

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Hassiba Benbouali de Chlef

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Physique



# THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

## DOCTORAT

Filière : Physique

Spécialité : Physique des Matériaux

Par

**Hanane BENMAHDJOUR**

Thème :

---

**Diffusion multiple des ondes de matière à basse température dans un champ de speckle en dehors d'un piège harmonique**

---

Soutenue le 21/11/2023, devant le jury composé de :

Habib RACHED	Professeur	U.H.B-Chlef	Président
Afifa YEDJOUR	Professeur	U.S.T-Oran	Rapporteur
Abdelaali BOUDJEMAA	Professeur	U.H.B-Chlef	Co-rapporteur
Rachid TRAICHE	MCA	U.H.B-Chlef	Examineur
Ahmed BOUHEKKA	Professeur	U.A.Y-Tissemsilt	Examineur
Hamida BOUHANI BENZIANE	MCA	U.H.B-Chlef	Examineur

## .... *Avant-propos* ....

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire de recherche suivant:

- *Laboratoire de Mécanique et énergie* du département physique de l'université Hassiba Benbouali de Chlef sous la direction de Monsieur **TAHAR ABBES Miloud**, Professeurs à l'université de Chlef,

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Madame **YEDJOUR Afifa**, Professeur à Université des sciences et de la technologie d'Oran-USTO. Je la remercie pour ses qualités humaines et scientifiques, et de m'avoir formé et accompagné tout au long de ces travaux de thèse. Qu'il trouve ici le témoignage de mon respect le plus considérable et ma profonde gratitude.

Je voudrais aussi adresser un merci très sincère à mon co-directeur de thèse, Monsieur **BOUDJEMAA Abdelaali**, Professeur à l'université Hassiba Benbouali de Chlef

Je tiens à remercier chef CFD, Monsieur **BELABBAS Mohamed**, professeur à l'université Hassiba Benbouali de Chlef

J'exprime ici, mes remerciements à Monsieur **TAHAR ABBES Miloud**, directeur du laboratoire de *Mécanique et énergie*, pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire de recherche.

Je tiens également à exprimer toute ma reconnaissance et mes vifs remerciement à tous mes compagnons du laboratoire de recherche, spécialement, **BOUTAMI kenza** et **BOUZIDI Fatima** pour leur soutien moral durant cette thèse, et pour leurs gentillesse et générosités et à toute l'équipe du laboratoire de Mécanique et énergie.

Finalement, et sans citer de noms, que tous mes enseignants, tous mes amis et collègues de de l'université de Chlef, trouvent ici mes sincères remerciements.

**.... Dédicace ....**

Avant tout, je remercie **DIEU** le tout puissant qui m'a donné le courage,  
la volonté et la patience de mener à terme ce présent travail.

***Je dédie ce travail :***

A mes chers parents, sans eux, je ne serais pas où je suis aujourd'hui.  
J'avoue que c'est grâce à leurs sacrifices je suis arrivé à devenir ce que je  
suis aujourd'hui. Je ne vous remercierai jamais assez pour ce que vous  
avez été pour moi et continuez à être.

A mes frères Abdelkader et Mohamed amine, et ma sœur Amel,  
pour leurs soutiens moral, leurs encouragements continus et leurs amour  
inconditionnel.

A mon frère Mohammed Amin pour sa patience, sa présence et  
ses encouragements.

A mes petits neveux Rayan et Qusay et ma petite nièce Marame,  
je vous aime énormément.

A mes grands-parents. Que dieu vous garde en bonne santé.

A toutes les personnes de ma grande famille.

A mes meilleurs amies Fatima, Hadjer et Asma.

# Table des matières

Avant-propos.....	
Dédicace.....	
Table des matières.....	I
Table des notations et des symboles .....	V
Introduction générale .....	1

## Chapitre I : Atomes froids et condensats quantiques

I.1. Introduction.....	5
I.2. Manipulation des atomes froids .....	6
I.2.1. Champ électrique du faisceau laser .....	7
I.2.2. Moment induit et les interactions dipolaire .....	8
I.2.3. Hamiltonien total des systèmes couplés .....	8
I.2.4. La force de pression de radiation .....	9
I.2.5. La force dipolaire .....	9
I.3. Atome de Rubidium $^{87}\text{Rb}$ .....	10
Table I.1. Caractéristique physiques du Rubidium $^{87}\text{Rb}$ .....	11
Table I.2. Propriétés collision du Rubidium $^{87}\text{Rb}$ .....	11
I.4. Ralentissement d'un jet atomique par pression de radiation .....	11
I.4.1. Présentation de l'expérience de ralentissement à effet Zeeman .....	12
I.5. Diverses techniques de refroidissement .....	13
I.5.1. Refroidissement Doppler.....	13
I.5.2. Mélasse optique.....	14
I.5.3. Piège magnéto-optique (PMO).....	14
I.5.3.1. Transition de PMO.....	15
I.6. Piégeage magnétique.....	16
I.6.1. Principe du piège magnétique .....	17
I.6.2. Piège quadripolaire.....	17
I.6.3. Piège magnétique Ioffe-Pritchard.....	19
I.7. Refroidissement évaporatif .....	20
I.8. Condensation de Bose-Einstein (CBE) .....	20
I.8.1. Principe de Condensation de Bose-Einstein.....	21
I.8.2. Distribution de Bose-Einstein dans un potentiel harmonique .....	21
I.8.3. Condensation à une température critique .....	23

