



**Université  
Hassiba Benbouali, Chlef**

**Faculté de Technologie  
Département de Génie Mécanique**

**Domaine : Sciences et Techniques, Filière : Génie mécanique**

**2<sup>ème</sup> année licence (LMD)**

**Polycopié de la matière :**

---

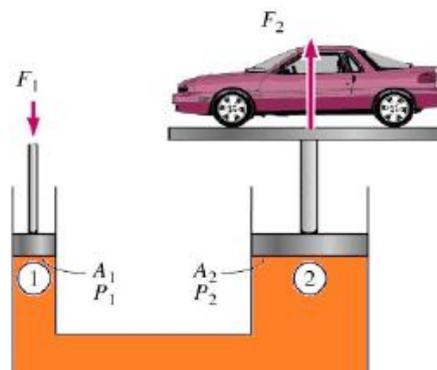
# **MECANIQUE DES FLUIDES I**

---

## **Cours**

*Fait par :*

**Dr. M'hamed BERIACHE (M.C.B)**



**2016**

# Avant-propos

Ce polycopié répond au canevas ministériel de cours de Mécanique des Fluides I enseigné en deuxième année S3\_Licence LMD aux universités algériennes. Il constitue une introduction à la mécanique des fluides d'une durée d'un semestre. Nous l'avons conçu comme un document de référence pour les étudiants de génie mécanique, qui doivent connaître les classifications et les concepts les plus basiques de la mécanique des fluides. De par son contenu, il peut s'avérer utile pour les étudiants d'autres branches du génie.

Ce manuel couvre les différents aspects de la mécanique des fluides dans un ordre classique. Les chapitres s'enchainent et forment un tout. On traite au chapitre 1 les propriétés des fluides et au chapitre 2, de l'hydrostatique. Le chapitre 3 aborde la dynamique des fluides parfaits incompressibles. Les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, sont bien illustrées dans cette partie de ce document, permettent d'aborder d'un point de vue global, les problèmes courants de la Mécanique des Fluides appliquée. Le chapitre 4 donne une initiation à l'analyse dimensionnelle ensuite il présente les différents régimes d'écoulement ainsi le calcul des pertes de charge linéaires et les pertes de charges singulières.

La rédaction de ce polycopié est le fruit de lecture de nombreux ouvrages classiques et quelques documents électroniques, tous disponibles à la bibliothèque ainsi que sur internet. J'espère que ce polycopié constituera un support utile pour nos étudiants.

M'hamed BERIACHE

Chlef, le 20 novembre 2016

## TABLE DES MATIERES

<b>CHAPITRE 01</b>	<b>Propriétés des fluides</b>	<b>Page</b>
1.1	Introduction .....	01
1.2	Définitions .....	02
1.3	Fluide parfait .....	03
1.4	Fluide réel .....	03
1.5	Fluide incompressible .....	04
1.6	Fluide compressible .....	04
1.7	Le modèle du milieu continu .....	04
1.8	Système d'unité .....	04
1.9	Les propriétés physiques des fluides .....	05
1.9.1	La masse volumique .....	05
1.9.2	Le poids volumique .....	05
1.9.3	La densité .....	06
1.9.4	Le volume massique .....	06
1.9.5	La viscosité .....	06
1.10	La tension de surface d'un fluide .....	08
1.11	La différence de pression à l'interface .....	09
<b>CHAPITRE 02</b>	<b>Statique des fluides</b>	<b>Page</b>
2.1	Introduction .....	10
2.2	Notion de pression en un point d'un fluide .....	10
2.3	Principe fondamental de la statique des fluides .....	12
2.4	Equilibre au sein d'un fluide .....	13
2.5	Cas des fluides incompressibles .....	14
2.5.1	Loi de l'hydrostatique .....	14
2.5.2	Théorème de Pascal .....	15
2.5.3	Application de la loi de Pascal .....	17
2.6	Poussée d'Archimède .....	18
2.7	Mesure de pression .....	19
2.7.1	Le manomètre .....	19
2.7.2	Le baromètre et la pression atmosphérique .....	20
2.8.	Forces hydrostatiques sur les parois .....	21
2.8.1	Paroi plane horizontale .....	22
2.8.2	Paroi plane verticale .....	23
2.8.3	Paroi plane inclinée .....	24
2.9	Centres de gravité et moments d'inertie de quelques surfaces usuelles .....	27

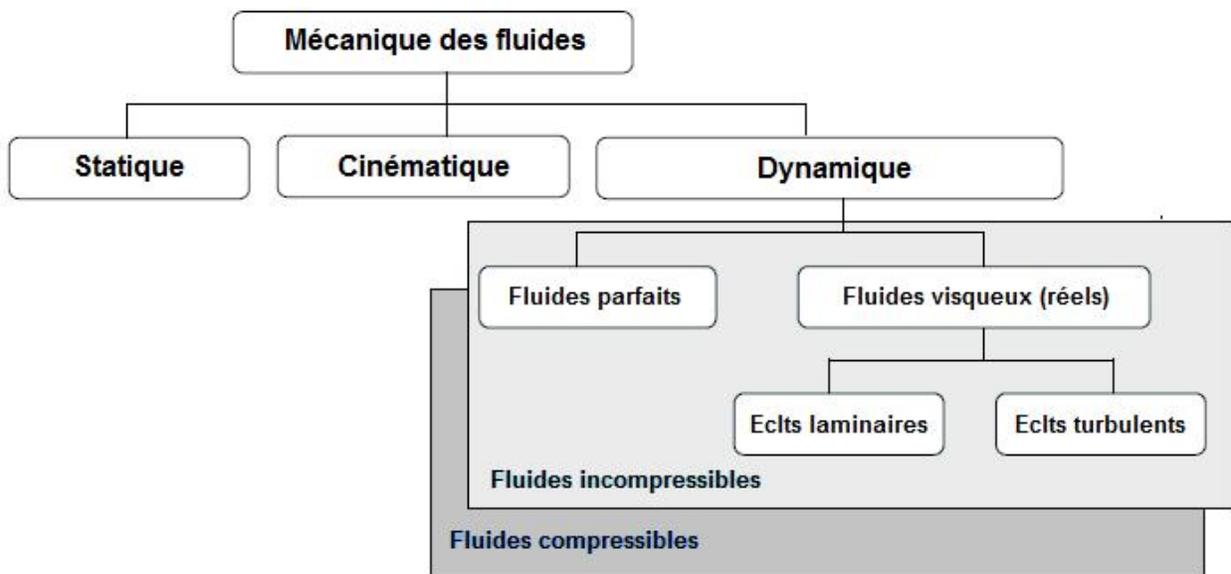
<b>CHAPITRE 03</b>	<b>Dynamique des fluides incompressibles parfaits</b>	<b>Page</b>
3.1	Introduction .....	28
3.2	Ecoulement permanent .....	28
3.3	Equation de continuité .....	28
3.4	Notion de débit .....	30
3.4.1	Débit massique .....	30
3.4.2	Débit volumique .....	31
3.5	Théorème de Bernoulli (écoulement sans échange de travail) .....	32
3.6	Application de l'équation de Bernoulli .....	34
3.6.1	Vidange d'un réservoir .....	34
3.6.2	Tube de Pitot .....	35
3.6.3	Tube de Venturi .....	37
3.6.4	Diaphragme .....	38
3.7	Théorème de Bernoulli (Ecoulement avec échange de travail) .....	41
3.8	Théorème d'Euler .....	41
<b>CHAPITRE 04</b>	<b>Dynamique des fluides incompressibles réels</b>	<b>Page</b>
4.1	Analyse dimensionnelle .....	43
4.2	Dimensions, unités et système international .....	43
4.3	Théorème de Vaschy-Buckingham .....	44
4.4	Les étapes de l'analyse dimensionnelle .....	44
4.5	Exemple d'analyse dimensionnelle dans la mécanique des fluides .....	45
4.6	Les régimes d'écoulement .....	48
4.7	Les pertes de charge .....	49
4.7.1	Le phénomène .....	49
4.7.2.	Influence des différentes grandeurs sur les pertes de charge .....	49
4.7.3	Pertes de charge linéaires .....	50
4.7.3.1	Généralités .....	50
4.7.3.2	Cas d'un écoulement laminaire .....	51
4.7.3.3	Cas d'un écoulement turbulent .....	51
4.7.3.4	Diagramme de Moody .....	52
4.7.4	Pertes de charge singulières .....	54
4.8	Théorème de Bernoulli généralisé .....	55
	Références bibliographiques .....	56
	Annexe : Unités et conversions .....	57

# CHAPITRE 1 :

## PROPRIETES DES FLUIDES

### 1.1. Introduction

La mécanique des fluides (MDF) est l'étude des écoulements de fluides lorsque ceux-ci subissent des forces. Elle est la base de la modélisation des écoulements de fluides et le dimensionnement des organes pour fluides et des dispositifs de transport des fluides. Elle comprend trois grandes branches, (voir **Fig. 1.1**) :



*Figure 1.1 Les branches de la mécanique des fluides*

- *la statique des fluides*, ou hydrostatique qui étudie les fluides au repos. C'est historiquement le début de la mécanique des fluides, avec l'étude de la pression et la poussée d'Archimède.

- *la cinématique des fluides* qui étudie les mouvements des fluides sans tenir compte des forces qu'ils subissent.

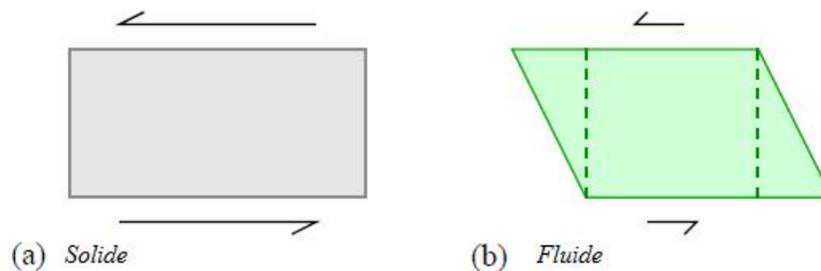
- *la dynamique des fluides* qui étudie les fluides en mouvement tout en sachant les causes qui sont derrière ce mouvement.

Une nouvelle approche a vu le jour depuis quelques décennies : C'est la mécanique des fluides numérique (CFD ou *Computational Fluid Dynamics* en anglais), qui simule les écoulements des fluides en résolvant les équations qui les régissent à l'aide d'ordinateurs.

La mécanique des fluides a de nombreuses applications dans divers domaines comme l'alimentation en eau potable des villes, l'aéronautique et l'aérodynamique et aussi dans le domaine biomédical, etc...

## 1.2. Définitions

Un fluide peut être considéré comme étant une substance formée d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler contrairement au solide (voir **Fig. 1.2**). Les forces de cohésion entre particules élémentaires sont très faibles de sorte que le fluide est un corps sans forme propre qui prend la forme du récipient qui le contient.



**Figure 1.2** La déformation d'un milieu sous l'effet de contrainte de cisaillement

On insiste sur le fait qu'un fluide est supposé être un milieu continu : même si l'on choisit un très petit élément de volume, il sera toujours beaucoup plus grand que la dimension des molécules qui le constituent. Parmi les fluides, on fait souvent la distinction entre liquides et gaz.

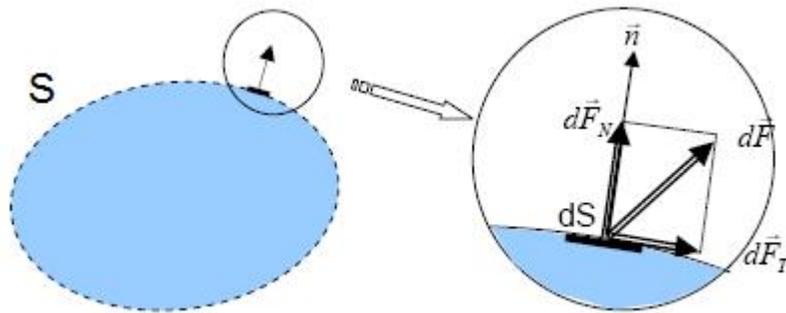
Les fluides peuvent aussi se classer en deux familles, relativement par leur viscosité. La viscosité est une de leurs caractéristiques physiques qui sera définie dans la suite du cours et qui exprime le frottement intermoléculaire dans le fluide. Les fluides peuvent être classés en deux grandes familles :

- La famille des « **fluides Newtoniens** » comme l'eau, l'air et la plupart des gaz ;
- La famille des « **fluides non-Newtoniens** » quasiment tout le reste : le sang, les gels, les boues, les pâtes, les suspensions, les émulsions...etc.

Les fluides dits "**Newtoniens**" ont une *viscosité constante* ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température. La deuxième famille est constituée par les fluides "**non newtoniens**" qui ont la particularité d'avoir leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse et des contraintes qu'ils subissent pendant l'écoulement. Le présent cours est limité uniquement à des fluides newtoniens qui seront classés comme suit.

### 1.3. Fluide parfait

Soit un système fluide, c'est-à-dire un volume délimité par une surface fermée **S** fictive ou non (**Fig.1.3**).



**Figure 1.3** *Système fluide*

Considérons  $d\vec{F}$  la force d'interaction au niveau de la surface élémentaire  $dS$  de normale  $\vec{n}$  entre le fluide et le milieu extérieur. La force  $d\vec{F}$  peut être décomposée en deux composantes, à savoir :

- une composante  $d\vec{F}_T$  *tangentielle* à  $dS$ .
- une composante  $d\vec{F}_N$  *normale* à  $dS$ .

En mécanique des fluides, un fluide est dit **parfait** s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement. C'est à dire quand la composante  $d\vec{F}_T$  est nulle. Autrement dit, la force  $d\vec{F}$  est normale à l'élément de fluide.

### 1.4. Fluide réel

Contrairement à un fluide parfait qui n'est qu'un modèle pour simplifier les calculs, pratiquement inexistant dans la nature, dans un fluide réel les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides, sont prises en considération. Ce phénomène de frottement visqueux apparaît lors du mouvement du fluide.

## 1.5. Fluide incompressible

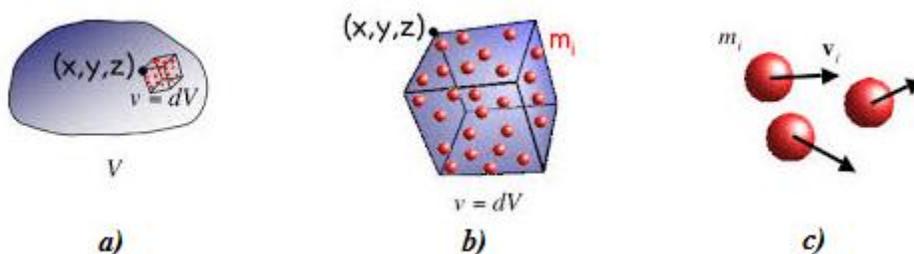
Un fluide est dit **incompressible** lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure ( $\rho = \rho_0$ , masse volumique constante). Certains liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, .... etc.)

## 1.6. Fluide compressible

Un fluide est dit **compressible** lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure ( $\rho = \rho(p)$ , masse volumique variable). Les gaz sont des fluides compressibles. Par exemple, l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux, sont considérés comme tels.

## 1.7. Le modèle du milieu continu

La mécanique des fluides nécessite l'introduction d'un modèle continu qui consiste à considérer des particules matérielles, appelées *particules fluides*, de volume  $dV$  suffisamment petit pour qu'il ait les propriétés d'une différentielle, mais suffisamment grand pour contenir un nombre élevé d'atomes ou de molécules (**Fig. 1.4**).



**Figure 1.4** Notion de milieu continu. a) un élément fluide de volume,  $V$  ; b) un élément fluide de volume,  $dV$  ; c) particules fluides

## 1.8. Système d'unité

Les unités de mesure utilisées dans ce manuscrit sont celles du Système International (SI). Les unités principales de ce système sont montrées dans le tableau suivant :

**Tableau 1.1** Les unités principales du système international (SI).

Longueur	Masse	Temps	Pression	Force	Energie	Puissance
<i>Mètre</i>	<i>Kilogramme</i>	<i>Seconde</i>	<i>Pascal</i>	<i>Newton</i>	<i>Joule</i>	<i>Watt</i>
<b>(m)</b>	<b>(Kg)</b>	<b>(S)</b>	<b>(Pa)</b>	<b>(N)</b>	<b>(J)</b>	<b>(W)</b>
<i>L</i>	<i>M</i>	<i>T</i>	<i>ML<sup>-1</sup>T<sup>-2</sup></i>	<i>MLT<sup>-2</sup></i>	<i>ML<sup>2</sup>T<sup>-2</sup></i>	<i>ML<sup>2</sup>T<sup>-3</sup></i>

## 1.9. Les propriétés physiques des fluides

### 1.9.1. La masse volumique

La masse volumique,  $\rho$ , d'une substance est définie comme étant le rapport :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\text{masse}}{\text{Volume}}; \left[ \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \right] \quad (1)$$

Où :

$\rho$  : Masse volumique en (kg/m<sup>3</sup>),

$m$  : masse en (kg),

$V$  : volume en (m<sup>3</sup>).

