

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Hassiba Benbouali de Chlef

Faculté de Génie Civil et d'Architecture

Département de Génie Civil



THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT

Domaine : Sciences et Technologie

Filière : Génie civil

Spécialité : Matériaux et Structures

Par

NEBAB Mokhtar

Thème :

ÉTUDE DE L'EFFET DE L'ASSISE ÉLASTIQUE SUR LE COMPORTEMENT STATIQUE ET DYNAMIQUE DES STRUCTURES NON-HOMOGENÈS

Soutenue le 02/07/2020 devant le jury composé de :

BRANCI Taieb	Professeur	Université de Chlef	Président
ZIDOUR Mohamed	Professeur	Université de Tiaret	Examineur
HOUARI Mohamed Sid Ahmed	Professeur	Université de Mascara	Examineur
HAMRAT Mostefa	Professeur	Université de Chlef	Examineur
AIT ATMANE Hassen	Professeur	Université de Chlef	Rapporteur
BENNAI Riadh	MCA	Université de Chlef	Co- Rapporteur

Dédicace

Dédicace

To my mother, you are my beautiful world,

To my father.

All the respect and love for both of you ♥.

Remerciements

Remerciements

Tout d'abord, j'adresse mes sincères remerciements à mon directeur de thèse, Professeur **AIT ATMANE Hassen**, pour son soutien qu'il n'a cessé de m'apporter, sa disponibilité et ses précieux conseils qui ont permis de mener à bien ce travail, Ses qualités humaines et ses nombreuses connaissances et plus largement scientifiques m'ont permis de progresser et de prendre confiance.

Je remercie également **BENNAI Riadh**, Maître de conférences à l'université de Chlef, co-directeur de la thèse de m'avoir aidé, sa collaboration est également efficace tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier le Professeur **TOUNSI Abdelouahed** de l'Université de Sidi-Bel-Abbès, pour ses Conseils déterminant dans ma sujet de recherche et qui a été proposé par lui et mon directeur de thèse.

Je n'oublie d'adresser mes plus sincères remerciements au Docteur **BENABDALLAH Tahar** pour toute l'aide qu'il a pu m'apporter durant mon stage à sein de l'Université King Abdulaziz, son aide et son soutien étaient d'un grand intérêt.

M. **BRANCI Taieb**, professeur à l'Université de Chlef, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du Jury.

M. **ZIDOUR Mohamed**, professeur à l'université Tiaret, qui a accepté d'examiner cette thèse et de faire partie du jury.

M. **HOUARI Mohamed Sid Ahmed**, professeur à l'université Mascara, qui a accepté d'examiner cette thèse et de faire partie du jury.

M. **HAMRAT Mostefa**, professeur à l'Université de Chlef, qui a accepté d'examiner cette thèse et de faire partie du jury.

Je remercie tous les enseignants et mes collègues qui ont contribué directement ou indirectement à ma formation de 3^{ème} cycle, qui m'a soutenu et aidé du premier jour à ma classe primaire jusqu'à ce jour.

Résumé

Résumé

Dans le cadre des travaux de cette thèse, nous tenterons de mieux comprendre l'effet d'assise élastique sur le comportement mécanique des structures en matériaux composites avancés avec des propriétés graduellement variables suivant l'épaisseur de la structure. La distribution de propriétés des matériaux varient selon des lois de distribution. Nous avons trois axes de travail :

Dans la première partie de ce travail, le comportement dynamique des plaques à gradient de propriétés reposant sur des fondations élastiques variables a été étudié en utilisant une théorie du cisaillement d'ordre supérieur. La théorie actuelle n'a que quatre variables inconnues en utilisant l'intégrale indéfinie pour réduire le nombre d'équations de mouvement, donnant un nombre d'inconnues réduit par rapport aux théories classiques premier ordre et celles d'ordre supérieur. Les plaques FGM étaient supposées être reposées sur des assises de type Winkler-Pasternak dans laquelle le module de Winkler est supposé variable dans la longueur des plaques.

La deuxième partie, l'étude de la propagation des ondes dans des plaques FG reposant sur une fondation élastique a été étudiée. Les fondations élastiques sont modélisées en deux couches (Winkler et Pasternak). La théorie actuelle a été développée en utilisant la fonction de cisaillement de Reissner.

Dans la dernière partie des travaux, l'analyse statique de plaques composites reposant sur des fondations élastiques variables a été étudiée sur la base de la théorie de la déformation par cisaillement sinusoïdal. Nous avons proposé de nouvelles variations du module de Winkler en longueur de la plaque ; ces variations sont de type exponentiel, cosinus et polynôme, confrontés avec ceux trouvée dans la littérature.

Les équations d'équilibre des problèmes mécaniques sont dérivées en utilisant le principe de Hamilton et sont résolues en utilisant des solutions analytiques de Navier. Les résultats numériques et la validation montrent la précision de la présente méthode pour la prédiction des effets de la fondation sur le comportement statique et dynamique des plaques non homogènes.

Summary

Summary

In the framework of our thesis, we will try to understand the effect of elastic foundation on mechanical behavior of structures in advanced composite materials with gradually varying properties following the thickness of the structure. The property of the materials of the structures is supposed to vary in smoothly through the thickness according to a distribution law. We have three areas of work:

In the first work, the dynamic behavior of functionally graded plates resting on the elastic foundation variables was studied using a higher-order shear theory. The current theory has only four unknown variables using the indefinite integral to reduce the number, it has few unknowns compared to first order and other higher-order theories. The FGM plates were supposed to be resting on Winkler-Pasternak in which the Winkler modulus is variable in the length of the plates.

The second work, the propagation of the waves in functionally graded plates resting on an elastic foundation were studied, upon on a theory higher order. The elastic foundations are of the Winkler layer and the Pasternak layer. Current theory has developed using the Reissner shear function.

In the last part of the work, the bending analysis of functionally graded plates resting on variable elastic foundations was studied based on the sinusoidal shear deformation theory. We have proposed new variations of the Winkler modulus through plate length that have exponential, cosine and polynomial, plus the variation found in the literature.

The equilibrium equations for mechanical problems are derived using the Hamilton principle and are solved using Navier analytical solutions. Numerical results and validation show the accuracy of the present method to predict the effect of the foundation on the static and dynamic behavior of non-homogeneous plates.

ملخص

ملخص

في إطار بحثنا، سنحاول فهم تأثير الأساس المرن على سلوك الهياكل الميكانيكية للمواد المركبة المتقدمة ذات الخصائص المتدرجة. من المفترض أن تختلف خصائص مواد الهياكل بأنسجامٍ من خلال السَّمَكَة وفقاً لقانون التوزيع. لدينا ثلاثة مجالات عمل:

في العمل الأول، تمت دراسة السلوك الديناميكي للصفائح ذات الدرجات الوظيفية التي تتركز على متغيرات الأساس المرنة باستخدام نظرية القص العليا. تحتوي النظرية الحالية على أربعة متغيرات مجهولة فقط باستخدام التكامل غير المحدود لتقليل العدد، يحتوي على عدد قليل من المتغيرات مقارنة بالنظريات من الدرجة الأولى وغيرها. من المفترض أن تكون اللوحات مستندة إلى وينكلر-باسترناك (Winkler-Pasternak) حيث يكون معامل وينكلر (Winkler) متغيراً على طول الصفائح.

الجزء الثاني من العمل، تمت دراسة انتشار الموجات في الصفائح ذات الخصائص المتدرجة المستندة على أساس مرن، بناءً على نظرية من ترتب الأعلى. الأسس المرنة هي من طبقة وينكلر وطبقة باسترناك. تطورت النظرية الحالية باستخدام وظيفة القص لرايسنر (Reissner).

في الجزء الأخير من العمل، تمت دراسة التحليل السكوني للصفائح ذات الخصائص المتدرجة التي تستند على أسس مرنة متغيرة، بناءً على نظرية تشوه القص الجيبية. لقد اقترحنا صيغاً جديدة معامل وينكلر (Winkler)، لتغيير من خلال طول الصفيحة، وهم ذات الأسس والجيب وكثير الحدود، بالإضافة الموجود في الأعمال السابقة.

يتم اشتقاق معادلات التوازن للمشاكل الميكانيكية باستخدام مبدأ هاملتون (Hamilton) ويتم حلها باستخدام حلول نافير (Navier) التحليلية. تظهر النتائج العددية والتحقق من صحة دقة الطريقة الحالية للتنبؤ بتأثير الأساس على السلوك الثابت والديناميكي للصفائح من المواد غير المتجانسة.

Sommaire

Sommaire

Dédicace.....	III
Remerciements.....	V
Résumé.....	VII
Summary.....	IX
ملخص.....	XI
Sommaire.....	XII
Liste des figures.....	XVII
Liste des tableaux.....	XX
Liste des notations.....	XXII
 INTRODUCTION GENERALE.....	 2
CHAPITRE I : Generalites sur les materiaux non-homogenes de type FGM.....	7
I.1 Introduction.....	8
I.2 Histoire des materiaux a gradient de proprietes.....	8
I.3 Developpement de FGM :.....	9
I.4 Evolution de la recherche scientifique autour des fg-materiaux.....	10
I.5 Materiaux a gradient de proprietes.....	11
I.5.1 Variation discontinue (par couche).....	12
I.5.2 Variation continue.....	12
I.6 Fraction volumique et microstructurale du materiau.....	13
I.7 Idealisation mathematique des materiaux de type FGM.....	16
I.7.1 Loi de puissance.....	16
I.7.2 Loi d'exponentielle.....	17
I.7.3 Loi de sigmoïde.....	18
I.7.4 Plaques sandwich en materiau de type FGM.....	19
I.7.4.1 Plaques sandwich avec noyau en FGM.....	19
I.7.4.2 Plaques sandwich avec faces en FGM.....	20
I.8 Modeles micromecaniques des materiaux de type FGM.....	20
I.8.1 Modèle d'auto-cohérence.....	21
I.8.2 Modèle de Mori-Tanaka.....	21
I.8.3 Modèle de Tamura – Tomota – Ozawa.....	22
I.8.4 Modèle de limites Hashin–Shtrikman.....	24
I.9. Methodes de fabrication des materiaux de type FGM.....	25
I.9.1 Technique de depot en phase de vapeur.....	25
I.9.3 Methode centrifuge.....	26
I.9.4 Methode de fabrication des formes solides quelconques.....	27
I.10 Domaines d'application des materiaux à gradient de propriétés.....	27
I.11 Conclusion.....	28

CHAPITRE II : Revue sur la modelisation des structures reposant sur les fondations elastiques ...	29
II.1 Theories de la modelisation des structures	30
II.1.1 Introduction	30
II.1.2 Theories monocouches equivalentes (esl).....	31
II.1.2.1 Theorie de Kirchhoff – Love	31
II.1.2.2 Theorie de deformation par cisaillement du premier ordre	31
II.1.2.3 Theorie de deformation de cisaillement de deuxieme ordre.....	32
II.1.2.4 Theorie d’ordre superieur	33
II.1.2.4.1 Troisieme ordre avec cinq variables	33
II.1.2.4.2 Modèles polynomiaux à quatre variables.....	34
II.1.2.4.3 Modèles non polynomiaux	35
II.1.2.4.4 Modèles trigonométriques	35
II.1.2.4.5 Modèles hyperboliques	36
II.1.2.4.6 Modèles exponentiels.....	36
II.1.2.4.7 l’effet de déformation normale.....	36
II.1.3 Theories de zig-zag.....	37
II.1.4 Formulation unifiée de carrera (CUF)	39
II.2 Les approches de la modelisation de la fondation elastique	39
II.2.1 Modele de Winkler.....	40
II.2.2 Modele de continuum elastique.....	41
II.2.3 Modeles de fondation ameliores.....	42
II.2.3.1 Versions ameliores du modele Winkler.....	43
I.2.3.1.1 Fondation de Filonenko-Borodich	43
I.2.3.1.2 Fondation de Hetenyi	43
I.2.3.1.3 Fondation de Pasternak	44
I.2.3.1.4 Fondation de Kerr	45
II.2.3.2 Versions ameliores du modele de continuum.....	45
II.2.3.2.1 Fondation de Vlasov	45
II.2.3.2.2 Fondation de Reissner.....	45
II.2.4 Modelisation avancee	47
II.2.4.1 Fondation variables de pasternak / winkler.....	47
II.2.4.2 Fondation de viscoelastique	47
II.3 Conclusion	48
CHAPITRE III : Analyse des vibrations libres des plaques FG reposant sur fondation élastique non linéaire	50
III.1 Introduction	51
III.2 Formulation theorique	52
III.2.1 Geometrie et proprietes des materiaux de la plaque en FGM.....	52
III.2.2. Fondation elastique	52
III.2.3. Cinematique et equations constitutives.....	53
III.2.4. Équations gouvernantes	55
III.2.4.1 Énergie de deformation	56

III.2.4.2 L'energie de deformation des fondations elastiques	56
III.2.4.3 Énergie cinetique	56
III.2.5. Equations de mouvement en termes de déplacements	59
III.2.6. Solutions analytiques	60
III.3 Analyse de resultats	62
III.3.1 Vibration libre des plaques isotropes	63
III.3.2 Vibration libre des plaques homogenes et FG reposant sur des fondations elastiques.....	63
III.3.3 Vibration libre de plaques homogenes et à gradient de propriétés reposant sur des bases elastiques variables	67
III.4 Conclusion	72
CHAPITRE IV : Propagations des ondes dans les plaques de type FG reposant sur fondation elastique	73
IV.1 Introduction	74
IV.2 Formulation theorique	74
IV.2.1 Matériaux et plaques à gradient de propriété.....	74
IV.2.2 Cinematique et equations constitutive.....	76
IV.2.3 Équations de mouvement.....	79
IV.2.4 Dispersion relations	84
IV.3 Analyse de resultats.....	87
IV.3.1 Etude parametrique des plaques de type P-FGM.....	88
IV.3.2 Etude parametrique comparative des plaques en P-FGM et E-FGM	96
IV.4 conclusion	98
CHAPITRE V : Analyse statique des plaques en FGM reposant sur fondation élastique non linéaire	99
V.1 Introduction	100
V.2 Formulation theorique	101
V.2.1 Materiaux et plaques à gradient propriete.....	101
V.2.3. Theorie du cisaillement d'ordre superieur.....	103
V.2.4. Équations constitutives.....	105
V.2.5. Équations gouvernantes	106
V.2.6. Solution analytique	109
V.3 Analyse de resultats	111
V.3.1 Flexion des plaques a gradient de propriete.....	112
V.3.2 Flexion des plaques homogenes et en FG reposant sur des fondations elastiques.....	115
V.3.3 Flexion des plaques fgm reposant sur des fondations elastiques non lineaires.....	119
V.4 Conclusion	125
Conclusion generale.....	127
References bibliographiques.....	131

Listes

Liste des Figures

Figure I.1	Quelques exemples de FGM d'origine naturelle et conçu par les humains.....	9
Figure I.2	(A) Le nombre annuel de publications sur les matériaux à gradient propriété (FGM), telles que fournies par le moteur de recherche de Scopus. (B) Génération de connaissances dans le domaine des matériaux à FG	10
Figure I.3	Microstructure d'une FGM graduée en nickel(Ni)-cuivre (Cu)	11
Figure I.4	Modèle pour une section de FGMs	12
Figure I.5	Fractions de volume de matériau de la région graduée à travers l'épaisseur	13
Figure I.6	Fraction volumique d'alumine (V_c) de l'échantillon et son profil de matériau prévu ($h = 3$ mm, $n = 1,3$)	13
Figure I.7	Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	17
Figure I.8	Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM.....	18
Figure I.9	Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	19
Figure I.10	Variation de la fraction volumique dans une plaque en sandwich	20
Figure I.11	Matériau biphasé avec (a) une microstructure squelettique et (b) une microstructure particulaire	22
Figure I.12	Schéma de la courbe contrainte – déformation pour le modèle TTO.....	24
Figure II.1	Déformation d'une normale transversale selon les théories classiques.....	31
Figure II.2	Déformation d'une normale transversale selon les théories du premier ordre.....	32
Figure II.3	Déformation d'une normale transversale selon les théories d'ordre supérieur.....	33
Figure II.4	Représentation du champ de déplacement selon la théorie du Zigzag.....	38
Figure II.5	Fondation de Winkler.....	40
Figure II.6	Fondation de Filonenko– Borodich.....	43
Figure II.7	Fondation de Hetenyi.....	44
Figure II.8	Fondation de Pasternak.....	44
Figure II.9	Fondation de Kerr.....	45
Figure II.10	Modèle de fondation de Vlasov.....	46
Figure II.11	Diverses répartitions de la fondation élastique de Winkler dans la direction axiale: (a) type linéaire, (b) type parabolique et (c) type sinusoïdal.....	47
Figure II.12	Fondations de viscoélastique : (a) type Maxwell, (b) type Kelvin.....	48
Figure II.13	La géométrie d'une structure reposant sur une fondation viscoélastique.....	49
Figure III.1	Plaque rectangulaire à à gradient de propriétés reposant sur la fondation Winkler-Pasternak.....	51

Figure III.2	Effet des différents types de fondations élastiques sur les fréquences non dimensionnelles des plaques en FG carrées., ($a/h = 10$, $k_w = 100$, $k_s = 10$ et $\zeta = 1$)	67
Figure III.3	Effet des différents types de fondations élastiques sur les fréquences non dimensionnelles des plaques en FG carrées ($p=2$, $k_w=100$, $k_s=10$ et $\zeta=1$)	68
Figure III.4	Effet des différents types de fondations élastiques sur les fréquences non dimensionnelles des plaques en FG ($p = 2$, $a /h=10$, $k_w=10^3$, $k_s=10^2$ et $\zeta = 1$)	68
Figure III.5	Influence du paramètre de la fondation élastique variable sur les fréquences non dimensionnelles des plaques carrées FG ($a/h = 10$, $k_w = 100$, $k_s = 10$)	69
Figure III.6	Influence du paramètre de la fondation élastique variable sur les fréquences non dimensionnelles des plaques carrées en FG ($p = 2$, $k_w = 100$, $k_s = 10$).....	70
Figure III.7	Influence du paramètre du fondement élastique variable sur les fréquences non dimensionnelles des plaques FG, ($p = 2$, $a /h = 10$, $k_w = 10^3$, $k_s = 10^2$).....	71
Figure IV.1	Plaque rectangulaire à à gradient de propriétés reposant sur la fondation Winkler-Pasternak.....	74
Figure IV.2	Variation de la fréquence et de la vitesse de phase de différentes plaques FG en fonction du nombre d'onde ($k_w = 1000$, $k_p = 100$).....	89
Figure IV.3	Variation de la fréquence et de la vitesse de phase des plaques FG en fonction du nombre d'ondes. ($k_w=1000, k_p=100, p=2$).....	90
Figure IV.4	Les courbes de dispersion des différentes plaques FG reposent sur une fondation élastique. ($k_w = 1000$, $k_p = 100$).....	93
Figure IV.5	Les courbes de vitesse de phase de différentes plaques à gradient de propriétés reposent sur des fondations élastiques. ($K_w = 1000$, $k_p = 100$).....	95
Figure IV.6	Comparaisons des fréquences et de la vitesse de phase des plaques P-FGM et E-FGM ($a/h = 5$, $p = 3$).....	96
Figure IV.7	Comparaisons des fréquences et de la vitesse de phase des plaques P-FGM et E-FGM ($\kappa = 10$, $p = 3$).....	97
Figure V.1	Plaque à propriété graduée reposant sur une fondation élastique.....	100
Figure V.2	Diverses distributions des fondations élastiques Winkler le long de la direction axiale : (a) type polynomial, (b) type cosinus et (c) type exponentiel.....	103
Figure V.3	Diverses distributions des fondations élastiques Winkler le long de la direction axiale : (a) type linéaire, (b) type parabolique et (c) type sinusoïdal.....	103

Figure V.4	Variation de la contrainte transversale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la plaque en FG sous des charges mécaniques pour différents types de paramètre de Winkler. ($p=2$, $k_w=k_s=10$, $\zeta =20$).....	120
Figure V.5	Variation de la contrainte transversale $\bar{\sigma}_{xy}$ à travers l'épaisseur de la plaque en FG sous des charges mécaniques pour différents types de paramètre de Winkler. ($p=2$, $k_w=k_s=10$, $\zeta =20$)	120
Figure V.6	Variation de la contrainte transversale $\bar{\sigma}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque en FG sous des charges mécaniques pour différents types de paramètre de Winkler, ($p=2$, $k_w=k_p=10$, $\zeta =20$).....	121
Figure V.7	Variation du déplacement transversal \bar{u} à travers l'épaisseur de la plaque en FG sous des charges mécaniques pour différents types de paramètre de Winkler ($p=2$, $k_w=k_s=10$, $\zeta =20$).....	121
Figure V.8	Variation du déplacement transversal w à travers l'épaisseur de la plaque carrée en FG sous des charges mécaniques pour différents types de paramètre de Winkler, ($p=2$, $k_w=k_p=10$, $\zeta =20$).....	122
Figure V.9	Influence différents types de fondations élastiques variables sur les déplacements non dimensionnels de plaques carrées FG sous des charges mécaniques en fonction du rapport (a/h) ($p=2$, $k_w=k_s=10$, $\zeta =10$).....	123
Figure V.10	Influence différents types de fondations élastiques variables sur les déplacements non dimensionnels des plaques FG sous des charges mécaniques en fonction du rapport (a/b), ($p=2$, $k_w=k_p=10$, $\zeta =10$, $a/h=10$).....	123
Figure V.11	Influence différents types de fondations élastiques variables sur des déplacements non dimensionnels de plaques carrées FG sous des charges mécaniques en fonction de la loi de puissance p , ($a/h=10$, $k_w=k_s=10$, $\zeta =10$).....	124
Figure V.12	Influence du paramètre ζ des fondations élastiques variables sur les déplacements non dimensionnels des plaques FG carrées sous charges mécaniques en fonction du rapport(a/h) ($p=2$, $k_w=k_s=10$, $\zeta =10$).....	124

Liste des Tableaux

Tableau I.1	Aperçu des processus de traitement	26
Tableau II.1	Modèles polynomiaux.....	35
Tableau II.2	Modèles trigonométriques	35
Tableau II.3	Modèles hyperboliques.....	36
Tableau II.4	Fonctions de formes utilisées dans les théories quasi-3D	37
Tableau III.1	Propriétés matérielles des plaques à gradient de propriétés	62
Tableau III.2	Fréquences fondamentales non dimensionnelles pour les plaques carrées isotropes simplement supportées.	64
Tableau III.3	Comparaison de la base élastique d'influence sur les fréquences propres non dimensionnelles pour les plaques carrées isotropes et à gradient de propriétés, avec différentes puissances d'indice.....	65
Tableau V.1	Comparaison de la déflexion sans dimension des plaques carrées en FGM ($a / h = 10$), sous charge sinusoïdale.	113
Tableau V.2	Comparaison des contraintes $\bar{\sigma}_i$ et des déplacements sans dimension \bar{w} de plaques FG carrées simplement supportées ($a / h = 10$), sous charge sinusoïdale.....	114
Tableau V.3	Comparaison la déflexion non dimensionnelle \hat{w} des plaques carrées isotropes reposant sur la fondation Pasternak-Winkler sous des charges uniformes.....	116
Tableau V.4	Comparison of dimensionless displacements \bar{w} and constraints $\bar{\sigma}_i$ of a square plate of FGM based on elastic foundation parameters ($a / h = 10$)	117

Liste des notations

G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
E	Module de Young suivant x
E_c	Module de Young de la céramique
E_m	Module de Young du métal
ν	Coefficient de Poisson
$V(z)$	Fraction volumique
p	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
c	Epaisseur de la plaque
$u_0, v_0, w_0,$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x , y , z .
ϕ_z, ϕ_x, ϕ_y	Les rotations autour des axes x, y et z
θ_i	rotations autour de l'axe i
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Les éléments de contraintes normales
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	Les éléments de contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	les éléments de déformations normales
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	les éléments de déformations de cisaillement
x, y, z	les coordonnées cartésiennes rectangulaires
δU	l'énergie de déformation virtuelle
δU_{ef}	l'énergie de déformation de fondation élastique
δV	le travail virtuel externe
δK	la variation de l'énergie cinétique
q	Les charges transversales appliquées
$\delta u, \delta v, \delta w, \delta \theta$	Champ virtuel de déplacement

N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion
S_x, S_y, S_{xy}	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
R_{xz}, R_{yz}	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
Q_{ij}	Coefficient de rigidité
P_m, P_c	les propriétés correspondantes du métal et la céramique
$f(z)$	La fonction de forme
ρ_i	densité matérielle de la structure FGM
$\{\dots\}$	Vecteur colonne
$[\dots]$	Matrice
$A_{ij}, A_{ij}^s, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s$	Les composantes de rigidité
$U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}$	les coefficients de déplacement maximum inconnus
ω	fréquence naturelle
FGM	Matériau à gradient de propriétés
Al	L'aluminium
Al_2O_3	Oxyde d'aluminium
Si_3N_4	Nitride de silicium
SUS304	Acier inoxydable
CLPT	La théorie classique de la plaque
FSDT	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre
HSDT	Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé

Introduction Générale

Introduction Générale

Le progrès technologique est associé à l'amélioration continue des propriétés des matériaux existants, ainsi qu'à l'expansion des classes et des types de matériaux de structure. Habituellement, de nouveaux matériaux émergent en raison de la nécessité d'améliorer l'efficacité structurelle et les performances. De plus, en règle générale, les nouveaux matériaux eux-mêmes offrent à leur tour de nouvelles opportunités pour développer des structures et des technologies mises à jour, ce qui pose un défi à la science des matériaux avec de nouveaux problèmes. L'une des meilleures manifestations de ce processus interdépendant dans le développement des matériaux, des structures et de la technologie est associée aux matériaux composites avancés et aux éléments structurels.

Les matériaux à gradient de propriétés en tant que composite avancé ont été initialement conçus comme matériaux de barrière thermique pour les structures aérospatiales et les réacteurs à fusion et maintenant ils sont également considérés comme des matériaux structurels potentiels et récemment, ils sont de plus en plus pris en compte dans diverses applications. Pour maximiser les forces et les intégrités de nombreuses structures d'ingénierie.

L'augmentation spectaculaire de l'utilisation des matériaux et structures à gradient de propriétés dans tous les types de structures d'ingénierie (par exemple, le génie civil, l'aérospatiale, l'automobile et les structures sous-marines, ainsi que dans les prothèses médicales, les cartes de circuits électroniques et les équipements sportifs) et le nombre de revues et les documents de recherche publiés au cours des deux dernières décennies attestent qu'il y a eu un effort majeur pour développer des systèmes de matériaux composites et pour analyser et concevoir des composants structuraux fabriqués à partir de matériaux composites.

Les structures composites avancées considérées dans ce travail sont des structures bidimensionnelles continuellement variables suivant la plus petite direction de la structure, intégrant plusieurs couches, par alternance, aux propriétés mécanique différentes. En tant que structures bidimensionnelles, nous considérons celles dont la dimension, généralement l'épaisseur, est négligeable par rapport aux deux autres dans les directions planes. Les structures bidimensionnelles typiques sont les plaques et les coques. Dans notre étude actuelle, nous nous concentrerons sur les plaques de différentes épaisseurs, c'est-à-dire les plaques minces, les plaques moyennement épaisses et les plaques épaisses. Les plaques sont supposées sans courbure suivant les deux directions dans leur plan. Dans le cas des plaques, un système de référence cartésien est utilisé.

Le concept de structures composites avancées, telles que les structures à gradient de propriétés, a été proposé comme matériau de barrière thermique et mécanique à plus haute résistance. Par conséquent, le problème thermomécanique dans les FGM est un sujet majeur d'intérêt actuel. De nombreuses études ont été menées pour prédire et évaluer le comportement mécanique des structures à gradient de propriétés en utilisant diverses théories de modélisation. Reddy [1] a présenté la formulation théorique et les modèles d'éléments finis pour les plaques FGM par le biais de la théorie de la déformation de cisaillement du troisième ordre. Les formulations tiennent compte du thermo-couplage, de la dépendance temporelle et de la non-linéarité géométrique des plaques FGM de type Von Karman. Matsunaga [2] a procédé à une analyse de la vibration libre et de la stabilité des plaques FGM par une théorie bidimensionnelle de déformation d'ordre supérieur. Hebali *et al.* [3] ont étudié la flexion et la vibration libre des plaques FGM en se basant sur une nouvelle théorie de la déformation de cisaillement hyperbolique prenant en compte la déformation normale suivant la direction de l'épaisseur ; En divisant le déplacement transversal en parties flexionnelle, de cisaillement et d'étirement d'épaisseur. Bennai *et al.* [4] ont étudié la vibration libre et le flambage des poutres sandwich à gradient de propriétés en tenant compte d'une nouvelle théorie du cisaillement d'ordre supérieur en quasi-3D. L'analyse de la flexion et de la vibration libre utilisant une théorie de déformation de cisaillement à deux variables avec le concept de la position de surface neutre a été traitée par Bellifa *et al.* [5]. Brischetto *et al.* [6] ont examiné le comportement vibratoire des plaques et des cylindres en FGM à l'aide de modèles différentiels en quadrature généralisée en deux et en trois dimensions. Le comportement dynamique des plaques et des poutres FGM a été étudié, en utilisant diverses théories de déformation de cisaillement, par Ait Yahia *et al.* [7], Bounouara *et al.* [8], [9], Kolahchi *et al.* [10], Menasria *et al.* [11], Benadouda *et al.* [12], Ayache *et al.* [13], Bouhadra *et al.* [14], Yousfi *et al.* [15], Fourn *et al.* [16], Zidi *et al.* [17], Ait Atmane *et al.* [18], Darilmaz [19], Kar et Panda [20], Bennoun *et al.* [21], Younsi *et al.* [22].

Les fondations sont des éléments ou des systèmes physiques importants en raison de leur large éventail d'application dans différents domaines scientifiques et techniques, y compris la mécanique, le civil, l'électricité, la nanotechnologie. En fonction des applications du système structural considéré, les chercheurs ont proposé plusieurs types de modélisation pour les fondations. Ils sont très attractifs pour les chercheurs en raison de leurs applications cruciales dans différents systèmes. L'un des principaux objectifs des chercheurs est d'étudier le comportement dynamique et statique de l'interaction structures-fondations.

La première et la plus simple présentation d'une fondation a été proposée par Winkler. Ce modèle est connu sous le nom de modèle élastique linéaire de Winkler [23]. Les modèles à deux paramètres sont appelés mécanismes selon lesquels une couche relie les extrémités supérieures de l'élément de la fondation entre elles. En conséquence, les fonctions force-déplacement pour ce type de fondation sont continuées car les extrémités supérieures des éléments sont reliées par une couche de cisaillement. Les principaux exemples de ces types de fondations sont les modèles Filonenko-Borodich [24], Hetényi [25], Pasternak [26], Vlasov [27]. Les modèles Filonenko – Borodich, Hetenyi et Pasternak ont été développés sur la base du modèle Winkler, tandis que le modèle de Vlasov a été proposés conformément à la théorie du modèle du continuum élastique [28].

Les modélisations de structures faites de matériaux non homogènes sur appuis élastiques ont suscité une grande importance par la communauté scientifique. Ying *et al.* [29] ont présenté des solutions exactes pour la flexion et la vibration libre de poutres à gradient de propriétés reposant sur une fondation élastique de type Winkler–Pasternak, basée sur la théorie bidimensionnelle de l'élasticité. Lü *et al.* [30] ont étudié le comportement dynamique des plaques à gradient de propriétés épaisses sur des fondations élastiques en supposant l'élasticité tridimensionnelle, en utilisant la méthode de l'espace d'état pour arriver à une solution exacte pour le cas des plaques simplement supportées. Malekzadeh [31] a fait une analyse tridimensionnelle des vibrations libres pour les plaques reposant sur ou sans fondations élastiques en utilisant la méthode de quadrature différentielle et la solution en série, en prenant comme conditions d'appuis, deux bords opposés simplement appuyés et les deux autres sont pris quelconques. Ait Atmane *et al.* [32] ont étudié l'effet des fondations élastiques à deux paramètres et la distribution des propriétés des matériaux sur la vibration libre des plaques FGM en utilisant une théorie de déformation de cisaillement plus élevée. Sobhy [33] a étudié l'effet des fondations élastiques sur le flambement et les vibrations libres de plaques sandwich avec une variation matérielle exponentielle et sous diverses conditions aux limites. Taibi *et al.* [34] ont étudié le comportement de déformation thermomécanique des plaques sandwich reposants sur une fondation élastique de Pasternak-Winkler, basée sur une déformation de cisaillement raffinée. Zhang *et al.* [35] ont étudié le comportement dynamique de plaques quadrilatérales composites renforcées par des nanotubes de carbone fines et modérément épaisses reposant sur des fondations élastiques en utilisant une méthode améliorée des moindres carrés de Ritz. Chakraverty et Pradhan [36] ont étudié les vibrations libres des plaques minces à gradient de propriétés, reposant sur des fondations élastiques et soumises à différentes conditions d'appuis. Les différentes théories de cisaillement

raffinées pour l'étude des vibrations, du flambage, de la flexion et de l'hygro-thermo-mécanique des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques ont été étudiées par Zidi *et al.* [17], Akavci [37], Khalfi *et al.* [38], Lee *et al.* [39], Mahmoudi *et al.* [40].

L'objectif principal de cette thèse est d'étudier l'effet de la fondation élastique sur le comportement statique et dynamique des structures non homogènes. Pour une fondation élastique, nous cherchons à utiliser les différentes approches et la précision de la modélisation du comportement des sols. Dans la plupart des recherches, la fondation élastique est censée avoir une réponse uniforme, cependant, en fait, les couches de sol sont hétérogènes ; nous nous concentrons sur ce point et son effet sur le comportement mécanique des structures. Comme deuxième travail, une théorie basée sur la déformation de cisaillement d'ordre supérieur pour étudier les vibrations, la propagation des ondes et le comportement statique des éléments plaques a été proposée. Cette théorie actuelle n'a que quatre inconnues contre d'autres théories qui ont cinq inconnues ou plus. Les propriétés des matériaux des plaques fonctionnellement graduées sont supposées varier continuellement à travers l'épaisseur selon différents modèles de distribution. Les équations d'équilibre des plaques, reposant sur la fondation élastique, sont dérivées en utilisant le principe des travaux virtuels appelé, aussi, principe d'Hamilton.

Le travail est organisé en cinq chapitres :

Le premier chapitre de ce travail consiste à une étude bibliographique portant sur les matériaux non-homogènes de type FGM. Tout d'abord, l'histoire, le développement et la définition générale des matériaux à propriétés graduellement variables sont présentés. Nous décrivons l'évolution de la recherche scientifique sur ce type de matériau durant plus de 30 ans et nous évoquons, aussi, les pays émergents dans la recherche scientifique à ce sujet. Ensuite, nous discutons de l'idéalisation mathématique des FGM et des modèles micromécaniques des FGM, qui donnent une explication plus ou moins réaliste sur la distribution spatiale du matériau de base selon différentes approches. Nous présentons ensuite une revue des techniques utilisées pour fabriquer les FGM et les applications de ses matériaux.

Le second chapitre présente une étude bibliographique sur les théories de modélisation de structures non-homogènes reposant sur fondations élastiques. Les théories monocouches équivalentes, les théories de Zigzag et formulation unifiée de Carrera (CUF) sont présentées. Nous nous sommes concentrés sur des théories monocouches équivalentes. Pour les approches de modélisation de la fondation élastique visant à représenter le sol, le modèle Winkler Pasternak est utilisé.

Le troisième chapitre s'intéresse au développement d'une formulation mathématique pour étudier l'effet de la variation de la raideur de la fondation sur le comportement dynamique des plaques FGM basées sur une théorie d'ordre supérieur et considérant l'effet de cisaillement.

Le chapitre quatre est consacré à l'étude de la propagation des ondes dans les plaques en FGM reposant sur des fondations élastiques de type Winkler-Pasternak, pour cela, nous avons développé une formulation mathématique basée sur la théorie de la déformation de cisaillement d'ordre élevé de quatre variables. Enfin, la formulation actuelle sera validée par une étude paramétrique détaillée.

Le cinquième chapitre consiste à une présentation d'un modèle analytique de flexion de plaque FGM posée sur des fondations élastiques variables, en utilisant la théorie de la déformation de cisaillement sinusoïdale à quatre variables. Nous allons proposer une formulation probable qui décrira la variation spatiale de la raideur sous la fondation. Avant de faire une validation et une étude paramétrique concernant l'effet de variabilité de la raideur des fondations sur le comportement statique des plaques confectionnées en FGM.

Nous terminerons la thèse par une conclusion générale reflétant le contenu de la thèse, ainsi que des perspectives pour de futurs chercheurs inspirées au cours de ce travail.

Chapitre I : Généralités sur les matériaux non-homogènes de type FGM

I.1 Introduction

Les composites traditionnels résultent de la combinaison de deux matériaux ou plus, résultant généralement en des matériaux qui offrent des avantages par rapport aux matériaux conventionnels. Lors de l'observation à l'échelle macroscopique, les composites standards (par exemple stratifiés) ont une interface nette entre les matériaux constitutifs, ce qui peut provoquer des problèmes tels que la concentration et la diffusion des contraintes (si une onde se propage à l'intérieur du matériau), entre autres. Le matériau à gradient de propriété (en anglais nommé FGM=functionally graded materials) représente une nouvelle classe de composites avancé constituée d'un motif gradué de composition de matériau et / ou de microstructures [41]. Un matériau à gradient de propriétés (FGM) est un type des matériaux composites avancé. Cette conception est destinée à tirer parti de certaines caractéristiques souhaitables de chacune des phases constitutives. Par exemple, si le FGM doit être utilisé pour séparer des régions de température élevée et basse, il peut être constitué de céramique pure, à l'extrémité la plus chaude, en raison de la meilleure résistance de la céramique aux températures plus élevées. En revanche, l'extrémité la plus froide peut être en métal pur en raison de ses meilleures propriétés mécaniques et de transfert de chaleur.

I.2 Histoire des matériaux à gradient de propriétés

Bien que le concept de FGM, et notre capacité à les fabriquer, semble être une invention de l'ingénierie avancée, le concept n'est pas nouveau. Ces sortes de matériaux se trouvent bien dans la nature. Quelques exemples de FGM naturelles ont été inclus dans la Figure I.1[42] pour illustration. Les os ont un classement fonctionnel. Même notre peau est également classée pour fournir une certaine ténacité, des qualités tactiles et élastiques en fonction de la profondeur de la peau et de l'emplacement sur le corps.

Les constituants de FGM conçus par les humains impliquent généralement deux phases de matériau isotrope ; bien qu'un nombre quelconque de configurations chimiquement et spatialement compatibles soit possible. Ces composants comprennent souvent les alliages techniques de magnésium, d'aluminium, de cuivre, de titane, de tungstène, d'acier, etc. et les céramiques de structure avancées telles que la zircone, l'alumine, le carbure de silicium et le carbure de tungstène. Quelques exemples de composants de FGM d'ingénierie humaine actuellement en cours de développement sont également inclus dans la Figure I.1[42].

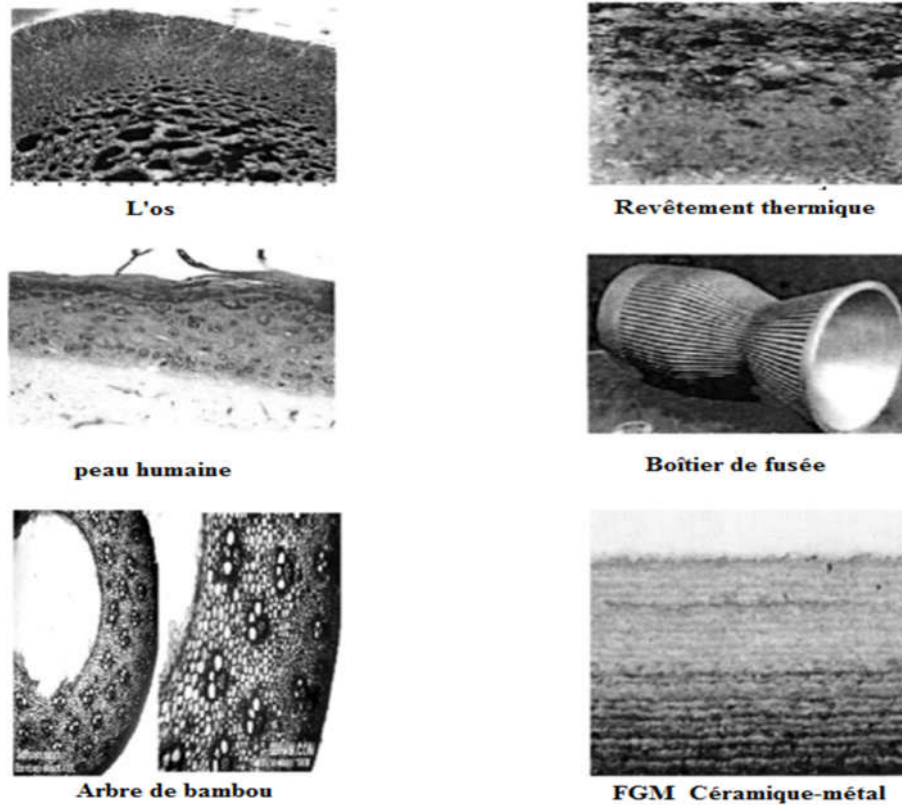


Figure I.1 Quelques exemples de FGM d'origine naturelle et conçu par les humains [42].

I.3 Développement de FGM

Le concept de gradation dans la composition des matériaux a été proposé pour la première fois par Shen et Bever [43] pour les matériaux composites et polymères. La plupart de ces matériaux étaient utilisés comme matériaux de revêtement pour améliorer la force de liaison et réduire les contraintes thermiques. La première application pratique FGMs a été réalisée en 1984 au National Aerospace Laboratoires du Japon pour créer des coques carrées pour la base du fuselage et des bols hémisphériques pour les cônes d'un avion spatial.

En général, les structures aérospatiales sont censées fonctionner à des températures de service cibles de 2100 °K et un gradient de température de 1600 °K sur une section de moins de 10 mm [44]. Il n'existe actuellement aucun matériau industriel capable de supporter de tels gradients à haute température sans perdre leur intégrité structurale. Par conséquent, l'idée unique de la gradation de la composition du matériau a été conçue en utilisant un matériau céramique résistant à la chaleur sur le côté haute température et des métaux durs avec une conductivité thermique élevée de l'autre côté, faisant varier graduellement la composition de la céramique au métal. Ces matériaux à gradient de propriétés ont l'avantage des propriétés physiques et chimiques des deux matériaux, augmentant ainsi la force de liaison et réduisant les contraintes inter faciales, les contraintes thermiques et les forces d'entraînement des fissures [45].

I.4 Évolution de la recherche scientifique autour des FG-Matériaux

Des recherches approfondies ont été menées dans le domaine des matériaux à gradient propriété (FGM) en tant que matériaux et structures. Le nombre de publications dans ce domaine de recherche a augmenté d'une manière exponentielle au cours des vingt dernières années. La Figure I.2 (A) illustre le nombre annuel de publications sur les FGMs fournies par le moteur de recherche de Scopus. La Figure I.2 (B) illustre également la contribution de différents pays à la création de connaissances dans ce domaine.