I.9.	Effet des interactions dans le gaz de Bose .....	25
I.9.1.	Fonction d'onde macroscopique à N particules .....	25
I.9.2.	Potentiel d'interaction .....	27
I.9.3.	Contrôle les interactions interatomique .....	27
I.9.4.	Equation de Gross-Pitaevskii .....	28
I.9.5.	L'approximation de Thomas-Fermi .....	29
I.10.	Conclusion.....	29

## **Chapitre II : Localisation d'Anderson des atomes froids en expansion optique**

II.1.	Introduction .....	32
II.2.	Propagation des ondes dans un milieu désordonné .....	33
II.2.1.	Diffusion simple .....	33
II.2.2.	Diffusion multiple .....	34
II.2.3.	Interférence.....	35
II.3.	Transition de phase.....	36
II.3.1.	Théorie classique de Drude .....	37
II.3.2.	Modèle d'Anderson.....	38
II.4.	Critère de localisation.....	40
II.4.1.	Critère d'Ioffe-Regel .....	40
II.4.2.	Critère de Thouless.....	40
II.5.	Théorie d'échelle.....	41
II.6.	Localisation des atomes froids .....	43
II.6.1.	Localisation de l'onde plane dans un faible désordre .....	44
II.6.2.	Localisation de condensat dans un champ de speckle.....	45
II.7.	Réalisation d'un désordre basée sur un champ de speckle.....	47
II.7.1.	Répartition de l'intensité.....	49
II.7.2.	Rugosité du champ de speckle .....	50
II.7.3.	Propriété statistique du champ de speckle.....	50
II.7.4.	Dimension du grain du champ de speckle.....	51
II.8.	Conclusion.....	52

### **Chapitre III : Transport quantique des atomes froids dans le champ de speckle à 3D**

III.1. Introduction .....	55
III.2. Équation de Lippmann – Schwinger .....	56
III.3. Fonction de Green .....	57
III.3.1. Fonction de Green libre .....	59
III.4. Matrice de diffusion .....	60
III.5. Diffusion multiple .....	61
III.6. Fonction de corrélation.....	62
III.6.1. Transformation de Fourier de la fonction de corrélation.....	63
III.7. Modèle physique .....	64
III.8. Diagramme des diffusions basé sur la fonction de Green .....	64
III.9. Self énergie.....	65
III.9.1. Approximations de la self énergie.....	69
III.9.2. Approximation de Born au premier ordre(FBA).....	69
III.9.3. Approximation de Born auto-consistante (SCBA).....	70
III.10. Fonction spectral .....	71
III.11. Résultat et discussion .....	71
III.11.1. Résultat de la self énergie.....	72
III.11.1.1. Résultat des approximations FBA et SCBA.....	72
III.11.1.2. Effet de la longueur de corrélation sur la self énergie.....	74
III.11.1.3. Effet d'énergie des ondes de matière sur la self énergie .....	75
III.11.1.4. Self énergie à une impulsion nulle .....	78
III.11.2. Résultats de la Fonction spectrale .....	80
III.11.2.1. Effet de l'énergie de l'onde de matière sur la fonction spectrale .....	81
III.11.2.2. Effet de l'amplitude de désordre sur la fonction spectrale .....	81
III.11.2.3. Effet du nombre d'onde sur la fonction spectrale .....	82
III.12. Conclusion.....	83

### **Chapitre IV : Etude des paramètres critiques de la localisation**

IV.1 Introduction .....	85
IV.2 Localisation du point de vue d'Anderson.....	86
IV.2.1 Etat de la matière.....	86
IV.2.2 Densité d'états .....	87
IV.2.3 Conductivité des matériaux .....	90
IV.3 Modèle de la théorie auto-cohérente .....	92

