

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Hassiba Ben Bouali - Chlef

Faculté de Technologie

Département Génie des procédés

Cours Notions aux phénomènes de transfert

Dr. DJAFER Abderrahmane

Année universitaire 2016 - 2017

AVANT – PROPOS

Ce cours « Notions aux phénomènes de transfert » s'adresse aux étudiants de LMD dans le cadre des Licences, génie des procédés et environnement, mais aussi à ceux qui souhaitent acquérir les notions de base des phénomènes de transfert.

Cet ouvrage est le fruit d'une longue année de travail au département de génie des procédés à l'université Hassiba Ben Bouali de Chlef.

Cet ouvrage a vu le jour grâce à l'aide précieuse des professeurs M. Douani et B. Bensebia.

Les phénomènes de transfert (chaleur, matière et quantité de mouvement) sont d'une importance capitale dans le domaine de science et technologie car il intervient dans de nombreux domaines industriels.

Ce cours se propose de donner une compréhension générale de ces phénomènes tout en exposant. Les lois fondamentales de Fourier, Newton et Fick ainsi que l'initiation des étudiants aux calculs des différent flux de matières et de chaleur et la démonstration des équations des bilans pour l'équilibre et pour l'écoulement des fluides.

Chapitre I Introduction aux modes de transfert

I. Introduction.....	1
I.1 Définition d'un système.....	1
1.1.2 Les contraintes d'un système.....	1
I.1.2 Les actions sur les grandeurs extensive.....	3
I.2 Les lois linéaires de transport et de capacité.....	4
I.2.1 Bilans de matière, d'énergie et de quantité de mouvement.....	4
I.2.2 Les lois linéaires de transport moléculaire.....	9

Chapitre II Transfert de chaleur

II. Généralités Sur Les Transferts De Chaleur.....	13
II.1 Champ de température	13
II.1.2 Gradient de température	13
II.1.3 Flux de chaleur.....	14
II.2. Formulation d'un problème de transfert de chaleur.....	14
II.2.1 Bilan d'énergie.	14
II.2.2 Expression des flux d'énergie.....	14
II.2.2.1 Conduction	15
II.2.2.2 Convection.....	16
II.2.2.3 Rayonnement	18
II.2.2.4 Stockage d'énergie.....	18
II.3 Transfert de chaleur par conduction en régime Permanent.....	19
II.3.1 L'équation de la chaleur	19
II.3.2 Transfert unidirectionnel	21
II.3.2.1 Mur simple.....	21

II.3.2.2 Mur multicouches.....	23
II.3.2.3 Section cylindrique	27

Chapitre III. Transferts De Matière

III.Généralités Sur Les Transferts De Matière.....	31
III.1 Définition.....	32
III.1.1 Définitions de la concentration.....	32
III.1.2 Vitesse et Flux.....	33
III.3 Diffusion matière dans un milieu en mouvement.....	35
III.2 Transport par diffusion.....	39

Capitre IV Transfert De Quantité de Mouvement

VI Généralités Sur Le Transfert De Quantité de Mouvement.....	45
VI.1 Définition d'un fluide.....	45
VI.1.1 Fluide parfait.....	45
VI.1.2 Fluide réel.....	46
VI.1.3 Fluide incompressible.....	47
VI.1.4 Fluide compressible.....	47
VI.2.2 Poids volumique.....	47
VI.2.1 Masse volumique.....	47
VI.2.3 Densité.....	47
VI.2.4 Viscosité.....	48
IV.3 Statiques des fluides.....	50
IV.3.1 Notion de pression en un point d'un fluide.....	50
IV.4 Dynamique des fluides Incompressibles parfaits.....	54
IV.4 .1 Ecoulement permanent.....	54

IV.4 .2 Equation de continuité.....	54
IV.5 Notion De Débit.....	56
IV.5.1 Débit massique.....	56
IV.5 2 Débit volumique.....	57
IV.5.3 Relation entre débit massique et débit volumique.....	57
IV.6 Théorème de Bernoulli.....	58
Conclusion.....	62
Bibliographie.....	64

Chapitre 1

I. Introduction

I.1 Définition d'un système.

1. On appelle système l'ensemble de la matière située à l'intérieur d'un volume V délimité par une enveloppe fermée de surface externe S . La matière située à l'extérieur de cette surface constitue le milieu extérieur.

2. Si, durant le temps d'observation, le système n'échange pas de matière avec le milieu extérieur, on dit qu'il est fermé. Dans le cas contraire, on dit qu'il est ouvert. Suivant les circonstances, il pourra éventuellement être semi-ouvert, ou semi-fermé. Seul le système ouvert peut fonctionner en régime stationnaire ou permanent.

3. De manière analogue, un système sera qualifié d'isolé s'il n'a pas d'échange de chaleur avec le milieu extérieur. Il sera non-isolé, s'il y a échange de chaleur.

4. Un système est caractérisé par deux catégories de paramètres : **des grandeurs extensives**, qui sont fonctions du système choisi : masse, nombre de moles,

des grandeurs intensives, indépendantes du choix du système : densité, concentration, ...

Les extensivités sont additives, les tensions ne sont pas additives.

5. Un système est en équilibre si aucune de ses propriétés macroscopiques n'évolue dans le temps. Mais un système ouvert en régime permanent n'est pas en équilibre !

6. Un système évolue, spontanément ou pas, pour atteindre un état d'équilibre.

I.1.2 Les contraintes d'un système.

Le régime de fonctionnement d'un appareil physico-chimique quelconque résulte de la combinaison d'un très grand nombre de facteurs caractérisant soit la transformation chimique elle-même, soit les processus de transport de matière, de chaleur et de quantité de mouvement, etc. On appelle contraintes du système toutes les relations mathématiques entre ces différents facteurs.

Quand on décrit mathématiquement le fonctionnement d'un tel système, il est parfois difficile d'être certain d'avoir tenu compte de toutes les contraintes, et inversement, il est difficile de s'assurer que les nombreuses relations mathématiques que l'on est tenté

d'écrire sont réellement indépendantes les unes des autres. En dénombrant toutes ces relations, on admet généralement qu'elles appartiennent aux sept groupes suivants :

a) Principes de conservation de grandeurs extensives.

Conservation de la matière

Conservation de l'énergie

Conservation de la quantité de mouvement

Conservation de la charge électrique

b) Les lois d'équilibre statique, exprimant un équilibre mécanique, physique ou chimique.

Ces lois constituent des applications sous diverses formes du premier principe de la thermodynamique. $dU = dQ + dW$

Tableau 1 : Les applications sous diverses formes du premier principe de la Thermodynamique

Propriété	Définition	Symbole	Unité S.I.
Volume	Volume d'une substance	V	m ³
Énergie interne	Energie cinétique de translation, de rotation et vibratoire d'une substance	U	Joules (J)
Enthalpie	$U + P \cdot V$	H	Joules (J)
Entropie	L'entropie est une mesure du défaut de structure ou de la quantité de désordre dans un système.	S	Joules (J/K)
Énergie libre de Gibbs	$H - T \cdot S$	G	Joules (J)

c) Les lois cinétiques exprimant le sens et la vitesse d'évolution d'un système.

En fait, le sens de l'évolution d'un système isolé quelconque est fixé par une loi unique : le second principe de la thermodynamique, qui énonce que l'entropie de ce système ne peut qu'augmenter.

L'expression de la vitesse de création d'entropie dans le système constituerait un moyen unique et très général de mesure de la vitesse d'évolution du système, mais cette méthode est trop abstraite pour être utilisée pratiquement, surtout à l'échelle industrielle. En outre, cette loi cinétique générale ne nous renseignerait que sur l'évolution du contenu énergétique global du système, alors que nous sommes au contraire intéressés par l'évolution et la conversion, les unes dans les autres, des divers constituants et des diverses formes d'énergie d'un système.

C'est ce qui justifie l'importance pratique des nombreuses lois qui régissent les vitesses des divers processus élémentaires : vitesses des réactions chimiques, vitesses des transports de matière (loi de Fick), de chaleur (loi de Fourier), de quantité de mouvement (loi de Newton), d'électricité (loi d'Ohm), etc.

d) Les relations capacitatives.

Ce sont celles qui expriment la quantité, par unité de volume, de chacune des grandeurs extensives (matière, chaleur, électricité et quantité de mouvement).

e) Les relations de texture géométrique.

Ces relations sont toutes celles qui donnent la forme et les dimensions d'un appareil ou d'un domaine de phase : par exemple la distribution des diamètres de pores dans un catalyseur solide, la distribution des diamètres de gouttes dans une émulsion, etc. Ce sont également les relations qui donnent la distribution des temps de séjour d'un fluide s'écoulant à travers le système, etc.

I.1.3 Les actions sur les grandeurs extensives

Toutes les opérations physiques ou chimiques de l'ingénierie chimique impliquent une ou plusieurs actions des trois grandeurs suivant :

-Transport ; Transfert ; Transformation

I.2 Les lois linéaires de transport et de capacité.

I.2.1 Bilans de matière, d'énergie et de quantité de mouvement

Le génie des procédés, et en particulier le mouvement des fluides, est régi par des principes dits "de conservation" ou encore de "bilan" (terminologie chère au génie chimique). Un bilan décrit les variations temporelles d'une grandeur au sein d'un système, que l'on considérera ouvert (au sens de la thermodynamique), c'est-à-dire que la grandeur peut rentrer ou sortir du système.

Tout un chacun sait écrire un bilan, tout au moins lorsque la grandeur fait partie de la vie courante. Prenons par exemple le cas où la grandeur est une quantité d'argent A et le système mon compte en poste. Pour connaître la quantité d'argent instantanée sur un compte, j'écris entre deux instants t_1 et t_2 :

Mon compte en poste à L'instant (t_2)	-	Mon compte en poste à L'instant (t_1)	=	Mes revenus (ce qui rentre) entre t_1 et t_2	-	Mes dépenses (ce qui sort) entre t_1 et t_2
---	---	---	---	--	---	---

Pour formaliser plus avant ces variations, appelons :

- $G(t)$ la quantité d'argent instantanée sur mon compte (on supposera à tort que c'est une fonction dérivable du temps. . .),
- $\Phi_e(t)$ mes revenus instantanés (quantité d'argent qui rentre par unité de temps à l'instant t),
- $\Phi_s(t)$ mes dépenses instantanées (quantité d'argent qui sort par unité de temps à l'instant t).

Prenons t_1 et t_2 infiniment proches soit $t_1 = t$ et $t_2 = t + dt$. Le bilan s'écrit :

$$G(t + dt) - G(t) = \Phi_e(t)dt - \Phi_s(t)dt$$

$$\frac{dG}{dt} = \Phi_e(t) - \Phi_s(t)$$

Variation de G pendant dt.	Flux de G Entrant	Flux de G Sortant.
-------------------------------	----------------------	-----------------------

Le membre de gauche est une variation (positive ou négative) qu'on appellera terme d'accumulation et les termes de droite sont des termes de flux, respectivement entrant et sortant. Les trois grandeurs s'expriment par exemple en DA / jour.

Dans cet exemple, il y a une quantité qui se conserve : l'argent (jusqu'à preuve du contraire. . .). C'est-à-dire qu'elle ne peut ni disparaître ni apparaître, elle ne fait que s'accumuler dans le système ou entrer / sortir du système. En physique c'est le cas de l'énergie et de la masse.

Prenons un autre exemple : le système est un pays (Fig. 1), avec ses frontières, la grandeur est le nombre de personnes instantané $G(t)$ au nord du notre pays.

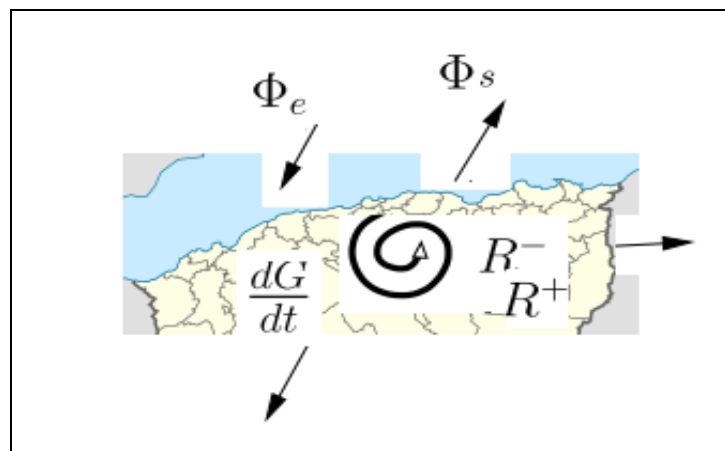


Fig.1 : Bilan sur le nombre d'habitants au nord Algerien

Ses variations peuvent provenir de 3 causes :

- des personnes entrent ou sortent du pays en traversant ses frontières,
- des personnes naissent,
- des personnes meurent.

On voit que les deux dernières causes n'existaient pas dans le cas de l'argent. Ici il peut y avoir création ou destruction de la grandeur étudiée. Le bilan s'écrit alors, en reprenant les mêmes notations pour les flux entrant et sortant, et en notant respectivement $R^+(t)$ et $R^-(t)$ les nombres de naissances et de décès par unité de temps :

$$\frac{dG}{dt} = \Phi_e(t) - \Phi_s(t) + R^+(t) - R^-(t)$$

Variation de G pendant dt. Flux de G Entrant. Flux de G Sortant. Production De G. Destruction de G.

Les termes R^+ et R^- sont classiquement appelés terme source et terme puits. En physique, des grandeurs telles que G peuvent être par exemple un nombre de moles (par réaction chimique), la quantité de mouvement (à cause des forces extérieures), l'entropie (selon le second principe). Ces quantités ne se conservent pas à proprement parler puisqu'on peut les créer ou les détruire 1, mais on parle malgré tout d'équation de conservation.

Entrée + Création - Sortie - Destruction = Accumulation

Exemple 1 :

L'acide sulfurique 98 % est préparé à partir d'oléum ($H_2SO_4 \cdot (SO_3)$) à 20 % et d'acide sulfurique à 78 % (% massiques).

Calculer les quantités d'oléum à 20 % et d'acide sulfurique à 78 % nécessaires pour obtenir 1 000 kg d'acide sulfurique 98 %.

Solution

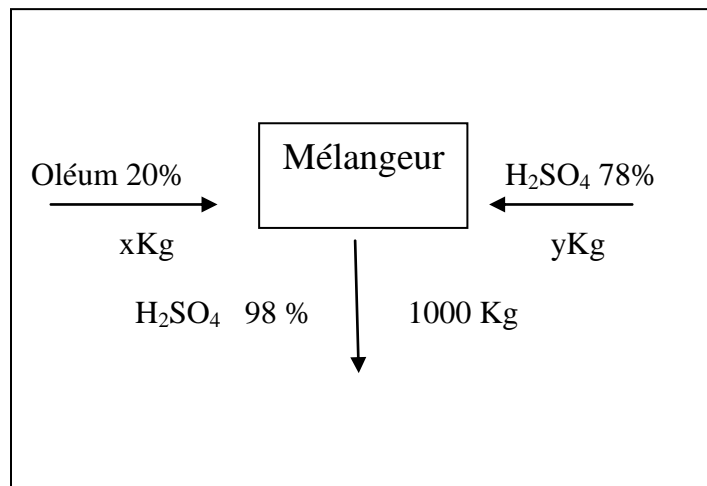


Schéma du procédé

Bilan-matière

Soient x et y les masses respectives d'oléum 20 % et de H_2SO_4 78 %. La résolution du bilan-matière nécessite d'exprimer préalablement les teneurs des composants entrants et sortant en fonction de SO_3 qui est le composé commun à l'oléum et l'acide sulfurique.