### 1.9.2. Le poids volumique (Poids spécifique)

C'est le poids de l'unité de volume. On le note  $\gamma$ . Dans le SI, on l'exprime en N/m<sup>3</sup>. Sa dimension est : ML<sup>-2</sup>T<sup>-2</sup>

Le poids spécifique et la masse spécifique sont liés par la relation fondamentale :  $\gamma = \rho \cdot g$ .

$$\gamma = \frac{w}{V} = \frac{\text{Poids}}{\text{Volume}} \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right] \quad (2)$$

Sachant que :  $w = m \cdot g = V \cdot \rho \cdot g$

Il vient :

$$\gamma = \frac{w}{V} = \frac{m \cdot g}{V} = \frac{\rho \cdot V \cdot g}{V} = \rho \cdot g \quad (3)$$

$\gamma$  : Poids volumique en (N/m<sup>3</sup>).

$m$  : masse en (kg),

$g$  : accélération de la pesanteur en (m/s<sup>2</sup>),

$V$  : volume en (m<sup>3</sup>).

### 1.9.3. La densité

La densité est définie comme étant le rapport de la masse volumique d'un fluide sur la masse volumique d'un fluide de référence. Elle est donnée par la relation suivante :

$$d = \frac{\rho_{\text{fluide}}}{\rho_{\text{fluide de référence}}} \quad (4)$$

Dans le cas des liquides on prendra l'eau comme fluide de référence. Dans le cas des gaz on prendra l'air comme fluide de référence.

### 1.9.4. Le volume massique (Volume spécifique)

C'est le volume qu'occupe l'unité de masse d'une substance.

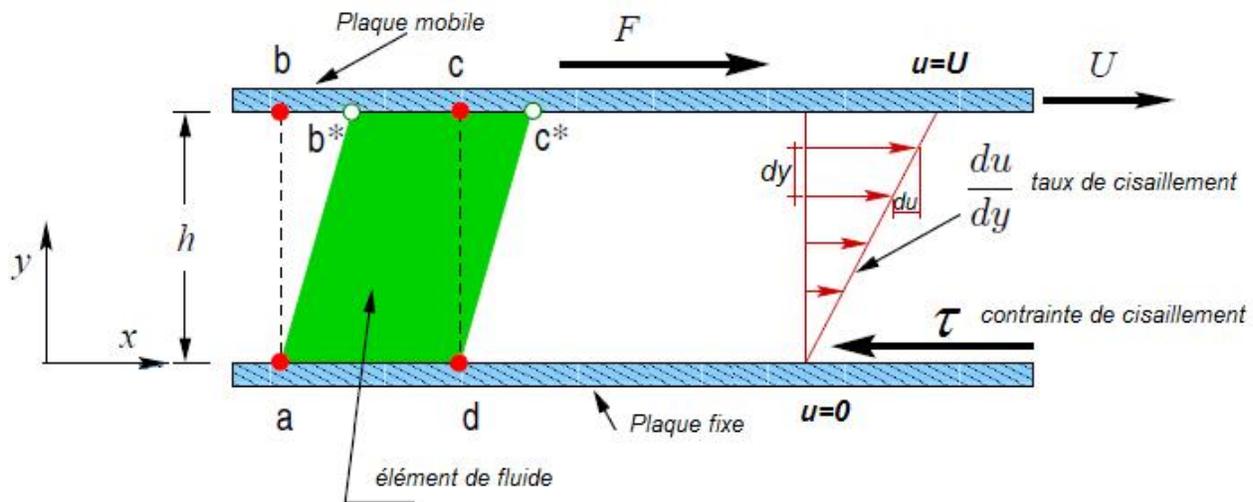
$$\hat{v} = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho} ; \left[ \frac{m^3}{kg} \right] \quad (5)$$

### 1.9.5. La viscosité

La viscosité est définie comme étant la résistance du fluide au mouvement, c'est une mesure de son frottement interne. C'est une relation entre la contrainte de cisaillement et le taux de déformation et est proportionnelle à une constante dite viscosité dynamique. Les fluides de grande viscosité résistent à l'écoulement et les fluides de faible viscosité s'écoulent facilement. La viscosité est déterminée par la capacité d'entraînement que possède une couche de particules fluides en mouvement sur les autres couches adjacentes.

#### Expérience :

On prend un fluide entre deux plaques parallèles de même surface  $A$  (voir **Fig. 1.5**), l'une fixe et l'autre est mobile, distantes de  $h$ . La plaque mobile se déplace avec une vitesse horizontale  $U$  et la force qui cause son déplacement est  $F$ .



**Figure 1.5** *Expérience de viscosité*

Il est montré expérimentalement que suite à l'effet de la force  $F$ , il résulte une contrainte de cisaillement  $\dagger$  dans le fluide entre les deux plaques. Cette contrainte (tension) est opposée au mouvement de la plaque et du fluide, elle est exprimée par :

$$\dagger = \frac{F}{A} \left[ \frac{N}{m^2} \right] \quad (6)$$

Il est prouvé aussi que la contrainte de cisaillement est proportionnelle au gradient de vitesse  $u$  suivant la distance  $h$  entre les deux plaques :

$$\dagger \propto \frac{du}{dy} \quad (7)$$

Autrement dit, la contrainte de cisaillement est proportionnelle au taux de déformation et la constante de proportionnalité est le **coefficient de viscosité dynamique** ( $\sim$ ) :

$$\dagger = \sim \frac{dU}{dy} \quad (8)$$

Un réarrangement de l'éq. (8) donne :

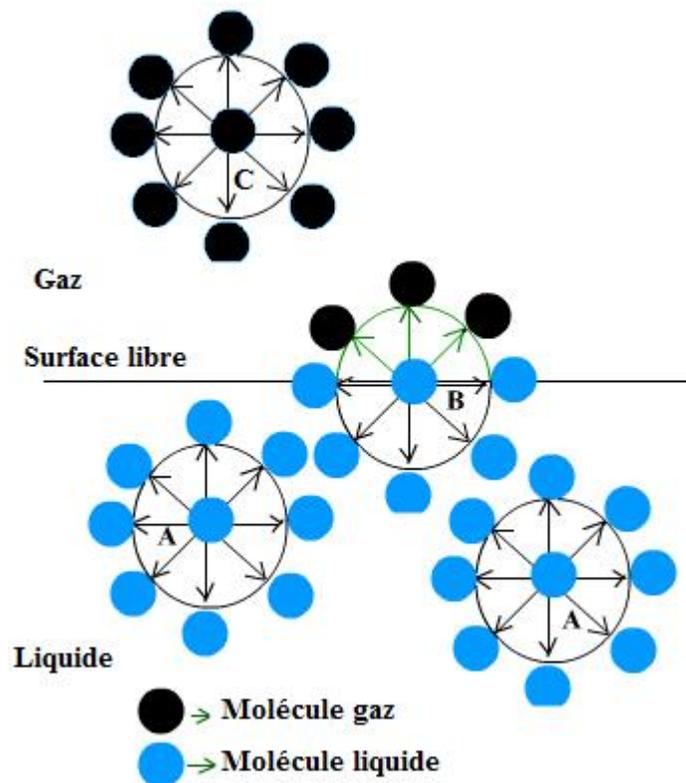
$$\sim = \frac{\text{Contrainte de cisaillement}}{\text{Taux de cisaillement}} = \frac{F_s}{A_s} = \frac{\dagger \cdot dy}{dU} ; \left[ \frac{N \cdot s}{m^2} \right] = \left[ \frac{kg}{m \cdot s} \right] \text{ Ou [Pa.s]} \quad (9)$$

La **viscosité cinématique** ( $\epsilon$ ) est définie comme étant : la viscosité dynamique sur la masse volumique, son unité est  $[m^2/s]$ . Elle est exprimée comme suit :

$$\hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \left[ \frac{m^2}{s} \right] \quad (10)$$

### 1.10. Tension de surface d'un fluide

Nous discuterons une propriété de fluide qui se produit au niveau des interfaces d'un liquide et de gaz ou à l'interface de deux liquides non miscibles, voir **Fig.1.6**. Le liquide, représenté par molécules 'A' est sous l'effet des forces intermoléculaires (force de cohésion). Cependant la molécule 'B' à proximité de l'interface est soumise aux attractions moléculaires du même type d'un côté et des molécules de type différent (adhérence) d'un autre côté. En conséquence, les forces de cohésion pour la molécule liquide 'A' s'annulent. Mais à l'interface de molécule 'B' les forces de cohésion dépasse la force d'adhérence du gaz. Les faits de force nette correspondant sur l'interface, qui est à un état de tension similaire à une membrane élastique étirée. Comme expliqué, la force nette correspondante est désignée par *la tension de surface*. En bref, il y'a des contraintes de traction apparentes qui agissent à l'interface de deux fluides non miscibles.

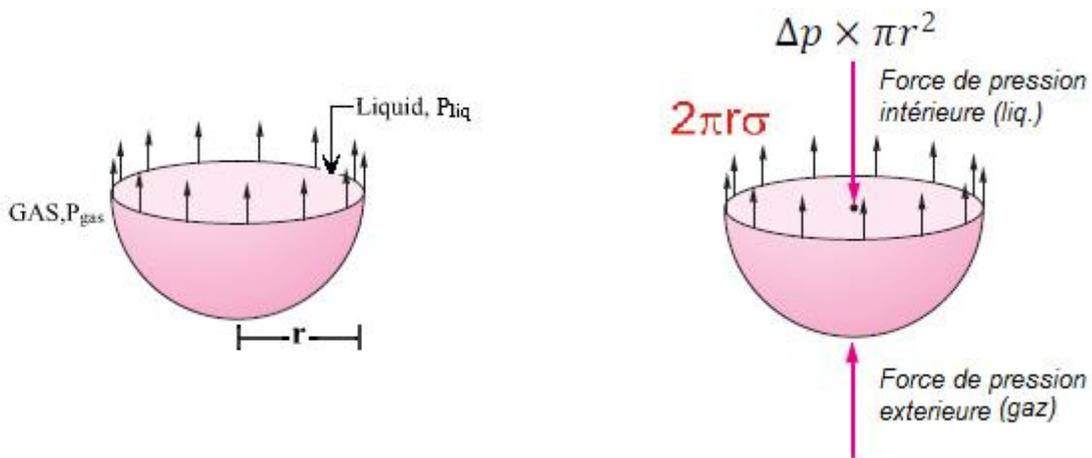


**Figure 1.6** Origine de la tension de surface d'un fluide

On note que la tension de surface diminue avec la température du liquide parce que les forces cohésives intermoléculaires diminuent. A la température critique d'une surface de fluide, la tension devient nulle ; c- à-dire la frontière (interface) entre les fluides disparaît.

### 1.11. La différence de pression à l'interface :

Afin d'étudier l'effet de la tension superficielle sur la différence de pression à travers une interface courbe, on envisage une petite goutte sphérique d'un fluide au repos. Étant donné que la gouttelette est petite, les variations de la pression hydrostatique deviennent négligeables. La gouttelette est divisée en deux moitiés, comme indiqué dans la **Fig.1.7** Étant donné que la gouttelette étant à l'équilibre, la somme des forces agissant à l'interface dans une direction quelconque est nulle.



**Figure 1.7.** Tension de surface sur une goutte de fluide

On notera que les seules forces qui agissent à l'interface résultent de la pression et de la tension de surface. L'équilibre des forces donne :

$$(p_{liq} - p_{gaz})\pi r^2 = \dagger (2\pi r) \quad (11)$$

Avec ;

$$\Delta p = p_{liq} - p_{gaz}$$

Il vient donc :

$$\Delta p = 2 \frac{\dagger}{r} \quad (12)$$

## CHAPITRE 2 :

### STATIQUE DES FLUIDES

#### 2.1. Introduction

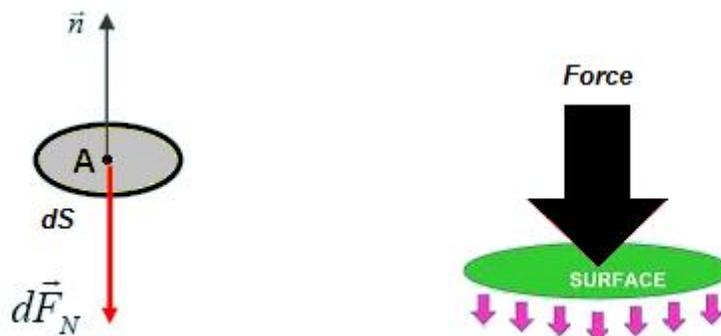
La statique des fluides est la branche de la mécanique des fluides qui traite principalement les fluides au repos. Les problèmes de la statique des fluides sont beaucoup plus simples que ceux qui sont liés au mouvement des fluides, d'où leurs solutions analytiques exactes sont possibles.

Etant donné que les particules fluides ne se déplacent pas les unes par rapport aux autres, les forces de cisaillement ne sont pas impliquées et toutes les forces dues à la pression du fluide sont perpendiculaires à la surface sur laquelle ils agissent. La statique des fluides peut couvrir les problèmes dans lesquels des particules fluides ne se déplacent pas les unes par rapport autres, même si le fluide dans son ensemble peut se déplacer. En l'absence de mouvement relatif entre les particules fluides, la viscosité du fluide ne présente aucun problème.

Ce chapitre est consacré à l'étude des fluides au repos. Les lois fondamentales de la statique des fluides y sont énoncées. La notion de pression, le théorème de Pascal, le principe d'Archimède et la relation fondamentale de l'hydrostatique y sont expliqués.

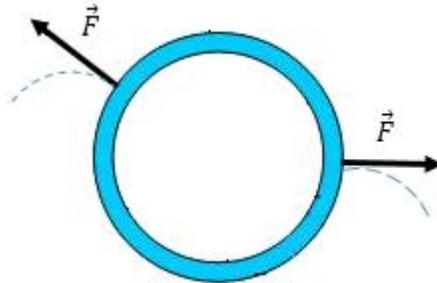
#### 2.2. Notion de pression en un point d'un fluide

La pression est une grandeur scalaire. C'est l'intensité de la composante normale de la force qu'exerce le fluide par l'unité de surface (**Fig.2.1**).



*Figure 2.1 Force de pression exercée sur une surface*

Considérons un récipient rempli de liquide. Si on perce le récipient d'une ouverture, le liquide s'échappe perpendiculairement à la surface, traduisant ainsi la présence d'une force  $\vec{F}$  normale à la surface (**Fig.2.2**).



**Figure 2.2** La force de pression

Si nous considérons un élément de surface  $dS$  soumis à la force normale  $d\vec{F}$ , la pression exercée par  $d\vec{F}$  sur  $dS$  est exprimée :

$$p = \frac{dF}{dS} \quad (13)$$

La pression est une quantité scalaire, définie en point  $A$  de l'espace par :

$$p(A) = p(x, y, z) \quad (14)$$

L'unité de la pression est le Newton par mètre carré  $\left[ \frac{N}{m^2} \right]$  ou Pascal (Pa). Elle peut être exprimée

aussi en  $\left[ \frac{kg}{m.s^2} \right]$ .

### 2.3. Principe fondamental de la statique des fluides

Soit un volume élémentaire (**Fig.2.3**)  $dV = dx.dy.dz$  au sein d'un fluide, dont les faces sont parallèles aux axes ( $Ox, Oy, Oz$ ).

Considérons les deux faces **ABFE** et **CGHD** perpendiculaires à  $Oz$ .

