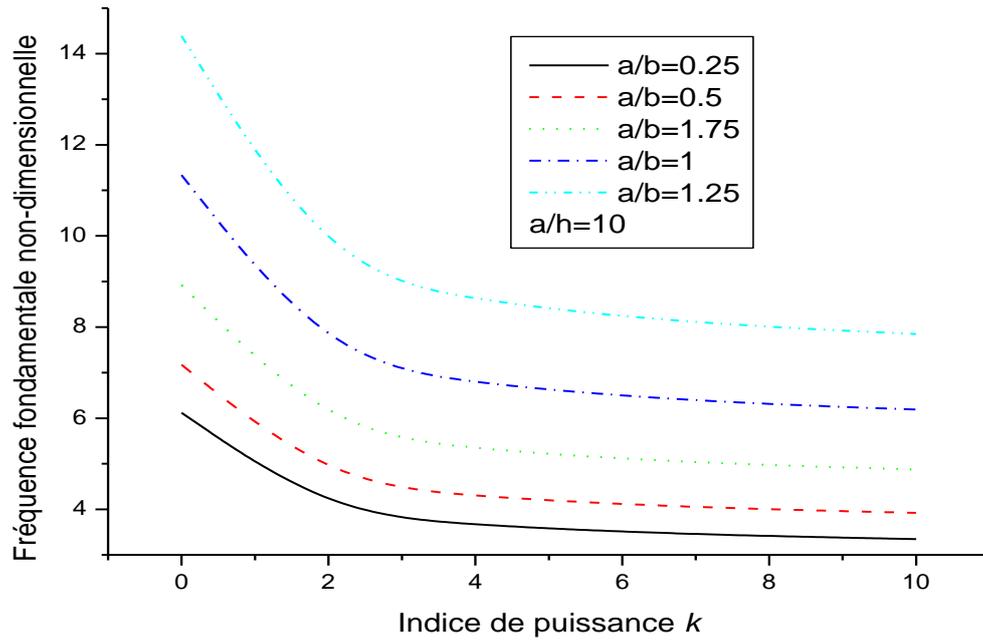


Figure IV.13. Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$ en fonction de l'indice de puissance pour différentes valeurs du rapport de géométrie (a/b) d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃.

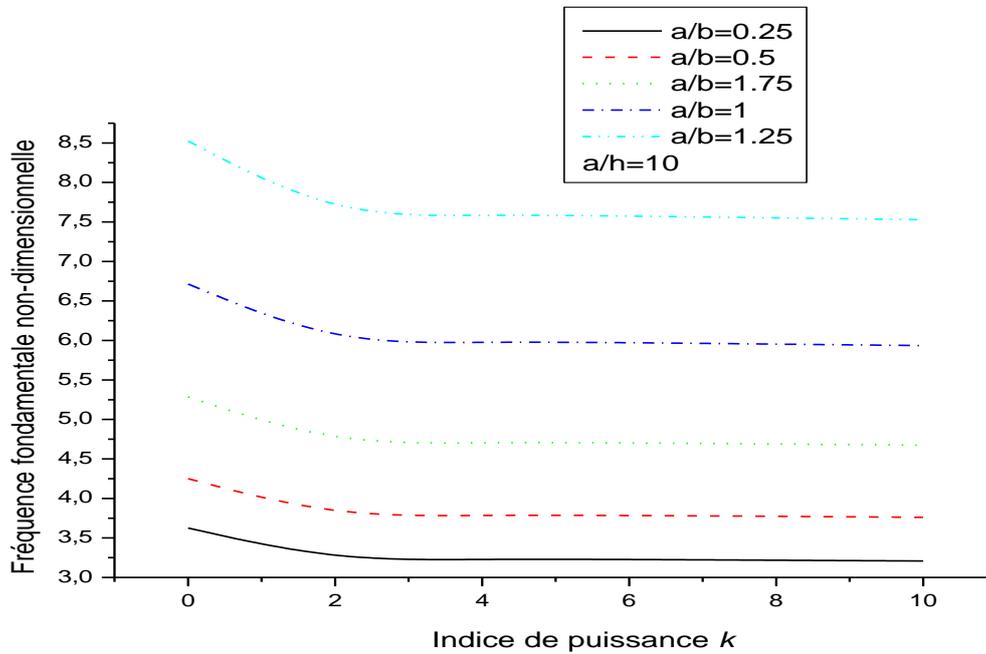


Figure IV.14. Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$ en fonction de l'indice de puissance pour différentes valeurs du rapport de géométrie (a/b) d'une plaque FGM en Al / ZrO₂.

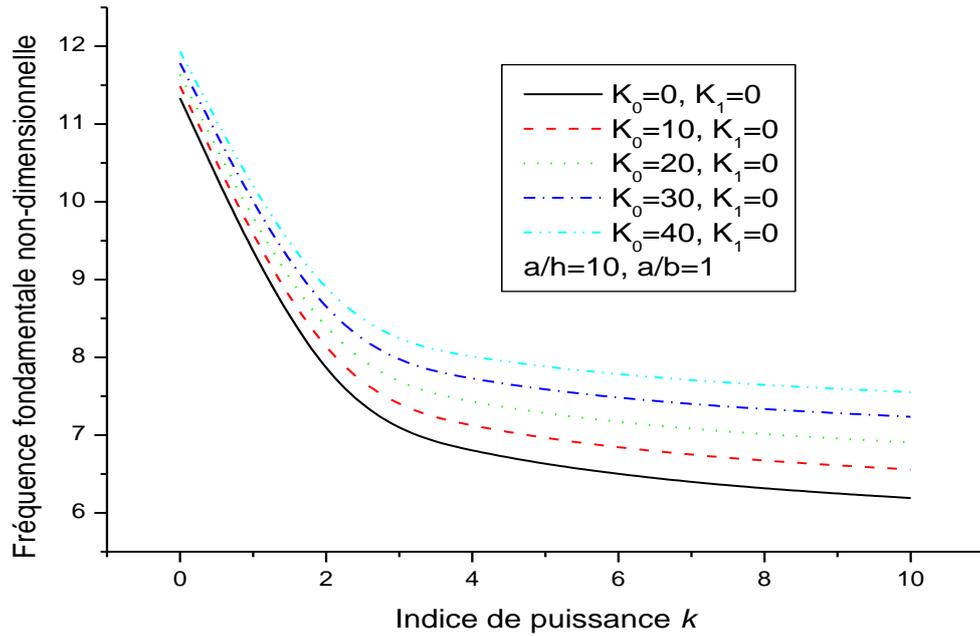


Figure IV.15. Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega \alpha^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$ en fonction de l'indice de puissance d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation de type Winkler.

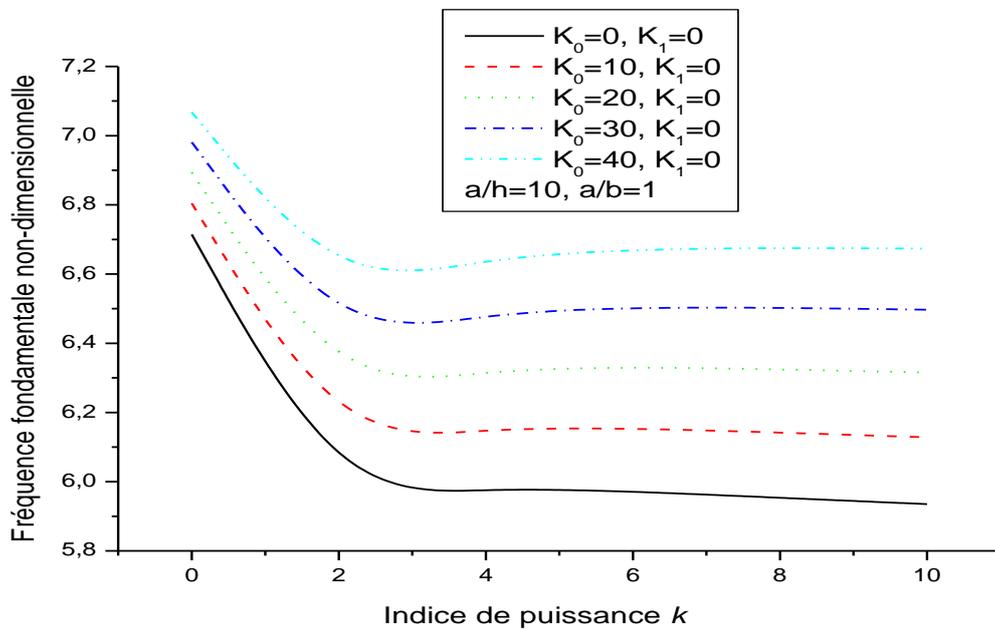


Figure IV.16. Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega \alpha^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$ en fonction de l'indice de puissance d'une plaque FGM en Al / ZrO₂ reposée sur une fondation de type Winkler.

Les figure IV.17 et IV.18 présentent la variation de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{w} = \omega b^2 \sqrt{SH/A} / \pi^2$ d'une plaque FGM carrée en Al / Al₂O₃ et en Al / ZrO₂ simplement appuyées en fonction du rapport d'épaisseur ($\delta = h/a$), respectivement. La plaque est considérée reposée sur une fondation de type Winkler-Pasternak. L'indice de puissance est pris égal à ($k=2$). On voit sur ces figures que la fréquence fondamentale non-dimensionnelle devienne plus faible lorsque le rapport $\delta = h/a$ augmente.

La figure IV.19 montre l'effet de l'indice de puissance (k) et les paramètres de fondation (K_0, K_1) sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{w} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque FGM carrée en Al / Al₂O₃. La plaque est considérée modérément épaisse ($a/h=10$). D'après cette figure, on peut voir que la fréquence fondamentale non dimensionnelle d'une plaque FGM reposée sur une fondation Winkler-Pasternak augmente avec l'augmentation du paramètre de Winkler et augmente aussi quand la plaque est plus riche en céramique.

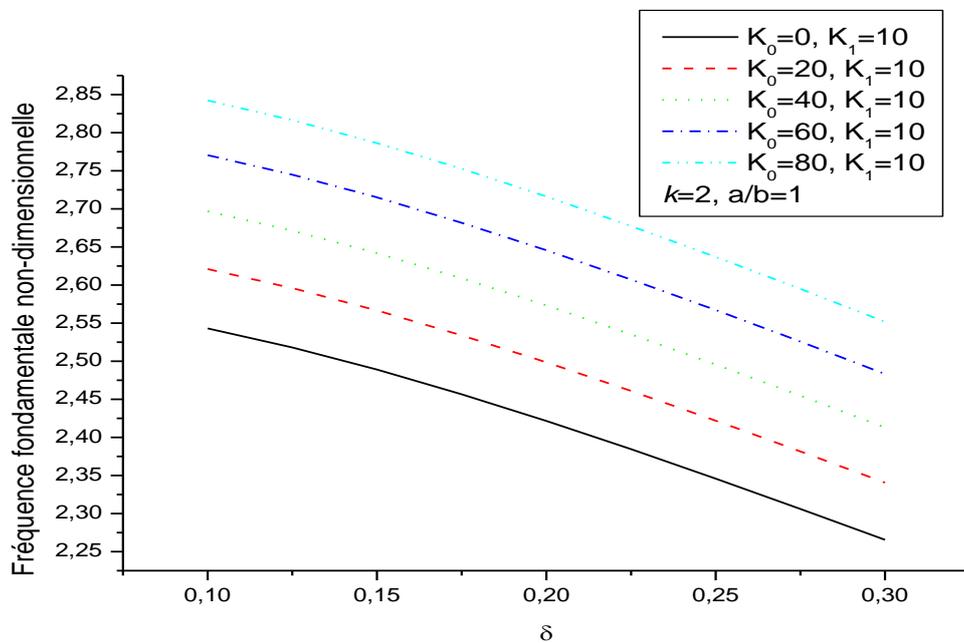


Figure IV.17. Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{w} = \omega b^2 \sqrt{SH/A} / \pi^2$ en fonction du rapport d'épaisseur ($\delta = h/a$) d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation élastique

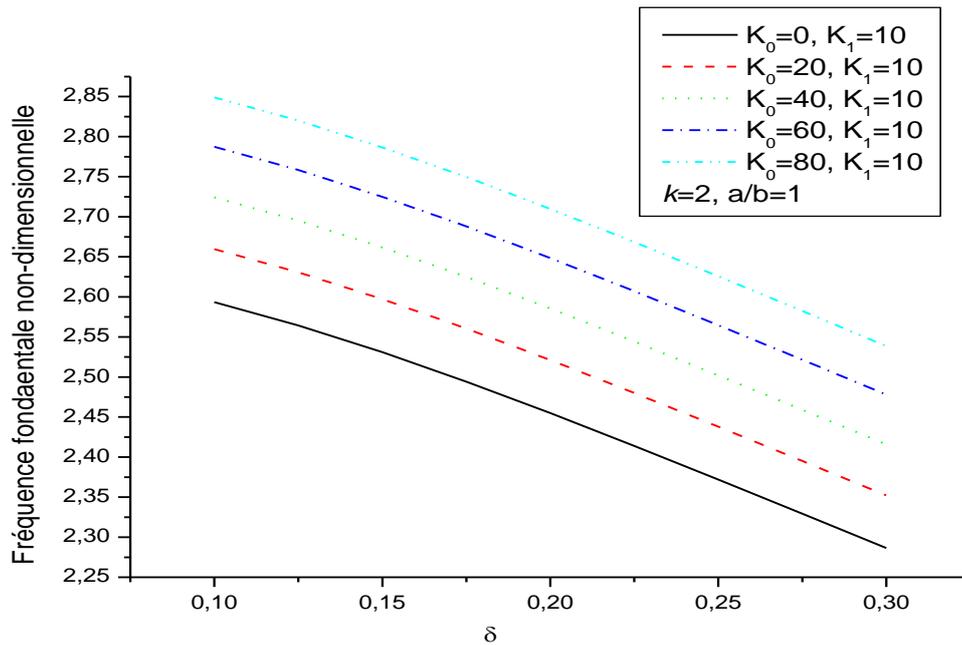


Figure IV.18. Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{w} = \omega b^2 \sqrt{SH/A} / \pi^2$ en fonction du rapport d'épaisseur ($\delta = h/a$) d'une plaque FGM en Al / ZrO₂ reposée sur une fondation élastique

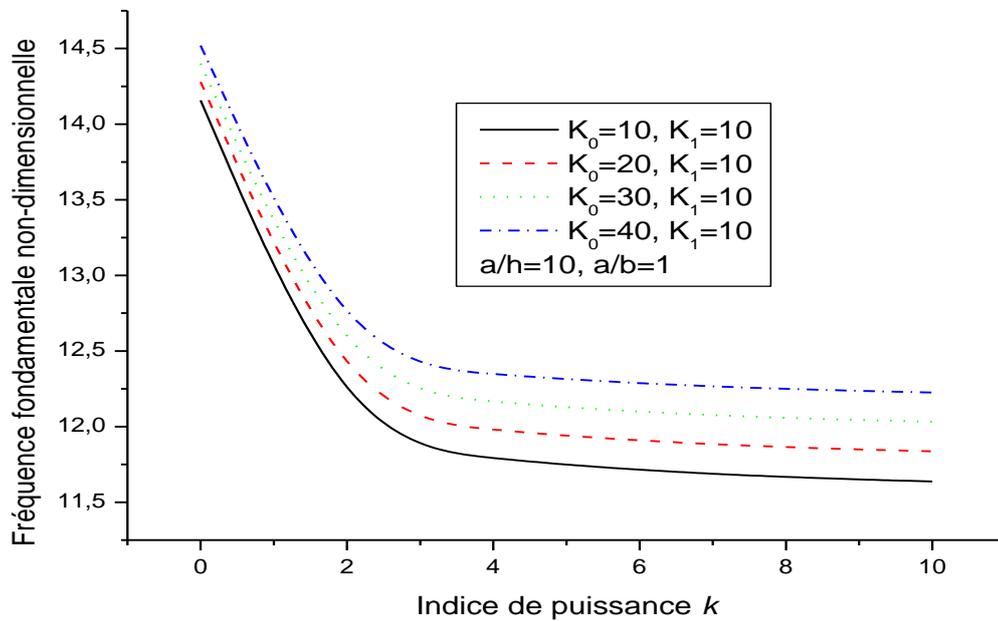


Figure IV.19. Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{w} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$ en fonction de l'indice de puissance d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation de type Winkler-Pasternak.