A l'entrée nous avons 20 % d'oléum qui contient x kg de SO_3

$$\Rightarrow 0,2 x + 0,8 x \times 80,198,1 = 0,853 x \text{ kg de } \text{SO}_3 \text{ pur}$$

Idem pour H_2SO_4 78 % qui contient y kg de SO_3

$$\Rightarrow 0,78 y \times 80,198,1 = 0,637 y \text{ kg de } \text{SO}_3 \text{ pur}$$

Bilan-matière global :

$$x + y = 1000,0 \Rightarrow x = 1000,0 - y \quad (1)$$

Bilan-matière par rapport à SO_3 pur :

$$0,853 x + 0,637 y = 800,2 \quad (2)$$

En reportant la valeur de x , isolée de l'équation (1), dans l'équation (2), on obtient :

$$0,853 \times (1000,0 - y) + 0,637 y = 800,2$$

$$\Rightarrow 853,0 - 0,853 y + 0,637 y = 800,2$$

$$\Rightarrow y = \frac{52,8}{0,216} = 244,4 \text{ kg. Donc,}$$

$y = 244,4$ kg de H_2SO_4 78 %

$x = 755,6$ kg d'oléum 20 %.

La solution de 755,6 kg d'oléum 20 % contient :

- $755,6 \times 0,20 = 151,1$ kg de SO_3 pur ;
- $755,6 \times 0,80 = 604,5$ kg de H_2SO_4 pur.

La solution de 244,4 kg d'acide sulfurique 78 % contient :

- $244,4 \times 0,78 = 190,6$ kg de H_2SO_4 pur ;
- $244,4 \times 0,22 = 53,8$ kg de H_2O pur.

Exemple 2 :

On veut diluer une solution chaude de 100 kg d'hydroxyde de sodium 75 % à 100 °C avec de la glace et de l'eau de façon à obtenir une solution d'hydroxyde de sodium. Calculer les masses d'eau à 25 °C et de glace à 0 °C à ajouter à la solution initiale pour que la solution effluente soit à 25 °C et à 10 % (tous les pourcentages sont massiques).

Sachant :

- La température de la solution d'hydroxyde de sodium à 75 % initiale : $100\text{ }^{\circ}\text{C}$;
- L'enthalpie massique de l'hydroxyde de sodium à 75 % à la température de $100\text{ }^{\circ}\text{C}$: $1\,663\text{ kJ.kg}^{-1}$;
- L'enthalpie massique de l'hydroxyde de sodium 10 % à $25\text{ }^{\circ}\text{C}$: 180 kJ.kg^{-1} ;
- L'enthalpie massique de l'eau à $25\text{ }^{\circ}\text{C}$: 196 kJ.kg^{-1} ;
- L'enthalpie massique de la glace à $0\text{ }^{\circ}\text{C}$: -598 kJ.kg^{-1} .

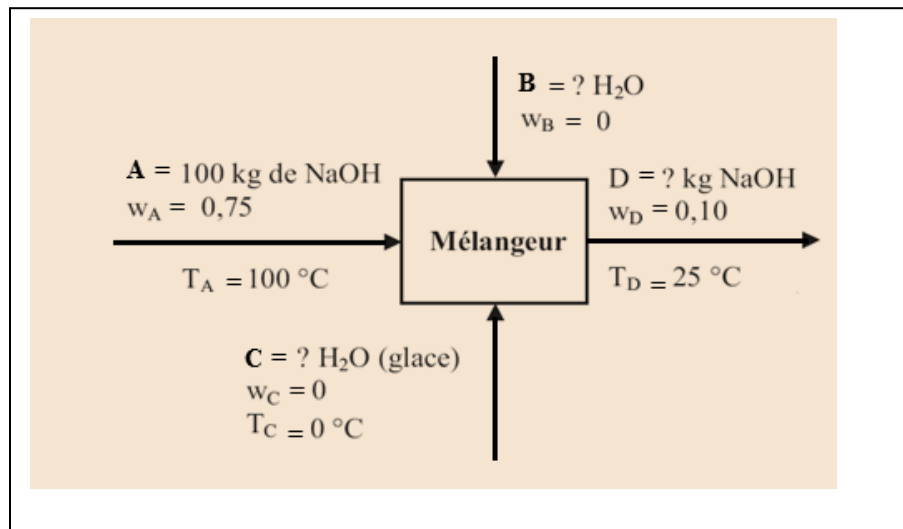


Schéma du procédé

Solution

Soient :

- A, B, C et D les masses respectives de NaOH 75 %, d'eau, de glace et de NaOH 10 % ;
- w_A , w_B , w_C et w_D les titres massiques respectifs en NaOH de la solution influente, de l'eau, de la glace et de la solution effluente ;
- T_A , T_B , T_C et T_D les températures respectives de la solution influente, de l'eau, de la glace et de la solution effluente ;
- H_A , H_B , H_C et H_D les enthalpies respectives de la solution influente, de l'eau, de la glace et de la solution effluente

A- Bilan-matière

Le bilan-matière peut s'écrire par rapport aux masses totales et par rapport au soluté.

$$\text{Bilan global : } A + B + C = D \quad (3)$$

$$\text{Bilan par rapport à NaOH : } A.w_A + B.w_B + C.w_C = D.w_D \quad (.4)$$

w_B et w_C étant nuls, l'équation (4) devient :

$$A w_A = D w_D \Rightarrow D = \frac{A w_A}{w_D} = \frac{100 \cdot 0.75}{0.1} = 750 \text{ kg}$$

$$D = \mathbf{750 \text{ kg}}$$

$$(3) \Rightarrow B + C = D - A = 750 - 100 = \mathbf{650 \text{ kg.}}$$

Il reste deux inconnues à déterminer et le bilan thermique permettra de résoudre le système.

B-Bilan thermique

S'il n'y a pas de pertes thermiques, la loi de la conservation de l'énergie s'établit d'une manière analogue à la loi de la conservation de la matière :

$$H_A + H_B + H_C = H_D \quad (5)$$

$$H_A = 1\,663 \text{ kJ.kg}^{-1}. \text{ Comme } A = 100 \text{ kg}, H_A = 1\,663 \times 100 = 166\,300 \text{ kJ};$$

$$H_B = 196 \text{ kJ.kg}^{-1}. \text{ La masse d'eau étant de } B \text{ kg}, H_B = 196 B \text{ kJ};$$

$$H_C = -598 \text{ kJ.kg}^{-1}. \text{ La masse de glace étant de } C \text{ kg}, H_C = -598 C \text{ kJ};$$

$$H_D = 180 \text{ kJ.kg}^{-1}. \text{ Comme } D = 750 \text{ kg}, H_D = 180 \times 750 = 135\,000 \text{ kJ.}$$

$$(5) H_B + H_C = H_D - H_A = 135\,000 - 166\,300 = -31\,300 \text{ kJ.}$$

$$\text{Donc : } 196 B - 598 C = -31\,300 \quad (5)$$

(3) $B = 650 - C$ et, en reportant cette valeur dans l'équation 3', la relation suivante est

$$\text{obtenue : } 196 \times (650 - C) - 598 C = -31\,300 \Rightarrow$$

$$127\,400 - 196 C - 598 C = -31\,300 \Rightarrow$$

$$C = 158\,700 / 794 = 199,9 \text{ kg.}$$

$$C = 199,9 \text{ kg de glace à } 0 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$B = 450,1 \text{ kg d'eau à } 25 \text{ }^\circ\text{C.}$$

I.2.2 Les lois linéaires de transport moléculaire.

Considérons un milieu qui est à la fois immobile (aucun écoulement d'ensemble) et tranquille (aucun remous ni tourbillon). Les seuls mouvements possibles se font à l'échelle moléculaire.

L'agitation thermique des molécules, des ions ou des électrons libres au sein de la matière, entraîne des évolutions macroscopiques de systèmes, que nous décrivons par des lois à notre échelle, dont les plus simples sont les lois linéaires suivantes :

La loi de Fick : $\Phi_M = -D \cdot \frac{\partial C}{\partial X}$

Exprime qu'au sein d'un mélange A+B, de composition non homogène, le flux M du constituant A (nombre de moles traversant par diffusion un m² par seconde) est proportionnel au gradient de concentration de ce constituant, dans la direction du flux.

D est le coefficient de diffusion de A dans B (qu'on appellera plus loin :diffusivité).

La loi de Fourier : $\Phi_T = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial X}$

Exprime qu'au sein d'un milieu tranquille à température non uniforme, le flux de chaleur (joules par m² et par seconde) est proportionnel au gradient de température dans la direction du flux. λ est la conductivité thermique du milieu.

Supposons maintenant pour la loi suivante, que le fluide soit en écoulement laminaire : les filets de fluide s'écoulent parallèlement avec des vitesses différentes et le frottement visqueux est dû à des échanges de molécules entre filets voisins.

La Loi de Newton : $\tau = -\mu \cdot \frac{\partial T}{\partial X}$

énonce que la contrainte tangentielle de frottement visqueux des filets les uns sur les autres, en newton par m², est proportionnelle au gradient de la vitesse d'écoulement des filets, normalement à cet écoulement (x est le sens de l'écoulement, y la normale à x). Or la contrainte (dimension d'une pression : $MLT^{-2} \cdot L^{-2} ML^{-1}T^{-2}$) peut aussi être présentée comme un flux de quantité de mouvement en kg.m.s⁻¹ par m² et par seconde, (dimension : $MLT^{-1} \cdot L^{-2} \cdot T^{-1} ML^1T^2$). est la viscosité dynamique du fluide.

En adoptant le langage de la thermodynamique des phénomènes irréversibles, nous exprimerons ces trois lois cinétiques par la même formulation mathématique, en introduisant les notions d extensité (grandeur de position) et de potentiel (grandeur de tension) : (flux d'extensité) = (conductivité) · (gradient de potentiel).

$$\vec{\varphi} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} V$$

Tableau 2 : Les principales lois linéaires de transport moléculaire.

Loi	Extensité	Potentiel	Conductivité	Equation
Fick	Nombre de mole d'un constituant d'un mélange	Concentration molaire du constituant	D : Le coefficient de diffusion	$\varphi_M = -D \cdot \frac{\partial c}{\partial x}$
Fourier	Quantité de chaleur	Température	λ : est la conductivité thermique du milieu	$\varphi_T = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$
Newton	Quantité de mouvement	Vitesse d'écoulement	μ : la viscosité dynamique	$\tau = -\mu \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$

Chapitre 2

II. Généralités Sur Les Transferts De Chaleur

La thermodynamique permet de prévoir la quantité totale d'énergie qu'un système doit échanger avec l'extérieur pour passer d'un état d'équilibre à un autre.

La thermique (ou thermocinétique) se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température, entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final.

Définitions

II.1 Champ de température

Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température : $T = f(x, y, z, t)$. La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. Nous distinguerons deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou transitoire.

II.1.2 Gradient de température

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température :

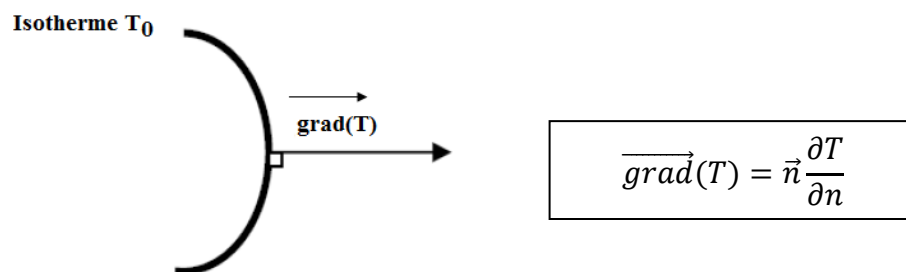


Fig. 2 : Isotherme et gradient thermique Avec : $\rightarrow n$ vecteur unitaire de la normale $\partial T / \partial n$ dérivée de la température le long de la normale

II.1.3 Flux de chaleur

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur :

$$\Phi = \frac{1}{S} \cdot \frac{dQ}{dT}$$

Où S est l'aire de la surface (m^2).

On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise sur la surface S par unité de temps

$$\varphi = \frac{dQ}{dT}$$

II.2. Formulation d'un problème de transfert de chaleur

II.2.1 Bilan d'énergie

Il faut tout d'abord définir un système (S) par ses limites dans l'espace et il faut ensuite établir l'inventaire des différents flux de chaleur qui influent sur l'état du système et qui peuvent être :

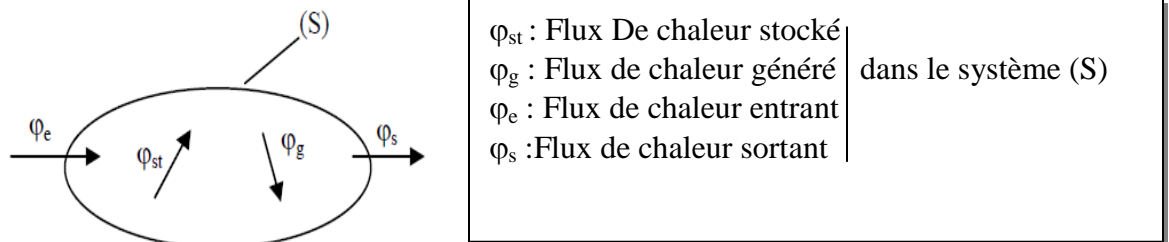


Fig.3 : Système et bilan énergétique

Pour déterminer le flux de chaleur global, on applique le 1er principe de la thermodynamique afin d'établir le bilan d'énergie du système (S) :

On obtient alors :

$$\Phi_e + \Phi_g = \Phi_s + \Phi_{st}$$

II.2.2 Expression des flux d'énergie

Il faut ensuite établir les expressions des différents flux d'énergie. En reportant ces expressions dans le bilan d'énergie, on obtient l'équation différentielle dont la résolution permet de connaître l'évolution de la température en chaque point du système.

II.2.2.1 Conduction

C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaque, sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres.

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : la densité de flux est proportionnelle au gradient de température :

$$\vec{\varphi} = -\lambda S \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

En général

$$\varphi = -\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial X} \right)$$

Avec :

φ : Flux de chaleur transmis par conduction (W)

λ : Conductivité thermique du milieu ($\text{W m}^{-1} \text{°C}^{-1}$)

x : Variable d'espace dans la direction du flux (m)

S : Aire de la section de passage du flux de chaleur (m^2)

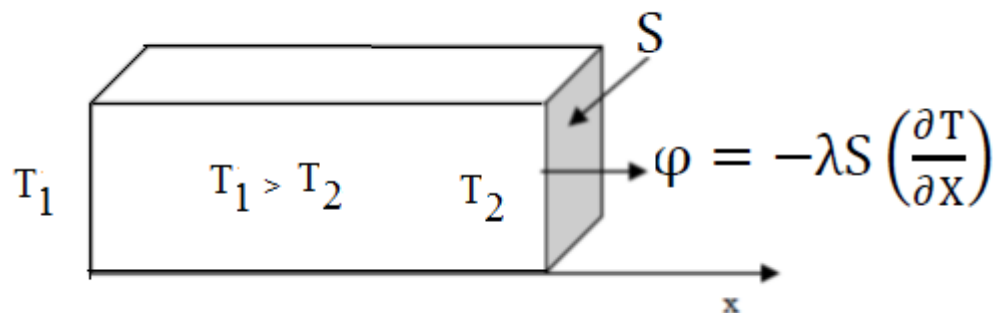


Fig.4: Schéma du transfert de chaleur conductif

On trouvera dans le tableau 3 les valeurs de la conductivité thermique λ de certains matériaux parmi les plus courants.