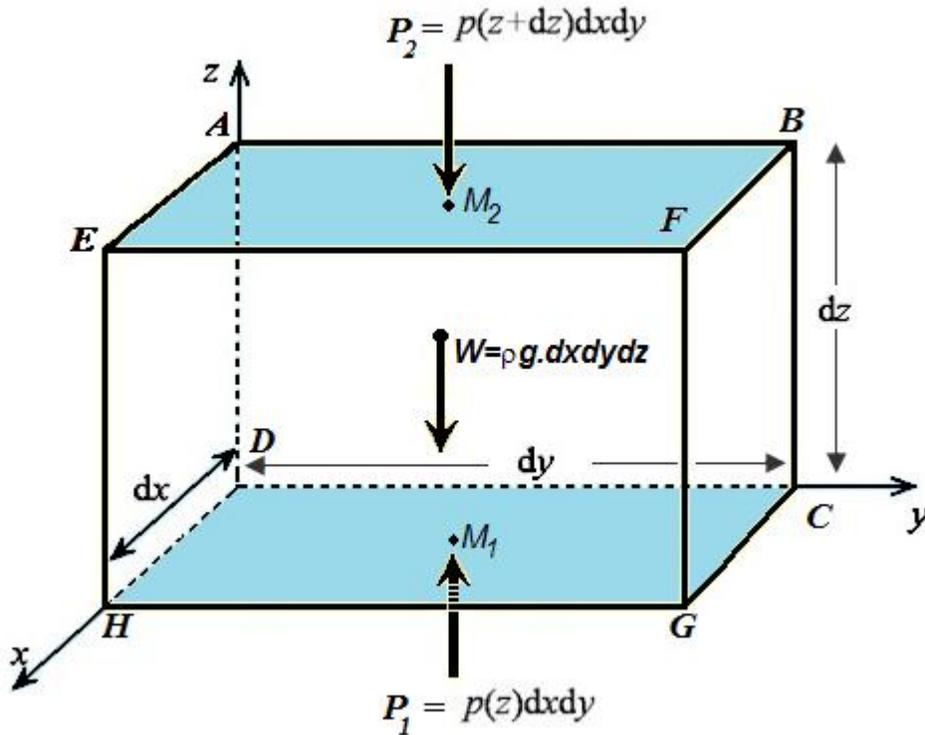


Figure 2.3 Forces agissant sur un élément fluide

Les **forces de pression** qui s'exercent sur les deux faces considérées sont :

$$\text{Force de pression } p_1: d\vec{F}_1 = p_1 \cdot dx \cdot dy \cdot \vec{k} \quad (15)$$

$$\text{Force de pression } p_2: d\vec{F}_2 = -p_2 \cdot dx \cdot dy \cdot \vec{k} \quad (16)$$

La force résultante est :

$$d\vec{F}_z = d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 = (p_1 - p_2) dx \cdot dy \cdot \vec{k} \quad (17)$$

La variation de pression suivant l'axe  $Oz$ , peut s'écrire :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p_2 - p_1}{dz} \quad (18)$$

C'est une dérivation partielle, parce que  $p$  dépend à priori de  $x$  et de  $y$ .

$$p_1 - p_2 = \frac{-\partial p}{\partial z} dz \quad (19)$$

$$d\vec{F}_z = \frac{-\partial p}{\partial z} dx \cdot dy \cdot dz \vec{k} \quad (20)$$

$$d\vec{F}_z = \frac{-\partial p}{\partial z} dV \cdot \vec{k} \quad (21)$$

De la même manière suivant les axes  $Ox$  et  $Oy$  :

$$d\vec{F}_x = \frac{-\partial p}{\partial x} dV \cdot \vec{i} \quad (22)$$

$$d\vec{F}_y = \frac{-\partial p}{\partial y} dV \cdot \vec{j} \quad (23)$$

Il vient alors la force de pression résultante qui s'exerce sur l'élément de volume fluide  $dV$  :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_x + d\vec{F}_y + d\vec{F}_z = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \vec{k}\right) dV \quad (24)$$

Soit :

$$d\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} p \cdot dV \quad (25)$$

Ce résultat montre bien que  $d\vec{F}$  est opposée au gradient de la pression  $p$ .

## 2.4. Equilibre au sein d'un fluide

En plus des forces de pressions agissant sur l'élément fluide, s'ajoute la force du poids de l'élément fluide lui-même :

$$d\vec{P} = \dots \vec{g} \cdot dV \quad (26)$$

Pour le fluide en équilibre, on a :

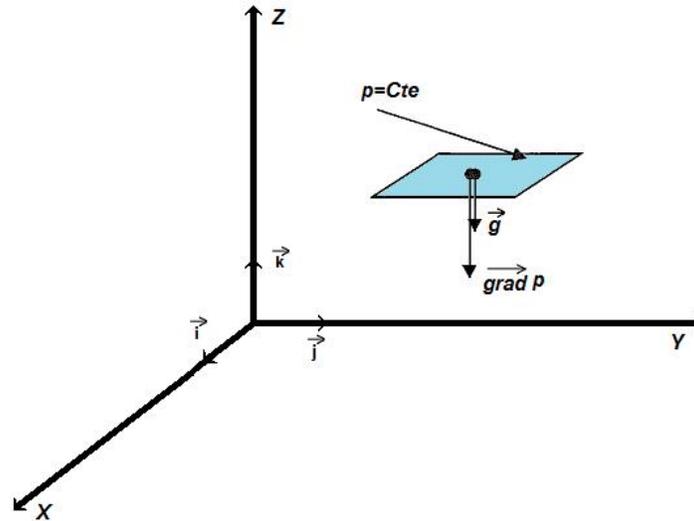
$$\sum \vec{F} = d\vec{P} + d\vec{F} = 0 \quad (27)$$

Soit :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = \dots \vec{g} \quad (28)$$

Avec : 
$$\vec{\text{grad}} p = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \vec{k} \quad (29)$$

Les surfaces isobares ( $p=Cte$ ) sont perpendiculaires à  $\vec{g}$  et sont donc horizontales (**Fig.2.4**).



**Figure 2.4** Les isobares forment des plans horizontaux

La pression augmente avec la hauteur et ne dépend que de  $z$  :

$$p=p(z) \quad (30)$$

Donc :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz} \quad (31)$$

Alors :

$$\vec{\text{grad}} p = \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \vec{k} = \dots \cdot \vec{g} = -\dots \cdot \vec{g} \cdot \vec{k} \quad (32)$$

$$dp = -\dots \cdot g \cdot dz \quad (33)$$

## 2.5. Cas des fluides incompressibles

### 2.5. 1. Loi de l'hydrostatique

Pour obtenir la différence de pression entre deux points  $M_1$  de côte  $Z_1$  et  $M_2$  de côte  $Z_2$  (**Fig.2.5**), il suffit d'intégrer l'expression précédente :

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\dots g \cdot \int_{Z_1}^{Z_2} dz \quad (34)$$

on obtient :

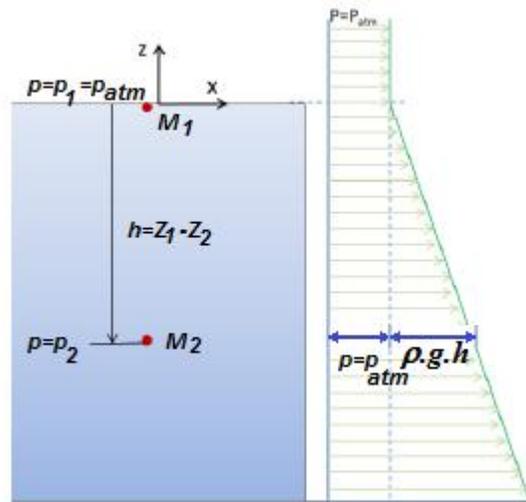
$$p_2 - p_1 = \dots g \cdot (Z_1 - Z_2) \quad (35)$$

Posons :  $h = (Z_1 - Z_2)$ ,

Il vient :

$$\Delta p = \dots g \cdot h \quad (36)$$

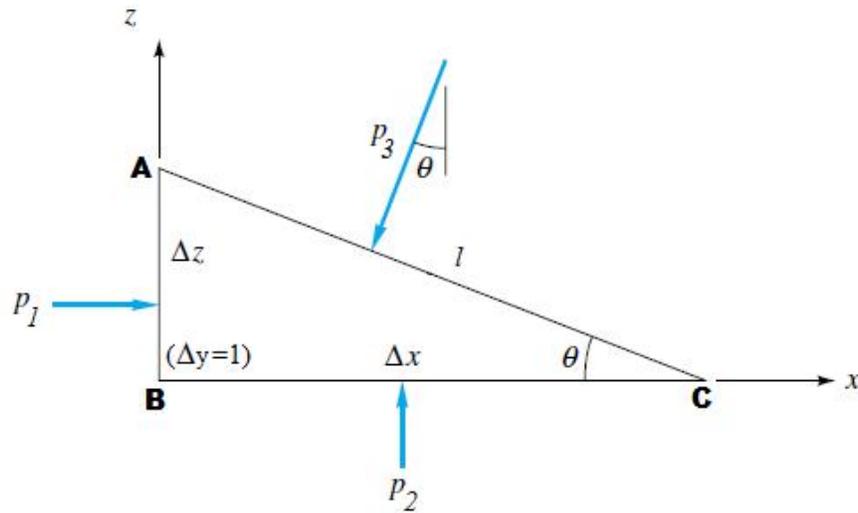
C'est la loi fondamentale de l'hydrostatique.



*Figure 2.5 Variation de la pression en fonction de la hauteur*

### 2.5. 2. Théorème de Pascal

Le théorème de Pascal s'énonce comme suit : dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de pression en un point entraîne la même variation de pression en tout autre point du même fluide. Considérons un élément de fluide d'épaisseur suivant Oz égale à l'unité, comme indiqué ci-dessous (**Fig. 2.6**).



**Figure 2. 6** Forces pressantes sur un élément de fluide en équilibre.

Si les intensités de pression normales aux trois surfaces sont  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$ , (voir **Fig.2.6**), il vient donc :

$$F = p.A \quad (37)$$

Avec,  $F$  : la force pressante  
 $p$  : la pression  
 $A$  : la surface sous pression

✓ La force appliquée sur la surface AB :  $F_{AB} = p_1 \cdot \Delta z = p_1 \cdot (AB \cdot 1) \quad (38)$

✓ La force appliquée sur la surface BC :  $F_{BC} = p_2 \cdot \Delta x = p_2 \cdot (BC \cdot 1) \quad (39)$

✓ La force appliquée sur la surface AC :  $F_{AC} = p_3 \cdot l = p_3 \cdot (AC \cdot 1) \quad (40)$

Projetons les forces verticalement suivant Oy :

$$p_1 \cdot AB = p_3 \cdot AC \cdot \cos \theta \quad (41)$$

Mais,  $AC \cdot \cos \theta = AB$

Donc,  $p_1 = p_3$

Projetons les forces horizontalement suivant Ox :

$$p_2 \cdot BC = p_3 \cdot AC \cdot \sin \theta \quad (42)$$

Mais,  $AC \cdot \sin \theta = BC$

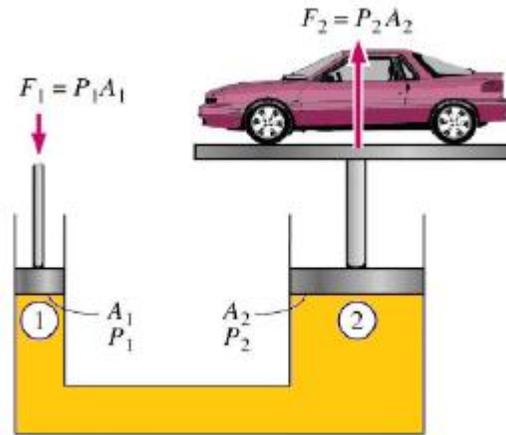
Donc,  $p_2 = p_3$  Et  $p_1 = p_2 = p_3$  (43)

En conclusion, *la pression en tout point est la même dans toutes les directions de l'espace.*

### 2.5.3. Applications de la loi de Pascal

#### 1°/ La presse hydraulique :

Soit le schéma de principe d'une presse hydraulique (**Fig. 2.7**). On y produit une force considérable à partir d'une force relativement peu importante, en considérant la surface d'un piston à la sortie 2 plus large que celle de celui à l'entrée 1.



**Figure 2.7** Principe d'une presse hydraulique

Lorsque les deux pistons 1 et 2 sont sur le même niveau (cf. **Fig. 2.7**), on a :

$$p_1 = p_2 \quad (44)$$

Soit :

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad (45)$$

Il vient,

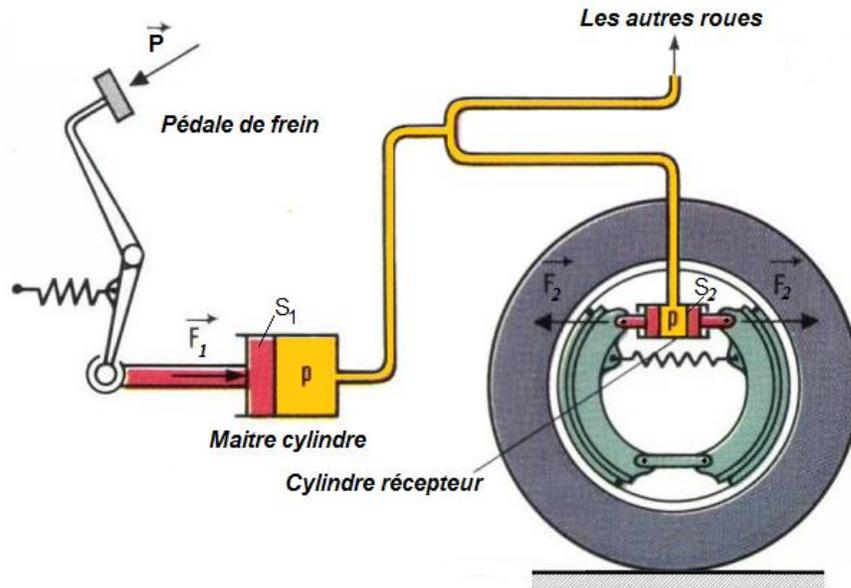
$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1} \quad (46)$$

Le rapport de section  $\frac{A_2}{A_1}$  induit un grand avantage en terme de force de levage, voir : Si,

$$A_2 \gg A_1 \Rightarrow F_2 \gg F_1.$$

## 2°/ Le principe de freinage automobile :

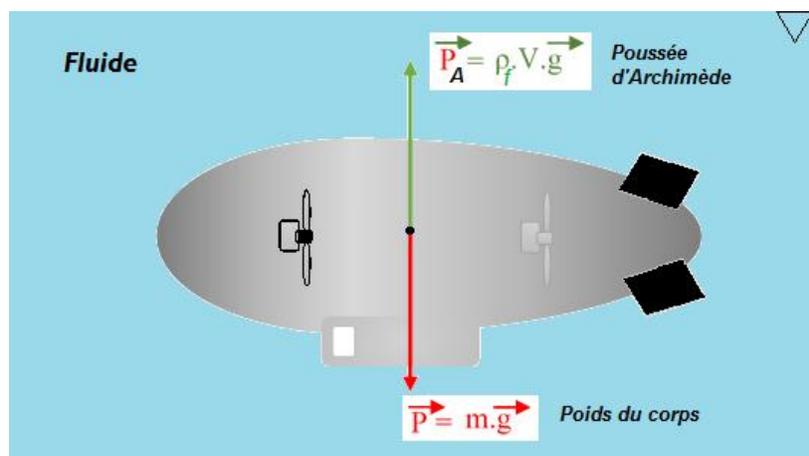
La **Fig. 2.8** illustre le principe de freinage automobile utilisant l'huile comme fluide transmetteur de forces. Ce système est l'une des applications industrielles les plus répandues de la loi de Pascal.



*Figure 2.8 Freinage automobile*

## 2.6. Poussée d'Archimède

Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de ce fluide une force (poussée) verticale, dirigée vers le haut dont l'intensité est égale au poids du volume du fluide déplacé (ce volume est donc égal au volume immergé du corps), (voir **Fig. 2.9**).



*Figure 2.9 Poussée d'Archimède*

La force de poussée est donnée comme suit :

$$P_A = \rho \cdot V_{\text{immergé}} \cdot g \quad (47)$$

A l'équilibre, on a :

$$\sum_i \vec{F}_{\text{ext}} = 0 \quad (48)$$

$$P_A - P = 0 \quad \text{Avec, } P = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g$$

Alors :  $P_A - \rho \cdot V \cdot g = 0$

D'où :  $P_A = \rho \cdot V \cdot g \quad (49)$

## 2.7. Mesure de pression

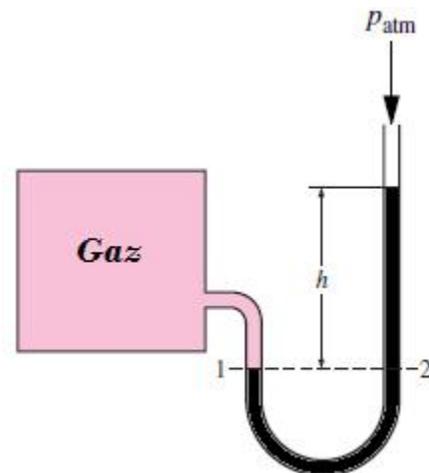
### 2.7.1. Le manomètre

A partir de la relation fondamentale de la statique des fluides,

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h$$

$$\Delta h = \frac{\Delta p}{\rho \cdot g}$$

Cela signifie que la pression peut être mesurée par une colonne de fluide de hauteur ( $\Delta h$ ). Un instrument basé sur ce principe est appelé manomètre, il est très utilisé dans la mesure des faibles et moyennes pressions. Considérons le manomètre (**Fig.2.10**), on l'utilise pour mesurer la pression dans le réservoir. Si on admet que l'effet de pesanteur sur le gaz est négligeable, la pression en n'importe quel point du fluide dans le réservoir est identique à celle du point (1). Aussi, la pression ne varie pas horizontalement dans le fluide, on déduit que la pression au point (2) est la même qu'au point (1).



**Figure 2.10** Un manomètre

$$\text{Alors, } p_1 = p_2 \quad (50)$$

$$p_2 = \dots g \cdot h + p_{atm} \quad (51)$$

$$p_2 = p_{statique} + p_{atm} \quad (52)$$

Où :  $\rho$  : masse volumique du fluide,

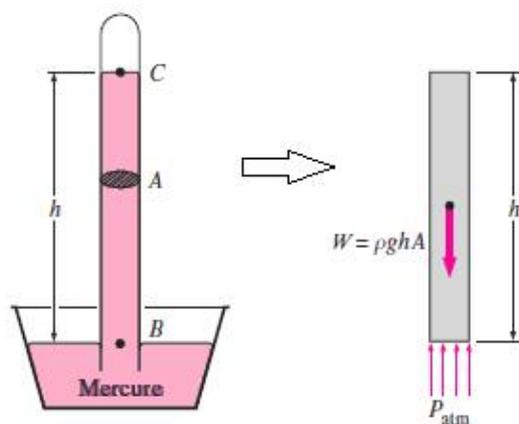
$g$  : la pesanteur,

$h$  : l'élévation du fluide.