IV. Conclusions:

Dans ce travail, la présente théorie raffinée de déformation de cisaillement basée sur le concept de surface neutre a été utilisée pour étudier intensivement l'analyse de la flexion et la vibration libre d'une plaque FGM simplement appuyée reposant sur une fondation élastique en utilisant une procédure analytique. Les équations d'équilibre sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels et le principe d'Hamilton. La méthode de Navier est utilisée pour les solutions analytiques de la plaque à gradient de propriétés avec des conditions aux limites simplement appuyées. Il a été démontré que la présente solution est très efficace pour l'analyse exacte de la flexion et la vibration libre des plaques FGM reposant sur les fondations élastiques. Des études paramétriques en variant l'indice de puissance, les paramètres de rigidité de la fondation, le rapport de géométrie et d'épaisseur sont discutées et démontrées par des exemples numériques et graphiques. Les conclusions suivantes ont été tirées :

- La flèche adimensionnelle diminue lorsque le paramètre de Winkler (K_0) augmente.
- Le paramètre de Winkler (K_0) a plus d'effet sur la flèche au centre d'une plaque carrée et mince que le paramètre de Pasternak (K_1).
- La flèche adimensionnelle devienne plus faible lorsque le rapport d'épaisseur (a/h) augmente et quand la plaque FGM est plus riche en céramique.
- Les paramètres de rigidité de la fondation (K_0, K_1) réduisent la contrainte longitudinale dans le plan et la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la plaque FGM.
- La fréquence fondamentale devienne plus faible pour une plaque mince et lorsque elle est plus riche en céramique.
- La fréquence fondamentale d'une plaque FGM en Al / ZrO_2 est plus important qu'une plaque FGM en Al/ Al_2O_3 .
- La fréquence fondamentale non-dimensionnelle accroît avec l'augmentation du paramètre de Winkler (K_0)

CHAPITRE V

INFLUENCE DE LA FRACTION VOLUMIQUE DE POROSITE ET LES PARAMETRES DE FONDATION SUR LE COMPORTEMENT MECANIQUE DES PLAQUES FGM

V.1. Introduction :

Les matériaux, l'énergie et la science moderne sont trois piliers de la technologie moderne. Le développement de nouveaux matériaux et recherches mènent l'invention des matériaux, comme la pierre angulaire du domaine de haute technologie au 21ème siècle. Au cours des dernières années, la science des matériaux a gagné un développement rapide [Pindera. 1994]. Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) sont une nouvelle génération de matériaux d'ingénierie dans lequel les propriétés microstructure varient selon une distribution non uniforme [Hirai. 1996].

L'utilisation de matériaux à gradient de propriétés dans les applications impliquant des gradients thermiques sévères gagne rapidement l'acceptation dans la communauté de la mécanique composite et l'industrie de l'aérospatiale et des avions. Cela est particulièrement vrai au Japon et en Europe, où le concept de FGM a été achevé.

Les composants de structures largement utilisés dans les avions, les véhicules de transport spatial réutilisables et dans le génie civil sont généralement reposés sur une fondation élastique [Nguyen. 2013]. Par conséquent, il est nécessaire de tenir compte des effets de la fondation élastique pour une meilleure compréhension du comportement en flexion et en vibration libre des plaques et des coques.

Pour décrire l'interaction entre la plaque et la fondation, différents types de modèles de base ont été proposés, le modèle Pasternak [Pasternak. 1954] ou le modèle à deux paramètres est largement adopté pour décrire le comportement mécanique des fondations, et le modèle Winkler bien connu est l'un de ses cas particuliers. En fait, les deux paramètres de modèles de base élastiques ont été développés pour pallier l'insuffisance du modèle Winkler pour décrire la réaction du sol réelle et la complexité mathématique à trois dimensions. Le modèle à deux paramètres (modèle Pasternak) estime que la déformation de cisaillement entre les ressorts tandis que le modèle d'un paramètre (modèle Winkler) peut être représenté par des ressorts en continu. Par conséquent, le modèle Winkler peut être considéré comme un cas particulier du modèle Pasternak en prenant le module de cisaillement à zéro.

Toutefois, dans la fabrication des FGM, des micro-porosités ou des vides peuvent se produire dans les matériaux au cours du processus de frittage. Ceci est dû à la grande différence de température de solidification entre les constituants matériels [Zhu. 2001].

Wattanasakulpong *et al.* [Wattanasakulpong. 2012] ont également donné la discussion sur les porosités qui se déroulent à l'intérieur des échantillons FGM fabriqués par une technique d'infiltration séquentielle en plusieurs étapes. Par conséquent, il est important de prendre en compte l'effet de la porosité lors de la conception des structures FGM soumises à des charges statique et dynamiques [Wattanasakulpong. 2014].

L'objectif de cette étude est d'utiliser la présente théorie raffinée de la déformation de cisaillement pour l'étude du comportement statique et la vibration libre des plaques FGM avec porosités reposent sur une fondation élastique. L'effet en raison de la porosité est inclus en utilisant une loi du mélange modifiée couvrant les phases de porosité proposées par Wattanasakulpong *et al.* [Wattanasakulpong. 2012]. Les propriétés du matériau de la plaque FGM sont supposées variées en fonction d'une distribution en loi de puissance de la fraction volumique des constituants. L'équation du mouvement pour les plaques FGM est obtenue par le principe des travaux virtuels et le principe d'Hamilton. Les effets de l'indice de puissance, la fraction volumique de porosité, le rapport de géométrie et le rapport d'épaisseur sur la flexion et la vibration libre des plaques FGM sont discutées. Quelques exemples sont également présentés afin de vérifier la précision de la présente solution. Un bon accord est observé.

V.2. Configuration géométriques et propriétés matérielles :

Nous considérons ici une plaque FGM d'une longueur a , une largeur b et une épaisseur totale h constituée d'un mélange de métal et de céramique, dans lequel la composition varie depuis le sommet jusqu'à la surface inférieure. Le matériau en surface supérieure et surface inférieure est en céramique et en métal, respectivement. Pour identifier la position de la surface neutre des plaques FGM, deux plans différents sont pris en compte pour la mesure du z , à savoir z_{ms} et z_{ns} , mesurée à partir de la surface intermédiaire et la surface neutre de la plaque, respectivement, comme représenté sur la Fig. V.1.

Dans cette étude, nous considérons une plaque FGM imparfaite avec une fraction volumique de porosité, α ($\alpha \ll 1$), répartie uniformément entre le métal et la céramique, la règle du mélange modifiée proposée par Wattanasakulpong et Ungbhakorn [Wattanasakulpong. 2014] est utilisée comme :

$$P = P_m \left(V_m - \frac{\alpha}{2} \right) + P_c \left(V_c - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (V.1)$$

La loi de puissance de la fraction volumique de la céramique est supposée :

$$V_c = \left(\frac{z_{ns} + c}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (\text{V.2})$$

La loi du mélange modifiée devient :

$$P = (P_c - P_m) \left(\frac{z_{ns} + c}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_m - (P_c + P_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{V.3})$$

Il est à noter que k est l'indice de loi de puissance qui prend des valeurs supérieures ou égale à zéro. La plaque FGM est une plaque entièrement en céramique lorsque k est mis à zéro et entièrement métallique pour une grande valeur de k .

Le module de Young (E) et la densité (ρ) d'un FGM poreux peuvent être écrites en fonction de coordonnée d'épaisseur, z_{ns} , comme suit [Ait Atmane. 2015, Ait Yahia. 2015, Hadji. 2015a, b]

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z_{ns} + c}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{V.4})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z_{ns} + c}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \rho_m - (\rho_c + \rho_m) \frac{\alpha}{2}$$

Le paramètre C est la distance entre la surface neutre et la surface du milieu. Cependant, les propriétés matérielles d'une plaque FGM parfaite peut être obtenue lorsque la fraction volumique de porosité α est mise à zéro. En raison des faibles variations du rapport de Poisson ν , il est supposé constant.

La position de la surface neutre de la plaque FGM est déterminée pour satisfaire le moment en ce qui concerne le module d'Young étant égale à zéro comme suit [Zhang. 2008, Prakash. 2009, Bodaghi. 2011]

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})(z_{ms} - C) dz_{ms} = 0 \quad (\text{V.5})$$

Par conséquent, la position de la surface neutre peut être obtenue sous la forme [Bodaghi, 2011]

$$C = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) z_{ms} dz_{ms}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz_{ms}} \quad (V.6)$$

On peut voir que la surface neutre et la surface moyenne sont les mêmes dans une plaque isotrope homogène.

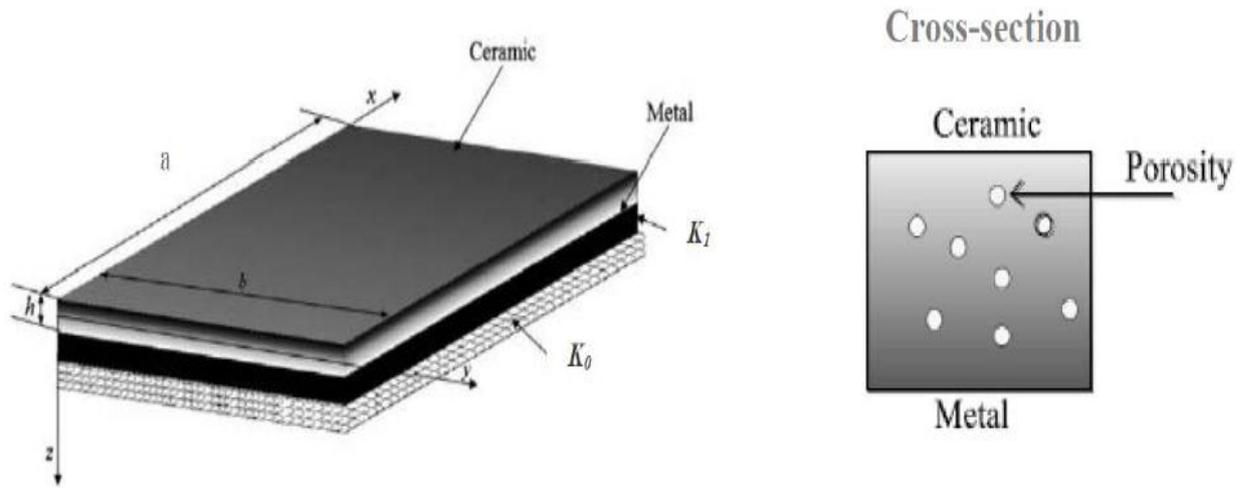


Figure V.1. Géométrie et dimension d'une plaque FGM reposé sur une fondation élastique

V.3. Champ de déplacements et déformations :

Sur la base de la théorie de la plaque d'ordre supérieur de déformation de cisaillement, les éléments de déplacement sont supposés :

$$\begin{aligned} u(x, y, z_{ns}) &= u_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z_{ns}) &= v_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z_{ns}) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (V.7)$$

L'origine des coordonnées de matériau est à la surface neutre de la plaque. La déformation linéaire peut être obtenue à partir des relations cinématiques comme :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z_{ns} k_x^b + f(z_{ns}) k_x^s \\
 \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z_{ns} k_y^b + f(z_{ns}) k_y^s \\
 \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z_{ns} k_{xy}^b + f(z_{ns}) k_{xy}^s \\
 \gamma_{yz} &= g(z_{ns}) \gamma_{yz}^s \\
 \gamma_{xz} &= g(z_{ns}) \gamma_{xz}^s \\
 \varepsilon_z &= 0
 \end{aligned} \tag{V.8}$$

Ou

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\
 \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\
 \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad k_{xy}^b = -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \quad k_{xy}^s = -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\
 \gamma_{yz}^s &= \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad g(z_{ns}) = 1 - f'(z_{ns}), \quad f'(z_{ns}) = \frac{df(z_{ns})}{dz_{ns}}
 \end{aligned} \tag{V.9}$$

$$f(z) = z_{ns} + C - \sin\left(\frac{\pi(z_{ns} + C)}{h}\right)$$

Les relations constitutives linéaires d'une plaque FGM peuvent être écrites comme :

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{V.10}$$

Ou

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= Q_{22} = \frac{E(z_{ns})}{1-\nu^2} \\
 Q_{12} &= \frac{\nu E(z_{ns})}{1-\nu^2} \\
 Q_{44} &= Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z_{ns})}{2(1+\nu)}
 \end{aligned} \tag{V.11}$$

V.4. Les équations du mouvement :

Afin d'obtenir les équations de mouvement, la méthode d'énergie est adoptée et l'énergie totale de la structure est requise

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \gamma_{xz}) dV \quad (V.12a)$$

Aussi, en utilisant le principe d' Hamilton, les équations du mouvement peuvent être obtenues sous forme de

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U + U_F - K - W) dt \quad (V.12b)$$

Où U est l'énergie de déformation et K est l'énergie cinétique de la plaque FGM, U_F est l'énergie de déformation de la fondation et W est le travail des forces extérieures. En employant le principe de l'énergie minimum totale conduit à une équation générale de mouvement et des conditions aux limites. En prenant la variation de l'équation ci-dessus et intégrant par parties :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} - \rho(\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) dv] + \int_A [f_e \delta w] dA \right] dt = 0 \quad (V.13)$$

Où $(\ddot{\cdot})$ représente la dérivée seconde par rapport au temps et f_e est la densité de la force de réaction de fondation. Pour le modèle de fondation Pasternak :

$$f_e = k_0 w - k_1 \nabla^2 w \quad (V.14)$$

Où K_0 et K_1 sont les coefficients de rigidité transversale et de cisaillement de la fondation, respectivement. Les résultantes des contraintes sont données comme :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ A & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}; \quad S = A^s \gamma \quad (V.15)$$

Ou

$$\begin{aligned}
 N &= \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \\
 \varepsilon &= \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \\
 A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \\
 B^s &= \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \\
 S &= \{S_{xz}^z, S_{yz}^s\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{V.16}$$

Et les composants de rigidité et l'inertie sont donnés comme :

$$\{A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, G_{ij}\} = \int_{-h/2-c}^{h/2-c} \{1, z_{ns}, f(z_{ns}), z_{ns}^2, z_{ns}f(z_{ns}), [f(z_{ns})]^2\} Q_{ij} dz_{ns} \tag{V.17}$$

(i, j = 1, 2, 6)

$$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 = \int_{-h/2-c}^{h/2-c} \rho (1, z_{ns}, z_{ns}^2, f(z_{ns}), z_{ns}f(z_{ns}), [f(z_{ns})]^2) dz_{ns} \tag{V.18}$$

Pour les plaques FGM, les équations d'équilibre prennent les formes :

$$\begin{aligned}
 A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}D_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - B_{11}d_{11}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_b \\
 - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}w_s - B_{11}^s d_{111}w_s = I_0 \ddot{u}
 \end{aligned} \tag{V.19a}$$

$$\begin{aligned}
 A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{112}w_b \\
 - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}w_s - B_{22}^s d_{222}w_s = I \ddot{v}
 \end{aligned} \tag{V.19b}$$

$$\begin{aligned}
 B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 - D_{11}d_{1111}w_b \\
 - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_b - D_{22}d_{2222}w_b - D_{11}^s d_{1111}w_s - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_s
 \end{aligned} \tag{V.19c}$$

$$- D_{22}^s d_{2222}w_s = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11}^s d_{111} u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{122} u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{112} v_0 + B_{22}^s d_{222} v_0 - D_{11}^s d_{1111} w_b \\
 & - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) d_{1122} w_b - D_{22}^s d_{2222} w_b - H_{11}^s d_{1111} w_s - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) d_{1122} w_s \\
 & - H_{22}^s d_{2222} w_s + A_{55}^s d_{11} w_s + A_{44}^s d_{22} w_s = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \frac{I_2}{84} \nabla^2 \ddot{w}_b
 \end{aligned} \tag{V.19d}$$