Tableau 3 : Conductivité thermique de certains matériaux

Matériau	λ (W.m ⁻¹ . °C ⁻¹)	Matériau	λ (W.m ⁻¹ . °C ⁻¹)
Argent	419	Plâtre	0,48
Cuivre	386	Amiante	0,16
Aluminium	204	Bois (feuillu-résineux)	0,12-0,23
Acier doux	45	Liège	0,044-0,049
Acier inox	15	Laine de roche	0,038-0,041
Glace	1,88	Laine de verre	0,035-0,051
Béton	1,4	Polystyrène expansé	0,036-0,047
Brique terre cuite	1,1	Polystyrène extrudé	0,028
Verre	1,0	Air	0,026
Eau	0,60	Polyuréthane (mousse)	0,030-0,045

II.2.2.2 Convection

C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide.

La convection thermique est le transfert d'énergie entre deux milieux, dont l'un au moins est un fluide, par un déplacement moléculaire. Il implique les effets combinés de la conduction et du mouvement du fluide. En l'absence de mouvement du fluide, le transfert de chaleur est assuré exclusivement par la conduction pure. Indépendamment de la nature de la convection (libre ou forcée), le flux de chaleur est exprimé par la loi de Newton de refroidissement :

$$\dot{Q}_{Conv} = hA_p (T_p - T_\infty)$$

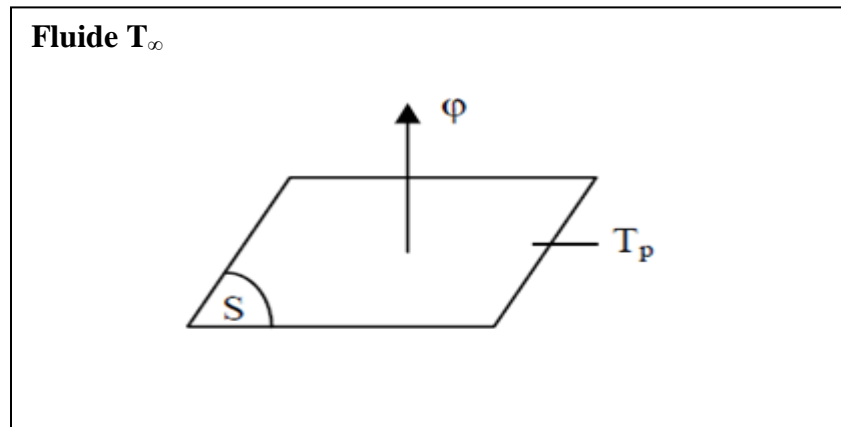


Fig. 5 : Schéma du transfert de chaleur convectif

Avec :

ϕ : Flux de chaleur transmis par convection (W)

h : Coefficient de transfert de chaleur par convection ($\text{W m}^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$)

T_p : Température de surface du solide ($^\circ\text{C}$)

T_∞ : Température du fluide loin de la surface du solide ($^\circ\text{C}$)

A_p Aire de la surface de contact solide/fluide (m^2)

Exemple 1 : Soit un fil traversé par un courant électrique d'une intensité $I=1,5$ A. Lorsque ses dimensions sont respectivement $D=3$ mm et $L=2$ m, la différence de potentiel entre les bornes est de 60 Volts. Si la température du milieu extérieur est de 15°C , calculer le coefficient h pour que le fil préserve une température $T_p \leq 150$ $^\circ\text{C}$?

Solution : La puissance consommée dans le fil électrique est :

$$P = U * I = 60 * 1,5 = 90 \text{ Watt.}$$

La surface d'échange est la surface latérale du fil électrique :

$$A_p = \pi D * L = 3,14 * 2 * 3 * 10^{-3} = 18,85 * 10^{-3} \text{ m}^2$$

Conformément au principe de la conservation de l'énergie, on a :

$$P = \dot{Q}_{Conv} = hA_p (T_p - T_\infty) \quad \Rightarrow$$

$$h = \frac{P}{A_p (T_p - T_\infty)} = \frac{90}{18,85 * 10^{-3} * (150 - 15)} = 35,367 \text{ W } /(\text{m}^2 * \text{K})$$

Remarque : La valeur du coefficient de transfert de chaleur par convection h est fonction de la nature du fluide, de sa température, de sa vitesse et des caractéristiques géométriques de la surface de contact solide/fluide.

II.2.2.3 Rayonnement

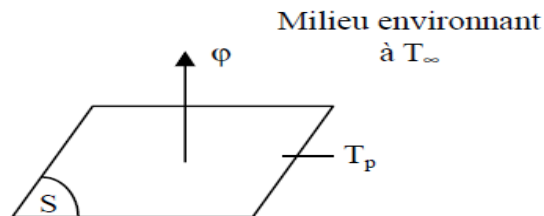


Fig.6 : Schéma du transfert de chaleur radiatif

Le rayonnement c'est un transfert d'énergie électromagnétique entre deux surfaces (même dans le vide). Dans les problèmes de conduction, on prend en compte le rayonnement entre un solide et le milieu environnant et dans ce cas nous avons la relation suivante :

$$\phi = \sigma \epsilon_p S (T_p^4 - T_\infty^4)$$

Avec:

ϕ : flux de chaleur transmise par rayonnement (W);

σ : constante de Stefan ($5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$);

ϵ_p Facteur d'émission de la surface

T_p Température de la surface (K)

T_∞ Température du milieu environnant la surface (K)

S Aire de la surface (m²)

II.2.2.4 Stockage d'énergie

Le stockage d'énergie dans un corps correspond à une augmentation de son énergie interne au cours du temps d'où (à pression constante et en l'absence de changement d'état) :

$$\phi_{st} = \rho V c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Avec :

ϕ_{st} : Flux de chaleur stocké (W)

ρ : Masse volumique (kg m^{-3})

V : Volume (m^3) ; c Chaleur spécifique ($\text{J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$)

T : Température ($^\circ\text{C}$) ; t Temps (S)

Le produit $\rho V c$ est appelé la capacitance thermique du corps.

II.2.2.5 Génération d'énergie

Elle intervient lorsqu'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, mécanique, nucléaire) est convertie en énergie thermique. On peut l'écrire sous la forme :

$$\phi_g = \dot{q} V$$

Avec : ϕ_g Flux d'énergie thermique générée (W)

\dot{q} Densité volumique d'énergie générée (W m^{-3})

V Volume (m^3)

II.3 Transfert de chaleur par conduction en régime Permanent

II.3.1 L'équation de la chaleur

Dans sa forme monodimensionnelle, elle décrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan :

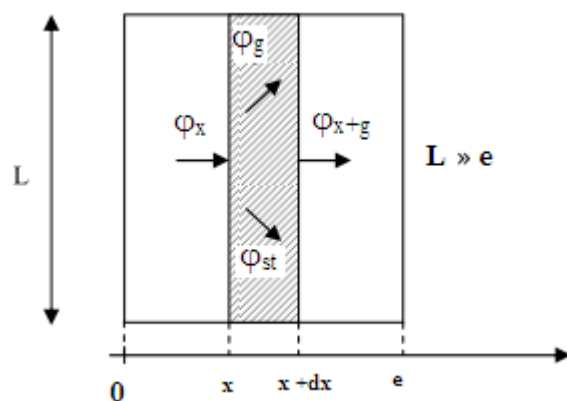


Fig. 6 : Bilan thermique sur un système élémentaire

Considérons un système d'épaisseur dx dans la direction x et de section d'aire S normalement à la direction Ox . Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit :

$$\varphi_x + \varphi_g = \varphi_{x+g} + \varphi_{st}$$

Avec :

$$\varphi_x = -\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x \quad \text{et} \quad \varphi_{x+dx} = -\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx}$$

$$\varphi_g = \dot{q} S dx$$

$$\varphi_{st} = \rho c S dx \frac{\partial T}{\partial t}$$

En reportant dans le bilan d'énergie et en divisant par dx , nous obtenons :

$$\frac{(\lambda S \frac{\partial T}{\partial t})_{x+dx} - (\lambda S \frac{\partial T}{\partial t})_x}{dx} + \dot{q} S = \rho c S \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} S = \rho c S \frac{\partial T}{\partial t}$$

Et dans le cas tridimensionnel, nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas le plus général :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

- Si le milieu est isotrope : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$
- S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système : $\dot{q} = 0$
- Si le milieu est homogène, λ n'est fonction que de T .

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{d\lambda}{dT} \left[\frac{\partial T^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T^2}{\partial y^2} + \frac{\partial T^2}{\partial z^2} \right] = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

d) Si de plus λ est constant (écart modéré de température), nous obtenons l'équation de Poisson :

$$a \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Le rapport $a = \lambda / cp$ est appelé la diffusivité thermique ($m^2.s^{-1}$) qui caractérise la vitesse de propagation d'un flux de chaleur à travers un matériau.

e) En régime permanent, nous obtenons l'équation de Laplace :

$$a \nabla^2 T = 0$$

II.3.2 Transfert unidirectionnel

II.3.2.1 Mur simple

On se placera dans le cas où le transfert de chaleur est unidirectionnel et où il n'y a pas de génération ni de stockage d'énergie.

On considère un mur d'épaisseur e , de conductivité thermique λ et de grandes dimensions transversales dont les faces extrêmes sont à des températures T_1 et T_2 :

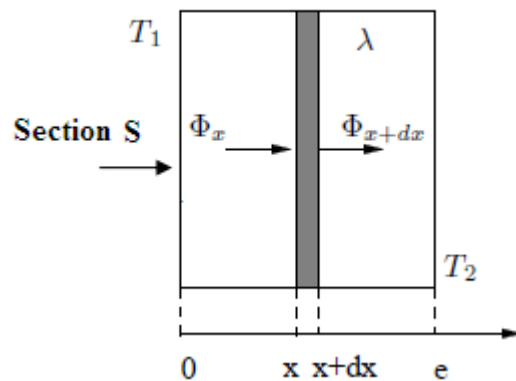


Fig.7 : Bilan thermique élémentaire sur un mur simple

En effectuant un bilan thermique sur le système (S) constitué par la tranche de mur comprise entre les abscisses x et $x + dx$, En régime stationnaire :

Le flux thermique est conservé à travers les différentes sections droites du solide. Pour une plaque plane de largeur L , on a :

$$\dot{Q}_{cond} = -\lambda A \left(\frac{dT}{dx} \right) = C_1$$

En supposant que la conductivité thermique du matériau est constante, l'intégration de cette équation différentielle ordinaire permet d'établir le profil de la température qui est une droite dont l'allure est :

$$T(x) = C_1 x + C_2$$

En utilisant les conditions aux limites de part et d'autre de la paroi, on a :

$$C.L.1: \quad x=0, \quad T=T_0 \quad \Rightarrow C_2 = T_0$$

$$C.L.2: \quad x=L, \quad T=T_L \quad \Rightarrow C_1 = \frac{T_L - T_0}{L}$$

D'où le profil recherché :

$$T(x) = \frac{T_L - T_0}{L} x + T_0$$

Et le flux thermique entre les deux faces est :

$$\dot{Q} = -\lambda * A * \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda A}{L} (T_0 - T_L)$$

Pour un matériau composite dont le nombre de couches est n, le flux thermique à travers les différentes lamelles du mur a pour expression :

$$\dot{Q} = \frac{\lambda_i A}{L_i} (T_{i-1} - T_i) = Cste$$

La relation précédente peut également se mettre sous la forme :

$$\varphi = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{S\lambda}}$$

cette relation est analogue à la loi d'Ohm en électricité qui définit l'intensité du courant comme le rapport de la différence de potentiel électrique sur la résistance électrique. La température apparaît ainsi comme un potentiel thermique et le terme $e/S\lambda$ apparaît comme la résistance thermique d'un mur plan d'épaisseur e , de conductivité thermique λ et de surface latérale S . On se ramène donc au schéma équivalent représenté sur la Fig.8.

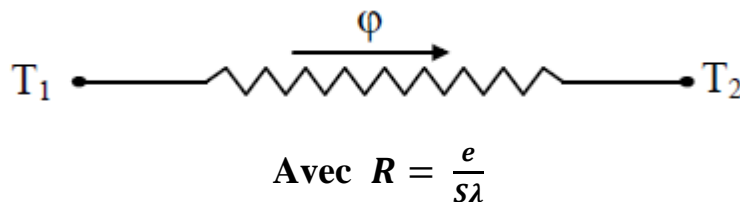
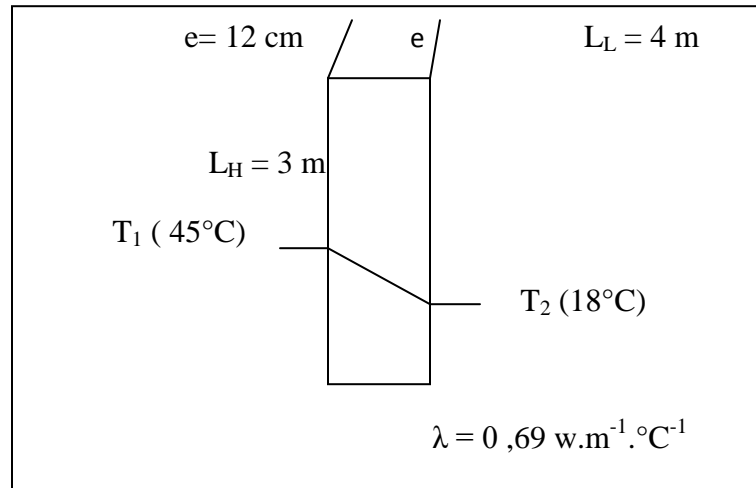


Fig.8 : Schéma électrique équivalent d'un mur simple

Exemple 2 :

Calculer la perte calorifique au travers d'un mur en briques de 12 cm d'épaisseur, 3 m de hauteur et de 4 m de largeur. Les températures des deux faces du mur sont respectivement de 45°C et de 18°C. ($\lambda = 0,69 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$)

Corrigé :

La densité du flux de Conduction en régime permanent : Φ est constant

$$\Phi \cdot dx = \varphi \cdot S = -\frac{\lambda dT}{dx} \cdot S \Rightarrow \Phi \cdot dx = -dT \Rightarrow \Phi \int_0^e dx = \int_{T_1}^{T_2} -\lambda S dT$$

$$\Rightarrow \Phi \cdot e = \lambda \cdot S (T_1 - T_2) \text{ donc}$$

$$\Phi = \frac{\lambda \cdot S (T_1 - T_2)}{e}$$

$$\text{A.N.} \quad \Phi = \frac{0,69 (45-18) \cdot 3 \cdot 4}{0,12} = 1863 \text{ watt}$$

II.3.2.2 Mur multicouches

C'est le cas des murs réels constitués de plusieurs couches de matériaux différents et où on ne connaît que les températures T_{f1} et T_{f2} des fluides en contact avec les deux faces du mur de surface latérale S : Les surfaces isothermes sont planes et parallèles, la résistance d'un mur s'écrit $R = e / \lambda S$ avec e , épaisseur du mur et S sa surface.