### 2.7.2. Le baromètre et la pression atmosphérique

La pression atmosphérique est mesurée à l'aide d'un appareil dit Baromètre. L'italien Evangelista Torricelli (1608-1647), le premier qui a pu mesurer la pression atmosphérique par une simple expérience ingénieuse.

Comme le montre la **figure 2.11** ci-dessous, la pression au point (B) est égale à la pression atmosphérique et la pression au point (C) peut être prise comme nulle puisque au-delà du point (C) il n'y a que du gaz et la pression qu'il exerce est négligeable par rapport à la pression atmosphérique,  $p_{atm}$ .



**Figure 2.11** Le baromètre

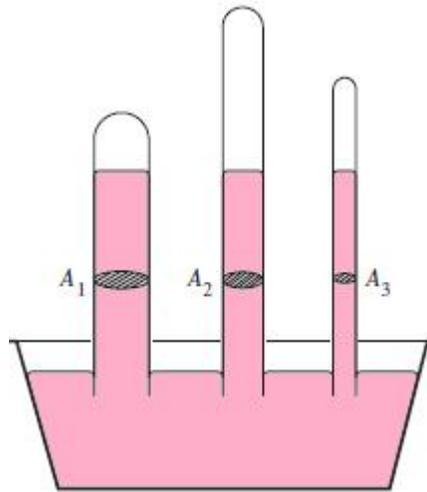
A l'équilibre et d'après la **Fig. 2.11**, on écrit :

$$\sum F_{ext} = 0 \quad (53)$$

$$P_{atm} \cdot A - \dots g h A = 0 \quad (54)$$

$$\text{Soit : } P_{atm} = \dots g h \quad (55)$$

On remarque d'après la relation (55) que la longueur et la section du tube n'influencent pas la pression, c.-à-d. n'influent pas sur la hauteur  $h$ , voir (**Fig.2.12**).



**Figure 2.12** Dépendance de la pression atmosphérique de la hauteur seulement.

En général, l'unité de la pression est l'atmosphère, définie comme la pression produite par une colonne de mercure de  $760 \text{ mm}$  de hauteur à  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  ( $\dots_{Hg} = 13,595 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ) et sous la gravité ( $g = 9.807 \text{ m/s}^2$ ).

Si on remplace le mercure par un autre fluide, l'eau par exemple, la pression atmosphérique est mesurée par une colonne d'eau de hauteur de  $10,33 \text{ m}$  environ.

## 2.8. Forces hydrostatiques sur des parois

Soit une surface de géométrie quelconque immergée dans un fluide (liquide). En général, on est amené à répondre aux questions suivantes :

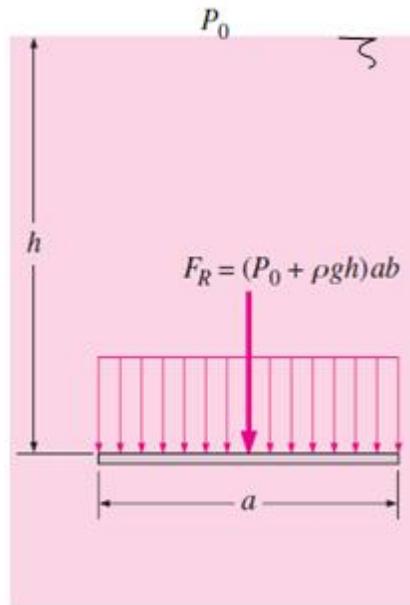
- Quelle est l'intensité de la force qui s'applique sur cette surface ?
- Quel est le point d'application (position) de cette force ?
- Quelle est sa direction et son sens ?

Les cas suivants sont étudiés :

- Force hydrostatique sur une surface *plane horizontale, verticale* ou *incliné*.
- Force hydrostatique sur une surface *gauche*.

### 2.8.1. Paroi plane horizontale

Soit une plaque plane de surface  $a \cdot b$  ( $m^2$ ) immergée à une profondeur  $h$  de la surface libre du liquide (**Fig.2.13**).



**Figure 2.13** Force sur une paroi horizontale

La distribution de la pression sur la surface horizontale immergée est uniformément répartie, et sa magnitude est :

$$p = p_0 + \dots.g.h \quad (56)$$

Avec  $h$  est la cote de la plaque plane à partir de la surface libre du liquide. Cependant, la force hydrostatique agissant sur la surface horizontale rectangulaire est :

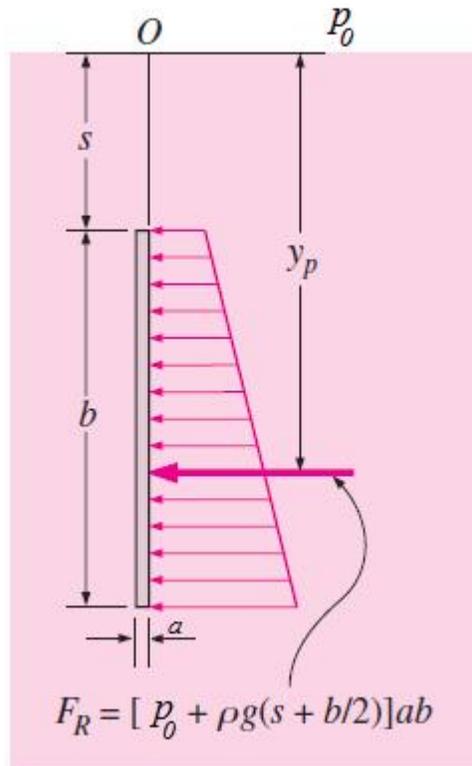
$$F_R = \int p.dA = (p_0 + \dots.g.h)a.b \quad (57)$$

$$F_R = (p_0 + \dots.g.h)a.b \quad (58)$$

Cette force agit au centre de la plaque (voir **Fig. 13**).

### 2.8.2. Paroi plane verticale

Considérons une plaque plane rectangulaire de hauteur  $h$  et de largeur  $b$  et d'épaisseur  $a$  complètement immergée de manière verticale, faisant  $90^\circ$  avec la surface libre. Elle est à une distance  $s$  de la surface libre (voir **Fig.2.14**).



**Figure 2.14** Force sur une paroi verticale

La force hydrostatique résultante sur la surface supérieure est égale au produit de la pression moyenne  $p_c$  par la surface. Elle est donnée par :

$$F_R = p_c \cdot A = (p_0 + \dots g \cdot (s + b/2)) a \cdot b \quad (59)$$

Cette force agit sur la paroi verticale au niveau du point  $c$  situé à  $y_p$ . Cette conclusion est le résultat de la l'analyse suivante : A l'équilibre de la paroi, la somme des moments dus aux pressions exercées sur la plaque égale à la somme des moments dus aux forces agissants sue la même plaque.

Soit :

$$\sum_{pression} M_p = \sum_{Forces} M_{F_R} \quad (60)$$

$$\int_0^H y dF_R = F_R \cdot y_p \quad (61)$$

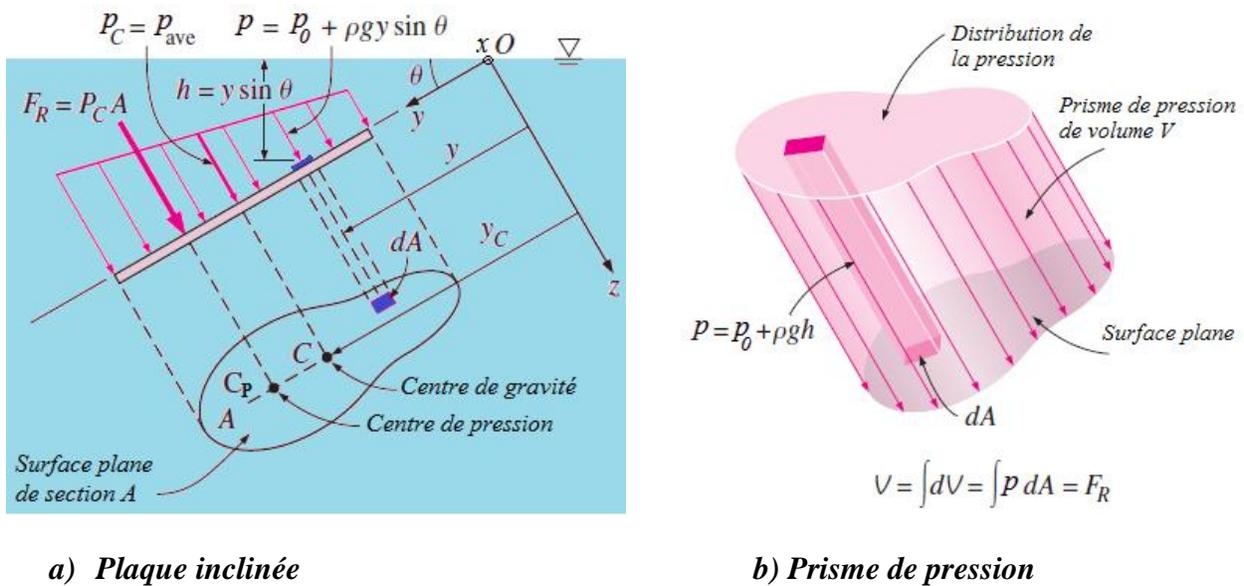
$$\frac{1}{3} \dots g(b+s)^3 L = \left( \frac{1}{2} \dots g(b+s)^2 L \right) y_p \quad (62)$$

On obtient alors :

$$y_p = \frac{2}{3}(b+s) \text{ (Centre de pression)} \quad (63)$$

### 2.8.3. Paroi plane inclinée

Considérons une paroi plane de forme quelconque et de surface  $A$  (**Fig.2.15**), immergée dans un liquide. Elle est inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport à l'axe  $Oy$ . L'axe  $Ox$  coïncide avec la surface libre du fluide.



a) Plaque inclinée

b) Prisme de pression

**Figure 2.15** Force sur une paroi inclinée

La pression en n'importe quel point de la plaque est donnée par :

$$p = p_0 + \dots g \cdot h = p_0 + \dots g \cdot y \cdot \sin \theta \quad (64)$$

La force hydrostatique résultante est :

$$F_R = \int_A p dA = \int_A (p_0 + \dots g y \sin \alpha) dA = p_0 A + \dots g \sin \alpha \int_A y dA \quad (65)$$

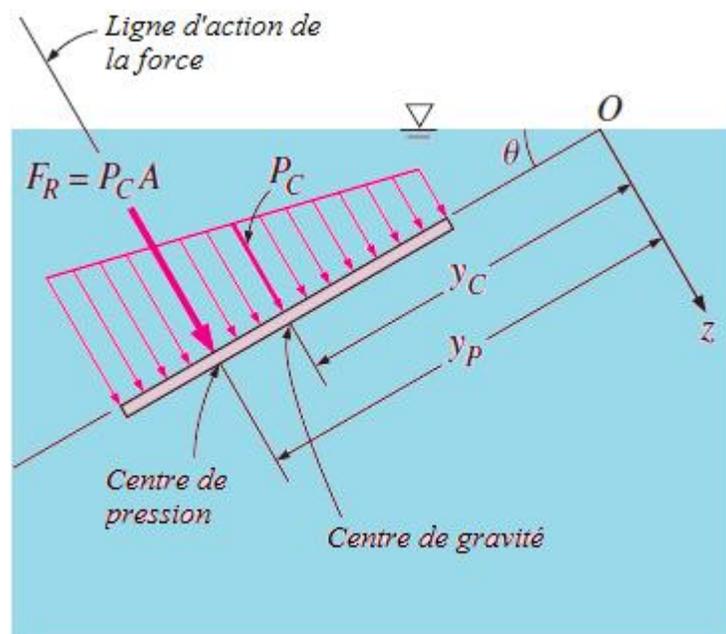
Mais, le moment statique  $\int_A y dA$  est relié avec l'ordonnée  $y$  du centre de la surface par :

$$y_C = \frac{1}{A} \int_A y dA \quad (66)$$

Il vient après intégration de la relation (65) avec,

$$F_R = (p_0 + \dots g y_C \sin \alpha) A = (p_0 + \dots g h_C) A = p_C A = p_{Moy} A \quad (67)$$

Avec :  $p_C = p_0 + \dots g h_C$  est la pression au centre de gravité de la surface  $A$ , équivalente à la pression moyenne appliquée sur la surface  $A$ . et  $h_C = y_C \sin \alpha$  est la hauteur entre le centre de gravité et la surface libre du fluide, voir **Fig. 2.16**.



**Figure 2.16** La force résultante sur la plaque

Ainsi, nous concluons que (cf. relation (61)):

$$y_p F_R = \int_A y p dA = \int_A y (p_0 + \dots g y \sin \alpha) dA = p_0 \int_A y dA + \dots g \sin \alpha \int_A y^2 dA \quad (68)$$

Or,  $y_p F_R = p_0 y_C A + \dots g \sin \alpha \cdot I_{xx, O}$

Où,  $y_p$  est la distance du centre de pression à partir de l'axe Oy (point O), et

$$I_{xx, O} = \int_A y^2 dA \text{ est le deuxième moment d'inertie de la surface.}$$

Les moments d'inertie des surfaces sont largement disponibles pour des géométries usuelles, mais souvent sont donnés par rapport aux axes passant par le centre de gravité de la surface.

Le deuxième moment d'une surface pour deux axes parallèles, sont reliés l'un à l'autre par la loi des axes parallèles, donnée comme suit :

$$I_{xx, O} = I_{xx, C} + y_C^2 \cdot A \quad (69)$$

Avec :  $I_{xx, C}$  est le second moment de la surface par rapport à l'axe Ox, passant par le centre de gravité de la surface et  $y_C$  (l'ordonnée du centre de gravité) est la distance entre les deux axes parallèles. Par substitution de  $F_R$  et  $I_{xx, O}$  par leurs expressions susmentionnées dans la relation ci-dessus, on obtient :

$$y_p = y_C + \frac{I_{xx, C}}{\left[ y_C + \frac{p_0}{(\dots g \sin \alpha) A} \right]} \quad (70)$$

Pour  $p_0=0$ , qui est souvent le cas où la pression atmosphérique est négligée, la relation précédente devient :

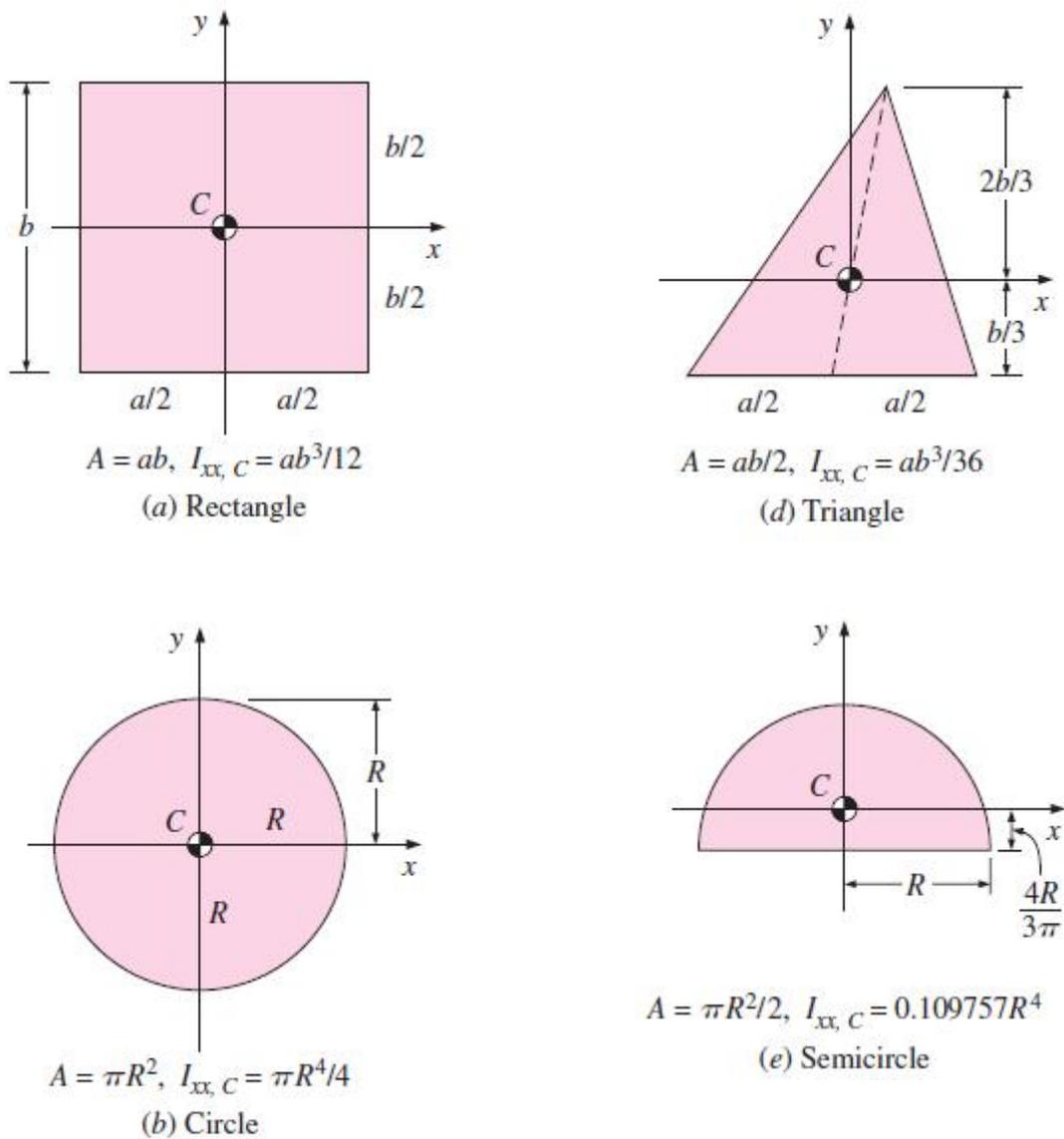
$$y_p = y_C + \frac{I_{xx, C}}{y_C A} \quad (71)$$

En connaissant  $y_p$ , la distance verticale du centre de pression à partir de la surface libre est donnée par :

$$h_p = y_p \cdot \sin \alpha \quad (72)$$

## 2.9. Centres de gravité et moments d'inertie de quelques surfaces usuelles

Le **moment d'inertie** est une grandeur qui caractérise la géométrie d'une section et se définit par rapport à un axe ou un point. Il s'exprime dans le Système international en  $m^4$ . La Fig. 2.17 présente les centres de gravité et les moments d'inertie de quelques géométries usuelles.