Ou d_{ij} , d_{ijl} , et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants:

$$\begin{aligned}
 d_{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \\
 & (i, j, l, m = 1, 2)
 \end{aligned} \tag{V.20}$$

Suite à la procédure de solution de Navier, on suppose que la forme de solution suivante pour u_0 , v_0 , w_b et w_s qui satisfait les conditions aux limites :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) e^{i\omega t} \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \tag{V.21}$$

Ou $\lambda = m\pi/a$, $\mu = n\pi/b$ et U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} , W_{smn} étant des paramètres arbitraires et désigne la fréquence propre associée à (m, n) ^{ième} mode propre. On obtient l'équation de l'opérateur suivante :

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\Delta\} = \{0\} \tag{V.22}$$

Ou $\{\Delta\} = \{U, V, W_b, W_s\}^t$. $[K]$ et $[M]$ sont la rigidité et la masse des matrices, respectivement, et représentée comme :

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \tag{V.23}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{V.24})$$

Dans lequel:

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2 \\ a_{12} &= \alpha\beta(A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= -B_{11}\alpha^3 \\ a_{14} &= C_{11}\alpha^2 + C_{66}\beta^2 \\ a_{15} &= \alpha\beta(C_{12} + C_{66}) \\ a_{22} &= A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2 \\ a_{23} &= -B_{22}\beta^3 \\ a_{24} &= \alpha\beta(C_{12} + C_{66}) \\ a_{25} &= C_{66}\alpha^2 + C_{22}\beta^2 \\ a_{33} &= D_{11}\alpha^4 + 2D_{12}\alpha^2\beta^2 + 4D_{66}\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4 + k_0 + k_1(\alpha^2 + \beta^2) \\ a_{34} &= -E_{11}\alpha^3 - E_{12}\alpha\beta^2 - 2E_{66}\alpha\beta^2 \\ a_{35} &= -E_{12}\alpha^2\beta - 2E_{66}\alpha^2\beta - E_{22}\beta^3 \\ a_{44} &= F_{55} + G_{11}\alpha^2 + G_{66}\beta^2 \\ a_{45} &= \alpha\beta(G_{12} + G_{66}) \\ a_{55} &= F_{44} + G_{66}\alpha^2 + G_{22}\beta^2 \end{aligned} \quad (\text{V.25})$$

Et

$$\alpha = m\pi/a, \quad \beta = n\pi/b$$

Les fréquences naturelles de la plaque FGM peuvent être trouvées à partir de la solution de l'équation. (V.22).

V.5. Résultats :

La théorie raffinée de la déformation de cisaillement a été utilisée pour analyser la flexion et la vibration libre des plaques FGM simplement appuyées avec porosité et reposent sur une

fondation élastique pour différentes valeurs de l'indice de puissance, la fraction volumique de porosité, les paramètres de fondations, le rapport de géométrie et le rapport d'épaisseur. La procédure de solution de Navier présentée dans la section précédente est utilisée pour évaluer la flèche adimensionnelle, les contraintes et les fréquences naturelles. Les propriétés des matériaux suivants sont utilisées dans l'analyse:

Matériaux	Propriétés	
	E (N/m ²)	ρ (kg/m ³)
Aluminium (Al)	70×10^9	2707
Alumina (Al ₂ O ₃)	380×10^9	3800
Zirconia (ZrO ₂)	151×10^9	3000
Ti-6Al-4V	105.7×10^9	4429
Aluminium oxide	320.2×10^9	3750

Cependant, le coefficient de Poisson (ν) est supposé être constant. Les propriétés matérielles d'une plaque FGM parfaite peuvent être obtenues lorsque α est égal à zéro.

Pour valider la précision de la théorie proposée pour la flexion et la vibration libre d'une plaque FGM parfaite (sans porosité), les résultats actuels ont été comparés avec ceux qui sont disponibles obtenus par la solution 3-D de Vel *et al.* [Vel. 2004], la théorie raffinée de déformation de cisaillement de la plaque du Thai *et al.* [Thai. 2011], Hosseini-Hashemi *et al.* [Hosseini-Hashemi. 2011b] basée sur la théorie de Reddy du troisième ordre de déformation de cisaillement de la plaque, une solution semi-analytique basée sur la méthode Kantorovich étendue de Fallah *et al.* [Fallah. 2013], Dozio [Dozio. 2014], Neves *et al.* [Neves. 2013] basée sur une théorie quasi-3D de déformation d'ordre élevée et avec d'autres disponibles dans la littérature. Excellent accord est obtenu pour tous les cas.

La flèche adimensionnelle et la contrainte normale d'une plaque FGM en Al / Al₂O₃ simplement appuyées pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur a/h et l'indice de la loi de puissance ($k=1, 4$ et 10) sont énumérés dans le tableau V.1. Les paramètres de fondation sont pris égal $K_0=K_1=0$. Les flèches adimensionnelles et les contraintes calculées sont comparées à celles rapportées par Neves *et al.* [Neves. 2013], Carrera *et al.* [Carrera. 2011] et Thai *et al.* [Thai. 2014]. Excellent accords entre les résultats sont obtenus pour des plaques modérément épaisses et convergent dans le cas des plaques épaisses.

Tableau V.1. La flèche adimensionnelle et la contrainte normale d'une plaque FGM carrée sous un chargement sinusoïdale ($K_0=K_1=0$)

k	Méthode	σ_x			\bar{w}		
		a/h=4	a/h=10	a/h=100	a/h=4	a/h=10	a/h=100
1	Neves (2013)	0.5911	1.4917	14.9450	0.7020	0.5868	0.5647
	Carrera (2011)	0.6221	1.5064	14.9690	0.7171	0.5875	0.5625
	Thai (2014)	0.5812	1.4898	14.9676	0.7284	0.5890	0.5625
	présente	0.5803	1.4894	14.9675	0.7280	0.5889	0.5625
4	Neves (2013)	0.4330	1.1588	11.7370	1.1108	0.8700	0.8240
	Carrera (2011)	0.4877	1.1971	11.9230	1.1585	0.8821	0.8286
	Thai (2014)	0.4449	1.1794	11.9209	1.1599	0.8815	0.8287
	présente	0.4423	1.1783	11.9208	1.1619	0.8818	0.8286
10	Neves (2013)	0.3097	0.8462	8.6010	1.3334	0.9888	0.9227
	Carrera (2011)	0.3695	0.8965	8.6077	1.3745	1.0072	0.9361
	Thai (2014)	0.3259	0.8785	8.9060	1.3909	1.0087	0.9362
	présente	0.3234	0.8775	8.9058	1.3917	1.0089	0.9361

La flèche adimensionnelle et les contraintes d'une plaque FGM en Al / Al₂O₃ simplement appuyées pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance ($k= 0, 1, 2$ et 5) sont présentés dans le tableau V.2. Les paramètres de fondation sont pris égal $K_0=K_1=0$. Les flèches adimensionnelles et les contraintes calculées sont comparées à celles rapportées par Zenkour *et al.* [Zenkour. 2009] et Thai *et al.* [Thai. 2014], Bon accords entre les résultats sont obtenus.

Les résultats de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée, mince et isotrope simplement appuyée sous un chargement uniformément répartie sont présentés dans le tableau V.3 pour des valeurs différentes de paramètres de fondation K_0 et K_1 . On peut constater que les présents résultats convergent avec ceux qui sont donnés par Huang *et al.* [Huang. 2008] et Thai *et al.* [Thai. 2011]. Il est à noter aussi que la flèche adimensionnelle augmente en fonction de l'augmentation du l'indice de puissance.

Tableau V.2. La flèche adimensionnelle et les contraintes d'une plaque FGM rectangulaire sous un chargement uniforme, ($K_0=K_l=0$)

k	Méthode	w^*	σ_x^*	σ_y^*	σ_{xy}^*
0	Zenkour (2009)	1.2583	0.7162	0.2448	0.2893
	Thai (2014)	1.2583	0.7160	0.2447	0.2890
	présente	1.2582	0.7161	0.2494	0.2892
1	Zenkour (2009)	2.5133	0.3250	0.1111	0.1307
	Thai (2014)	2.5134	0.3250	0.1111	0.1306
	présente	2.5133	0.3250	0.1125	0.1307
2	Zenkour (2009)	3.2267	0.4396	0.1502	0.1766
	Thai (2014)	3.2266	0.4395	0.1502	0.1766
	présente	3.2267	0.4396	0.1522	0.1766
5	Zenkour (2009)	3.8517	0.5224	0.1785	0.2104
	Thai (2014)	3.8506	0.5223	0.1785	0.2103
	présente	3.8517	0.5223	0.1818	0.2104

Tableau V.3. Comparaison de la flèche adimensionnelle d'une plaque mince et isotrope simplement appuyée sous un chargement uniforme

K_0	K_l	Huang (2008)	Thai (2011)	présente
1	1	3.8546	3.855	4.0401
	3^4	0.763	0.763	0.7662
	5^4	0.1153	0.1153	0.1153
3^4	1	3.2105	3.2108	3.3327
	3^4	0.7317	0.7317	0.7344
	5^4	0.1145	0.1145	0.1145
5^4	1	1.4765	1.4765	1.4887
	3^4	0.5704	0.5704	0.5705
	5^4	0.1095	0.1095	0.1094

Les tableaux V.4 et V.5 présentent les comparaisons de la fréquence fondamentale obtenue à partir de la nouvelle théorie actuelle de la plaque avec les résultats de d'autres théories de Vel *et al.* [Vel. 2004], Srinivas *et al.* [Srinivas. 1970] et Thai *et al.* [Thai. 2011] pour différentes valeurs de rapport d'épaisseur et les paramètres de fondation. Comme on peut le voir, les résultats sont en bon accord avec les précédentes. Le paramètre de cisaillement a plus d'effet sur l'augmentation de la fréquence fondamentale que le paramètre de Winkler.

Tableau V.4. Comparaison du paramètre de la fréquence fondamentale d'une plaque carrée ($a/b=1$)

$$\hat{\omega} = \omega \alpha^2 \sqrt{\rho / E} / h$$

h/a	Theories			% Diff
	Exact 3-D Vel (2004)	Exact 3-D Srinivas (1970)	présente	
$h/a = 1/10$	5.7769	5.7769	5.7695	0,1281
$h/a = 1/\sqrt{10}$	4.6582	4.6582	4.6246	0,7213

Tableau V.5. Fréquence fondamentale $\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_{22} / E_{22}}$ d'une plaque carrée

$$k=0$$

K_0	K_l	h/a	Méthodes	
			Thai (2011)	Présente
0	0	0.05	0.0291	0.0291
		0.1	0.1134	0.1133
		0.15	0.2452	0.2452
		0.2	0.4150	0.4150
0	100	0.05	0.0406	0.0405
		0.1	0.1597	0.1595
		0.15	0.3512	0.3499
		0.2	0.6075	0.6028
100	0	0.05	0.0298	0.0297
		0.1	0.1161	0.1161
		0.15	0.2516	0.2515
		0.2	0.4269	0.4266
100	100	0.05	0.0411	0.0410
		0.1	0.1617	0.1615
		0.15	0.3557	0.3544
		0.2	0.6156	0.6108

Comme une autre tentative de vérification, les tableaux V.6 et V.7 présentent respectivement les comparaisons de huit paramètres de fréquence sans fondation élastique ($K_0 = K_I = 0$) et la fréquence fondamentale naturelle sur Winkler fondation avec Hosseini-Hashemi *et al.* [Hosseini-Hashemi. 2011a], Lam *et al.* [Lam. 2002] et Fallah *et al.* [Fallah. 2013]. Une corrélation étroite est obtenue. Comme on peut le constater, avec l'augmentation du rapport de géométrie et le rapport d'épaisseur, la fréquence naturelle de vibration diminue cette dernière augmente avec l'augmentation de paramètre de Winkler.

Tableau V.6. Les huit paramètres de fréquences $\bar{\omega} = \omega \alpha^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ d'une plaque rectangulaire

b/a	h/a	Méthodes	Paramètre de fréquence								
			(1,1)	(2,1)	(3,1)	(1,2)	(2,2)	(4,1)	(3,2)	(5,1)	
0.5	0.01	Hosseini-H	49.3032	78.8421	128.002	167.267	196.678	196.678	245.626	284.722	
		présente	49.3032	78.8422	128.0027	167.2673	196.6787	196.6787	245.6274	284.7232	
	0.1	Hosseini-H	45.4869	69.8093	106.735	133.720	152.753	152.753	182.565	204.956	
		présente	45.4917	69.8212	106.7652	133.7698	152.8208	152.8208	182.6670	205.0894	
	0.2	Hosseini-H	38.1883	55.2543	78.9865	95.2602	106.363	106.363	123.292	135.725	
		present	38.2052	55.2943	79.0812	95.4108	106.5619	106.5619	123.5813	136.0940	
	0.3	Hosseini-H	31.6413	44.0236	60.6549	71.8663	79.4754	79.4754	83.4663	86.1806	
		présente	31.6739	44.0974	60.8216	72.1239	79.8093	79.8093	83.5322	86.1679	
	0.4	Hosseini-H	26.5910	36.1319	48.8370	57.4119	63.2548	63.2548	72.1987	77.6250	
		present	26.6404	36.2404	49.0728	57.7687	63.7108	63.7108	72.8328	78.6020	
	1	0.01	Hosseini-H	19.7320	49.3032	49.3032	78.8421	98.5169	98.5169	128.002	128.002
			présente	19.7320	49.3032	49.3032	78.8422	98.5171	98.5171	128.0027	128.0027
0.1		Hosseini-H	19.0653	45.4869	45.4869	69.8093	85.0646	85.0646	106.735	106.735	
		present	19.0660	45.4917	45.4917	69.8212	85.0829	85.0829	106.7652	106.7652	
0.2		Hosseini-H	17.4523	38.1883	38.1883	55.2543	65.3135	65.3135	78.9865	78.9865	
		présente	17.4553	38.2052	38.2052	55.2943	65.3731	65.3731	79.0812	79.0812	
0.3		Hosseini-H	15.5745	31.6413	31.6413	44.0236	51.1314	51.1314	60.6549	60.6549	
		present	15.5806	31.6739	31.6739	44.0974	51.2391	51.2391	60.8216	60.8216	
0.4		Hosseini-H	13.8136	26.5910	26.5910	36.1319	41.5668	41.5668	48.8370	48.8370	
		présente	13.8235	26.6404	26.6404	36.2404	41.7220	41.7220	49.0728	60.8216	
2		0.01	Hosseini-H	12.3342	19.7320	32.0572	41.9134	49.3032	49.3032	61.6149	71.4604
			present	12.3342	19.7320	32.0572	41.9134	49.3032	49.3032	61.6150	71.4604
	0.1	Hosseini-H	12.0675	19.0653	30.3623	39.0977	45.4869	45.4869	55.8497	63.9008	
		présente	12.0677	19.0660	30.3643	39.1011	45.4917	45.4917	55.8571	63.9107	
	0.2	Hosseini-H	11.3717	17.4523	26.6838	33.4301	38.1883	38.1883	45.6412	51.2389	
		présente	11.3729	17.4553	26.6913	33.4424	38.2052	38.2052	45.6667	51.2723	
	0.3	Hosseini-H	10.4733	15.5744	22.924	28.0832	31.6413	31.6413	37.1114	41.1530	
		présente	10.4758	15.5806	22.9391	28.1071	31.6739	31.6739	37.1596	41.2153	
	0.4	Hosseini-H	9.54718	13.8136	19.7466	23.8151	26.5908	26.5908	30.8231	33.9311	
		présente	9.5513	13.8235	19.7703	23.8527	26.6404	26.6404	30.8953	34.0235	

Tableau V.7. Fréquence fondamentale d'une plaque carrée et isotrope

$$\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho_0 h / G} \quad h/a=0.05$$

K_0	Lam (2002)	Fallah (2013)	présente
0	19.74	19.56	19.5626
100	22.13	21.96	21.9600
1000	37.28	37.13	37.1232

Dans les tableaux V.8 et V.9, la comparaison des fréquences naturelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ pour une plaque FGM en Al / ZrO₂ carré et simplement appuyée avec ceux rapportés par Vél *et al.* [Vél. 2004], Dozio [Dozio. 2014], Neves *et al.* [Neves. 2013], Qian *et al.* [Qian. 2004] et Hosseini-Hashemi *et al.* [Hosseini-Hashemi. 2011a] sont présentées par rapport à l'indice de loi de puissance et le rapport d'épaisseur. Les résultats montrent que l'effet de l'indice de loi de puissance sur la fréquence de vibration naturelle est très intéressant.