D'où

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{\lambda_i S} + \frac{1}{h_1 S} + \frac{1}{h_2 S}$$

Alors le flux ϕ échangé lors de la traversée du mur multicouche est donné par la relation:

$$\phi(W) = \frac{T_{fl1} - T_{fl2}}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{1}{h_2 S} + \frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \frac{e_3}{\lambda_3 S}}$$

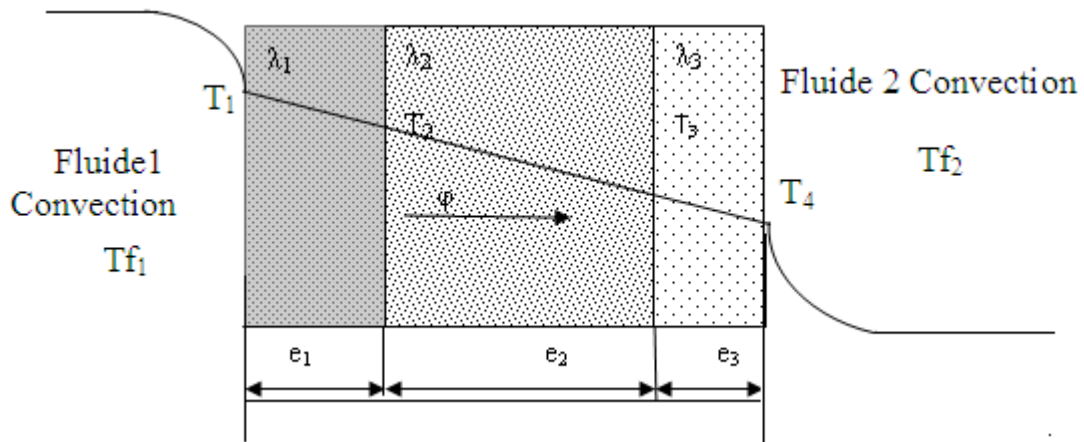


Fig.7 : flux et températures dans un mur multicouches

Nous avons considéré que les contacts entre les couches de différentes natures étaient parfaits et qu'il n'existait pas de discontinuités de températures aux interfaces. En réalité, compte tenu de la rugosité de surfaces, une micro-couche d'air existe entre les creux des surfaces en regard et il créa une résistance thermique R (l'air est isolant) appelée résistance thermique de contact.

Exemple 3 :

Le mur d'un four comporte trois couches de matériaux différents accolées les unes aux autres (en serie) :

- Une couche de briques réfractaires ($\lambda = 1,21 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$);
- Une couche de revêtement calorifuge ($\lambda = 0,08 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$);

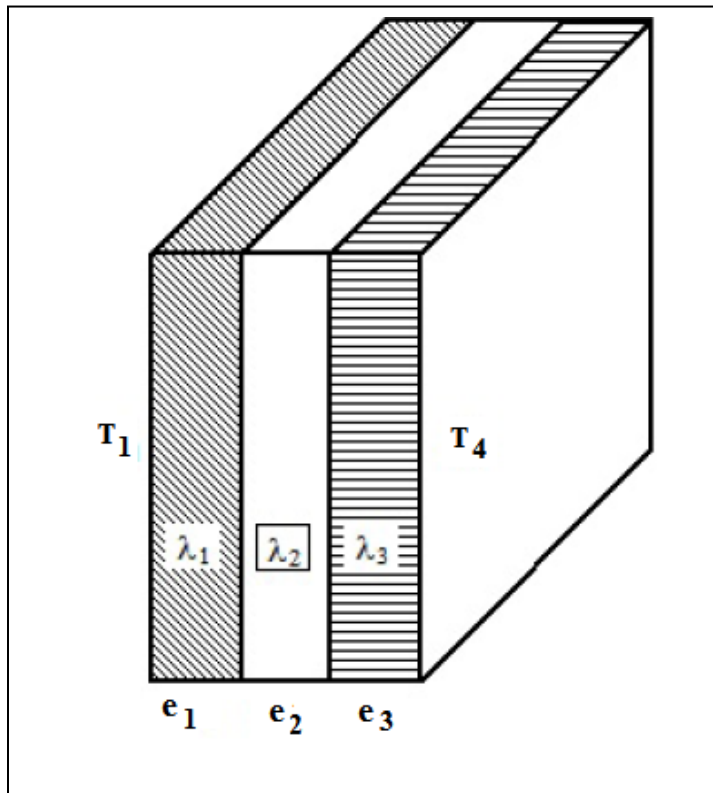
- Une couche de briques ($\lambda = 0,69 \text{ W/m}\cdot\text{°C}$).

Chaque couche a une épaisseur de 10 cm. La température est de 872°C à l'intérieur du four et de 32°C à l'extérieur.

1. Si la surface du mur est de 42 m^2 , calculer la perte calorifique par conduction pendant 24 heures en joule.
2. Quelle est la température T_m au milieu du revêtement ?

Corrigé :

1) Calcul de la perte calorifique



La conduction à travers un mur composites en régime permanent : Φ est constant

$$\Phi = \varphi \cdot S = -\frac{\lambda dT}{dX} \cdot S$$

On intègre pour chaque épaisseur l'équation de flux de chaleur chaque valeur de λ constante

$$\Phi \int_0^e dx = \int_{T_1}^{T_2} -\lambda S dT \quad \text{on aura} \quad \Phi \cdot e_1 = \lambda \cdot S_1 (T_1 - T_2)$$

Puisque Φ est constant nous pouvons écrire :

$$\Phi = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e_1}{\lambda_1 S}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{e_2}{\lambda_2 S}} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{e_3}{\lambda_3 S}}$$

Finalement

$$\Phi = \frac{T_1 - T_4}{\frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \frac{e_3}{\lambda_3 S}}$$

$$\text{A.N. } \Phi = \frac{872 - 32}{\frac{0.1}{1.21 \cdot 42} + \frac{0.1}{0.08 \cdot 42} + \frac{0.1}{0.69 \cdot 42}} \quad \Phi = \mathbf{23,877 \text{ Kw}}$$

La perte calorifique par conduction pendant 24 heures ce n'est que $\Phi \cdot 24 \text{ h}$.

$$\text{D'où } \Phi = 24 \cdot 23.877 = \mathbf{573,048 \text{ kw.h}}$$

Sachant que, Un kilowattheure vaut 3 600 kilojoules.

$$\Phi = 573,048 \cdot 3600 \cdot 1000 = \mathbf{2,06 \cdot 10^9 \text{ J}}$$

- 2) Pour calculer T_m il est impératif de calculer T_2 et T_3 car T_m se trouve entre les deux températures.

$$T_2 = T_1 - \Phi \frac{e_1}{\lambda_1 S}; \quad T_3 = T_4 + \Phi \frac{e_3}{\lambda_3 S} \quad \text{et} \quad T_m = \frac{T_2 + T_3}{2}$$

$$T_2 = \mathbf{825 \text{ }^\circ\text{C}}; \quad T_3 = \mathbf{114.4 \text{ }^\circ\text{C}}$$

$$T_m = \mathbf{469,7 \text{ }^\circ\text{C}}$$

II.3.2.3 Section cylindrique

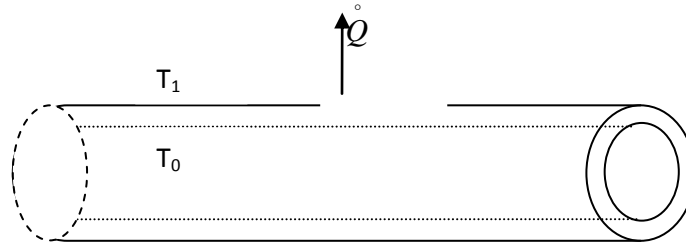


Fig.8 : Schéma de transfert dans un cylindre creux

En régime stationnaire, le flux thermique est conservé à travers les différentes couches cylindriques du solide. Pour un cylindre d'épaisseur dr et de longueur L , le flux thermique s'écrit :

$$\phi = -\lambda A \left(\frac{dT}{dr} \right) = C_1$$

avec $A = 2\pi r L$

En supposant que la conductivité thermique du matériau est constante, l'intégration de cette équation différentielle ordinaire permet d'établir le profil de la température dont l'allure est :

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2$$

En utilisant les conditions aux limites de part et d'autre de la paroi du cylindre, on a :

$$C.L.1: \quad r = R_0, \quad T = T_0 \quad \Rightarrow T_0 = C_1 \ln R_0 + C_2$$

$$C.L.2: \quad r = R_1, \quad T = T_1 \quad \Rightarrow T_1 = C_1 \ln R_1 + C_2$$

Il en découle que le profil de température suit une loi logarithmique avec :

$$C_1 = \frac{T_1 - T_0}{\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)} \quad \text{et} \quad C_2 = T_0 - \frac{T_1 - T_0}{\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)} \ln R_0$$

et le flux thermique entre les deux faces est :

$$\begin{aligned} \phi &= -\lambda * A * \frac{dT}{dr} = -2\pi r L \lambda \frac{dT}{dr} \\ \phi &= 2\pi L \lambda \frac{T_0 - T_1}{\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)} \end{aligned}$$

Pour un matériau composite dont le nombre de couches est n, le flux thermique à travers les différentes couches cylindriques a pour expression :

$$\dot{\phi} = 2\pi L \lambda_i \frac{T_{i-1} - T_i}{\ln\left(\frac{R_i}{R_{i-1}}\right)}$$

En résolvant par rapport à l'écart de températures pour les différents matériaux, on a :

$$(T_0 - T_1) = \frac{1}{2\pi} \frac{\dot{\phi}}{L} \frac{1}{\lambda_1} \ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)$$

$$(T_1 - T_2) = \frac{1}{2\pi} \frac{\dot{\phi}}{L} \frac{1}{\lambda_2} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$(T_{n-1} - T_n) = \frac{1}{2\pi} \frac{\dot{Q}}{L} \frac{1}{\lambda_n} \ln\left(\frac{R_n}{R_{n-1}}\right)$$

Par addition membre à membre, la différence de température entre les bornes extrêmes des sections du tube cylindrique s'écrit :

$$(T_0 - T_n) = \frac{\dot{\phi}}{2\pi L} * \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda}\right)_i * \ln\left(\frac{R_i}{R_{i-1}}\right)$$

De façon analogue, la résistance thermique de la tranche (sandwich) i est:

$$Rt_i = \frac{1}{2\pi L \lambda_i} \ln\left(\frac{R_i}{R_{i-1}}\right)$$

Par conséquent, la résistance globale Rt_G d'un mur composite est :

$$Rt_G = \frac{1}{2\pi L} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln\left(\frac{R_i}{R_{i-1}}\right)$$

Exemple 4 :

Une conduite cylindrique en acier à conductivité thermique $\lambda = 46 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$, de diamètre intérieur $\varnothing 1 = 44 \text{ mm}$ et extérieur $\varnothing 2 = 54 \text{ mm}$, transporte un fluide chaud.

Calculez le flux de chaleur perdu par mètre de longueur pour un écart de température de 1°C entre les surfaces internes et externes de la canalisation.

Solution

$$d\Phi = -\lambda S \text{grad}T = -\lambda S \frac{dT}{dR} = -\lambda 2\pi r L \frac{dT}{dR}$$

Séparation de variable \Rightarrow

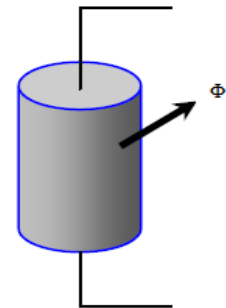
$$\int \frac{d\Phi}{L} = \int \frac{-2\pi r dT}{dr}$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{d\Phi \cdot dr}{L \cdot r} = \int_{T_1}^{T_2} -2\pi dT \quad \Rightarrow \quad \frac{\Phi}{L} = \frac{-2\pi}{LN \frac{r_2}{r_1}} \Rightarrow \Phi = \frac{46 \cdot 2 \cdot 3.14}{LN \frac{27}{22}} = 1410,58 \text{ w/m}$$

Exemple 5 :

Une résistance électrique de forme cylindrique, de longueur 1,5cm et de diamètre 0,4cm, est utilisée dans un circuit électrique. Cette résistance dissipe une puissance de 0,6W. On suppose que le transfert de chaleur est uniforme dans toute la résistance.

-Déterminez la quantité de chaleur dissipée par cette résistance en 24h. De même la densité de ce flux de chaleur.



Solution

-La quantité de chaleur dissipée par cette résistance en 24h est de:

$$Q = \Phi \cdot \Delta t = (0.6 \text{ W})(24 \text{ h}) = \mathbf{14.4 \text{ Wh}} = \mathbf{51.84 \text{ kJ}} \text{ avec } (1 \text{ Wh}=3,6\text{kJ}).$$

-La densité du flux de chaleur est:

$$A_s = 2 \frac{\pi D^2}{4} + \pi D L = 3,14 \left(\frac{0,4}{2} + 0,4 * 1,5 \right) = \mathbf{2,136 \text{ cm}^2}$$

$$q = \frac{\Phi}{A_s} = \frac{0,6}{2,136} = \mathbf{0,28 \text{ w/cm}^2}$$

Chapitre 3

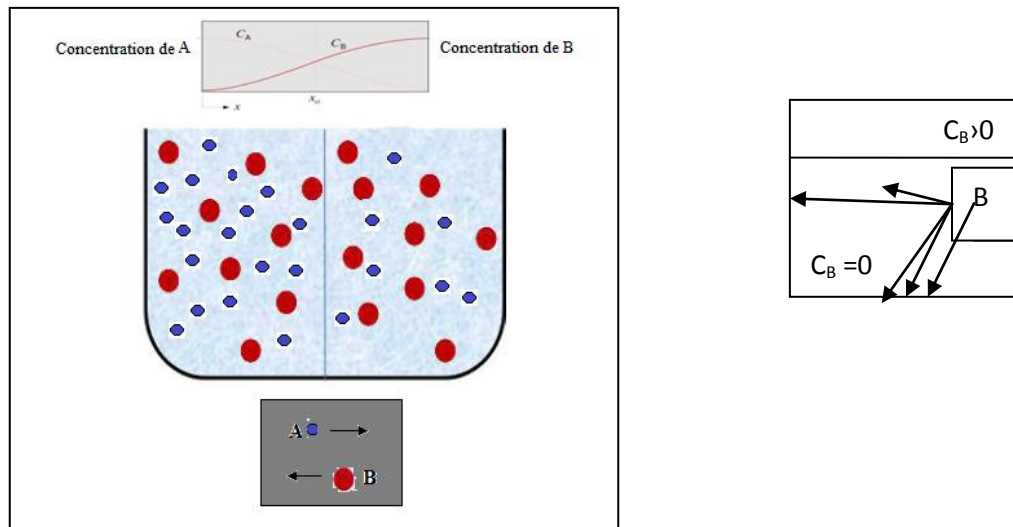
III. Généralités Sur Les Transferts De Matière

Introduction

Considérons deux compartiments adjacents contenant deux gaz différents a et b qui sont *à la même température T et la même pression P* , séparés par une paroi coulissante. Lorsqu'on fait glisser la paroi, les gaz "diffusent" de leur récipient d'origine vers le récipient voisin.

La diffusion dans le sens de concentration faible induit le transport net des molécules A vers la droite et les molécules B vers la gauche.

Après un certain temps, les concentrations de A et B deviennent uniforme dans tout le milieu.



Un exemple classique de diffusion est l'ouverture d'une bouteille de parfum : même dans une pièce sans aucun courant d'air on perçoit assez rapidement une odeur agréable dans toute la pièce.

De manière générale, les phénomènes de diffusion concernent des systèmes hors équilibre ; des hétérogénéités (de température, de vitesse, de concentration) vont entraîner un transfert (d'énergie, de quantité de mouvement, de particules) d'une région du système vers une autre : ces transferts sont une manifestation du Second Principe de la thermodynamique, de son aspect probabiliste. Ils sont à l'origine de l'irréversibilité de ces phénomènes.

III.1 Définition

La diffusion est le transport microscopique (une migration) de masse comme les atomes, les molécules et les ions dans un milieu sous l'effet des différences de concentration, depuis les zones concentrées en matière vers les zones moins concentrées. Elle désigne la tendance naturelle d'un système à rendre homogènes les concentrations des espèces chimiques en son sein.

Le phénomène de transfert de matière par diffusion opère dès qu'il y a une différence de concentration. C'est un phénomène spontané, irréversible et incontournable (phénomène dispersif) conduisant à un équilibre, se produisant par suite de l'agitation thermique des molécules.