IV.3.1	Etude analytique de la théorie auto-cohérente.....	93
IV.4	Critère d'Ioffe-Regel.....	95
IV.5	Modèle de la matrice de transfert quasi-1D .....	97
IV.5.1	Etude analytique de la matrice de transfert quasi-1D.....	99
IV.6	Résultats et discussion.....	100
IV.6.1	Estimation de l'intervalle du passage continu du régime diffusif.....	101
IV.6.2	Estimation de l'énergie critique par le critère d'Ioffe-Regel .....	103
IV.6.3	Estimation les grandeurs critiques par la matrice de transfert quasi-1D .....	104
IV.7	Conclusion.....	107
	Conclusion général.....	109
	Bibliographie.....	111
	Annexes .....	125

# Table des notations et des symboles

## I. Atomes froids et condensats quantiques

$E_1, E_2$	L'énergie de niveaux fondamentale, l'énergie de niveau excité
$h$	Constante de Planck
$f_a, f_L$	Fréquence atomique, fréquence de laser
$\lambda$	Longueur d'onde
$p$	L'impulsion
$k_B$	constante de Boltzmann
$\hat{H}$	Hamiltonien
$\vec{F}$	La force
$U$	Potentiel
$n$	Densité
$T_{CBE}$	Température de condensation de Bose-Einstein
$T_c$	Température critique
$\mu$	Moment magnétique
$N_1, N_2$	Nombre des atomes de l'état fondamental, Nombre des atomes de l'état excité
$N$	Nombre des atomes totaux
$k$	Vecteur d'onde
$U_0$	Potentiel effectif
$\Omega$	La pulsation de Rabi
$s$	Paramètre de saturation
$I$	L'intensité de faisceaux laser
$I_s$	Intensité de saturation
$\Gamma$	la largeur de la résonance atomique
$J$	Moment cinétique
$\vec{B}$	Champ magnétique



**II. Localisation d'Anderson des atomes froids en expansion optique**

$L$	La taille du milieu désordonné
$l$	le libre parcours moyen
$L_{loc}$	la longueur de localisation
$k, k'$	Le vecteur de l'onde incidente, Le vecteur de l'onde diffusé
$A(k, k')$	amplitude complexe
$D_{loc}$	le coefficient de diffusion
$\tau$	Le temps typique entre deux collisions
$\sigma$	Conductivité
$J$	La densité du courant
$v$	La vitesse des électrons
$\nu$	L'exposant critique
$d$	La dimension du système désordonné
$\delta E$	L'énergie de Thouless
$g$	La conductance
$\gamma$	l'exposant de Lyapounov
$D(k)$	La distribution d'onde du condensat en expansion
$\mu$	Moment magnétique
$C(2k)$	distribution spatiale
$k_c, k_{max}$	Les nombres des ondes critiques, les nombres des ondes maximales
$t_{diff}$	La transmission de l'onde diffusée
$A_0$	L'amplitude de l'onde incidente
$f$	Plan focale de lentille
$r_c$	Corrélation du diffuseur
$\Theta$	La fonction de Heaviside
$I$	L'intensité de l'onde diffractée.

**III. Transport quantique des atomes froids dans le champ de speckle à 3D**

$H_0$	Hamiltonien libre
$V$	Le potentiel désordonné
$\hat{G}^R, \hat{G}^A$	Opérateur de fonction de Green retardé et avancé
$\hat{G}_0$	Fonction de Green libre
$\varepsilon$	L'énergie de l'atome
$V$	Le potentiel désordonné

$\hat{t}$	La matrice de diffusion
$U$	L'amplitude de champ de speckle
$U_{kk'}$	La fonction de structure
$\bar{q}$	La différence entre les vecteurs d'onde incidente et diffusé
$\Sigma$	L'opérateur de masse
$\xi$	La longueur de corrélation
$\Sigma(k, \varepsilon)$	La self énergie
$Re \Sigma(k, \varepsilon), Im \Sigma(k, \varepsilon)$	Réelle de la self énergie, Imaginaire de la self énergie
$A(\varepsilon, k)$	La fonction spectrale
$I(k, k')$	La fonction de structure

#### IV. Transition des atomes froids dans un potentiel désordonné tridimensionnels :

$E_c$	L'énergie critique
$\Omega_d$	volume d'une hypersphère
$I$	Courant
$\rho$	résistance
$D$	Densité d'état
$m$	Masse de l'électron
$e$	Charge
$r$	Position
$D_B$	Coefficient de diffusion
$D_w$	Normalisation de Coefficient de diffusion
$W$	L'intensité de désordre
$W_c$	Désordre critique
$L_{quasi}$	Longueur quasi unidimensionnel
$M$	Largeur de quasi unidimensionnel.