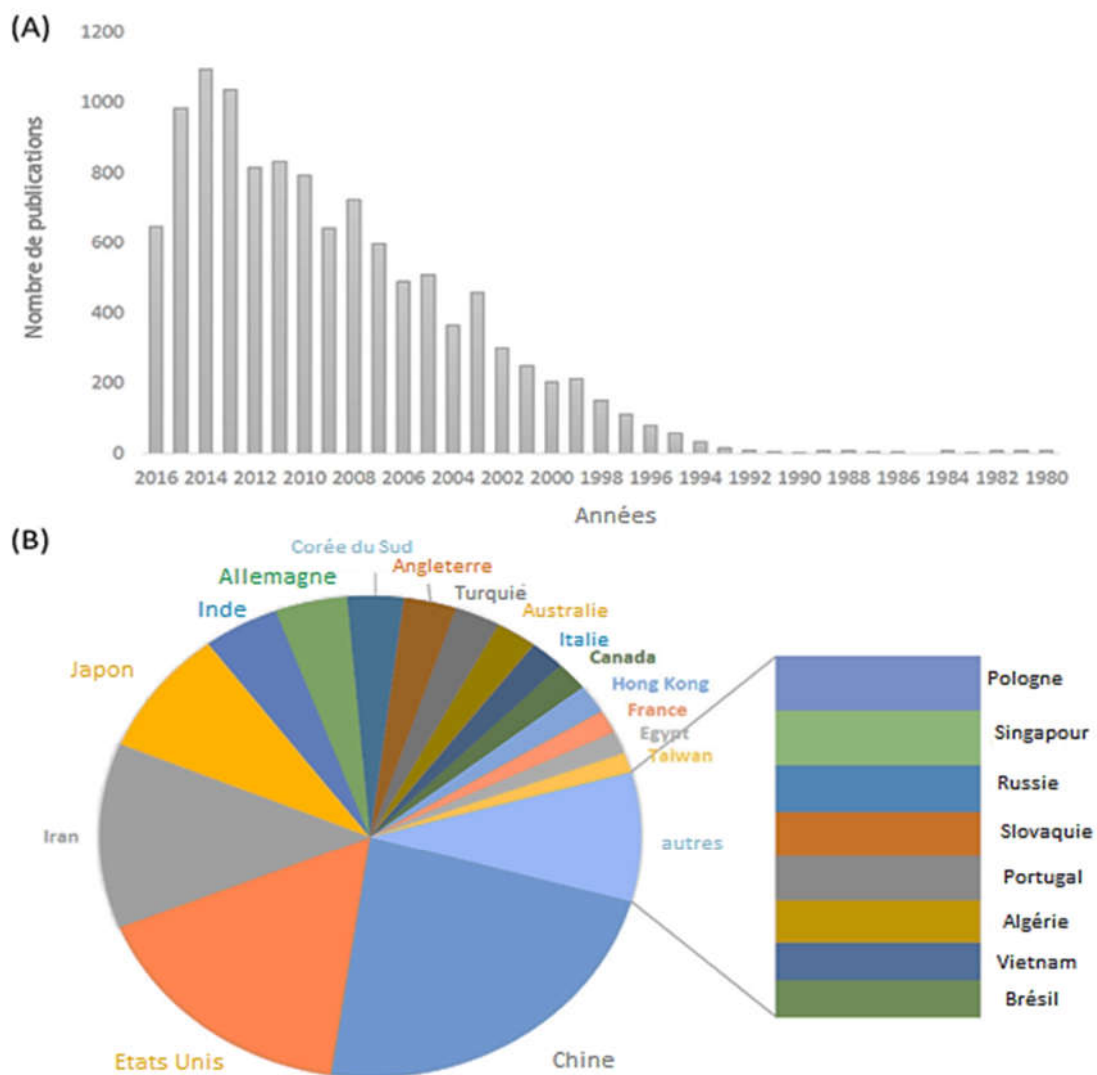


Figure I.2 (A) Le nombre annuel de publications sur les matériaux à gradient propriété (FGM), telles que fournies par le moteur de recherche de Scopus (à partir de juillet 2016).

(B) Génération de connaissances dans le domaine des matériaux à gradient propriété [46].

I.5 Matériaux à gradient de propriétés

Les matériaux à gradient de propriétés sont une nouvelle génération de matériaux d'ingénierie dans lesquels les détails microstructuraux varient spatialement à travers une distribution non uniforme de la (des) phase(s) de renforcement, en utilisant un renforcement avec différentes propriétés, tailles et formes, ainsi qu'en inter-changeant les rôles des phases de renforcement et de la matrice d'une manière continue. Le résultat est une microstructure qui présente des propriétés thermiques et mécaniques continuellement ou discrètement changeantes à l'échelle macro ou microscopique (voir Figure I.3).

Ce nouveau concept d'ingénierie microstructurale des matériaux marque le début d'une révolution à la fois dans la science des matériaux et dans la mécanique des matériaux, car elle permet d'intégrer pour la première fois les considérations matérielles et structurelles dans la conception finale des composants structuraux. L'intérêt croissant des matériaux FGM, conçus à l'origine au Japon, est attesté par le grand nombre de récentes conférences et numéros spéciaux de revues techniques consacrées à l'analyse, la conception et la fabrication de ces matériaux.

La fabrication des FGM peut être envisagée en mélangeant deux phases distinctes de matériaux, par exemple, un mélange distinct du métal et de la céramique. Souvent, les informations précises sur la forme et la distribution des particules peuvent ne pas être disponibles ; ainsi, il est primordial de connaître les propriétés matérielles effectives ; à savoir, Les modules d'élasticité, les modules de cisaillement, la densité, etc. Des composites gradués sont évalués sur la base de la distribution de la fraction volumique et de la forme approximative de la phase dispersée.

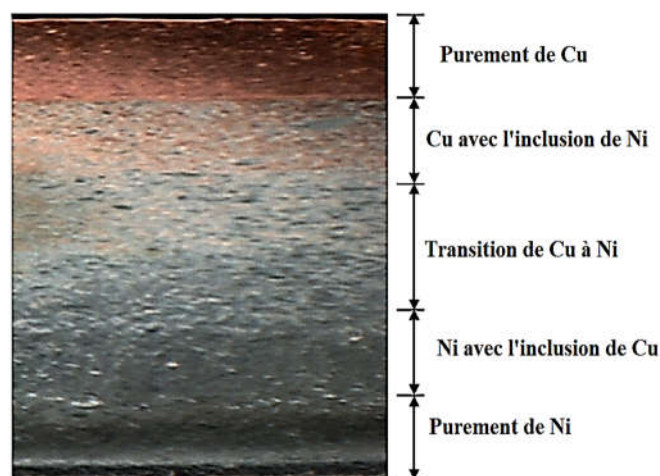


Figure I.3 Microstructure d'une FGM graduée en nickel(Ni)-cuivre (Cu) [18].

Une description détaillée des microstructures réellement calibrées n'est généralement pas disponible, sauf peut-être pour des informations sur la distribution des fractions volumiques. Puisque la fraction volumique de chaque phase varie progressivement dans la direction de la gradation, les propriétés effectives des FGM changent dans cette direction. Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser FGM.

I.5.1 Variation discontinu (par couche)

Pour le premier choix, on suppose une variation par couche de la fraction volumique de céramique ou de métal et on suppose que les FGM sont stratifiés avec la même fraction volumique dans chaque région, c'est-à-dire des couches céramique-métal quasi homogènes (Figure I.4b).

I.5.2 Variation continué

Pour le deuxième choix, on suppose une variation continue de la fraction volumique de céramique ou de métal (Figure I.4a). La majorité des structures FG sont constituées de deux phases dont les fractions volumiques varient progressivement. Par conséquent, les fonctions utilisées pour déterminer la distribution des fractions en volume des constituants matériels de ces structures revêtent une importance significative.

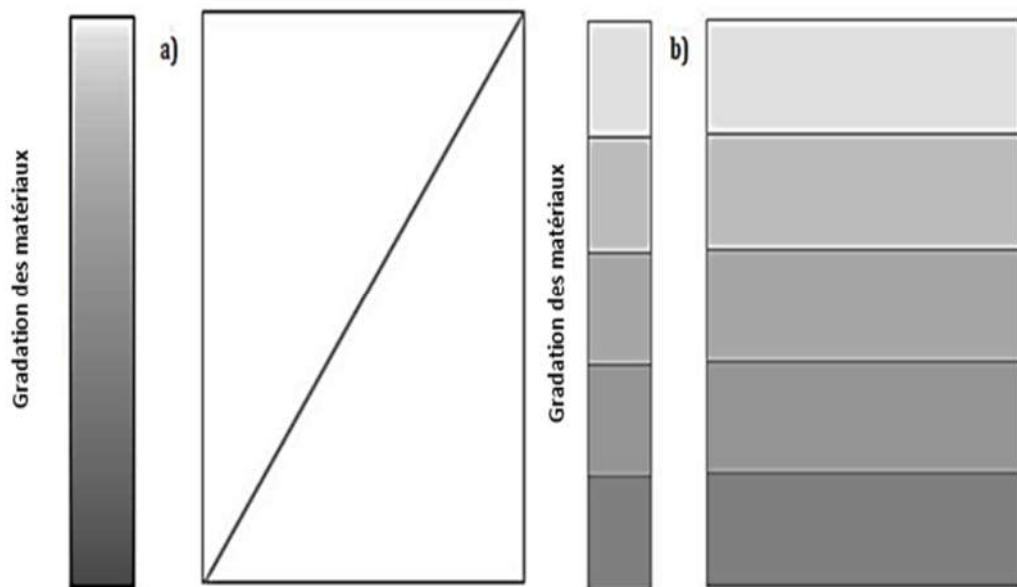


Figure I.4 Choix de modèle pour la variation graduelle du FGM [4]

a) modèle continu b) modèle discontinu.

I.6 Fraction volumique et microstructurale du matériau

Les échantillons de FG obtenus à partir du processus ci-dessus ont été sélectionnés de manière aléatoire afin de sectionner l'épaisseur et, par la suite, examiner la qualité de la zone coupée. Ensuite, les échantillons ont été montés avec de la résine époxy avant d'être broyés et polis avec du papier sablé et de la pâte de diamant, respectivement. Des images des surfaces polies, obtenues par microscope optique de type Nikon 200 et une caméra numérique, utilisées pour caractériser les phases alumine pure et époxy [47]. Une telle image en coupe est illustrée à la Figure I.5. Une mesure des surfaces (technique surfacique) dans la section transversale a donné les pourcentages de composition du matériau dans chaque région classée. Les surfaces supérieure et inférieure sont appelées respectivement les couches d'alumine pure et de résine époxy [47].

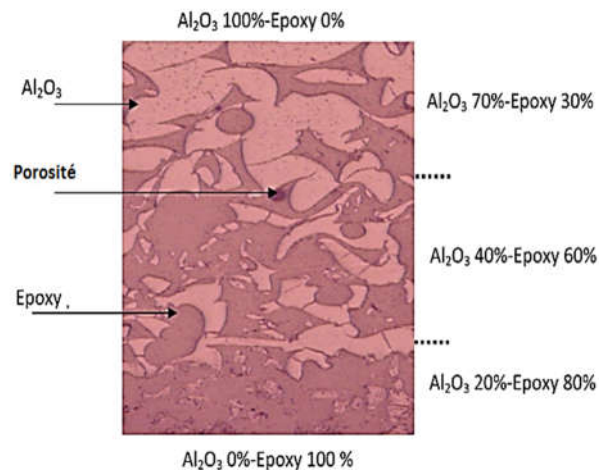


Figure I.5 Fractions de volume de matériau de la région graduée à travers l'épaisseur [47].

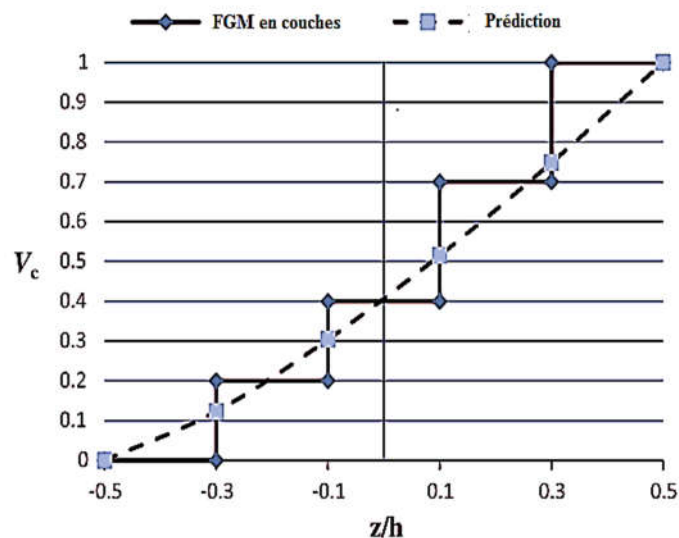


Figure I.6 Fraction volumique d'alumine (V_c) de l'échantillon et son profil de matériau prévu ($h = 3$ mm, $n = 1,3$) [47].

Quelques pores ont été découverts en raison d'une infiltration époxy imparfaite. Sur les Figures I.5 et I.6, on peut voir des couches distinctes, avec des changements progressifs dans la composition du matériau plutôt qu'une variation continue sur toute l'épaisseur de l'échantillon. Cependant, dans l'analyse théorique, les propriétés du matériau et la fraction volumique sont supposées obéir à la distribution continue de la loi de puissance [47]. Par conséquent, la fraction volumique ou l'indice de loi de puissance (n) est nécessaire pour calculer les composants de rigidité et de moment d'inertie du matériau. Ci-dessus, l'équation permettant d'obtenir le paramètre (n) à partir de l'échantillon stratifié à notation fonctionnelle :

$$n = \frac{\sum_{k=1}^N \ln(V_c)}{\sum_{k=1}^N \ln\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{1}\right)} \quad (I.1)$$

Où, N est le nombre de couches dans la région graduée. La combinaison des compositions de matériaux de la Figure I.6 avec l'équation (I.1), donne la valeur $n = 1,3$. Cette valeur de (n) avec est utilisée dans les relations de loi de puissance, Les formules les plus applicables concernant la gradation des matériaux à travers les FGM sont données [48-51], ci-dessous :

$$V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^n \quad (I.2a)$$

$$V_e = 1 - V_c \quad (I.2b)$$

Où, h est l'épaisseur de la structure et n est l'exposant de volume fraction, qui commande le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur de la couche de FGM. Comme le montre la Figure I.5, la modification de la valeur de n génère un nombre infini de distributions de composition.

La fraction de volume peut être représentée avec d'autres fonctions suivant des paramètres constants qui dictent la répartition des matériaux comme suit :

Modèle trigonométrique [52] :

$$V_1 = \sin^2 \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n \right] \quad (I.3)$$

Modèle à trois paramètres de Viola-Tornabene [52]:

$$V_1 = \left[\frac{1}{2} - \frac{z}{h} + b \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^c \right]^n \quad (I.4)$$

Modèle à quatre paramètres Viola-Tornabene [52] :

$$V_1 = \left[1 - a \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h} \right) + b \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^c \right]^n \quad (\text{I.5})$$

Où a , b et c sont des paramètres constants qui dictent la répartition des matériaux dans la structure FG.

Modèle à quatre paramètres [52] :

$$V_1 = C \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right) + \alpha \left(\frac{z}{h} \right)^\beta \right]^\lambda \quad (\text{I.6})$$

Modèle trigonométrique à cinq paramètres [52] :

$$V_1 = C \left[\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\eta \pi z}{h} + \varphi \right) \right]^\gamma \quad (\text{I.7})$$

Modèle trigonométrique à cinq paramètres pour les FGM 2D [52]:

$$V_1 = \left[1 - \left| \sin \left(\frac{\eta_x \pi x}{L_x} + \varphi_x \right) \sin \left(\frac{\eta_y \pi y}{L_y} + \varphi_y \right) \right| \right]^\gamma \quad (\text{I.8})$$

Où γ , η , C , α , φ et β sont des paramètres de contrôle qui déterminent le modèle de variation du matériau via la structure FG.

Afin de modéliser avec précision les propriétés du matériau de FGM, les propriétés doivent être à la température et dépendant de la position. Ceci est réalisé en utilisant une simple règle d'un mélange de matériaux composites (modèle Voigt). Les propriétés matérielles effectives P_f de la couche FGM, telles que le module de Young E_f et le coefficient de dilatation thermique α_f peuvent alors être exprimées comme suit :

$$P_f = \sum_{j=1} P_j V_{fj} \quad (\text{I.9})$$

Où P_j et V_{fj} sont les propriétés du matériau et la fraction volumique du matériau constitutif j et la somme des fractions volumiques de tous les matériaux constitutifs fait 1, à savoir :

$$\sum_{j=1} V_{fj} = 1 \quad (\text{I.10})$$

Les différentes approches analytiques disponibles dans la littérature pour la modélisation des FGM sont présentées dans les sections suivantes.

I.7 Idéalisations mathématiques des matériaux de type FGM

Bien que les FGM soient très hétérogènes, il sera très utile de les idéaliser en tant que continua, leurs propriétés mécaniques évoluant de manière régulière par rapport aux coordonnées spatiales. Les schémas d'homogénéisation sont nécessaires pour simplifier leurs microstructures hétérogènes complexes afin d'analyser le FGMS de manière efficace.

Cette idéalisation permet d'obtenir des solutions en forme close de certains problèmes fondamentaux de la mécanique des solides. Elle contribuera également à l'évolution et au développement de modèles numériques des structures constituées de matériaux gradués. Il convient de noter que la distribution du matériau dans les structures à gradient de propriétés peut être conçue selon diverses spécifications spatiales. Un FGM typique représente un composite particulière avec une distribution prescrite de fractions volumiques des phases constituants.

On suppose généralement que les propriétés du matériau suivent l'évolution graduelle de l'épaisseur de manière continue. Deux types de variations / gradations sont populaires dans la littérature qui couvre la plupart des modèles analytiques existants.

I.7.1 Loi de puissance

Cette méthode d'estimation est basée sur la règle linéaire du mélange et a été largement utilisée dans la littérature pour étudier la réponse des structures FGM (Praveen et Reddy [53], Shariat et Eslami [54]). Il s'agit de l'un des modèles les plus simples et les mieux établis dans lesquels les propriétés des matériaux sont classées sur l'épaisseur (h) de la plaque FGM de la surface riche en métal ($z = -h/2$) vers le haut ($z = h/2$) surface riche en céramique en modifiant la fraction volumique des constituants [55-57]. La variation de la propriété du matériau en fonction de la position dans la direction de l'épaisseur est donnée par,

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (\text{I.11})$$

Ici, $P(z)$ désigne une propriété typique du matériau, à savoir, le module d'élasticité de Young (E), le module d'élasticité au cisaillement (G), le coefficient de Poisson (ν), la densité de matériau (ρ), etc. Des structures fabriquées. Des FGM. « h » est l'épaisseur totale de la structure. « P_m » et « P_c » sont les propriétés des matériaux situés au plus haut ($z = +h/2$) et au plus bas ($z = -h/2$).
 "λ" Dans le modèle exponentiel, et "p" dans le modèle de puissance sont les indices de

classement des matériaux, respectivement. La schématisation de cette loi est montrée dans la Figure I.7.

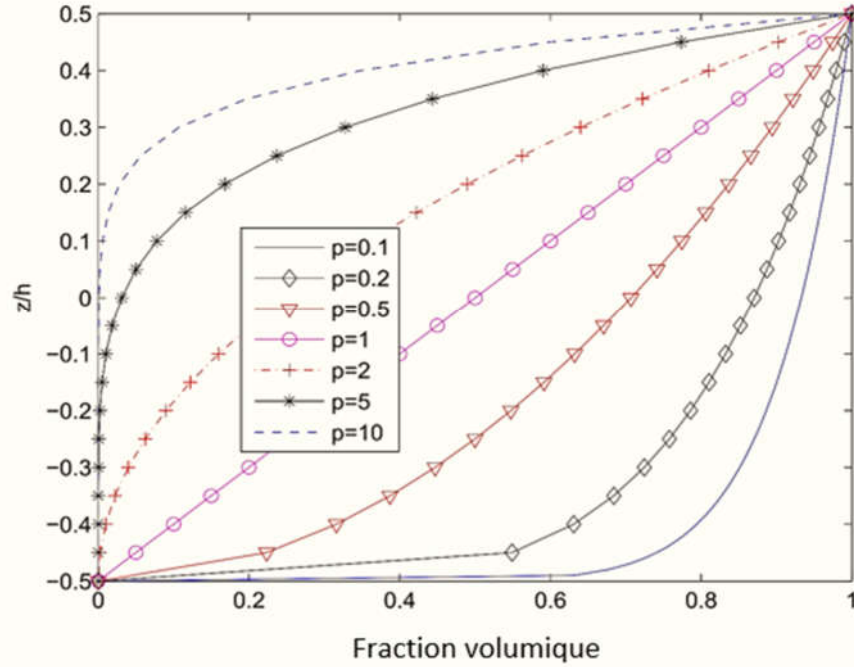


Figure I.7 Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM

I.7.2 Loi d'exponentielle

Plusieurs chercheurs ont adopté cette loi pour prédire le comportement statique et dynamique des structures de FGM. Pour une structure en FGM d'épaisseur uniforme h , les propriétés typiques du matériau « $P(z)$ » en tout point situé à une distance z de la surface de référence sont données par :

$$P(z) = P_t \exp\left(\lambda \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)\right) \quad \text{Où} \quad \lambda = \ln\left(\frac{P_t}{P_p}\right) \quad (\text{I.12})$$

$P(z)$ est les propriétés dans la direction z , P_p et P_t sont les propriétés à la surface inférieure et supérieure, respectivement. La loi exponentielle, montrée dans la Figure I.8, est le plus couramment utilisée dans les études de mécanique de la fracture [58-60].

La distribution des matériaux via la loi exponentielle a une autre formulation [32, 61], où elle peut être exprimée comme suit,

$$P(z) = P_t \exp\left(n \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)\right), \quad \text{Où} \quad n = 0 \dots \infty \quad (\text{I.13})$$

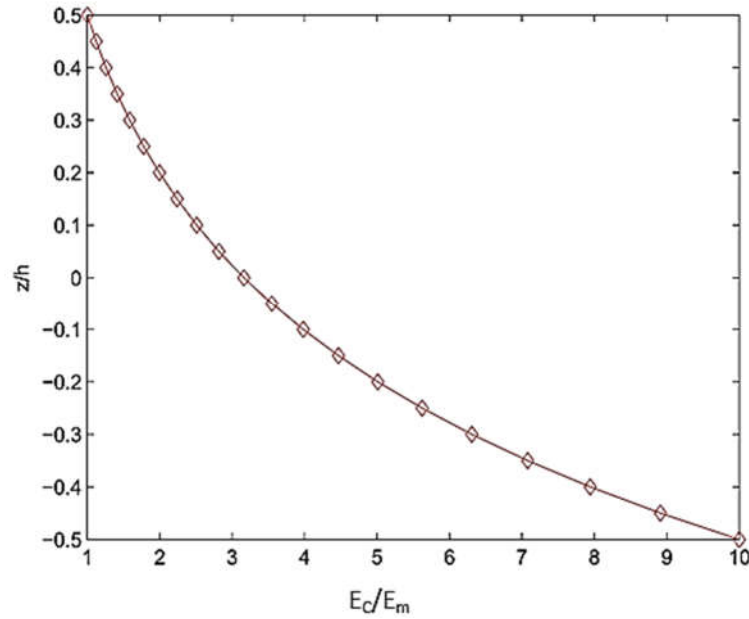


Figure I.8 Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM

I.7.3 Loi de sigmoïde

Cette méthode est plus applicable dans les plaques FGM en couches, c'est-à-dire les plaques FGM avec de la céramique au centre et graduées sur le métal des deux côtés ou vice versa. Dans de tels cas, si une seule fonction de loi de puissance est utilisée, les concentrations de contraintes apparaîtront aux interfaces où le matériau est continu mais change rapidement. Par conséquent, la distribution régulière des contraintes aux interfaces est assurée en définissant la fraction volumique à l'aide de deux fonctions de loi de puissance, également appelée fonction sigmoïdale [62-65]. La variation de la fraction volumique des constituants du plan médian à la surface supérieure $g_1(z)$ et de la surface inférieure au plan médian $g_2(z)$ de la plaque est exprimée comme suit :

$$\begin{cases} g_1(z) = 1 - \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^n & \text{for } 0 \leq z \leq h/2 \\ g_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^n & \text{for } -h/2 \leq z \leq 0 \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

En outre, les propriétés efficaces du matériau sur l'épaisseur de la plaque sont calculées en utilisant une fonction de loi de puissance basée sur la règle du mélange en utilisant une fonction de fraction volumique appropriée dans la direction de l'épaisseur. En outre, la composition optimale des constituants peut être obtenue en faisant varier le paramètre de loi de puissance. La Figure I.9 montre la variation des propriétés suivant l'épaisseur de la plaque en S-FGM.

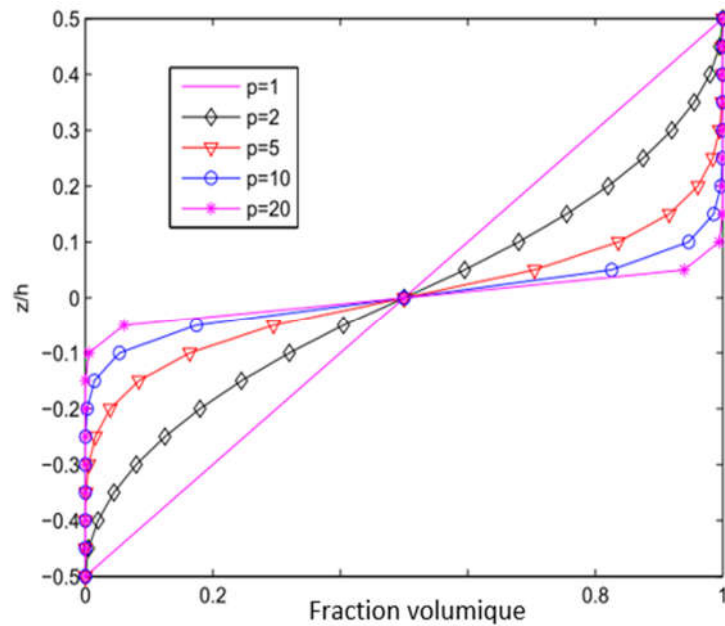


Figure I.9 Variation de la fraction volumique dans une plaque en S-FGM

I.7.4 Plaques sandwich en matériau de type FGM

Dans ce modèle illustré, les matériaux sandwich sont composés d'un noyau FGM avec des peaux en céramique et en métal à la surface supérieure et inférieure de l'épaisseur (h), respectivement et le deuxième concept est inverse du premier, par exemple un noyau homogène avec un FGM peaux à la surface supérieure et inférieure de l'épaisseur [66, 67]. Les propriétés matérielles effectives (E , ν , ρ) sont basées sur la règle de mélange :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m)V_i(z)^n \quad (\text{I.15})$$

Où

P_m et P_c sont les propriétés matérielles du métal et de la céramique. Les propriétés matérielles du sandwich sont réparties dans les deux cas suivants :

I.7.4.1 Plaques sandwich avec noyau en FGM

Les faces supérieure et inférieure sont en céramique et en métal, tandis que le noyau est gradué de métal en céramique (Figure I.10 a). La fonction de fraction volumique du matériau céramique de la $i^{\text{ème}}$ couche $V_i(z)$ est définie par :

$$\begin{cases} V_1(z) = 0 & h_0 \leq z \leq h_1 \\ V_2(z) = \left(\frac{z - h_1}{h_2 - h_1} \right)^n & h_1 \leq z \leq h_2 \\ V_3(z) = 1 & h_2 \leq z \leq h_3 \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

I.7.4.2 Plaques sandwich avec faces en FGM

La face supérieure et inférieure de la céramique, tandis que pour noyau est en céramique (Figure I.10b). La fonction de fraction volumique du matériau céramique de la $i^{\text{ème}}$ couche $V_i(z)$ est définie par :

$$\begin{cases} V_1(z) = \left(\frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^n & h_0 \leq z \leq h_1 \\ V_2(z) = 1 & h_1 \leq z \leq h_2 \\ V_3(z) = \left(\frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^n & h_2 \leq z \leq h_3 \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

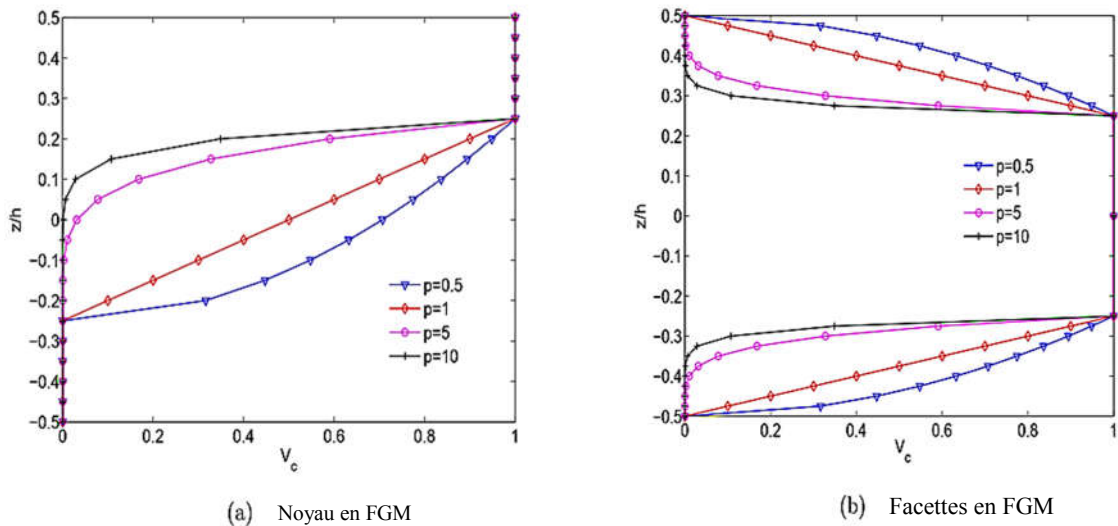


Figure I.10 Variation de la fraction volumique dans une plaque Sandwich-FGM

I.8 Modèles micromécaniques des matériaux de type FGM

Plusieurs modèles de micromécanique ont été développés au fil des années pour déduire les propriétés effectives de matériaux composites homogènes sur le plan macroscopique. Les approches analytiques, à la fois la méthode des éléments finis et les modèles micromécaniques sont fréquemment utilisées pour la modélisation des FGM. Les sujets les plus importants de la modélisation des FGM sont : la déformation élastique, la déformation plastique, le fluage à température élevée, la propagation de la fissure, etc.

I.8.1 Modèle d'auto-cohérence

Cette méthode décrit ses estimations en résolvant un problème élastique dans lequel une inclusion ellipsoïdale est intégrée dans une matrice possédant les propriétés matérielles effectives des composites [46]. Cette méthode suppose que chaque inclusion de renforcement est incorporée dans un matériau de type continu dont les propriétés effectives sont celles du composite. Cette méthode ne fait pas la distinction entre les phases de matrice et de renforcement, et les mêmes modules globaux sont prédits dans un autre composite dans lequel les rôles des phases sont échangés. Cela le rend particulièrement approprié pour déterminer les modules efficaces dans les régions qui ont une microstructure squelettique interconnectée, comme le montre la Figure I.11a. Il s'agit d'une méthode analytique rigoureuse applicable aux matériaux composites isotropes à deux phases. Les modules localement efficaces par la méthode auto cohérente sont donnés comme suit :

$$\frac{\delta}{K} = \frac{V_1}{K - K_2} + \frac{V_2}{K - K_1}$$

$$\frac{\eta}{G} = \frac{V_1}{G - G_2} + \frac{V_2}{G - G_1}$$
(I.18)

Où

$$\delta = 3 - 5\eta = K / (K + 4G)$$
(I.19)

Ce sont des expressions implicites pour les inconnues K et G . L'équation (I.18) peut être résolue pour K en termes de fraction volumique pour obtenir :

$$K = \frac{1}{\frac{V_1}{K_1 + \frac{4}{3}G} + \frac{V_2}{K_1 + \frac{4}{3}G}} - \frac{4}{3}G$$
(I.20)

Et G est obtenu en résolvant l'équation quartique suivante :

$$0 = \frac{V_1 K_1}{K_1 + \frac{4}{3}G} + \frac{V_2 K_2}{K_2 + \frac{4}{3}G} + 5 \left(\frac{V_1 G_2}{G - G_2} + \frac{V_2 G_1}{G - G_1} \right) + 2$$
(I.21)

I.8.2 Modèle de Mori-Tanaka

Le schéma d'estimation des modules effectifs de Mori-Tanaka est applicable aux régions de la microstructure graduée qui ont une matrice continue bien définie et une phase particulière discontinue, comme la montre la Figure I.11b. Il prend en compte l'interaction des champs élastiques entre les inclusions voisines. On suppose que la phase matricielle, désignée par l'indice 1, est renforcée par les particules sphériques d'une phase particulière, désignée par l'indice 2.

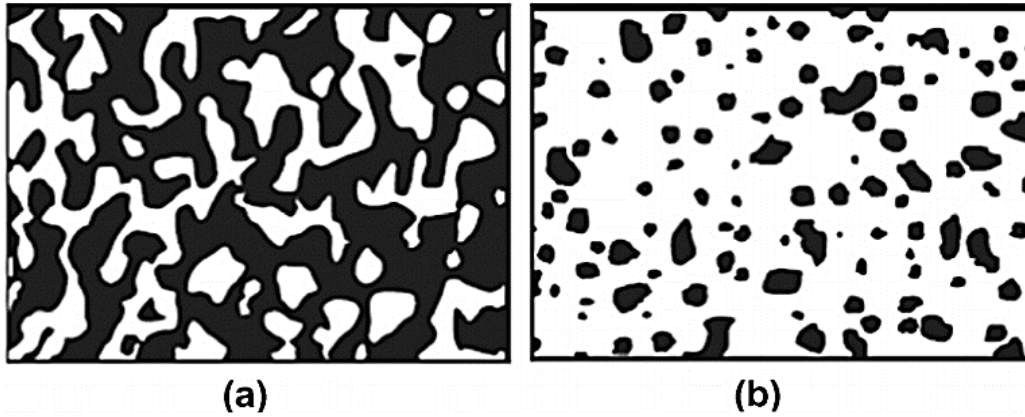


Figure I.11 Matériau biphasé avec (a):une microstructure squelettique et (b): une microstructure particulaire [68].

Dans cette notation, K_1 et G_1 représentent le module de masse et le module de cisaillement respectivement, et V_1 la fraction volumique de la phase matricielle. K_2 et G_2 correspondent aux propriétés du matériau et V_2 à la fraction volumique de la phase particulaire. Les estimations suivantes du module de masse en vrac local efficace K et du module de cisaillement G sont utiles pour une distribution aléatoire de particules isotropes dans une matrice isotrope :

$$K = K_1 + (K_2 - K_1) \cdot \frac{V_2}{1 + [1 - V_2] \frac{3[K_2 - K_1]}{3K_1 + 4G_1}} \quad (\text{I.22a})$$

$$G = G_1 + (G_2 - G_1) \cdot \frac{V_2}{1 + [1 - V_2] \frac{G_2 - G_1}{G_2 + f}} \quad (\text{I.22b})$$

Dans lequel,

$$f_1 = \frac{G_1 [9K_1 + 8G_1]}{6[K_1 + 2G_1]} \quad (\text{I.23})$$

Le module de Young effectif et le coefficient de Poisson peuvent être donnés :

$$\begin{aligned} E_f &= \frac{9KG}{3K + G} \\ \nu_f &= \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \end{aligned} \quad (\text{I.24})$$

I.8.3 Modèle de Tamura – Tomota – Ozawa

Basé sur une règle de mélanges, Tamura *et al.* [69] ont proposé un modèle simple (modèle Tamura–Tomota–Ozawa (TTO)) pour décrire les courbes de contrainte-déformation de matériaux composites. Leur modèle a été utilisé pour étudier les FGM par Williamson *et al.* [70], Giannakopoulos *et al.* [71] et Carpenter *et al.* [72]. Le modèle TTO associé aux contraintes uni axiales et aux déformations (ε) uni axiales moyennes correspondantes du composite des deux matériaux constitutifs est donné comme suit :

$$\sigma = V_1\sigma_1 + V_2\sigma_2, \quad \varepsilon = V_1\varepsilon_1 + V_2\varepsilon_2 \quad (\text{I.25})$$

Où σ_i et ε_i ($i = 1, 2$) sont les contraintes et déformations moyennes des phases constituantes, respectivement, et V_i ($i = 1, 2$) sont des fractions volumiques.

Le modèle TTO introduit un paramètre supplémentaire, q , pour représenter le rapport contrainte / transfert de contrainte,

$$q = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \quad 0 < q < \infty \quad (\text{I.26})$$

Il est clair que $q \rightarrow 0$ et $q \rightarrow \infty$ q-N correspondent à la moyenne des propriétés avec contraintes égales et déformations égales, respectivement. Le module de Young du composite peut être obtenu à partir des équations (I.25) et (I.26) comme :

$$E = \left[V_2 E_2 \frac{q + E_1}{q + E_2} + (1 - V_2) \right] \times \left[V_2 \frac{q + E_1}{q + E_2} + (1 - V_2) \right]^{-1} \quad (\text{I.27})$$

Où, E_i ($i = 1, 2$) sont les modules de Young des phases constitutives de base.

Pour les applications du modèle TTO aux composites céramique/métal (fragiles/ductiles), la limite d'élasticité du composite σ_Y est donnée par :

$$\sigma_Y(V_2) = \sigma_{Y2} \left[V_2 + \frac{q + E_2 E_1}{q + E_1 E_2} (1 - V_2) \right] \quad (\text{I.28})$$

Où σ_{Y2} est la limite d'élasticité du métal (phase 2).

L'idéalisation du métal en tant que matériau bilinéaire à module tangent H_2 conduit à un composite bilinéaire à module tangent suivant H ,

$$H = \left[V_2 H_2 \frac{q + E_1}{q + H_2} + (1 - V_2) \right] \times \left[V_2 \frac{q + E_1}{q + H_2} + (1 - V_2) \right]^{-1} \quad (\text{I.29})$$

La Figure I.12 montre le schéma de la courbe contrainte-déformation du composite décrit par le modèle TTO.

Lorsque le métal suit une relation de loi de puissance avec un exposant $n = 2$, les équations non linéaires suivantes déterminent la courbe de contrainte-déformation du composite,

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_Y} &= \frac{V_1 E}{q + E_1} \frac{\sigma_2}{\sigma_Y} + \frac{(q + V_2 E_1) E}{(q + E_1) E_2} \frac{\sigma_{Y2}}{\sigma_Y} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{Y2}} \right)^{n_2} \\ \frac{\sigma}{\sigma_Y} &= \frac{V_2 q + E_1}{q + E_1} \frac{\sigma_2}{\sigma_{Y2}} + \frac{V_1 q E_1}{(q + E_1) E_2} \frac{\sigma_{Y2}}{\sigma_Y} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{Y2}} \right)^{n_2} \end{aligned} \quad (I.30)$$

Où $\varepsilon_{Y2} = \sigma_{Y2} / E_2$ et $\varepsilon_Y = \sigma_Y / E$ désignent les contraintes de rendement du métal et du composite, respectivement.

La constante q dans le modèle TTO régit l'interaction des constituants dans un FGM. Dans les applications, q peut être déterminé approximativement par un étalonnage expérimental.

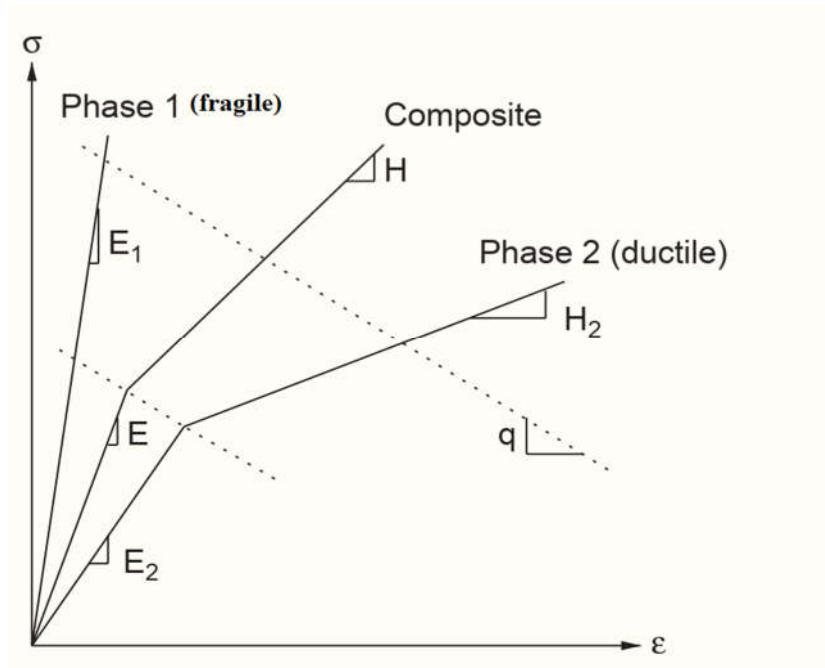


Figure I.12 : Schéma de la courbe contrainte – déformation pour le modèle TTO [73].

I.8.4 Modèle de limites Hashin–Shtrikman

Étant donné que les propriétés effectives d'un matériau composite sont estimées à l'aide de modèles micromécaniques tels que les modèles auto cohérents et de Mori – Tanaka décrits ci-dessus, il est important de définir des limites pour ces propriétés. Pour un matériau composite à deux phases, Hashin et Shtrikman [73] ont déduit les limites suivantes pour les modules de cisaillement et de volume efficaces.

$$\begin{aligned}
K_2^* &= K_2 + V_1 \left[\frac{1}{K_1 - K_2} + \frac{3V_2}{(3K_2 + 4G_2)} \right]^{-1} \\
K_1^* &= K_1 + V_2 \left[\frac{1}{K_2 - K_1} + \frac{3V_1}{(3K_1 + 4G_1)} \right]^{-1}
\end{aligned} \tag{I.31}$$

$$\begin{aligned}
G_1^* &= G_1 + V_2 \left[\frac{1}{G_2 - G_1} + \frac{6(K_1 + 2G_1)V_1}{5G_1(3K_1 + 4G_1)} \right]^{-1} \\
G_2^* &= G_2 + V_1 \left[\frac{1}{G_1 - G_2} + \frac{6(K_2 + 2G_2)V_2}{5G_2(3K_2 + 4G_2)} \right]^{-1}
\end{aligned} \tag{I.32}$$

Où G_1^* et K_1^* sont les bornes inférieures et G_2^* et K_2^* sont les limites supérieures des modules de cisaillement et de volume, respectivement, lorsque $K_2 > K_1$, $G_2 > G_1$.

I.9. Méthodes de fabrication des matériaux de type FGM

Il existe différentes méthodes physiques et chimiques pour la fabrication de FGM, en fonction du type de matériau, de l'application et des commodités accessibles. Les méthodes de traitement des FGM peuvent être classées en deux grandes catégories basées sur le traitement constructif et le transport de masse [74, 75]. Dans la première catégorie, la section FGM est construite couche par couche en commençant par une distribution appropriée dans laquelle les gradients sont littéralement construits dans l'espace. L'avantage de cette technique est de fabriquer un nombre illimité de gradients. Parallèlement, dans la deuxième catégorie, les gradients au sein des composants dépendent de phénomènes de transport naturels tels que l'écoulement d'un fluide, la diffusion d'espèces atomiques ou la conduction thermique. Cependant, les progrès de la technologie de l'automatisation au cours des deux dernières décennies ont permis de proposer des processus de gradation constitutifs réalisables sur les plans technologique et économique.

Les techniques existantes et les plus récentes de fabrication des FGMs sont détaillées et l'aperçu des processus de traitement est présenté dans le tableau I.1. Parmi ces exemples, une procédure est détaillée ci-dessous.

I.9.1 Technique de dépôt en phase de vapeur

Les techniques de dépôt en phase vapeur décrivent diverses méthodes de dépôt sous vide pouvant être utilisées pour produire des films minces sur les matériaux de base. Toutes ces techniques ne peuvent être utilisées que pour produire des FGM minces. Les différents types de

techniques de dépôt en phase vapeur comprennent le dépôt physique en phase vapeur (PVD) et le dépôt chimique en phase vapeur (CVD). Ceux-ci sont énergivores et produisent des jauges toxiques comme sous-produits [74].

Parmi les autres techniques basées sur le dépôt qui peuvent déposer des revêtements minces à gradient de propriétés, on peut citer le dépôt par faisceau d'électrons (EBD), le dépôt par poutre d'ions (IBD) et la synthèse à haute température se propageant automatiquement [76]. Toutes les méthodes mentionnées ci-dessus ne sont pas économiques pour produire des FGM en vrac.

Tableau I.1 Aperçu des processus de traitement [77, 78].