Au sens large, la diffusion désigne des transferts obéissants aux lois de Fick, s'il existe une différence de concentration dans l'espace, par exemple entre deux compartiments séparé par une membrane perméable (laissant passer le solvant comme le soluté), il va y avoir, au cours du temps, un déplacement de la matière, du compartiment concentré vers le moins concentré, comme l'indique

III.1.1 Définitions de la concentration.

La concentration est exprimée en termes de masse volumique qui mesure la masse occupant l'unité de volume. Pour un mélange, on a :

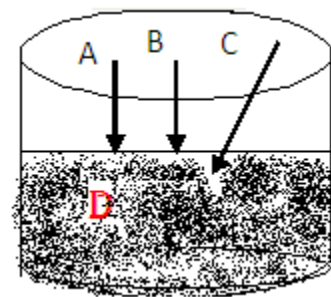
- masse volumique partielle : la masse de composé(i)/
unité de volume

$$\rho_i = \frac{m_i}{V} \text{ avec } \sum_{i=1} \rho_i = \rho \text{ ou } \rho \text{ masse volumique du mélange}$$

- fraction massique ou titre massique qui représente la masse de composant (i) par unité de masse de mélange

$$\omega_i = \frac{m_i}{m_{tot}} = \frac{\rho_i}{\rho}$$

- concentration molaire C_i ou densité molaire : C'est le nombre de mole de composé (i),



de masse molaire M_i par unité de volume

$$C_i = \frac{N_i}{V} = \frac{\rho}{M} \text{ avec } M \text{ masse molaire moyenne du mélange}$$

$$- \text{fraction molaire : } y_i = \frac{C_i}{C} = \frac{N_i}{N_{tot}}$$

où N_i le nombre de moles du constituant i , défini par la relation suivante :

$$N_i = \frac{m_i}{M_i}$$

avec M_i la masse molaire de l'espèce i . Pour un gaz parfait et d'après la loi de Dalton, la pression totale est égale à la somme des pressions partielles. Soit :

$$\text{Avec } P_{tot} = \sum_i P_i$$

$$P_i = y_i * P_{tot}$$

III.1.2 Vitesse et Flux

➤ Vitesse

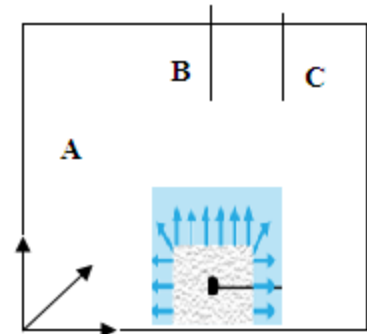
\vec{V}_i : C'est la vitesse moyenne du molécule de composant (i) par rapport à un system de cordonné fixe dans l'espace.

\vec{V} : C'est la vitesse moyenne massique du mélange

$$\vec{V} = \frac{\sum_i^n \rho_i \vec{V}_i}{\sum \rho_i} \text{ pour un mélange binaire A et B}$$

$$\vec{V} = \frac{\rho_A \vec{V}_A + \rho_B \vec{V}_B}{\rho} \text{ (Kg/m}^2 \cdot \text{s)}$$

\vec{V}^* = C'est la vitesse moyenne molaire du mélange (vitesse d'ensemble définit par :



$$\vec{V}^* = \frac{\sum C_i \vec{V}_i}{\sum C_i}$$

$$\vec{V}^* = \frac{C_A \vec{V}_A + C_B \vec{V}_B}{C}$$

Le produit $C\vec{V}^*$: représente le taux auquel les molécules passent dans une section unitaire perpendiculaire à la direction de la vitesse (\vec{V}^*).

$(\vec{V}_i^* - \vec{V}^*)$: C'est la vitesse de diffusion du composant (i) par rapport à la grande vitesse (\vec{V}^*).

➤ Flux

On appelle flux la quantité de matière qui traverse une section droite de canalisation par unité de temps qui peut être exprimé par unité de masse ou unité molaire. Le flux peut être :

1. Relatif par rapport un system de cordonné fixe dans l'espace

$$\vec{n}i = \rho i \vec{V}; \text{ Flux massique et } \vec{N}i = C_i \vec{V}i \text{ le flux molaire}$$

2. Relatif par rapport à la vitesse moyenne massique

$$\text{Flux massique } \vec{j}i = \rho i (\vec{V}_i - \vec{V}); \text{ Flux molaire } \vec{J}i = C_i (\vec{V}_i - \vec{V})$$

3. Relatif par rapport à la vitesse moyenne molaire

$$\text{Flux massique } \vec{j}^* = \rho_i (\vec{V}_i^* - \vec{V}^*); \text{ Flux molaire } = \vec{J}^* = C_i (\vec{V}_i^* - \vec{V}^*)$$

Remarque

L'utilisation d'une de ces formes serai suffisante pour traiter les problèmes de diffusion.

Le flux molaire partiel d'un constituant(i) peut s'écrire aussi $\vec{N}i = C_i \vec{V}^* + \vec{j}^*$. La dernière expression distingue entre l'advection et la diffusion

$$\sum_i J_i^* = 0 \quad \sum_i J_i = 0$$

$$\vec{J}_i^* = \vec{N}_i - X_i \sum_{j=1}^n \vec{N}_j$$

III.2 Transport par diffusion

Considérons un milieu qui est à la fois immobile (aucun écoulement d'ensemble) et tranquille (aucun remous ni tourbillon). Les seuls mouvements possibles se font à l'échelle moléculaire.

L'agitation thermique des molécules, des ions ou des électrons libres au sein de la matière, entraîne des évolutions macroscopiques de systèmes, que nous décrivons par des lois à notre échelle, dont les plus simples sont les lois linéaires.

En effet, le transfert de matière par diffusion se présente comme le mécanisme de transport d'un constituant dans un milieu stagnant, sous l'effet d'un écart dans la distribution spatiale de concentration par rapport à l'équilibre. Ce flux molaire diffusif de la matière est proportionnel au gradient de concentration et à l'aire de la surface perpendiculaire à la direction de déplacement des particules du fluide.

Lois de Fick pour un system binaire

$$\vec{J}_A = -D_{AB} \overrightarrow{\text{grad}} \rho_A$$

$$\vec{J}_A = -D_{AB} \rho \overrightarrow{\text{grad}} \omega_A$$

$$\vec{J}_A^* = D_{AB} \overrightarrow{\text{grad}} C X_A = -D_{AB} \left(\frac{dC_A}{dx} \right)$$

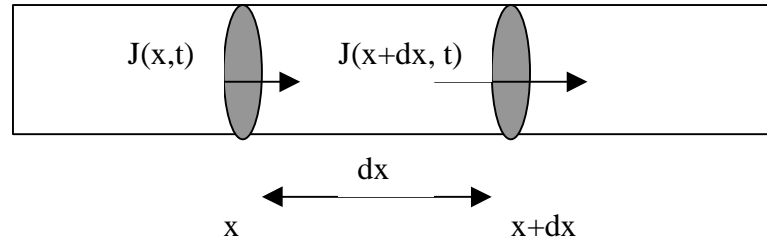
$$\vec{J}_A^* = D_{AB} C \overrightarrow{\text{grad}} X_A$$

$$\vec{J}_A^* + \vec{J}_B^* = \mathbf{0}$$

ou

$$J = -\text{Di} \left(\frac{\partial c_i}{\partial x} + \frac{\partial c_i}{\partial y} + \frac{\partial c_i}{\partial z} \right) \quad \text{dans le cas général}$$

si la concentration de l'espèce varie au cours du temps, c'est-à-dire en régime de diffusion non stationnaire alors

$$j(x,t) = -D_i \frac{\partial C_i(x,t)}{\partial x}$$


Où D_{AB} est la diffusivité de A dans le mélange (A+B). Généralement, la diffusivité des gaz est plus importante que la diffusivité des liquides. Cette équation est dite 1ère loi de Fick de diffusion. On note qu'elle est identique aussi bien à l'équation de Fourier de conduction thermique qu'à l'équation de Newton de viscosité et que dans des conditions analogues (conditions aux limites identiques), les solutions sont parfaitement superposables.

Par ailleurs, le mouvement du fluide est un facteur qui contribue à la promotion des phénomènes de transfert de matière : C' est la convection de matière. Par analogie à la loi de Newton de refroidissement, le flux molaire par convection est exprimé par l'équation :

$$\dot{N}_{Conv} = kA_p (C_p - C_\infty)$$

où k est le coefficient de transfert de matière lequel dépend de :

- La vitesse de l'écoulement du fluide ;
- Propriétés physiques du fluide ;
- Géométrie de la conduite.

On distingue la convection naturelle et la convection forcée

La convection naturelle : la convection naturelle est due à la gravité, et implique des différences de densité qui peuvent être causées par une différence de température ou une différence de concentration dans un milieu homogène.

La convection forcée : ce mode de transfert est dû à la présence d'une force externe dont le plus souvent est d'origine mécanique (différence de niveau , pompe....etc).

Le Coefficients de diffusion

Le coefficient de diffusion de matière est une grandeur physique déterminée expérimentalement. Pour les gaz dilués, D_{AB} est indépendant de la composition du mélange et croît avec la température alors qu'il décroît avec la pression. Pour les gaz, on a établi une loi empirique de la forme :

$$D_{AB} \propto \frac{T^{(3/2)}}{P}$$

de sorte qu'il est possible d'estimer la valeur de D_{AB} pour toute autre condition, soit :

$$\frac{(D_{AB})_2}{(D_{AB})_1} = \frac{P_1}{P_2} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{(3/2)}$$

Tableau 4 : Coefficients de diffusion binaire ($10^{+6} * D_{AB}$) de certains gaz dans l'air à pression atmosphérique.

T(K)	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
O ₂	0,95	1,88	5,25	4,75	6,46	8,38	10,50	12,60	15,20
CO ₂	0,74	1,57	2,63	3,85	5,37	6,84	8,57	10,50	12,40
H ₂	3,75	7,77	12,50	17,10	24,40	31,70	39,30	47,70	56,90

Pour le système air eau, on utilisera l'équation suivante pour déterminer la diffusivité de matière :

$$D_{air-H_2O} = 1,87 * 10^{-10} \left(\frac{T^{2,072}}{P} \right) \quad (m^2 / sec) , P \text{ en atm et } T \text{ en Kelvin } (280 < T < 450K)$$

Le gradient de concentration peut être responsable d'une diffusion thermique : C'est l'effet de Soret. Toutefois, dans les pores d'un solide où les dimensions sont plus faibles par rapport au libre parcours moyen des molécules du gaz, la diffusion est dite de type Knudsen. Si la taille des molécules est comparable aux dimensions moyennes du pore, alors elles peuvent migrer par saut d'un site à l'autre sur la paroi du pore. Dans ce cas, on parle de diffusion surfacique. Certains gaz sont faiblement solubles dans les liquides (air dans l'eau) et pour des solutions diluées, la composition de la phase liquide obéit à la loi de Henry qui s'écrit :

$$x_i|_{liq} = \frac{P_i|_{gaz}}{H}$$

où H est la constante de Henry. Elle est fonction de la température exclusivement. La combinaison des lois de Dalton et de Henry permet d'établir une relation entre la composition des deux phases en équilibre, soit :

$$P_i|_{gaz} = y_i P_{tot} = x_i P_i^{Sat}$$

Avec P_i^{Sat} est la tension de la vapeur saturante de l'espèce i à la température T. Il en découle que la concentration de l'espèce i dans le solide à l'interface $C_i|_{solide}$ est proportionnelle à sa pression partielle dans la phase gazeuse. D'où :

$$C_i|_{solide} = S * P_i|_{gaz}$$

S est la solubilité du constituant i dans le mélange. De façon similaire, on définit la perméabilité d'un gaz $\left[\frac{kmol}{sec. bar} \right]$ pour mesurer son aptitude à pénétrer dans la phase solide.

$$P = S * D_{AB}$$

Exemple 1: Soit un réservoir en nickel contenant de l'hydrogène gazeux à $T=358$ K et sous une pression $P=300$ kPa. Calculer les flux molaire et massique de l'hydrogène dans le nickel à l'interface ? (**Indications** : $M_{H_2}=2$ g/mole, $S=0,0090$ kmole/m³.bar).

Solution : La pression est exprimée en bar : $P=300$ kPa=3bar.

$$C_i|_{solide} = S * P_i|_{gaz} = 0,0901 * 3 = \mathbf{0,027 \text{ kmol/m}^3}$$

$$\rho_{H_2} = 0,027 * 2 = 0,054 \text{ kg/m}^3.$$

III.3 Diffusion matière dans un milieu en mouvement

De tels cas se présentent dans le phénomène d'évaporation de l'eau à partir d'un lac d'eau, à ciel ouvert, sous l'influence de la circulation du vent laquelle implique une diffusion dans un milieu en mouvement. En fonction des cas, on distingue :

-1) Milieu homogène sans mouvement apparent du fluide : $\Rightarrow \dot{N}_A = \dot{N}_B = 0$

-2) Milieu homogène avec mouvement apparent du fluide :

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{N}_A = C_A v_A^{moy} A \\ \dot{N}_B = C_B v_B^{moy} A \\ \dot{N}_{tot} = C_A v_A^{moy} A + C_B v_B^{moy} A \end{cases}$$

-3) Milieu hétérogène sans mouvement apparent du fluide :

$$\Rightarrow v_A|_{diff} = -v_B|_{diff}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{N}_A = C_A v_A^{diff} A \\ \dot{N}_B = C_B v_B^{diff} A \end{cases}$$

-3) Milieu hétérogène avec mouvement apparent du fluide :

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{N}_A = C_A v_A^{diff} A \\ \dot{N}_B = C_B v_B^{diff} A \\ \dot{N}_{tot} = \dot{N}_A + \dot{N}_B \end{cases}$$

La vitesse des espèces en un point est la vitesse de diffusion moyenne d'un groupe de molécules sous l'influence d'un gradient de concentration. Ainsi, le flux massique s'écrit :

$$\dot{m} = \rho v A$$

Dans un mélange, le principe de conservation de la matière est exprimé par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{m}_{tot} &= \dot{m}_A + \dot{m}_B \\ \Rightarrow \rho v A &= \rho_A v_A A + \rho_B v_B A \\ \Rightarrow v &= \frac{\rho_A v_A + \rho_B v_B}{\rho} = \omega_A v_A + \omega_B v_B \end{aligned}$$

V est la vitesse barycentrique moyenne du fluide. Elle est nulle pour un fluide stagnant.

En toute rigueur, elle est la superposition de :

- vitesse moyenne de l'écoulement propre du fluide ;
- vitesse de diffusion propre des espèces du fluide.

$$v_A = v + v_A^{diff}$$

Le flux massique total de matière est :

$$\begin{aligned} \dot{m}_A &= \rho_A v_A A = \rho_A A^* (v + v_A^{diff}) \\ &= \dot{m}_A^{Diff} + \dot{m}_A^{onv} \end{aligned}$$

Il ressort que la densité de flux global de transfert de matière a pour expression :

$$\begin{aligned} \dot{J}_A &= \rho_A v_A = \frac{\rho_A}{\rho} \rho^* v + \rho_A v_A^{diff} \\ &= \omega_A^* \left(\dot{J}_A + \dot{J}_B \right) - \rho D_{AB} \frac{d\omega_A}{dx} \end{aligned}$$

Il y a lieu de noter que le flux massique diffusif s'oppose à la direction de l'écoulement.