#### V. Abréviations

PMO	Piège magnéto-optique
CBE	Condensation de Bose-Einstein
FBA	Approximation de Born au premier ordre
SCBA	Approximation de Born auto-cohérente

# Introduction générale

En 1958, Anderson a introduit le concept de localisation des particules par le désordre pour les électrons dans les solides [And-58]. Par la suite, il a été réalisé que cela résultait d'un effet subtil d'interférence qui concerne tous les types d'ondes cohérentes se propageant dans un milieu aléatoire [Bel-94, Wie-97]. Le concept s'est donc étendu à de nombreux autres domaines de la physique : ondes électromagnétiques [Wie-97], optiques [Dal-91], acoustiques [Wea-90] et sismiques [Akr-20], mais aussi des supraconducteurs désordonnés [Vol-80] et de l'hélium superfluide dans les milieux poreux [Mak-69], où il a été étudié à la fois théoriquement et expérimentalement. Comme nous le verrons, ce problème est également très intéressant à étudier avec des atomes froids, car les paramètres de ces systèmes sont très bien contrôlés.

La première observation de la localisation d'Anderson des ondes de matière a été réalisée en une dimension (1D) au laboratoire Charles Fabry en France. Les expérimentateurs ont visuellement observé une localisation exponentielle d'un condensat de Bose-Einstein libéré dans un guide d'ondes unidimensionnel en présence d'un désordre contrôlé créé par un speckle laser [Bill-08].

En 2020, le groupe de Donald H. White a effectué une mesure sur le transport d'atomes ultrafroids entre deux réservoirs connectés par un canal présentant un désordre ponctuel. La conception expérimentale a réussi à surmonter de nombreux défis techniques qui avaient limité les observations antérieures de la localisation. Les résultats ont permis d'observer une décroissance exponentielle de la localisation dans le système d'atomes ultrafroids en 2D [Whi-20].

Ces résultats ont ouvert une nouvelle voie de recherche dans le domaine des systèmes quantiques désordonnés [Hsu-20, Lem-09]. Toutefois, la complexité expérimentale pour observer la localisation augmente significativement avec la dimension du système. Créer un milieu extrêmement diffusant en 3D, atteignant ainsi le critère de Ioffe-Regel ( $kl \sim 1$ ) [Iof-60] tout en conservant un taux d'absorption négligeable, représente, en effet un véritable défi expérimental.

Les observations consensuelles de la localisation d'Anderson en 3D sont rares, et on peut les compter sur les doigts de la main. Par exemple, on peut citer l'expérience qui a été réalisée avec des ondes lumineuses diffusant dans des nanoparticules de TiO<sub>2</sub> dans le groupe de Störzner en Allemagne [Stö-06], ainsi que l'expérience avec des ondes élastiques se propageant dans une matrice de billes d'aluminium dans le groupe de J. Page au Canada [Hu-08]. L'observation définitive de la localisation des ondes de matière par le désordre en 3D reste à venir. Non seulement cela permettrait d'étudier ce phénomène sans être perturbé par les interactions et les effets de température finie, mais ouvrirait également de nouvelles perspectives pour le stockage

## Introduction générale

avec des applications novatrices dans les domaines de l'information quantique et de l'énergie solaire.

Revenons maintenant sur la création des condensats de Bose-Einstein. Pendant plus de vingt ans, les techniques de refroidissement des gaz atomiques ont été étudiées pour produire des atomes froids atteignant des températures aussi basses que quelques centaines de microkelvins [Wie-99]. Les techniques de refroidissement sont manipulées par des faisceaux lumineux interférant avec l'atome pour produire des mécanismes de ralentissement [Dar-05]. Au début, les atomes sont refroidis par une lumière du laser en une dimension [Lou-93], puis la technique de refroidissement s'est généralisée en trois dimensions [Wil-17]. Depuis 1985, des autres techniques plus développées, tels que la mélasse optique et le piège magnéto-optique [Gri-92], ont été découvertes en ajoutant du piégeage magnétique aux atomes afin de contrôler très précisément les forces de ralentissement des atomes [Nir-07]. À la fin des années 80, les techniques de l'évaporation des atomes les plus actifs ont été menées en optique à l'aide des instruments d'optique atomique afin d'améliorer les résultats de refroidissement et pour obtenir la condensation des atomes de bosons [Beh-19].

En 1995, la physique des atomes froids a été utilisée pour simuler des problèmes fondamentaux de la matière condensée [Lew-07]. La condensation des atomes est marquée à basse température et est décrite comme l'accumulation des bosons à l'état gazeux dans l'état fondamental du potentiel de piégeage [Had-08]. En effet, la condensation de Bose-Einstein peut se produire lorsque la longueur d'onde de Broglie de l'onde de matière devient du même ordre que la distance entre les atomes, permettant ainsi une augmentation de la densité atomique. Cette condensation regroupe les atomes de bosons dans le même état quantique formant une onde de matière [Jah-20].