Méthode	Variabilité de la fonction de transition	Polyvalence dans le contenu de la phase	Type de FGM	Polyvalence dans la géométrie des composants
Empilement de poudre	Très Bien	Très Bien	Masse	Modéré
Empilement de poudre	Très Bien	Très Bien	Masse	Modéré
Laminage de feuilles	Très Bien	Très Bien	Masse	Modéré
Pulvérisation de poudre humide	Très Bien	Très Bien	Enrobage	Bien
Trempage du lisier	Très Bien	Très Bien	Masse	Très Bien
Solidification par jet	Très Bien	Très Bien	Enrobage	Modéré
PVD, CVD	Très Bien	Modéré	Masse	Bien
Processus GMFC	Très Bien	Très Bien	Masse	Bien
Filtration / coulée en barbotine	Très Bien	Très Bien	Masse, Enrobage	Très Bien
Revêtement laser	Très Bien	Très Bien	Masse, Enrobage	Bien
Projection thermique	Bien	Très Bien	Masse	Pauvre
Sédimentation	Modéré	Très Bien	Joindre	Bien
La diffusion	Modéré	Modéré	Masse	Pauvre
Solidification dirigée	Modéré	Bien	Masse	Bien
Gratation électrochimique	Modéré	Bien	Masse	Bien
Moussage de polymère	Modéré	Bien	Masse	Bien

I.9.2 La métallurgie des poudres

Une technique basée sur la métallurgie des poudres peut être utilisée pour produire des FGM de type en vrac à structure discontinue (par étapes). Le processus est effectué en utilisant des étapes comprenant la pesée et le mélange de la poudre selon la distribution spatiale prédéfinie selon les exigences fonctionnelles, l'empilement et le pilonnage des poudres pré-mélangées, et enfin le frittage [79].

I.9.3 Méthode centrifuge

La méthode centrifuge est capable de produire des FGM en vrac à structure continue. Il utilise la force de gravité à travers le filage du moule pour produire des matériaux à gradient de propriétés [80]. La différence de densité de matériau et de rotation du moule produit des FGM. Cette méthode présente deux inconvénients : cette méthode ne peut produire que des FGM de forme cylindrique et il existe une limite quant au type de gradient pouvant être produit.

I.9.4 Méthode de fabrication des formes solides quelconques

La méthode de fabrication de formes libres ou quelconques (SFFM) est l'une des technologies de pointe permettant de produire des objets physiques directement à partir des informations générées par ordinateur des pièces. La fabrication de matériaux à gradient de propriétés est l'application la plus remarquable de cette méthode, car cette méthode représente de manière détaillée la distribution variée des matériaux dans la géométrie et son aptitude à contrôler la composition interne des composants [79, 81]. Solid Freeform est un processus de fabrication additive qui offre de nombreux avantages, notamment [82]. La plus grande vitesse de production, moins énergivore, utilisation maximale du matériau, et capacité à produire des formes et des dessins complexes. Les procédés au laser utilisent principalement la méthode SFF dans la fabrication de matériaux à gradient de propriétés [83].

I.10 Domaines d'application des matériaux à gradient de propriétés

L'intérêt pour les applications des FGM s'explique par leurs caractéristiques supérieures à celles des matériaux composites traditionnels. Après plus de 30 ans de recherche, les applications des FGM ont des effets à la fois attendus et inattendus au profit de la société. La plupart des avantages de ces matériaux dépendent du fait qu'ils peuvent être adaptés aux besoins, ce qui élargit considérablement les outils bien utilisés de la science des matériaux. Les FGMs sont utilisés dans l'aérospatiale, mais au cours des dernières décennies, les chercheurs ont montré son application dans d'autres domaines, tels que les matériaux industriels, structure en génie civil, l'optoélectronique, les biomatériaux et les matériaux énergétiques, comme le montre la Figure I.13. Les FGM sont très prometteurs dans des conditions de fonctionnement et de chargement difficiles. Les applications actuelles des matériaux à gradient de propriété dans le domaine du génie civil sont les suivantes :

- Les murs structurels combinent deux fonctions ou plus, notamment l'isolation thermique et phonique.

- Construction d'édifices et d'ouvrage d'art léger ;
- Renforcement structurel d'édifices existants, afin de respecter de nouvelle norme ou en prévision d'utilisation nouvelle d'un bâtiment (ajout d'étage, changement du type d'exploitation).
- Réalisation de formes de grande portée ;
- Utilisation de produits dérivés du béton avec ajouts de fibre, béton armé avec renfort en fibre de verre ou de carbone de manière gradient ;
- Elaboration de matériaux hybrides avec des matériaux traditionnels ;
- Structures destinées aux réservations d'eau ;
- Panneaux pour murs et planchers ;

Dans le domaine du génie civil, les matériaux composites avancés sont utilisés pour le renforcement et la réhabilitation d'éléments structuraux en béton armé, tels que les poutres, les dalles, les colonnes et les murs. Les premières recherches sur l'application de ce nouveau matériau destinées aux ouvrages de génie civil datent de 1980, bien que ce soit plutôt vers 1990 que le matériau est utilisé, d'abord sur une base expérimentale, puis progressivement sur une base commerciale.

I.11 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étalé une bibliographie des matériaux non-homogènes, de type matériaux composites avancés nommés, aussi, matériaux à gradient propriété. La définition générale, le développement et l'histoire des matériaux à gradient de propriétés ont été présentés en détail.

La variation spatiale progressive des propriétés des matériaux permet de créer des structures innovantes dans de nombreux domaines d'application. Etant donné que la distribution progressive du matériau suivant l'épaisseur de ce type de structures provoque des changements dans leur comportement.

De plus, nous avons vu de manière générale différentes méthodes de fabrication des matériaux à gradient propriété et leur application dans divers domaines de l'ingénierie. Enfin, on peut conclure que le matériel présenté a attiré les chercheurs dans de nombreux domaines pour leurs caractéristiques qui ne l'ont pas dans les matériaux conventionnels.

L'appropriation de modèles de structures bien définis pour l'analyse des FGM doit être clarifiée ; plus particulièrement les structures épaisses, basées sur les théories de gauchissement, c'est ce que nous verrons au chapitre suivant.

**Chapitre II : Revue sur la
modélisation des structures reposant
sur les fondations élastiques**

II.1 Théories de la Modélisation des structures

II.1.1 Introduction

En génie des structures, les matériaux à gradient de propriétés sont principalement utilisés comme matériaux constitutifs des plaques rectangulaires. Ainsi, ce chapitre est consacré à un aperçu des théories sur les plaques élastiques les plus courantes, à partir des théories classiques et d'autres à ordre élevé. Il est bien connu que ces modèles structurels sont basés sur des hypothèses concernant la cinématique de déformation ou la contrainte à travers l'épaisseur de la plaque [84].

En général, ces hypothèses permettent de ramener un problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel. Ainsi, ces théories conviennent pour décrire le comportement des plaques minces et/ou moyennement épaisses et/ou épaisses [84].

Les chercheurs ont utilisé différentes approches pour parvenir à l'équation différentielle régissant une structure. Les modèles d'ordre réduit peuvent être globalement classés en trois catégories en fonction de la variable primaire adoptée pour arriver aux équations différentielles qui régissent leurs cinématiques [85-87].

La première est appelée formulation basée sur le déplacement, dans laquelle les variables primaires sont les déplacements de la surface de référence. Les théories basées sur le déplacement prend cette appellation car les variables primaires sont liées au champ de déplacement [88]. En partant de leur champ de déplacement et en supposant des relations de déplacement-déplacement et constitutives, les contraintes et les déformations sont déterminées. La seconde est appelée formulation basée sur la contrainte ; ici les variables primaires sont les contraintes membranaires de la surface de référence. La dernière est appelée formulation mixte ; ici les variables primaires sont les déplacements du plan de référence et les contraintes transversales.

Les variables primaires sont définies sur la surface de référence ; cependant, la plaque est une structure physique tridimensionnelle, et donc les variables primaires seront également des fonctions connues dans le sens de l'épaisseur. La direction de l'épaisseur est omise. Les théories disponibles peuvent être davantage divisées en modèles basés sur la présupposition. Les théories présupposées disponibles des plaques stratifiées composites peuvent être classées selon les références [89, 90], comme suit:

- Théories monocouches équivalentes (ESL),
- Théories par approche discrétisée layer Wise (LW),
- Formulations unifiées (UF).

II.1.2 Théories monocouches équivalentes (ESL)

II.1.2.1 Théorie de Kirchhoff – Love

Kirchhoff [91a], [92b] a développé la théorie des plaques classique (CPT) bien connue. elle est basée sur l'hypothèse de Kirchhoff selon laquelle les lignes droites normales au plan médian non déformé restent droites et normales au plan médian déformé et ne subissent pas d'étirement de l'épaisseur [93]. Conformément aux hypothèses cinématiques retenues dans les théories des plaques classiques (CPT), toutes les déformations de cisaillement transversal et normal transversal sont nulles. Le champ de déplacement de la théorie se présente comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x, y, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Où (o, x, y, z) est le système de coordonnées cartésien rectangulaire ; (o, x, y) est le plan médian non déformé ; u, v, w sont des déplacements dans les directions x, y, z respectivement ; u_0, v_0 et w_0 sont les fonctions inconnues de la position (x, y) (voir Figure II.1).

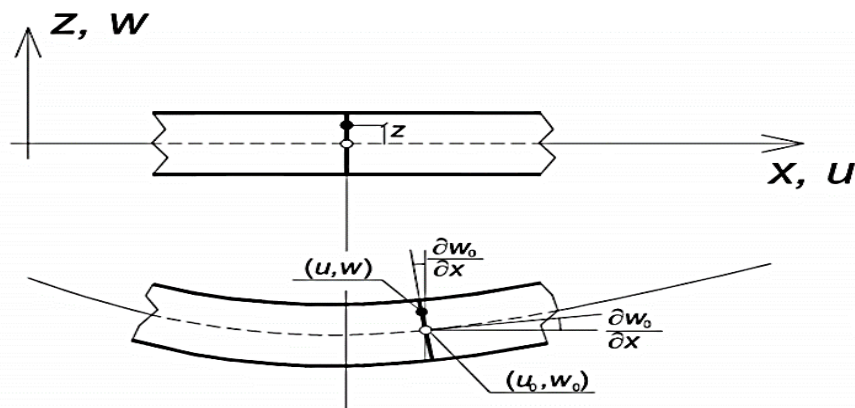


Figure II.1 Déformation d'une normale transversale selon les théories classiques.

II.1.2.2 Théorie de déformation par cisaillement du premier ordre

La théorie classique néglige les déformations de cisaillement transverses et est valable pour les structures minces. Pour les structures moyennement épaisses, les efforts de cisaillement transversal ne sont pas négligeables. La prise en compte de déformations de cisaillement transverses constantes donne l'hypothèse de Reissner – Mindlin, qui est plus précise que la théorie classique pour les plaques et les coques moyennement épaisses. L'hypothèse de Reissner – Mindlin est également appelée hypothèse de déformation par cisaillement du premier ordre (FOSD), qui suppose que les lignes droites perpendiculaires à la surface médiane restent droites

après la déformation, mais pas nécessairement normales à la surface médiane (voir la Figure II.2). Maintenant, la distribution des déplacements le long de l'épaisseur dans le système de coordonnées curviligne suppose le champ de déplacement suivant,

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, t) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Où u_0 , v_0 et w_0 sont les fonctions inconnues des coordonnées x et y ; ϕ_x et ϕ_y sont les rotations d'une normale transversale autour de l'axe des y et de l'axe des x , respectivement.

Ces théories basées sur le déplacement sont bien connues dans la littérature sous le nom de théories de déformation par cisaillement de premier ordre (FSDT). Cependant, ces théories souffrent de l'inconvénient de l'utilisation de facteurs de correction du cisaillement dépendant du problème.

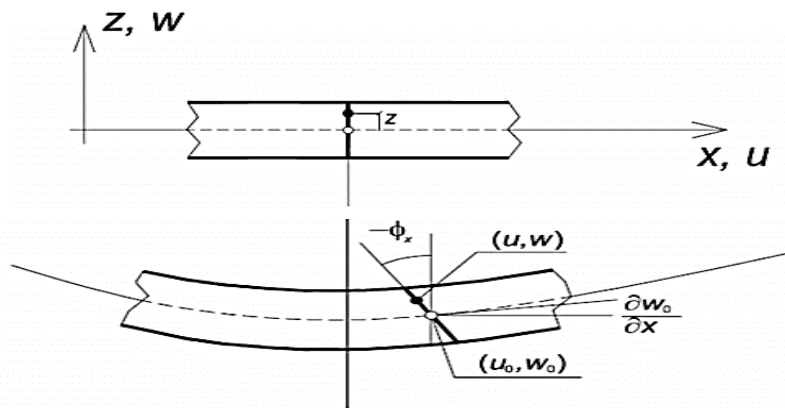


Figure II.2 Déformation d'une normale transversale selon les théories du premier ordre.

II.1.2.3 Théorie de déformation de cisaillement de deuxième ordre

Plusieurs auteurs ont utilisé des champs de déplacements polynomiaux de second ordre, y compris Dozio [94], qui a utilisé la théorie de deuxième ordre sans contrainte pour les plaques FGM et a comparé ces résultats avec d'autres théories. Les théories de deuxième ordre sont également utilisées par Barut [95]. Whitney et Sun [96] ont développé une théorie de deuxième ordre pour étudier la propagation des ondes. Cette théorie a un total de huit variables de déplacement. Khdeir et Reddy [97] ont utilisé une plaque stratifiée de la théorie, parfois appelée théorie de la déformation au cisaillement du second ordre (SSDT), par analogie avec la théorie de Reissner-Mindlin, également connue sous le nom de théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT). Shahrjerdi *et al.* [98], Yang et Yuan [99] ont utilisé une théorie de

second ordre pour les plaques isotropes. Le champ de déplacement de ces théories peut généralement être décrit comme suit

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) + z^2\psi_x(x, y, t) \\ v(x, y, t) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) + z^2\psi_y(x, y, t) \\ w(x, y, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Où u_0 , ϕ_x , ψ_x , v_0 , ϕ_y , ψ_y , w_0 sont des fonctions inconnues de coordonnées x et y .

II.1.2.4 Théorie d'ordre supérieur

II.1.2.4.1 Troisième ordre avec cinq variables

La théorie des plaques du troisième ordre est basée sur les mêmes hypothèses que celles des théories classiques et des plaques du premier ordre, sauf que l'hypothèse sur la rectitude et la normalité d'une normale transversale après déformation est relâchée en développant les déplacements u , v , w [100] comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) + cz^3 \left(\phi_x + \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \right), \\ v(x, y, t) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) + cz^3 \left(\phi_y + \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \right), \\ w(x, y, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Où $c = 4 / (3h^2)$ est déterminé en exigeant que la contrainte de cisaillement transverse disparaisse sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le choix particulier pour le champ de déplacement, Equation (II.4), permet la distorsion (du troisième ordre) des normales au plan médian de la plaque non déformée, voir la Figure II.3. Cette théorie raffinée prédit les déplacements et les fréquences propres avec précision pour les plaques avec un rapport épaisseur sur largeur.

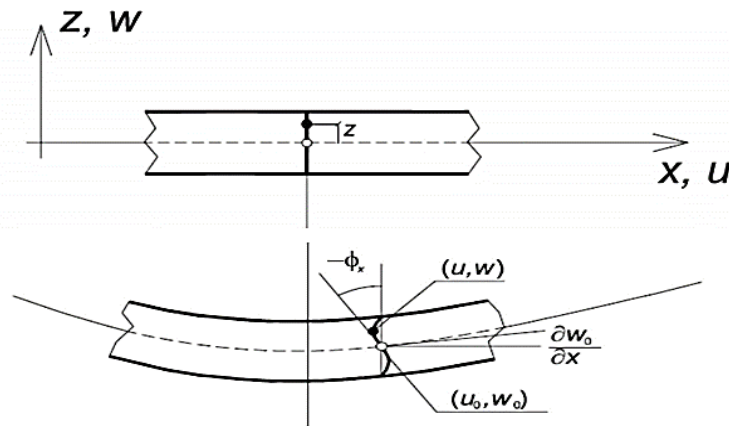


Figure II.3 Déformation d'une normale transversale selon les théories d'ordre supérieur

II.1.2.4.2 Théories à quatre variables

La division du déplacement transversal en plusieurs composants a été proposée dans [101]. Le champ de déplacement pour une colonne sous compression axiale impulsionnelle a été utilisé pour suivre la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre avec $u(x, y, t) = u_0(x, y, t) - z\phi_x(x, y, t)$ pour le déplacement axial.

Le déplacement transversal w consiste en une composante de flexion $w_b(x, y, t)$, une composante de cisaillement $w_s(x, y, t)$ et une composante $w_0(x, y, t)$ due aux imperfections géométriques initiales $w(x, y, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) + w_0(x, y, t)$.

Shimpi *et al.* [102] ont développé deux théories pour la flexion de plaques isotropes avec

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= -zw_{b,x}(x, y, t) \\ v(x, y, t) &= -zw_{b,y}(x, y, t) \\ w(x, y, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Pour la théorie I et, pour la théorie II,

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= -z\phi_x(x, y, t), \quad v(x, y, t) = -z\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, t) & \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Il y a deux variables dans les deux cas. Déplacements dans le plan $u(x, y, t)$ et $v(x, y, t)$ dans les cas où des déformations dans le plan et en flexion sont couplées, le champ de déplacement peut être écrit ainsi :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b(x, y, t)}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y, t)}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b(x, y, t)}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y, t)}{\partial x} \\ w(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Où

u_0, v_0, w_b et w_s sont les fonctions inconnues des coordonnées x et y ; x et y sont les rotations d'une normale transversale autour de l'axe des y et de l'axe des x , respectivement. Avec $f(z)$, sont des fonctions de cisaillement présentés dans le tableau II.1.

Tableau II.1 Modèles polynomiaux

$f(z)$	Références
$f(z) = z \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]$	Abrate et Di Sciuva [103], Kim <i>et al.</i> [104]
$f(z) = -4 \frac{z^3}{3h^2}$ $f(z) = -4 \frac{z^3}{3h^2}$	Senthilnathan <i>et al.</i> [105]
$f(z) = z^3 - \frac{7}{8} h^2 z$	Mantari [106]

II.1.2.4.3 Modèles non polynomiaux

Bien que l'idée d'utiliser d'autres fonctions que les polynômes remonte au début du 19^e siècle, de nombreux développements ont eu lieu ces dernières années. Cette section décrira les théories avec des champs de déplacement comportant des fonctions trigonométriques, hyperboliques et exponentielles. Puisque l'efficacité du calcul présente un intérêt, la plupart des théories doivent déterminer quatre à six variables.

II.1.2.4.5 Modèles trigonométriques

Dans ce type de théorie, $f(z)$ contient des fonctions trigonométriques de z . Dans la théorie des plaques de déformation en cisaillement sinusoïdal de Levy [107], Stein [108] et [109], $f(z) = (h/\pi) \sin(\pi z/h)$. Il est utilisé par de nombreux enquêteurs, trop nombreux pour être mentionné. Le tableau II.2 montre plusieurs autres fonctions $f(z)$, utilisées dans les théories trigonométriques.

Tableau II.2 Modèles trigonométriques

$f(z)$	Références
$f(z) = h \tan^{-1} \left(\frac{2z}{h} \right) - z$	Thai <i>et al.</i> [110]
$f(z) = \cot^{-1} \left(\frac{h}{z} \right) - \frac{16z^3}{15h^3}$	Nguyen <i>et al.</i> [111]
$f(z) = z \sec \left(\frac{rz}{h} \right) - z \frac{\sec(r/2)}{1 + \frac{r}{2} \tan(r/2)}$	Grover <i>et al.</i> [112]

II.1.2.4.6 Modèles hyperboliques

Le champ de déplacement de ces théories est donné par les équations 4.1 et $f(z)$, contient des fonctions hyperboliques. La première théorie de ce type semble être celle de Soldatos [113]. Il a été adopté par de nombreux chercheurs de nombreuses autres fonctions de déformation de cisaillement hyperbolique proposées dans le tableau II.3.

Tableau II.3 Modèles hyperboliques

$f(z)$	Références
$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$	Soldatos [113], Shinde <i>et al.</i> [114]
$f(z) = \frac{3\pi}{2} h \tanh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{3\pi}{2} z \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\right)$	Akavci [37]
$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{\cosh(\pi/2) - 1} z - \frac{(h/2) \cosh(\pi z/2)}{\cosh(\pi/2) - 1}$	Ait Atmane <i>et al.</i> [32], Benyoucef <i>et al.</i> [115]
$f(z) = \sinh^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right)$	Thai <i>et al.</i> [116]

II.1.2.4.7 Modèles exponentiels

La fonction de forme de cisaillement exponentiel $f(z) = ze^{-2(z/h)^2}$ proposée par Karama *et al.* [117] est utilisée dans les références [118-120]. Aydogdu [121] a utilisé $f(z) = z\alpha^{-2(z/h)^2/\ln(\alpha)}$ et Mantari et Soares [122] a utilisé $f(z) = 0.028 + 2.85ze^{-2(z/h)^2}$.

II.1.2.4.8 Effet de déformation normale

Il est essentiel de comprendre et de calculer avec précision le cisaillement transverse et les contraintes normales dans l'épaisseur des plaques non-homogènes, car cela est important pour l'analyse statique et dynamique. Cependant, dans toute une variété de théories de plaques d'ordre supérieur existant dans la littérature, très peu de personnes se sont penchées sur l'effet de déformation/déformation normale transverse lorsque ces théories d'ordre supérieur sont appliquées au cisaillement de FG-plaques en vue de minimiser le nombre de variables inconnues. Un champ de déplacement unifié des théories d'ordre supérieur (théories quasi-3D) prenant en compte les effets du cisaillement transverse et des déformations normales est le suivant :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} + f(z)\theta_x(x, y, t) \\
v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} + f(z)\theta_y(x, y, t) \\
w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + g(z)\phi(x, y, t)
\end{aligned} \tag{II.8}$$

Où plusieurs expressions pour $f(z)$ et $g(z) = \partial f / \partial z$ sont données dans le tableau II.4. Une expression plus complexe pour $f(z)$ qui ne sera pas reproduite ici est utilisée par Belabed *et al.* [49].

Tableau II.4 : Fonctions de formes utilisées dans les théories quasi-3D

$f(z)$	$g(z)$	Références
$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$	$g(z) = \cosh\left(\frac{z}{h}\right) - \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$	Soldatos [113]
$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$	$g(z) = 1 - \frac{4z^2}{h^2}$	Pawar <i>et al.</i> [123]
$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	$g(z) = \frac{\pi}{h} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	Abualnour <i>et al.</i> [124]

II.1.3 Théories de Zig-zag

Les idées fondamentales dans le développement des théories en Zig-zag consistent à adopter un certain modèle de déplacement et / ou de contrainte dans chaque couche, puis à utiliser des conditions de compatibilité et d'équilibre à l'interface pour réduire le nombre de variables inconnues [125].

Par souci de simplicité, un boîtier plat unidimensionnel est considéré. L'extension aux géométries bidimensionnelles de cas et de coquilles doit être immédiate. L'origine des coordonnées d'épaisseur est pour des raisons de simplicité dans la couche inférieure; l'attention s'est limitée à un champ de déplacement linéaire continu par morceaux [125].

Le champ de déplacement u de chaque couche peut d'abord être écrit en utilisant des valeurs de déplacement aux interfaces. Par exemple, pour les première et dernière couches, on a :

$$\begin{aligned}
u^1(z) &= u^0 + z\phi_1 & 0 \leq z \leq h_1 \\
u^{N_l}(z) &= u^{N_l}(h_{N_l-1}) + (z - h_{N_l-1})\phi_{N_l} & h_{N_l-1} \leq z \leq h_{N_l}
\end{aligned} \tag{II.9}$$

Où, u^0 est la valeur du déplacement u avec une correspondance à la surface inférieure. $u^k(k)$, $k = 1, N_l$ sont la valeur d'interface de u , ϕ_k , $k = 1, N_l$ sont les valeurs qui identifient les rotations dans les couches.

Murakami [126] a introduit dans un champ de déplacement ESL du premier ordre une fonction Zig-zag capable de décrire la forme zig-zag pour les déplacements. Il a modifié les théories FSDT selon le modèle suivant,

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u_{0x} + zu_{x1}(x, y) + (-1)^k \zeta_k u_{0z} \\ u_y(x, y, z) &= u_{0y} + zu_{y1}(x, y) + (-1)^k \zeta_k u_{0z} \\ u_z(x, y, z) &= u_{0z} \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

L'indice z fait référence à la fonction de zigzag de Murakami introduite. La signification géométrique de la fonction zig-zag est expliquée sur la Figure II.4. $\zeta_k = 2z_k / h_k$ est une coordonnée de couche non dimensionnée (z_k est la coordonnée physique de la couche $-k$ dont l'épaisseur est h_k). L'exposant k change le signe du terme zigzag dans chaque couche.

Les modèles d'ordre supérieur pour les théories du zigzag apparaissent sous la forme suivante

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u_{0x} + zu_{x1}(x, y) + z^2 u_{x2}(x, y) + \dots + z^{n-1} u_{xN}(x, y) + (-1)^k \zeta_k u_{xz} \\ u_y(x, y, z) &= u_{0y} + zu_{y1}(x, y) + z^2 u_{y2}(x, y) + \dots + z^{n-1} u_{yN}(x, y) + (-1)^k \zeta_k u_{yz} \\ u_z(x, y, z) &= u_{0z} + zu_{z1}(x, y) + z^2 u_{z2}(x, y) + \dots + z^{n-1} u_{zN}(x, y) + (-1)^k \zeta_k u_{zZ} \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

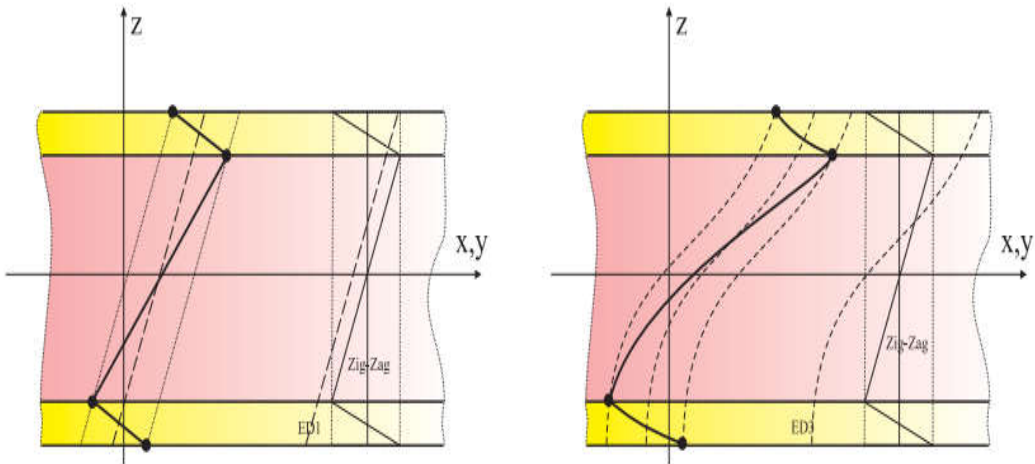


Figure II.4 Représentation du champ de déplacement selon la théorie du Zigzag.

II.1.4 Formulation unifiée de Carrera (CUF)

Carrera a mis au point une formulation unifiée bien connue basée sur le principe du déplacement virtuel ou sur le théorème de variation mixte de Reissner (RMVT). Carrera a présenté les travaux pionniers sur l'analyse de structures multicouches dans toutes ses publications de recherche au cours des deux dernières décennies, ce qui a incité de nombreux chercheurs à intensifier leurs travaux de recherche sur les structures composites. En particulier, son travail sur les théories raffinées basées sur RMVT pour les structures multicouches est très stimulant, novateur et fondamental. Plusieurs théories classiques et raffinées disponibles dans la littérature ne sont que des cas particuliers de la formulation unifiée de Carrera. Selon le CUF, les déplacements et les contraintes sont les variables développées selon les formules suivantes :

$$\begin{aligned} u &= F_t^t u_t + F_b^b u_b + F_r^r u_r = F_\tau^\tau u_\tau \quad \tau = t, b, r \quad r = 2, \dots, N \\ \sigma &= F_t^t \sigma_{nt} + F_b^b \sigma_{nb} + F_r^r \sigma_{nr} = F_\tau^\tau \sigma_{n\tau} \quad \tau = t, b, r \quad r = 2, \dots, N \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

Où F_t, F_b et F_r sont les fonctions de base utilisées pour l'expansion z ; les deux premiers polynômes sont liés à la partie linéaire de ces développements, tandis que F_r introduit les $N-1$ termes d'ordre supérieur.

Une extension supplémentaire de GUF a été récemment proposée, qui introduit la possibilité de subdiviser l'empilement composite en sous-stratifiés, ce qui signifie que la description ESL/LW et l'ordre de développement de chaque variable peuvent être choisis indépendamment dans chaque sous-stratifié [127]. La possibilité d'une description ESL des contraintes transverses a également été prise en compte. Ce soi-disant sous-stratifié-GUF (S-GUF) apparaît comme particulièrement utile pour la modélisation de structures en sandwich, pour lequel il apparaît comme un choix naturel de formuler des «modèles à trois couches»: différentes hypothèses sont émises pour le comportement de la couche mince, peaux rigides et les couches de noyau épaisses et souples [128].

II.2 Les approches de la modélisation de la fondation élastique

La recherche d'un modèle physiquement proche et mathématiquement simple pour représenter le sol dans le problème de l'interaction sol-structure montre deux approches classiques de base, à savoir l'approche de Winkler et l'approche de Continuum. A l'interface sol-support, la répartition de la pression de contact est un paramètre important [129]. La variation de la répartition de la pression dépend du comportement de la fondation (à savoir, rigide ou flexible) et de la nature du dépôt de sol (argile ou sable, etc.).

La philosophie de la conception des fondations étant de répartir la charge de la structure sur le sol, la modélisation idéale des fondations est celle dans laquelle la répartition de la pression de contact est simulée de manière plus réaliste [130]. De ce point de vue, les deux approches fondamentales présentent certaines limitations caractéristiques. Cependant, le comportement mécanique du sous-sol semble être complètement erratique et complexe et il semble impossible d'établir une loi mathématique conforme à l'observation réelle [129].

Dans ce contexte, la simplicité des modèles, maintes fois, devient une considération primordiale et donne souvent des résultats raisonnables. Des tentatives ont été faites pour améliorer ces modèles par des modifications appropriées afin de simuler de plus près le comportement du sol d'un point de vue physique [129]. Ces dernières années, un certain nombre d'études ont été menées dans le domaine de l'interaction sol-structure, qui modélise le sol sous-jacent de nombreuses manières sophistiquées. Les détails de ces modélisations sont décrits ci-dessous en bref.

II.2.1 Modèle de Winkler

L'idéalisation de Winkler représente le sol comme un système de ressorts identiques, linéairement élastiques, proches les uns des autres. Selon cette idéalisation, la déformation de la fondation due à la charge appliquée est limitée aux régions chargées uniquement [129]. La Figure II.5 montre la représentation physique de la fondation de Winkler. La relation de déflexion de pression en tout point est donnée par :

$$R = K_w w_0 \quad (\text{II.13})$$

Où R est la pression, K_w est le coefficient de réaction ou du module du sous-sol, et w_0 est le fléchissement.

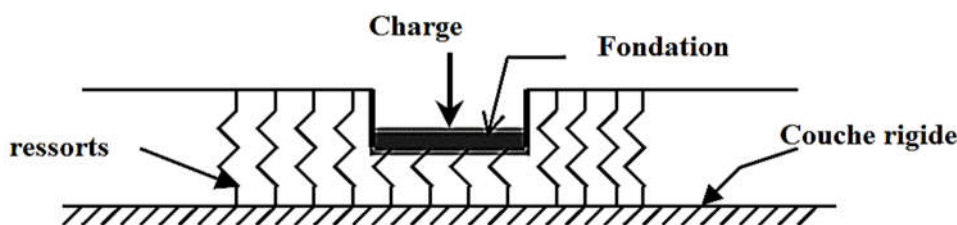


Figure II.5 Fondation de Winkler.

Un certain nombre d'études sur le domaine de l'interaction sol-structure ont été menées sur la base de l'hypothèse de Winkler pour sa simplicité (Popov [131], Al [132], Vesic [133],

Kramrisch et Rogers [134], Brown *et al.* [135]). Le problème fondamental de l'utilisation de ce modèle est de déterminer la rigidité des ressorts élastiques utilisés pour remplacer le sol sous la fondation. Le problème devient double car la valeur numérique du coefficient de réaction du sous-sol dépend non seulement de la nature du sous-sol, mais également des dimensions de la zone chargée. Étant donné que la rigidité du sol de fondation est le seul paramètre du modèle de Winkler permettant d'idéaliser le comportement physique du sol de fondation, il faut prendre soin de la déterminer numériquement pour l'utiliser dans un problème pratique [129].

Le module de réaction du sol de fondation ou le coefficient de réaction du sol de construction K_w est le rapport entre la pression R en un point donné de la surface de contact et le tassement y produit par la charge à ce point :

$$K_w = R / y \quad (\text{II.14})$$

En suivant une méthode appropriée mentionnée pour estimer K_w , une valeur raisonnable du module de fondation, comme seul paramètre permettant d'idéaliser la rigidité du sol, peut être obtenue. En l'absence de données de test appropriées, des valeurs représentatives peuvent être choisies en suivant les recommandations présentées dans la littérature [136]. Cependant, les limites fondamentales de l'hypothèse de Winkler résident dans le fait que ce modèle ne peut pas prendre en compte la dispersion de la charge sur une zone d'influence augmentant progressivement avec une profondeur croissante. De plus, il considère le comportement linéaire contrainte-déformation du sol. Le plus grave démerite du modèle de Winkler est celui qui concerne l'indépendance des ressorts. Ainsi, l'effet de la charge appliquée de manière externe n'est localisé dans la couche de fondation que jusqu'au point de son application ; Ceci implique qu'aucune liaison cohésive n'existe entre les particules comprenant le sol [129].

II.2.2 Modèle de continuum élastique

Il s'agit d'une approche conceptuelle de la représentation physique des milieux infinis du sol. La masse du sol est composée de particules discrètes compactées par certaines forces inter granulaires. Par rapport à la taille des grains de sol individuels. En conséquence, la composition corporelle de molécules discrètes est transformée en un équivalent macroscopique statistique. Ainsi, il semble très raisonnable d'invoquer la théorie de la mécanique du continuum pour idéaliser le milieu du sol [137].

Les travaux de recherche de Boussinesq [138] ont peut-être été à l'origine de la représentation d'un continuum dans le sol, qui permet d'analyser le problème d'un solide

élastique linéaire homogène, isotrope, semi-infini, soumis à une force concentrée agissant perpendiculairement à la limite plane, en utilisant la théorie de l'élasticité. Dans ce cas, une fonction continue est supposée représenter le comportement du milieu du sol. En fait, plus tard, il a été conclu que la nature du support élastique de tout type peut être mieux décrite par la ligne de flexion de sa surface sous une charge concentrée unitaire [139]. Dans l'idéalisation du continuum, le sol est généralement supposé semi-infini et isotrope pour des raisons de simplicité. Cependant, l'effet de la stratification du sol et de l'anisotropie peut être expliqué de manière appropriée dans l'analyse [137].

Cette approche fournit beaucoup plus d'informations sur les contraintes et les déformations dans la masse de sol que le modèle de Winkler. Il présente également l'avantage important de la simplicité des paramètres d'entrée, à savoir le module d'élasticité et le coefficient de Poisson. Des solutions à certains problèmes pratiques, idéalisant le milieu du sol sous forme de continuum élastique, ne sont disponibles que dans quelques cas limités [140, 141].

Cependant, cette idéalisation d'un continuum élastique semi-infini conduit à des complexités multiples d'un point de vue mathématique [142]. Cela limite considérablement l'application de ce modèle dans la pratique. L'un des principaux inconvénients de l'approche du continuum élastique est l'inexactitude des réactions calculées à la périphérie de la fondation. Il a également été constaté que, dans le cas du sol, les déplacements de surface hors de la région chargée diminuaient plus rapidement que ce que prédit cette approche [143]. Ainsi, cette idéalisation est non seulement difficile à exercer sur le plan informatique, mais omet souvent de représenter très étroitement le comportement physique du sol.

II.2.3 Modèles de fondation améliorés

Afin de remédier aux faiblesses des deux approches de base, à savoir le modèle de Winkler et le modèle Continuum, certains modèles de fondation modifiés ont été proposés dans la littérature. Ces modifications ont généralement été suggérées suivant deux approches différentes. Dans la première approche, la fondation Winkler est modifiée pour introduire une continuité grâce à une interaction entre les éléments de ressort et certains éléments structurels. Dans la seconde approche, le modèle de continuum est simplifié pour obtenir une image plus réaliste en termes de déplacement et / ou de contraintes attendus [129]. Ces modèles de fondation améliorés sont brièvement décrits ci-dessous.

II.2.3.1 Versions améliorées du modèle Winkler

I.2.3.1.1 Fondation de Filonenko-Borodich.

La Figure II.6 montre la représentation physique du modèle de fondation de Filonenko – Borodich [24]. Selon ce modèle, la connectivité des différents ressorts de Winkler est obtenue grâce à une fine membrane élastique soumise à une tension constante T . Cette membrane est fixée aux extrémités supérieures des ressorts [129]. Ainsi, la réponse du modèle est mathématiquement exprimée comme suit :

$$R = K_w w_0 - T \nabla^2 w_0 \quad (II.15)$$

$$R = K_w w_0 - T \frac{d^2 w_0}{d^2 x}$$

Où ∇^2 est Laplace opérateur, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; T est force de traction.

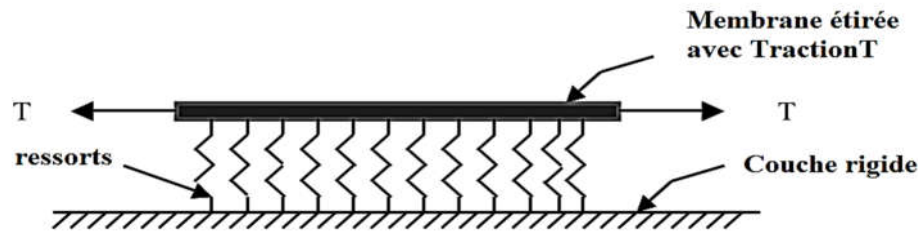


Figure II.6 Fondation de Filonenko – Borodich.

Par conséquent, l'interaction des éléments à ressort est caractérisée par l'intensité de la tension T dans la membrane. Un modèle de base essentiellement composé de liquide lourd avec tension superficielle est également suggéré dans la littérature [144].

I.2.3.1.2 Fondation de Hetenyi

Ce modèle suggéré dans la littérature [145] peut être considéré comme un juste compromis entre deux approches extrêmes (à savoir la fondation de Winkler et le continuum isotrope). Dans ce modèle, l'interaction entre les ressorts discrets est réalisée en incorporant une poutre élastique ou une plaque élastique, qui ne subit qu'une déformation en flexion [129], comme illustré à la Figure II.7. Ainsi, la relation pression-déflexion devient :

$$R = K_w w_0 + D \nabla^4 w_0 \quad (II.16)$$

Où, D de rigidité en flexion de la plaque élastique

$$D = (E_p h_p^3) / (12(1 - \mu_p)^2) \quad (II.17)$$

R est la pression à l'interface du plateau et des ressorts ; E_p et ν_p sont le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau de la plaque ; h_p est l'épaisseur de la plaque,

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (\text{II.18})$$

Ainsi, on voit que la rigidité en flexion d'une poutre ou d'une plaque incorporée caractérise l'interaction entre les éléments à ressort du modèle de Winkler. Des descriptions détaillées de ce modèle, ainsi que quelques exemples numériques, sont disponibles dans la littérature [144, 145].

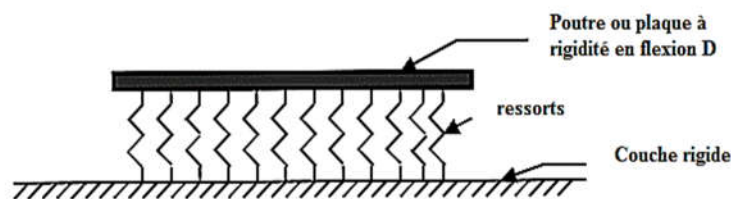


Figure II.7 Fondation de Hetenyi.

I.2.3.1.3 Fondation de Pasternak

Dans ce modèle, on suppose l'existence d'une interaction de cisaillement entre les éléments de ressort, qui est réalisée en reliant les extrémités des ressorts à une poutre ou une plaque qui ne subit qu'une déformation de cisaillement transverse (Figure II.8.). La relation charge-flèche est obtenue en considérant l'équilibre vertical d'une couche de cisaillement [129]. La relation pression-déflexion est donnée par :

$$R = K_w w_0 + K_p \nabla^2 w_0 \quad (\text{II.19})$$

Où

K_p est le module de cisaillement de la couche de cisaillement.

Ainsi, la continuité dans ce modèle est caractérisée par la prise en compte de la couche de cisaillement. Une comparaison de ce modèle avec celui de Filonenko – Borodich implique leur équivalence physique («T» a été remplacé par « K_p »).

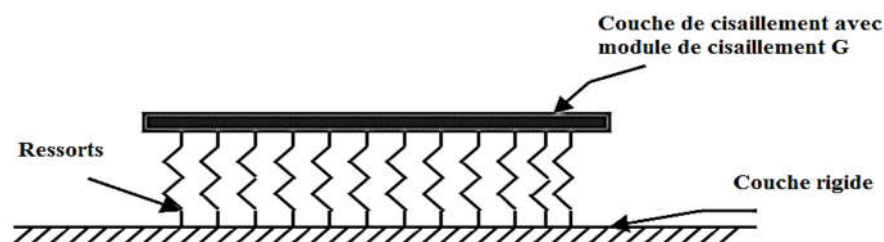


Figure II.8 Fondation de Pasternak.

Une formulation détaillée et la base de développement du modèle ont été discutées bien avant, dans la référence [26]. Des solutions analytiques pour les plaques sur des assises de type Pasternak avec un résumé de la dérivation du modèle ont été rapportées dans la littérature [146, 147].

I.2.3.1.4 Fondation Kerr

Une couche de cisaillement est introduite dans la fondation de Winkler et les constantes de ressort situées au-dessus et au-dessous de cette couche sont supposées être différentes selon cette formulation. La Figure II.9 montre la représentation physique de ce modèle mécanique. L'équation différentielle qui gouverne ce modèle peut être exprimée comme suit :

$$\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) R = \frac{K_p}{k_1} R + K_2 w_0 + K_p \nabla^2 w_0 \quad (\text{II.20})$$

Où, k_1 est la constante du ressort de la première couche ; k_2 est la constante de rappel de la deuxième couche ; w_0 est le fléchissement de la première couche.

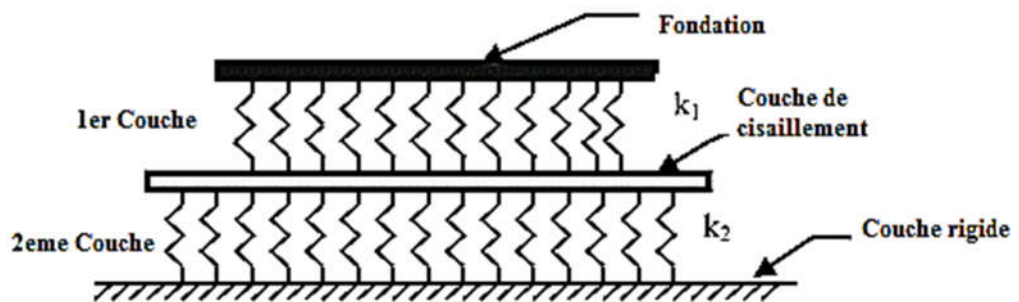


Figure II.9 Fondation de Kerr.

II.2.3.2 Versions améliorées du modèle de continuum

II.2.3.2.1 Fondation de Vlasov

Partant de l'idéalisation du continuum, ce modèle de base a été développé selon le principe variationnel [27]. Ce modèle impose certaines restrictions aux déformations possibles d'une couche élastique. Selon ce modèle :

- Le déplacement vertical $w(x, y) = w(x) h(z)$, tel que $h(0) = 1$ et $h(H) = 0$. Cette fonction $h(z)$ décrit la variation du déplacement dans une direction verticale.
- Le déplacement horizontal $u(x, z)$ est supposé nul partout dans le sol.