D'après les tableaux V.10 et V.11, il est à noter que l'effet du paramètre de cisaillement (Pasternak) a plus d'effet sur l'augmentation de la fréquence naturelle que le paramètre Winkler. Comme il peut être observé dans le tableau, l'augmentation de l'indice de loi de puissance augmente l'effet de la fondation élastique sur la fréquence naturelle. L'augmentation de l'indice de loi de puissance à un effet négligeable sur une plaque reposée sur une fondation de type Winkler.

Tableau V.8. Comparaison d'une fréquence fondamentale d'une plaque carrée en Al/ZrO₂

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$$

k	model							présente
	Vel (2004) Exact 3D	Dozio (2014) HOSNT-15	Dozio (2014) HOSNT-12	Dozio (2014) HOSNT-9	Neves (2013)	Qian (2004)	Hosseini-H (2011a)	
2	0.2197	0.2196	0.2198	0.2225	0.2200	0.2153	0.2264	0.2187
3	0.2211	0.2211	0.2211	0.2245	0.2215	0.2172	0.2276	0.2183
5	0.2225	0.2225	0.2226	0.2263	0.2230	0.2194	0.2291	0.2174

Tableau V.9. Les premier 10 fréquences naturelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque carrée en Al/ZrO₂ avec $k = 1$ et différentes valeurs du rapport d'épaisseur.

a/h	Modèles	mode									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20	Dozio (2014) HOSNT-15	0.0154	0.0377	0.0377	0.0596	0.0740	0.0740	0.0950	0.0950	0.1030	0.1030
	Dozio (2014) HOSNT-12	0.0154	0.0377	0.0377	0.0596	0.0740	0.0740	0.0950	0.0950	0.1030	0.1030
	Dozio (2014) HOSNT-9	0.0154	0.0379	0.0379	0.0597	0.0742	0.0742	0.0955	0.0955	0.1030	0.1030
	Qian (2004)	0.0149	0.0377	0.0377	0.0593	0.0747	0.0747	0.0769	0.0912	0.0913	0.1029
	Neves (2013)	0.0153	0.0377	0.0377	0.0596	0.0739	0.0739	0.0950	0.0950	0.1030	0.1030
	présente	0.0151	0.0373	0.0373	0.0591	0.0733	0.0733	0.0943	0.0943	0.1030	0.1030
5	Dozio (2014) HOSNT-15	0.2191	0.4116	0.4116	0.4820	0.4820	0.5820	0.6996	0.8228	0.8281	0.8281
	Dozio (2014) HOSNT-12	0.2193	0.4116	0.4116	0.4824	0.4824	0.5820	0.7004	0.8228	0.8293	0.8293
	Dozio (2014) HOSNT-9	0.2213	0.4116	0.4116	0.4906	0.4906	0.5820	0.7159	0.8229	0.8496	0.8496
	Qian (2004)	0.2152	0.4114	0.4114	0.4761	0.4761	0.5820	0.6914	0.8192	0.8217	0.8242
	Dozio (2014) HOSNT-15	0.0154	0.0377	0.0377	0.0596	0.0740	0.0740	0.0950	0.0950	0.1030	0.1030
	présente	0.2186	0.4116	0.4116	0.4840	0.4840	0.5820	0.7046	0.8228	0.8349	0.8349

Tableau V.10. Fréquence naturelle fondamentale $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_{11} / E_{11}}$ d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ (a/b=0.5)

h/a	K ₀	K _l	k				
			0	1	2	5	10
0.1	0	0	0.0365	0.0246	0.0234	0.0213	0.0199
	0	100	0.1117	0.1168	0.1197	0.1211	0.1141
	100	0	0.0473	0.0408	0.0408	0.0405	0.0402
	100	100	0.1157	0.1212	0.1243	0.1211	0.1141
0.3	0	0	0.2853	0.1987	0.1855	0.1644	0.1535
	0	100	0.6534	0.4988	0.4319	0.3634	0.3424
	100	0	0.3844	0.3420	0.3397	0.3339	0.3329
	100	100	0.6534	0.4988	0.4319	0.3634	0.3424

Tableau V.11. Fréquence naturelle fondamentale $\bar{\omega} = \omega \alpha^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃
(a/b=0.5, h/a=0.1)

k	K_0	K_I	Modes				
			(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(3,1)
0	0	0	0.0717	0.1133	0.2324	0.1805	0.4723
	0	100	0.2195	0.2851	0.4438	0.3777	0.7250
	100	0	0.0929	0.1277	0.2396	0.1898	0.4758
	100	100	0.2273	0.2911	0.4477	0.3823	0.7273
1	0	0	0.0485	0.0768	0.1589	0.1230	0.3274
	0	100	0.2295	0.2930	0.4381	0.3790	0.6766
	100	0	0.0802	0.0998	0.1710	0.1383	0.3332
	100	100	0.2382	0.2998	0.4427	0.3842	0.6794
5	0	0	0.0418	0.0660	0.1351	0.1050	0.2727
	0	100	0.2380	0.3011	0.4389	0.3838	0.6475
	100	0	0.0796	0.0944	0.1506	0.1246	0.2804
	100	100	0.2380	0.3011	0.4389	0.3838	0.6475
10	0	0	0.0392	0.0618	0.1264	0.0983	0.2547
	0	100	0.2242	0.2836	0.4135	0.3616	0.6100
	100	0	0.0791	0.0922	0.1433	0.1195	0.2632
	100	100	0.2242	0.2836	0.4135	0.3616	0.6100

La figure V.2 montre l'effet de la fraction volumique de porosité sur la flèche adimensionnelle au centre en fonction du rapport d'épaisseur a / h d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃. Comme on peut le voir, l'effet de la fraction volumique de porosité sur la flèche adimensionnel au centre augmente avec l'augmentation du rapport d'épaisseur. L'augmentation du coefficient de porosité provoque une augmentation de la flèche adimensionnelle au centre.

L'effet de la porosité sur la contrainte longitudinale dans le plan, la contrainte de cisaillement transversale et la contrainte tangentielle longitudinale à travers l'épaisseur d'une plaque FGM est représenté sur la Fig. V.3, V.4 et V.5, respectivement. On peut voir que

l'augmentation du coefficient de porosité provoque une diminution de la contrainte de cisaillement transversal. Sur les figures V.6 et V.7 la fréquence fondamentale naturelle avec trois types de distribution de porosité différente sont tracés en fonction de l'indice de la fraction volumique (P) pour un FGM en Al/al₂O₃ et Ti-6Al-4V/Aluminum oxide reposé sur une fondation élastique. On voit sur ces figures que, l'augmentation de coefficient de porosité provoque une diminution de la fréquence fondamentale naturelle.

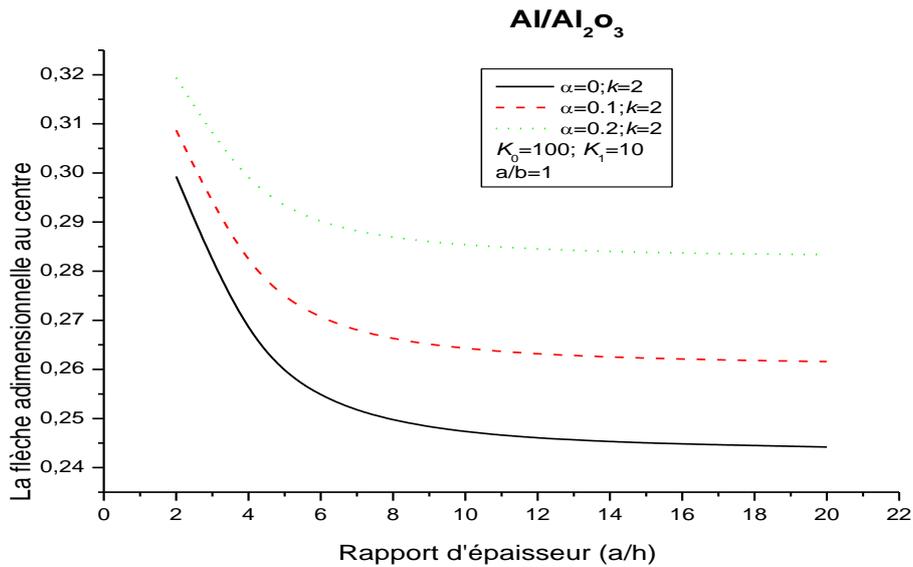


Figure V.2. Effet de porosité sur la flèche adimensionnelle au centre en fonction à travers l'épaisseur d'une plaque FGM

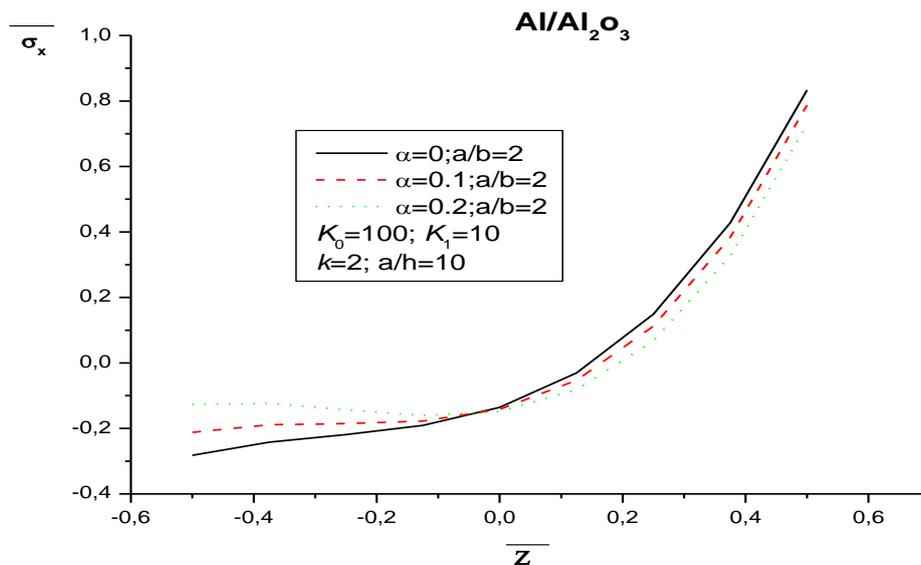


Figure V.3. Effet de porosité sur la contrainte longitudinal à travers l'épaisseur d'une plaque FGM

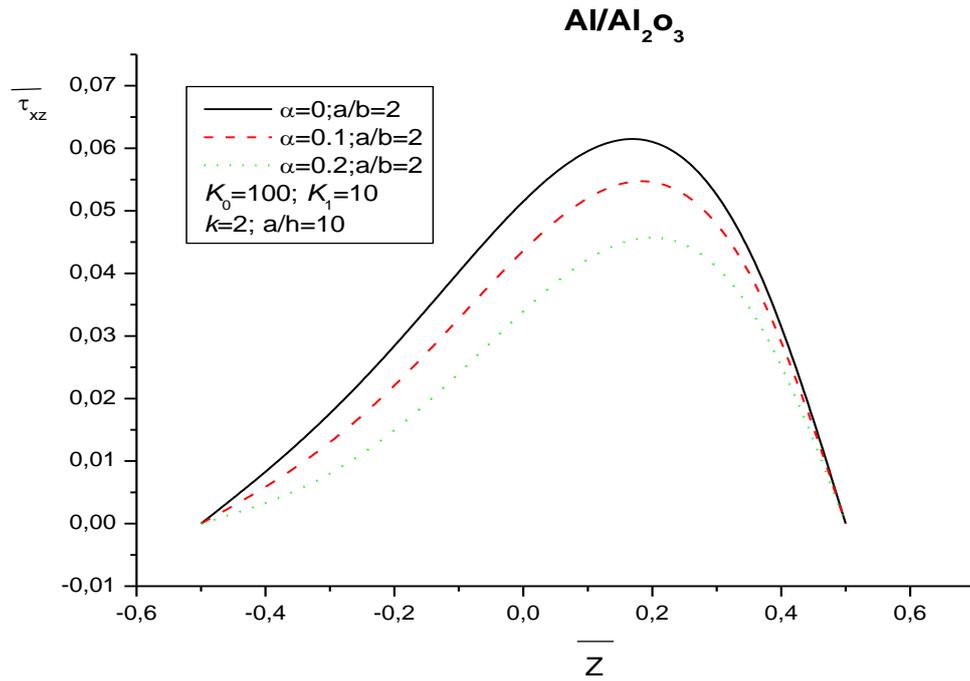


Figure V.4. Effet de porosité sur la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur d'une plaque FGM

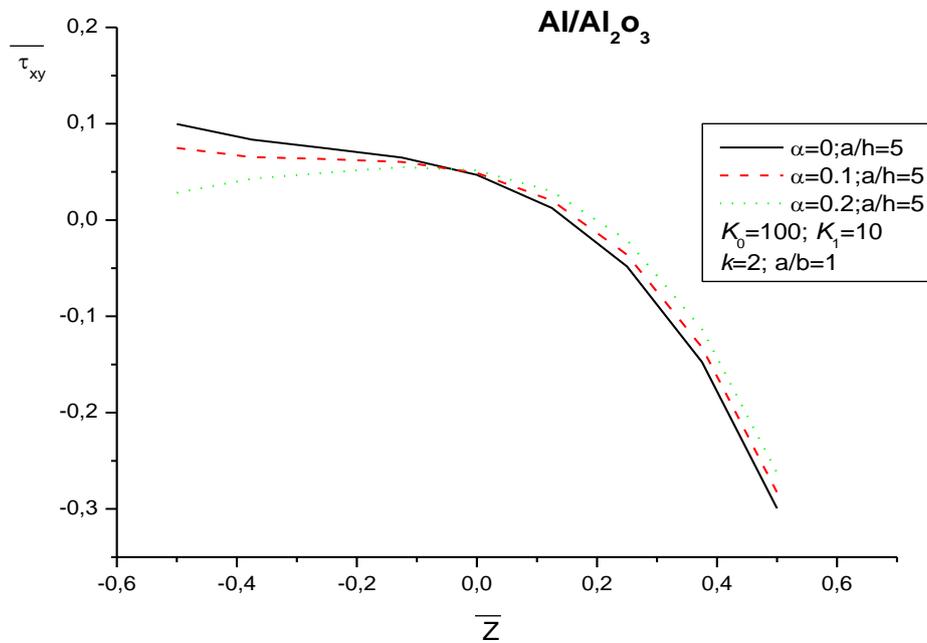


Figure V.5. Effet de porosité sur la contrainte tangentielle à travers l'épaisseur d'une plaque FGM