Le désordre est un ingrédient crucial pour comprendre les propriétés de transport des ondes [Asp-09, Aub-10, Ben-15, Bil-10, Edw-96, Jen-12, Kun-83, Akk-20]. Son effet induit une localisation qui provient essentiellement de l'interférence des chemins de diffusion multiples le long de son trajet [Ric-15, Wol-25]. Un tel effet d'interférence, connu sous le nom de localisation faible, augmente la probabilité de retour à l'origine et ralentit ainsi le transport, entraînant une réduction de la constante de diffusion et de la conductivité par rapport à la contribution de Boltzmann ou Drude [Wol-25, Akk-20]. D'autre part, lorsque la localisation est suffisamment forte, l'onde reste localisée autour de sa position initiale, conduisant à une élimination totale du transport, ce qui signifie que la diffusion est arrêtée et la conductivité est strictement nulle [Mot-68, And-72].

Il a été constaté que le transport des ondes de matière atomique dans des milieux tridimensionnels (3D) est significativement affecté par trois paramètres : l'amplitude du désordre, l'énergie initiale de l'onde et l'énergie de corrélation induite par le désordre [Yed-10, pir-13]. Plus récemment,

## Introduction générale

l'évolution dynamique des condensats de Bose–Einstein (BEC) en expansion dans un potentiel aléatoire en 3D a été examinée en détail dans l'espace et le temps [Yed-22].

En outre, le transport cohérent et la localisation d'Anderson dans des milieux désordonnés sont fortement influencés par les effets d'anisotropie (voir par exemple [Kun-83, Pir-13]). Des travaux récents [Akr-20, Asp-09, Bul-85, Yed-B-23] révèlent que l'anisotropie du transport est réduite près du bord de mobilité. L'anisotropie de la diffusion cohérente peut être contrôlée par les propriétés du milieu de diffusion effectif moyenné sur le désordre

### **Définition des objectives de l'étude :**

Les principaux objectifs que nous voulons atteindre sont définis comme suit :

- La self énergie qui a un rôle important sur l'interaction entre l'onde et le potentiel, avec elle, nous pouvons caractériser plusieurs grandeurs physiques comme, le libre parcours moyen, la durée de vie des atomes durant la diffusion.
- La fonction spectrale qui peut nous informer sur la nature des états quantique obtenus selon les paramètres du speckle (longueur de corrélation, amplitude de désordre, nombre d'onde).
- La valeur de l'énergie critique, le nombre critique de l'onde de matière et l'intensité critique du désordre.

### **Organisation de la thèse :**

Cette thèse est organisée comme suit :

Le premier chapitre présente les différentes techniques de refroidissement des atomes en illustrant le mécanisme d'interaction entre la lumière de laser et l'atome. Une attention particulière sera accordée à la condensation de Bose-Einstein en exposant les principes fondamentaux de ce phénomène.

Le deuxième chapitre se consacre à une introduction sur les différentes diffusions d'ondes existant dans les milieux désordonnés, en expliquant leurs impacts sur la propagation des ondes. Ces concepts sont des outils nécessaires pour cette thèse. Nous commençons par une présentation des échelles spatiales importantes pour l'étude de la localisation, ainsi que des principales propriétés statistiques des potentiels désordonnés et de leurs différentes formes. Ensuite, nous exposons les critères de localisation et l'état de la transition, en expliquant les notions de localisation faible et forte, ainsi que le comportement des matrices de densité en fonction des impulsions. La dernière section aborde le rôle du champ de potentiel sur la diffusion des atomes froids et ses effets sur leur propagation.

## Introduction générale

Les chapitres 3 et 4, qui constituent l'essentiel de cette thèse, abordent l'effet d'un désordre corrélé associée à une fonction non gaussienne sur le comportement des condensats de Bose-Einstein.

Dans le chapitre 3, nous examinons les impacts d'un potentiel de désordre faible avec des fonctions corrélées non gaussiennes en 3D sur les propriétés des atomes froids, en mettant en compétition les interactions et le désordre. Nous fournissons une description détaillée du problème et expliquons comment obtenir le spectre de la self-énergie en mettant l'accent sur sa partie imaginaire. Nos résultats démontrent que les paramètres du désordre sont pertinents pour réduire l'influence du potentiel de désordre dans le condensat de Bose-Einstein. Les corrélations, la diffusion multiple du condensat due au désordre et à l'énergie des atomes froids sont également mises en évidence. Nous comparons nos résultats à des travaux théoriques précédents.

Dans le dernier chapitre, nous abordons le calcul numérique de la conductivité de Drude et de la densité d'états pour examiner le point critique associé au seuil de la transition. Cela se fait en se basant sur le critère d'Ioffe-Regel et sur la matrice de transfert quasi-unidimensionnelle. Les résultats indiquent que dans les deux cas, nous identifions un seuil de transition marquant le passage d'un régime localisé à un régime diffusif. Les différences entre ces deux valeurs sont attribuables aux corrélations qui persistent davantage dans le modèle quasi-1D par rapport à la géométrie complexe en 3D.