On peut supposer que la fonction $h(z)$ décroît linéairement avec la profondeur pour une fondation classique d'épaisseur finie H . Par conséquent, dans ce cas, $h(z) = 1 - (z / H)$. Pour la fondation reposant sur une couche élastique relativement épaisse (ou infinie), le choix peut être

$h(z) = (\sinh(\gamma(H - z)) / \sinh(\gamma H))$, où γ est un coefficient dépendant des propriétés élastiques de la fondation définissant le taux de diminution des déplacements avec la profondeur. La Figure II.10 schématise le modèle de Vlasov.

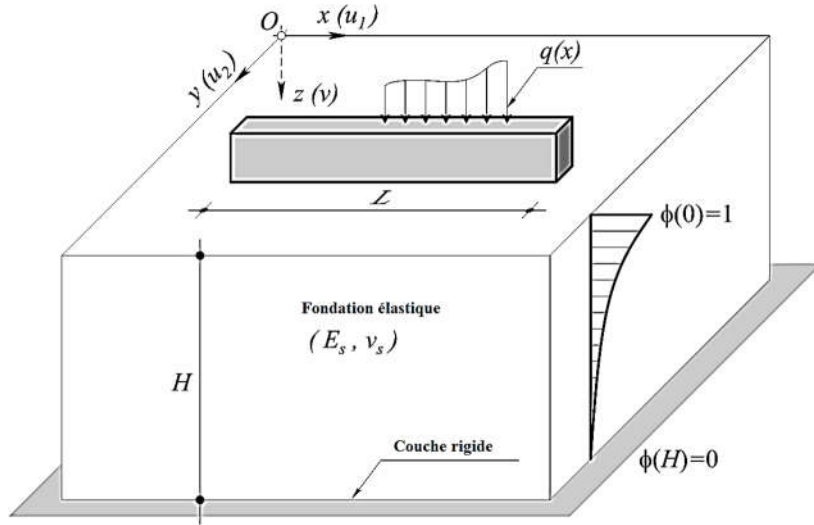


Figure II.10 Modèle de fondation de Vlasov.

Ensuite, en utilisant le principe de travail virtuel, la fonction de réponse pour ce modèle est obtenue et décrite comme suit :

$$R = K_w w_0 + 2t \frac{d^2}{dx^2} w_0 \quad (\text{II.21a})$$

$$\begin{aligned} K_w &= \frac{E_0}{(1 - \nu_0)^2} \int_0^h \left(\frac{dh}{dz} \right)^2 dz, \\ t &= \frac{E_0}{4(1 - \nu_0)} \int_0^h h^2 dz, \\ E_0 &= \frac{E}{(1 - \nu)^2} \end{aligned} \quad (\text{II.21b})$$

II.2.3.2 Fondation de Reissner

Selon ce modèle, la relation pression–flexion à l'interface entre la dalle de fondation et le sol de fondation est obtenue par l'intrusion d'une couche de fondation sous la dalle [129]. Ceci est basé sur les hypothèses suivantes :

Les contraintes planes dans la couche de fondation sont négligeables,

Les déplacements horizontaux sur les surfaces supérieure et inférieure de la couche de fondation sont nuls.

La relation pression–déflexion est donnée par

$$C_1 w_0 - C_2 \nabla^2 w_0 = R - \frac{C_2}{4C_1} \nabla^2 R \quad (\text{II.22})$$

Où w est le déplacement de la surface de la fondation, p est une charge latérale répartie agissant sur la surface de la fondation; $C_1 = E / H$; $C_2 = HG / 3$; E , G sont les constantes élastiques du matériau de fondation et H est l'épaisseur de la couche de fondation.

II.2.4 Modélisation avancée

II.2.4.1 Fondation variables de Pasternak / Winkler

La distribution des couches de sol n'est pas uniforme d'un point à un autre. Cela signifie que le module de Winkler est variable et n'est pas fixé sur la longueur d'une structure sous forme de plaque ou de poutre.

Les études Pradhan et Murmu [148], Sobhy [149], Beldjelili *et al.* [150], Attia *et al.* [151] ont réussi à proposer une variation du module de Winkler. Ces études suggèrent trois formulation théoriques typiques : linéaire, parabolique et sinusoïdale, comme suit (Figure II.11) :

$$K_w(x) = \frac{J_1 D_i}{a^4} \begin{cases} 1 + \zeta \frac{x}{a} & \text{Linéaire} \\ 1 + \zeta \left(\frac{x}{a}\right)^2 & \text{Parabolique} \\ 1 + \zeta \sin\left(\frac{x}{a}\right) & \text{sinusoïdale} \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

Où J_1 est une constante et ζ est un paramètre à étudier. K_s est la rigidité de base de la couche de cisaillement. Lorsque cela ζ est égal à zéro, la fondation élastique devient la fondation uniforme de Pasternak et si la rigidité de la couche de cisaillement est négligée, la fondation de Pasternak devient la Fondation Winkler.

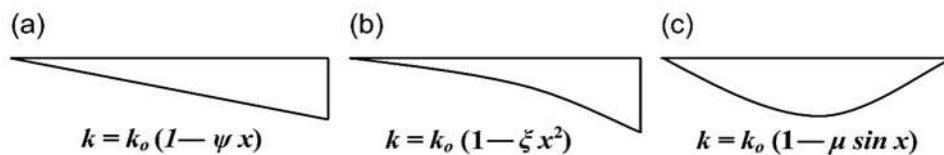


Figure II.11 Diverses répartitions de la fondation élastique de Winkler dans la direction axiale :

(a) type linéaire, (b) type parabolique et (c) type sinusoïdal.

II.2.4.2 Fondation de viscoélastique

Les modèles mécaniques représentent les propriétés rhéologiques du squelette du sol par une combinaison d'éléments élastiques, visqueux et plastiques. Ces modèles sont généralement formés par une combinaison de ressort et de dashpot en série (par exemple, le modèle Maxwell ; illustré à la Figure II.12a) ou en parallèle (par exemple, le modèle de Kelvin ; illustré à la Figure

II.12b). Dans le modèle de Shvedov, l'élément élastique est connecté en série avec l'élément visqueux, puis en parallèle avec l'élément en plastique de St. Venant [152].

Le concept de fondation de Pasternak est étendu aux cas de déformations viscoélastiques. Ceci est réalisé en ajoutant des éléments visqueux linéaires aux éléments élastiques du modèle de fondation en parallèle et/ou en série.

En procédant de cette manière, il est possible de créer un certain nombre de modèles qui dépendront du comportement de base attendu.

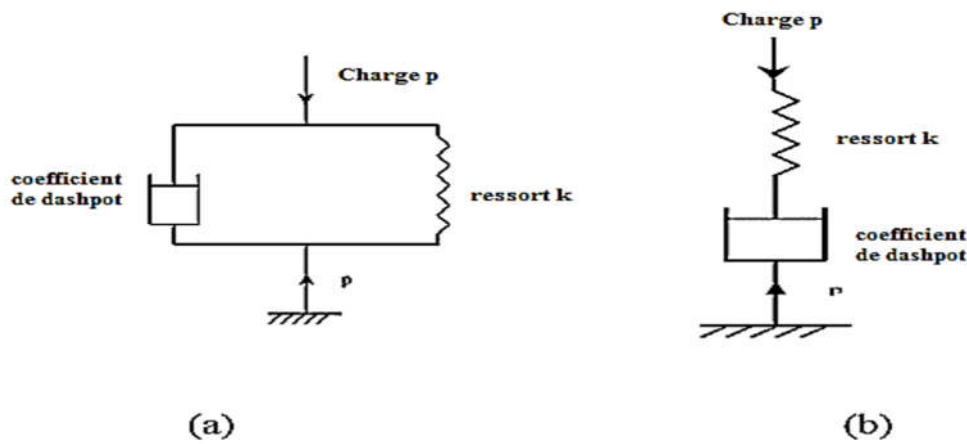


Figure II.12 Fondations de viscoélasticité : (a) type Maxwell, (b) type Kelvin.

La forme la plus simple d'un milieu élastique est représentée par un seul coefficient de réaction sous-jacente, à savoir la fondation élastique de Winkler. Ce modèle ne permet pas d'assurer la continuité de la fondation en raison de ressorts séparés [10]. L'Amortissement représente une partie de l'énergie de déformation transversale sera irrécupérable [153].

Ainsi, la structure incluant le modèle viscoélastique est plus efficace, notamment en ce qui concerne le comportement au fluage [154]. Ainsi, dans cette étude, la surface inférieure de la structure est en contact permanent avec une fondation visco-Pasternak comprenant trois paramètres de milieu distincts montrés dans la Figure II.13.

Selon la réaction de la fondation visco-Pasternak sur structure, on peut obtenir la charge constituée de charges normales, de cisaillement transversal et d'amortissement [155] :

$$R = K_w w_0 + K_p \nabla^2 w_0 + C_d \frac{\partial w_0}{\partial t} \quad (\text{II.24})$$

K_w , K_p et C_d indiquent la constante du ressort, le paramètre de la couche de cisaillement et la constante d'amortissement.

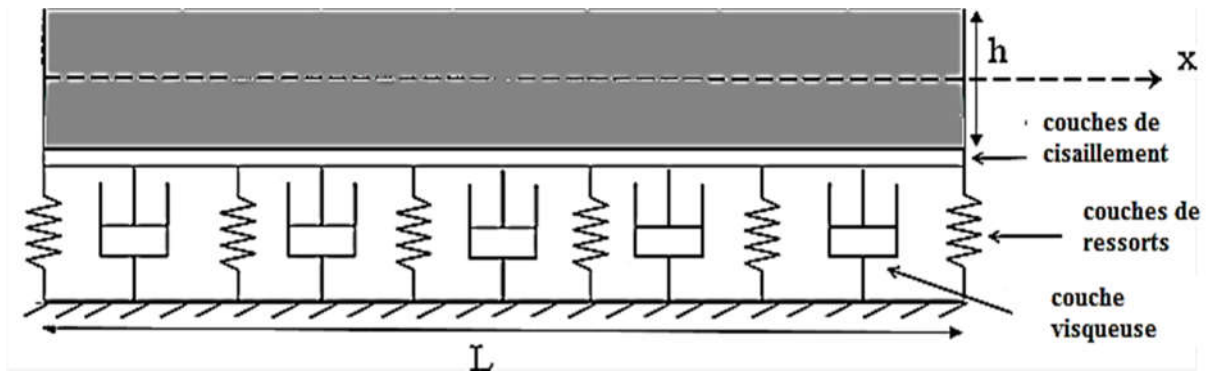


Figure II.13 Géométrie d'une structure reposant sur une fondation viscoélastique.

II.3 Conclusion

Dans ce chapitre, une partie de la recherche bibliographique sur la modélisation des structures reposant sur une fondation élastiques a été effectuée.

Différentes théories, pour modéliser les plaques, sont présentées ; ce sont des approches monocouches, des théories en zigzag et la formulation unifiée de Carrera.

Nous avons observé que les théories monocouches et la formulation Carrera unifiée sont valables pour les structures FGM.

Nous avons également présenté une bibliographie de recherche sur différents modèles de fondations pour modéliser le sol. On remarque que peu de recherches et de travaux ont été effectués sur les structures de type FGM reposant sur des modèles de fondation avancés.

Le comportement mécanique des structures faites de matériaux à gradient de propriétés reposant sur des modèles avancés ou améliorés de fondations utilisant une théorie d'ordre supérieur sera clarifié dans les chapitres suivants.

**Chapitre III : Analyse des vibrations
libres des plaques FG reposant sur
fondation élastique non linéaire**

III.1 Introduction

Comme première étude, nous allons commencer par analyser l'effet de la fondation élastique non linéaire sur la vibration libre des plaques à gradient de propriété (FGM) en utilisant une théorie d'ordre supérieur.

L'intégrale indéterminée est introduite dans les champs de déplacement de la théorie des déformations de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), il est permis de réduire le nombre de cinq inconnues à quatre seulement. La théorie HSDT actuelle a quatre inconnues ne nécessitent pas le facteur de correction par rapport à aux théories de déformation par cisaillement.

Les fondations élastiques sont de type Winkler-Pasternak. La couche de Winkler, dont le coefficient K_w a été exprimé, est supposée varier le long de la longueur (a) des plaques en FGM. Cette variabilité de la couche de ressort prend trois types : linéaire, sinusoïdal et parabolique. La couche de cisaillement K_p n'est pas variable, elle est constante sur toute la longueur de la plaque. La Figure III.1 montre la géométrie de l'ensemble plaque et fondation.

Dans ce chapitre, la formulation théorique de vibrations libres de plaques en FGM reposant sur fondations élastiques non linéaire sera développée ainsi que la partie de validation et résultats de la méthode actuelle.

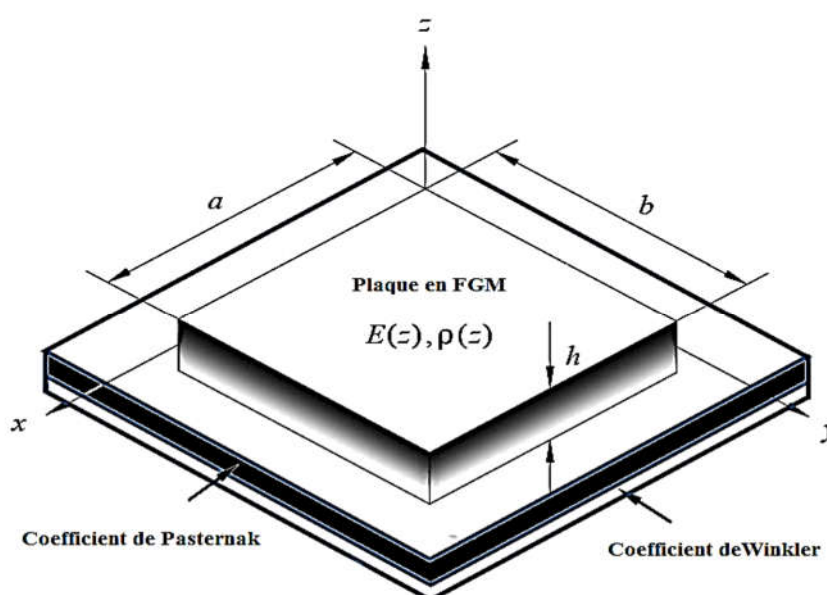


Figure III.1 Plaque rectangulaire à gradient de propriétés reposant sur la fondation Winkler-Pasternak.

III.2 Formulation théorique

III.2.1 Géométrie et propriétés des matériaux de la plaque en FGM

Dans cet article, les configurations de la plaque à gradient de propriétés sont les suivantes : (a) longueur, (b) largeur et épaisseur uniforme (h), dans le système de coordonnées (x, y, z).

Les propriétés matérielles effectives de plaques de caractéristiques fonctionnels telles que le module de Young E et la masse volumique ρ sont considérées comme variables progressivement à travers l'épaisseur selon une distribution de la loi de puissance, donnée par:

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (\text{III.1a})$$

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^P \quad (\text{III.1b})$$

Où,

(E_c, ρ_c) et (E_m, ρ_m) sont les propriétés correspondantes à la céramique et au métal, respectivement.

P est l'exposant de loi de puissance qui définit la gradation des propriétés du matériau dans la direction de l'épaisseur.

Le coefficient de Poisson ν est considéré constant.

III.2.2. Fondation élastique

Les plaques FG sont supposées reposer sur fondation élastique à deux paramètres. Le paramètre de Winkler est la modélisation avec des ressorts. Le deuxième paramètre est présenté à partir de la couche de cisaillement de Pasternak, qui est interconnectée avec la couche de Winkler, donnée par :

$$R(x) = K_w(x)w - K_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III.2})$$

Où, $R(x)$ est appelée la réaction de la base élastique.

$K_w(x)$ est le paramètre de Winkler variable suivant une seule direction x .

$$K_w(x) = \frac{J_1 D_i}{a^4} \begin{cases} 1 + \zeta \frac{x}{a} & \text{Linéaire} \\ 1 + \zeta \left(\frac{x}{a}\right)^2 & \text{Parabolique} \\ 1 + \zeta \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) & \text{Sinusoidale} \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Où, J_1 est une constante et ζ est un paramètre variable.

K_w est la rigidité de base de la couche de cisaillement.

Lorsque K_w est égal à zéro, la fondation élastique devient la fondation uniforme de Pasternak et si la rigidité de la couche de cisaillement est négligée, la fondation de Pasternak devient la fondation de Winkler.

III.2.3. Cinématique et équations constitutives

Sur la base de la théorie des plaques épaisses, l'hypothèse de base du champ de déplacement de la théorie du cisaillement d'ordre supérieur peut être décrite par cinq variables, comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x(x, y, t), \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y(x, y, t), \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Où,

u, v, w, φ_x et φ_y sont cinq déplacements inconnus du plan médian de la plaque.

$f(z)$ décrit une fonction de forme représentant la variation des déformations et des contraintes de cisaillement transversal dans l'épaisseur. En considérant que $\varphi_x = \int \theta(x, y, t) dx$ et $\varphi_y = \int \theta(x, y, t) dy$, le déplacement du modèle actuel peut être exprimé sous une forme plus simple, comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx, \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy, \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

La théorie actuelle de la déformation d'ordre supérieur est obtenue en définissant :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{III.6})$$

Selon les champs de déplacement de la théorie de la déformation en cisaillement élevé, les déformations non nulles peuvent être données comme suit :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{pmatrix} + f(z) \begin{pmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{pmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

Où,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}, \quad (\text{III.8a})$$

$$\begin{pmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{pmatrix}, \quad (\text{III.8b})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix}, \text{ and } g(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \quad (\text{III.8c})$$

Les intégrales non définies dans les équations ci-dessous doivent être résolues par une méthode de type Navier et peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx &= A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial x}, & \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy &= B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial x}, \\ \int \theta dx &= A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, & \int \theta dy &= B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Où les coefficients A' et B' sont considérés en fonction du type de solution utilisée, dans ce cas la méthode utilisée est celle de Navier.

Par conséquent, A' , B' , k_1 et k_2 sont exprimés comme suit :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (\text{III.10})$$

Où α et β seront définis ultérieurement dans l'équation (III. 25).

Les relations de contrainte-déformation pour la plaque FGM sont données :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

Où,

$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \text{et } \tau_{xz})$ sont les composantes de contrainte.

$(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}, \gamma_{xy} \text{ et } \gamma_{xy})$ sont les composantes de déformation.

Les constantes élastiques sont définies comme :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2}, & Q_{11} &= Q_{22} \\ Q_{12} &= \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, & Q_{12} &= Q_{21} \\ Q_{44} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, & Q_{44} &= Q_{55} = Q_{66} \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

III.2.4. Équations gouvernantes

Le principe de Hamilton s'applique pour dériver les équations de mouvement de plaques en FG reposant sur une fondation non linéaire ; le principe peut être énoncé sous forme analytique :

$$\int_0^t (\delta U + \delta U_{ef} - \delta K) dt = 0 \quad (\text{III.13})$$

Où,

δ indique une variation

U , U_{ef} , K représentent respectivement l'énergie interne de déformation, l'énergie de déformation des fondations élastiques et l'énergie cinétique de la plaque FG.

III.2.4.1 Énergie de déformation

La variation de l'énergie de déformation de la plaque indiquée par :

$$\delta U = \int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \tau_{xy} + \tau_{yz} \delta \tau_{yz} + \tau_{xz} \delta \tau_{xz}) dV \quad (\text{III.14a})$$

$$= \int_A \left(\begin{aligned} &N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b \\ &+ M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s \\ &+ R_{yz}^s \delta R_{yz}^s + R_{xz}^s \delta R_{xz}^s \end{aligned} \right) dA \quad (\text{III.14b})$$

Où,

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy) \quad (\text{III.15a})$$

$$(R_{xz}^s, R_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g dz \quad (\text{III.15b})$$

III.2.4.2 l'énergie de déformation des fondations élastiques

La variation de l'énergie de déformation des fondations élastiques non linéaire indiquée par

$$\delta U_{ef} = \int_A (K_w w_0 \delta w_0 - K_s \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{d^2 w_0}{dy^2} \right) \delta w) dA \quad (\text{III.16})$$

III.2.4.3 Énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique basée sur la théorie du cisaillement élevée pour la déformation des plaques FG peut être exprimée comme suit :

$$\delta K = \int_V \rho(z) (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dV \quad (\text{III.17a})$$

$$= \int_A \left\{ \begin{array}{l} I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) - I_1 \left(\begin{array}{l} \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \\ + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \end{array} \right) \\ + J_1 \left((k_1 A') \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + (k_2 B') \left(\dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right) \\ + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + K_2 \left(\begin{array}{l} (k_1 A')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) \\ + (k_2 B')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \end{array} \right) \\ - J_2 \left((k_1 A') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \right) + (k_2 B') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right) \end{array} \right\} dA \quad (\text{III.17b})$$

Où,

$$\begin{aligned} (I_0, I_1, I_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) p(z) dz \\ (J_1, J_2, K_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} (f, zf, f^2) p(z) dz \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

En substituant les expressions pour, δu , δu_{ef} et δk des équations. (III.14), (III.16) et III. (17) dans l'équation (III.13) et en intégrant par parties et en collectant les coefficients de (δu_0 , δv_0 , δw_0 et $\delta \theta$).

On obtient les équations suivantes du mouvement de la plaque :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + J_1 k_1 A' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\ \delta v_0 : \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + J_1 k_2 B' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\ \delta w_0 : \quad \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + K_w(x) w_0 - K_s \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{d^2 w_0}{dy^2} \right) &= I_0 \ddot{w}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \\
 \delta \theta_0 : & -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial R_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial R_{yz}^s}{\partial y} \\
 & = -J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \\
 & + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{III.19}$$

En substituant l'équation (III.7) dans l'équation (III.11) et en intégrant suivant l'épaisseur de la plaque, les contraintes résultantes sont présentées comme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{66} & 0 & B_{21} & B_{22} & 0 & D_{21} & D_{66} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 & D_{21}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & D_{66}^s \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ B_{21}^s & B_{22}^s & 0 & D_{21}^s & D_{22}^s & 0 & H_{21}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \\ k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \tag{III.20a}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{xz}^s \\ R_{yz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \tag{III.20b}$$

De plus, les composants de rigidité sont donnés en tant que

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} \left(1, z, z^2, f(z), z f(z), f(z)^2 \right) dz \tag{III.21}$$

$$\left(A_{22} \quad B_{22} \quad D_{22} \quad B_{22}^s \quad D_{22}^s \quad H_{22}^s \right) = \left(A_{11} \quad B_{11} \quad D_{11} \quad B_{11}^s \quad D_{11}^s \quad H_{11}^s \right)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{44} [g(z)]^2 dz$$

III.2.5. Equations de mouvement en termes de déplacements

En substituant l'équation (III.20) dans l'équation (III.19), les équations de mouvement de la théorie présentée peuvent être réécrites en termes de déplacements (δu_0 , δv_0 , δw_0 et $\delta \theta$) comme suit :

$$\begin{aligned}
 & A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} v_0 + (A_{11} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{11} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_0 \\
 & + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{122} \theta + (B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2) d_1 \theta = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_1 \ddot{w}_0 \\
 & + J_1 k_1 A' d_1 \ddot{\theta}
 \end{aligned} \tag{III.22a}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 - B_{22} d_{222} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_0 \\
 & + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{112} \theta + (B_{22}^s k_2 + B_{12}^s k_1) d_2 \theta = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 d_2 \ddot{w}_0 \\
 & + J_1 k_2 B' d_2 \ddot{\theta}
 \end{aligned} \tag{III.22b}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 + B_{22} d_{222} v_0 \\
 & - D_{11} d_{222} w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_0 - D_{22} d_{2222} w_0 - K_w w_0 \\
 & + K_s (d_{11} w_0 + d_{22} w_0) + (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2) d_{11} \theta + 2(D_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{1122} \theta \\
 & + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2) d_{22} \theta = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 (d_1 \ddot{u}_0 + d_2 \ddot{v}_0) - I_2 (d_{11} \ddot{w}_0 + d_{22} \ddot{w}_0) \\
 & + J_2 (A' k_1 d_{11} \ddot{\theta} + B' k_2 d_{22} \ddot{\theta})
 \end{aligned} \tag{III.22c}$$

$$\begin{aligned}
 & (-B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2) d_1 u_0 - (B_{66}^s (A' k_1 + B' k_2)) d_{122} u_0 - (B_{66}^s (A' k_1 + B' k_2)) d_{112} v_0 \\
 & - (B_{12}^s k_1 + B_{22}^s k_2) d_2 v_0 - (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2) d_{11} w_0 + 2(D_{66}^s (A' k_1 + B' k_2)) d_{1122} w_0 \\
 & + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2) d_{22} w_0 - H_{11}^s k_1^2 \theta - H_{12}^s k_2^2 \theta - 2H_{12}^s k_1 k_2 \theta - (H_{66}^s (A' k_1 + B' k_2)^2) d_{1122} \theta \\
 & + A_{44}^s (B' k_2)^2 d_{22} \theta + A_{55}^s (A' k_1)^2 d_{11} \theta = -J_1 (A' k_1 d_1 \ddot{u}_0 + B' k_2 d_2 \ddot{v}_0) \\
 & + J_2 (A' k_1 d_{11} \ddot{w}_0 + B' k_2 d_{22} \ddot{w}_0) - K_2 \left((A' k_1)^2 d_{11} \ddot{\theta} + (B' k_2)^2 d_{22} \ddot{\theta} \right)
 \end{aligned} \tag{III.22d}$$

Où,

d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les différentiels suivants les opérateurs

$$\begin{aligned}
 d_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x_i}, \\
 d_{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \\
 d_{ij} &= \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \\
 d_{ij} &= \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}
 \end{aligned} \tag{III.23}$$

III.2.6. Solutions analytiques

La solution analytique est considérée pour la vibration libre des plaques FG reposant sur une fondation élastique non linéaire utilisant la série de Fourier. Le champ de déplacement peut être supposé

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega t} \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ X_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \tag{III.24}$$

Et

$$\alpha = m\pi/a, \quad \beta = n\pi/b \tag{III.25}$$

Où,

$i = \sqrt{-1}$ et ω est la fréquence naturelle.

U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} , X_{mn} sont les coefficients de déplacement maximum inconnus.

En substituant l'équation (III.24) en l'équation (III.22), le problème suivant est obtenu

$$\left(\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{41} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ X \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.26})$$

Où,

$$S_{11} = -\left(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2\right),$$

$$S_{12} = -\alpha\beta\left(A_{12} + A_{66}\right),$$

$$S_{13} = \alpha\left(B_{11}\alpha^2 + B_{12}\beta^2 + 2B_{66}\beta^2\right),$$

$$S_{14} = \alpha\left(k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s - \left(k_1 A' + k_2 B'\right) B_{66}^s \beta^2\right),$$

$$S_{22} = -\left(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2\right),$$

$$S_{23} = \beta\left(B_{22}\beta^2 + B_{12}\alpha^2 + 2B_{66}\alpha^2\right),$$

$$S_{24} = \beta\left(k_2 B_{22}^s + k_1 B_{12}^s - \left(k_1 A' + k_2 B'\right) B_{66}^s \alpha^2\right),$$

$$S_{33} = -\left(D_{11}\alpha^4 + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4\right) - \bar{K}_W - K_P(\alpha^2 + \beta^2) \quad (\text{III.27})$$

$$S_{34} = -k_1\left(D_{11}^s\alpha^2 + D_{12}^s\beta^2\right) + 2\left(k_1 A' + k_2 B'\right) D_{66}^s \alpha^2 \beta^2 - k_2\left(D_{22}^s\beta^2 + D_{12}^s\alpha^2\right)$$

$$S_{44} = -k_1\left(H_{11}^s k_1 + H_{12}^s k_2\right) - \left(k_1 A' + k_2 B'\right)^2 H_{66}^s \alpha^2 \beta^2 - k_2\left(H_{12}^s k_1 + H_{22}^s k_2\right)$$

$$- \left(k_1 A'\right)^2 A_{55}^s \alpha^2 - \left(k_2 B'\right)^2 A_{44}^s \beta^2$$

et,

$$m_{11} = -I_0,$$

$$m_{13} = \alpha I_1,$$

$$m_{14} = -J_1 k_1 A' \alpha,$$

$$m_{22} = -I_0, \quad ,$$

$$m_{23} = \beta I_1$$

$$m_{24} = -J_1 k_2 B' \beta,$$

$$m_{33} = -I_0 - I_2 (\alpha^2 + \beta^2) \quad ,$$

$$m_{34} = J_2 (A' k_1 \alpha^2 + B' k_2 \beta^2),$$

$$m_{44} = -K_2 \left((A' k_1)^2 \alpha^2 + (B' k_2)^2 \beta^2 \right)$$

III.3 Analyse de résultats

Ici, dans cette étude de la vibration libre des plaques à gradient de propriétés sans ou reposant sur un support élastique variable, divers exemples numériques sont réalisés pour valider les résultats du présent modèle numérique.

Un type de plaques de FGM Al / Al₂O₃ est utilisé dans cette étude. Les propriétés matérielles des plaques P-FGM sont présentées dans le Tableau III.1.

Tableau III.1 Propriétés matérielles des plaques à gradient de propriétés

Matériaux	Propriétés		
	E (GPa)	ν	ρ (Kg / m ³)
Aluminium (Al)	70	0.3	2702
Alumine (Al ₂ O ₃)	380	0.3	3800

Les paramètres non dimensionnels utilisés sont

$$\begin{aligned}
 D_c &= \frac{E_c h^3}{12(1-2\nu^2)}, & D_m &= \frac{E_m h^3}{12(1-2\nu^2)} \\
 \beta &= \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D_c}}, & \tilde{\omega} &= \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}, \\
 \vartheta &= \omega (a^2/h) \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}, & K_w &= \frac{k_s D_i}{a^2}, \quad i = m, c
 \end{aligned} \tag{III.28}$$

III.3.1 Vibration libre des plaques isotropes

Dans le tableau III.2, et comme premiers exemples, nous commençons à vérifier l'efficacité et la convergence de la méthode actuelle pour des plaques homogènes simplement appuyées avec des rapports différents de (h/a) . Les huit premières fréquences non dimensionnelles sont présentées pour différents rapports épaisseur/longueur (a/h) . Les présents résultats sont comparés aux autres résultats trouvés dans la littérature.

Les résultats rapportés par Leissa [156] étaient basés sur une solution exacte tridimensionnelle, Zhou et al. [157] étaient basés sur une méthode de Ritz tridimensionnelle avec des polynômes de Chebyshev, Meftah et al. [159] utilisant une solution de type analytique de type fermé exacte, Akavci [37] étaient basés sur les théories d'ordre supérieur quasi-3D et 2D et les HSDT de Mantari et al. [158]. Les résultats de Zaoui *et al.* [160] utilisant les solutions analytiques, basées sur la théorie de la déformation par cisaillement 2D et quasi 3D. Comme on peut le voir dans les résultats actuels.

Les fréquences propres des plaques carrées isotropes sont prédites avec une efficacité optimale, non pas pour les plaques minces isotropes, mais également pour les plaques épaisses. Le travail actuel est en bon accord avec les autres méthodes.

III.3.2 Vibration libre des plaques homogènes et FG reposant sur des fondations élastiques

Dans la deuxième partie de cette étude, le tableau III.3 montre l'effet de Pasternak-Winkler sur les fréquences non dimensionnelles des plaques FG avec de nombreuses valeurs de fondation élastique à deux paramètres (k_w, k_s) , le rapport épaisseur sur longueur (h/a) et une fraction de volume avec cinq indices $p = (1, 0.5, 1, 2 \text{ et } 5)$.

Les résultats actuels sont comparés à ceux de Hasani Baferani *et al.* [156], Zaoui *et al.* [157], Benahmed *et al.* [158] et Shahsavari *et al.* [159] utilisant une théorie de la déformation de cisaillement du troisième ordre. À partir des résultats, nous pouvons observer que les fréquences propres diminuent avec l'augmentation des indices de la loi de puissance avec ou sans base élastique et que la théorie actuelle est en bon accord avec Zaoui *et al.* [157] en partie 2D à deux dimensions. Il y a peu de différence entre cette théorie et les autres.

Tableau III.2 Fréquences fondamentales non dimensionnelles pour les plaques carrées isotropes simplement supportées.

a/h	Source	Mode						
		1,1	1,2	2,1	2,2	3,1	1,3	3,2
1000	Leissa [160]	19.7392	49.3480	49.3480	78.9568	98.6960	98.6960	128.3021
	Zhou <i>et al.</i> [161]	19.7115	49.3470	49.3470	78.9528	98.6911	98.6911	128.3048
	Akavci [37]	19.7391	49.3476	49.3476	78.9557	98.6943	98.6943	128.3020
	Mantari <i>et al.</i> [162]	19.7391	49.3475	49.3475	78.9557	98.6942	98.6942	128.3018
	Meftah <i>et al.</i> [163]	19.7391	49.3476	49.3476	78.9557	98.6943	98.6943	128.3019
	Zaoui <i>et al.</i> [157] (2D)	19.7391	49.3476	49.3476	78.9557	98.6942	98.6942	128.3018
	Zaoui <i>et al.</i> [157] (quasi-3D)	19.7712	49.4278	49.4278	79.0841	98.8548	98.8548	128.5106
	Présente étude	19.7391	49.3476	49.3476	78.9557	98.6942	98.6942	128.3018
100	Liu et Liew [164]	19.7319	49.3027	49.3027	78.8410	98.5150	98.5150	127.9993
	Nagino <i>et al.</i> [165]	19.7320	49.3050	49.3050	78.8460	98.5250	98.5250	128.0100
	Akavci [37]	19.7322	49.3045	49.3045	78.8456	98.5223	98.5223	128.0120
	Mantari <i>et al.</i> [162]	19.7320	49.3032	49.3032	78.8422	98.5170	98.5170	128.0025
	Meftah <i>et al.</i> [163]	19.7321	49.304	49.304	78.8442	98.5202	98.5202	128.008
	Zaoui <i>et al.</i> [157] (2D)	19.732	49.3032	49.3032	78.8422	98.5171	98.5171	128.0028
	Zaoui <i>et al.</i> [157] (quasi-3D)	19.7644	49.3853	49.3853	78.9754	98.685	98.685	128.2239
	Présente étude	19.7320	49.3032	49.3032	78.8421	98.5169	98.5169	128.0024
10	Liu et Liew [164]	19.0584	45.4478	45.4478	69.7167	84.9264	84.9264	106.5154
	Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> [166]	19.0653	45.4869	45.4869	69.8093	85.0646	85.0646	106.7350
	Akavci [37]	19.0850	45.5957	45.5957	70.0595	85.4315	85.4315	107.3040
	Mantari <i>et al.</i> [162]	19.0656	45.4890	45.4890	69.8146	85.0729	85.0729	106.7491
	Meftah <i>et al.</i> [163]	19.0775	45.5548	45.5548	69.9664	85.2958	85.2958	107.0953
	Zaoui <i>et al.</i> [157] (2D)	19.0661	45.4917	45.4917	69.8213	85.0829	85.0829	106.7652
	Zaoui <i>et al.</i> [157] (quasi-3D)	19.1248	45.7152	45.7152	70.2709	85.7067	85.7067	107.6744
	Présente étude	19.0653	45.4869	45.4869	69.8093	85.0646	85.0646	106.7350
5	Shufrin et Eisenberger [167]	17.4524	38.1884	38.1884	55.2539	65.3130	65.3130	78.9864
	Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> [166]	17.4523	38.1883	38.1883	55.2543	65.3135	65.3135	78.9865
	Akavci [37]	17.5149	38.4722	38.4722	55.8358	66.1207	66.1207	80.1637
	Mantari <i>et al.</i> [162]	17.4537	38.1965	38.1965	55.2748	65.3446	65.3446	79.0371
	Présente étude	17.4523	38.1883	38.1883	55.2543	65.3135	65.3135	78.9865

Tableau III.3 Comparaison de la base élastique d'influence sur les fréquences propres non dimensionnelles pour les plaques carrées isotropes et à gradient de propriétés, avec différentes puissances d'indice

(k_w, k_p)	h/a	Source	P				
			0	0.5	1	2	5
(0,0)	0.05	Hasani Baferani <i>et al.</i> [156]	0.0291	0.0249	0.0227	0.0209	0.0197
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (2D)	0.0291	0.0246	0.0222	0.0202	0.0191
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (quasi-3D)	0.0291	0.0248	0.0226	0.0207	0.0195
		Benahmed <i>et al.</i> [158]	0.0291	–	0.0226	0.0207	–
		Shahsavari <i>et al.</i> [159]	0.0291	0.0248	0.0226	0.0206	0.0195
		Présente étude	0.0291	0.0246	0.0222	0.0202	0.0191
	0.1	Hasani Baferani <i>et al.</i> [156]	0.1134	0.0975	0.0891	0.0819	0.0767
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (2D)	0.1134	0.0963	0.0868	0.0788	0.074
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (quasi-3D)	0.1137	0.0972	0.0883	0.0807	0.0756
		Benahmed <i>et al.</i> [158]	0.1136	–	0.0883	0.0807	–
		Shahsavari <i>et al.</i> [159]	0.1135	0.097	0.0882	0.0806	0.0755
		Présente étude	0.1134	0.0963	0.0868	0.0788	0.0740
	0.15	Hasani Baferani <i>et al.</i> [156]	0.2454	0.2121	0.1939	0.1778	0.1648
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (2D)	0.2452	0.209	0.1885	0.1706	0.1588
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (quasi-3D)	0.2464	0.2112	0.1919	0.1749	0.1623
		Benahmed <i>et al.</i> [158]	0.2461	–	0.1918	0.1748	–
		Shahsavari <i>et al.</i> [159]	0.2459	0.2108	0.1916	0.1746	0.1622
		Présente étude	0.2452	0.2090	0.1885	0.1706	0.1588
	0.2	Hasani Baferani <i>et al.</i> [156]	0.4154	0.3606	0.3299	0.3016	0.2765
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (2D)	0.4151	0.3551	0.3205	0.2892	0.2665
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (quasi-3D)	0.4178	0.3593	0.3267	0.2968	0.2725
		Benahmed <i>et al.</i> [158]	0.4174	–	0.3264	0.2965	–
		Shahsavari <i>et al.</i> [159]	0.4168	0.3586	0.326	0.2961	0.2722
		Présente étude	0.4151	0.3551	0.3205	0.2892	0.2667
(0,100)	0.05	Hasani Baferani <i>et al.</i> [156]	0.0406	0.0389	0.0382	0.038	0.0381
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (2D)	0.0406	0.0386	0.0378	0.0374	0.0377
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (quasi-3D)	0.0406	0.0387	0.038	0.0376	0.0378
		Benahmed <i>et al.</i> [158]	0.0406	-	0.038	0.0376	-
		Présente étude	0.0406	0.0386	0.0378	0.0374	0.0377
	0.1	Hasani Baferani <i>et al.</i> [156]	0.1599	0.154	0.1517	0.1508	0.1515
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (2D)	0.1597	0.1526	0.1494	0.1478	0.1487
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (quasi-3D)	0.1594	0.1525	0.1497	0.1483	0.1489
		Benahmed <i>et al.</i> [158]	0.1594	-	0.1497	0.1483	-
		Présente étude	0.1597	0.1526	0.1494	0.1478	0.1487
	0.15	Hasani Baferani <i>et al.</i> [156]	0.3515	0.3407	0.3365	0.3351	0.3362
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (2D)	0.3512	0.3369	0.3304	0.3269	0.3286
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (quasi-3D)	0.3494	0.3354	0.3296	0.3266	0.3275
		Benahmed <i>et al.</i> [158]	0.3492	-	0.3295	0.3265	-
		Présente étude	0.3512	0.3369	0.3304	0.3269	0.3286
	0.2	Hasani Baferani <i>et al.</i> [156]	0.608	0.5932	0.5876	0.5861	0.5879
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (2D)	0.6075	0.5857	0.5753	0.5694	0.5722
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (quasi-3D)	0.6015	0.5795	0.5701	0.5652	0.5662
		Benahmed <i>et al.</i> [158]	0.6011	-	0.5699	0.565	-
		Présente étude	0.6075	0.5858	0.5753	0.5695	0.5722

Tableau III.3 Suite.

(k_w, k_s)	h/a	Source	P				
			0	0.5	1	2	5
(100,0)	0.05	Hasani Baferani <i>et al.</i> [156]	0.0298	0.0258	0.0238	0.0221	0.021
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (2D)	0.0298	0.0255	0.0233	0.0214	0.0204
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (quasi-3D)	0.0298	0.0257	0.0236	0.0219	0.0208
		Benahmed <i>et al.</i> [158]	0.0298	–	0.0236	0.0218	–
		Shahsavari <i>et al.</i> [159]	0.0298	0.0257	0.0236	0.0218	0.0208
		Présente étude	0.0298	0.0255	0.0233	0.0214	0.0204
	0.1	Hasani Baferani <i>et al.</i> [156]	0.1162	0.1012	0.0933	0.0867	0.0821
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (2D)	0.1162	0.0999	0.091	0.0836	0.0795
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (quasi-3D)	0.1164	0.1007	0.0924	0.0854	0.0809
		Benahmed <i>et al.</i> [158]	0.1164	–	0.0924	0.0854	–
		Shahsavari <i>et al.</i> [159]	0.1163	0.1006	0.0923	0.0853	0.0809
		Présente étude	0.1162	0.0999	0.0910	0.0836	0.0795
	0.15	Hasani Baferani <i>et al.</i> [156]	0.2519	0.2204	0.2036	0.1889	0.1775
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (2D)	0.2516	0.2173	0.1982	0.1818	0.1715
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (quasi-3D)	0.2526	0.2192	0.2012	0.1856	0.1745
		Benahmed <i>et al.</i> [158]	0.2524	–	0.2011	0.1855	–
		Shahsavari <i>et al.</i> [159]	0.2522	0.219	0.201	0.1855	0.1745
		Présente étude	0.2517	0.2173	0.1982	0.1818	0.1715
	0.2	Hasani Baferani <i>et al.</i> [156]	0.4273	0.3758	0.3476	0.3219	0.2999
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (2D)	0.4269	0.3702	0.3381	0.3097	0.29
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (quasi-3D)	0.429	0.3737	0.3433	0.3161	0.2948
		Benahmed <i>et al.</i> [158]	0.4286	–	0.3431	0.3158	–
		Shahsavari <i>et al.</i> [159]	0.4284	0.3734	0.3431	0.3159	0.295
		Présente étude	0.4269	0.3702	0.3381	0.3097	0.2901
(100,100)	0.05	Hasani Baferani <i>et al.</i> [156]	0.0411	0.0395	0.0388	0.0386	0.0388
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (2D)	0.0411	0.0392	0.0384	0.0381	0.0384
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (quasi-3D)	0.0411	0.0393	0.0386	0.0383	0.0385
		Benahmed <i>et al.</i> [158]	0.0411	–	0.0386	0.0383	–
		Shahsavari <i>et al.</i> [159]	0.0411	0.0393	0.0386	0.0383	0.0385
		Présente étude	0.0411	0.0392	0.0384	0.0381	0.0384
	0.1	Hasani Baferani <i>et al.</i> [156]	0.1619	0.1563	0.1542	0.1535	0.1543
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (2D)	0.1617	0.1549	0.1519	0.1505	0.1515
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (quasi-3D)	0.1614	0.1548	0.1522	0.1509	0.1517
		Benahmed <i>et al.</i> [158]	0.1614	–	0.1521	0.1509	–
		Shahsavari <i>et al.</i> [159]	0.1616	0.1551	0.1525	0.1512	0.1521
		Présente étude	0.1617	0.1549	0.1519	0.1505	0.1515
	0.15	Hasani Baferani <i>et al.</i> [156]	0.356	0.346	0.3422	0.3412	0.3427
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (2D)	0.3557	0.3421	0.3359	0.3329	0.3349
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (quasi-3D)	0.3538	0.3405	0.335	0.3324	0.3337
		Benahmed <i>et al.</i> [158]	0.3537	–	0.3349	0.3323	–
		Shahsavari <i>et al.</i> [159]	0.356	0.346	0.3422	0.3412	0.3427
		Présente étude	0.3557	0.3421	0.3360	0.3329	0.3349
	0.2	Hasani Baferani <i>et al.</i> [156]	0.6162	0.6026	0.5978	0.597	0.5993
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (2D)	0.6156	0.595	0.5852	0.58	0.5833
		Zaoui <i>et al.</i> [157] (quasi-3D)	0.6093	0.5884	0.5797	0.5754	0.577
		Benahmed <i>et al.</i> [158]	0.6089	–	0.5794	0.5752	–
		Shahsavari <i>et al.</i> [159]	0.6137	0.594	0.5856	0.5815	0.5843
		Présente étude	0.6156	0.5950	0.5852	0.5800	0.5834

III.3.3 Vibration libre de plaques homogènes et à gradient de propriétés reposant sur des bases élastiques variables

Afin de vérifier l'intérêt des travaux en cours, dans cette partie, les résultats des vibrations libres des plaques P-FG adossées à des fondations élastiques variables sont examinés avec différents paramètres d'étude tels que l'indice de loi de puissance (p), le rapport épaisseur sur longueur (h/a) et le rapport largeur sur longueur (a/b).