**Figure 2.17** Centres de gravité et moments d'inertie de quelques surfaces usuelles

## CHAPITRE 3 :

# DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLES

### 3.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fluides **en mouvement**. Contrairement aux solides, les particules d'un fluide en mouvement peuvent se déplacer à des vitesses différentes. L'écoulement des fluides est un phénomène complexe.

On s'intéresse aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides parfaits incompressibles, en particulier :

- l'**équation de continuité** (conservation de la masse),
- le **théorème de Bernoulli** (conservation de l'énergie),
- le **théorème d'Euler** (conservation de la quantité de mouvement) à partir duquel, on établit les équations donnant la force dynamique exercée par les fluides en mouvement (exemple les jets d'eau).

### 3.2. Ecoulement permanent

Un écoulement est dit *permanent* ou stationnaire lorsqu'en chaque point de l'espace, le vecteur vitesse  $\vec{U}$  varie indépendamment du temps.

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = 0$$

Dans le cas contraire, l'écoulement est dit *non-permanent* ou instationnaire.

### 3.3. Equation de continuité

Considérons une veine d'un fluide incompressible (**Fig. 3.1**), de masse volumique  $\rho$  animée d'un écoulement permanent.

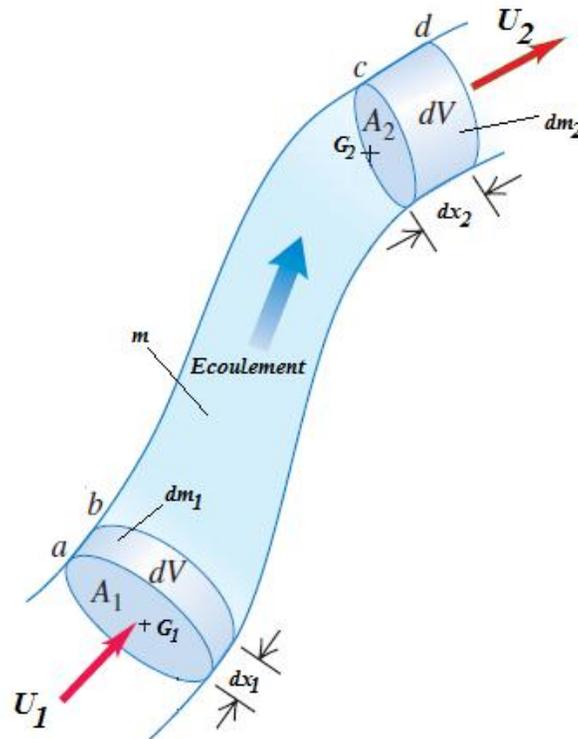
On désigne par :

- ✓  $A_1$  et  $A_2$  respectivement la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant  $t$ ,
- ✓  $A'_1$  et  $A'_2$  respectivement les sections d'entrée et de sortie du fluide à l'instant  $t'=(t+dt)$ ,

- ✓  $\vec{U}_1$  et  $\vec{U}_2$  les vecteurs vitesses d'écoulement respectivement à travers les sections  $S_1$  et  $S_2$  de la veine.
- ✓  $dx_1$  et  $dx_2$  respectivement les déplacements des sections  $S_1$  et  $S_2$  pendant l'intervalle de temps  $dt$ ,
- ✓  $dm_1$  : masse élémentaire entrante comprise entre les sections  $A_1$  et  $A'_1$ ,
- ✓  $dm_2$  : masse élémentaire sortante comprise entre les sections  $A_2$  et  $A'_2$ ,
- ✓  $m$  : masse comprise entre  $A_1$  et  $A_2$ ,
- ✓  $dV_1$  : volume élémentaire entrant compris entre les sections  $A_1$  et  $A'_1$ ,
- ✓  $dV_2$  : volume élémentaire sortant compris entre les sections  $A_2$  et  $A'_2$ ,

**A l'instant  $t$**  : le fluide compris entre  $A_1$  et  $A_2$  a une masse égale à  $(dm_1+m)$

**A l'instant  $t+dt$**  : le fluide compris entre  $A'_1$  et  $A'_2$  à une masse égale à  $(m+dm_2)$ .



**Figure 3.1** Veine de fluide parfait incompressible

La masse déplacée étant conservée, on écrit :

$$dm_1 + m = m + dm_2$$

Soit :

$$dm_1 = dm_2 \tag{73}$$

Donc,

$${}_1.dV_1 = {}_2.dV_2$$

Ou encore :

$${}_1.A_1 .dx_1 = {}_2.A_2 .dx_2,$$

En divisant par  $dt$ , on aboutit à :

$$\dots_1.A_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} = \dots_2.A_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} \Leftrightarrow \dots_1.A_1.U_1 = \dots_2.A_2.U_2$$

Puisque le fluide est incompressible :

$${}_1 = {}_2 =$$

On obtient l'équation de continuité de la sorte :

$$A_1.U_1 = A_2.U_2 \tag{74}$$

Cette relation représente le débit volumique  $Q$  exprimé en (m<sup>3</sup>/s). L'équation de continuité représente la loi de conservation de masse.

### 3. 4 Notion de débit

#### 3.4.1 Débit massique

Le débit massique d'une veine fluide est la limite du rapport  $\frac{dm}{dt}$  quand  $dt$  tend vers 0. Soit :

$$q_m = \frac{dm}{dt} \quad [\text{kg/s}] \tag{75}$$

Où :

-  $q_m$  est la masse du fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite, [kg/s].

-  $dm$  : masse élémentaire en (kg) qui traverse la section pendant un intervalle de temps  $dt$ .

-  $dt$  : intervalle de temps en (s)

En tenant compte des équations précédentes, on obtient :

$$q_m = \frac{dm}{dt} = \dots.A_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} = \dots.A_2 \cdot \frac{dx_2}{dt}$$

Ou encore :

$$q_m = \dots U_1 \cdot A_1 = \dots U_2 \cdot A_2 \quad (76)$$

Compte tenu de la conservation de masse, on peut généraliser l'éq. (76), en posant,

$$q_m = \dots U \cdot A$$

Où :

$q_m$  : Débit massique en (kg/s)

$\rho$  : Masse volumique en (kg/m<sup>3</sup>)

$A$  : Section de la veine fluide en (m<sup>2</sup>)

$U$  : Vitesse moyenne du fluide à travers ( $S$ ) en (m/s).

### 3.4.2 Débit volumique

Le débit volumique d'une veine fluide est la limite du rapport  $\frac{dV}{dt}$  quand  $dt$  tend vers 0.

$$q_v = \frac{dV}{dt} \quad (77)$$

Où :

-  $q_v$  : Volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite [m<sup>3</sup>/s].

-  $dV$  : Volume élémentaire, en (m<sup>3</sup>), traversant une surface  $S$  pendant un intervalle de temps  $dt$ ,

-  $dt$  : Intervalle de temps en secondes (s),

On a aussi la relation entre  $q_m$  et  $q_v$  :

$$q_v = \frac{q_m}{\rho} \quad (78)$$

Soit :

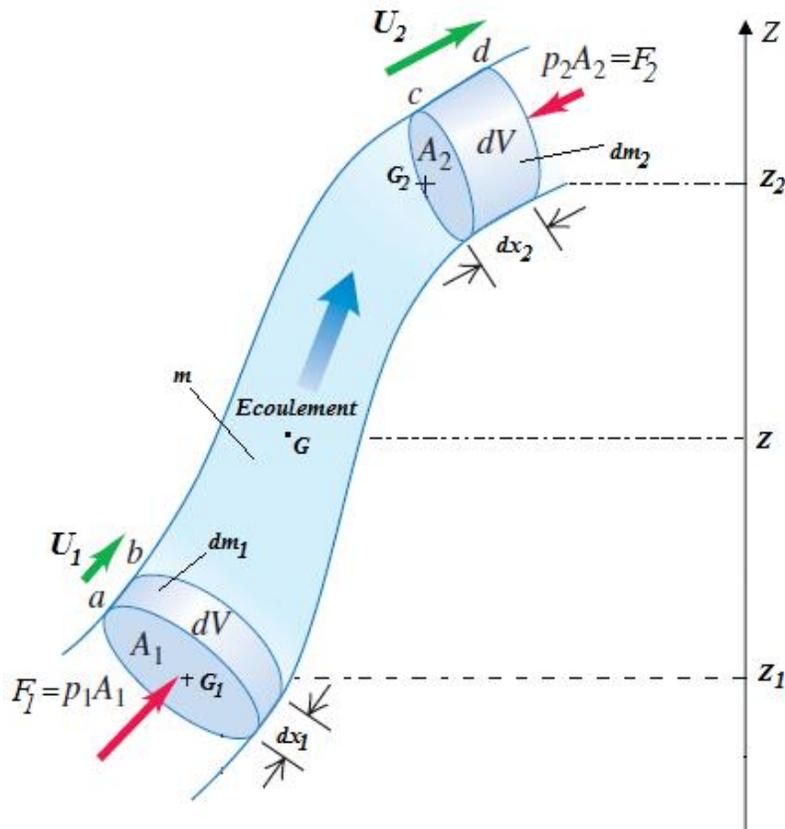
$$q_v = U \cdot A \quad (79)$$

### 3.5 Théorème de Bernoulli (Ecoulement sans échange de travail)

Reprenons le schéma de la veine fluide (**Fig. 3.2**) du paragraphe précédent avec les mêmes notations et les hypothèses suivantes :

- Le fluide est parfait et incompressible.
- L'écoulement est permanent.
- L'écoulement est dans une conduite parfaitement lisse.

On considère l'axe  $Oz$  vertical dirigé vers le haut. On note  $Z_1$ ,  $Z_2$  et  $Z$  respectivement les hauteurs des centres de gravité des masses  $dm_1$ ,  $dm_2$  et  $m$ . On désigne par  $F_1$  et  $F_2$  respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections  $S_1$  et  $S_2$  (**Fig. 3.2**).



**Figure 3.2.** Veine de Fluide en mouvement

A l'instant  $t$ , le fluide de masse  $(dm_1 + m)$  est compris entre les sections  $A_1$  et  $A_2$ . Son énergie mécanique est exprimée comme suit :

$$E_{Méc} = E_{Pot} + E_{Cin} \quad (80)$$

Ou encore :

$$dm_1 \cdot g \cdot Z_1 + m \cdot g \cdot Z + \frac{1}{2} dm_1 \cdot U_1^2 + \int_{S_1}^{S_2} \frac{dm \cdot U^2}{2} \quad (81)$$

A l'instant  $t' = (t + dt)$  le fluide de masse  $(m + dm_2)$  est compris entre  $A'_1$  et  $A'_2$ . Son énergie mécanique est :

$$E'_{Méc} = E'_{Pot} + E'_{Cin} \quad (82)$$

$$m \cdot g \cdot Z + dm_2 \cdot g \cdot Z_2 + \int_{S_1}^{S_2} \frac{dm \cdot U^2}{2} + \frac{1}{2} dm_2 \cdot U_2^2 \quad (83)$$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre  $t$  et  $t'$  :

La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures.

$$E'_{méc} - E_{mec} = W_{Forces\ de\ pression} \quad (84)$$

Le travail des forces pressantes sur l'élément fluide est :

$$W_{Fp} = F_1 \cdot dx_1 - F_2 \cdot dx_2 \quad (85)$$

On a alors,

$$E'_{méc} - E_{mec} = W_{Fp} = p_1 \cdot A_1 \cdot dx_1 - p_2 \cdot A_2 \cdot dx_2 = p_1 \cdot dV_1 - p_2 \cdot dV_2$$

$$dm_2 \cdot g \cdot Z_2 + \frac{1}{2} dm_2 \cdot V_2^2 - dm_1 \cdot g \cdot Z_1 - \frac{1}{2} dm_1 \cdot V_1^2 = \frac{p_1}{\dots_1} dm_1 - \frac{p_2}{\dots_2} dm_2$$

Par conservation de masse :  $dm_1 = dm_2 = dm$  et puisque le fluide est incompressible :  $\dots_1 = \dots_2 = \dots$ ,

On aboutit à l'équation de Bernoulli :

$$\frac{p_2 - p_1}{\dots g} + \frac{1}{2g} (U_2^2 - U_1^2) + (Z_2 - Z_1) = 0 \quad (86)$$

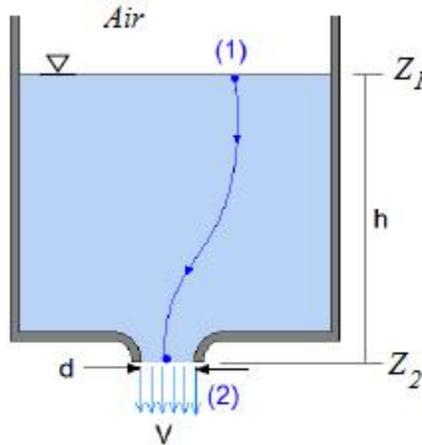
On remarque que, si  $U=0$  (pas de mouvement), on retrouve la relation fondamentale de la statique des fluides :

$$\Delta p = \dots \cdot g \cdot \Delta Z \quad (87)$$

### 3.6 Applications de l'équation de Bernoulli

#### 3.6.1 Vidange d'un réservoir

Considérons un réservoir (**Fig. 3.3**) contenant un liquide et dont la paroi verticale est percée d'un petit orifice à une distance  $h$  de la surface du liquide. On suppose les dimensions du réservoir suffisamment grandes, la surface du réservoir  $S_1$  et celle de l'orifice  $S_2$  telle que  $S_2 \ll S_1$ , sont exposées à l'air. On peut donc négliger les variations du niveau de la surface libre et considérer la vitesse  $U_1 \cong 0$ .



**Figure 3.3** Vidange d'un réservoir

Appliquons l'équation de Bernoulli entre les 02 points ① et ② du réservoir, on écrit :

$$\frac{p_1}{\dots.g} + \frac{U_1^2}{2.g} + Z_1 = \frac{p_2}{\dots.g} + \frac{U_2^2}{2.g} + Z_2 \quad (88)$$

On a :  $Q = U_1 \cdot S_1 = U_2 \cdot S_2$

$$p_1 = p_2 = p_a$$

$$h = Z_1 - Z_2$$

$$U_1 \cong 0 \quad (S_1 \gg S_2) \text{ D'où : } U_2 \ll U_1$$

Il vient donc,

$$U_2 = \sqrt{2.g.h} \quad (\text{Formule de Torricelli}) \quad (89)$$

$U_2$  : est une vitesse théorique  $U_{th}$ .