La thèse se termine par les principales conclusions et perspectives pour l'avenir.

---



---

## Atomes froids et condensats quantiques

---



---

I.1.	Introduction .....	5
I.1.1.	Manipulation des atomes froids.....	6
I.2.	Champ électrique du faisceau laser .....	7
I.2.1.	Moment induit et les interactions dipolaire .....	7
I.2.2.	Hamiltonien total des systèmes couplés .....	8
I.2.3.	La force de pression de radiation.....	9
I.2.4.	La force dipolaire .....	9
I.3.	Atome de Rubidium $^{87}\text{Rb}$ .....	10
I.4.	Ralentissement d'un jet atomique par pression de radiation .....	11
I.4.1.	Présentation de l'expérience de ralentissement à effet Zeeman .....	11
I.5.	Diverses techniques de refroidissement .....	12
I.5.1.	Refroidissement Doppler .....	12
I.5.2.	Mélasse optique .....	13
I.5.3.	Piège magnéto-optique (PMO).....	14
I.5.3.1.	Transition de PMO .....	15
I.6.	Piégeage magnétique .....	16
I.6.1.	Principe du piège magnétique .....	16
I.6.2.	Piège quadripolaire.....	17
I.6.3.	Piège magnétique Ioffe-Pritchard.....	19
I.7.	Refroidissement évaporatif.....	20
I.8.	Condensation de Bose-Einstein (CBE) .....	20
I.8.1.	Principe de Condensation de Bose-Einstein .....	21
I.8.2.	Distribution de Bose-Einstein dans un potentiel harmonique .....	21
I.8.3.	Condensation à une température critique .....	24
I.9.	Effet des interactions dans le gaz de Bose.....	25
I.9.1.	Fonction d'onde macroscopique à N particules .....	26
I.9.2.	Potentiel d'interaction .....	27
I.9.3.	Contrôle des interactions interatomiques .....	27
I.9.4.	Equation de Gross-Pitaevskii .....	26
I.9.5.	L'approximation de Thomas-Fermi.....	29
I.10.	Conclusion.....	30

## I.1. Introduction

En 1985, la manipulation du refroidissement des gaz atomiques constituait un domaine de recherche très dynamique. Plus précisément, cette méthode était employée pour induire la transition des gaz atomiques vers un état d'atomes froids grâce à l'utilisation de lasers [Gol-14]. Les expérimentations dans ce domaine relevaient de la physique des atomes froids, offrant des applications variées dans des domaines tels que la métrologie, l'optique, l'interférométrie atomique et la physique moléculaire [Cro-09]. Les avancées dans la manipulation des atomes froids ont été reconnues par le Prix Nobel de Physique décerné à Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji et William D. Phillips en 1997 [Phi-98].

À la fin des années 80, des expérimentations ont été conduites vers l'optique, utilisant des instruments spécifiques tels que l'optique atomique, pour explorer les propriétés des ondes atomiques. Une de ces expériences, l'expérience des fentes de Young, décrite par [Jac-07], conceptualise l'atome froid en tant qu'onde, où la longueur d'onde de De Broglie de l'atome devient comparable à la longueur d'onde de la lumière. Cette conceptualisation a été facilitée par le développement des techniques de refroidissement des atomes, notamment dans le domaine de l'interférométrie atomique. Le principe de l'interférométrie atomique repose sur la réduction de la vitesse de l'atome à mesure que la longueur d'onde de De Broglie augmente, intensifiant ainsi les effets d'onde. La faible vitesse résultante permet non seulement d'accroître la précision des mesures, mais aussi d'étendre la durée de la mesure [Gou-48].

Le refroidissement des atomes au moyen d'un faisceau laser a conduit à la découverte de la condensation des atomes de rubidium 87. Ce phénomène avait été initialement observé en 1924-1925 par Albert Einstein, qui a formulé la théorie de la distribution en énergie d'un gaz parfait monoatomique, maintenant connue sous le nom de distribution de Bose-Einstein [Bor-14]. En 1995, Eric Cornell et son équipe ont confirmé cette observation d'Einstein, décrivant la condensation comme l'accumulation de bosons dans l'état fondamental d'un potentiel de piégeage à des températures inférieures au millikelvin [Cor-98].