Cette étude est basée sur une comparaison entre différents types de fondations élastiques variables. Les Figures III.2, 3 et 4 montrent la comparaison de l'effet de la fondation élastique (module linéaire, parabolique, sinusoïdal et non variable) sur le comportement vibratoire des plaques FG. Sur la Figure III.2, les fréquences propres non dimensionnelles en termes de (p) diminuent avec l'augmentation des effets de la fondation élastique. On remarque aussi que la raideur constante favorise la diminution des propriétés vibratoires et ce pour différentes valeurs de l'indice de puissance P .

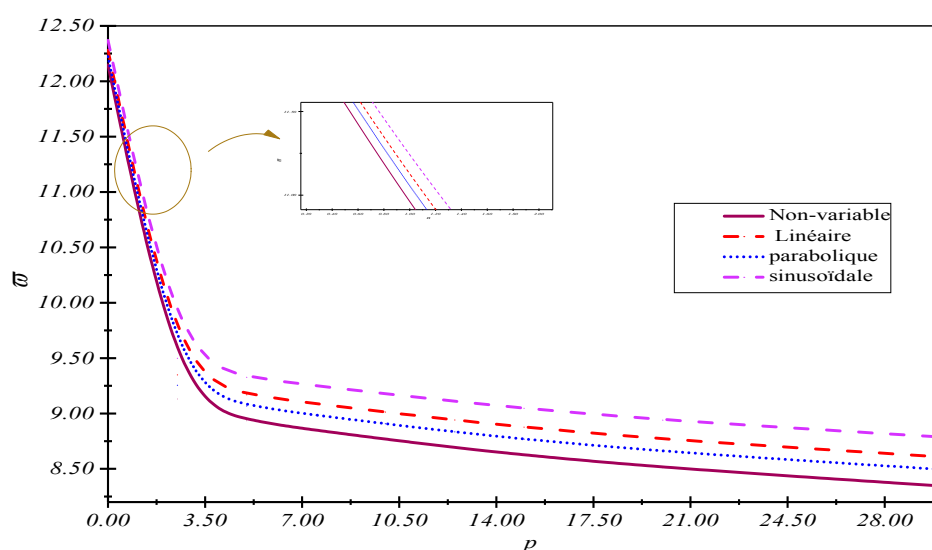


Figure III.2 Effet des différents types de fondations élastiques sur les fréquences non dimensionnelles des plaques en FG carrées. ($a/h = 10$, $kw = 100$, $ks = 10$ et $\zeta = 1$)

Alors que les fréquences non dimensionnelles dans le cas des Figures III.3 et III.4, sont représentées en termes de rapport d'épaisseur (a/h) et de rapport de côté (a/b), ce paramètre vibratoire augmente avec l'augmentation de ces rapports géométriques. La variation sinusoïdale de la raideur donne des valeurs de fréquences plus élevées, alors que la fondation à raideur constante donne les valeurs les plus petites pour les deux cas de Figures.

La figure III.3 montre, aussi, que pour les plaques fortement épaisses ($a/h < 10$); la variation de la fréquence est assez significative ; alors que pour les plaque minces, on remarque bien que la fréquence tend vers la stagnation avec l'augmentation du rapport d'épaisseur a/h .

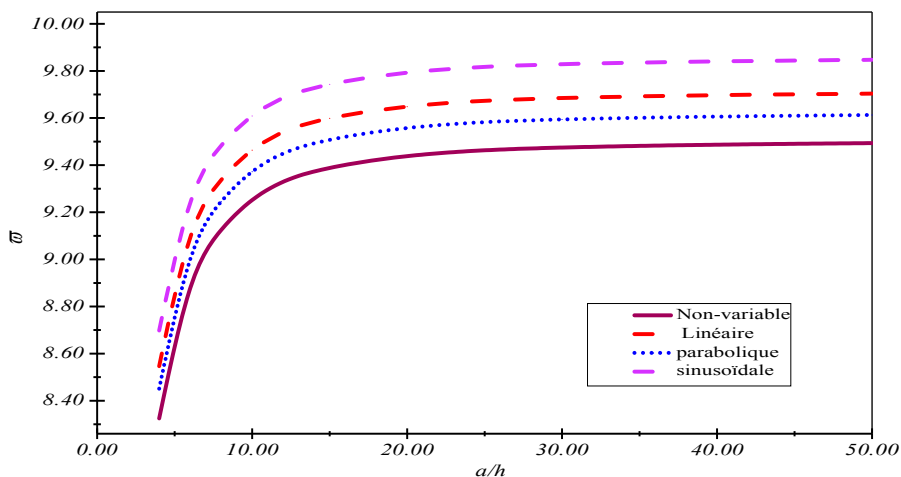


Figure III. 3 Effet des différents types de fondations élastiques sur les fréquences non dimensionnelles des plaques en FG carrées ($p = 2$, $kw = 100$, $ks = 10$ et $\zeta = 1$)

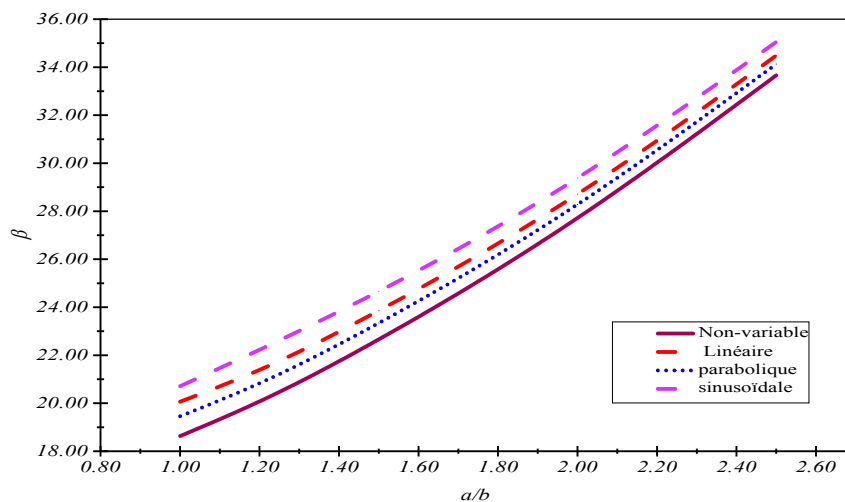
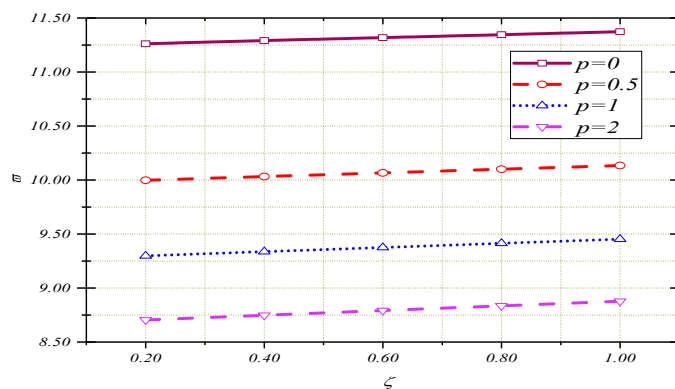


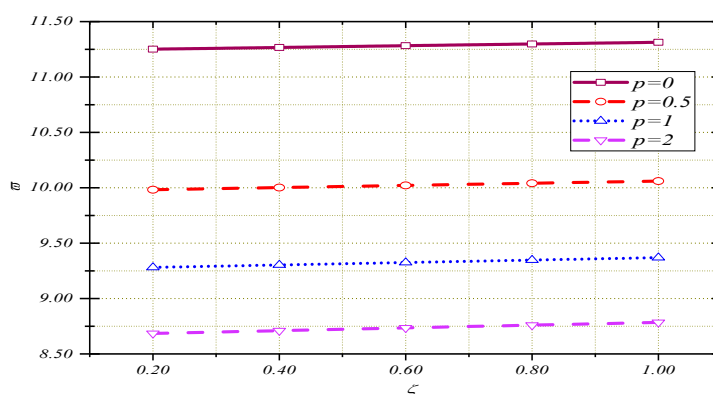
Figure III. 4 Effet des différents types de fondations élastiques sur les fréquences non dimensionnelles des plaques en FG ($p = 2$, $a / h = 10$, $kw = 10^3$, $ks = 10^2$ et $\zeta = 1$)

Les Figures III. 5, 6 et 7 montrent l'influence des paramètres de fondations variables sur les fréquences des plaques FGM en fonction des différents paramètres (p), (h/a) et (a/b). On peut voir que les fréquences augmentent avec l'augmentation du paramètre ζ . Mais cette augmentation n'est pas significative.

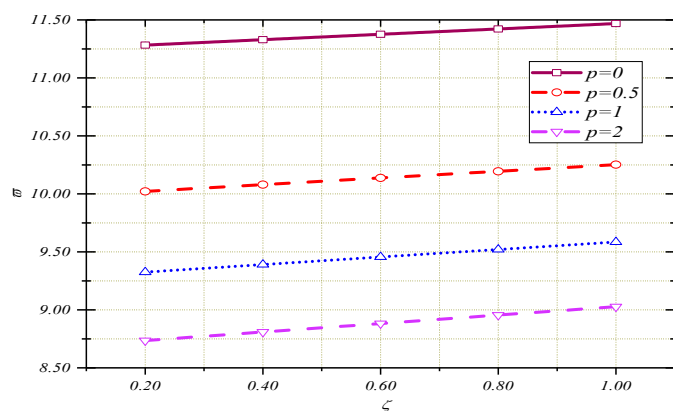
Les remarques déjà faites par d'autres chercheurs sont confirmées ; parmi lesquelles, dans la Figure III.5, on remarque que l'augmentation de l'indice de puissance matérielle p nous amène à des fréquences plus petites ; et ce pour différentes formulations de la fonction vibrationnelle de la raideur.



(a) Variation linéaire



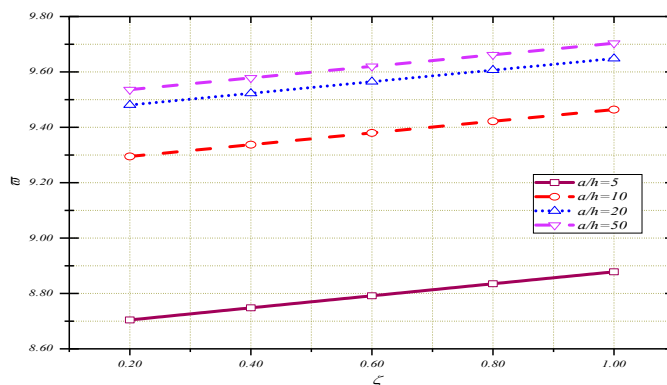
(b) Variation parabolique



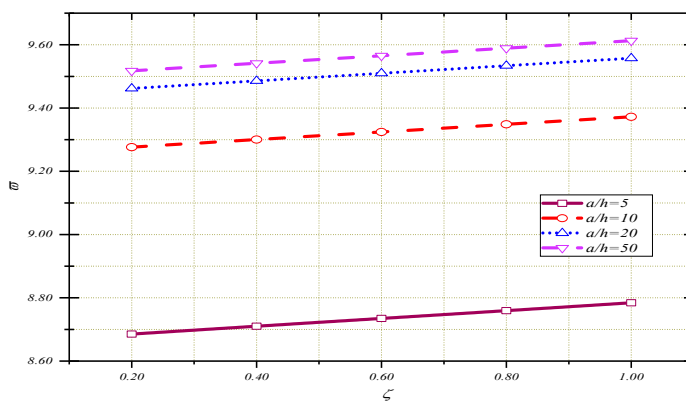
(c) Variation sinusoïdale

Figure III.5 Influence du paramètre ζ de la fondation élastique variable sur les fréquences non dimensionnelles des plaques carrées FG ($a/h = 10$, $k_w = 100$, $k_s = 10$)

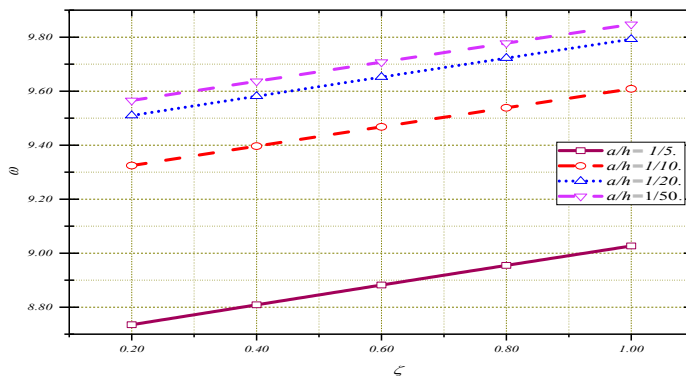
Dans la Figure III.6, l'augmentation du rapport d'épaisseur a/h nous amène à des fréquences plus grande, ceci est valable pour différentes formulations de la fonction vibrationnelle de la raideur. La remarque déjà faite concernant l'atténuation de la différence des fréquences pour les plaque minces est illustrée dans ces Figures puisque les résultats des fréquences pour les rapports d'épaisseurs $a/h = 20$ et $a/h = 50$ sont très proches.



(a) Variation linéaire



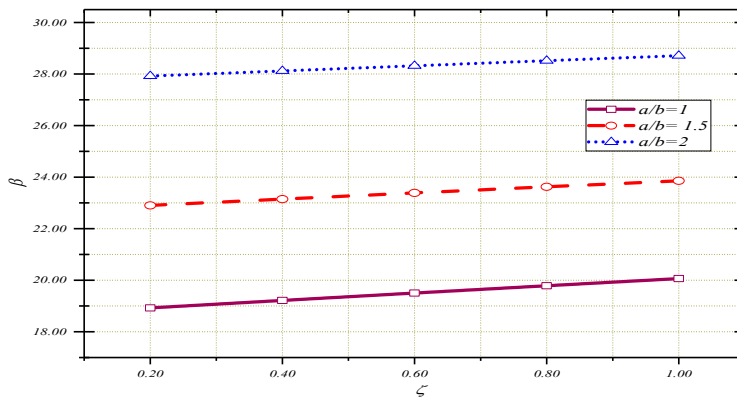
(b) Variation parabolique



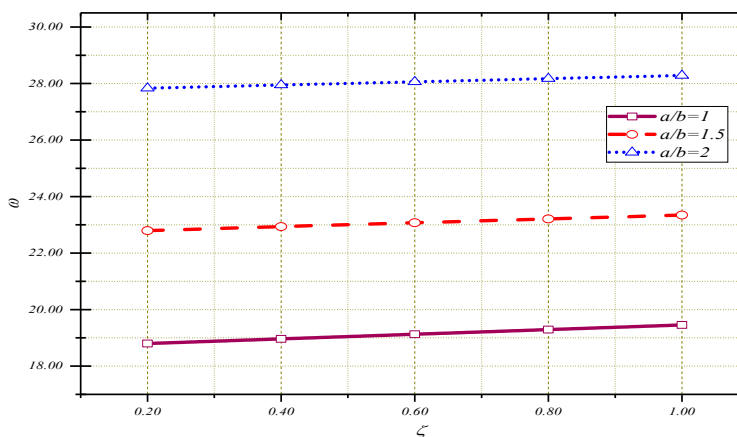
(c) Variation sinusoïdale

Figure III.6 Influence du paramètre ζ de la fondation élastique variable sur les fréquences non dimensionnelles des plaques carrées en FG ($p = 2$, $k_w = 100$, $k_s = 10$).

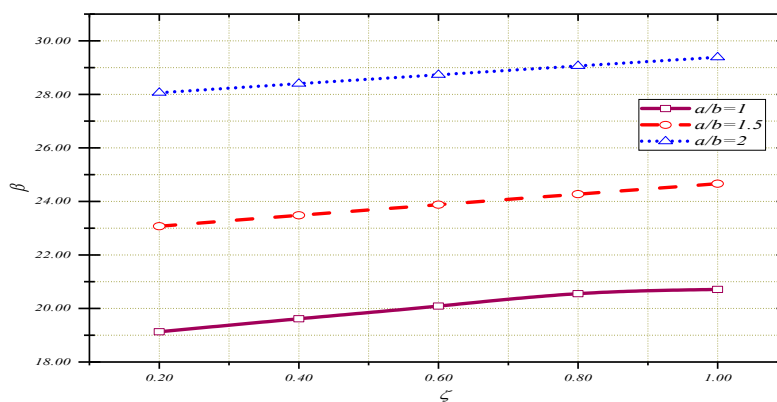
Dans la Figure III.7, d'autant plus que le rapport de côté a/b tend vers le rectangle, nous aurons des fréquences plus grande, ceci est valable pour différentes formulations de la fonction vibrationnelle de la raideur.



(a) Variation linéaire



(b) Variation parabolique



(c) Variation sinusoïdale

Figure III.7 Influence du paramètre ζ de la fondation élastique variable sur les fréquences non dimensionnelles des plaques FG, ($p = 2$, $a / h = 10$ $k_w = 10^3$, $k_s = 10^2$)

Enfin, les travaux effectués de cette partie constituent un artifice prévisionnel du comportement dynamique (vibratoire) des plaques en FGM sur divers types de fondations à raideurs élastiques variables.

III.4 Conclusion

Le développement mathématique opéré pour l'étude de la vibration libre de plaques à gradient de propriétés reposant sur des fondations élastiques à raideur variables a abouti à des résultats intéressants en utilisant une théorie de déformation de cisaillement. La théorie actuelle ne comporte que quatre variables, ce qui signifie que le cheminement utilisé nous fait gagner en termes de temps de calcul. Les fondations élastiques sont supposées avoir deux paramètres ; Le module de Winkler est supposé variable dans la présente étude (linéaire, parabolique et sinusoïdale) en fonction de la longueur des plaques FGM et la couche de cisaillement Pasternak doit être constante.

La validation et l'étude paramétrique de cette méthode ont été faites. L'effet de la variation de la raideur des fondations élastiques sur le comportement dynamique des plaques homogènes et FGM a été étudié, en termes de propriétés des matériaux, des rapports épaisseur sur longueur et de rapport, côté sur longueur, avec succès. A partir de cette méthode on peut prédire la valeur de la fréquence pour différents paramètres a/h , a/b et p lorsque les raideurs élastiques soient variables.

**Chapitre IV : Propagations des ondes
dans les plaques de type FG reposant sur
fondation élastique**

IV.1 Introduction

Dans ce chapitre, l'étude de la propagation des ondes dans des plaques en matériaux à gradient de propriété reposants sur des fondations élastiques de type : Winkler-Pasternak, est traitée en utilisant la théorie de gauchissement.

Comme on l'a déjà évoqué et Contrairement à d'autres théories d'ordre supérieur, le nombre d'inconnues et d'équations gouvernantes de la présente théorie n'est que de quatre variables de déplacement, ce qui est même inférieur à la théorie de cisaillement du premier ordre (FSDT). Il est à signaler que le présent travail introduit un nouveau champ de déplacement à variables intégrales indéterminées.

Les équations de propagation des ondes dans les plaques FG sont dérivées en utilisant le principe des déplacements virtuels. La relation de dispersion analytique de la plaque FG est obtenue en résolvant un problème de valeur propre. Des exemples numériques sélectionnés dans la littérature sont illustrés. La Figure IV.1 illustre le schéma de notre étude ; cette fois ci avec une fondation à raideur constante.

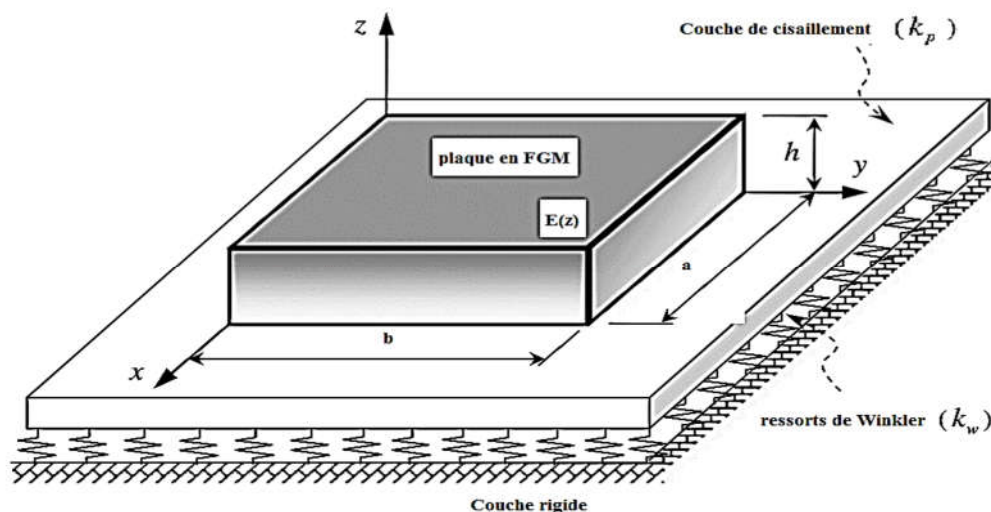


Figure IV. 1 Plaque à gradient de propriétés reposant sur la fondation Winkler-Pasternak.

IV.2 Formulation théorique

IV.2.1 Matériaux et plaques à gradient propriété

On considère une plaque rectangulaire solide de longueur (a), largeur (b) et épaisseur (h) en FGM avec le système de coordonnées illustré à la Figure IV.1. Elle est supposée reposer sur une

fondation élastique de type Winkler – Pasternak avec la rigidité Winkler de k_w et la rigidité au cisaillement de k_p .

La céramique est à la surface supérieure ($z = + h / 2$) de la plaque et le métal est à la surface inférieure ($z = - h / 2$).

Les caractéristiques des matériaux de cette plaque changent en fonction de l'épaisseur de la plaque avec différentes distributions de la loi de puissance et exponentielles des fractions volumiques des constituants des deux matériaux, telles que :

- i. La distribution selon la loi de puissance (P-FGM) :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (\text{IV. 1})$$

- ii. La distribution selon la loi exponentielle (E-FGM) :

$$p(z) = p_m e^{p \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)} \quad (\text{IV. 2})$$

Où p est l'indice de loi de puissance, qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro.

Où P désigne la caractéristique matérielle effective telle que le module de Young, la masse volumique et le coefficient de Poisson ; les indice m et c sont affectés aux composants métalliques et céramiques, respectivement ; et $p \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)$ est l'exposant de la loi exponentielle.

La valeur p égale à zéro indique une plaque entièrement en céramique, alors que lorsque p tend vers l'infini la plaque sera entièrement métallique.

Puisque les coefficients de Poisson des deux matériaux de mixture sont très proches et que la majorité des études prennent ce coefficient comme une constante ; par conséquence on le prend ainsi, vue l'avantage de gagner en matière de temps de calcul.

- i. Distribution selon la loi de puissance :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p,$$

$$p(z) = p_m + (p_c - p_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p, \quad (\text{IV.3a})$$

ii. Distribution selon la loi exponentielle :

$$E(z) = E_m e^{p\left(\frac{1+z}{2} + \frac{z}{h}\right)},$$

$$p(z) = p_m e^{p\left(\frac{1+z}{2} + \frac{z}{h}\right)},$$
(IV.3b)

IV.2.2 Cinématique et équations constitutive

Dans ce chapitre, le champ de déplacement pris est représenté en terme de 4 variables en intégral, et la fonction de gauchissement est prise, cette fois ci, HSDT conventionnel de sorte que le nombre d'inconnues sera réduit.

Le champ de déplacement du HSDT conventionnel est donné par :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y, t)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y, t)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t)$$
(IV.4)

Où,

$u_0, w_0, \phi_x, \phi_y, v_0$ sont cinq déplacements inconnus du plan moyen de la plaque, $f(z)$ indique une fonction de forme représentant la variation des efforts de cisaillement transversaux et des contraintes dans l'épaisseur.

En considérant que $\phi_x = \int \theta(x, y, t) dx$ et $\phi_y = \int \theta(x, y, t) dy$, le champ de déplacement du modèle actuel peut être exprimé sous une forme plus simple à quatre inconnues :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t)$$
(IV.5)

La fonction de forme $f(z)$ est choisie pour satisfaire la nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

Par conséquent, un facteur de correction de cisaillement, généralement utilisé dans les FSDT, n'est pas nécessaire.

Dans cette étude, cette fonction de forme est choisie sur la base de la théorie de la plaque de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) de Reissner [168]. Cette équation est exprimée comme suit :

$$f(z) = \left(\frac{5}{4}z - \frac{5z^3}{3h^2} \right) \quad (\text{IV.6})$$

On peut voir que le champ de déplacement dans l'équation (IV.5) n'introduit que quatre inconnues (u_0, w_0, θ, v_0) .

Les déformations non nulles associées au champ de déplacement dans l'équation. (IV.5) sont :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{pmatrix} + f(z) \begin{pmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{pmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.7})$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.8a})$$

$$\begin{pmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x \partial^2 y} \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.8b})$$

$$\begin{pmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.8c})$$

$$\begin{cases} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{cases} = \begin{cases} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{cases}, \quad (IV.8d)$$

$$g(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z}$$

Les intégrales définies dans les équations (IV.8) doivent être résolues par une méthode de type Navier et peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx &= A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy &= B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \\ \int \theta dx &= A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, & \int \theta dy &= B' \frac{\partial \theta}{\partial y}. \end{aligned} \quad (IV.9)$$

Où les coefficients A' et B' sont exprimés en fonction du type de solution utilisé, dans ce cas via relation de dépression.

Par conséquent A' , B' , k_1 et k_2 s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned} A' &= -\frac{1}{\kappa_1^2}, \\ B' &= -\frac{1}{\kappa_2^2}, \\ k_1 &= \kappa_1^2, \\ k_2 &= \kappa_2^2 \end{aligned} \quad (IV.10)$$

Où κ_1 et κ_2 sont les nombres d'ondes de la propagation des ondes avec les directions des axes x et y , respectivement.

Pour les FGM élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} \end{cases} \quad (IV.11)$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \text{ et } \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}, \gamma_{xy}, \text{ et } \gamma_{xy})$ sont les composantes de contraintes et de déformations, respectivement. Nous utilisons des propriétés du matériau définies dans les équations (IV.1 et IV.2). Les coefficients Q_{ij} peuvent être donnés comme :

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2}, & Q_{11} &= Q_{22}, & Q_{12} &= \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, & Q_{12} &= Q_{12} \\
Q_{44} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, & Q_{44} &= Q_{55} = Q_{66}
\end{aligned}
\tag{IV.12}$$

IV.2.3 Équations de mouvement

En utilisant le principe d'énergie de Hamilton, nous dérivons l'équation du mouvement des plaques FGM reposant sur la fondation élastique.

$$\int_0^t (U + U_{ef} - K) dt = 0
\tag{IV.13}$$

Où,

U : Variation de la déformation énergétique de la plaque FG,

U_{ef} : Variation de la déformation énergétique de la fondation élastique,

K : Variation de l'énergie cinétique.

La variation de la déformation énergétique de la plaque FG est donnée par :

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \tau_{xy} + \tau_{yz} \delta \tau_{yz} + \tau_{xz} \delta \tau_{xz}) dV \\
&= \int_A (N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s \\
&\quad + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + R_{yz}^s \delta R_{yz}^s + R_{xz}^s \delta R_{xz}^s) dA
\end{aligned}
\tag{IV.14}$$

Où,

A est la surface supérieure et les contraintes résultantes R , M et N sont définies par :

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy)
\tag{IV.15}$$

$$(R_{xz}^s, R_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g dz$$

La variation de l'énergie de déformation de la fondation élastique (fondation de Winkler-Pasternak) peut être exprimée comme suit :

$$\delta U_{ef} = \int_A (K_w w \delta w - K_p \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} \right) \delta w) dA \quad (\text{IV.16})$$

Où,

K_w et K_p représentent les coefficients de rigidité transversale et de cisaillement pour le milieu élastique, respectivement.

Si la fondation est modélisée comme la fondation linéaire de Winkler, le coefficient K_p dans l'équation (IV.16) est nul.

La variation de l'énergie cinétique de la plaque peut être exprimée comme suit :

$$\delta K = \int_V (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dV$$

$$= \int_V \left\{ \begin{aligned} & I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) - I_1 \begin{pmatrix} \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \\ + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \end{pmatrix} \\ & + J_1 \left((k_1 A') \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + (k_2 B') \left(\dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right) \\ & + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + K_2 \begin{pmatrix} (k_1 A')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) + \\ (k_2 B')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \end{pmatrix} \\ & - J_2 \left((k_1 A') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \right) + (k_2 B') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right) \end{aligned} \right\} dV \quad (\text{IV.17})$$

Ou, (·) Indique la dérivée par rapport à la variable de temps.

($I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2$) sont des inerties de masse exprimées par :

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) p(z) dz, \quad (J_1, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (f, zf, f^2) p(z) dz \quad (\text{IV.18})$$

En remplaçant les équations. (IV.14), (IV.16) et (IV.17) dans l'équation (IV.13), on peut déduire ce qui suit :

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + J_1 k_1 A' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\
\delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + J_1 k_2 B' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\
\delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\
& - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \tag{IV.19}$$

$$\begin{aligned}
\delta \theta : \quad & -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial R_{xz}^s}{\partial x} + \\
& k_2 B' \frac{\partial R_{yz}^s}{\partial y} = -J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - K_2 \left(\begin{aligned} & \left(k_1 A' \right)^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \\ & + \left(k_2 B' \right)^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \end{aligned} \right) \\
& + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial y^2} \right)
\end{aligned}$$

En substituant l'équation (IV.8) dans l'équation (IV.11) et les résultats sont remplacés dans l'équation (IV.15), les résultants des efforts sont obtenus en termes de déformations suivant la forme compacte :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma \tag{IV.20}$$

Dans lequel

$$\begin{aligned}
N &= \left\{ N_x, N_y, N_{xy} \right\}^t, \quad M^b = \left\{ M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b \right\}^t, \\
M^s &= \left\{ M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s \right\}^t
\end{aligned} \tag{IV.21a}$$

Et

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_x^0, \boldsymbol{\varepsilon}_x^0, \boldsymbol{\varepsilon}_{xy}^0 \right\}^t, \quad \boldsymbol{k}^b = \left\{ k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b \right\}^t, \\ \boldsymbol{k}^s = \left\{ k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s \right\}^t$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}$$

(IV.21b)

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{21}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{21}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}$$

(IV.21c)

$$H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{21}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}$$

$$S = \left\{ R_{xz}^s, R_{yz}^s \right\}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \left\{ \boldsymbol{\gamma}_{xz}^0, \boldsymbol{\gamma}_{yz}^0 \right\}, \quad A^s = \begin{pmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{pmatrix}$$

(IV.21d)

De plus, les composants de rigidité sont donnés comme suit :

$$\left\{ \begin{matrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{matrix} \right\} =$$

(IV.22a)

$$\int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} \left(1, z, z^2, f(z), zf(z), f(z)^2 \right) dz$$

$$\left(A_{22} \quad B_{22} \quad D_{22} \quad B_{22}^s \quad D_{22}^s \quad H_{22}^s \right) = \left(A_{11} \quad B_{11} \quad D_{11} \quad B_{11}^s \quad D_{11}^s \quad H_{11}^s \right)$$

(IV.22b)

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{44} [g(z)]^2 dz$$

(IV.22c)

En substituant de l'équation (IV.20) dans l'équation (IV.19), les équations de mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements (u_0, v_0, w_0, θ) et les équations appropriées prennent la forme suivante :

$$A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} v_0 + (A_{11} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{11} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_0 + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{122} \theta + (B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2) d_{11} \theta = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_{11} \ddot{w}_0 + J_1 k_1 A' d_{11} \ddot{\theta} \quad (\text{IV.23a})$$

$$A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 - B_{22} d_{222} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_0 + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{112} \theta + (B_{22}^s k_2 + B_{12}^s k_1) d_{22} \theta = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 d_{22} \ddot{w}_0 + J_1 k_2 B' d_{22} \ddot{\theta} \quad (\text{IV.23b})$$

$$B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 + B_{22} d_{222} v_0 - D_{11} d_{222} w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_0 - D_{22} d_{2222} w_0 + (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2) d_{11} \theta + 2(D_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{1122} \theta + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2) d_{22} \theta = I_0 \ddot{w}_0 \quad (\text{IV.23c})$$

$$+ I_1 (d_{11} \ddot{u}_0 + d_{22} \ddot{v}_0) - I_2 (d_{11} \ddot{w}_0 + d_{22} \ddot{w}_0) + J_2 (A' k_1 d_{11} \ddot{\theta} + B' k_2 d_{22} \ddot{\theta})$$

$$(-B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2) d_{11} u_0 - (B_{66}^s (A' k_1 + B' k_2)) d_{122} u_0 - (B_{66}^s (A' k_1 + B' k_2)) d_{112} v_0$$

$$- (B_{12}^s k_1 + B_{22}^s k_2) d_{22} v_0 - (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2) d_{11} w_0 + 2(D_{66}^s (A' k_1 + B' k_2)) d_{1122} w_0$$

$$+ (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2) d_{22} w_0 - H_{11}^s k_1^2 \theta - H_{12}^s k_1 k_2 \theta - 2H_{12}^s k_1 k_2 \theta - \left(H_{66}^s \begin{pmatrix} A' k_1 \\ + B' k_2 \end{pmatrix} \right)^2 d_{1122} \theta \quad (\text{IV.23c})$$

$$+ A_{44}^s (B' k_2)^2 d_{22} \theta + A_{55}^s (A' k_1)^2 d_{11} \theta = -J_1 (A' k_1 d_{11} \ddot{u}_0 + B' k_2 d_{22} \ddot{v}_0)$$

$$+ J_2 (A' k_1 d_{11} \ddot{w}_0 + B' k_2 d_{22} \ddot{w}_0) - K_2 \left((A' k_1)^2 d_{11} \ddot{\theta} + (B' k_2)^2 d_{22} \ddot{\theta} \right)$$

Où, d_i, d_{ij}, d_{ijm} et d_{ijt} sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l},$$

$$d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (\text{IV.24})$$

$$(i, j, l, m = 1, 2).$$

IV.2.4 Dispersion relations

Les solutions des équations de mouvement sont résolues en utilisant des relations de dispersion décrivant une onde de propagation dans le plan x-y :

$$\begin{cases} u_0(x, y, t) \\ v_0(x, y, t) \\ w_0(x, y, t) \\ \theta(x, y, t) \end{cases} = \begin{cases} U \exp[i(\kappa_1 x + \kappa_2 y - \omega t)] \\ V \exp[i(\kappa_1 x + \kappa_2 y - \omega t)] \\ W \exp[i(\kappa_1 x + \kappa_2 y - \omega t)] \\ X \exp[i(\kappa_1 x + \kappa_2 y - \omega t)] \end{cases} \quad (\text{IV.25})$$

Où,

U ; V ; W et X sont les coefficients de l'amplitude d'onde.

κ_1 et κ_2 sont les nombres d'ondes de la propagation d'onde le long des directions de l'axe x et de l'axe y, respectivement.

ω est la fréquence, $i = \sqrt{-1}$ l'unité imaginaire.

En substituant l'équation (IV.25) dans l'équation (IV.23), le système d'équations suivant est obtenu :

$$\left(\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{41} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ X \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.26})$$

Où,

$$\begin{aligned}
S_{11} &= -\left(A_{11}\kappa_1^2 + A_{66}\kappa_2^2\right), \\
S_{12} &= -\kappa_1\kappa_2\left(A_{12} + A_{66}\right), \\
S_{13} &= i\kappa_1\left(B_{11}\kappa_1^2 + B_{12}\kappa_2^2 + 2B_{66}\kappa_2^2\right), \\
S_{14} &= i\kappa_1\left(k_1B_{11}^s + k_2B_{12}^s - \left(k_1A' + k_2B'\right)B_{66}^s\kappa_2^2\right), \\
S_{12} &= -\kappa_1\kappa_2\left(A_{12} + A_{66}\right), \\
S_{22} &= -\left(A_{22}\kappa_2^2 + A_{66}\kappa_1^2\right), \\
S_{23} &= i\kappa_2\left(B_{22}\kappa_2^2 + B_{12}\kappa_1^2 + 2B_{66}\kappa_1^2\right), \\
S_{24} &= i\kappa_2\left(k_2B_{22}^s + k_1B_{12}^s - \left(k_1A' + k_2B'\right)B_{66}^s\kappa_1^2\right), \\
S_{31} &= -\kappa_1i\left(B_{11}\kappa_1^2 + B_{12}\kappa_2^2 + 2B_{66}\kappa_2^2\right), \\
S_{32} &= -\kappa_2i\left(B_{22}\kappa_2^2 + B_{12}\kappa_1^2 + 2B_{66}\kappa_1^2\right), \\
S_{33} &= -\left(D_{11}\kappa_1^4 + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\kappa_1^2\kappa_2^2 + D_{22}\kappa_2^4\right) - K_W - K_P\left(\kappa_1^2 + \kappa_2^2\right) \\
S_{34} &= -k_1\left(D_{11}^s\kappa_1^2 + D_{12}^s\kappa_2^2\right) + 2\left(k_1A' + k_2B'\right)D_{66}^s\kappa_1^2\kappa_2^2 - k_2\left(D_{22}^s\kappa_2^2 + D_{12}^s\kappa_1^2\right) \\
S_{14} &= -\kappa_1i\left(k_1B_{11}^s + k_2B_{12}^s - \left(k_1A' + k_2B'\right)B_{66}^s\kappa_2^2\right), \\
S_{42} &= -i\kappa_2\left(k_2B_{22}^s + k_1B_{12}^s - \left(k_1A' + k_2B'\right)B_{66}^s\kappa_1^2\right), \\
S_{34} &= -k_1\left(D_{11}^s\kappa_1^2 + D_{12}^s\kappa_2^2\right) + 2\left(k_1A' + k_2B'\right)D_{66}^s\kappa_1^2\kappa_2^2 - k_2\left(D_{22}^s\kappa_2^2 + D_{12}^s\kappa_1^2\right) \\
S_{44} &= -k_1\left(H_{11}^sk_1 + H_{12}^sk_2\right) - \left(k_1A' + k_2B'\right)^2 H_{66}^s\kappa_1^2\kappa_2^2 - k_2\left(H_{12}^sk_1 + H_{22}^sk_2\right) \\
&\quad - \left(k_1A'\right)^2 A_{55}^s\kappa_1^2 - \left(k_2B'\right)^2 A_{44}^s\kappa_2^2
\end{aligned} \tag{IV.27a}$$

Et,

$$\begin{aligned}
m_{11} &= -I_0, \\
m_{13} &= i\kappa_1 I_1,
\end{aligned} \tag{IV.27b}$$

$$\begin{aligned}
m_{14} &= -i J_1 k_1 A' \kappa_1 \\
m_{22} &= -I_0, \\
m_{23} &= i \kappa_2 I_1, \\
m_{24} &= -i J_1 k_2 B' \kappa_2, \\
m_{31} &= -i I_1 \kappa_1, \\
m_{32} &= -i \kappa_2 I_1, \\
m_{33} &= -\left(I_0 + I_2 \left(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 \right) \right), \\
m_{34} &= J_2 \left(A' k_1 \kappa_1^2 + B' k_2 \kappa_2^2 \right), \\
m_{41} &= i J_1 k_1 A' \kappa_1 \\
m_{42} &= i J_1 k_2 B' \kappa_2, \\
m_{34} &= J_2 \left(A' k_1 \kappa_1^2 + B' k_2 \kappa_2^2 \right), \\
m_{44} &= -K_2 \left(\left(A' k_1 \right)^2 \kappa_1^2 + \left(B' k_2 \right)^2 \kappa_2^2 \right).
\end{aligned}$$

Les relations de dispersion de la propagation des ondes dans la plaques à gradient de propriétés reposant sur une fondation élastique sont données par :

$$| [K] - \omega^2 [M] | = 0 \quad (\text{IV.28})$$

Les racines de l'équation (IV.28) peuvent être définies par :

$$\omega_1 = W_1(\kappa), \omega_2 = W_2(\kappa), \omega_3 = W_3(\kappa) \text{ et } \omega_4 = W_4(\kappa) \quad (\text{IV.29})$$

Ses racines correspondent aux modes d'onde, M_1, M_2, M_3 et M_4 respectivement.

Les modes d'onde M_1 et M_4 correspondent à l'onde de flexion, les modes d'onde M_2 et M_3 correspondent à l'onde d'extension. La vitesse de phase de la propagation des ondes dans la plaque FG peut être obtenue de :

$$C_i = \frac{W_i(\kappa)}{\kappa}, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (\text{IV.30})$$

IV.3 Analyse de résultats

Dans ce travail, l'étude de la propagation des ondes et des vibrations libres dans les plaques FGM reposant sur une base élastique par une théorie de la contrainte de cisaillement d'ordre élevé est proposée. Les solutions de dispersion permettant de déterminer les vitesses de phase et les fréquences des plaques FGM sont présentées en résolvant des équations en valeurs propres.

Pour vérifier l'exactitude de cette analyse, des exemples numériques sont résolus. Une étude paramétrique sur les différents paramètres géométriques et matériels de la plaque à savoir P, a/h, P-FGM, E-FGM a été faite en tenant compte de l'effet de l'assise élastique. Les propriétés des matériaux utilisés dans cette étude sont les suivantes :

Céramique (alumine, Al_2O_3) : $E_c = 380 \text{ GPa}$

$$\nu = 0,3$$

$$\rho_c = 3800 \text{ kg/m}^3.$$

Céramique (Si_3N_4) : $E_c = 348,43 \text{ GPa}$,

$$\nu = 0,3$$

$$\rho_c = 2370 \text{ kg/m}^3.$$

Métal (aluminium, Al) : $E_m = 70 \text{ GPa}$,

$$\nu = 0,3$$

$$\rho_m = 2702 \text{ kg/m}^3.$$

Métal (SUS304) : $E_m = 201,04 \text{ GPa}$,

$$\nu = 0,3$$

$$\rho_m = 8166 \text{ kg/m}^3.$$

Ces propriétés changent à travers l'épaisseur de la plaque en fonction de la loi de puissance ou exponentiel. La surface supérieure de la plaque FGM est riche en céramique, tandis que la surface inférieure de la plaque FGM est riche en métal. L'épaisseur de la plaque à gradient de propriétés est prise $h = 0,2$ et $0,1 \text{ m}$.

Afin de vérifier l'efficacité de la théorie actuelle dans l'étude de la propagation des ondes des plaques FGM, des applications numériques sont présentées et discutées. L'étude basée sur le modèle proposé est faite à l'aide du programme MAPLE.

IV.3.1 Etude paramétrique des plaques de type P-FGM

Pour illustrer davantage la précision de la théorie proposée dans ce travail pour une large gamme de rapports d'épaisseurs (a/h), différentes valeurs de gradient d'indice de loi de puissance (p), différentes valeurs du nombre d'ondes et différents cas de paramètres de fondation (k_w , k_p), une analyse de variation des valeurs de fréquence de propagation d'onde et de vitesse de phase calculées par la théorie actuelle pour les plaques P-FGM (Si3N4 / SUS304) a été présentée dans cette section.