Ainsi, on a :

$$\dot{m}_A^{Diff} = \rho_A A^* v_A^{diff} = \rho_A A^* (v_A - v)$$

Pour un système binaire, les flux massiques diffusifs de matière donnent :

$$\dot{m}_A^{Diff} + \dot{m}_B^{Diff} = 0 \quad \Rightarrow \quad -D_{AB} \frac{d\omega_A}{dx} - D_{BA} \frac{d\omega_B}{dx} = 0$$

Il est clair que pour maintenir la densité massique constante, il faut que le flux de A soit de signe opposé au flux de B. En général, on a :

$$\omega_A + \omega_B = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega_A}{dx} + \frac{d\omega_B}{dx} = 0$$

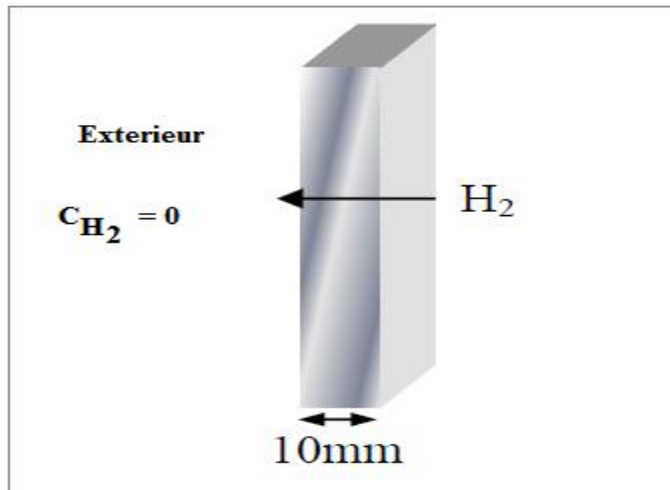
La combinaison des équations précédentes conduit à un résultat très intéressant. En effet, on a : $D_{AB} = D_{BA}$

Exemple 2 :

Dans un container rectangulaire, on a stocké de l'hydrogène gazeux sous une pression élevée. Le matériau du container est de l'acier d'épaisseur 10 mm. La concentration d'hydrogène dans la surface interne est 1 kmol/m^3 . La concentration d'hydrogène sur la surface externe est négligeable. Le coefficient de diffusion de H dans l'acier est:

$$D = 0,26 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Quelle est le flux molaire de l'hydrogène dans l'acier?

Corrigé

Posons tout d'abords les hypothèses nécessaires à la résolution de ce problème:

- 1) Cas stationnaire
- 2) on considère le coefficient du diffusion $D_{H-Acier} = \text{constante}$
- 3) Pas de transport
- 4) Concentration de H2 (interne) constante
- 5) Concentration nulle à l'extérieur
- 6) Aucune réaction chimique entre H et l'acier

Après toutes ces simplifications on peut aisément calculer le flux molaire de H2 dans l'acier:

$$J = -D_{H-A} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \text{ avec } \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C_{int} - C_{ext}}{e} = \frac{1000}{0.01} = 10^5 \text{ mol.m}^{-2}$$

Alors $J = 0.26 \cdot 10^{-12} \cdot 10^5 = 2.6 \cdot 10^{-8} \text{ mol.s}^{-1}$

Exemple 3 :

Soit deux enceintes (parallélépipèdes rectangles de section 1m^2 et de volume $V_1=0,5\text{m}^3$ et $V_2=1,5\text{m}^3$) remplies d'un solvant et séparées par une membrane perméable aux solutés de 1mm d'épaisseur, les concentrations respectives en solutés (NaCl) à $t=0$ sont $C_1=0.5 \text{ mmol.cm}^{-3}$ et $C_2=0.1 \text{ mmol.cm}^{-3}$. On prend le coefficient de diffusion du soluté (NaCl) dans la solution égal $D = 10^{-10} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

- 1) Calculer la densité du flux traversant la membrane
- 2) La concentration à l'équilibre on aura dans chaque enceinte
- 3) Le temps nécessaire pour atteindre l'équilibre

Corrigé

1) Il faut faire attention aux unités et bien se placer dans le SI. De plus le sens positif arbitraire est important, c'est lui qui donne le signe de $\Delta C = C_2 - C_1$ et $= x_{\text{après membrane}} - x_{\text{avant membrane}}$ dans notre cas, soit $\Delta C < 0$ et $\Delta x > 0$.

$$J = -D_{H-A} \frac{\Delta C}{\Delta x} \text{ avec } \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C_2 - C_1}{e} = \frac{0.1 - 0.5}{0.001} = 4.10^5 \text{ mmol.m}^{-2}$$

A.N. $J = 10^{-10} \cdot 4.10^5 = 4.10^{-5} \text{ mmol.s}^{-1}$

2) A l'équilibre on aura $C_{eq} = n_t / V_t$ avec $n_t = n_1 + n_2 = C_1 V_1 + C_2 V_2$ et $V_t = V_1 + V_2$

$$C_{eq} = \frac{0.5 \cdot 1.5}{2} + \frac{0.1 \cdot 0.5}{2} = 0.2 \text{ mmol.cm}^{-3}$$

3) l'équilibre sera atteint quand le compartiment 1 sera passé de $0,5\text{mM}$ à $0,2\text{mM}$, il faut donc qu'il y ait diffusion de Δn particules en fonction du temps le cas de l'enceinte 1 $\Delta n = n_i - n_f$

- $n_i = C_1 \cdot V_1$ et $n_f = C_{eq} \cdot V_1$ ce qui donne, $\Delta n = 0,15 \cdot 10^3 \text{ mmol}$ de soluté avec $J = 0.4 \cdot 10^{-4}$ et $V = 0.5 \text{ m}^3$
- donc on peut écrire $\Delta t = \frac{\Delta n}{j} = \frac{150}{4 \cdot 10^{-5}} = 44 \text{ heures}$

Chapitre 4

VI Généralités Sur Le Transfert De Quantité de Mouvement

VI.1 Définition d'un fluide

Un fluide peut être considéré comme étant une substance formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Les forces de cohésion entre particules élémentaires sont très faibles de sorte que le fluide est un corps sans forme propre qui prend la forme du récipient qui le contient, par exemple: les métaux en fusion sont des fluides qui permettent par moulage d'obtenir des pièces brutes de formes complexes.

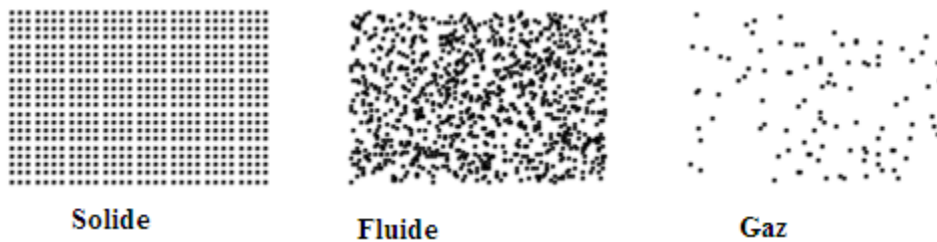


Fig.9 : Représentation idéalisée des trois états de la matière :

Les fluides peuvent être classés en deux grande familles : La famille des fluides "newtoniens" (comme l'eau, l'air et la plupart des gaz) et celle des fluides "non newtoniens" (quasiment tout le reste... le sang, les gels, les boues, les pâtes, les suspensions, les émulsions...). Les fluides "newtoniens" ont **une viscosité constante ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température**. La deuxième famille est constituée par les fluides "non newtoniens" qui ont la particularité d'avoir leur viscosité **qui varie en fonction de la vitesse** et des contraintes qu'ils subissent lorsque ceux-ci s'écoulent. Ce chapitre est limité uniquement à des fluides newtoniens qui seront classés comme suit.

VI.1.1 Fluide parfait

Soit un système fluide, c'est-à-dire un volume délimité par une surface fermée Σ fictive ou non.

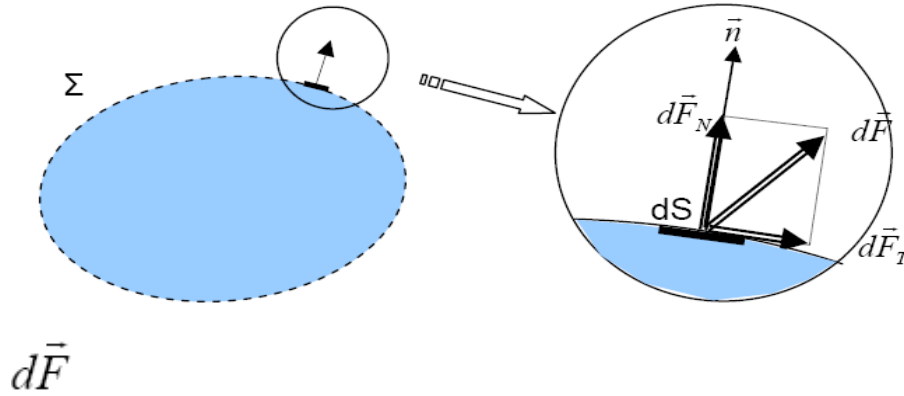


Fig. 10 : Représentation de la force d'interaction au niveau de la surface élémentaire

Considérons $d\vec{F}$ la force d'interaction au niveau de la surface élémentaire dS de normale $d\vec{n}$ entre le fluide et le milieu extérieur. On peut toujours décomposer $d\vec{F}$ en deux composantes:

- une composante $d\vec{F}_T$ tangentielle à dS .
- une composante $d\vec{F}_N$ normale à dS .

En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement. C'est à dire quand la composante $d\vec{F}_T$ est nul. Autrement dit, la force $d\vec{F}_T$ est normale à l'élément de surface dS .

VI.1.2 Fluide réel

Contrairement à un fluide parfait, qui n'est qu'un modèle pour simplifier les calculs, pratiquement inexistant dans la nature, dans un fluide réel les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prise en considération. Ce phénomène de frottement visqueux apparaît lors du mouvement du fluide.

Seulement au repos, qu'on admettra que le fluide réel se comporte comme un fluide parfait, en supposant que les forces de contact sont perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquels elles s'exercent.

VI.1.3 Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.)

VI.1.4 Fluide compressible

Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides compressibles par exemple l'air, l'azote ...etc.

VI.2. Caractéristiques Physiques

VI.2.1 Masse volumique

où :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

ρ : Masse volumique en (kg/m³),

m : masse en (kg),

V : volume en (m³).

VI.2.2 Poids volumique

$$\varpi = \rho \cdot g = \frac{m \cdot g}{V}$$

ϖ : Poids volumique en (N/m³).

m : masse en (kg),

g : accélération de la pesanteur en (m/s²),

V : volume en (m³).

VI.2.3 Densité

$$d = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse volumique d'un fluide de référence}} = \frac{\rho}{\rho_{ref}}$$

masse volumique d'un fluide de référence

masse volumique du fluide

Dans le cas des liquides on prendra l'eau comme fluide de référence. Dans le cas des gaz on prendra l'air comme fluide de référence.

VI.2.4 Viscosité

C'est une grandeur qui caractérise les frottements internes du fluide, autrement dit sa capacité à s'écouler. Elle caractérise la résistance d'un fluide à son écoulement lorsqu'il est soumis à l'application d'une force. C'est à dire, les fluides de grande viscosité résistent à l'écoulement et les fluides de faible viscosité s'écoulent facilement. Elle peut être mesurée par un viscosimètre à chute de bille, dans lequel on mesure le temps écoulé pour la chute d'une bille dans le fluide. Elle peut également être mesurée par un récipient dont le fond comporte un orifice de taille standardisée. La vitesse à laquelle le fluide s'écoule par cet orifice permet de déterminer la viscosité du fluide.

La viscosité est déterminée par la capacité d'entraînement qui possède une couche en mouvement sur les autres couches adjacentes. Par exemple, si on considère un fluide visqueux placé entre deux plaques P_1 et P_2 tel que la plaque P_1 est fixe et la plaque P_2 est animée d'une vitesse V_2 .

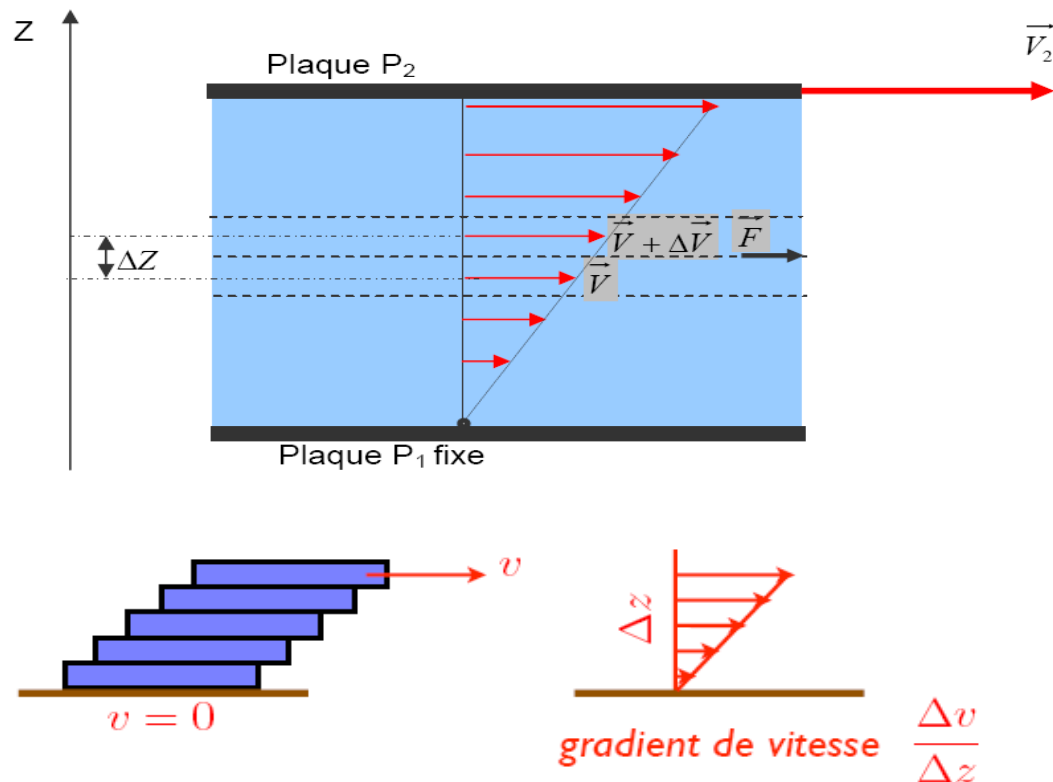


Fig.11 : Variation du profil de vitesses dans le film fluide

En représentant par un vecteur, la vitesse de chaque particule située dans une section droite perpendiculaire à l'écoulement, la courbe lieu des extrémités de ces vecteurs représente le profil de vitesse. Le mouvement du fluide peut être considéré comme résultant du glissement des couches de fluide les unes sur les autres.

On remarque que la force \vec{F} est proportionnelle à la vitesse \vec{V} , à l'aire de la plaque A et inversement proportionnelle à la distance ΔZ séparant les deux plaques. Mathématiquement, cette relation s'exprime par l'équation suivante:

$$F = \mu A \left(\frac{\Delta V}{\Delta Z} \right)$$

La constante de proportionnalité μ est dite la viscosité dynamique du fluide.

Où :

F : force de glissement entre les couches en (N),

μ : Viscosité dynamique en (kg/m.s),

S : surface de contact entre deux couches en (m²),

ΔV : Écart de vitesse entre deux couches en (m/s),

ΔZ : Distance entre deux couches en (m).

Remarque : Dans le système international (SI), l'unité de la viscosité dynamique est le Pascal seconde (Pa.s) ou Poiseuille (Pl) : 1 Pa.s = 1 Pl = 1 kg/m.s.