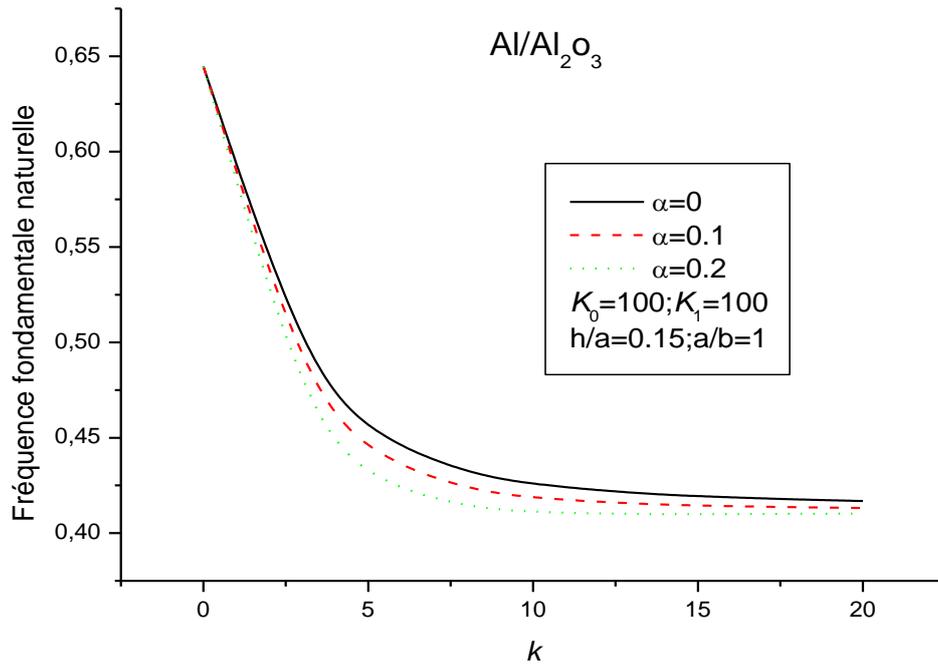


Figure V.6. Effet de porosité sur la fréquence naturelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ on fonction de l'indice de puissance d'une plaque FGM

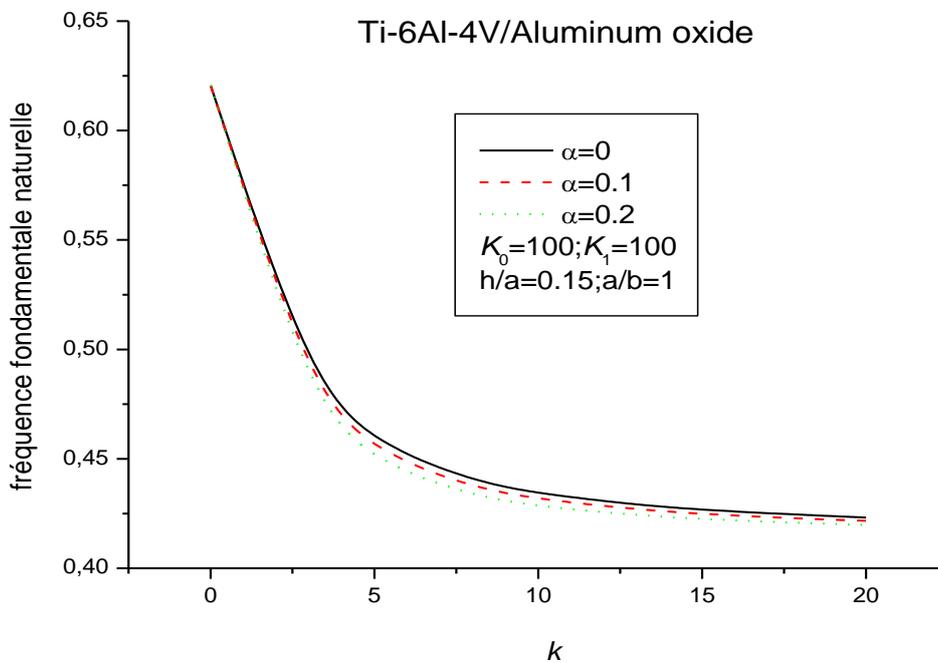


Figure V.7. Effet de porosité sur la fréquence naturelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ on fonction de l'indice de puissance d'une plaque FGM

Les figures. V.8 et V.9 présentent les variations de la fréquence fondamentale naturelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ avec trois valeurs de la fraction volumique de porosité en fonction du rapport d'épaisseur (h / a) d'une plaque à gradient de propriétés avec deux type de combinaison Al/Al₂O₃ et Ti-6Al-4V / oxyde d'aluminium, respectivement. Les plaques FGM sont reposées sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak avec ($K_0=K_I=100$). Les figures montrent que l'augmentation du rapport d'épaisseur augmente l'effet de la fraction volumique de porosité sur la fréquence naturelle. L'augmentation du rapport d'épaisseur conduit à une augmentation de la fréquence naturelle des plaques FGM reposées sur des fondations élastiques.

Les figures. V.10 et V.11 montrent l'effet de la fraction volumique de porosité sur la fréquence fondamentale naturelle avec ($a=0, 0.1$ et 0.2) en fonction du rapport de géométrie (b / a) d'une plaque en matériaux à gradient de propriétés avec deux type de combinaison Al/Al₂O₃ et Ti-6Al-4V / oxyde d'aluminium, respectivement. Les plaques FGM sont reposées sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak avec ($K_0=K_I=100$). Les figures montrent que l'augmentation du rapport de géométrie conduit à une diminution de la fréquence naturelle.

L'effet du paramètre de Winkler K_0 et la fraction volumique de porosité sur la fréquence fondamentale naturelle $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ sur deux types de combinaison de la plaque en matériaux à gradient de propriétés Al/Al₂O₃ et Ti-6Al-4V / oxyde d'aluminium sont présentés sur les figures V.12 et V.13, respectivement. Comme on peut le voir, la fréquence naturelle fondamentale augmente avec l'augmentation du paramètre de Winkler. Ainsi la fraction volumique de porosité à un effet important sur la fréquence naturelle fondamentale des plaques à gradient de propriétés reposées sur des fondations de type Winkler.

L'effet de la fraction volumique de porosité sur la fréquence fondamentale naturelle $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ et Ti-6Al-4V / oxyde d'aluminium reposée sur une fondation de type Pasternak ont été présenté dans les figures V.14 et V.15, respectivement. Il est à noter que la fréquence fondamentale naturelle augmente avec l'augmentation du paramètre de Pasternak. Ainsi la fraction volumique de porosité à un effet négligeable sur la fréquence fondamentale naturelle des plaques FGM reposées sur des fondations de type Pasternak.

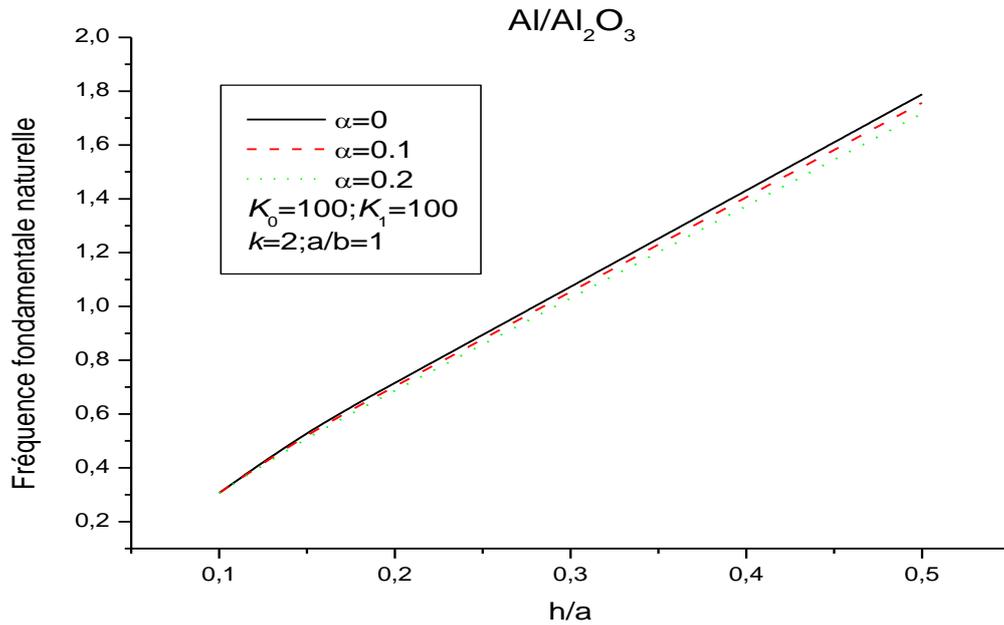


Figure V.8. Effet de porosité sur la fréquence naturelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ en fonction du rapport d'épaisseur d'une plaque FGM

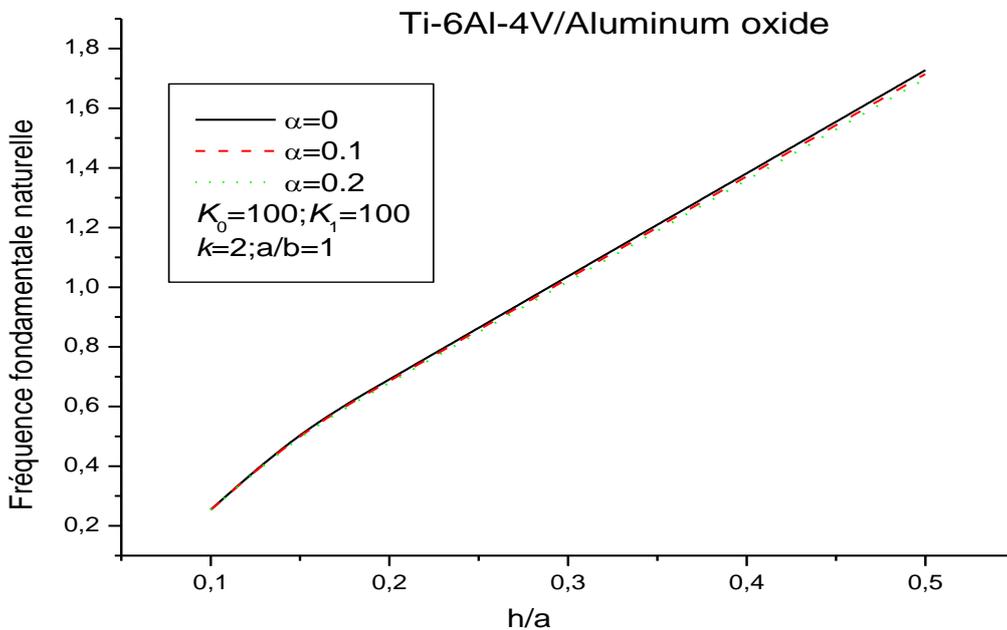


Figure V.9. Effet de porosité sur la fréquence naturelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ en fonction du rapport d'épaisseur d'une plaque FGM

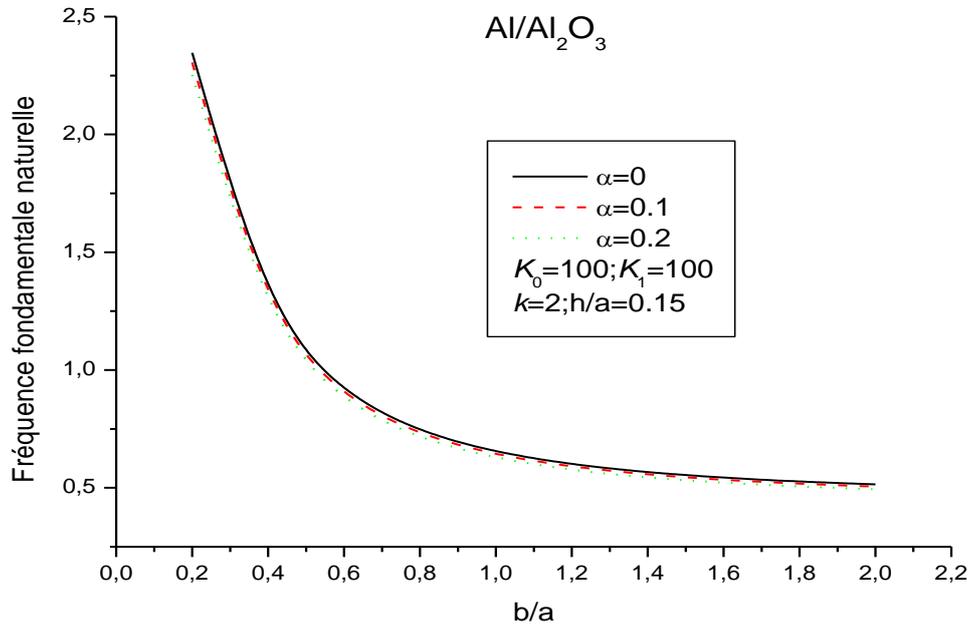


Figure V.10. Effet de porosité sur la fréquence fondamentale naturelle $\bar{\omega} = \alpha^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ en fonction du rapport de géométrie d'une plaque FGM

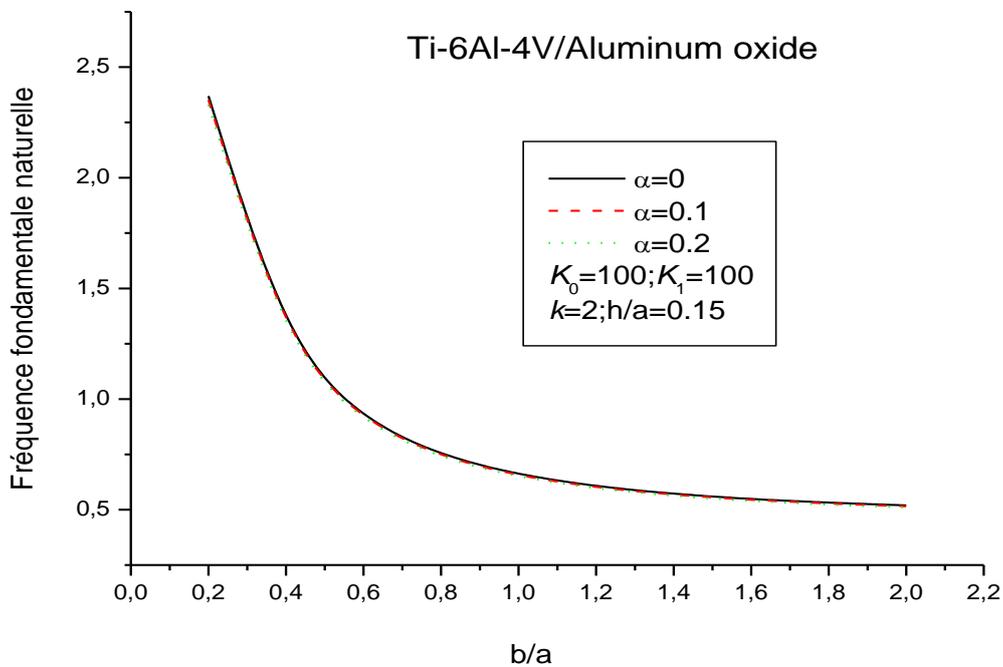


Figure V.11. Effet de porosité sur la fréquence fondamentale naturelle $\bar{\omega} = \alpha^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ en fonction du rapport de géométrie d'une plaque FGM

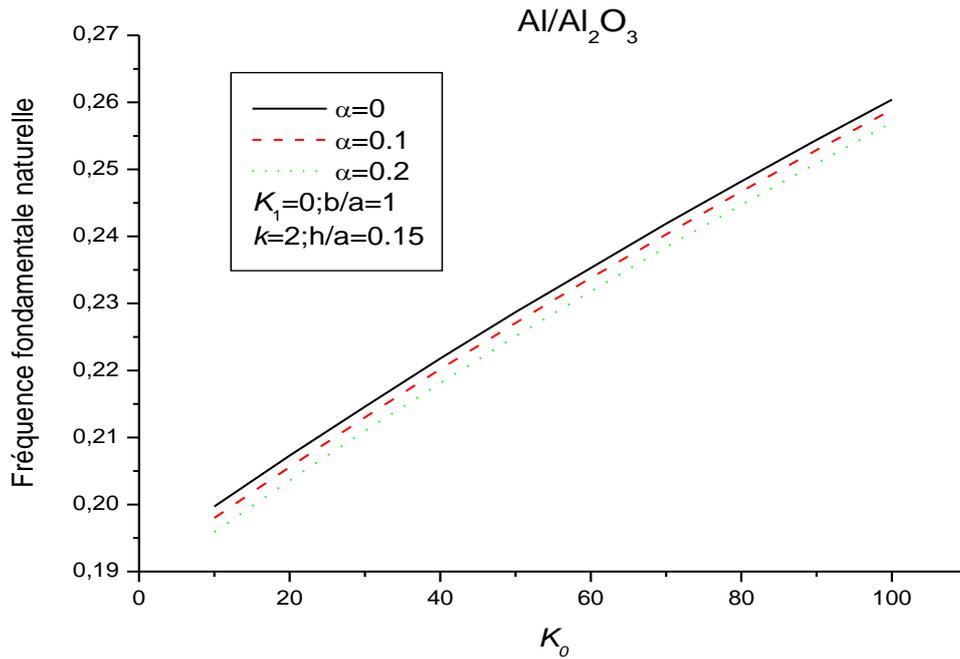


Figure V.12. Effet de porosité sur la fréquence fondamentale naturelle $\bar{\omega} = \alpha \alpha^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ d'une plaque FGM reposé sur Winkler fondation