Dans la Figure IV.2, nous examinons l'influence de la présence d'une fondation élastique sur la fréquence fondamentale et la vitesse de la phase des plaques P-FGM. Plusieurs valeurs de l'indice de la loi de puissance (p) sont utilisées.

D'après les courbes illustrées à la Figure IV. 2, nous voyons que la fréquence circulaire d'une plaque reposant sur une fondation élastique est légèrement supérieure à celle d'une plaque sans fondation élastique. Il est également noté que la fréquence fondamentale et la vitesse de la phase diminuent avec l'augmentation des valeurs de l'indice de fraction volumique des constituants du matériau (p) et augmentent avec l'augmentation du nombre d'ondes (κ).

Dans ces courbes plusieurs paramètres ont été étudié à la fois dans un même graphe ce qui explicite d'éventuel effet qui peut exister entre ces paramètre comme par exemple :

L'effet de la variation de p par rapport à la fréquence ou à la vitesse de phase, sinon, le rapport entre le nombre d'onde et l'indice de puissance p .

A partir de la Figure IV.2, on remarque que l'augmentation des fréquences se développe à petit intervalle avec l'augmentation du nombre d'onde, mais d'autant plus ce nombre soit grand le taux de variation de la fréquence devient significatif. Contrairement pour les vitesses de phase ou ça commence avec une augmentation accélérée et pour les nombres d'ondes élevées l'écart d'augmentation des vitesses devient petit.

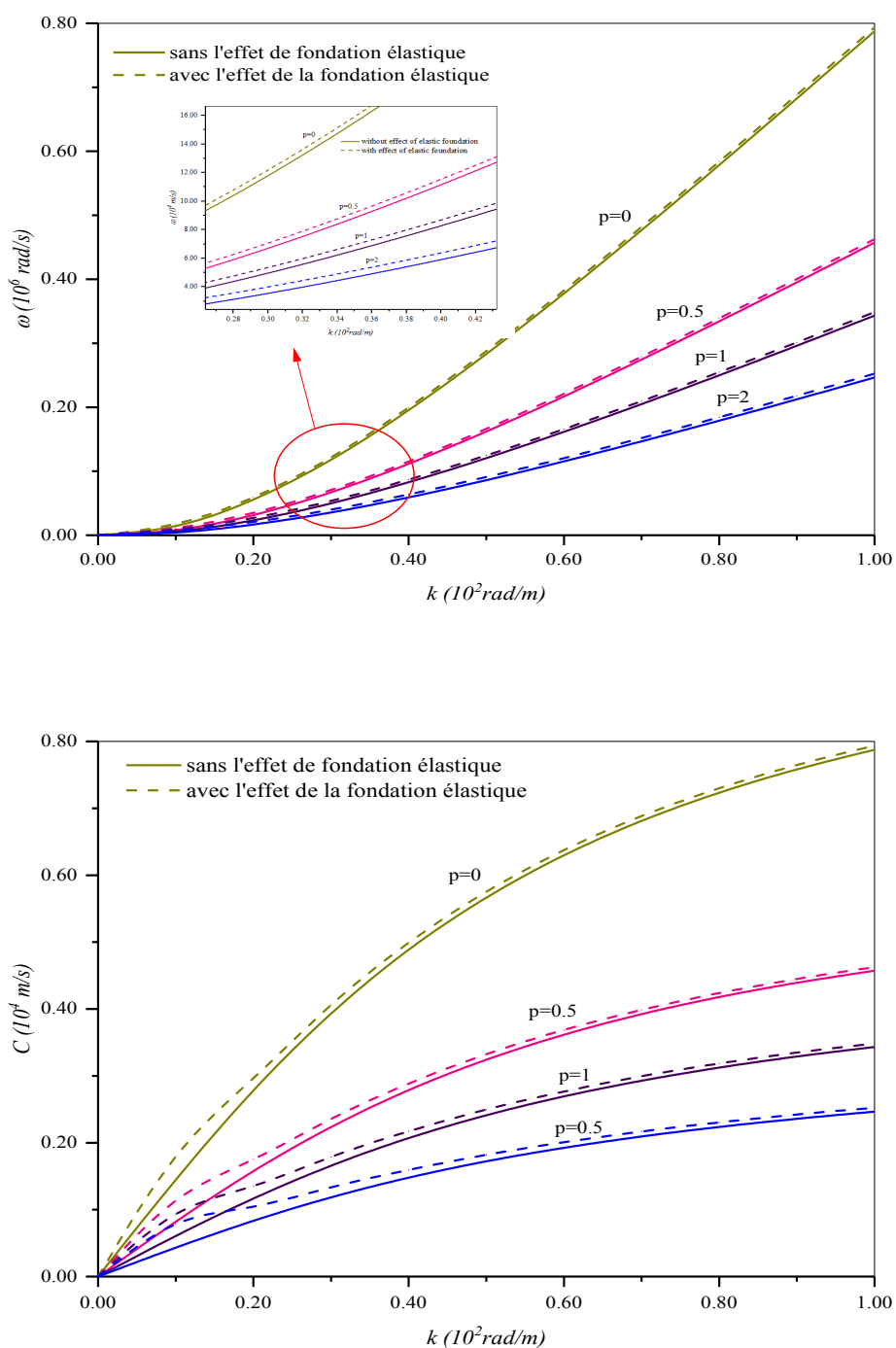


Figure IV. 2 Variation de la fréquence et de la vitesse de phase de différentes plaques FG en fonction du nombre d'onde ($k_w = 1000, k_p = 100$)

La Figure IV.3 illustre les courbes de variation de la fréquence fondamentale et de la vitesse de phase des différentes plaques FGM avec $k_w = 1000, k_p = 100$ et $p = 2$. On peut constater que l'épaisseur de la plaque a un effet sur la fréquence de propagation des ondes dans la plaque FG pour les grands nombres d'ondes (κ).

En revanche, les fréquences sont réduites lorsque l'épaisseur diminue. Pour les courbes de la vitesse de phase, on voit que celle-ci diminue avec la diminution de l'épaisseur de la plaque. Il convient également de noter que pour des valeurs élevées du nombre d'onde, les vitesses de phase convergent quelle que soit l'épaisseur.

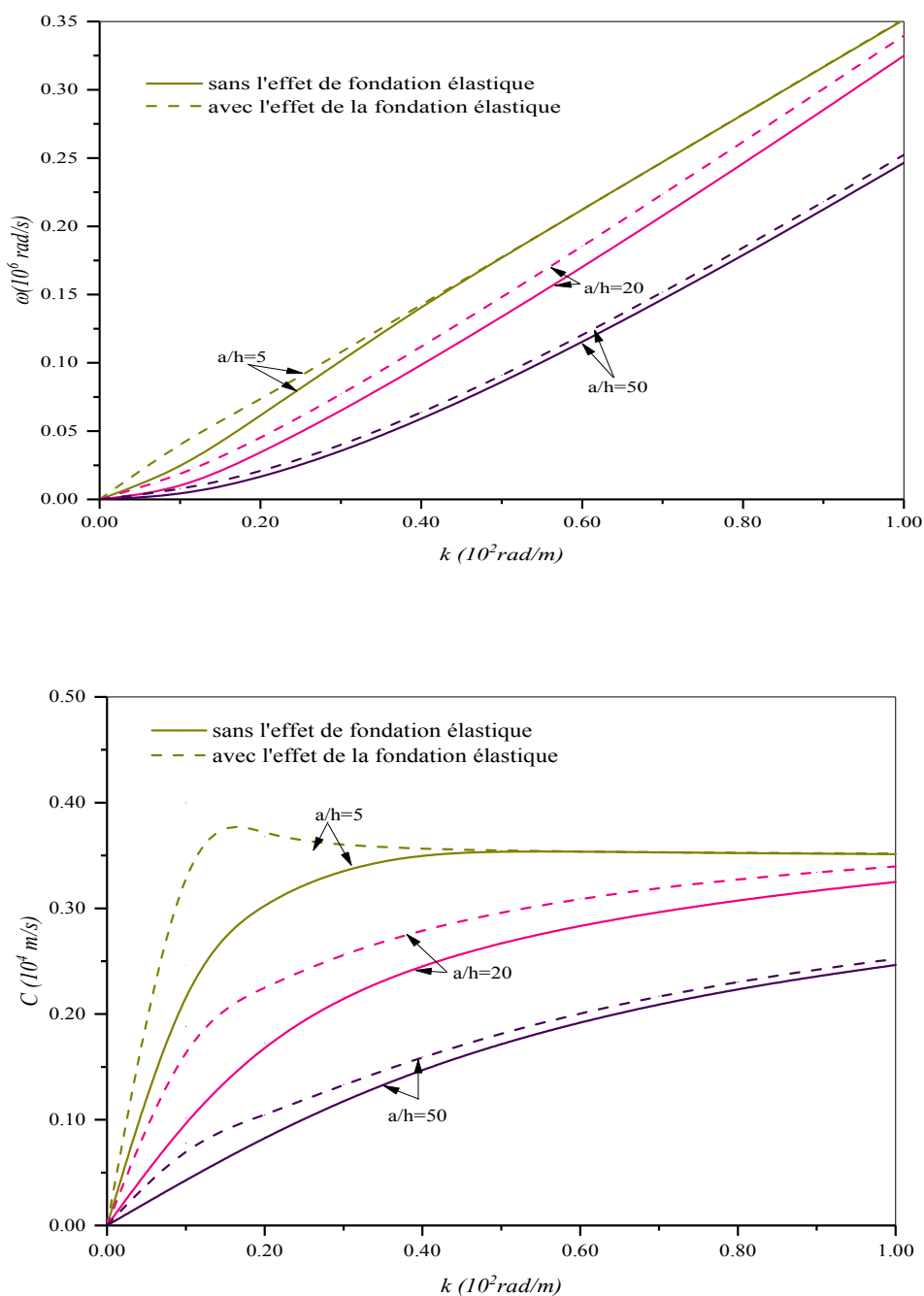


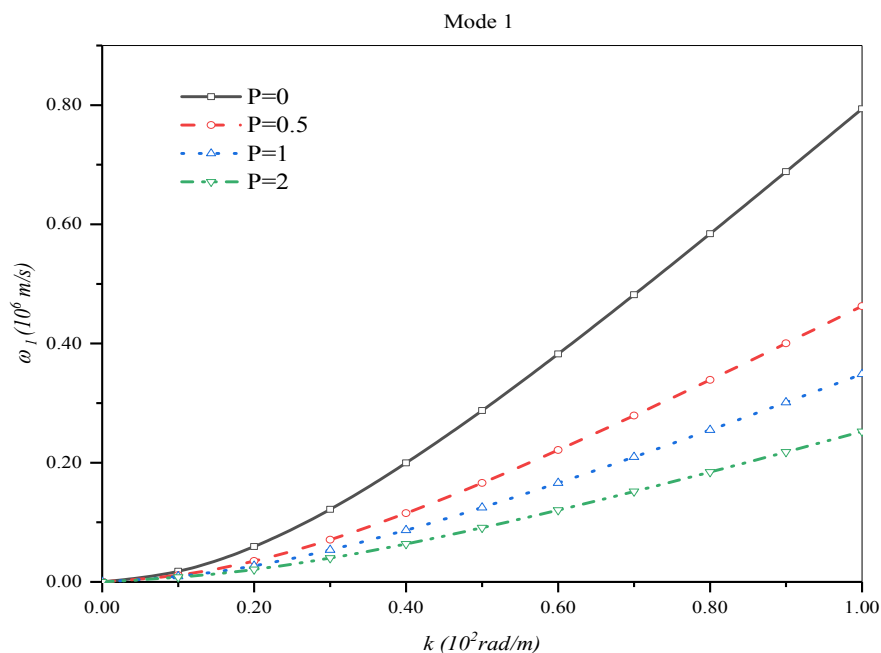
Figure IV.3 Variation de la fréquence et de la vitesse de phase des plaques FG en fonction du nombre d'ondes. ($kw = 1000$, $kp = 100$, $p = 2$)

Dans la Figure IV.3 l'effet de la fondation élastique, pour les deux caractéristiques vibratoires, est significatif pour les petites valeurs du nombre d'onde alors que pour les grandes valeurs de κ l'effet devient peu important.

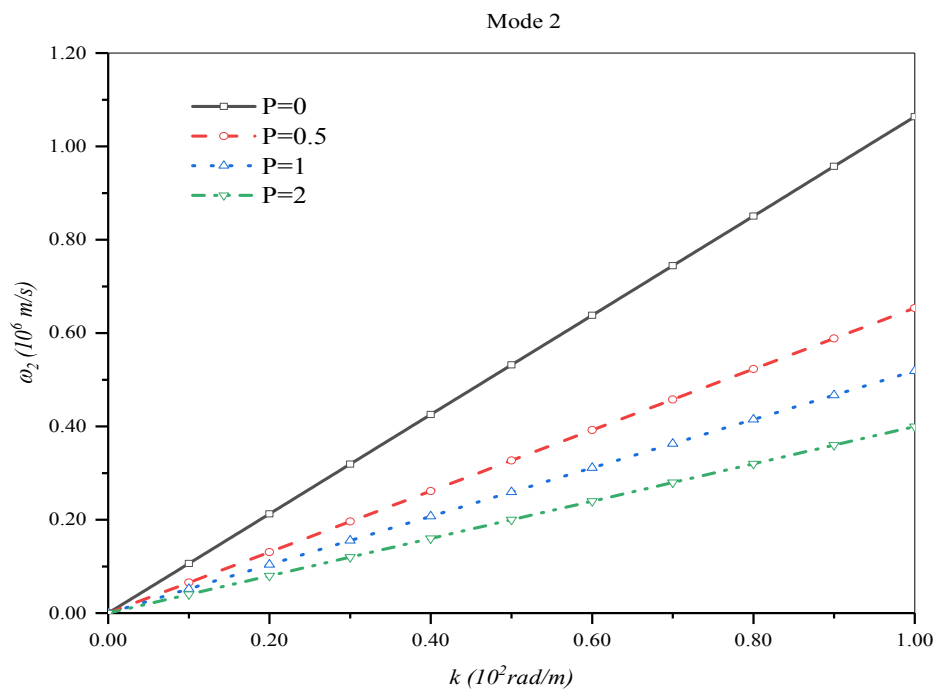
Dans la Figure IV.4, la variation de la fréquence propre des différentes plaques FG en fonction du nombre d'ondes est présentée. On peut noter que la fréquence de propagation des ondes dans la plaque FGM augmente avec la diminution de l'indice de la loi de puissance, quel que soit le mode d'onde. De plus, la fréquence de propagation de l'onde devient maximale dans la plaque entièrement céramique ($p = 0$).

Il est à noter, aussi, que la relation fréquences-nombre d'ondes est strictement linéaire pour le deuxième et le troisième mode (mode 1 et mode 2).

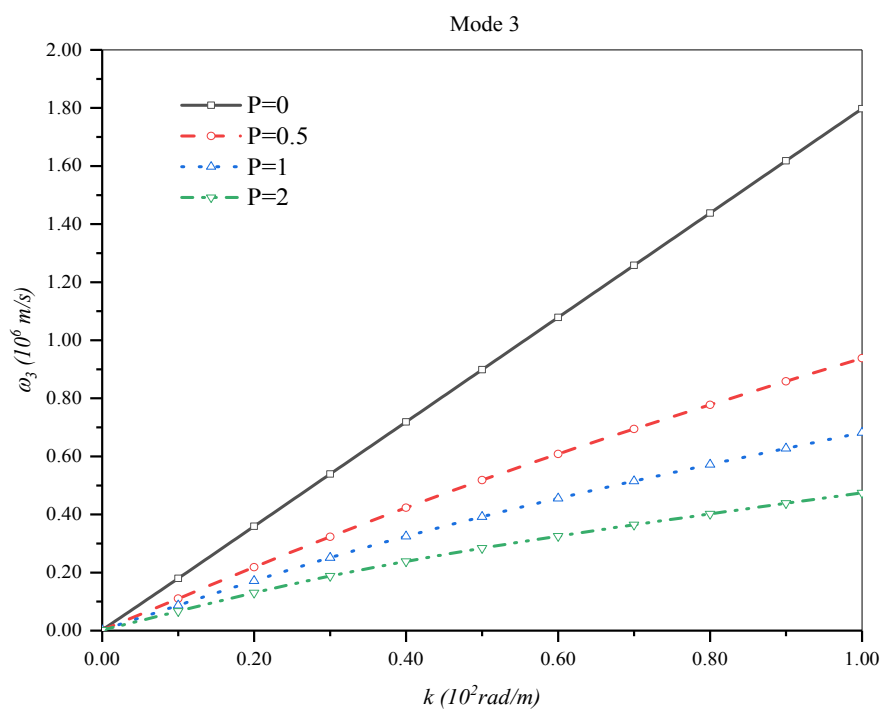
Dans le mode quatre qui représente le mode de cisaillement l'effet de l'indice de puissance de la fraction volumique n'a pas d'effet quel que soit la valeur du nombre d'onde.



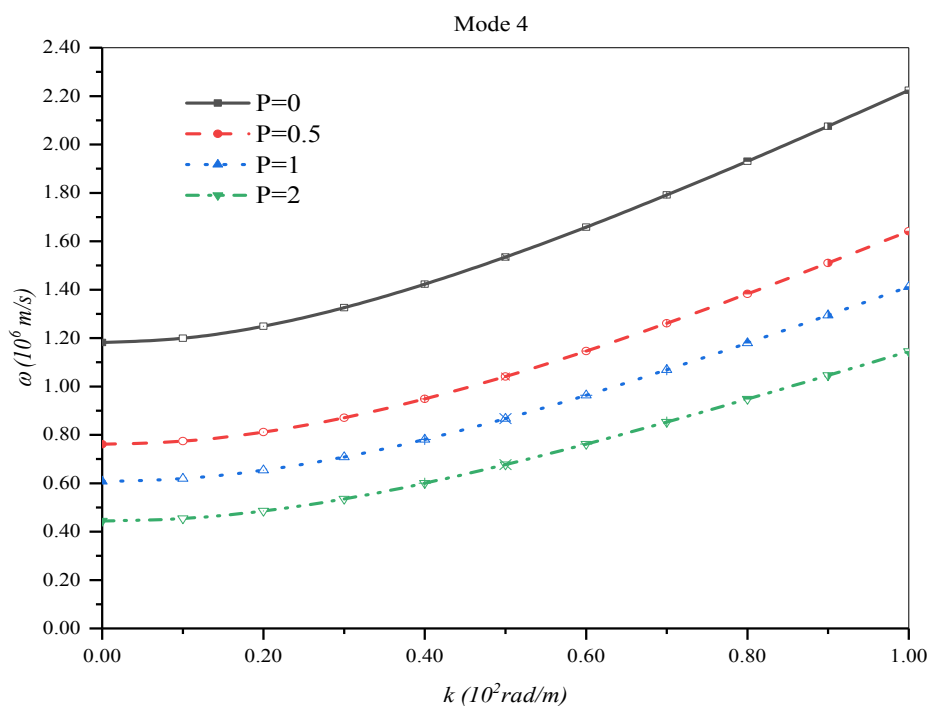
(a)



(b)



(c)



(d)

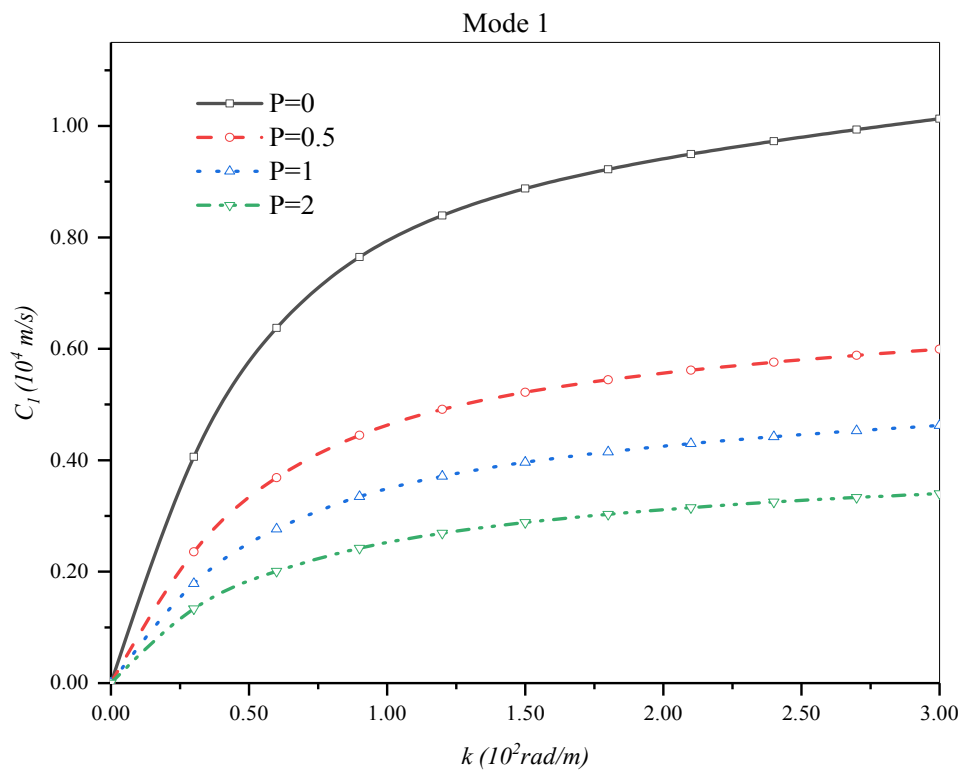
Figure IV.4 Les courbes de dispersion des différentes plaques FG reposent sur une fondation élastique.

($k_w = 1000$, $k_p = 100$) (a) : mode 0, (b) : mode 1, (c) : mode 2, (d) : mode 3

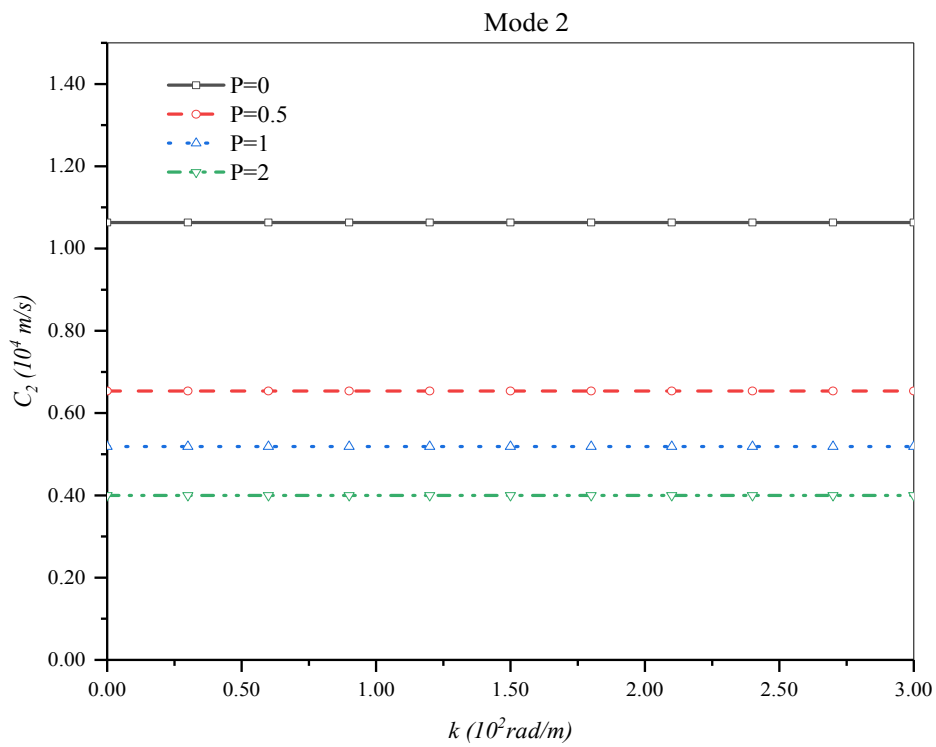
La variation de la vitesse de phase des différentes plaques FG en fonction du nombre d'ondes est représentée à la Figure IV.5. A partir des courbes représentées sur cette Figure, les similitudes peuvent être identifiées dans l'évolution des paramètres de la vitesse de propagation des plaques FG. On peut noter que la vitesse de phase de la propagation des ondes dans la plaque FG augmente lorsque l'indice de la loi de puissance p diminue pour le même nombre d'onde k .

La vitesse de phase des deuxième et troisième mode de la plaque ($p = 0$) est constante, mais celle-ci diminue lorsque l'indice de la loi de puissance p devient différent de zéro ($p \neq 0$) ; cette diminution devient plus visible dans le quatrième mode.

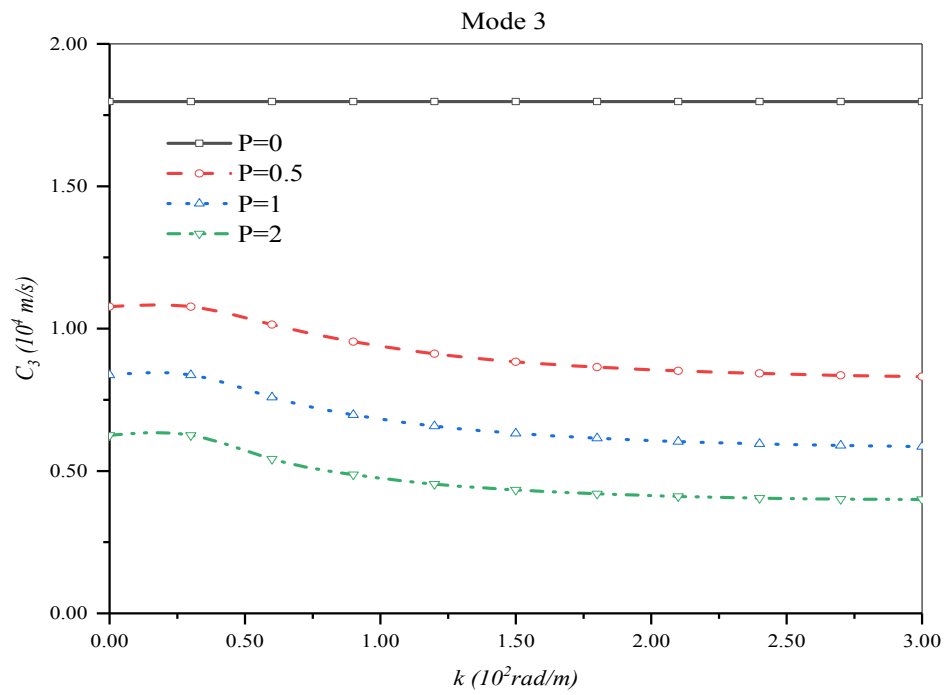
De plus, pour la plaque homogène ($p = 0$), la vitesse de phase prend le maximum parmi celles de toutes les autres compositions.



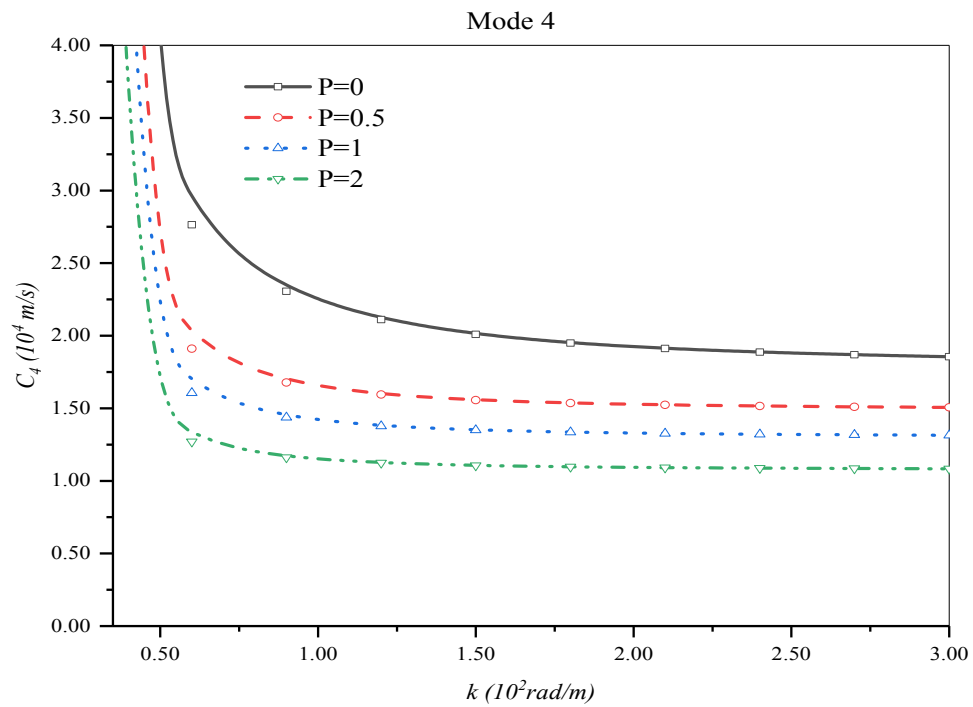
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure IV.5 Les courbes de vitesse de phase de différentes plaques à gradient de propriétés reposent sur des fondations élastiques. ($K_w = 1000$, $k_p = 100$) (a) : mode 0, (b) : mode 1, (c) : mode 2, (d) : mode 3

IV.3.2 Etude paramétrique comparative des plaques en P-FGM et E-FGM

L'effet de la fondation sur la vibration libre et la propagation des ondes dans des plaques P-FGM et E-FGM épaisses est présentée dans la Figure IV.6 ($a/h = 5$ et $p = 3$). On remarque que pour la même valeur de p , les fréquences données par le matériau P-FGM sont plus importantes que celles données par E-FGM. De même pour l'effet de la fondation qui est significatif dans le cas des P-FGM.

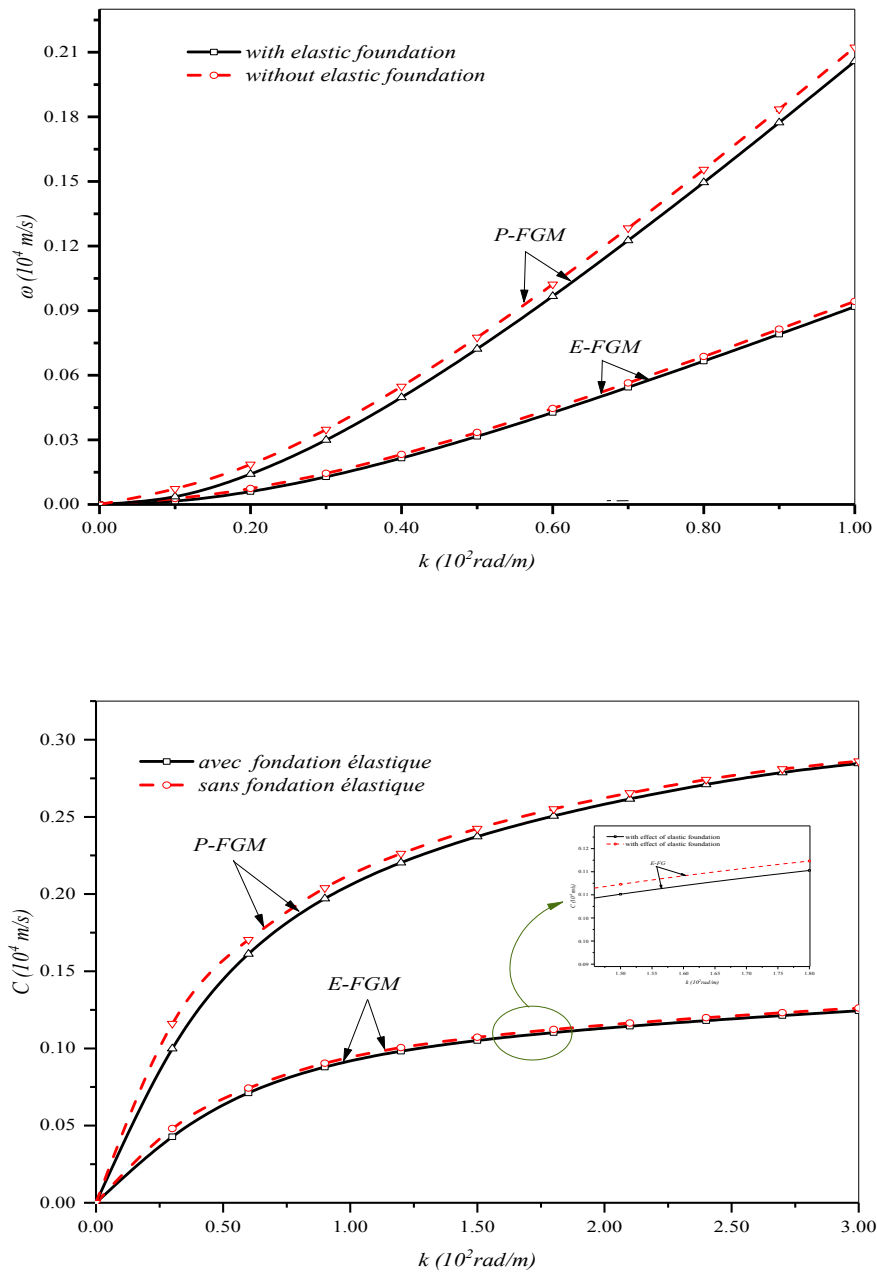


Figure IV.6 Comparaisons des fréquences et de la vitesse de phase des plaques P-FGM et E-FGM

Dans la Figure IV.7, une comparaison de la variation de la dispersion et de la vitesse de phase des plaques P-FGM et E-FGM en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) a été présentée. Le nombre d'ondes et l'indice de loi de puissance sont pris ici égaux à 10 et 3, respectivement. Dans ces Figure les plaque épaisse donnent des variations de réponses élastique, entre les plaque avec et sans fondation, plus grandes que celle des plaques minces.

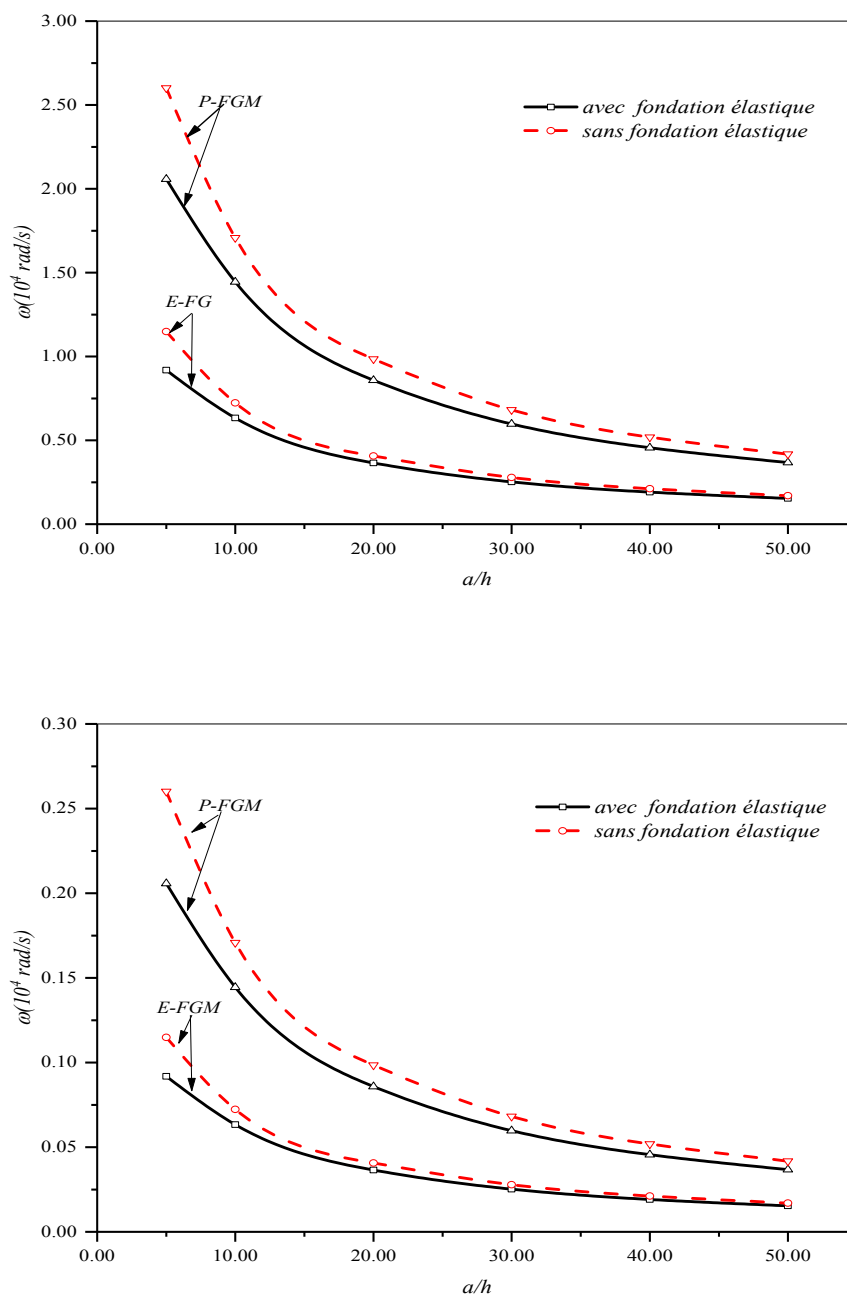


Figure IV.7 Comparaisons des fréquences et de la vitesse de phase des plaques P-FGM et E-FGM ($\kappa = 10$, $p = 3$)

Les résultats présentés sur les deux Figures (IV.6 et IV.7) montrent que les paramètres de fréquence et de vitesse de phase des plaques P-FGM sont plus importants. Puis celles de la plaque E-FGM. Avec cela, il est nécessaire d'assurer une répartition régulière des propriétés du matériau avec l'épaisseur.

IV.4 Conclusion

Le travail accompli, dans ce chapitre, est orienté vers une analyse de la propagation des ondes dans les plaques FGM sur fondation élastique en utilisant une théorie de la déformation de cisaillement d'ordre élevé avec un champ de déplacement à variable intégrale.

Le principal avantage de la théorie proposée par rapport aux théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur existantes est que la théorie actuelle implique moins d'inconnues, ainsi que l'effet de la fondation élastique, qui a été pris en compte.

Les équations du mouvement sont obtenues selon le principe de Hamilton. Ces équations sont résolues en utilisant la relation de dispersion, puis les fréquences fondamentales et les vitesses de phase sont trouvées en résolvant le problème des valeurs propres.

L'étude paramétrique réalisée a permis de mettre en évidence les différents facteurs influençant le comportement vibratoire et la propagation des ondes dans les plaques en FG. Il est indiqué que les réponses à la propagation des ondes dans les plaques en FG sont affectées par divers paramètres tels que les constantes de fondation élastique, l'indice de gradient et le rapport épaisseur/longueur.

**Chapitre V : Analyse statique des
plaques en FGM reposant sur fondation
élastique non linéaire**

V.1 Introduction

Parmi les sollicitations mécaniques à étudier, l'effet statique ou flexionnel sur des plaques à gradient de propriétés (FGM) reposant sur des fondations élastiques à raideur variable, en utilisant une théorie de la déformation de cisaillement à quatre variables et soumises à des charges mécaniques est étudié.

Le milieu de fondation élastique est supposé à deux paramètres Pasternak-Winkler en considérant une variation de la couche de Winkler le long d'un côté de la plaque ; cependant, la couche de cisaillement de Pasternak est censée être constante.

Les équations d'équilibre des plaques à gradient de propriétés reposant sur la fondation élastique sont dérivées en utilisant le principe du travail virtuel. Les résultats numériques et la validation des plaques FG sont présentés, c'est pour montrer la précision de la présente méthode pour prédire le comportement statique des plaques à FGM et l'influence des variables de fondation élastique sur la contrainte et le déplacement des plaques à gradient de propriétés. La Figure V.1 montre une plaque reposant sur fondations à deux paramètres et soumise à un chargement statique.

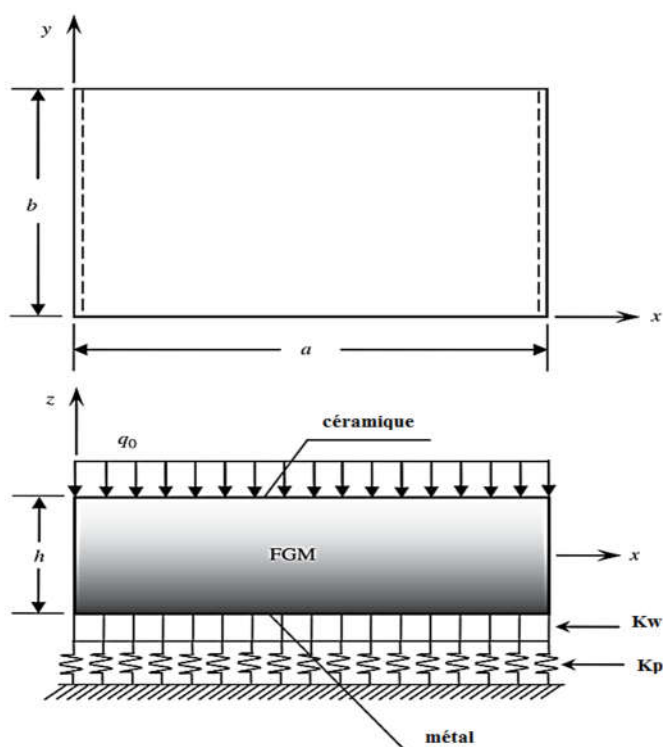


Figure V.1 Plaque à propriété graduée reposant sur une fondation élastique

V.2 Formulation Théorique

V.2.1 Matériaux et plaques à gradient propriété

Les plaques rectangulaires constituées de matériaux à gradient de propriétés ont la longueur (a), la largeur (b) et l'épaisseur (h) dans le système de coordonnées cartésiennes (x, y, z), comme illustré à la Figure V.1.

La plaque rectangulaire en FGM reposant sur des bases élastiques à deux paramètres et une charge transversale répartie (q), ces charges sont supposées être de charge sinusoïdale ou uniforme.

Les propriétés matérielles de la plaque FGM varient dans la direction z à travers l'épaisseur de la plaque. Le matériau constituant est composée d'un mélange de céramique et de métal.

La plaque est en métal sur la surface inférieure, tandis que la céramique se trouve sur la surface supérieure.

Nous supposons que le module d'élasticité (E) peut être déterminé comme suit :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^P \quad (\text{V.1})$$

Où,

P est le paramètre de matériau qui décrit la variation de matériau à travers la section transversale.

(E_c) et (E_m) sont les propriétés correspondantes de la céramique et du métal, respectivement, le coefficient de Poisson est constant suivant toute l'épaisseur de la plaque.

V.2.2. Fondation élastique

La fondation élastique est supposée à deux couches ; la couche de Winkler présente les ressorts et la couche de cisaillement de Pasternak qui relie les ressorts de la couche de Winkler :

$$f_e(x) = K_w(x)w - K_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{V.2})$$

Où,

$f_e(x)$ est la réaction totale de la fondation.

K_p est la couche de cisaillement constante, si la couche de cisaillement est négligée la fondation élastique devient la fondation de Winkler.

$K_w(x)$ est le paramètre variable de Winkler dépendant uniquement de la direction x .

La variation de la fondation élastique de Winkler se retrouve dans les études précédentes Pradhan et Murmu [148], Sobhy [149], Attia *et al.* [151] :

$$K_w(x) = \frac{J_1 D_i}{a^4} \begin{cases} 1 + \zeta \frac{x}{a} & \text{Linéaire} \\ 1 + \zeta \left(\frac{x}{a}\right)^2 & \text{Parabolique} \\ 1 + \zeta \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) & \text{Sinusoidale} \end{cases} \quad (\text{V.3})$$

Nous proposons dans la présente étude de nouvelles variantes de fondations élastiques comme suit :

$$K_w(x) = \frac{D_i h^3}{a^4} \begin{cases} 1 + \zeta \sum_{i=0}^j c_i \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^i & \text{polynome} \\ 1 + \zeta \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) & \text{cosinus} \\ 1 + \zeta \left(\exp\left(\frac{x}{a}\right) - \exp\left(\left(\frac{x}{a}\right)^\eta\right) \right) & \text{exponentielle} \end{cases} \quad (\text{V.4})$$

Où,

J_1 est une constante et ζ est un paramètre variable.