Par conséquent, le débit théorique du liquide recueilli à l'orifice de section  $S_2$ , est donné par :

$$Q_{th} = U_{th} \cdot S_2 = S_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

En réalité, à causes des forces des frottements fluide-solide, une contraction de la section de vidange est générée, par conséquent, la vitesse de vidange réelle est inférieure à celle obtenue théoriquement.

$$V_r = c_v \cdot V_{th} \quad ; \quad c_v < 1 \text{ (Coeff. de vitesse)} \quad (90)$$

La section du fluide à la sortie de l'orifice est :

$$A_r = c_c \cdot A_{th} \quad ; \quad c_c < 1 \text{ (Coef. de contraction)} \quad (91)$$

Donc, le débit réel à la sortie de l'orifice est :

$$Q_r = A_r \cdot U_r = c_c \cdot c_v \cdot A_{th} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad (92)$$

$$Q_r = A_r \cdot U_r = c_D \cdot A_{th} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = c_D \cdot Q_{th} \quad (93)$$

Avec :  $c_D = c_v \cdot c_c < 1$  (Coeff. de débit)

### ***Temps de vidange total du réservoir :***

A un instant ( $t$ ) donné, on a :

$$q_{V_r} = \frac{dV}{dt} = c_D \cdot A_{th} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad (94)$$

Pendant ( $dt$ ),  $Z$  varie de ( $dz$ )

La variation en volume ( $V$ ) est  $dV = A \cdot dz$

$$t_v = \frac{2 \cdot A \cdot h}{c_D \cdot A_{th} \sqrt{2 \cdot g \cdot h}} \quad (95)$$

### **3.6.2 Tube de Pitot**

On considère un liquide en écoulement permanent dans une canalisation et deux tubes plongeant dans le liquide, l'un débouchant en **2**, face au courant et l'autre en **1** est le long des lignes de courant, les deux extrémités étant à la même hauteur. Au point **1**, le liquide a la même vitesse  $U$  que dans la canalisation et la pression est la même que celle du liquide,  $p_1 = p$ .

En 2, le point d'arrêt, la vitesse est nulle ( $U_2=0$ ) et la pression est  $p_2$  (Fig. 3.4).

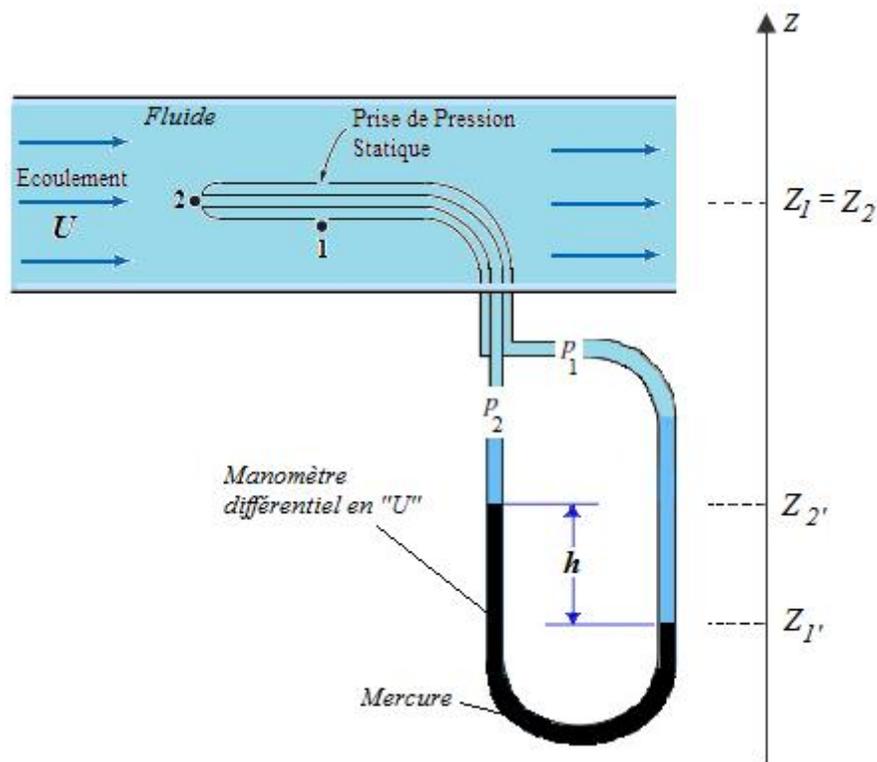


Figure 3.4 Tube de Pitot

Appliquons le théorème de Bernoulli, entre les deux points (1) et (2), on obtient :

$$\frac{p_1}{\dots g} + \frac{U_1^2}{2.g} + z_1 = \frac{p_2}{\dots g} + \frac{U_2^2}{2.g} + z_2 \quad (96)$$

On a :  $z_1 = z_2$  (les deux prises de pressions sans au même niveau)

Et  $U_1=0$  (point d'arrêt)

Alors, il vient :

$$\frac{p_1 - p_2}{\dots g} = \frac{U_2^2}{2.g} \quad (97)$$

$$U_2 = \sqrt{\frac{2.(p_1 - p_2)}{\dots}} \quad (98)$$

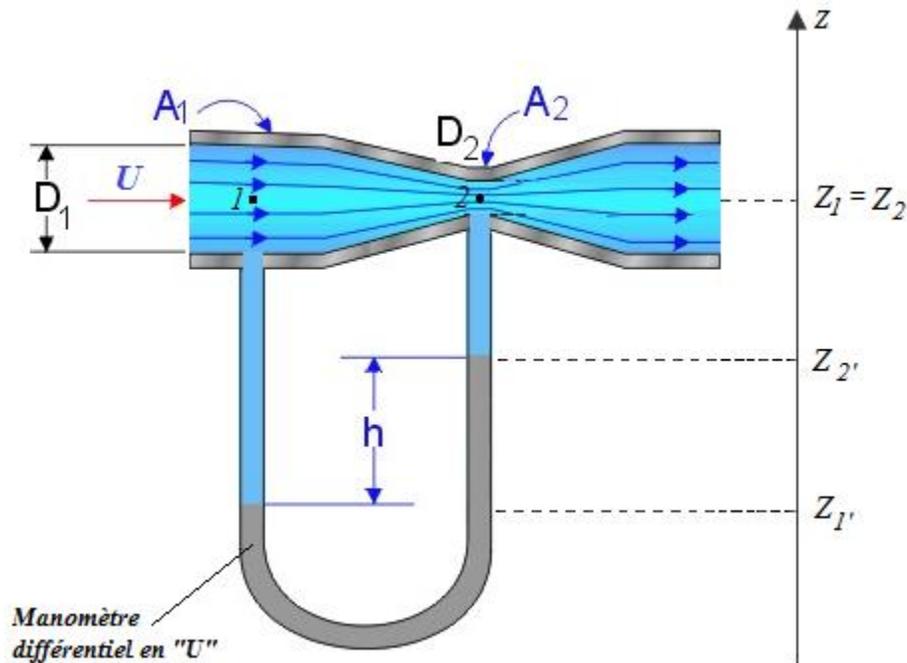
De l'hydrostatique, on a :  $p_1 - p_2 = \dots.g.h$

$$\text{Ce qui donne : } U_2 = \sqrt{2.g.h} \quad (99)$$

### 3.6.3 Tube de Venturi

Un conduit de section principale  $S_1$ , subit un étranglement en  $2$  où sa section est  $S_2$ . La vitesse d'un fluide circulant dans le conduit augmente dans l'étranglement, et sa pression y diminue (**Fig. 3.5**) :

$$U_2 > U_1 \Rightarrow p_2 < p_1$$



**Figure 3.5** Tube de Venturi

Le théorème de Bernoulli s'écrit ici :

$$\frac{p_1}{\dots g} + \frac{U_1^2}{2 \cdot g} + z_1 = \frac{p_2}{\dots g} + \frac{U_2^2}{2 \cdot g} + z_2 \quad (100)$$

D'après l'équation de continuité,

$$Q_v = U_2 \cdot A_2 = U_1 \cdot A_1 \quad (101)$$

D'après la **Fig. 3.5**, on remarque que :  $A_2 < A_1 \Rightarrow U_2 > U_1$  Donc  $p_1 > p_2$

$$p_1 - p_2 = \frac{\dots (U_2^2 - U_1^2)}{2} = \frac{\dots}{2} \cdot U_2^2 \left( 1 - \frac{U_1^2}{U_2^2} \right) \quad (102)$$

En posant :  $U_1 = \frac{U_2 \cdot A_2}{A_1}$ , il vient :

$$p_1 - p_2 = \frac{\dots}{2} \cdot U_2^2 \left( 1 - \frac{A_2^2}{A_1^2} \right) = \frac{\dots}{2} \left( \frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right) \cdot Q_V^2 \quad (103)$$

D'où :

$$p_1 - p_2 = k \cdot Q_V^2 \quad (104)$$

$$\text{Avec } k = \frac{\dots}{2} \left( \frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right)$$

La différence de pression aux extrémités du tube de Venturi est proportionnelle au carré du débit.

### 3.6.4 Diaphragme

Le diaphragme est utilisé comme instrument de mesure de débit d'un fluide parcourant un circuit hydraulique (**Fig.3.6**). Il existe, pour un débit donné, une différence de hauteur dans les tubes piézométriques entre l'amont et l'aval du diaphragme.

L'étude consiste à établir une relation entre le débit volumique d'eau  $Q_V$  traversant le diaphragme et la différence de hauteur d'eau ( $h$ ) dans les tubes.

De l'équation de continuité pour un fluide parfait incompressible, le débit du fluide est le même à travers toutes les sections des tubes. On écrit :

$$Q_V = A_1 \cdot U_1 = A_2 \cdot U_2 = A \cdot U \quad (105)$$

$$D'où : \quad U_1 = \frac{A}{A_1} U$$

Avec  $A$  qui exprime la section de l'orifice du diaphragme.

On applique l'équation de Bernoulli exprimée en hauteur piézométrique entre les points **A** et **C** (**Fig. 3.6**).

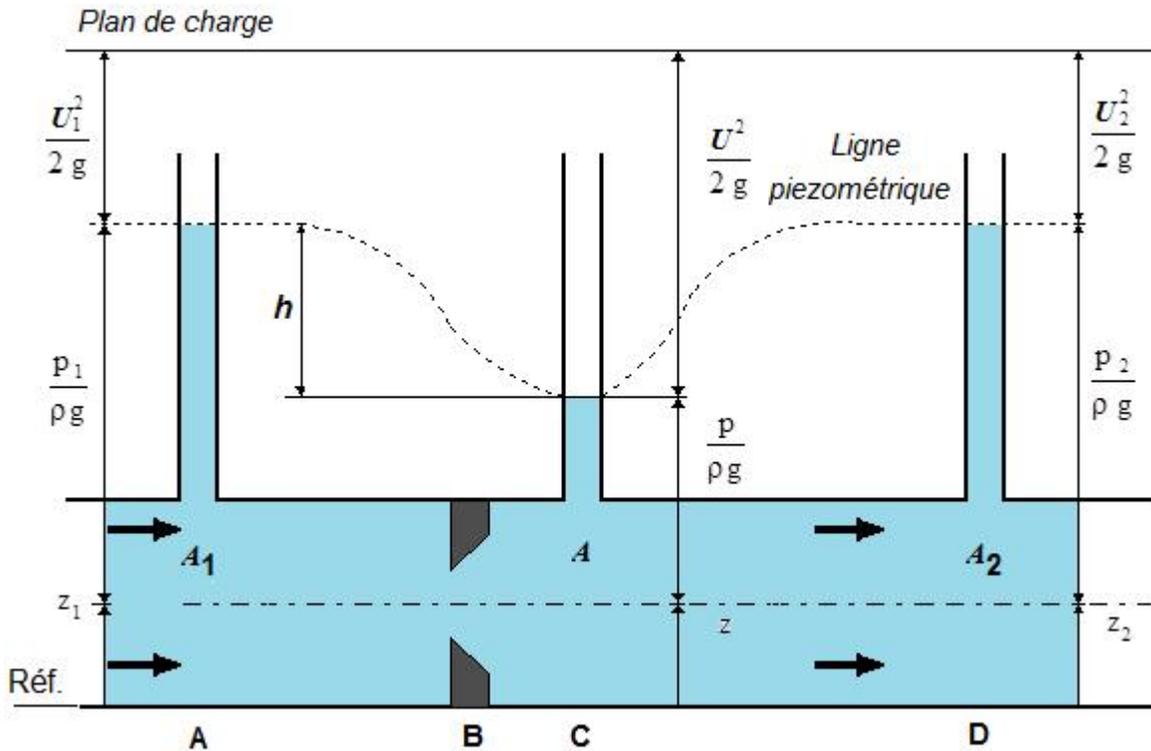
$$\frac{U_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\dots g} = \frac{U^2}{2g} + z + \frac{p}{\dots g} \quad (106)$$

Le tube est horizontal, il vient donc :  $z_1 = z_2 = z$

On obtient : 
$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{U^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} \quad (107)$$

Ou encore 
$$\frac{p_1 - p}{\rho g} = \frac{U^2 - U_1^2}{2g} = h \quad (108)$$

Avec,  $h$  est la différence de hauteur dans les tubes avant et après le diaphragme.



**Figure 3.6** Un diaphragme

La synthèse de l'équation de Bernoulli et de l'équation de continuité permet d'exprimer le débit théorique  $Q_{th}$  dans le diaphragme :

$$Q_{th} = A.U \quad (109)$$

De l'équation (108), on a : 
$$h = \frac{U^2 - U_1^2}{2g}$$

Soit : 
$$U^2 - U_1^2 = 2g h$$

L'équation de continuité permet d'exprimer  $U_1$  en fonction de  $U$  :

$$U_1 = \frac{A}{A_1} U \quad (110)$$

On obtient :  $U^2 - \left(\frac{A}{A_1} U\right)^2 = 2gh$

Soit :  $U^2 - \left(\frac{A}{A_1}\right)^2 U^2 = 2gh$

Puis,  $U^2 \left(1 - \left(\frac{A}{A_1}\right)^2\right) = 2gh$

D'où :  $U = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{A}{A_1}\right)^2}} \quad (111)$

La relation du débit devient :

$$Q_{th} = \frac{A}{\sqrt{1 - \left(\frac{A}{A_1}\right)^2}} \sqrt{2gh} \quad (112)$$

La mesure n'a pas lieu en **B** où il se produit une contraction de la veine fluide, mais en **C**. Pour tenir compte de la section en **C**, il faut utiliser un coefficient de contraction  $C_C$ . Le débit réel s'écrit finalement :

$$Q_R = C_C \cdot Q_{th} \quad (113)$$

Soit :  $Q_R = C_C \frac{S}{\sqrt{1 - \left(\frac{S}{S_1}\right)^2}} \sqrt{2gh} \quad (114)$

### 3.7. Théorème de Bernoulli (Ecoulement avec échange de travail)

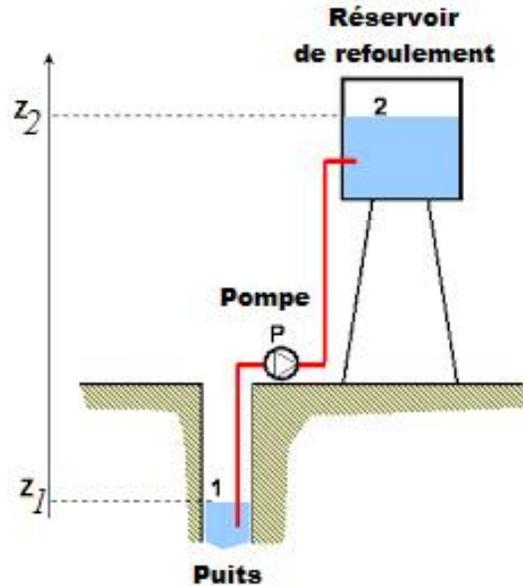
Lorsque le fluide traverse une machine hydraulique (**Fig. 3.7**), il échange de l'énergie avec cette machine sous forme de travail ( $\Delta W$ ) pendant une durée ( $\Delta t$ ).

La puissance  $P$  échangée est :

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad [\text{Watt}] \quad (115)$$

$P > 0$  si l'énergie est reçue par le fluide (cas de pompe) ;

$P < 0$  si l'énergie est fournie par le fluide (cas de turbine) ;



**Figure 3.7** Un fluide traversant une pompe hydraulique

L'application de l'équation de Bernoulli entre les points ① et ② permet d'écrire :

$$\frac{1}{2} \dots (v_2^2 - v_1^2) + \dots g \cdot (z_2 - z_1) + (p_2 - p_1) = \frac{P}{Q_v} \quad (116)$$

### 3.8 Théorème d'Euler

Une application directe du théorème d'Euler consiste à évaluer entre autre des forces exercées par les jets d'eau sur les aubes de turbines. Celles-ci sont exploitées dans divers domaines : production de l'énergie électrique à partir de l'énergie hydraulique grâce aux turbines, coupe des

matériaux, etc. Le théorème d'Euler résulte de l'application du théorème de quantité de mouvement à l'écoulement d'un fluide :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (117)$$

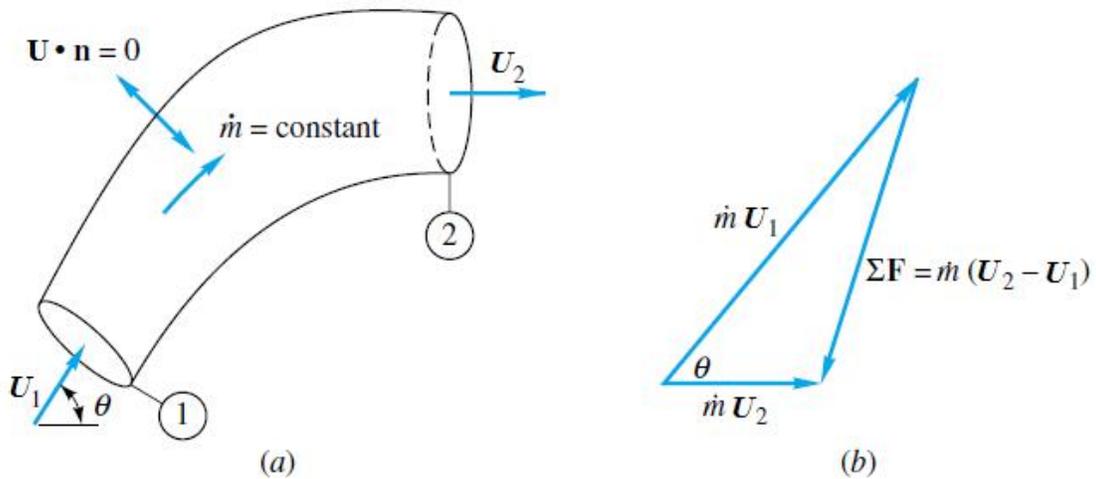
Avec :  $\vec{P} = m\vec{U}_G$  quantité de mouvement

Ce théorème permet de déterminer les efforts exercés par le fluide en mouvement sur les objets qui l'environnent.