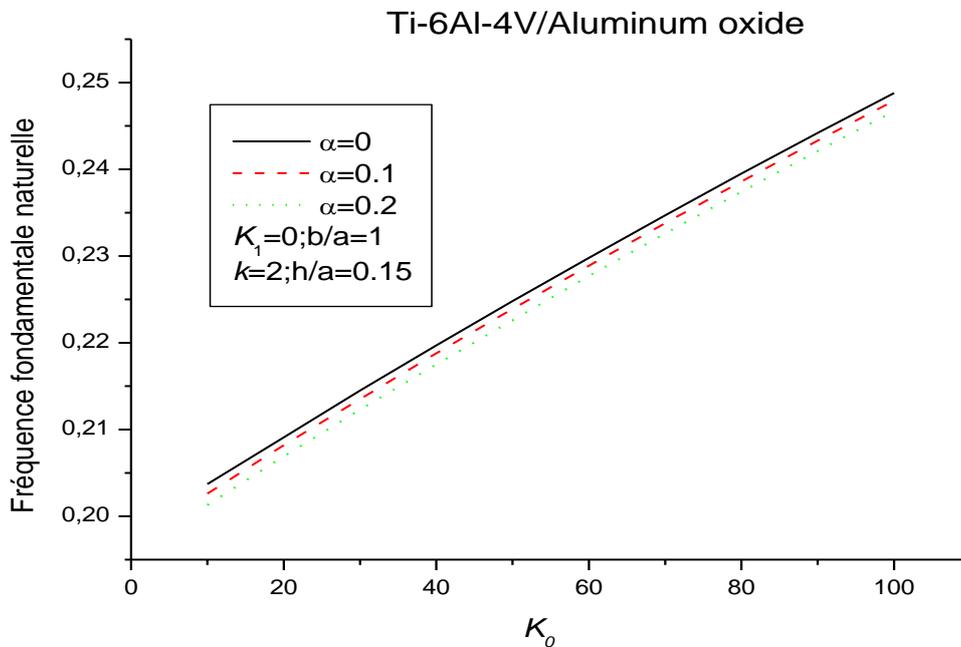


Figure V.13. Effet de porosité sur la fréquence fondamentale naturelle $\bar{\omega} = \alpha \alpha^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ d'une plaque FGM reposé sur Winkler fondation

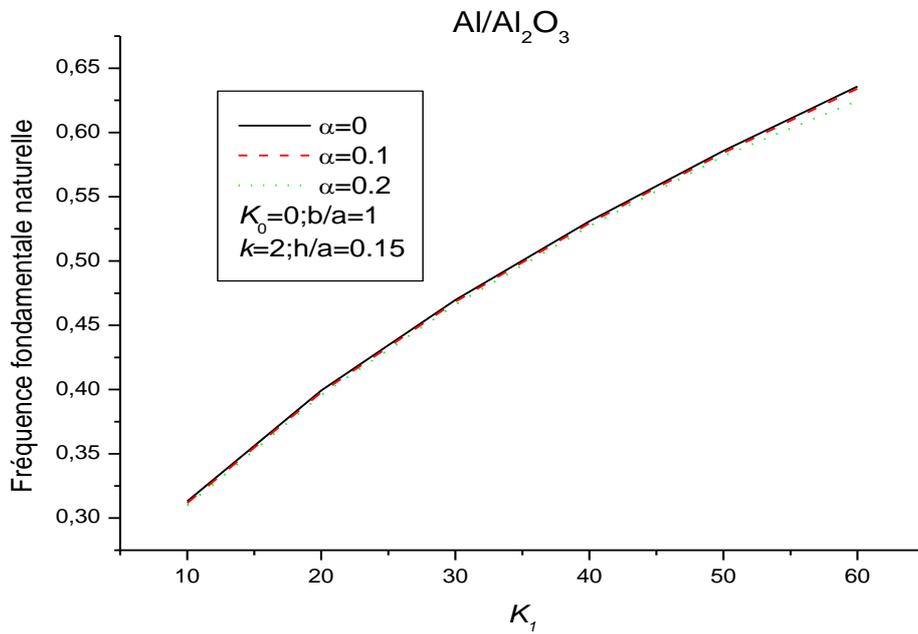


Figure V.14. Effet de porosité sur la fréquence fondamentale naturelle $\bar{\omega} = \alpha \alpha^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ d'une plaque FGM reposé sur Pasternak fondation

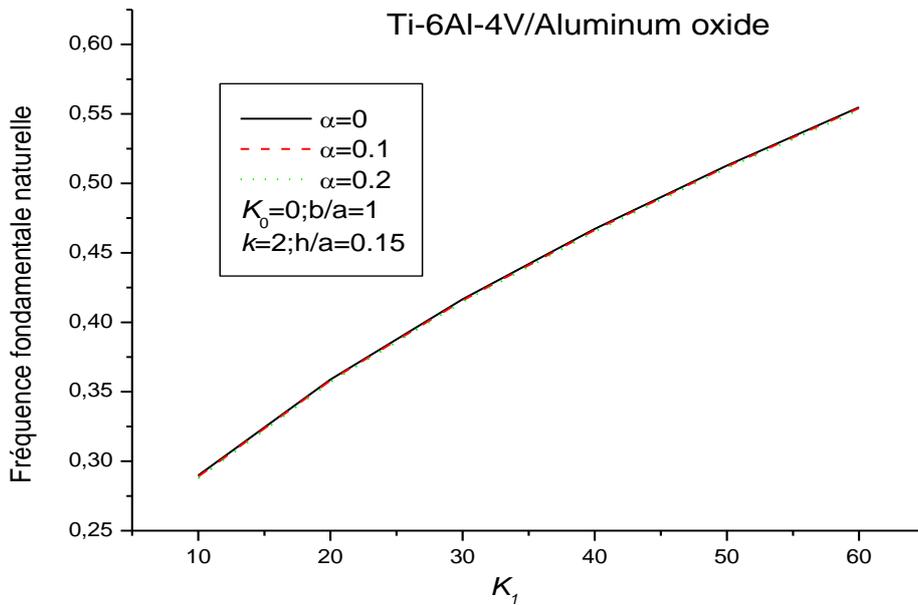


Figure V.15. Effet de porosité sur la fréquence fondamentale naturelle $\bar{\omega} = \alpha \alpha^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ d'une plaque FGM reposé sur Pasternak fondation

V.6. Conclusions :

Une étude approfondie sur l'analyse de la flexion et la vibration libre des plaques parfaites et imparfaites à gradient de propriétés reposant sur une fondation élastique à deux paramètres avec l'effet de cisaillement est présentée. Elle est basée sur la position de la surface neutre et l'utilisation de la présente théorie raffinée de déformation de cisaillement. Les propriétés du matériau sont supposées variées selon la direction de l'épaisseur de la plaque et la règle du mélange qui a été reformulée afin d'évaluer les caractéristiques des matériaux avec les phases de porosité. La méthode de Navier est utilisée pour les solutions analytiques de la plaque à gradient de propriétés avec des conditions aux limites simplement appuyées.

Les études de convergence et de validation ont été effectuées pour prouver l'exactitude de la théorie actuelle. Les résultats obtenus montrent un bon accord avec ceux qui sont disponibles dans la littérature pour des plaques modérément épaisses. Les conclusions suivantes ont été observées à partir des résultats typiques obtenus pour les différents indices de la fraction de volume, les rapports de géométrie, les rapports d'épaisseur, les paramètres de rigidité de la fondation et la fraction volumique de porosité.

- L'augmentation de la fraction volumique de porosité provoque une augmentation dans le la flèche adimensionnelle au centre.
- La fraction volumique de porosité à un effet important sur une plaque FGM mince reposées sur une fondation élastique qu' une plaque modérément épaisse.
- L'effet de la fraction volumique de porosité sur une plaque FGM reposée sur une fondation de type Winkler est plus élevé qu'une plaque reposée une fondation de type Pasternak.
- Le paramètre de cisaillement (Pasternak) a plus d'effet sur l'augmentation de la fréquence fondamentale que le paramètre Winkler.
- L'effet de l'indice de loi de puissance sur la fréquence naturelle de vibration est très intéressant.

- La fréquence fondamentale naturelle $\bar{\omega} = \alpha a^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ diminue avec l'augmentation de rapport de géométrie b/a pour une plaque FGM reposée sur une fondation élastique.
- La fréquence fondamentale naturelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ augmente avec l'augmentation du rapport d'épaisseur h/a pour une plaque FGM reposée sur une fondation élastique.
- L'augmentation de l'indice de loi de puissance augmente l'effet de la fondation élastique sur la fréquence naturelle.
- L'augmentation de l'indice de loi de puissance à un effet négligeable sur une plaque FGM reposée sur une fondation de type Winkler.
- La fraction volumique de porosité influe sur la position de l'axe neutre d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Conclusion générale et perspectives :

Les structures en matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant il est possible de modifier leur composition et leur architecture pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

Dans le cadre de ce travail, nous avons proposé une nouvelle théorie raffinée de déformation de cisaillement qui prend en considération l'effet de cisaillement transverse pour:

- L'analyse de l'effet de porosité sur le comportement statique et dynamique des plaques P-FGM.
- L'analyse de la flexion et la vibration libre des plaques FGM reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak.
- L'étude de l'influence de la fraction volumique de porosité et les paramètres de fondation sur le comportement mécanique des plaques FGM.

La théorie a pris en considération la distribution parabolique de la déformation de cisaillement transverse et satisfait la nullité des contraintes aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans d'utiliser le facteur de correction de cisaillement. Le nombre des inconnues dans la présente théorie est quatre tandis que cinq dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement. La loi du mélange modifiée couvrant les phases de porosité est utilisée pour décrire approximativement les propriétés des plaques FGM imparfaites. L'équation du mouvement pour les plaques FGM est obtenue par le principe des travaux virtuels et le principe d'Hamilton. Les propriétés du matériau sont supposées varier selon la direction de l'épaisseur de la plaque et la règle du mélange qui a été reformulée afin d'évaluer les caractéristiques des matériaux avec les phases de porosité. La méthode de Navier est utilisée pour les solutions analytiques de la plaque à gradient de propriétés avec des conditions aux limites simplement appuyées.

Toutes les études comparatives effectuées dans cette étude ont montrées que les résultats obtenus pour l'analyse d'une plaque à gradient de propriétés (FGM) sont presque identiques à ceux obtenus avec d'autres théories de déformation de cisaillement. L'effet de porosité et les

paramètres de fondation sont aussi présentés dans cette investigation sous forme numérique et graphique dans plusieurs combinaisons de matériaux FGM tels qu'Al/Al₂O₃, Al/ZrO₂ et Ti-6Al-4V/Aluminum oxide. Les conclusions suivantes ont été observées à partir des résultats typiques obtenus pour les différents indices de fraction de volume, le rapport de géométrie, le rapport d'épaisseur, les paramètres de rigidité de la fondation et le coefficient de porosité.

- La fraction volumique de porosité influe sur la position de l'axe neutre d'une plaque FGM ;
- La flèche et la fréquence fondamentale sont maximales pour une plaque FGM avec porosité ;
- La flèche d'une plaque plus riche en céramique est moins importante que celle d'une plaque plus riche en métal;
- La flèche adimensionnelle au centre augmente avec l'augmentation de la fraction volumique de porosité (a). La différence diminue à mesure que le rapport de géométrie (a / b) augmente tandis qu'elle reste constante avec l'augmentation du rapport d'épaisseur (a / h) ;
- Les paramètres de rigidité de la fondation (K_0, K_I) réduisent la contrainte longitudinale dans le plan et la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la plaque FGM ;
- La fréquence naturelle diminue avec l'augmentation de rapport de géométrie et le rapport d'épaisseur ;
- Le paramètre de cisaillement (Pasternak) a plus d'effet sur la fréquence fondamentale que le paramètre Winkler.

En perspective à ce travail, nous envisageons d'appliquer la présente théorie de forme sinusoïdale à quatre variables pour le calcul de différentes formes de structures en matériaux à gradient de propriétés sous la combinaison des différents types de chargement et des conditions aux limites en tenant compte des effets de la température et de la fraction volumique de porosité.

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Abolghasemi. 2014] Abolghasemi, S, Shaterzadeh, A.R. Rezaei, R. Thermo-mechanical buckling analysis of functionally graded plates with an elliptic cutout. *Aerospace Science and Technology*. Accepted date: 8 October 2014.
- [Aboudi. 2000] Aboudi, J. Pindera, M.J. and Arnold, S.M. Higher-order theory for functionally graded materials, in *Research and Technology 2000*, Glenn Research Center at Lewis Field, Cleveland, Ohio, 128-9, 2000.
- [Abualnour. 2015] Abualnour, M. Soltani, KH. Megueni, A. Analyse lineaire des contraintes residuelles d'un disque en materiau P-FGM. 12ème congrès de Mécanique, Casablanca (Maroc), 21-24 Avril 2015.
- [Aghelinejad. 2011] Aghelinejad, M. Zare, K. Ebrahimi, F. Rastgoo, A. Nonlinear Thermomechanical Post-Buckling Analysis of Thin Functionally Graded Annular Plates Based on Von-Karman's Plate Theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 18,319–326, 2011.
- [Ait Atmane. 2010] Ait Atmane, H. Abdelouahed, T. Ismail, M and El Abbas, A. B. Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory, *Int. J. Mech. Mater. Des*, 6(2), 113-121, 2010.
- [Ait Atmane. 2015] Ait Atmane, H. Tounsi, A. and Bernard, F. Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations. *Int. J. Mech. Mater*, 1-14, 2015.
- [Ait Yahia. 2015] Ait Yahia, S. Ait Atmane, H. Sid Ahmed Houari, M. and Tounsi, A. Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories. *Struct. Eng. Mech., Int. J*, 53(6), 1143-1165, 2015.
- [Akavci. 2014] Akavci, S.S. An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. *Compos. Struct*, 108, 667–676, (2014).
- [Akhavan. 2009] Akhavan, H. Hosseini-Hashemi, S.H. Rokni, Damavandi, Taher, H. Alibeigloo, A and Vahabi, S. H. Exact solutions for rectangular Mindlin plates under in-plane loads resting on Pasternak elastic

- foundation, Part II Freq. Anal. Comput. Mater. Sci, 44(3), 951-961, 2009.
- [Al-Basyouni. 2015] Al-Basyouni, K.S. Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position. *Compos. Struct*, 125, 621-630,2015.
- [Alibeigloo. 2011a] Alibeigloo, A. Thermoelastic solution for static deformations of functionally graded cylindrical shell bonded to thin piezoelectric layers. *Composite Structures*, 93,961–972, 2011.
- [Alibeigloo. 2011b] Alibeigloo, A. Exact solution of an FGM cylindrical panel integrated with sensor and actuator layers under thermomechanical load. *Smart Materials and Structures* 20, 035002, 2011.
- [Altenbach. 2004] Altenbach, Holm. Johannes, W. Altenbach, Wolfgang Kissing. *Mechanics of Composite Structural Elements*. Berlin, Heidelberg Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [Ambartsumian. 1969] Ambartsumian, S.A. Principal equations and correlations in different modulus theory of elasticity of anisotropic bodies. *Izvestija AN SSSR, MTT*, 3, 1969.
- [Arefi. 2016] Arefi, M. Abbasi, A. R. Vaziri, S. M. R. Two-dimensional thermoelastic analysis of FG cylindrical shell resting on the Pasternak foundation subjected to mechanical and thermal loads based on FSDT formulation. *Journal of thermal stresses*, 39, 5, 554–570. 2016.
- [Arnold. 2001] Arnold, S.M. Higher-order-theory-structural/microanalysis code (HOT-SMAC) developed, in *Research and Technology 2000*, Glenn Research Center at Lewis Field, Cleveland, Ohio, 128-9, 2001.
- [Aydogdu. 2006] Aydogdu, M. Comparison of Various Shear Deformation Theories for Bending, Buckling, and Vibration of Rectangular Symmetric Cross-ply Plate with Simply Supported Edges. *Journal of Composite Materials*, 40, 2143, 2006.
- [Bao. 1995] Bao, G. Wang, L. Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings. *Int. J. Solids Structures*, 32 (19), 2853–2871, 1995.
- [Basset, 1890] Basset, A.B. on the extension and flexure of cylindrical and spherical thin elastic shells. *Philosophical transactions of the royal society. London. Ser. A*, 181 (6) 433-480,1890.
- [Becker. 2000] Becker, T. L. J. Cannon, R. M. Ritchie, R.O. An approximate method for residual stress calculation in functionally graded materials. *Mechanics of Materials*, 32, 85-97, 2000.