Si ζ est égal à zéro, la fondation devient uniforme de Pasternak et si la rigidité de la couche de cisaillement est négligée, la fondation de Pasternak devient la fondation de Winkler.

$\eta > 1$ est un nombre réel supérieur à la valeur unitaire, on prend dans la présente étude $\eta = 1.5$. c_i est un paramètre de coefficient de polynôme.

Les Figures V.2 et V.3 montrent les allures des différentes variations citées dans les équations (V.3) et (V.4)

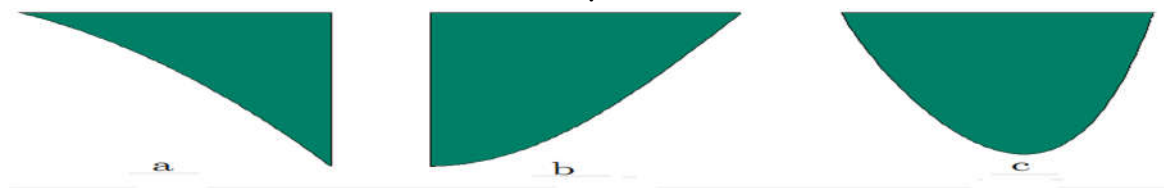


Figure V.2 Diverses distributions des fondations élastiques Winkler le long de la direction axiale (a) type polynomial, (b) type cosinus et (c) type exponentiel



Figure V.3 Diverses distributions des fondations élastiques Winkler le long de la direction axiale (a) type linéaire, (b) type parabolique et (c) type sinusoidal

V.2.3. Théorie du cisaillement d'ordre supérieur

La théorie classique de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur à cinq déplacements inconnus pour les plaques FG en utilisant des hypothèses de plaques épaisses, nous pouvons écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x, y, t), \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\varphi_y(x, y, t), \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{V.5}$$

Où,

u_0, v, w, φ_x et φ_y sont cinq déplacements inconnus du plan moyen de la plaque FG,

$f(z)$ est la fonction de forme sinusoidale qui représente la distribution des déformations et les déplacements de cisaillement transversal avec l'épaisseur.

Pour simplifier et réduire le nombre d'inconnus dans la théorie classique du cisaillement d'ordre supérieur, pour le réduire de cinq à quatre inconnus, nous introduisons une intégrale indéfinie dans le déplacement des composants en cisaillement.

En considérant que $\varphi_x = \int \theta(x, y, t) dx$ et $\varphi_y = \int \theta(x, y, t) dy$. Le champ de déplacements de la présente théorie peut être exprimé sous une forme plus simple.

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx, \\
v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy, \\
w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
\end{aligned} \tag{V.6a}$$

Où,

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \tag{V.6b}$$

En utilisant le champ de déplacement actuel dans l'équation (V.5b), dans le cadre de l'application de la théorie d'élasticité linéaire aux petites déformations,

Les déformations normales et de cisaillement sont déterminés comme suit :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{pmatrix} + f(z) \begin{pmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{pmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \tag{V.7}$$

Où

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x \partial^2 y} \end{pmatrix}, \tag{V.8a}$$

$$\begin{pmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{pmatrix}, \tag{V.8b}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix}, \text{ and } g(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \tag{V.8c}$$

L'intégrale non définie que l'on trouve dans les relations de déformation, nous la simplifions dans la dérivation de format à l'aide des techniques de Navier et nous la récrivons comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx &= A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial x}, & \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy &= B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial x}, \\ \int \theta dx &= A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, & \int \theta dy &= B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{V.9})$$

Où,

Les coefficients A' et B' sont donnés selon la technique de résolution ; dans ce cas, la technique utilisée est celle de Navier.

En conséquence, A' , B' , k_1 et k_2 sont exprimés comme suit :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (\text{V.10})$$

Où α et β sont définis dans l'équation (V.24).

V.2.4. Équations constitutives

Les relations de contrainte-déformation tenant compte du cisaillement transverse et des déformations normales peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{V.11})$$

Où,

Components $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont les composantes de contrainte et de déformation, respectivement.

Les coefficients de comportement Q_{ij} peuvent être exprimés en termes de caractéristiques isotropes techniques par :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2}, \\ Q_{12} &= \nu Q_{11}, \\ Q_{44} &= Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)} \end{aligned} \quad (\text{V.12})$$

V.2.5. Équations gouvernantes

Les équations d'équilibre qui régissent l'équilibre peuvent être dérivées en utilisant le principe des déplacements virtuels basé sur la théorie du cisaillement affiné. Le principe du travail virtuel dans le cas présent cède :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \tau_{xy} + \tau_{yz} \delta \tau_{yz} + \tau_{xz} \delta \tau_{xz}) d\Omega dz - \int_{\Omega} (q \delta w_0 - f_e(x)) d\Omega = 0 \quad (V.13)$$

Où,

Ω est la surface supérieure.

f_e est la densité de la force de réaction de la fondation définie dans l'équation (V.2)

En substituant les équations (V.5) et (V.11) dans l'équation (V.13) et intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, l'équation (V.10) peut être exprimé par

$$\int_{\Omega} \left(N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + R_{yz}^s \delta R_{yz}^s + R_{xz}^s \delta R_{xz}^s \right) d\Omega - \int_{\Omega} (q \delta w_0 - f_e(x)) d\Omega = 0 \quad (V.14)$$

Où,

Les résultantes de contrainte N , M et R sont définies par :

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (V.15)$$

$$(R_{xz}^s, R_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz$$

En substituant l'équation (V.11) dans l'équation (V.15) et si nous intégrons suivant l'épaisseur de la plaque FG, les contraintes résultantes sont exprimées par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma \quad (\text{V.16})$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad (\text{V.17a})$$

$$M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad (\text{V.17b})$$

$$k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t$$

Et

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad (\text{V.18a})$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{21}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{21}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad (\text{V.18b})$$

$$H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{21}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}$$

$$S = \{R_{xz}^s, R_{yz}^s\}, \quad \gamma = \{\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0\}, \quad A^s = \begin{pmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{pmatrix} \quad (\text{V.18c})$$

De plus, les composants de rigidité sont donnés comme suit :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} \left(1, z, z^2, f(z), zf(z), f(z)^2 \right) dz \quad (\text{V.19a})$$

$$\left(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s \right) = \left(A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s \right) \quad (\text{V.19b})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{44} [g(z)]^2 dz \quad (\text{V.19c})$$

Les équations d'équilibre peuvent être obtenues à partir de l'équation (V.14) en intégrant par partie les gradients de déplacement et en réglant les coefficients de $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta)$ à zéro séparément. On peut ainsi obtenir les équations d'équilibre associées à la théorie actuelle :

$$\begin{aligned} \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \\ \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + K_w - K_s \nabla + qw_0 = 0 \\ \delta \theta : \quad & -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial R_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial R_{yz}^s}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (\text{V.20})$$

En substituant l'équation (V.16) dans l'équation (V.20), les équations de base peuvent être exprimées comme suit

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0 + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_0 + (A_{11} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} v_0 - B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) \\ & \times \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} w_0 + \left(B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') \right) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \theta + \left(B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \theta = 0 \end{aligned} \quad (\text{V.21a})$$

$$\begin{aligned}
& A_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_0 + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_0 + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u_0 - B_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) \\
& \times \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} w_0 + \left(B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') \right) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \theta + \left(B_{22}^s k_2 + B_{12}^s k_1 \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \theta = 0
\end{aligned} \tag{V.21b}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} v_0 + B_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3} v_0 \\
& - D_{11} \frac{\partial^3}{\partial y^3} w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} w_0 - D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} w_0 + q w_0 - K_w w_0 \\
& + K_s \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_0 \right) + (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta + 2 \left(D_{66}^s \begin{pmatrix} k_1 A' \\ + k_2 B' \end{pmatrix} \right) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \theta \\
& + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \theta = 0
\end{aligned} \tag{V.21c}$$

$$\begin{aligned}
& \left(-B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2 \right) \frac{\partial}{\partial x} u_0 - \left(B_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) \right) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} u_0 - \left(B_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) \right) \\
& \times \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} v_0 - \left(B_{12}^s k_1 + B_{22}^s k_2 \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_0 - \left(D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2 \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0 \\
& + 2 \left(D_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) \right) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} w_0 + \left(D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2 \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_0 - H_{11}^s k_1^2 \theta \\
& - H_{12}^s k_2^2 \theta - 2H_{12}^s k_1 k_2 \theta - \left(H_{66}^s (A' k_1 + B' k_2)^2 \right) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \theta + A_{44}^s (B' k_2)^2 \\
& \times \frac{\partial^2}{\partial y^2} \theta + A_{55}^s (A' k_1)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta = 0
\end{aligned} \tag{V.21d}$$

V.2.6. Solution analytique

La solution sous forme fermée de l'équation des différentielles partielles pour l'analyse des contraintes et le déplacement des plaques à gradient de propriétés reposant sur la fondation élastique non linéaire de Pasternak Winkler, comme indiqué dans l'équation (V.22).

La plaque FG est supposée avoir simplement des bords pris en charge (SSSS) sous la forme simplifiée suivante :

$$\begin{aligned} v = w = \theta = N_x = M_x = R_x = 0 \quad \text{at } x = 0, a, \\ u = w = \theta = N_y = M_y = R_y = 0 \quad \text{at } y = 0, b, \end{aligned} \quad (\text{V.22})$$

Supposons que la plaque FG reposant sur une base élastique soit soumise à des charges mécaniques, uniformes ou sinusoïdales. La forme d'une double série trigonométrique de la technique de Navier peut être exprimée en mécanique externe comme suit

$$q(x, y) = \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (\text{V.23})$$

Où

$$q_{mn} = \begin{cases} q_{11} = q_0 & \text{pour une charge sinusoïdale,} \\ \frac{16q_0}{mn\pi^2} & \text{pour une charge uniforme,} \end{cases} \quad (\text{V.24})$$

Et $\alpha = m\pi/a$, $\beta = n\pi/b$ et q_0 est l'intensité de la charge au centre de la plaque.

La solution analytique de Navier au problème actuel se présente comme la solution suivante pour le champ de déplacement (u_0 , v_0 , w_0 et θ) qui satisfait les différentes conditions aux limites,

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{pmatrix} \quad (\text{V.25})$$

Où, U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} et X_{mn} sont des coefficients arbitraires à déterminer.

Les équations (V.21a) - (V.21d) en conjonction avec l'équation (V.25) sont combinées dans un système d'équations, comme suit :

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & \Gamma_{24} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{23} & \Gamma_{33} & \Gamma_{34} \\ \Gamma_{14} & \Gamma_{24} & \Gamma_{34} & \Gamma_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.26})$$

Dans lequel :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11} &= -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2), \\
\Gamma_{12} &= -\alpha\beta(A_{12} + A_{66}), \\
\Gamma_{13} &= \alpha(B_{11}\alpha^2 + B_{12}\beta^2 + 2B_{66}\beta^2), \\
\Gamma_{14} &= \alpha(k_1B_{11}^s + k_2B_{12}^s - (k_1A' + k_2B')B_{66}^s\beta^2), \\
\Gamma_{22} &= -(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2), \\
\Gamma_{23} &= \beta(B_{22}\beta^2 + B_{12}\alpha^2 + 2B_{66}\alpha^2), \\
\Gamma_{24} &= \beta(k_2B_{22}^s + k_1B_{12}^s - (k_1A' + k_2B')B_{66}^s\alpha^2), \\
\Gamma_{33} &= -(D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4) - \bar{K}_W - K_P(\alpha^2 + \beta^2) \\
\Gamma_{34} &= -k_1(D_{11}^s\alpha^2 + D_{12}^s\beta^2) + 2(k_1A' + k_2B')D_{66}^s\alpha^2\beta^2 - k_2(D_{22}^s\beta^2 + D_{12}^s\alpha^2) \\
\Gamma_{44} &= -k_1(H_{11}^s k_1 + H_{12}^s k_2) - (k_1A' + k_2B')^2 H_{66}^s\alpha^2\beta^2 - k_2(H_{12}^s k_1 + H_{22}^s k_2) \\
&\quad - (k_1A')^2 A_{55}^s\alpha^2 - (k_2B')^2 A_{44}^s\beta^2
\end{aligned} \tag{V.27}$$

V.3 Analyse de résultats

Dans cette section, les différents exemples de validation et les résultats actuels pour l'analyse de flexion de plaques homogènes isotropes ou simplement supportées de plaques à gradient de propriétés reposant sur des fondations élastiques variables à deux paramètres sont présentés afin d'évaluer et de vérifier la précision des méthodes actuelles.

Les effets des fondations variables, le rapport épaisseur sur le côté (h/a), le rapport entre le côté et la longueur (a/b) et l'indice de la loi de puissance sur l'analyse statique pour les plaques en FG soumises à des charges uniformes ou sinusoïdales sont pris en compte.

La plaque FGM est supposée être en alumine (céramique) et en aluminium (métal) avec les propriétés matérielles suivantes :

- Métal (aluminium, Al) : $E_m = 70 \text{ GPa}$; $\nu = 0,3$;
- Céramique (alumine Al_2O_3) : $E_c = 380 \text{ GPa}$; $\nu = 0,3$;

Les déplacements et les contraintes sans dimension donnés ici sont présentés selon les définitions suivantes

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \frac{10h^3 E_c}{q_0 a^4} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{z}{h} \right), \hat{w} = \frac{10^3 D}{q_0 a^4} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right), \\ \bar{u} &= \frac{100h^3 E_c}{q_0 a^4} w \left(0, \frac{b}{2}, \frac{z}{h} \right), \\ \bar{\sigma}_x &= \frac{E_c h}{q_0 a} \sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{z}{h} \right), \bar{\sigma}_{xy} = \frac{E_c h}{q_0 a} \sigma_{xy} \left(0, 0, \frac{z}{h} \right), \\ \bar{\sigma}_{xz} &= \frac{E_c h}{q_0 a} \sigma_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, \frac{z}{h} \right), K_s = \frac{a^2 k_s}{D}, D = \frac{E_c}{12(1-\nu^2)}\end{aligned}\tag{V.28}$$

V.3.1 Flexion des plaques à gradient de propriétés

Dans la première validation de la méthode actuelle, le tableau V.1 montre la déflexion d'une plaque carrée à gradient de propriété soumise à des charges sinusoïdales.

Trois différents rapports d'épaisseurs ($a/h = 4$), ($a/h = 10$) et ($a/h = 100$) sont pris en compte, et trois valeurs d'indice de loi de puissance $p = 1$, $p = 4$ et $p = 10$ sont considérées. Le module de Young est calculé sur la base de la loi de puissance de l'indice.

Les résultats actuels sont comparés aux autres résultats indiqués dans le tableau V.1. Les résultats sont comparés à Neves *et al.* [169] étaient basés sur une application de la formulation unifiée de Carrera utilisant une théorie de la déformation en cisaillement sinusoïdale, Neves *et al.* [170] était basé sur une théorie originale de déformation en cisaillement en sinus hyperbolique par collocation avec des fonctions de base radiales. Neves *et al.* [171] utilisaient une théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur pour modéliser des plaques à gradient de propriétés, Carrera *et al.* [172] et Carrera *et al.* [173] basés sur les déplacements de formulation unifiée, et Belabed *et al.* [174]; Lee *et al.* [39] ont été fondées sur une théorie affinée de la déformation par cisaillement supérieur utilisant une approche analytique pour la modélisation des plaques FG.

Les méthodes actuelles sont en accord avec les méthodes indiquées dans le tableau V.1, avec peu de différences en raison de l'étirement par effet d'étirement avec ces travaux antérieurs.

Tableau V.1 Comparaison de la déflexion sans dimension \bar{w} des plaques carrées en FGM ($a/h = 10$), sous charge sinusoïdale.

P	Sources	(a/h)		
		4	10	100
1	Neves <i>et al.</i> [169]	0.6997	0.5845	0.5624
	Neves <i>et al.</i> [170]	0.7020	0.5868	0.5648
	Neves <i>et al.</i> [171]	0.7020	0.5868	0.5647
	Carrera <i>et al.</i> [172]	0.7171	0.5875	0.5625
	Carrera <i>et al.</i> [173]	0.7171	0.5875	0.5625
	Belabed <i>et al.</i> [174]	0.6916	0.5695	0.5461
	Lee <i>et al.</i> [39]	0.6916	0.5696	0.5462
	Présente étude	0.7280	0.5889	0.5625
4	Neves <i>et al.</i> [169]	1.1178	0.8750	0.8286
	Neves <i>et al.</i> [170]	1.1095	0.8698	0.8241
	Neves <i>et al.</i> [171]	1.1108	0.8700	0.8240
	Carrera <i>et al.</i> [172]	1.1585	0.8821	0.8286
	Carrera <i>et al.</i> [173]	1.1585	0.8821	0.8286
	Belabed <i>et al.</i> [174]	1.0981	0.8423	0.7934
	Lee <i>et al.</i> [39]	1.0984	0.8424	0.7934
	Présente étude	1.1619	0.8819	0.8287
10	Neves <i>et al.</i> [169]	1.3490	0.8750	0.8286
	Neves <i>et al.</i> [170]	1.3327	0.9886	0.9228
	Neves <i>et al.</i> [171]	1.3334	0.9888	0.9227
	Carrera <i>et al.</i> [172]	1.3745	1.0072	0.9361
	Carrera <i>et al.</i> [173]	1.3745	1.0072	0.9361
	Belabed <i>et al.</i> [174]	1.3353	0.9812	0.9135
	Lee <i>et al.</i> [39]	1.3357	0.9817	0.9140
	Présente étude	1.3917	1.0089	0.9362

Dans le tableau V.2, l'analyse des contraintes non dimensionnelles et les déplacements transversaux de plaques carrées simplement classées de manière à gradient de propriétés et simplement supportées sont présentés avec une loi de puissance différente ; $p = 1, 2, 4$ et 8 . Le côté à l'épaisseur des plaques FG est pris ($a / h = 10$).

Tableau V.2 Comparaison des contraintes $\bar{\sigma}_i$ et des déplacements sans dimension \bar{w} de plaques FG carrées simplement supportées ($a / h = 10$), sous charge sinusoïdale.

P	Sources	$\bar{u} (-h/4)$	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x (h/3)$	$\bar{\sigma}_{xy} (-h/3)$	$\bar{\sigma}_{zz} (h/6)$
1	Carrera <i>et al.</i> [172]	0.6436	0.5875	1.5062	0.6081	0.251
	Wu et Chiu [175]	0.6436	0.5876	1.5061	0.6112	0.2511
	Zenkour [176]	0.6626	0.5889	1.4894	0.611	0.2622
	Mantari <i>et al.</i> [177]	0.6398	0.588	1.4888	0.6109	0.2566
	Nguyen <i>et al.</i> [67]	0.6402	0.5874	1.4825	0.608	0.2597
	Présente étude	0.6410	0.5889	1.4894	0.6110	0.2622
2	Carrera <i>et al.</i> [172]	0.9012	0.757	1.4147	0.5421	0.2496
	Wu et Chiu [175]	0.9013	0.7571	1.4129	0.5436	0.2495
	Zenkour [176]	0.9281	0.7573	1.3954	0.5441	0.2763
	Mantari <i>et al.</i> [177]	0.8957	0.7564	1.394	0.5438	0.2741
	Nguyen <i>et al.</i> [67]	0.897	0.7553	1.389	0.5414	0.2755
	Présente étude	0.8976	0.7573	1.3954	0.5441	0.2763
4	Carrera <i>et al.</i> [172]	1.0541	0.8823	1.1985	0.5666	0.2362
	Wu et Chiu [175]	1.0541	0.8823	1.1941	0.5671	0.2362
	Zenkour [176]	1.0941	0.8819	1.1783	0.5667	0.258
	Mantari <i>et al.</i> [177]	1.0457	0.8814	1.1755	0.5662	0.2623
	Nguyen <i>et al.</i> [67]	1.0488	0.8795	1.1718	0.5639	0.2611
	Présente étude	1.0492	0.8819	1.1783	0.5667	0.2580
8	Carrera <i>et al.</i> [172]	1.083	0.9738	0.9687	0.5879	0.2262
	Wu et Chiu [175]	1.083	0.9739	0.9622	0.5883	0.2261
	Zenkour [176]	1.134	0.975	0.9466	0.5856	0.2121
	Mantari <i>et al.</i> [177]	1.0709	0.9737	0.9431	0.585	0.214
	Nguyen <i>et al.</i> [67]	1.0754	0.9723	0.9413	0.5826	0.2041
	Présente étude	1.0751	0.9750	0.9466	0.5856	0.2121

Nous avons comparé les méthodes actuelles à celles rapportées dans le Tableau V.2, par Carrera *et al.* [172], Wu et Chiu [175] s'appuient sur une méthode de collocation sans maillage (MC) et une méthode de Galerkin sans éléments (EFG), utilisant l'interpolation du noyau de reproduction différentielle (DRK), Zenkour [176], à l'aide de la théorie de la déformation généralisée par cisaillement. Mantari *et al.* [177] utilisant une théorie développée de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), Nguyen *et al.* [67] reposent sur des méthodes de collocation sans maillage et de Galerkin sans éléments utilisant une théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur. Le tableau V.2 montre que les résultats actuels concordent bien avec ceux de Nguyen *et al.* [67], Wu et Chiu [175] et Mantari *et al.* [177], et d'autres travaux sont également en accord avec peu de différence.

On peut conclure dans cette partie de la validation que la méthode actuelle peut prédire et évaluer le comportement statique de plaques à gradient de propriétés supportées simplement, soumises à une charge mécanique.

V.3.2 Flexion des plaques homogènes et en FGM reposant sur des fondations élastiques

Dans la deuxième partie, dans le but de vérifier l'efficacité de la méthode actuelle pour prédire l'effet des fondations élastiques à deux paramètres sur l'analyse de flexion de plaques carrées homogènes et à gradient de propriétés, la présente étude compare les effets de la fondation élastique sur le déplacement et les contraintes. Avec d'autres œuvres rapportées, comme indiqué dans les tableaux V.3 et V.4.

La déflexion non dimensionnelle des plaques homogènes reposant sur les fondations Pasternak-Winkler soumises à une charge uniformément répartie avec différentes valeurs du rapport latéral à l'épaisseur (a/h) et des paramètres de fondation (K_w, K_p) est présentée dans le Tableau V.3.

Les résultats de la présente théorie sont comparés à ceux rapportés par Han et Liew [178] sur la théorie des plaques de Reissner-Mindlin en utilisant la méthode de la quadrature différentielle (DQ), Thai *et al.* [179] basé sur la théorie affinée des plaques de déformation par cisaillement et Park et Choi [180] utilisant un correcteur de cisaillement simplifié basé sur la théorie du premier ordre basée sur la théorie de la déformation, $k = 5/6$.

On peut observer que la déflexion des diminutions avec une augmentation des deux paramètres des fondations avec les différentes valeurs du rapport côté à épaisseur (a/h). Pour tout

rapport de valeur (a/h), on peut constater que la méthode actuelle est en bon accord avec les résultats rapportés dans le tableau V.3. En outre, la théorie actuelle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement en tant que FSDT.

Tableau V.3 Comparaison la déflexion non dimensionnelle \hat{w} des plaques carrées isotropes reposant sur la fondation Pasternak-Winkler sous des charges uniformes.

(a/h)	K_w	K_p	Sources			
			Han et Liew [178]	Thai <i>et al.</i> [179]	Park et Choi [180]	Présente étude
5	1	5	3.7069	3.7061	3.7067	3.7053
		10	2.981	2.9806	2.9808	2.9802
		15	2.4906	2.4904	2.4905	2.4901
		20	2.1375	2.1373	2.1373	2.1372
	3^4	5	3.0859	3.0855	3.0857	3.0850
		10	2.5623	2.5621	2.5622	2.5619
		15	2.1893	2.1892	2.1892	2.1891
		20	1.9104	1.9103	1.9102	1.9102
	5^4	5	1.4029	1.4032	1.4028	1.4033
		10	1.2809	1.2811	1.2807	1.2812
		15	1.1784	1.1785	1.1782	1.1786
		20	1.0911	1.0912	1.0909	1.0913
10	1	5	3.3455	3.3455	3.3455	3.3453
		10	2.7505	2.7504	2.7504	2.7503
		15	2.3331	2.3331	2.333	2.3330
		20	2.0244	2.0244	2.0243	2.0243
	3^4	5	2.8422	2.8421	2.8421	2.8420
		10	2.3983	2.3983	2.3983	2.3982
		15	2.073	2.073	2.0729	2.0729
		20	1.8245	1.8244	1.8244	1.8244
	5^4	5	1.3785	1.3785	1.3784	1.3785
		10	1.2615	1.2615	1.2614	1.2615
		15	1.1627	1.1627	1.1627	1.1627
		20	1.0782	1.0782	1.0782	1.0782
200	1	5	3.22	3.22	3.22	3.2200
		10	2.6684	2.6684	2.6684	2.6684
		15	2.2763	2.2763	2.2763	2.2763
		20	1.9834	1.9834	1.9834	1.9834
	3^4	5	2.7552	2.7552	2.7552	2.7552
		10	2.339	2.339	2.3389	2.3390
		15	2.0306	2.0306	2.0306	2.0306
		20	1.7932	1.7932	1.7932	1.7932
	5^4	5	1.3688	1.3688	1.3688	1.3688
		10	1.2543	1.2543	1.2542	1.2543
		15	1.1572	1.1572	1.1572	1.1572
		20	1.074	1.074	1.074	1.0740

Tableau V.4 Comparison of dimensionless displacements \bar{w} and constraints $\bar{\sigma}_i$ of a square plate of FGM based on elastic foundation parameters ($a/h = 10$)

$(\bar{w}, \bar{\sigma}_i)$	k_w	k_s	Sources	P					
				Céramique	1	2	5	10	Métal
$\bar{w}(0)$	0	0	Ameur <i>et al.</i> [181]	0.29603	0.58891	0.75733	0.91184	1.00892	1.60703
			Zenkour <i>et al.</i> [182]	0.29334	0.56802	0.71988	0.87256	0.98072	1.59239
			Présente étude	0.29603	0.58891	0.75733	0.91184	1.00892	1.60703
	100	0	Ameur <i>et al.</i> [181]	0.23289	0.38258	0.44719	0.49691	0.52441	0.65019
			Zenkour <i>et al.</i> [182]	0.23171	0.37476	0.43524	0.48679	0.51890	0.65161
			Présente étude	0.23290	0.38258	0.44719	0.49691	0.52441	0.65019
	0	10	Ameur <i>et al.</i> [181]	0.19284	0.28525	0.31969	0.34432	0.35729	0.41154
			Zenkour <i>et al.</i> [182]	0.19235	0.28149	0.31424	0.34028	0.35575	0.41361
			Présente étude	0.19284	0.28525	0.31969	0.34432	0.35730	0.41154
	100	10	Ameur <i>et al.</i> [181]	0.16389	0.22617	0.24729	0.26178	0.26921	0.29889
			Zenkour <i>et al.</i> [182]	0.16379	0.22419	0.24445	0.25994	0.26893	0.30081
			Présente étude	0.16390	0.22617	0.24729	0.26178	0.26921	0.29890
$\bar{\sigma}_x(h/2)$	0	0	Ameur <i>et al.</i> [181]	1.99550	3.08699	3.60936	4.24883	5.08901	1.99550
			Zenkour <i>et al.</i> [182]	2.12463	3.27707	3.82256	4.47146	5.32910	2.12463
			Présente étude	1.99550	3.08700	3.60936	4.24883	5.08901	1.99550
	100	0	Ameur <i>et al.</i> [181]	1.56991	2.00546	2.13127	2.31542	2.64513	0.80736
			Zenkour <i>et al.</i> [182]	1.67827	2.16212	2.31114	2.49458	2.81963	0.86939
			Présente étude	1.56991	2.00546	2.13127	2.31542	2.64512	0.80736
	0	10	Ameur <i>et al.</i> [181]	1.29991	1.49526	1.52360	1.60439	1.80222	0.51103
			Zenkour <i>et al.</i> [182]	1.39321	1.62400	1.66859	1.74376	1.93308	0.55186
			Présente étude	1.29991	1.49526	1.52360	1.60439	1.80222	0.51103
	100	10	Ameur <i>et al.</i> [181]	1.10480	1.18556	1.17857	1.21978	1.35791	0.37115
			Zenkour <i>et al.</i> [182]	1.18631	1.29346	1.29805	1.33209	1.46131	0.40135
			Présente étude	1.10480	1.18556	1.17857	1.21978	1.35791	0.37115

Tableau V.4 la suite.

$\bar{\sigma}_{xy}(-h/3)$	0	0	Ameur <i>et al.</i> [181]	0.70652	0.61104	0.54409	0.57546	0.58937	0.70652
			Zenkour <i>et al.</i> [182]	0.69856	0.56467	0.49269	0.52346	0.54777	0.69856
			Présente étude	0.70652	0.61104	0.54409	0.57546	0.58937	0.70652
	100	0	Ameur <i>et al.</i> [181]	0.55584	0.39696	0.32128	0.31360	0.30634	0.28585
			Zenkour <i>et al.</i> [182]	0.55179	0.37256	0.29789	0.29203	0.28983	0.28585
			Présente étude	0.55584	0.39696	0.32128	0.31360	0.30634	0.28585
	0	10	Ameur <i>et al.</i> [181]	0.46024	0.29597	0.22968	0.21729	0.20872	0.18093
			Zenkour <i>et al.</i> [182]	0.45807	0.27983	0.21507	0.20414	0.19869	0.18145
			Présente étude	0.46024	0.29597	0.22968	0.21730	0.20872	0.18093
	100	10	Ameur <i>et al.</i> [181]	0.39116	0.23467	0.17766	0.16521	0.15726	0.13141
			Zenkour <i>et al.</i> [182]	0.39005	0.22288	0.16731	0.15594	0.15021	0.13196
			Présente étude	0.39116	0.23467	0.17766	0.16521	0.15726	0.13141
$\bar{\sigma}_{xz}(0)$	0	0	Ameur <i>et al.</i> [181]	0.24618	0.24618	0.22650	0.20167	0.21981	0.24618
			Zenkour <i>et al.</i> [182]	0.24541	0.24541	0.22581	0.20107	0.21916	0.24541
			Présente étude	0.24618	0.24618	0.22650	0.20167	0.21981	0.24618
	100	0	Ameur <i>et al.</i> [181]	0.19368	0.15993	0.13375	0.10989	0.11425	0.09960
			Zenkour <i>et al.</i> [182]	0.19385	0.16191	0.13652	0.11217	0.11596	0.10042
			Présente étude	0.19368	0.15993	0.13375	0.10990	0.11425	0.09960
	0	10	Ameur <i>et al.</i> [181]	0.16037	0.11924	0.09561	0.07615	0.07784	0.06304
			Zenkour <i>et al.</i> [182]	0.16093	0.12162	0.09857	0.07841	0.07949	0.06374
			Présente étude	0.16037	0.11924	0.09561	0.07615	0.07784	0.06304
	100	10	Ameur <i>et al.</i> [181]	0.13629	0.09455	0.07396	0.05789	0.05865	0.04579
			Zenkour <i>et al.</i> [182]	0.13703	0.09686	0.07668	0.05990	0.06009	0.04636
			Présente étude	0.13630	0.09455	0.07396	0.05790	0.05865	0.04579

Dans le tableau V.4, les contraintes non dimensionnelles et la déflexion de plaques carrées homogènes et à gradient de propriétés isotropes avec différents exposants de fraction volumique sont présentes.

Nous comparons nos résultats avec les recherches de Ameer *et al.* [181] à partir de plaques de cisaillement raffinées et de Zenkour *et al.* [182], basés sur la théorie des plaques de cisaillement transverse et de déformation normale. On peut observer une diminution des contraintes de cisaillement, des contraintes axiales et de la flexion des plaques lorsque les fondations augmentent avec deux paramètres. L'exposant de la fraction volumique a grandement influencé les contraintes et la déflexion des plaques isotropes homogènes et à gradient de propriétés. On peut voir que la flèche augmente lorsque l'indice de fraction volumique p augmente. Ceci est dû au fait que la rigidité en flexion est maximale pour une plaque entièrement en céramique, c'est-à-dire ($p = 0$) et se dégrade progressivement à mesure que p augmente.

On voit que les contraintes pour une plaque entièrement en céramique sont les mêmes que pour une plaque entièrement en métal, dans le cas de la présence ou de la non présence de fondations élastiques ; C'est logique, car ces deux cas sont parfaitement homogènes et les contraintes ne dépendent pas du module d'élasticité. Par conséquent, on peut conclure que les méthodes actuelles sont en excellent accord avec les résultats rapportés dans le tableau V.4.

Les tableaux V.3 et V.4 permettent de conclure que la théorie actuelle est non seulement précise, mais aussi efficace pour prédire les réponses de la plaque reposant sur une base élastique à deux paramètres et leurs effets sur celle-ci.

V.3.3 Flexion des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques non linéaires

Dans la présente partie des résultats, le comportement en flexion des plaques FG est étudié, sous des charges sinusoïdales, avec divers paramètres de notre étude, tels que l'effet des variables fondation, loi de puissance, géométrie de la plaque, et contrainte de variation et déplacement à travers l'épaisseur.

Sur les Figures V.4, V.5, V.6 et V.7, l'effet des fondations élastiques variables de différents types (parabolique, linéaire, sinusoïdale, cosinus, exponentielle) sur le déplacement transversal non dimensionnel et la contrainte axiale, les contraintes transversales sont tracés, pour une plaque FG simplement supportée.

La Figure V.4 et V.5 montre que l'effet des fondations élastiques variables sur les contraintes axiales sans dimension $\bar{\sigma}_x$ et les contraintes transversales $\bar{\sigma}_{xy}$ n'est pas important, en particulier dans le cas des contraintes mécaniques, bien que leur effet sur les contraintes transversales $\bar{\sigma}_{xz}$ et déplacement axiale sans dimension \bar{u} soit considérable dans les Figures V.5 et V.6.

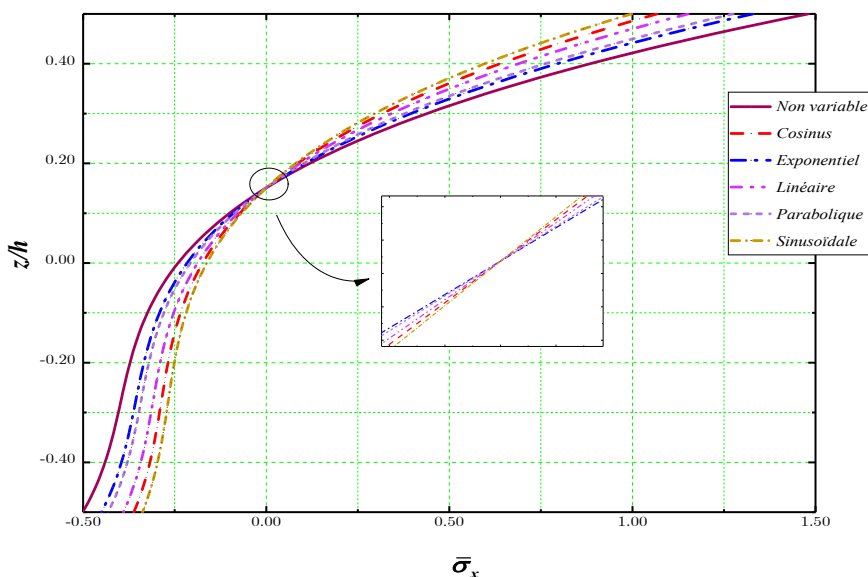


Figure V.4 Variation de la contrainte transversale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la plaque en FG sous des charges mécaniques pour différents types de paramètre de Winkler. ($p=2$, $k_w=k_s=10$, $\zeta=20$)

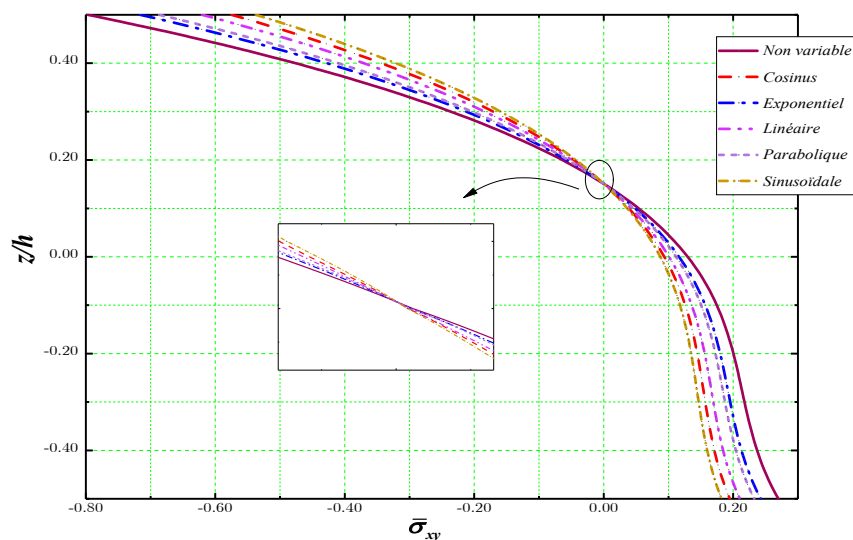


Figure V.5 Variation de la contrainte transversale $\bar{\sigma}_{xy}$ à travers l'épaisseur de la plaque en FG sous des charges mécaniques pour différents types de paramètre de Winkler. ($p=2$, $k_w=k_s=10$, $\zeta=20$)

L'effet des types de fondations élastiques variables sur la contrainte de cisaillement à travers $\bar{\sigma}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque FG est illustré aux figures V.6 et V.7. On peut voir que la valeur maximale apparaît au sommet du plan médian de la plaque FG et dépend du type de fondations élastiques variables.

La Figure V.7 montre le déplacement sans dimension à travers l'épaisseur de la plaque FGM reposant sur divers types de fondations élastiques. On peut observer que la fondation élastique diminue la déflexion de la plaque en FG.

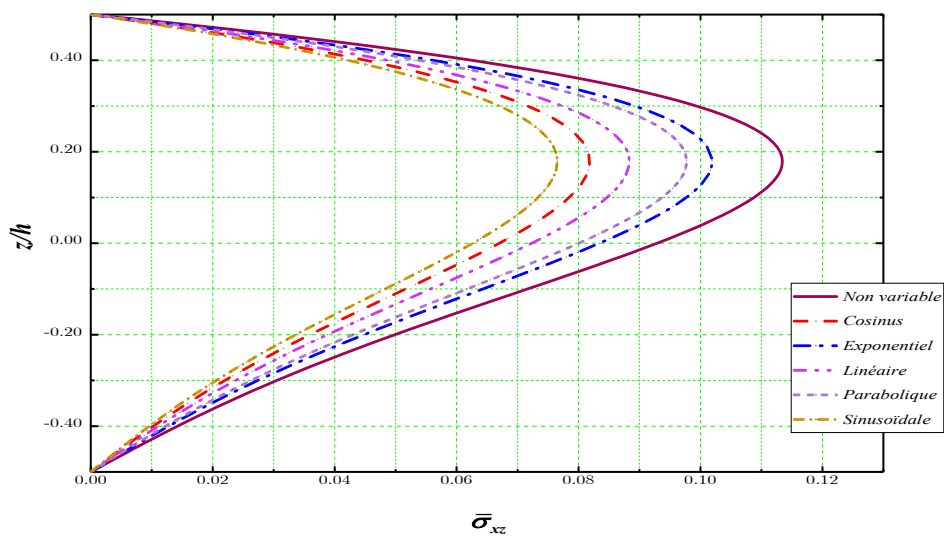


Figure V.6 Variation de la contrainte transversale $\bar{\sigma}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque en FG sous des charges mécaniques pour différents types de paramètre de Winkler, ($p=2$, $k_w=k_p=10$, $\zeta=20$)

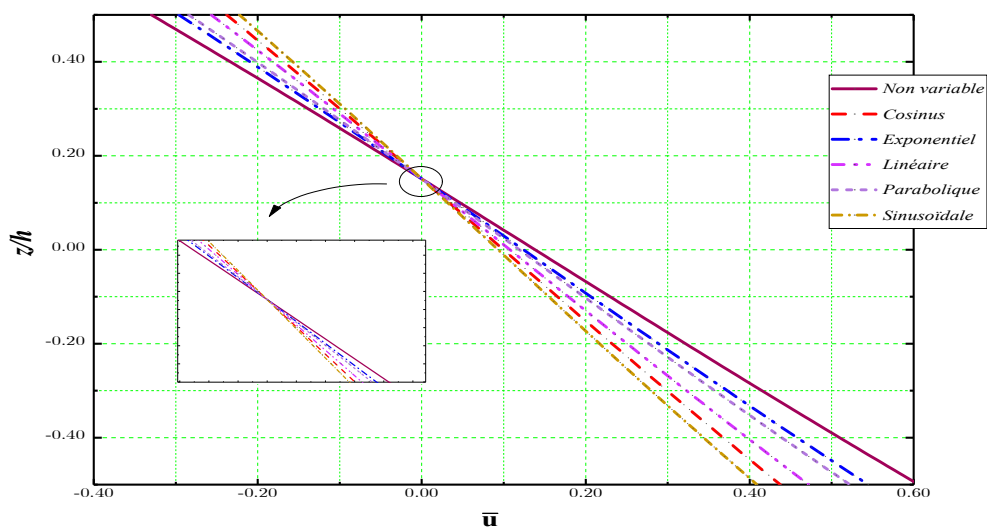


Figure V.7 Variation du déplacement transversal \bar{u} à travers l'épaisseur de la plaque en FG sous des charges mécaniques pour différents types de paramètre de Winkler, ($p=2$, $k_w=k_s=10$, $\zeta=20$)

La Figure V.8 montre le déplacement sans dimension à travers le côté (a) de la plaque FG reposant sur divers types de fondations élastiques. On peut observer que la déviation maximale est dans le plan médian du côté et que la fondation élastique diminue la déflexion de la plaque en FG.

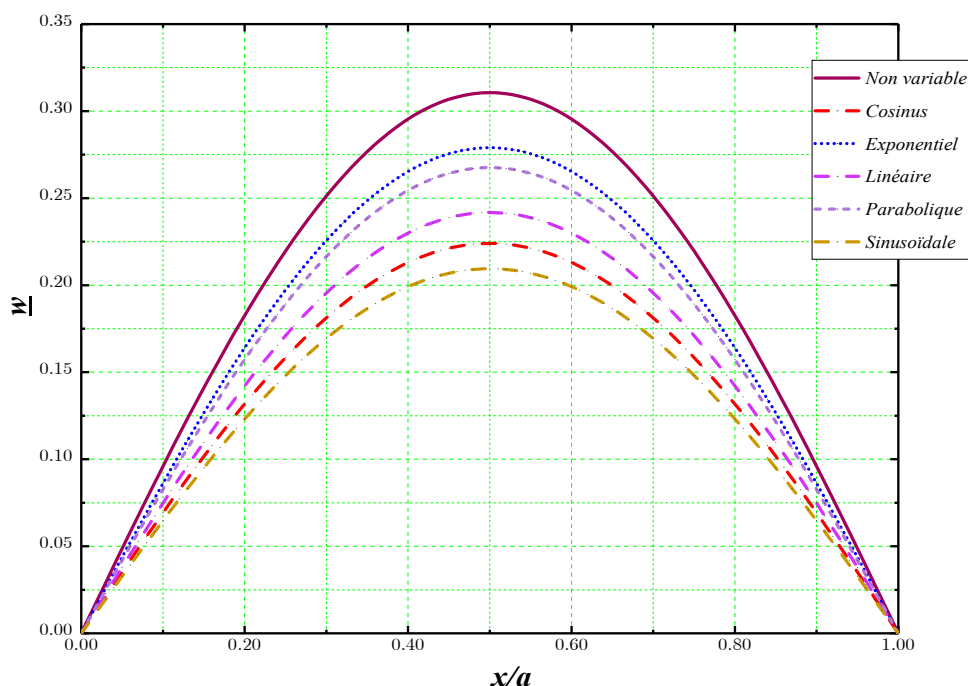


Figure V.8 Variation du déplacement transversal w à travers l'épaisseur de la plaque carrée en FG sous des charges mécaniques pour différents types de paramètre de Winkler, ($p=2$, $k_w=k_p=10$, $\zeta=20$)

Sur les Figures V.9, V.10 et V.11, l'influence des types de fondation élastique sur le déplacement sans dimension de plaques FG simplement supportées, en fonction du rapport puissance-loi, du rapport épaisseur / côté et du rapport longueur / longueur, est tracée.