**Enoncé :**

La résultante ( $F_{ext}$ ) des forces mécaniques extérieures exercées sur un fluide isolé (fluide contenu dans l'enveloppe, voir (**Fig. 3.8**) limitée par les sections **1** et **2** est égale à la variation de la quantité de mouvement du fluide qui entre en  $A_1$  à une vitesse  $\vec{U}_1$  et sort par la section  $A_2$  à une vitesse  $\vec{U}_2$ . Elle est exprimée par la relation suivante :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \dot{m}(\vec{U}_2 - \vec{U}_1) \quad (118)$$



**Figure 3.8** Forces exercées sur la paroi d'un tube de courant unidimensionnel avec débit constant : (a) tube de courant en écoulement permanent ; (b) triangle des forces

## CHAPITRE 4 :

# DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES REELS

### 4.1. Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle a pour rôle de souligner l'importance des unités en sciences physiques qui donnent un arrangement précis à toutes les formules littérales. Elle fournit des méthodes pour choisir les grandeurs appropriées et leur bonne présentation. L'analyse dimensionnelle est un outil théorique servant à interpréter les problèmes à partir des dimensions des grandeurs physiques mises en jeu. Lors de l'établissement d'une expression, l'analyse dimensionnelle permet de vérifier son homogénéité et la corriger le cas échéant, sachant qu'une expression non homogène ne peut être que fautive. C'est une technique très utile dans tous les domaines expérimentaux de l'ingénierie. S'il est possible d'identifier les grandeurs impliquées dans un phénomène physique, l'analyse dimensionnelle peut fournir une équation reliant toutes les grandeurs physiques impliqués les unes aux autres.

### 4.2. Dimensions, unités et système international

Les grandeurs physiques qui décrivent un phénomène physique sont caractérisées par leurs dimensions. Une grandeur peut avoir la dimension d'une longueur, d'une énergie, d'une masse, d'une vitesse, etc... La notion de dimension est très générale et ne suppose aucun choix particulier d'unité. Le système international (SI) compte sept unités de base (voir **Table 4.1**) censées quantifier des grandeurs physiques indépendantes. Chaque unité à un symbole.

**Table 4.1 Les unités de base du système SI**

Grandeur physique	Dimension	Unité SI
Longueur	L	Le mètre (m)
Masse	M	Le kilogramme (kg)
Temps	T	La seconde (s)
Courant électrique	I	L'ampère (A)
Température	$\theta$	Le kelvin (K)
Quantité de matière	N	La mole (mol)
Intensité lumineuse	J	La candela (cd)

### 4.3. Théorème de Vaschy-Buckingham

L'analyse dimensionnelle des résultats expérimentaux des problèmes de mécanique des fluides peu connus, conduit à certaines grandeurs adimensionnelles (nombres) souvent appelés  $\pi$ . Sur la base de la notion d'homogénéité dimensionnelle, ces paramètres sans dimension, peuvent être groupés et exprimés sous des formes fonctionnelles. Cette idée a été présentée par Buckingham (1867-1940) dont le théorème porte son nom.

Le théorème de *Vaschy et Buckingham*, appelé aussi « *théorème f* », s'énonce comme que :

Soit un problème physique comportant  $n$  grandeurs différentes (variables) ( $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ), comme la vitesse, la pression, la viscosité, etc., dont les dimensions fondamentales desquelles interviennent sont au nombre de  $m$ . Il existe une relation qui relie toutes ces quantités entre elles.

On écrit :

$$w(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = 0 \quad (119)$$

Si  $f_1, f_2, f_3, \dots$ , représentent les nombres adimensionnelles parmi les quantités physiques  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , on peut alors exprimer la relation précédente sous la forme d'une équation à  $(n-m)$  nombres sans dimensions par *la méthode f*, de la forme :

$$f(f_1, f_2, f_3, \dots, f_{n-m}) = 0 \quad (120)$$

Où

$$f_1 = f(f_2, f_3, \dots, f_{n-m}) = 0$$

### 4.4. Les étapes de l'analyse dimensionnelle

Pour réaliser une analyse dimensionnelle, on doit considérer les neuf étapes suivantes :

1. Dresser la liste de toutes les grandeurs physiques ( $A_i$ ) et leurs dimensions respectives. Omettre toute grandeur physique dépendante d'une ou d'autres grandeurs.
2. Écrire la fonction

$$w(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = 0 \quad (121)$$

3. Choisir les variables répétitives, qui doivent contenir toutes les  $m$  dimensions du problème. Souvent, on retient une variable parce qu'elle détermine l'échelle, une autre,

parce qu'elle détermine les conditions cinématiques ; il faut une variable liée à la masse ou aux forces du système.

4. Écrire les paramètres  $\pi$  en fonction des exposants inconnus :

$$f_1 = V^{x_1} D^{y_1} \dots z_1 \sim \left(\frac{L}{T}\right)^{x_1} L^{y_1} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{z_1} \left(\frac{M}{LT}\right) = M^0 L^0 T^0 \quad (122)$$

S'assurer que toutes les quantités  $A_i$  sont incluses dans les groupes  $f_i$ .

5. Écrire les équations des paramètres  $\pi$  pour les exposants ; on doit obtenir une somme algébrique nulle pour chaque dimension (homogénéité).
6. Résoudre les équations simultanément.
7. Remplacer les exposants trouvés ( $x_1, y_1, z_1, \dots$ ) dans les expressions de  $\pi$  (formulées en étape 4) pour obtenir les grandeurs  $\pi$  sans dimension.
8. Déterminer la fonction :

$$f(f_1, f_2, f_3, \dots, f_{n-m}) = 0$$

S'assurer que tous les paramètres  $f_i$  sont indépendants les uns des autres.

9. Mettre les résultats sous la forme de nombres sans dimensions connus ( $Re, Ma, Fr$ , etc.).

#### 4.5. Exemple d'analyse dimensionnelle dans la mécanique des fluides

La Fig. 4.1 montre l'écoulement d'un fluide visqueux dans une conduite cylindrique rugueuse.

Les pertes de charge par unité de longueur  $\frac{\Delta p}{L}$  entre les points 1 et 2 sont fonction des grandeurs suivantes  $D, \dots, \nu, U, \nu$ .

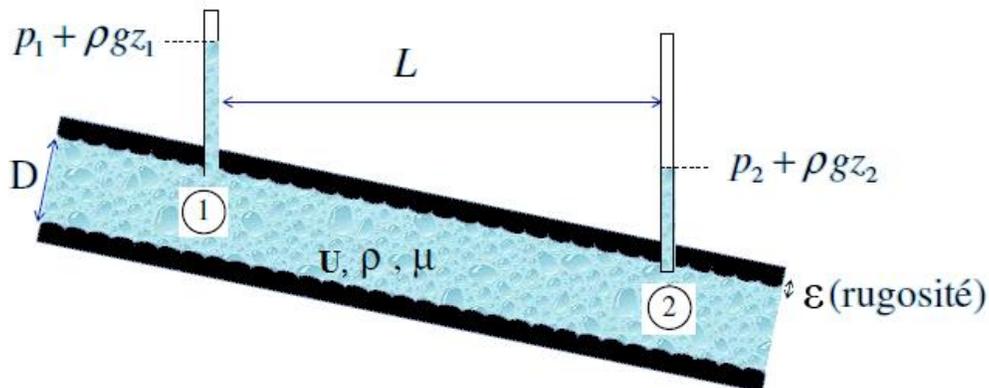


Figure 4.1 Les pertes de charge linéaires dans une conduite cylindrique rugueuse

En utilisant le théorème de Vaschy-Buckingham, proposer une relation pour présenter les résultats expérimentaux en fonction de paramètres adimensionnels.

**Solution :**

**1) Inventaire des variables et de leurs dimensions**

Variable	Symbole	Dimension
Perte de charge par unité de longueur	$p/L$ (Pa/m)	$ML^{-2}T^{-2}$
Diamètre de la conduite	$D$ (m)	$L$
Masse volumique du fluide	( $kg/m^3$ )	$ML^{-3}$
Viscosité dynamique	$\mu$ (Pa.s)	$ML^{-1}T^{-1}$
Vitesse moyenne de l'écoulement	$U$ (m/s)	$LT^{-1}$
Rugosité absolue de surface de la conduite	(m)	$L$

**2) Formulation de la fonction algébrique :**  $\frac{\Delta p}{L} = f(D, \dots, \mu, U, \nu)$

**3) Détermination du nombre des grandeurs adimensionnels**

On a 7 grandeurs avec trois dimensions (MLT). On déduit donc ( $7 - 3 = 4$ ) paramètres  $\pi$ , soient :

$\pi_1, \pi_2, \pi_3$  et  $\pi_4$

Si on prend  $U, D$  et  $\dots$  comme variables qui se répètent (car les trois contiennent les dimensions fondamentales MLT).

**4) Écriture des paramètres  $f$  en fonction des exposants inconnus :**

Les nombres  $\pi$  qu'on peut former sont les suivants :

$$f_1 = U^{x_1} D^{y_1} \dots z_1 \Delta p = M^0 L^0 T^0$$

$$f_2 = U^{x_2} D^{y_2} \dots z_2 l = M^0 L^0 T^0$$

$$f_3 = U^{x_3} D^{y_3} \dots z_3 \nu = M^0 L^0 T^0$$

$$f_4 = U^{x_4} D^{y_4} \dots z_4 \sim = M^0 L^0 T^0$$

**5) Écriture d'équations des paramètres  $f$  pour les exposants**

Les nombres  $\pi$  exprimés en termes de dimensions sont les suivants :

$$f_1 = \left(\frac{L}{T}\right)^{x_1} L^{y_1} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{z_1} \left(\frac{M}{LT^2}\right) = M^0 L^0 T^0$$

$$f_2 = \left(\frac{L}{T}\right)^{x_2} L^{y_2} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{z_2} L = M^0 L^0 T^0$$

$$f_3 = \left(\frac{L}{T}\right)^{x_3} L^{y_3} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{z_3} L = M^0 L^0 T^0$$

$$f_4 = \left(\frac{L}{T}\right)^{x_4} L^{y_4} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{z_4} \left(\frac{M}{LT}\right) = M^0 L^0 T^0$$

**6, 7) Résolution des équations et remplacement des exposants ( $x_1, y_1, z_1, \dots$ ) dans les expressions de  $f$**

$$f_1 = M^{(z_1+1)} L^{(x_1+y_1-3z_1-1)} T^{(-x_1-2)} = M^0 L^0 T^0$$

On obtient,  $z_1 = -1, y_1 = 0, x_1 = -2$

$$\text{Donc, } f_1 = \frac{\Delta p}{\dots U^2}$$

$$f_2 = M^{(z_2)} L^{(x_2+y_2-3z_2+1)} T^{(-x_2)} = M^0 L^0 T^0$$

On obtient,  $z_2 = 0, y_2 = -1, x_2 = 0$

$$\text{Donc, } f_2 = \frac{L}{D}$$

De la même manière, on détermine :  $x_2, y_3, z_3$  et  $x_4, y_4, z_4$

$$\text{On obtient : } f_3 = \frac{v}{D} \quad \text{et} \quad f_4 = \frac{\sim}{\dots UD} = \frac{1}{\text{Re}}$$

**8) L'écriture de la relation finale :**

$$\text{La relation finale est : } f_1 = f(f_2, f_3, f_4)$$

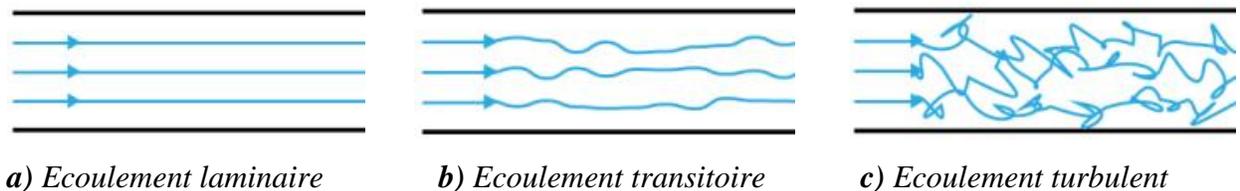
Où :

$$\frac{\Delta p}{\dots U^2} = f\left(\frac{L}{D}, \frac{v}{D}, \frac{1}{\text{Re}}\right)$$

## 4.6 Les régimes d'écoulement

Les expériences réalisées par **Reynolds** (1883) lors de l'écoulement d'un liquide dans une conduite cylindrique rectiligne, dans laquelle arrive également un filet de liquide coloré, ont montré l'existence de trois régimes d'écoulement : **laminaire**, **transitoire** et **turbulent**.

L'**écoulement laminaire** (Fig. 4.2.a) est caractérisé par une seule direction (composante) de vitesse (vecteurs vitesse parallèles), un **écoulement turbulent** (Fig. 4.2.c) est caractérisé par des tourbillons dans le fluide, le passage du régime laminaire au régime turbulent est dit régime d'**écoulement transitoire** (voir Fig. 4.2.b).



**Figure 4.2** Les différents régimes d'écoulements des fluides

En utilisant des fluides divers (viscosités différentes), en faisant varier le débit et le diamètre de la canalisation, Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent, est un **nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds**.

En effet, il permet de déterminer le régime d'écoulement du fluide. Il est donné par la relation suivante :

$$R_e = \frac{U \cdot D}{\epsilon} \quad (123)$$

Où :  $R_e = \frac{U \cdot D}{\sim}$

Avec :

- $U$  : vitesse d'écoulement (m/s)
- $D$  : diamètre du conduit (m)
- 1  $\epsilon$  : viscosité cinématique (m<sup>2</sup>/s)
- $\mu$  : viscosité dynamique (N.s/m<sup>2</sup>)
- $\rho$  : masse volumique du fluide (kg/m<sup>3</sup>)

D'après la relation ci-dessus, le nombre de Reynolds représente une balance entre les forces d'inertie et les forces visqueuses (forces de frottement).

De l'expérience, Il est montré que pour un écoulement dans une conduite, que :

*Si  $R < 2000$  : l'écoulement est laminaire.*

*Si  $R > 3000$  : l'écoulement est turbulent.*

*Si  $2000 < R < 3000$  : l'écoulement est transitoire.*

Ces valeurs doivent être considérées comme des ordres de grandeur, le passage d'un type d'écoulement à un autre se fait progressivement.

## 4.7. Les pertes de charges

### 4.7.1. Le phénomène

#### a) Observations

- ✓ La pression d'un liquide réel diminue tout au long d'une canalisation dans laquelle il s'écoule, même si elle est horizontale et de section uniforme, contrairement au théorème de Bernoulli.
- ✓ La pression d'un fluide réel varie après son passage à travers un coude, une vanne ou un changement de section (rétrécissement, élargissement).

#### b) Conclusion

Un **fluide réel**, en **mouvement**, subit des **pertes d'énergie** dues aux frottements sur les parois de la canalisation (*pertes de charge linéaires*) ou sur les "accidents" de parcours (*pertes de charge singulières*).

### 4.7.2 Influence des différentes grandeurs sur les pertes de charge

Lorsque l'on considère un fluide réel, les pertes d'énergie spécifiques appelées souvent **pertes de charges**, dépendent de la forme, des dimensions et de la rugosité de la canalisation, de la vitesse d'écoulement et de la viscosité du fluide mais non de la valeur absolue de la pression qui règne dans le fluide.

La différence de pression  $p = p_1 - p_2$  entre deux points (1) et (2) d'un circuit hydraulique a pour origine (voir **Fig. 4.3**) :

- ✓ Les frottements du fluide sur la paroi interne de la tuyauterie génèrent les **pertes de charge linéaires ou systématiques**.

- ✓ Les résistances à l'écoulement, provoquées par les accidents de parcours (coudes, élargissements ou rétrécissement de la section, organes de réglage, etc.) ; sont appelées **pertes de charge singulières**.