- [Benyoucef. 2010] Benyoucef, S. Mechab, I. Tounsi, A. Fekrar, A. Ait Atmane, H. and Adda Bedia, El Abbas. Bending of thick functionally graded plates resting on winkler–pasternak elastic foundations. *Mechanics of Composite Materials*, 46, (4), 2010.
- [Bennoun. 2016] Bennoun, M. Houari, M.S.A. and Tounsi, A. A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates. *Mech. Adv. Mater. Struct*, 23(4), 423-431, 2016.
- [Bhatt. 2000] Bhatt, R.T. Feasibility of actively cooled silicon nitride airfoil for turbine applications demonstrated, in *Research and Technology 2000*, Glenn Research Center at Lewis Field, Cleveland, Ohio, 34, 2000.
- [Bodaghi. 2011] Bodaghi, M. and Saidi, A.R. Stability analysis of functionally graded rectangular plates under nonlinearly varying in-plane loading resting on elastic foundation. *Arch. Appl. Mech*, 81(6), 765-780, 2011.
- [Bourada. 2015] Bourada, M., Kaci, A. Houari, M.S.A. and Tounsi, A. A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams. *Steel Compos. Struct, Int. J*, 18(2), 409-423, 2015.
- [Brovarone. 2001] Brovarone, Vitale, C. Verne, E. Krajewski, A and Ravagliolo, A. Graded coatings on ceramic substrates for biomedical applications, *Journal of the European Ceramic Society*, Elsevier Science Limited, 21, 2855-62, 2001.
- [Buczowski. 2001] Buczowski, R. Torbacki, W. Finite element modeling of thick plates on two-parameter elastic foundation. *Int J Numer Anal Meth Geomech*, 25, 1409–1427, 2001.
- [Carlos. 1999] Carlos, A. Mota, Soares, Cristóvão, M. Mota, Soares, Manuel, J.M. Freitas. *Mechanics of Composite Materials and Structures*. Dordrecht; Boston, MA : Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [Carpinteri. 2006] Carpinteri, A, Nicola, P. Thermal loading in multi-layered and/or functionally graded materials: Residual stress field, delamination, fatigue and related size effects. *International Journal of Solids and Structures*, 43, 828–841, 2006.
- [Carrera. 1996] Carrera E. C^0 Reissner–Mindlin multilayered plate elements including zig-zag and interlaminar stress continuity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, 1797–1820, 1996.
- [Carrera. 2010] Carrera, E. Brischetto, S. Cinefra, M. and Soave, M. Refined and advanced models for multilayered plates and shells embedding functionally graded material layers. *Mech. Adv. Mater. Struct*, 17(8), 603-621, 2010.

- [Carrera. 2011] Carrera, E. Brischetto, S. Cinefra, M. and Soave, M. Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Compos Part B: Eng.*, 42(2), 123-133, 2011.
- [Cheng. 2000] Cheng, Z. Q. Batra, R. C. Deflection relationships between the homogeneous Kirchhoff plate theory and different functionally graded plate theories. *Arch Mech*, 52, 143–58, 2000.
- [Chi. 2003] Chi. Shyang-ho, Chung Yen-Ling. Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*, 70, 10,1227–1243, 2003.
- [Cho. 1993] Cho, M. and Parmerter, R. R. efficient higher order composite plate theory for general lamination configurations. *AIAA journal*, 31 (7), 1299-1306, 1993.
- [Cho. 2001] Cho M, Kim J S. Higher-order zig-zag theory for laminated composites with multiple delaminations. *Journal of Applied Mechanics*, 68, 869–877, 2001.
- [Cho. 2004] Cho, K-M. Choi, I-D. Park, I. Thermal properties and fracture behavior of compositionally graded Al-SiCp composites. *Designing, Processing and Properties of Advanced Engineering Materials. Mater. Sci. Forum*, 449:621-624, 2004.
- [Chu. 1999] Chu, C. Zhu, J. Yin, Z. and Wang, S. Hydroxyapatite-Ti functionally graded biomaterial fabricated by powder metallurgy, *Materials Science and Engineering*, A217, 95-100, Elsevier Science Limited, 1999.
- [Cinefra. 2012] Cinefra, M. Carrera, E. Della Croce, L. and Chinosi, C. Refined shell elements for the analysis of functionally graded structures. *Compos. Struct*, 94(2), 415-422, 2012.
- [Darabseh. 2013] Darabseh, T. Alshaer, B. Thermoelastic Analysis of 2D-FGM Hollow Circular Cylinder with Finite Length by Finite Element Method. *Int. J. Comp. Appl. Tech*, 46,1 75–186,2013.
- [Delale. 1983] Delale, F. Erdogan, F. The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 50, 609 –614, 1983.
- [Delfosse. 1992] Delfosse, D. Kunzi, H.-U. Ilschner, B. Experimental determination of residual stresses with a one dimensional gradient of composition. *Acta Metall. Mater.* 40, 2219-2224, 1992.
- [Den Hartog. 1952] Den Hartog, J. P. *Advanced Strength of Materials*. 1st ed., Dover, New York, 1952.
- [Di Sciuva. 1985] Di Sciuva, M. Development of an anisotropic, multilayered, shear-deformable rectangular plate element. *Computers and structures*, 21(4), 78-796, 1985.

- [Di Sciuva. 1986] Di Sciuva M. Bending, vibration and buckling of simply supported thick multilayered orthotropic plates: an evaluation of a new displacement model. *Journal of Sound and Vibration*, 105(3), 425–442, 1986.
- [Dozio. 2014] Dozio, L. Exact free vibration analysis of Lévy FGM plates with higher-order shear and normal deformation theories. *Compos. Struct*, 111(1), 415-425, 2014.
- [Dumont. 2001] Dumont, A. L. Jean-Pierre, Bonnet. Thierry, Chertier. and Jose, M.F. Ferreira. MoSi₂/Al₂O₃ FGM : elaboration by tape casting and SHS. *Journal of the European Ceramic Society*, 21, 2353-2360, 2001.
- [El-Wazery. 2012] El-Wazery, M. S. A. R, El-Desouky. O. A, Hamed. N. A, Mansour. and Ahmed. A. Hassan. Preparation and Mechanical Properties of Zirconia / Nickel Functionally Graded materials. *Arab Journal of Nuclear Sciences and Applications*, 45(2), 435-446, 2012.
- [Fallah. 2013] Fallah, A. Aghdam, M.M. and Kargarnovin, M.H. Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates on elastic foundation using the extended Kantorovich method. *Arch. Appl. Mech.*, 83(2), 177-191, 2013.
- [Giannakopoulos. 1995] Giannakopoulos, A. E. Suresh, S. Finot, M. and Olsson, M. Elastoplastic Analysis of Thermal Cycling: Layered Materials with Compositional Gradients. *Acta Metallurgica et Materialia*, 43(4),1335-1354, 1995.
- [Grujicic. 1998] Grujicic, M. Zhao, H. Optimization of stainless steel/alumina functionally graded material for reduction of damage induced by thermal residual stresses. *Mater. Sci. Eng*, A252, 117-132, 1998.
- [Hadji. 2015a] Hadji, L. and Adda Bedia, E.A. Influence of the porosities on the free vibration of FGM beams. *Wind Struct*, 21(3), 273-287, 2015.
- [Hadji. 2015b] Hadji, L. Hassaine Daouadji, T. and Adda Bedia, E.A. A refined exponential shear deformation theory for free vibration of FGM beam with porosities. *Geomech. Eng*, 9(3), 361-372, 2015.
- [Hasani Baferani. 2011] Hasani Baferani, A. Saidi, A.R. and Ehteshami, H. Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation. *Compos. Struct*, 93(7), 1842-1853, 2011.
- [Hashmi. 2014] Hashmi, Saleem. Gilmar, Ferreira, Batalha. Van Tyne, C. J. Yilbas, B. S . *Comprehensive materials processing*. Livre électronique, Oxford, Walltham, MA : Elsevier, 2014.
- [Hassaine Daouadji. 2012] Hassaine Daouadji, T. Tounsi, A. Hadji, L. Hadj, H.A. and El Abbes, A.B. A theoretical analysis for static and dynamic behavior

- of functionally graded plates. *Mater. Phys. Mech*, 14, 110-128. 2012.
- [Hencky. 1947] Hencky, H. Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten. *Ingenieur-Archiv*, 16 (1), 72–76, 1947.
- [Hetenyi. 1966] Hetenyi, M., *Beams and Plates on Elastic Foundations and Related Problems*, *Appl. Mech. Rev*, 19, 95–102, 1966.
- [Hildebrand. 1949] Hildebrand, F.B. Reissner, E and Thomas, G. B. Notes on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells. NASA TN-1833. Washington, DC, 1949.
- [Hill. 1965] Hill, R. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13 (4), 213-222, 1965.
- [Hirai. 1996] Hirai, T. Functional gradient materials, in *Materials Science and Technology-A Comprehensive Treatment*, (eds R.W. Cahn et al.), 17B, Processing of Ceramics, Part II, VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim and Cambridge, 293-363, 1996).
- [Hopkinson. 2006] Hopkinson, N. Hague, R.J.M. and Dickens, P.M. *Rapid Manufacturing: An Industrial Revolution for the Digital Age*. John Wiley and Sons, Ltd, 2006.
- [Hosseini-Hashemi. 2010] Hosseini-Hashemi, Sh. Rokni Damavandi Taher, H. Akhavan, H. Omid, M. Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory. *Applied Mathematical Modelling*, 34, 1276–1291, 2010.
- [Hosseini-Hashemi. 2011a] Hosseini-Hashemi, S. Fadaee, M. and Atashipour, S.R. A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates. *Int. J. Mech. Sci*, 53(1), 11-22, 2011.
- [Hosseini-Hashemi. 2011b] Hosseini-Hashemi, S. Fadaee, M. and Taher, H.R.D. Exact solutions for free flexural vibration of Lévy-type rectangular thick plates via third-order shear deformation plate theory. *Appl. Math. Model*, 35(2), 708-727, 2011.
- [Hosseini Kordkheili. 2007] Hosseini Kordkheili, S. A. Naghdabadi. Geometrically non-linear thermoelastic analysis of functionally graded shells using finite element method. *International journal for numerical methods in engineering* *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 72, 964–986, 2007.
- [Huang. 2008] Huang, Z.Y. Lu, C.F. and Chen, W.Q. Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations. *Compos. Struct*, 85(2), 95-104, 2008.
- [Jamaludin. 2013] Jamaludin, S N S. Faizal, Mustapha. Dewan, Muhammad Nuruzzaman and Shah Nor Basri. A review on the fabrication

techniques of functionally graded ceramic-metallic materials in advanced composites. *Scientific Research and Essays*, 8(21), 828-840, 4 June 2013.

- [Kanaun. 2008] Kanaun, S. K. Levin, V. M. Self-consistent methods for composites. *Solid mechanics and its applications*, v. 148, 150, Dordrecht : Springer, 2008.
- [Karama. 1998] Karama, M. Abou Harb, B. Mistou, S. & Caperaa, S. Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model. *Composite Part B*, 29,3, 223-234, 1998.
- [Karama. 2003] Karama, M. Afaq, K.S. and Mistou, S. Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *Int. J. Solids Struct*, 40(6), 1525-1546, 2003.
- [Katayama.2011] Katayama, T. Sohei, Sukenaga. Noritaka, Saito. Hajime, Kagata. and Kunihiro, Nakashima. Fabricated of Al₂O₃-W functionally graded materials by slip casting method, *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 18, 2011.
- [Katsikadelis. 1984] Katsikadelis, J. T. Armenakas, A. E. Plates on elastic foundation by BIE method. *J Eng Mech*, 110(7), 1086–105, 1984.
- [Kiani. 2011] Kiani, Y. Akbarzadeh, A.H. Chen, Z.T. and Eslami, M.R. Static and dynamic analysis of an FGM doubly curved panel resting on the Pasternak-type elastic foundation. *Compos. Struct*, 94(8), 2474-2484, 2011.
- [Kiebeck. 2003] Kiebeck, B. Neubrand, A. Riedel, H. Processing techniques for functionally graded materials. *Mat. Sci. Eng, A* 362,81-105, 2003.
- [Kobayashi. 1989] Kobayashi, H. Sonoda, K. Rectangular plates on elastic foundations. *Int J Mech Sci*, 31, 679–692, 1989.
- [Koizumi. 1997] Koizumi, M. FGM activities in Japan. *Compos. Part B*, 28(1-2), 1-4, 1997.
- [Kumar. 2002] Kumar, Roop R. and Marino, S. Functionally graded coatings of HA-G-Ti composites and their in vivo studies, *Materials Science and Engineering*, A334, 156-62, Elsevier Science Limited, 2002.
- [Kyung-Su. 2006] Kyung-Su, Na. Ji-Hwan, Kim. Three-dimensional thermomechanical buckling analysis for functionally graded composite plates. *Composite Structures*, 73, 413–422, 2006.
- [Lam. 2000] Lam, K.Y. Wang, C.M. He, X.Q. Canonical exact solutions for levy-plates on two-coefficient foundation using green's functions. *Eng. Struct*, 22, 364–378, 2000.

- [Lam. 2002] Lam, K.Y. Wang, C.M. and He, X.Q. Canonical exact solutions for Levy-plates on two parameter foundation using Green's functions. *Eng. Struct*, 22(4), 364-378, 2002.
- [Larson. 2008] Larson, R.A. BSME. MSME. A Novel Method For Characterizing the Impact Response of Functionally Graded Plates. A Novel Method For Characterizing the Impact Response of Functionally Graded Plates. Graduate School of Engineering and Management Air Force Institute of Technology, September 2008.
- [Li. 2003] Li, JQ. Zeng, XR. Tang, JN. Xiao, P. Fabrication and thermal properties of an YSZ-NiCr joint with an interlayer of YSZ-NiCr functionally graded material. *J. Eur. Ceram. Soc*, 23,1847-1853, 2003.
- [Li. 2007] Li, X.-F. Fan, T.-Y. Dynamic analysis of a crack in a functionally graded material sandwiched between two elastic layers under anti-plane loading. *Compos. Struct*, 79, 211–219, 2007.
- [Leissa. 1973] Leissa, A.W. The free vibration of rectangular plates. *J. Sound Vib*, 31(3), 257–293, 1973.
- [Liu. 2000] Liu, F. L. Rectangular thick plates on Winkler foundation: differential quadrature element solution. *Int J Solids Struct*, 37, 1743–63, 2000.
- [Liu. 1999] Liu, F.L. Liew, K.M. Analysis of vibrating thick rectangular plates with mixed boundary constraints using differential quadrature element method. *J. Sound Vib*, 225(5), 915–934, 1999.
- [Liu. 2011] Liu, Y. A Refined Shear Deformation Plate Theory. *Int. J. for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 12, 141-149, 2011.
- [Loy. 1999] Loy, C.T. Lam, K.Y. and Reddy, J.N. Vibration of functionally graded cylindrical shells. *Int. J. Mech. Sic*, 41(3), 309-324, 1999.
- [Ma. 2012] Ma, LS. Lee, D. W. Exact solutions for nonlinear static responses of a shear deformable FGM beam under an in-plane thermal loading. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 31, 13-20, 2012.
- [Mahi. 2015] Mahi, A. Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates. *Appl. Math. Model*, 39(9), 2489-2508, 2015.
- [Markworth et Saunders. 1995] Markworth, Alan. J. Saunders, James. H. A model of structure optimization for a functionally graded material. *Materials Letters*, 22 (1–2), 103-107, 1995.