Selon la théorie d'Einstein, lorsque la longueur d'onde de De Broglie de différents atomes atteint l'ordre de grandeur de la distance moyenne entre les atomes, la condensation de Bose-Einstein peut se produire, et la densité du nuage atomique dans l'espace devient de l'ordre de 1 [Bar-01]. Ce nuage atomique en condensation de Bose-Einstein prend la forme d'une onde de matière, exprimée par une fonction d'onde condensée. L'émergence de cette fonction d'onde condensée résulte des interactions et des collisions entre les atomes. Les recherches approfondies sur la condensation de gaz atomique, en particulier avec des atomes alcalins, ont valu le prix Nobel en 2001[Raj-11].

Dans cette section, la première partie du chapitre se concentrera sur la présentation de la force lumineuse totale ressentie par un atome, visant à extraire la force de pression de radiation. Par la suite, nous explorerons l'utilisation de cette force pour ralentir un jet atomique et refroidir des atomes purs. Nous détaillerons également les dispositifs optiques nécessaires pour mettre en œuvre la technique de



refroidissement atomique. La deuxième partie de ce chapitre sera dédiée à la compréhension de la condensation de Bose-Einstein, mettant en avant les caractéristiques statiques du condensat. En conclusion, nous aborderons les interactions interatomiques et la théorie du champ moyen.

### I.1.1. Manipulation des atomes froids

Avec le développement des méthodes de refroidissement des gaz atomiques, les chercheurs ont initié l'activité d'interaction entre les atomes et le laser à des températures suffisamment basses de l'ordre du nano kelvin [Ang-02, Sch-21]. La manipulation des atomes froids consiste à contrôler les atomes par la force de la pression de radiation exercée par le laser, réduire la vitesse des atomes à des valeurs très faibles, stabiliser et confiner les atomes au centre [Dal-17]. Le ralentissement des atomes par le laser dépend principalement sur l'absorption et l'émission des photons de la lumière par les atomes [Sch-2010]. Le modèle d'interaction entre l'atome et le laser est souvent utilisé pour aider à comprendre les effets atomiques nécessaires pour générer l'absorption et l'émission de la lumière laser entre les deux niveaux énergétiques  $E_1$  et  $E_2$ . L'énergie entre ces deux niveaux est définie comme suit [Eve-11]:

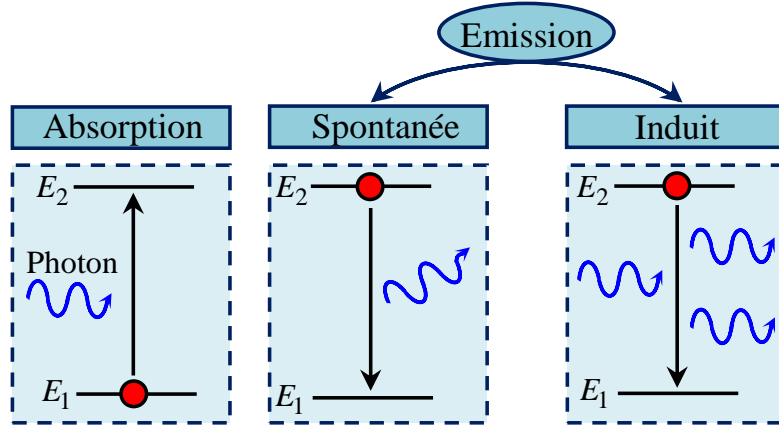
$$\Delta E = h\nu = h \frac{c}{\lambda} \quad (\text{I.1})$$

Avec, l'énergie  $E$  est liée avec la constante de Planck  $h$  et sa fréquence  $\nu$  ou liée avec sa longueur d'onde  $\lambda$ .

L'interaction entre l'atome et le rayonnement apparaît de trois voies différentes :

- La première voie est l'absorption des photons. Cette étape dépend du déplacement de l'atome de niveau fondamental  $E_1$  au niveau excité  $E_2$ , ce qui permet de réduire la vitesse de l'atome. Cette vitesse est appelée la vitesse de recul.
- La deuxième voie est l'émission spontanée. Lorsque l'atome est dans le niveau excité, il cherche naturellement à revenir à son niveau d'énergie le plus bas, ou le niveau fondamental. Pour cela, l'atome émet un ou plusieurs photons afin de descendre de niveau à l'autre, jusqu'à l'arriver sur le niveau fondamental. Dans cette voie, l'impulsion de l'atome est conservée et peut exprimer par :  $\vec{P}_i + \hbar\vec{k} = \vec{P}_f$ . Avec,  $\vec{P}_i$  et  $\vec{P}_f$  sont respectivement les impulsions initiale et finale.
- La troisième voie est l'émission induit des photons. Pour que l'atome revienne à son niveau inférieur lorsqu'il est dans un niveau excité, il émet un deuxième photon, exactement le même que le photon incident. Dans cette voie, l'impulsion de l'atome est conservée et peut donner par:  $\vec{P}_i + \hbar\vec{k} = \vec{P}_f + 2\hbar\vec{k}$ . Avec  $\hbar\vec{k}$  représente l'impulsion du photon. À partir du ralentissement des atomes par le faisceau laser, l'atome possède une vitesse de recule donnée par :  $\vec{v}_r = \frac{\hbar\vec{k}}{M}$  ; où  $M$  est la masse des particules. La vitesse de recule et une énergie

considérée comme une énergie cinétique est définie par:  $E_r = \frac{1}{2} Mv_r^2$  . De plus, la température de recul est exprimé à partir de l'énergie de recul comme suit :  $T_r = \frac{2E_r}{3k_B}$  . Avec,  $k_B$  represent la constante de Boltzmann [Sch-2010, Cro-96].