Le calcul de ces pertes de charge met en présence les principales grandeurs suivantes :

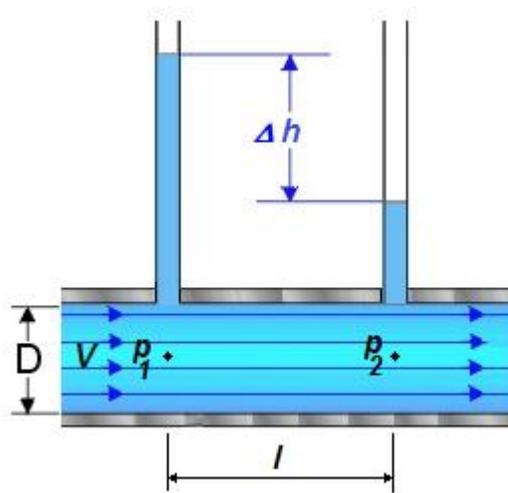
**Le fluide** caractérisé par :

- sa masse volumique .
- sa viscosité cinématique .

**La conduite** caractérisée par :

- sa section (sa forme) en général circulaire (diamètre  $D$ ).
- sa longueur  $L$ .
- sa rugosité  $v$  (hauteur moyenne des aspérités de la paroi).

Ces éléments sont liés par des grandeurs comme la vitesse moyenne d'écoulement  $U$  ou le débit  $Q_V$  et le nombre de Reynolds ( $Re$ ) qui joue un rôle primordial dans le calcul des pertes de charge.



**Figure 4.3** Pertes de charge dans une conduite

### 4.7.3 Pertes de charge linéaires

#### 4.7.3.1 Généralités

Ce genre de perte est causé par le frottement intérieur qui se produit dans les fluides ; il se rencontre dans les conduits **lisses** aussi bien que dans les conduits **rugueux**.

Lors de l'écoulement d'un fluide réel incompressible, entre deux points distants d'une longueur  $L$ , dans une conduite de diamètre  $D$  apparaît une perte de pression  $p$ , exprimée sous la forme suivante (Equation de **Darcy-Weisbach** (Différence de pression)) :

$$\Delta p = \left\{ \dots \frac{U^2 L}{2 D} \right. \quad (124)$$

Cette relation peut être réécrite sous la forme suivante (Différence de hauteur) :

$$\Delta h = \lambda \frac{U^2 L}{2g D} \quad (125)$$

Avec,

$\lambda$  : est un coefficient sans dimension appelé **coefficient de perte de charge** (Coeff. de frottement)

Le calcul des pertes de charge repose entièrement sur la détermination de ce coefficient .

#### 4.7.3.2 Cas d'un écoulement laminaire $Re < 2000$ :

Dans ce cas, on peut montrer que le coefficient  $\lambda$  est uniquement fonction du nombre de Reynolds  $Re$  ; l'état de la surface n'intervient pas et donc  $\lambda$  ne dépend pas de la hauteur moyenne des aspérités du conduit  $v$ , ni de la nature du conduit.

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (\text{Relation de Poiseuille}) \quad (126)$$

L'expression de  $\lambda h$  (cf. relation 125) devient alors :

$$\Delta h = \lambda \frac{U^2 L}{2g D} = \frac{64 \cdot U^2 L}{2g D Re}$$

Soit 
$$\Delta h = \frac{32 \cdot UL}{g D^2} \quad (127)$$

Il est alors immédiat de voir que  $h$  est proportionnel à la vitesse  $U$  et donc au débit  $Q$ , ainsi qu'à la viscosité cinématique  $\nu$  et la longueur  $L$  de la conduite, et inversement proportionnel au diamètre  $D$  de la conduite.

#### 4.7.3.3 Cas d'un écoulement turbulent $Re > 3000$ :

Dans ce régime, les écoulements sont beaucoup plus complexes et la détermination du coefficient de perte de charge résulte des mesures expérimentales. C'est ce qui explique la diversité des formules qui ont été proposées pour sa détermination.

**En régime turbulent**, l'état de la surface devient sensible et son influence est d'autant plus grande que le nombre de Reynolds  $Re$  est grand. Toutes les études ont montré l'influence de la rugosité et elles sont attachées par la suite à chercher la variation du coefficient  $\lambda$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re$  et de la rugosité absolue  $v$  de la conduite.

La formule de *Colebrook-White* est actuellement considérée comme celle qui traduit le mieux les phénomènes d'écoulement en régime turbulent. Elle est présentée sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left( \frac{\nu}{3.7D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} \right) \quad (128)$$

L'utilisation directe de cette formule exigerait, du fait de sa forme implicite, un calcul par approximations successives, on emploie aussi en pratique des diagrammes (abaques), voir (**Fig. 4.4**). Pour simplifier la relation précédente. On peut chercher si l'écoulement est **hydrauliquement lisse** ou **rugueux** pour évaluer la prédominance des deux termes entre parenthèses dans la relation de *Colebrook-White*.

#### Remarque :

Pour le calcul du coefficient de perte de charge  $\lambda$ , on utilise souvent des formules empiriques plus simples, valables pour des cas particuliers et dans un certain domaine du nombre de Reynolds, par exemple :

Pour un *régime hydrauliquement lisse*

✓ **Formule de Blasius :** ( $3000 < Re < 10^5$ ),  $\lambda = 0.316 Re^{-0.25}$  (129)

✓ **Relation de Karman-Nikuradzé :** ( $10^5 < Re < 10^8$ ),  $\lambda = 0.0032 + 0.221 Re^{-0.237}$  (130)

Pour un *régime hydrauliquement intermédiaire*

✓ **Relation de Churchill :**  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.457 \cdot \text{Ln} \left[ \left( \frac{7}{Re} \right)^{0.9} + 0.27 \frac{\nu}{D} \right]$  (131)

Pour un *régime hydrauliquement rugueux*

✓ **2<sup>ème</sup> relation de Nikuradzé :**  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.46 \cdot \text{Ln} \left[ \left( \frac{R}{\nu} \right) + 4.92 \right]$  (132)

#### 4.8.3.4. Diagramme de Moody

En pratique, on utilise le diagramme de Moody qui représente le coefficient de perte de charge en fonction du nombre de Reynolds  $Re$  et de la rugosité relative ( $\nu/D$ ), (**Fig.4.4**).

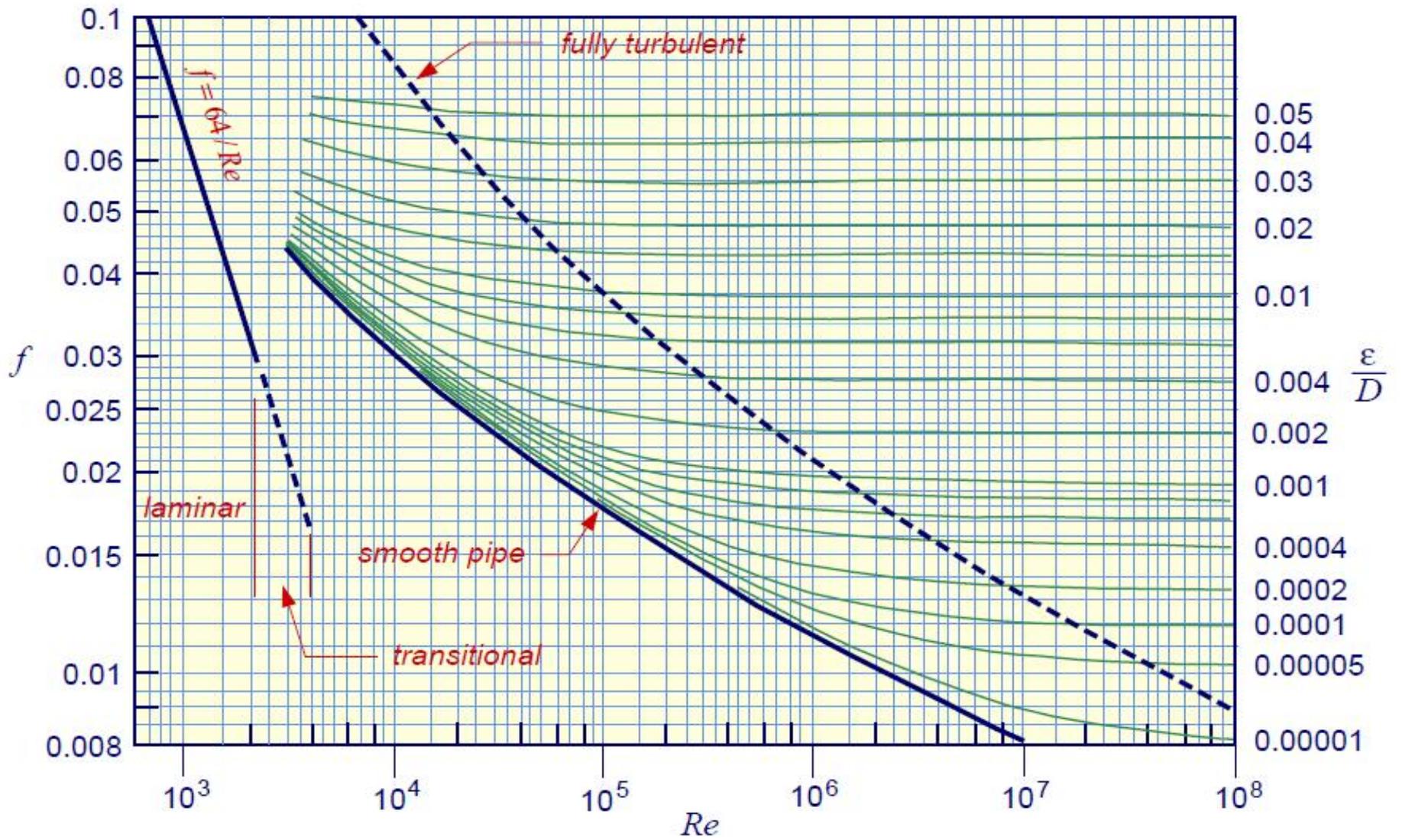


Figure 4.4 Diagramme de Moody

#### 4.7.4. Pertes de charge singulières

D'après les expériences, il est montré dans beaucoup de cas que les pertes de charge singulières sont proportionnelles au carré de la vitesse et sont exprimées par la relation suivante :

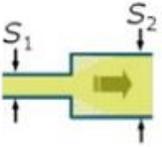
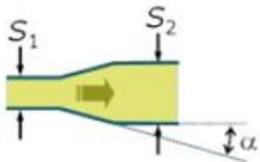
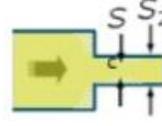
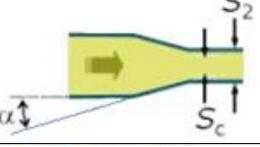
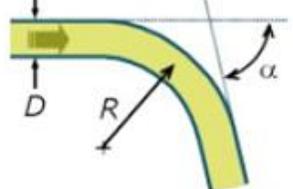
$$\Delta p = K \frac{\rho V^2}{2} \quad (133)$$

Où en termes de hauteur :

$$\Delta h = K \frac{V^2}{2g} \quad (134)$$

$K$  : est le coefficient de perte de charge singulière, il est fonction de la singularité géométrique et du nombre de Reynolds. Ce coefficient est déterminé expérimentalement. Le coefficient  $K$  est donné pour différentes configurations pratiques dans la **Table 4.2** suivante :

**Table 4.2** Quelques singularités typiques avec les coefficients de perte de charge associés.

<p><b>Elargissement brusque</b></p> $K = (1 - S_1/S_2)^2$ 	<p><b>Divergent</b></p> $K = (1 - S_1/S_2)^2 \sin \alpha$ 
<p><b>Rétrécissement brusque</b></p> $K = (1/\mu - 1)^2$ $\mu = S_c/S_2$ 	<p><b>Convergent</b></p> $K = (1/\mu - 1)^2 \sin \alpha$ $\mu = S_c/S_2$ 
<p><b>Coude brusque</b></p> $K = \sin^2 \alpha + 2 \sin^4 \frac{\alpha}{2}$ 	<p><b>Coude arrondi</b></p> $K = \frac{\alpha}{\pi} [0,131 + 1,847(D/R)^{7/2}]$ 
<p><b>Entrée brusque d'un canal</b></p> $K = 0,5$ 	<p><b>Entrée progressive d'un canal</b></p> $K = 0,04$ 

#### 4.8. Théorème de Bernoulli généralisé

Lors d'un écoulement d'un fluide réel entre deux points (1) et (2), il peut y avoir des *échanges d'énergie* entre ce fluide et le milieu extérieur :

- ✓ par **travail à travers une machine**, pompe ou turbine ; la puissance échangée étant  $P$  (voir Théorème de Bernoulli § 3.5)
- ✓ par **pertes de charge** dues aux frottements du fluide sur les parois ou les accidents de parcours ; la différence de pression étant  $p$  (voir ci-dessus § 4.2).

Le théorème de Bernoulli s'écrit alors sous la forme générale :

$$\frac{1}{2} \dots (V_2^2 - V_1^2) + \dots g(z_2 - z_1) + (p_2 - p_1) = \frac{\sum P}{Q_v} - \Delta p \quad (135)$$

Avec :

- ✓  $P$  : somme des puissances échangées entre le fluide et le milieu extérieur, à travers une machine, entre les points (1) et (2) :
  - $P > 0$  si le fluide reçoit de l'énergie de la machine (pompe),
  - $P < 0$  si le fluide fournit de l'énergie à la machine (turbine),
  - $P = 0$  s'il n'y a pas de machine entre (1) et (2).
- ✓  $p$  : somme des pertes de charge entre les points (1) et (2).

# Références bibliographiques

- [1] Y. Cengel and J. Cimbala, Fluid mechanics Fundamentals and applications, 3<sup>rd</sup> edition, McGraw Hill, 2001.
- [2] R. Ouziaux, J. Perrier, Mécanique des fluides appliquée, DUNOD, Paris, 1998.
- [3] Frank M. White, Fluid mechanics, 4<sup>th</sup> edition, McGraw Hill, Inc. New York, 1999.
- [4] M. Carlier, Hydraulique générale et appliquée, 3<sup>ème</sup> édition, Eyrolles, Paris, 1986.
- [5] Bruce R. Munson, Donald F. Young, Heodore H. Okiishi, Wade W. Huebsch, Fundamentals of fluid mechanics, 6th edition, John Wiley & Sons, Inc. United States of America.
- [6] R. K. Bansal, A Textbook of Fluid Mechanics and Hydraulic Machines, 9th edition, LP.
- [7] Andrew Sleigh, An Introduction to Fluid Mechanics, School of Civil Engineering, University of Leeds. May 2001.
- [8] J. M. McDonough Lectures in elementary fluid dynamics: Physics, Mathematics and Applications, Departments of Mechanical Engineering and Mathematics, University of Kentucky, Lexington, KY, 5th edition, 2009.

# Annexe

## Unités et conversions

Nom	Symbole	Dimensions	Unité SI	Autres unités	
				Nom, symbole	Valeur en SI
Longueur	L	L	mètre (m)	pouce (in)	$2.54 \times 10^{-2}$ m
				pied (ft)	$30.48 \times 10^{-2}$ m
Surface	S ou A	L <sup>2</sup>	mètre carré (m <sup>2</sup> )	pouce carré (in <sup>2</sup> )	$6.451 \times 10^{-4}$ m <sup>2</sup>
				pied carré (ft <sup>2</sup> )	$9.29 \times 10^{-2}$ m <sup>2</sup>
Volume	V	L <sup>3</sup>	mètre cube (m <sup>3</sup> )	litre (l)	$10^{-3}$ m <sup>3</sup>
Masse	m	M	kilogramme (kg)	tonne (t)	$10^3$ kg
				livre (lb)	0.4536 kg
Masse volumique	$\rho$	ML <sup>-3</sup>	kilogramme par mètre cube (kg/m <sup>3</sup> )	gramme par centimètre cube (g/cm <sup>3</sup> )	$10^{-3}$ kg/m <sup>3</sup>
Temps	t	T	seconde (s)	minute (min)	60 s
				heure (h)	3600 s
				jour (d)	$8.64 \times 10^4$ s
				année (a)	$3.165 \times 10^7$ s
Vitesse	v	LT <sup>-1</sup>	mètre par seconde (m/s)	kilomètre par heure (km/h)	0.2778 m/s
Force	F	MLT <sup>-2</sup>	newton (N)	kilogramme-force	9.80665 N
Energie, travail, quantité de chaleur	W	L <sup>2</sup> MT <sup>-2</sup>	Joule (J)	calorie (cal)	4.185 J
				watt-heure (w.h)	3600 J
				British thermal unit (Btu)	$1.056 \times 10^3$ J
Puissance	P	L <sup>2</sup> MT <sup>-3</sup>	watt (w)	1 cheval vapeur (ch din)	736 w
Contrainte, pression	$\dagger, p$	ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>	pascal (pa)	bar	$10^5$ pa
				livre par pouce carré (psi)	$6.895 \times 10^3$ pa
Viscosité dynamique	$\sim$	LM <sup>-1</sup> T <sup>-1</sup>	pascal-seconde (pa.s)	Poise (P)	$10^{-1}$ pa.s
Fréquence	f	T <sup>-1</sup>	hertz (hz)	cycle par seconde	1 hz
Angle plan	$\alpha$	A	Radian (rad)	degré (°)	$\pi/180$ rad
				tour (tr)	$2\pi$ rad
				minute (')	$\pi/10800$ rad
				seconde (")	$\pi/64800$ rad