Cependant, dans le système CGS, l'unité $\frac{g}{cm \cdot sec}$ est connue comme le poise (P). Dans

la littérature, il est utile d'exprimer la viscosité rapportée à sa masse volumique.

$$\boxed{\nu = \frac{\mu}{\rho}} \quad (I.4)$$

ν est la viscosité cinématique. Dans le système CGS, elle a pour unité $\left(\frac{cm}{sec^2} \right)$ connue

sous la dénomination de Stokes dont la dimension correspond au $\frac{L}{T^2}$. On note que la

viscosité du gaz croît avec la température, alors que celle des liquides décroît suivant une loi de la forme :

$$\log(\mu) = A + \frac{B}{T}$$

Exemple :

Tableau 5 : Viscosité dynamique de certains Fluides

Fluide	μ (Pa.s)
eau (0 °C)	$1,787 \cdot 10^{-3}$
eau (20 °C)	$1,002 \cdot 10^{-3}$
eau (100 °C)	$0,2818 \cdot 10^{-3}$
Huile d'olive (20 °C)	$\approx 100 \cdot 10^{-3}$
glycérol (20 °C)	$\approx 1000 \cdot 10^{-3}$
Hydrogène (20 °C)	$0,86 \cdot 10^{-5}$
Oxygène (20 °C)	$1,95 \cdot 10^{-5}$

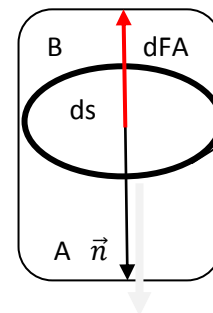
IV.3 Statiques des fluides

L'hydrostatique est la science qui étudie l'équilibre des liquides. Elle étudie en particulier la transmission des pressions. En hydrostatique, le fluide étant au repos, les lois établies pour un fluide parfait s'appliqueront à un fluide réel.

Un fluide réel diffère du fluide idéal par sa viscosité .Or celle-ci ne manifeste ses effets que s'il y a un déplacement.

IV.3.1 Notion de pression en un point d'un fluide

Dans un milieu quelconque, entre autre le milieu fluide, la force que le volume élémentaire (A) exerce sur le volume élémentaire (B) à travers un élément de surface \vec{ds} est dFA et soit \vec{n} la normale à (ds) passant par un point M. La pression est une grandeur scalaire. C'est l'intensité de la composante normale de la force qu'exerce le fluide sur l'unité de surface. Elle est définie en un point A d'un fluide par l'expression suivante :



$$P_A = \frac{\|\overrightarrow{dF_N}\|}{dS}$$

où :

dS : Surface élémentaire de la facette de centre A (en mètre carré),

n : Vecteur unitaire en A de la normale extérieure à la surface,

dF_N : Composante normale de la force élémentaire de pression qui s'exerce sur la surface (en Newton),

P_A : pression en A (en Pascal),

Sur la surface de centre A, d'aire dS , orientée par sa normale extérieure n , la force de pression élémentaire dF s'exprime par :

$$\overrightarrow{dF_N} = -P_A \cdot dS \cdot \vec{n}$$

Principe fondamental de l'hydrostatique

On considère un liquide immobile à l'intérieur d'un récipient; la pression en tous les points du liquide situés sur un même plan horizontal est identique. Les points A et B étant sur une verticale, le principe s'écrit:

$$P_B - P_A = \rho \cdot g \cdot h$$

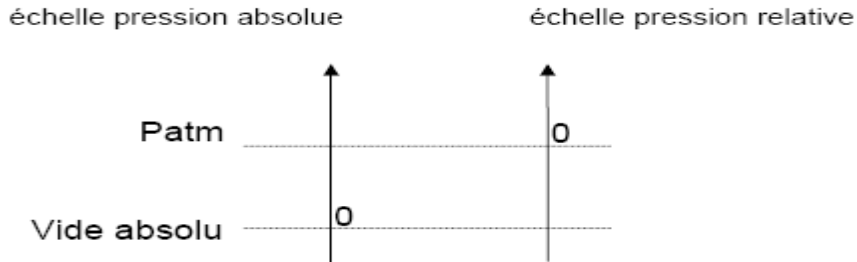
P_B, P_A : pressions en B et A \rightarrow kg/(m.s²) ou Pa (pascal) ;

ρ : masse volumique du liquide \rightarrow kg/m³ ; g : accélération de la pesanteur \rightarrow m/s²

h : distance verticale entre A et B \rightarrow m

La différence de pression (en Pa) entre A et B est numériquement égale au poids d'une colonne de liquide de section unité 1 m² et de hauteur h en m: on pourra dire que $P_B - P_A$ exprimée en pascals est donc égale à une pression de h m de colonne de liquide de masse volumique ρ (kg/m³). On peut toujours exprimer une pression avec une unité de hauteur après avoir précisé le liquide choisi.

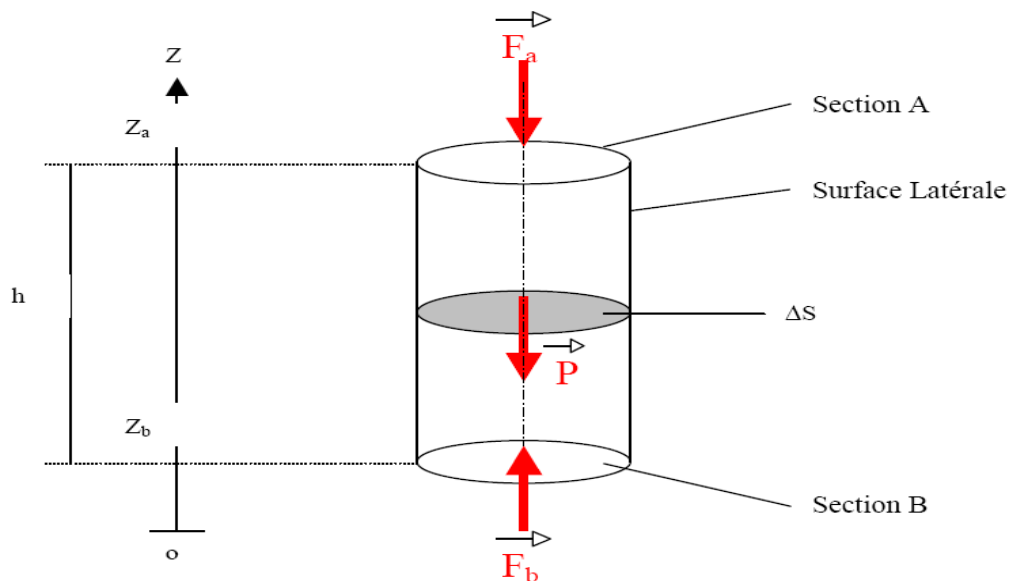
La différence de pression (en Pa) entre A et B est numériquement égale au poids d'une colonne de liquide de section unité 1 m² et de hauteur h en m: on pourra dire que $P_B - P_A$ exprimée en pascals est donc égale à une pression de h m de colonne de liquide de masse volumique ρ (kg/m³). On peut toujours exprimer une pression avec une unité de hauteur après avoir précisé le liquide choisi.



$$P_{absolue} = P_{relative} + P_{atmosphérique}$$

Démonstration de la formule d'hydrostatique

Etudiant l'équilibre d'une partie de fluide en forme de cylindre vertical de section droite très petite ΔS et d'une hauteur h .



Le cylindre est soumis à l'action de son poids et à l'action des forces de pression du milieu liquide extérieur.

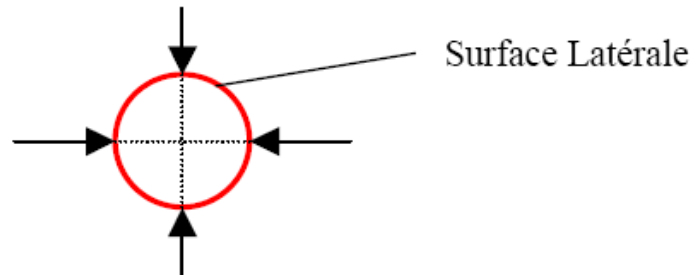
- Poids: $P = m \cdot g$ or $m = \rho \cdot V$ donc $P = \rho \cdot V \cdot g$ (avec $V = h \cdot \Delta S$)

- Forces de pression:

-Section A : $F_a = P_a \cdot \Delta S$

-Section B : $F_b = P_b \cdot \Delta S$

-Surface latérale : $F_L = 0$ (les forces de pression \perp à l'axe du cylindres s'opposent et s'annulent).



A l'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{F}_a + \vec{F}_b = \vec{0}$$

On projette l'équation sur l'axe OZ :

$$-P - F_a + F_b = 0$$

$$-\rho \cdot V \cdot g - P_a \cdot \Delta S + P_b \cdot \Delta S = 0$$

$$-\rho \cdot h \cdot \Delta S \cdot g - P_a \cdot \Delta S + P_b \cdot \Delta S = 0$$

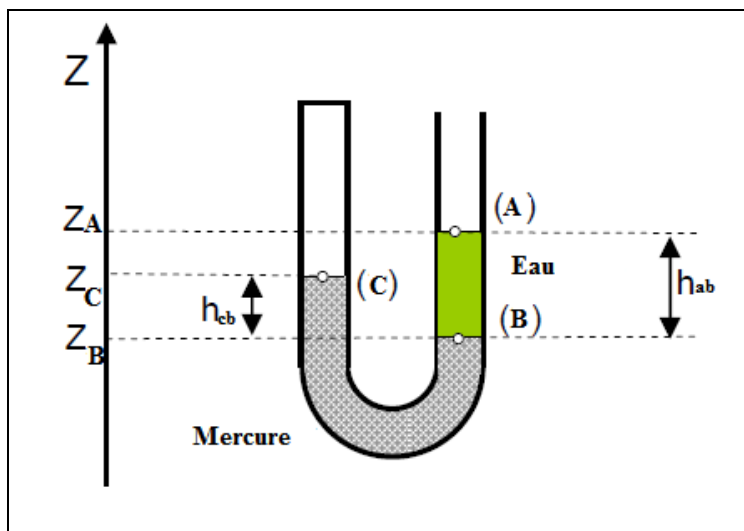
$$-\rho \cdot h \cdot g - P_a + P_b = 0$$

$$\text{or } h = Z_a - Z_b \Rightarrow$$

$$P_a + \rho \cdot g \cdot Z_a = P_b + \rho \cdot g \cdot Z_b$$

Exemple

Soit un tube en U fermé à une extrémité qui contient deux liquides non miscibles.



Entre les surfaces :

- (A) et (B) il s'agit de l'essence de masse volumique $\rho_{\text{Eau}} = 100 \text{ kg/m}^3$.

- (B) et (C), il s'agit du mercure de masse volumique $\rho_{\text{mercure}}=13600 \text{ kg/m}^3$.

La pression au-dessus de la surface libre (A) est $P_A=P_{\text{atm}}=1 \text{ atm}$.

L'accélération de la pesanteur est $g=9,81 \text{ m/s}^2$.

La branche fermée emprisonne un gaz à une pression P_C qu'on cherche à calculer :

- 1) En se basant sur la Relation Fondamentale de l'Hydrostatique, calculer la pression P_B (en mbar) au niveau de la surface de séparation en point (B) sachant que $h_{ab}=(Z_A-Z_B)=800 \text{ mm}$.
- 2) De même, pour le mercure, calculer la pression au point (c) P_C (en mba) au niveau de la surface (C) sachant que $h_{ac}=(Z_C-Z_B)=60 \text{ mm}$.

Solution :

1- L'application de la relation Fondamentale de l'Hydrostatique entre les points (A) et (B) permet d'écrire :

$$P_A - P_B = \rho_{\text{Eau}} \cdot g \cdot (Z_A - Z_B) \Rightarrow P_B = P_A + \rho_{\text{Eau}} \cdot g \cdot (h_{ab})$$

$$\text{A.N. } P_B = 1,013 \cdot 10^5 + 1000 \cdot 9,82 \cdot 0,8 = 1,09156 \cdot 10^5 \text{ Pascal} = 1091,56 \text{ mbar}$$

2- Pour le mercure

$$P_B - P_C = \rho_{\text{Mercure}} \cdot g \cdot (Z_B - Z_C) \Rightarrow P_C = P_B - \rho_{\text{Mercure}} \cdot g \cdot (h_{cb})$$

$$\text{A.N. } P_C = 1,09156 \cdot 10^5 - 13600 \cdot 0,06 \cdot 9,82 = 5,322 \cdot 10^4 = 53,22 \text{ mbar}$$

IV.4 Dynamique des fluides Incompressibles parfaits

L'écoulement des fluides est un phénomène complexe. On s'intéresse aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits, en particulier :

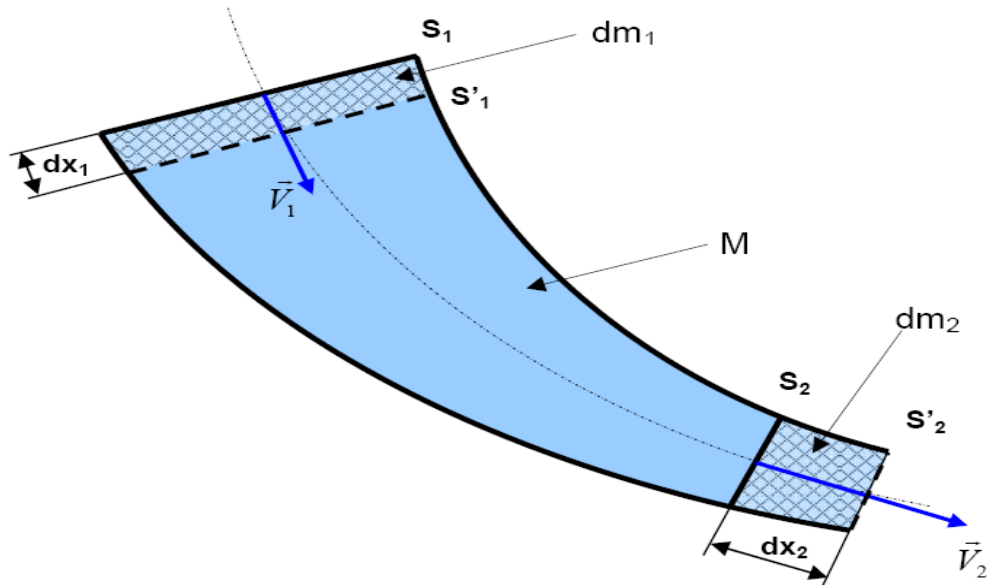
- l'équation de continuité (conservation de la masse),
- le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie) et,
- le théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement) à partir duquel on établit les équations donnant la force dynamique exercée par les fluides en mouvement (exemple les jets d'eau).

IV.4.1 Ecoulement permanent

L'écoulement d'un fluide est dit permanent si le champ des vectrices vitesses des particules fluides est constant dans le temps.

IV.4.2 Equation de continuité

Considérons une veine d'un fluide incompressible de masse volumique ρ animée d'un écoulement permanent.



On désigne par :

- S_1 et S_2 respectivement la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t ,
- S'_1 et S'_2 respectivement les sections d'entrée et de sortie du fluide à l'instant $t'=(t+dt)$,
- V_1 et V_2 les vecteurs vitesse d'écoulement respectivement à travers les sections S_1 et S_2 de la veine.
- dx_1 et dx_2 respectivement les déplacements des sections S_1 et S_2 pendant l'intervalle de temps dt ,
- dm_1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S_1 et S'_1 ,
- dm_2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S_2 et S'_2 ,
- M : masse comprise entre S_1 et S_2 ,
- dV_1 : volume élémentaire entrant compris entre les sections S_1 et S'_1 ,
- dV_2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections S_2 et S'_2 ,

A l'instant t : le fluide compris entre S_1 et S_2 a une masse égale à $(dm_1 + M)$

A l'instant $t+dt$: le fluide compris entre S'_1 et S'_2 a une masse égale à $(M + dm_2)$.