- [Matsunaga. 2000] Matsunaga, H. Vibration and stability of thick plates on elastic foundations. *J. Eng. Mech*, 126(1), 27-34, 2000.
- [Matsunaga. 2008] Matsunaga, H. Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory, *Compos. Struct*, 82, 499–512, 2008.
- [Mechab. 2010] Mechab, Ismail . Ait Atmane, Hassen. Tounsi, Abdlouahed . Hichem Abdesselem Belhadj, Adda Bedia El Abbas. A two variable refined plate theory for the bending analysis of functionally graded plates. *Acta Mechanica Sinica*, 26 (6), 941–949, 2010.
- [Miyamoto. 1999] Miyamoto, Y. Kaysser, W.A. Rabin, B.H. Kawasaki, A. and ford, R.G. functionally graded Material, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999.
- [Mojdehi. 2011] Mojdehi, R. Darvizeh, A. Basti, A. Rajabi, H. Three dimensional static and dynamic analysis of thick functionally graded plates by the meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35, 1168–1180, 2011.
- [Mori et Tanaka. 1973] Mori, T. Tanaka, K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21 (5), 571-574, 1973.
- [Murakami. 1986] Murakami, H. laminate composite plate theory with improved in plane responses. *J applied machanics*, 53, 661- 666,1986.
- [Murthy. 1981] Murthy, M, V,V. An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates. *NASA technical paper*, 1-37, 1981.
- [Nagino. 2008] Nagino, H. Mikami, T and Mizusawa, T. Three-dimensional free vibration analysis of isotropic rectangular plates using the B-spline Ritz method. *J. Sound Vib*, 317(1), 329-353, 2008.
- [Neves. 2011] Neves, A.M.A. Ferreira, A.J.M. Carrera, E. Roque, C.M.C. Cinefra, M. Jorge, R.M.N. and Soares, C.M.M. Bending of FGM plates by a sinusoidal plate formulation and collocation with radial basis functions. *Mech. Res. Commun*, 38(5), 368-371, 2011.
- [Neves. 2012a] Neves, A.M.A. Ferreira, A.J.M. Carrera, E. Cinefra, M. Roque, C.M.C. Jorge, R.M.N. and Soares C.M.M. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos. Struct*, 94(5), 1814-1825, 2012.
- [Neves. 2012b] Neves, A.M.A. Ferreira, A.J.M. Carrera, E. Roque, C.M.C. Cinefra, M. Soares, C.M.M. and Jorge, R.M.N. A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos. Part B*, 43(2), 711-725, 2012.

- [Neves. 2013] Neves, A.M.A. Ferreira, A.J.M. Carrera, E., Cinefra, M. Roque, C.M.C. Jorge, R.M.N. and Soares, C.M.M. Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. *Compos. Part B: Eng*, 44(1), 657-674, 2013.
- [Nguyen. 2004] Nguyen, Viet.Tung. Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques. Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées, 2004.
- [Nguyen. 2013] Nguyen, D.D. and Pham, H.C. Nonlinear postbuckling of symmetric S-FGM plates resting on elastic foundations using higher order shear deformation plate theory in thermal environments. *Compos. Struct*, 100, 566-574, 2013.
- [Noda. 1991] Noda, N. Thermal stress in materials with temperature- dependent properties. *Applied Mechanics Reviews*, 44, 383–397, 1991.
- [Ochoa. 1992] Ochoa, O.O., Reddy, J.N. Finite Element Analysis of Composite Laminates. *Solid mechanics and its applications*. Dordrecht : Springer, 1992.
- [Ozturk. 1996] Ozturk, M. Erdogan, F. Axisymmetric crack problem in bonded materials with a graded interfacial region. *Int. J. Solids Struct*, 33,193–219, 1996.
- [Park. 2006] Park, J. S. Kim, J. H. Thermal postbuckling and vibration analyses of functionally graded plates. *Journal of Sound and Vibration*, 289, 77–93, 2006
- [Pasternak. 1954] Pasternak, P.L. On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants. *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu I Arkhitekture Moscow USSR*, 1-56. (in Russian),1954.
- [Pindera. 1994] Pindera, M.J. Arnold, S.M. Aboudi, J. and Hui, D. Use of composite in functionnaly graded materials. *Compos. Eng*, 4(1), 1-145, 1994.
- [Prakash. 2009] Prakash, T. Singha, M.K. and Ganapathi, M. Influence of neutral surface position on the nonlinear stability behavior of functionally graded plates. *Comput. Mech*, 43(3), 341-350, 2009.
- [Praveen. 1998] Praveen, G. N. and Reddy, J. N. Nonlinear Transient Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Ceramic-Metal Plates. *International Journal of Solids and Structures*, 35(33), 4457-4476, 1998.
- [Qian. 2004] Qian, L.F. Batra, R.C. and Chen, L.M. Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless

- local Petrov-Galerkin method. *Composites: Part B*, 35(6), 685-697, 2004.
- [Rabin. 1998] Rabin, B.H. Williamson, R.L. Bruck, H.A. Wang, X.-L. et al. Residual strains in Al₂O₃ joint bonded with a composition interlayer: experimental measurements and FEM analysis. *J. Amer. Cer. Soc.*, 81, 1541-1549, 1998.
- [Ravikiran. 2008] Ravikiran, K. Kashif, A. and Ganesan, G. Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory. *Appl. Math. Model*, 32 (12), 2509-2525, 2008.
- [Ramachandran. 2015] Ramachandran, T. Kokula, Krishna. Hari, K. Thiruvengadam, B. Daniel, James. Proceedings of the International Conference on Systems, Science, Control, communication, Engineering and Technology, 10-11, Karpagam Institute of Technology, Coimbatore, 2015.
- [Ramirez. 2006] Ramirez Fernando. Heyliger Paul R. Pan Ernian. Static analysis of functionally graded elastic anisotropic plates using a discrete layer approach. *Composites: Part B* 37, 10–20, 2006.
- [Ravichandran. 1995] Ravichandran, K. S. Thermal Residual Stresses in a Functionally Graded Material System. *Materials Science and Engineering*, 201,269-276, 1995.
- [Reddy. 1984] Reddy, J.N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J. Appl. Mech*, 51(4), 745-752, 1984.
- [Reddy. 2000] Reddy, J.N. Analysis of functionally graded plates. *Int. J. Numer. Method. Eng*, 47(1-3), 663-684, 2000.
- [Reddy. 2007] Reddy, J. N. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, Second Edition. CRC press, Taylor & francis group, 2007.
- [Robbins. 1993] Robbins D. H, Reddy J. N. Modelling of thick composites using a layerwise laminate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, 655–677, 1993.
- [Saiyathibrahim. 2015] Saiyathibrahim, A. Mohamed, Nazirudeen, S.S. Dhanapal, P. Processing techniques of functionally graded materials- Areview. International conference on systems, sciences, control, communication, enginnering and technology, 2015.
- [Samsam Shariat, 2006] Samsam Shariat, B. A. and Eslami, M. R. Thermomechanical Stability of Imperfect Functionally Graded Plates Based on the Third-Order Theory. *AIAA journal* Vol, 44, 12, December 2006.
- [Sankar. 2001] Sankar, B.V. An elasticity solution for FGBs. *Compos. Sci. Tech*, 61, 689–696, 2001.

- [Shen. 2000] Shen, H.S. Nonlinear bending of simply supported rectangular Reissner– Mindlin plates under transverse and in-plane loads and resting on elastic foundations. *Eng Struct*, 22, 847–56, 2000.
- [Shen. 2002] Shen, H. S. Postbuckling Analysis of Axially-Loaded Functionally Graded Cylindrical Shells in Thermal Environments. *Composite Science and Technology*, 62,977-987, 2002.
- [Shi. 2007] Shi, G. A new simple third-order shear deformation theory of plates. *Int. J. Solids Struct*, 44, 4299-4417. 2007
- [Shu. 1994] Shu, X. Sun, L. Thermomechanical buckling of laminated composite plates with higher-order transverse shear deformation. *Comput. Struct*, 53, 1-7, 1994.
- [Shufrin. 2005] Shufrin, I and Eisenberger, M. Stability and vibration of shear deformable plates–first order and higher order analyses. *Int. J. Solid. Struct*, 42(3), 1225-1251, 2005.
- [Sih. 1995] Sih, G C. Carpinteri, A. Surace, G . *Advanced Technology for Design and Fabrication of Composite Materials and Structures : Applications to the Automotive, Marine, Aerospace and Construction Industry. Engineering Applications of Fracture Mechanics*, Dordrecht : Springer Netherlands, 1995.
- [Singha. 2011] Singha, M. K. Prakash, T. Ganapathi, M. Finite element analysis of functionally graded plates under transverse load. *Finite Elements in Analysis and Design*,47, 453–460, 2011.
- [Seide. 1980] Seide, P. An improved approximation theory for the bending of laminated plates. In *mechanics today*, 5, S. Nemat-Nasser (ed.), pergamon Press, New York, 451-466, 1980.
- [Sepahi. 2010] Sepahi, O. Forouzan, M.R. and Malekzadeh, P. Large deflection analysis of thermo-mechanicalloaded annular FGM plates on nonlinear elastic foundation via DQM. *Compos. Struct*, 92(10), 2369-2378, 2010.
- [Sid Ahmed Houari. 2013] Sid Ahmed Houari, M. Tounsi, A. and Anwar Bég, O. Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory. *Int. J. Mech. Sci*, 76, 102-111, 2013.
- [Soldatos. 1992] Soldatos, K. a general laminated plate theory accounting for continuity of displacements and transverse shear stresses at material interfaces. *Composite structures*, 20, 195-211, 1992.
- [Swift. 1974] Swift, G.W. and Heller, R. A. Layered beam analysis. *J. Engng, Mech, Div, ASCE*, 100, 267-282, 1974.

- [Tanigawa. 1995] Tanigawa, Y. Some basic thermoplastic problems for nonhomogeneous structural materials. *Applied Mechanics Reviews*, 48, 377–389, 1995.
- [Thai. 2011] Thai, H.T. and Choi, D.H. A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation. *Compos. Sci.Technol.*, 71(16), 1850-1858, 2011.
- [Thai. 2012] Thai, H.T. and Choi, D.H. A refined shear deformation theory for free vibration of functionally graded plates on elastic foundation. *Composites: Part B*, 43(5), 2335-2347, 2012.
- [Thai. 2014] Thai, H.T. and Choi, D.H. Zeroth-order shear deformation theory for functionally graded plates resting on elastic foundation. *Int. J. Mech. Sci.*, 78, 35-43, 2014.
- [Timoshenko. 1961] Timoshenko, S. P. and Gere J. M. *Theory of Elastic Stability*. 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1961.
- [Toledano. 1987] Toledano A, Murakami H. A high-order laminated plate theory with improved in-plane responses. *International Journal of Solids and Structures*, 23(1), 111–131, 1987.
- [Touratier. 1991] Touratier, M. An efficient standard plate theory. *Engng Sci*, 29, 8, 901-916, 1991.
- [Trung. 2008] Trung, K. N. Sab, K. Bonnet, G. First order shear deformation plate models for Functionally graded materials. *Composite Structures*, 83, 25-36, 2008.
- [Vaz. 2016] Vaz, M. A. and Bianchini, P. L. Thermomechanical initial post buckling of Timoshenko's beam on elastic foundations. *Journal of thermal stresses*, 39, 1, 44–56, 2016.
- [Vel. 2002] Vel, S. S. and Batra R. C. Exact Solution for Thermoelastic Deformations of Functionally Graded Thick Rectangular Plates. *AIAA Journal*, 40(7), 1421-1433, 2002.
- [Vel. 2004] Vel, S.S. and Batra, R.C. Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *J. Sound Vib.*, 272(3), 703-730, 2004.
- [Watari. 2003] Watari, F. Kondo, H. Matsuo, S. Miyao, R. Yokoyama, A. Omori, M. Hirai, T. Tamura, Y. Uoa, M. Ohara, N. Kawasaki, T. Development of functionally graded implant and dental post, for bio-medical application. *Mater. Sci. Forum*, 423-425:321-326, 2003.
- [Wattanasakulpong. 2012] Wattanasakulpong, N. Prusty, B.G. Kelly, D.W. and Hoffman, M. Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation. *Mater. Des*, 36, 182-190, 2012.

- [Wattanasakulpong. 2014] Wattanasakulpong, N. and Ungbhakorn, V. Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities. *Aerosp. Sci. Technol*, 32(1), 111-120, 2014.
- [Werner. 1999] Werner, H. A three-dimensional solution for rectangular plate bending free of transversal normal stresses. *Numer. Method .Eng*, 15(4), 295-302, 1999.
- [Woo. 2003] Woo, J. Meguid, S. A. and Liew, K. M. Thermomechanical postbuckling analysis of functionally graded plates and shallow cylindrical shells. *Acta Mechanica*, 165, 99–115, 2003
- [Wu. 2005] Wu, AH. Cao, WB. Ge, CC. Li, JE. Kawasaki, A. Fabrication and characteristics of plasma facing SiC/C functionally graded composite material. *Mater. Chem. Phys*, 91(2-3), 545-550, 2005.
- [Xian. 2010] Xian-Fang Li · Bao-LinWang · Jie-Cai Han. A higher-order theory for static and dynamic analyses of functionally graded beams. *Arch Appl Mech*, 80, 1197–1212, 2010.
- [Xiang. 1994] Xiang, Y. Wang, C.M and Kitipornchai S. Exact vibration solution for initially stressed Mindlin plates on Pasternak foundation. *Int. J. Mech. Sci*, 36(4), 311-316, 1994.
- [Yang. 2001] Yang, J. and Shen, H.S. Dynamic Response of Initially Stressed Functionally Graded Rectangular Thin Plates. *Composite Structures*, 54,497-508, 2001.
- [Yang. 2006] Yang, J. Liew, K. M. and Kitipornchai, S. Imperfection Sensitivity of the Post-Buckling Behavior of Higher-Order Shear Deformable Functionally Graded Plates. *International Journal of Solids and Structures*, 43, 5247-5266, 2006.
- [Zhao. 2009] Zhao, X. Lee, Y. Y. Liew, K. M., Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *J. Sound Vib*, 319, 918–939, 2009.
- [Zhou. 2002] Zhou, D. Cheung, Y. K. Au, F.T.K. Lo, S.H. Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method, *Int. J. Solids Struct*, 39, 6339–6353, 2002.
- [Zhou. 2004] Zhou, D. Cheung, Y.K. Lo, S.H and Au, F.T.K. Three-dimensional vibration analysis of rectangular thick plates on Pasternak foundations. *Int. J. Numer. Meth. Eng*, 59(10), 1313-1334, 2004.
- [Zhou. 2011] Zhou, Feng-xi, Li, Shi-rong, Lai, Yuan-ming. Three-dimensional analysis for transient coupled thermoelastic response of a functionally graded rectangular plate. *Journal of Sound and Vibration*, 330, 3990–4001, 2011.

- [Zhu. 2001] Zhu, J. Lai, Z. Yin, Z. Jeon, J. and Lee, S. Fabrication of ZrO₂-NiCr functionally graded material by powder metallurgy. *Mater. Chem. Phys.*, 68(1-3), 130-135, 2001.
- [Zenkour. 2009] Zenkour, A.M. Mashat, D.S. and Elsiba, K.A. Bending analysis of functionally graded plates in the context of different theories of thermoelasticity. *Math. Prob. Eng.*, 962351, 2009.
- [Zhang. 2008] Zhang, D.G. and Zhou, Y.H. A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface. *Comput. Mater. Sci.*, 44(2), 716-720, 2008.