On peut voir que l'augmentation de (a/h) et de (b/a) avec une diminution de la déviation non dimensionnelle de la plaque de FG. Bien que la déviation des plaques FG augmente avec la diminution de la puissance.

A partir de la Figure V.12, influence du paramètre ζ des variables de la fondation élastique de Winkler-Pasternak (parabolique, linéaire, sinusoïdale, cosinus, exponentielle) sur des plaques carrées à gradient de propriétés, sans dimension. On peut voir que la flèche est réduite avec l'augmentation du paramètre ζ de la fondation élastique.

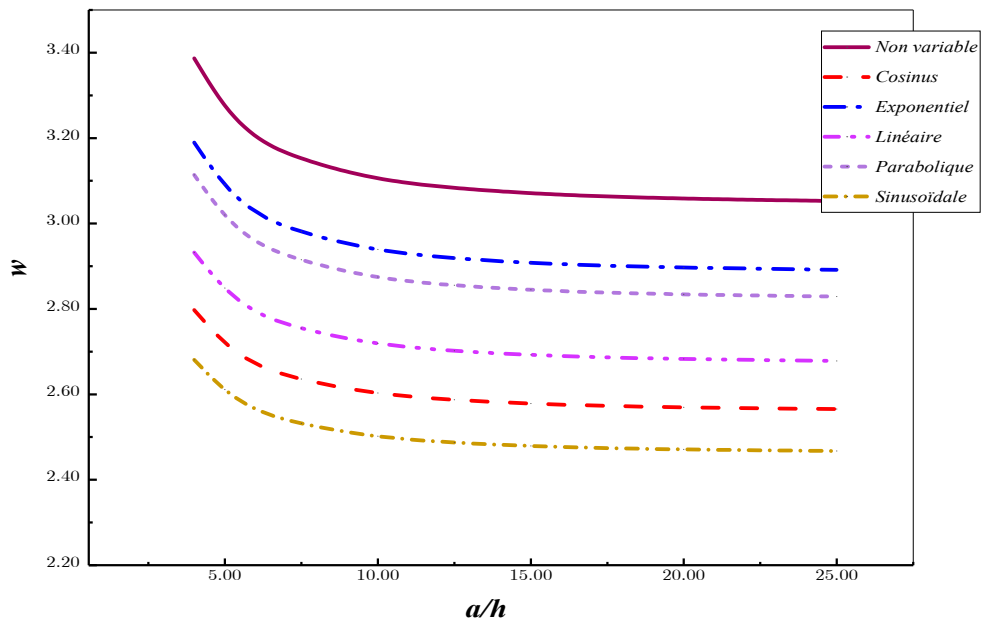


Figure V.9 Influence de différents types de fondations élastiques variables sur les déplacements non dimensionnels de plaques FG carrées sous des charges mécaniques en fonction du rapport (a/h) ($p=2, k_w=k_s=10, \zeta=10$)

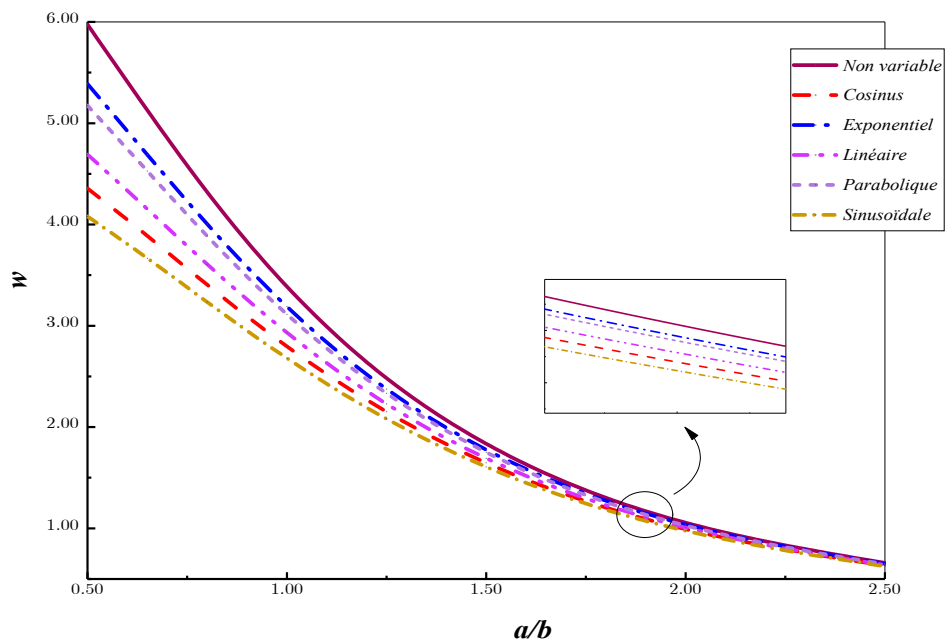


Figure V.10 Influence de différents types de fondations élastiques variables sur les déplacements non dimensionnels des plaques FG sous des charges mécaniques en fonction du rapport (a/b) ($p=2, k_w=k_p=10, \zeta=10, a/h=10$)

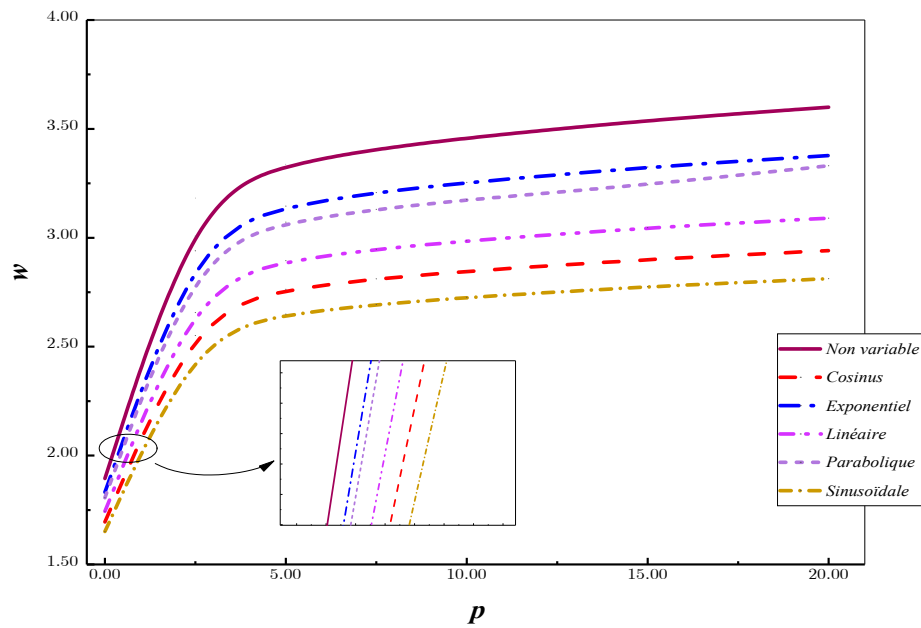


Figure V.11 Influence de différents types de fondations élastiques variables sur des déplacements non dimensionnels de plaques carrées FG sous des charges mécaniques en fonction de la loi de puissance p , ($a/h=10$, $k_w=k_s=10$, $\zeta=10$)

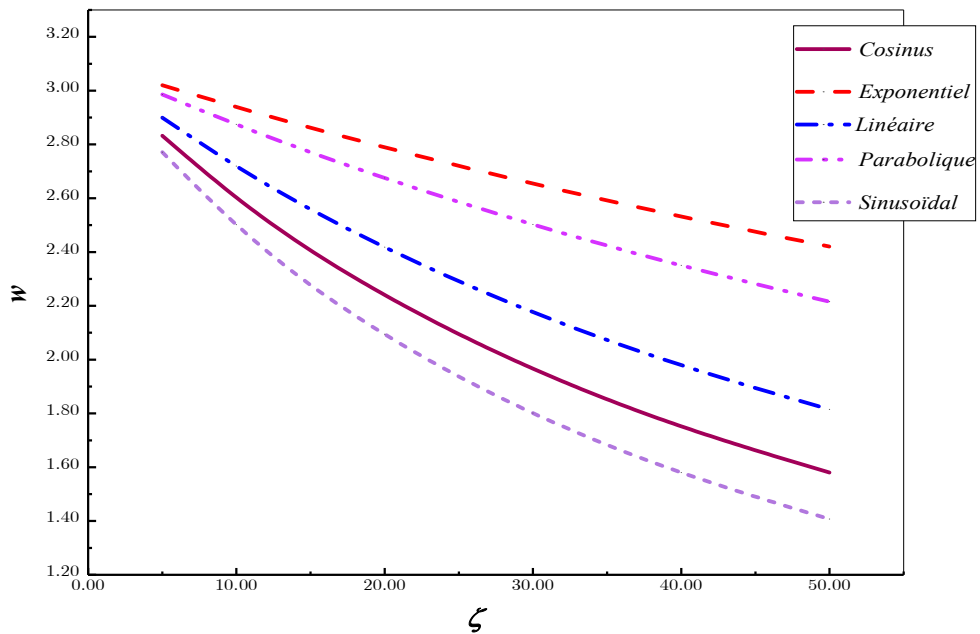


Figure V.12 Influence du paramètre ζ des fondations élastiques variables sur les déplacements non dimensionnels des plaques FG carrées sous charges mécaniques en fonction du rapport(a/h) ($p=2$, $k_w=k_s=10$, $=10$)

V.4 Conclusion

Dans ce chapitre, le développement mathématique de l'analyse statique de plaques rectangulaires homogènes et à gradient de propriétés soumises à des charges mécaniques et reposant sur la fondation élastique a été effectué ; cette étude est basée sur l'élasticité bidimensionnelle via une théorie de déformation de cisaillement plus élevée.

La théorie actuelle a été développée pour avoir seulement quatre variables, ce qui signifie qu'elle est meilleure que les autres théories en nombre d'inconnues et en temps de calcul.

La fondation élastique est censée être un paramètre de Winkler variable à travers un côté des plaques FG et Pasternak doit être constant dans deux directions. Nous avons proposé dans l'étude trois types de variations du module de Winkler (polynôme, cosinus, exponentiel) et là d'autres variations rapportées de la littérature (linéaire, parabolique, sinusoïdale avec succès.

Une validation complète et des résultats ont été présentés, et enfin, on peut conclure que la présente théorie est efficace et précise pour prédire le comportement en flexion des plaques FG reposant sur une fondation élastique.

Conclusion Générale

Conclusion Générale

Au cours de notre projet de recherche, l'effet des fondations élastiques sur le comportement dynamique et statiques des structures non homogènes des types de matériaux composites avancés est concerné par l'étude. Nous avons introduit des modèles de fondations avancées qui expriment la variation des couches et l'hétérogénéité du sol ou bien le modèle amélioré de types Pasternak-Winkler. Dans les structures, nous avons utilisé les théories d'ordre supérieur pour modéliser les structures des types de plaques.

Dans la première partie de ce travail, une formulation théorique a été développée pour étudier comportement dynamiques des plaques reposant sur fondations élastiques variables basé sur théorie de déformation par cisaillement. Cette théorie a quatre variables est ordre supérieure qui peut décrive courbe de cisaillement selon épaisseur de plaques en utilisant de une fonction de forme sinusoïdale. Les fondations élastiques ont une couche de ressort de Winkler qui a interconnecté par couche Pasternak. Winkler modules est supposé variables à travers longueur de plaques. Les équations différentielles gouvernantes sont dérivées selon la théorie de la déformation de cisaillement pour les plaques à gradient de propriétés reposant sur des fondations élastiques variables et les solutions de forme fermée du problème de vibration libre de simplement supporté ont été calculées. Les fréquences obtenues à partir de l'analyse des vibrations libres des plaques FG reposant sur des fondations élastiques uniforme ou variables ont été comparées à d'autres résultats trouvés dans la littérature et les conclusions suivantes ont été tirées :

- Les fréquences naturelles diminuent avec l'augmentation des indices de la loi de puissance avec ou sans fondation élastique.
- Les fréquences naturelles non dimensionnelles en termes de (p) diminuent avec l'augmentation de l'effet des fondations élastiques
- Les fréquences naturelles non dimensionnelles en termes de (a/h) et (a/b) , augmentent avec l'augmentation de l'effet des fondations élastiques.

- Les fréquences naturelles des plaques FG sont prédites avec une efficacité optimale, non pour les plaques minces isotropes, mais aussi pour les plaques épaisses.
- Les travaux actuels sont en bon accord avec les autres travaux antérieurs.

Dans la deuxième partie de nos recherches, pour la première fois, une formulation théorique pour la propagation des ondes dans des plaques de matériaux à gradient de propriétés reposant sur des fondations élastiques utilisant une théorie d'ordre supérieur de la déformation par cisaillement. Cette théorie du cisaillement a quatre inconnues avec la fonction de forme de Reissner qui décrit le développement du cisaillement selon l'épaisseur de plaque. Les plaques FGM sont supposées reposant sur une fondation élastique du type Winkler-Pasternak. La propagation des ondes dans les plaques FGM sans ou avec la présence de l'effet des fondations élastiques a été discutée. A partir des résultats obtenus, nous pouvons conclure :

- La fréquence circulaire et de la vitesse de phase d'une plaque reposant sur une fondation élastique sont légèrement supérieures à celle d'une plaque sans fondation élastique.
- La fréquence de propagation et la vitesse de phase des ondes dans la plaque FG augmentent avec la diminution de l'indice de la loi de puissance
- La fréquence et la vitesse de phase des ondes dans les plaques en P-FGM sont plus importantes que dans la plaque en E-FGM.

Dans la dernière partie, nous avons développé une formulation pour l'analyse statique des plaques en FGM reposant sur des fondations élastiques variables en utilisant une théorie de quatre variables de types d'ordre supérieur qui prend en compte l'effet du cisaillement. De nouvelles formulations de variation de modules de Winkler ont été proposées par rapport à d'autres formulations théoriques trouvées dans la littérature. D'après les résultats et la validation, nous pouvons conclure que :

- La flèche diminue avec augmentation des deux paramètres des fondations avec les différentes valeurs du rapport côté sur épaisseur.
- Une diminution des contraintes de cisaillement, des contraintes axiales et de la flèche des plaques lorsque les fondations augmentent les deux paramètres.
- La flèche augmente lorsque l'indice de fraction volumique p augmente.
- La flèche est réduite avec l'augmentation du paramètre ζ de la fondation élastique.

En perspective de ce travail, nous étudierons les problèmes mécaniques des structures non homogènes, nous prenons en compte :

- L'effet des nouvelles de variation proposées sur le comportement dynamique des structures à l'aide d'une théorie quasi-tridimensionnelle.
- L'effet de la fondation élastique variable sur les structures avec différentes conditions aux limites.
- L'effet des fondations élastiques variables sur le flambement de structures.
- L'effet de porosité sur les structures non-homogènes.

Ensuite, nous étudierons l'effet des fondations élastiques variables sur les structures non homogènes dans des conditions environnementales telles que l'humidité et la température.

Nous étudierons les problèmes mécaniques cités ci-dessus en utilisant des méthodes semi-analytiques telles que la méthode de quadrature différentielle (DQM) et la méthode de Ritz, ainsi que des méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis et les méthodes isogéométriques.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] Reddy J. Analysis of functionally graded plates. *International Journal for numerical methods in engineering*. 2000;47(1-3):663.
- [2] Matsunaga H. Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory. *Composite structures*. 2008;82(4):499.
- [3] Hebali H, Tounsi A, Houari MSA, Bessaim A, Bedia EAA. New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Journal of Engineering Mechanics*. 2014;140(2):374.
- [4] Bennai R, Ait Atmane H, Tounsi A. A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams. *Steel and Composite Structures*. 2015;19(3):521.
- [5] Bellifa H, Benrahou KH, Hadji L, Houari MSA, Tounsi A. Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2016;38(1):265.
- [6] Brischetto S, Tornabene F, Fantuzzi N, Viola E. 3D exact and 2D generalized differential quadrature models for free vibration analysis of functionally graded plates and cylinders. *Meccanica*. 2016;51(9):2059.
- [7] Ait Yahia S, Ait Atmane H, Houari MSA, Tounsi A. Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories. *Structural Engineering and Mechanics*. 2015;53(6):1143.
- [8] Bounouara F, Benrahou KH, Belkorissat I, Tounsi A. A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation. *Steel and Composite Structures*. 2016;20(2):227.
- [9] Bourada F, Amara K, Tounsi A. Buckling analysis of isotropic and orthotropic plates using a novel four variable refined plate theory. *Steel and Composite Structures*. 2016;21(6):1287.
- [10] Kolahchi R, Safari M, Esmailpour M. Dynamic stability analysis of temperature-dependent functionally graded CNT-reinforced visco-plates resting on orthotropic elastomeric medium. *Composite Structures*. 2016;150:255.
- [11] Menasria A, Bouhadra A, Tounsi A, Bousahla AA, Mahmoud S. A new and simple HSDT for thermal stability analysis of FG sandwich plates. *Steel and Composite Structures*. 2017;25(2):157.
- [12] Benadouda M, Atmane HA, Tounsi A, Bernard F, Mohmoud S. An efficient shear deformation theory for wave propagation in functionally graded material beams with porosities. *Earthquakes and Structures*. 2017 13(3):255.
- [13] Ayache B, Bennai R, Fahsi B, Fourn H, Atmane HA, Tounsi A. Analysis of wave propagation and free vibration of functionally graded porous material beam with a novel four variable refined theory. *EARTHQUAKES AND STRUCTURES*. 2018;15(4):369.
- [14] Bouhadra A, Tounsi A, Bousahla AA, Benyoucef S, Mahmoud S. Improved HSDT accounting for effect of thickness stretching in advanced composite plates. *STRUCTURAL ENGINEERING AND MECHANICS*. 2018;66(1):61.
- [15] Yousfi M, Atmane HA, Meradjah M, Tounsi A, Bennai R. Free vibration of FGM plates with porosity by a shear deformation theory with four variables. *STRUCTURAL ENGINEERING AND MECHANICS*. 2018;66(3):353.
- [16] Fourn H, Atmane HA, Bourada M, Bousahla AA, Tounsi A, Mahmoud S. A novel four variable refined plate theory for wave propagation in functionally graded material plates. *STEEL AND COMPOSITE STRUCTURES*. 2018;27(1):109.
- [17] Zidi M, Tounsi A, Houari MSA, Bég OA. Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory. *Aerospace Science and Technology*. 2014;34:24.
- [18] Ait Atmane H, Tounsi A, Bernard F, Mahmoud S. A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities. *Steel and Composite Structures*. 2015;19(2):369.
- [19] Darilmaz K. Vibration analysis of functionally graded material (FGM) grid systems. *Steel and Composite Structures*. 2015;18(2):395.
- [20] Kar VR, Panda SK. Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel. *Steel and Composite Structures*. 2015;18(3):693.

- [21] Bennoun M, Houari MSA, Tounsi A. A novel five-variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2016;23(4):423.
- [22] Younsi A, Tounsi A, Zaoui FZ, Bousahla AA, Mahmoud S. Novel quasi-3D and 2D shear deformation theories for bending and free vibration analysis of FGM plates. *GEOMECHANICS AND ENGINEERING*. 2018;14(6):519.
- [23] Winkler E. *Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit*. Prag Dominicus. 1867.
- [24] Filonenko-Borodich M. Some approximate theories of elastic foundation. *Uchenyie Zapiski Moskovkogo Gosudarstuenngo Universiteta Mekhanika, Moscow*. 1940;46:3.
- [25] Hetényi M. *Beams on elastic foundation: theory with applications in the fields of civil and mechanical engineering*: University of Michigan; 1971.
- [26] Pasternak P. On a new method of an elastic foundation by means of two foundation constants. *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstuve i Arkhitekture*. 1954.
- [27] Vlasov V. *Structural mechanics of thin-walled three-dimensional systems*. Stroizdat, Moscow. 1949.
- [28] Razaqpur AG, Shah K. Exact analysis of beams on two-parameter elastic foundations. *International Journal of Solids and Structures*. 1991;27(4):435.
- [29] Ying J, Lü CF, Chen WQ. Two-dimensional elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic foundations. *Composite Structures*. 2008;84(3):209.
- [30] Lü C, Lim CW, Chen W. Exact solutions for free vibrations of functionally graded thick plates on elastic foundations. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2009;16(8):576.
- [31] Malekzadeh P. Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations. *Composite Structures*. 2009;89(3):367.
- [32] Ait Atmane H, Tounsi A, Mechab I, Adda Bedia EA. Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. 2010;6(2):113.
- [33] Sobhy M. Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions. *Composite Structures*. 2013;99:76.
- [34] Taibi FZ, Benyoucef S, Tounsi A, Bachir Bouiadjra R, Adda Bedia EA, Mahmoud SR. A simple shear deformation theory for thermo-mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations. *Journal of Sandwich Structures & Materials*. 2014;17(2):99.
- [35] Zhang LW, Lei ZX, Liew KM. Free vibration analysis of FG-CNT reinforced composite straight-sided quadrilateral plates resting on elastic foundations using the IMLS-Ritz method. *Journal of Vibration and Control*. 2016;23(6):1026.
- [36] Chakraverty S, Pradhan KK. Flexural vibration of functionally graded thin skew plates resting on elastic foundations. *International Journal of Dynamics and Control*. 2017;6(1):97.
- [37] Akavci SS. An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. *Composite Structures*. 2014;108:667.
- [38] Khalfi Y, Houari MSA, Tounsi A. A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation. *International Journal of Computational Methods*. 2014;11(05):1350077.
- [39] Lee W-H, Han S-C, Park W-T. A refined higher order shear and normal deformation theory for E-, P-, and S-FGM plates on Pasternak elastic foundation. *Composite Structures*. 2015;122:330.
- [40] Mahmoudi A, Benyoucef S, Tounsi A, Benachour A, Adda Bedia EA, Mahmoud S. A refined quasi-3D shear deformation theory for thermo-mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundations. *Journal of Sandwich Structures & Materials*. 2019;21(6):1906.
- [41] Hashmi S. *Comprehensive materials processing*: Newnes; 2014.
- [42] Jha D, Kant T, Singh R. A critical review of recent research on functionally graded plates. *Composite Structures*. 2013;96:833.
- [43] Shen M, Bever M. Gradients in polymeric materials. *Journal of Materials science*. 1972;7(7):741.

- [44] Koizumi M. FGM activities in Japan. *Composites Part B: Engineering*. 1997;28(1-2):1.
- [45] Udupa G, Rao SS, Gangadharan K. Functionally graded composite materials: an overview. *Procedia Materials Science*. 2014;5:1291.
- [46] Naebe M, Shirvanimoghaddam K. Functionally graded materials: A review of fabrication and properties. *Applied Materials Today*. 2016;5:223.
- [47] Wattanasakulpong N, Gangadhara Prusty B, Kelly DW, Hoffman M. Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation. *Materials & Design (1980-2015)*. 2012;36:182.
- [48] Shen H-S. *Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells*: CRC press; 2016.
- [49] Belabed Z, Houari MSA, Tounsi A, Mahmoud S, Bég OA. An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates. *Composites Part B: Engineering*. 2014;60:274.
- [50] Birman V, Byrd LW. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Applied mechanics reviews*. 2007;60(5):195.
- [51] Nebab M, Atmane HA, Bennai R. Analyse en flexion des plaques FGM sur fondation élastique. *Academic Journal of Civil Engineering*. 2018;36(1):516.
- [52] Nikbakht S, Kamarian S, Shakeri M. A review on optimization of composite structures Part II: Functionally graded materials. *Composite Structures*. 2019;214:83.
- [53] Praveen GN, Reddy JN. Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. *International Journal of Solids and Structures*. 1998;35(33):4457.
- [54] Shariat BAS, Eslami MR. Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads. *Composite Structures*. 2007;78(3):433.
- [55] Nebab M, Atmane HA, Bennai R, Tounsi A, Bedia E. Vibration response and wave propagation in FG plates resting on elastic foundations using HSDT. *Structural Engineering and Mechanics*. 2019;69(5):511.
- [56] Nebab M, Ait Atmane H, Bennai R, Tounsi A. Effect of variable elastic foundations on static behavior of functionally graded plates using sinusoidal shear deformation. *Arabian Journal of Geosciences*. 2019;12(24):809.
- [57] Nebab M, Atmane HA, Bennai R, Tahar B. Effect of nonlinear elastic foundations on dynamic behavior of FG plates using four-unknown plate theory. *Earthquakes and Structures*. 2019;17(5):447.
- [58] Shah AG, Mahmood T, Naeem MN. Vibrations of FGM thin cylindrical shells with exponential volume fraction law. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2009;30(5):607.
- [59] Behravan Rad A, Alibeigloo A. Semi-Analytical Solution for the Static Analysis of 2D Functionally Graded Solid and Annular Circular Plates Resting on Elastic Foundation. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2013;20(7):515.
- [60] Huang Z, Lü C, Chen W. Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations. *Composite Structures*. 2008;85(2):95.
- [61] Reddy K, Kant T. Three-dimensional elasticity solution for free vibrations of exponentially graded plates. *Journal of Engineering Mechanics*. 2013;140(7):04014047.
- [62] Thang P-T, Nguyen-Thoi T, Lee J. Closed-form expression for nonlinear analysis of imperfect sigmoid-FGM plates with variable thickness resting on elastic medium. *Composite Structures*. 2016;143:143.
- [63] Lee C-Y, Kim J-H. Evaluation of homogenized effective properties for FGM panels in aero-thermal environments. *Composite Structures*. 2015;120:442.
- [64] Bhandari M, Purohit K. Response of functionally graded material plate under thermomechanical load subjected to various boundary conditions. *International Journal of Metals*. 2015;2015.
- [65] Batou B, Nebab M, Bennai R, Atmane HA, Tounsi A, Bouremana M. Wave dispersion properties in imperfect sigmoid plates using various HSDTs. *Steel and Composite Structures*. 2019;33(5):699.
- [66] Şimşek M, Al-Shujairi M. Static, free and forced vibration of functionally graded (FG) sandwich beams excited by two successive moving harmonic loads. *Composites Part B: Engineering*. 2017;108:18.
- [67] Nguyen T-K, Nguyen V-H, Chau-Dinh T, Vo TP, Nguyen-Xuan H. Static and vibration analysis of isotropic and functionally graded sandwich plates using an edge-based MITC3 finite elements. *Composites Part B: Engineering*. 2016;107:162.

- [68] Vel SS, Batra RC. Exact Solution for Thermoelastic Deformations of Functionally Graded Thick Rectangular Plates. *AIAA Journal*. 2002;40(7):1421.
- [69] Tamura Y, Tomota, Ozawa H. Proceedings of the 3rd International Conference on Strength of Metals and Alloys. In: Metals Io, editor. *Strength of Metals and Alloys*. Cambridge 1973. p. 611.
- [70] Williamson RL, Rabin BH, Drake JT. Finite element analysis of thermal residual stresses at graded ceramic-metal interfaces. Part I. Model description and geometrical effects. *Journal of Applied Physics*. 1993;74(2):1310.
- [71] Giannakopoulos A, Suresh S, Finot M, Olsson M. Elastoplastic analysis of thermal cycling: layered materials with compositional gradients. *Acta Metallurgica et Materialia*. 1995;43(4):1335.
- [72] Carpenter R, Liang W, Paulino G, Gibeling JC, Munir Z. Fracture testing and analysis of a layered functionally graded Ti/TiB beam in 3-point bending. *Materials Science Forum: Trans Tech Publications*; 1999. p. 837-842.
- [73] Paulino GH, Jin ZH, Dodds RH. 2.13 - Failure of Functionally Graded Materials. In: Milne I, Ritchie RO, Karihaloo B, editors. *Comprehensive Structural Integrity*. Oxford: Pergamon; 2003. p. 607-644.
- [74] Groves JF, Wadley HNG. Functionally graded materials synthesis via low vacuum directed vapor deposition. *Composites Part B: Engineering*. 1997;28(1):57.
- [75] Mahamood RM, Akinlabi ET, Shukla M, Pityana S. Functionally graded material: an overview. *International Association of Engineers (IAENG)*. 2012;3.
- [76] Knoppers G, Gunnink J, Van Den Hout J, Van Wliet W. The reality of functionally graded material products. *Intelligent Production Machines and Systems-First I* PROMS Virtual Conference: Proceedings and CD-ROM set, Elsevier2005*. p. 467.
- [77] Gupta A, Talha M. Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Progress in Aerospace Sciences*. 2015;79:1.
- [78] Udupa G, Rao SS, Gangadharan KV. Functionally Graded Composite Materials: An Overview. *Procedia Materials Science*. 2014;5:1291.
- [79] Zhu J, Lai Z, Yin Z, Jeon J, Lee S. Fabrication of ZrO₂-NiCr functionally graded material by powder metallurgy. *Materials chemistry and physics*. 2001;68(1-3):130.
- [80] Watanabe Y, Inaguma Y, Sato H, Miura-Fujiwara E. A novel fabrication method for functionally graded materials under centrifugal force: The centrifugal mixed-powder method. *Materials*. 2009;2(4):2510.
- [81] Epler L. New Duplex Surface Treatment Dramatically Improves Die Life, Part Quality & Cost Savings. *Die Casting Engineer*. 2012:16.
- [82] Bhavar V, Kattire P, Thakare S, patil S, Singh RKP. A Review on Functionally Gradient Materials (FGMs) and Their Applications. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2017;229:012021.
- [83] Obata Y, Takeuchi K, Kawazoe M, Kanayama K. Design of functionally graded wood-based board for floor heating system with higher energy efficiency. *Materials Science Forum: Trans Tech Publ*; 2003. p. 819-824.
- [84] Demetris P, Cristina G. *Mechanics of functionally graded material structures*: World Scientific; 2015.
- [85] Altenbach H. Theories for laminated and sandwich plates. *Mechanics of composite materials*. 1998;34(3):243.
- [86] Khandan R, Noroozi S, Sewell P, Vinney J. The development of laminated composite plate theories: a review. *Journal of Materials Science*. 2012;47(16):5901.
- [87] Caliri Jr MF, Ferreira AJ, Tita V. A new finite element for thick laminates and sandwich structures using a generalized and unified plate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2017;109(2):290.
- [88] de Lima AS, de Faria AR, Faria JJR. Critical review of displacement-based laminate theories and modeling techniques. 2018:10.
- [89] Carrera E. Theories and finite elements for multilayered anisotropic, composite plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2003;10(3):216.
- [90] Zhang Y, Yang C. Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates. *Composite structures*. 2009;88(1):147.

- [91] Kirchhoff G. Ueber die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Scheibe. *Annalen der Physik*. 1850;157(10):258.
- [92] Kirchhoff G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)*. 1850;40:51.
- [93] Ghugal YM, Shimpi RP. A Review of Refined Shear Deformation Theories of Isotropic and Anisotropic Laminated Plates. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2016;21(9):775.
- [94] Dozio L. Exact free vibration analysis of Lévy FGM plates with higher-order shear and normal deformation theories. *Composite Structures*. 2014;111:415.
- [95] Barut A, Madenci E, Tessler A. C0-continuous triangular plate element for laminated composite and sandwich plates using the {2,2} – Refined Zigzag Theory. *Composite Structures*. 2013;106:835.
- [96] Whitney JM, Sun CT. A higher order theory for extensional motion of laminated composites. *Journal of Sound and Vibration*. 1973;30(1):85.
- [97] Khdeir AA, Reddy JN. Free vibrations of laminated composite plates using second-order shear deformation theory. *Computers & Structures*. 1999;71(6):617.
- [98] Shahrjerdi A, Bayat M, Mustapha F, Sapuan SM, Zahari R. Second-Order Shear Deformation Theory to Analyze Stress Distribution for Solar Functionally Graded Plates#. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2010;38(3):348.
- [99] Yang S, Yuan FG. Transient wave propagation of isotropic plates using a higher-order plate theory. *International Journal of Solids and Structures*. 2005;42(14):4115.
- [100] Elishakoff IAP, Demetris%A Gentilini, Cristina. *Mechanics of Functionally Graded Material Structures* 2015.
- [101] JR. NJH. Response of elastic columns to axial pulse loading. *AIAA Journal*. 1963;1(9):2099.
- [102] Shimpi R, Patel H, Arya H. New first-order shear deformation plate theories. *Journal of Applied Mechanics*. 2007;74(3):523.
- [103] Abrate S, Di Sciuva M. Equivalent single layer theories for composite and sandwich structures: A review. *Composite Structures*. 2017;179:482.
- [104] Kim S-E, Thai H-T, Lee J. Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory. *Thin-Walled Structures*. 2009;47(4):455.
- [105] Senthilnathan N, Lim S, Lee K, Chow S. Buckling of shear-deformable plates. *AIAA journal*. 1987;25(9):1268.
- [106] Mantari JL. A simple polynomial quasi-3D HSDT with four unknowns to study FGPs. Reddy's HSDT assessment. *Composite Structures*. 2016;137:114.
- [107] Levy M. Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes. *Journal de mathématiques pures et appliquées*. 1877:219.
- [108] Stein M. Nonlinear theory for plates and shells including the effects of transverse shearing. *AIAA journal*. 1986;24(9):1537.
- [109] Touratier M. An efficient standard plate theory. *International journal of engineering science*. 1991;29(8):901.
- [110] Thai CH, Ferreira A, Bordas SPA, Rabczuk T, Nguyen-Xuan H. Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a new inverse trigonometric shear deformation theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2014;43:89.
- [111] Nguyen T-K, Nguyen TT-P, Vo TP, Thai H-T. Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*. 2015;76:273.
- [112] Grover N, Singh BN, Maiti DK. Free vibration and buckling characteristics of laminated composite and sandwich plates implementing a secant function based shear deformation theory. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2015;229(3):391.
- [113] Soldatos K. A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mechanica*. 1992;94(3-4):195.
- [114] Shinde B, Sayyad AS, Kawade A. Thermal analysis of isotropic plates using hyperbolic shear deformation theory. *Applied and Computational Mechanics*. 2013;7(2).

- [115] Benyoucef S, Mechab I, Tounsi A, Fekrar A, Atmane HA. Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations. *Mechanics of Composite Materials*. 2010;46(4):425.
- [116] Thai CH, Kulasegaram S, Tran LV, Nguyen-Xuan H. Generalized shear deformation theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric approach. *Computers & Structures*. 2014;141:94.
- [117] Karama M, Afaq K, Mistou S. A new theory for laminated composite plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*. 2009;223(2):53.
- [118] Sayyad AS. Flexure of thick orthotropic plates by exponential shear deformation theory. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2013;10:473.
- [119] Sayyad AS, Ghugal Y. Buckling and free vibration analysis of orthotropic plates by using exponential shear deformation theory. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2014;11(8):1298.
- [120] Sayyad AS, Ghugal YM. Bending and free vibration analysis of thick isotropic plates by using exponential shear deformation theory. *Applied and Computational mechanics*. 2012;6(1).
- [121] Aydogdu M. A new shear deformation theory for laminated composite plates. *Composite structures*. 2009;89(1):94.
- [122] Mantari J, Soares CG. Static response of advanced composite plates by a new non-polynomial higher-order shear deformation theory. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2014;78:60.
- [123] Pawar EG, Banerjee S, Desai YM. Stress analysis of laminated composite and sandwich beams using a novel shear and normal deformation theory. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2015;12(7):1340.
- [124] Abualnour M, Houari MSA, Tounsi A, Bedia EAA, Mahmoud SR. A novel quasi-3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates. *Composite Structures*. 2018;184:688.
- [125] Carrera E. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2002;9(2):87.
- [126] Murakami H. *Laminated composite plate theory with improved in-plane responses*. 1986.
- [127] D’Ottavio M. A Sublaminated Generalized Unified Formulation for the analysis of composite structures. *Composite Structures*. 2016;142:187.
- [128] Burton WS, Noor AK. Assessment of computational models for sandwich panels and shells. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 1995;124(1-2):125.
- [129] Dutta SC, Roy R. A critical review on idealization and modeling for interaction among soil–foundation–structure system. *Computers & structures*. 2002;80(20-21):1579.
- [130] Taylor D. *Fundamentals of soil mechanics*. New York: John Wiley and Sons; 1964.
- [131] Popov E. Successive approximations for beams on an elastic foundation. *Proceedings of the American Society of Civil Engineers: ASCE*; 1950. p. 1-13.
- [132] Al B. *Raft foundations*. third edition. London: Concrete Publications Ltd; London: Concrete Publications Ltd; 1957.
- [133] Vesic AB. Bending of beams resting on isotropic elastic solid. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1961;87(2):35.
- [134] Kramrisch F, Rogers P. Simplified design of combined footings. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*. 1961;87(5):19.
- [135] Brown CB, Tilton JR, Laurent JM. Beam-plate system on Winkler foundation. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1977;103(4):589.
- [136] Terzaghi K. Evaluation of coefficients of subgrade reaction. *Geotechnique*. 1955;5(4):297.
- [137] Harr ME. *Foundations of theoretical soil mechanics*. 1966.
- [138] Boussinesq H. *Applications des Potentiels à l’Etude de l’Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques*. Paris: Gauthier-Villars; Paris: Gauthier-Villars; 1885.
- [139] Fletcher DQ, Hermann LR. Elastic foundation representation of continuum. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1971;97(1):95.

- [140] Biot MA. Bending of an infinite beam on an elastic foundation. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1922;2(3):165.
- [141] Gorbunov-Pasadov M. Beams and plates on an elastic base. Stroizdat, Moscow, USSR; 1949.
- [142] Kerr AD. Elastic and viscoelastic foundation models. 1964.
- [143] Föppl A. Vorlesungen über technische Mechanik: BG Teubner; 1909.
- [144] Hetenyi M. A general solution for the bending of beams on an elastic foundation of arbitrary continuity. *Journal of Applied Physics*. 1950;21(1):55.
- [145] Hetenyi M. Beams on elastic foundations. Scientific series. Ann Arbor, University of Michigan Press. 1946.
- [146] Kerr AD. A study of a new foundation model. *Acta Mechanica*. 1965;1(2):135.
- [147] Wang CM, Xiang Y, Wang Q. Axisymmetric buckling of Reddy circular plates on Pasternak foundation. *Journal of engineering mechanics*. 2001;127(3):254.
- [148] Pradhan SC, Murmu T. Thermo-mechanical vibration of FGM sandwich beam under variable elastic foundations using differential quadrature method. *Journal of Sound and Vibration*. 2009;321(1-2):342.
- [149] Sobhy M. Thermoelastic Response of FGM Plates with Temperature-Dependent Properties Resting on Variable Elastic Foundations. *International Journal of Applied Mechanics*. 2015;07(06).
- [150] Beldjelili Y, Tounsi A, Mahmoud SR. Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory. *Smart Structures and Systems*. 2016;18(4):755.
- [151] Attia A, Bousahla AA, Tounsi A, Mahmoud S, Alwabri AS. A refined four variable plate theory for thermoelastic analysis of FGM plates resting on variable elastic foundations. *Structural engineering and mechanics*. 2018;65(4):453.
- [152] Caddell R. Deformation and fracture of solid. Englewood Cliffs NJ: Prentice-Hall In; 1980.
- [153] Poursmaeeli S, Ghavanloo E, Fazelzadeh SA. Vibration analysis of viscoelastic orthotropic nanoplates resting on viscoelastic medium. *Composite Structures*. 2013;96:405.
- [154] Brinson HF, Brinson LC. Polymer engineering science and viscoelasticity: Springer; 2015.
- [155] Ghorbanpour Arani A, Shiravand A, Rahi M, Kolahchi R. Nonlocal vibration of coupled DLGS systems embedded on Visco-Pasternak foundation. *Physica B: Condensed Matter*. 2012;407(21):4123.
- [156] Hasani Baferani A, Saidi AR, Ehteshami H. Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation. *Composite Structures*. 2011;93(7):1842.
- [157] Zaoui FZ, Ouinas D, Tounsi A. New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations. *Composites Part B: Engineering*. 2019;159:231.
- [158] Benahmed A, Houari MSA, Benyoucef S, Belakhdar K, Tounsi A. A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. *Geomechanics and Engineering*. 2017;12(1):9.
- [159] Shahsavari D, Shahsavari M, Li L, Karami B. A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation. *Aerospace Science and Technology*. 2018;72:134.
- [160] Leissa AW. The free vibration of rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*. 1973;31(3):257.
- [161] Zhou D, Cheung YK, Au FTK, Lo SH. Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method. *International Journal of Solids and Structures*. 2002;39(26):6339.
- [162] Mantari JL, Granados EV, Guedes Soares C. Vibrational analysis of advanced composite plates resting on elastic foundation. *Composites Part B: Engineering*. 2014;66:407.
- [163] Meftah A, Bakora A, Zaoui FZ, Tounsi A, Bedia EAA. A non-polynomial four variable refined plate theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. *STEEL AND COMPOSITE STRUCTURES*. 2017;23(3):317.
- [164] Liu FL, Liew KM. Analysis of vibrating thick rectangular plates with mixed boundary constraints using differential quadrature element method. *Journal of Sound and Vibration*. 1999;225(5):915.

- [165] Nagino H, Mikami T, Mizusawa T. Three-dimensional free vibration analysis of isotropic rectangular plates using the B-spline Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*. 2008;317(1-2):329.
- [166] Hosseini-Hashemi S, Fadaee M, Rokni Damavandi Taher H. Exact solutions for free flexural vibration of Lévy-type rectangular thick plates via third-order shear deformation plate theory. *Applied Mathematical Modelling*. 2011;35(2):708.
- [167] Shufrin I, Eisenberger M. Stability and vibration of shear deformable plates—first order and higher order analyses. *International Journal of Solids and Structures*. 2005;42(3-4):1225.
- [168] Reissner E. On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation. *International Journal of Solids and Structures*. 1975;11(5):569.
- [169] Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Roque CMC, Cinefra M, Jorge RMN et al. A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composites Part B: Engineering*. 2012a;43(2):711.
- [170] Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Roque CMC, Jorge RMN et al. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*. 2012b;94(5):1814.
- [171] Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Roque CMC, Jorge RMN et al. Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. *Composites Part B: Engineering*. 2013;44(1):657.
- [172] Carrera E, Brischetto S, Robaldo A. Variable kinematic model for the analysis of functionally graded material plates. *AIAA journal*. 2008;46(1):194.
- [173] Carrera E, Brischetto S, Cinefra M, Soave M. Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Composites Part B: Engineering*. 2011;42(2):123.
- [174] Belabed Z, Ahmed Houari MS, Tounsi A, Mahmoud SR, Anwar Bég O. An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates. *Composites Part B: Engineering*. 2014;60:274.
- [175] Wu C-P, Chiu K-H. RMVT-based meshless collocation and element-free Galerkin methods for the quasi-3D free vibration analysis of multilayered composite and FGM plates. *Composite Structures*. 2011;93(5):1433.
- [176] Zenkour AM. Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Applied Mathematical Modelling*. 2006;30(1):67.
- [177] Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C. Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory. *Composite Structures*. 2012;94(2):714.
- [178] Han JB, Liew KM. Numerical differential quadrature method for Reissner/Mindlin plates on two-parameter foundations. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1997;39(9):977.
- [179] Thai H-T, Park M, Choi D-H. A simple refined theory for bending, buckling, and vibration of thick plates resting on elastic foundation. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2013;73:40.
- [180] Park M, Choi D-H. A Simplified First-order Shear Deformation Theory for Bending, Buckling and Free Vibration Analyses of Isotropic Plates on Elastic Foundations. *KSCE Journal of Civil Engineering*. 2018;22(4):1235.
- [181] Ameer M, Tounsi A, Mechab I, El Bedia AA. A new trigonometric shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations. *KSCE Journal of Civil Engineering*. 2011;15(8):1405.
- [182] Zenkour AM, Allam MNM, Radwan AF. Effects of transverse shear and normal strains on fg plates resting on elastic foundations under hygro-thermo-mechanical loading. *International Journal of Applied Mechanics*. 2014;06(05):1450063.