Par conservation de la masse: $dm_1 + M = M + dm_2$ en simplifiant par m on aura

$$dm_1 = dm_2 = \text{Donc } \rho_1 \cdot dV_1 = \rho_2 \cdot dV_2 \text{ ou encore } \rho_1 \cdot S_1 dx_1 = \rho_2 \cdot S_2 dx_2$$

En divisant par dt on abouti à :

$$\rho_1 \cdot S_1 dx_1/dt = \rho_2 \cdot S_2 dx_2/dt \Leftrightarrow \rho_1 \cdot S_1 V_1 = \rho_2 \cdot S_2 V_2$$

Puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ On peut simplifier et aboutir à 1):

$$S_1 V_1 = S_2 V_2$$

IV.5 Notion De Débit

IV.5.1 Débit massique

Le débit massique d'une veine fluide est la limite du rapport dm/dt quand dt tend vers 0.

$$q_m = \frac{dm}{dt}$$

où :

- q_m est la masse de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.

- dm : masse élémentaire en (kg) qui traverse la section pendant un intervalle de temps dt

- dt : intervalle de temps en (s) en tenant compte des équations précédentes on obtient :

$$q_m = \frac{dm}{dt} = \rho_1 S_1 \frac{dx_1}{dt} \quad \text{avec} \quad \frac{dx_1}{dt} = V_1 \quad \text{et} \quad \frac{dx_2}{dt} = V_2$$

avec :

V_1 : Vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers S_1

V_2 : Vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers S_2

D'où :

$$q_m = S_1 V_1 = S_2 V_2$$

Soit dans une section droite quelconque S de la veine fluide à travers laquelle le fluide s'écoule à la vitesse moyenne v :

$$q_m = \rho S V \quad (3)$$

où :

q_m : Débit massique en (kg/s) ; ρ : Masse volumique en (kg/m³)

S : Section de la veine fluide en (m²) V : Vitesse moyenne du fluide à travers (S) en (m/s)

IV.5 2 Débit volumique

Le débit volumique d'une veine fluide est la limite du rapport dV/dt quand dt tend vers 0.

$$q_v = \frac{dV}{dt}$$

- q_v : Volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.

- dV : Volume élémentaire, en (m³), ayant traversé une surface S pendant un intervalle de temps dt ,

- dt : Intervalle de temps en secondes (s),

D'après la relation précédente, et en notant que

$$dV = \frac{dm}{\rho}$$

on peut écrire également que

$$q_v = \frac{q_m}{\rho}$$

En fin

$$q_v = SV$$

IV.5.3 Relation entre débit massique et débit volumique

A partir des relations précédentes on peut déduire facilement la relation entre le débit massique et le débit volumique :

$$q_m = \rho \cdot q_v$$

Exemple :

Un fluide parfait incompressible (eau) s'écoule d'un orifice circulaire situé sur le coté d'un réservoir avec un débit volumique $q_v = 24\text{L/min}$. Le diamètre de l'orifice est $d = 15\text{ mm}$.

- 1) Calculer le débit massique d'eau à travers l'orifice en Kg/s.
- 2) Déterminer la vitesse d'écoulement au niveau de l'orifice.

Solution

- 1) On sait que $q_m = \rho \cdot q_v$ et $\rho_{\text{eau}} = 1000\text{g/L}$ donc on aura

$$q_m = 1000 \cdot \frac{24}{60} = 400\text{g/s} = 0,4\text{ Kg/s}$$

2) En appliquant l'équation de continuité de mouvement, on peut écrire :

$$Q_v = V.S \Rightarrow V = \frac{Q_v}{S} = \frac{4Q_v}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,4}{3,14 \cdot 0,015^2} = 2,26 \text{ m/s}$$

IV.6 Théorème de Bernoulli –

Cas d'un écoulement sans échange de travail

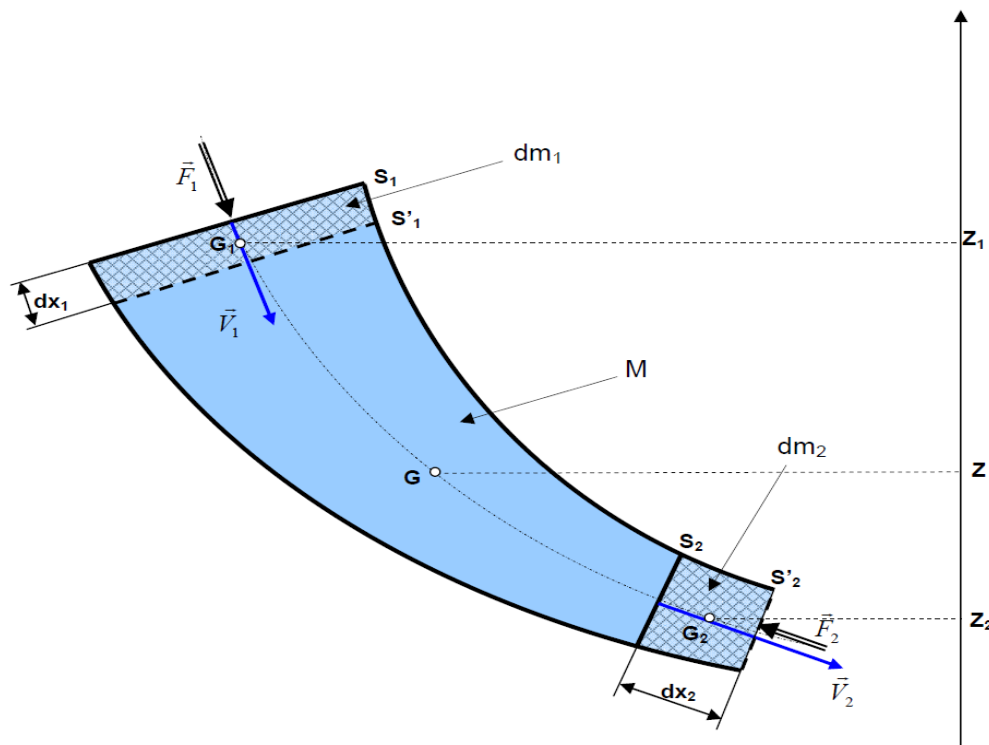
Reprenons le schéma de la veine fluide du paragraphe IV.4.2 avec les mêmes notations et en introduisant hypothèses suivantes:

- Le fluide est parfait et incompressible.
- L'écoulement est permanent.
- L'écoulement est dans une conduite parfaitement lisse.

On considère un axe Z vertical dirigé vers le haut.

On note Z_1 , Z_2 et Z respectivement les altitudes des centres de gravité des masses dm_1 , dm_2 et M .

On désigne par F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2 .



A l'instant t le fluide de masse $(dm_1 + M)$ est compris entre S_1 et S_2 . Son énergie mécanique est :

$$E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} = (dm g Z_1 + MgZ) + \frac{1}{2}(dm V_1^2 + \int_{S_1}^{S_2} \frac{V^2}{2})$$

A l'instant $t'=(t+dt)$ le fluide de masse $(M+dm_2)$ est compris entre S'_1 et S'_2 . Son énergie mécanique est :

$$E^1_{mec} = E^1_{pot} + E^1_{cin} = (M g Z + dm_2 g Z_2) + \frac{1}{2}(dm_2 V_2^2 + \int_{S_1}^{S_2} \frac{dm V^2}{2})$$

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à ce fluide entre les instants t et $t+\Delta t$ (la variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces extérieures : poids et forces pressantes), on obtient :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho g} + Z = H = Cte$$

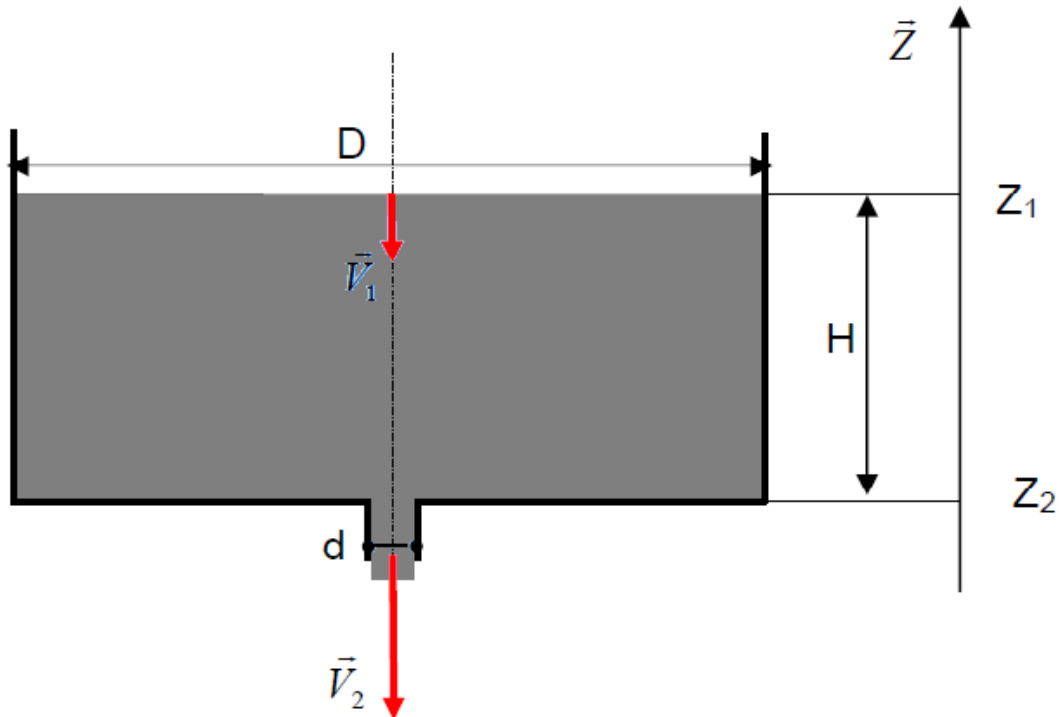
P est la pression statique, $\rho g Z$ est la pression de pesanteur, $\frac{\rho V^2}{2g}$ est la pression cinétique

Tous les termes sont exprimés en mètres de colonne de fluide. A partir de la relation précédente nous pouvons écrire :

$$\frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho g} + g \cdot Z_2 = \frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho g} + g \cdot Z_1$$

Exemple

On considère un réservoir cylindrique de diamètre intérieur $D = 4\text{m}$ rempli d'eau jusqu'à une hauteur $H = 6\text{m}$. Le fond du réservoir est muni d'un orifice de diamètre $d = 20\text{mm}$ permettant de faire évacuer l'eau



On ouvre l'orifice du fond et on laisse passer un temps très petit dt , le niveau d'eau H du réservoir descend d'une quantité dH . On note $V_1 = \frac{dH}{dt}$ la vitesse de descente du niveau d'eau, et V_2 la vitesse d'écoulement dans l'orifice. On donne l'accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

- 1) Dédire l'expression de V_1 en fonction de V_2 , D et d .
- 2) Ecrire l'équation de Bernoulli. On suppose que le fluide est parfait et incompressible.
- 3) A partir des réponses aux questions 1) et 2) établir l'expression de la vitesse d'écoulement V_2 en fonction de g , H , D et d .
- 4) Calculer la vitesse V_2 . On suppose que le diamètre d est négligeable devant D . C'est-à-dire $d \ll D$
- 5) En déduire le débit volumique qV .

Solution

1) En appliquant l'équation de continuité on obtiendra

$$Q_v = V_1 \cdot S_1 = V_2 S_2 \Rightarrow$$

$$\frac{\pi D^2}{4} * V_1 = \frac{\pi d^2}{4} * V_2 \text{ donc } V_1 = V_2 \frac{d^2}{D^2} \quad \text{Eq.1}$$

2) Le fluide est supposé parfait et incompressible, donc il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement et la variation de sa masse volumique avec la pression extérieure.

$$\frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + g \cdot Z_2 = \frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + g \cdot Z_1$$

Or $P_1 = P_2$ et $(Z_1 - Z_2) = H \Rightarrow$ On obtient

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} - g * H = 0 \quad \text{Eq.2}$$

3) En substituant l'équation (1) dans (2) on obtient

$$\frac{V_2^2 - \frac{d^4}{D^4} V_2^2}{2} = g \cdot H$$

Donc la vitesse :

$$V_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H}{1 - \frac{d^4}{D^4}}}$$

4) En considérant $d \ll D$ alors l'expression de la vitesse d'écoulement s'écrit

$$V_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

$$\text{A.N. } V_2 = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 6} = 10.94 \text{ m/s}$$

$$5) Q_v = V_2 S_2 = \frac{\pi d^2}{4} * V_2 = \frac{\pi 0.02^2}{4} * 10.94 = 3.29 * 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

Conclusion

La statique des fluides est basée principalement sur la relation fondamentale de hydrostatique, qui spécule que la différence de pression entre deux points est proportionnelle à leur différence de profondeur

Alors que dans le cas des fluides en mouvement , la mécanique des fluides est base sur l' équation de conservation et l' équation de Bernoulli , qui ont un intérêt pratique considérable du moment ou elles permettent de comprendre le principe de fonctionnement de beaucoup d'instruments de mesure de débits tels que le tube de Pitot, le tube de Venturi et le diaphragme...etc.

Bibliographie

Bibliographies

- [1] Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.N. Transport phenomena. New York : John Wiley & Sons, 1962.
- [2] Brodkey R. S., Hershey H.C. Transport phenomena: a unified approach. New York : McGraw Hill-College, 1988, 847 pages (ISBN 9780070079632).
- [3] Coeuret F., Storck A., Eléments de génie électrochimique. Paris : TEC/DOC Lavoisier, 1984 (ISBN 2-85206-243-7).
- [4] Defives D., Rojey A., Transfert de matière efficacité des opérations de séparation du génie chimique. Paris Edition technique, 1976 (ISBN 2-7108-0299-6).
- [5] Battaglia J.L., Kusiak A., Puiggali J.L., Introduction Aux Transferts Thermiques, Cours et exercices corrigés, Dunod, Paris, 2010 (ISBN 978-2-10-054828-6).
- [6] Jannot Y., Moyne C., polycopie Transferts Thermiques Cours et 55 exercices corrigés 2012.
- [7] CRABOL J., Transfert de chaleur, Masson (1989)
- [8] De Vriendt A.B., La Transmission de la chaleur, Gaetan Morin Éditeur (1984)
- [9] Gosse J., Guide de Thermique, Dunod (1981)
- [10] Ben Hamouda R., Polycopie Notions Mécanique des fluides - Cours et exercices corrigés. Centre de Publication Universitaire, Tunis 2008 ISBN : 978-9973-37-494-3
- [11] Amiroudine S., Battaglia J.L. Mécanique des fluides - Cours et exercices corrigés Dunod, Paris, 2011 ISBN 978-2-10-056922-9.
- [12] Comolet R., Mécanique expérimentale des fluides, Statique et dynamique des fluides non visqueux, tome 1, DUNOD, Paris, 2002.
- [13] Desjardins D., Combarous M., Bonneton N., Mécanique des fluides-Problèmes résolus avec rappels de cours, DUNOD, Paris, 2002
- [14] <http://www.utc.fr/~houde/TF06/>.
- [15] <http://cours-examens.org/index.php/30-etudes-secondaires/sciences-physiques/64-phenomene-de-transfert-et-application>
- [16] <http://www.utc.fr/~houde/TF11/ch0.html>