**Figure I.1.** Présentation de mécanisme d'interaction entre le laser et l'atome [Eve-11]

**I.2. Champ électrique du faisceau laser**

Le phénomène d'interaction entre le laser et l'atome peut s'écrire de façon semi-classique, ce qui permet de traiter le laser comme un champ classique extérieur dépendant de temps [Bou-16, IEEE-05] et s'écrit:

$$\hat{\vec{E}}_L(\hat{r}, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_L(\hat{r}) \left( \vec{e}_L(\hat{r}) e^{-i(\omega_L t + \phi(\hat{r}))} + \vec{e}_L(\hat{r}) e^{i(\omega_L t + \phi(\hat{r}))} \right) \tag{I.2}$$

Avec,  $\varepsilon_L(\vec{r}) \in \mathbb{R}$  représente l'amplitude du laser,  $\vec{e}_L(\vec{r}) \in \mathbb{C}^3$  est son vecteur de polarisation et  $\omega_L$  laser de fréquence,  $\phi(r)$  est la fonction d'onde de laser

**I.2.1. Moment induit et les interactions dipolaire**

L'interaction entre l'atome et laser induit des dipôles électrique «  $\vec{D}$  » et réduit «  $d$  ». La transition entre l'état excité  $|E_2\rangle$  à l'état fondamental  $|E_1\rangle$  est définie par :

$$\begin{cases} d = \langle E_2 | \hat{D} | E_1 \rangle \\ d^* = \langle E_1 | \hat{D} | E_2 \rangle \end{cases} \tag{I.3}$$

Le moment dipolaire induit est nul dans un état propre de l'énergie et définie par l'équation suivante:

$$\langle E_2 | \hat{D} | E_2 \rangle = \langle E_1 | \hat{D} | E_1 \rangle = 0 \tag{I.4}$$

Donc, l'opérateur de dipôle électrique s'écrit comme suit :

$$\hat{D} = \vec{d}|E_2\rangle\langle E_1| + \vec{d}^*|E_1\rangle\langle E_2| \quad (I.5)$$

Les phénomènes d'absorption et d'émission stimulée ont été décrits par le couplage entre le dipôle électronique et le laser dans une représentation semi-classique [Viv-07]. Pour tenir en compte l'émission spontanée, il faut rajouter deux termes qui liés principalement au vide quantique et à son interaction avec un dipôle induit. Ces deux termes s'ajoutent à l'interaction Hamiltonien.

### I.2.2. Hamiltonien total des systèmes couplés

L'atome est couplé à la fois au champ laser et à tous les autres modes de rayonnement, qui ne contiennent initialement aucun des photons. À l'aide de l'approximation de dipôle électrique, le Hamiltonien du système total peut s'écrire :

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_V + \hat{V}_{AL} + \hat{V}_{AV} \quad (I.6)$$

Où,

$\hat{H}_A$  représente l'Hamiltonien atomique qui inclut l'énergie cinétique du centre de masse de l'atome  $\hat{P}$  et l'énergie interne dans le cadre du modèle à deux niveaux  $w_A$ . La relation de l'Hamiltonien atomique est donnée par la formule suivante :

$$\hat{H}_A = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hbar w_A |E_2\rangle\langle E_1| \quad (I.7)$$

Le deuxième terme de Hamiltonien  $\hat{H}_V$  est l'énergie du champ de rayonnement et peut être écrit comme la somme des modes du rayonnement quantifié  $l = (\vec{k}_l, \vec{e}_l)$  :

$$\hat{H}_V = \sum_l \hbar \omega_l \left( \hat{a}_l^+ + \hat{a}_l + \frac{1}{2} \right) \quad (I.8)$$

Avec :  $\hat{a}_l^+$ ,  $\hat{a}_l$  sont les opérateurs de création et d'annulation respectivement.

Le troisième terme de Hamiltonien  $V_{AL}$  est le couplage entre l'atome et le faisceau laser. Leur relation peut être exprimée comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{AL}(t) = -\hat{D} \cdot E_L(\hat{R}, t) \\ \approx \frac{\hbar \Omega_1(\hat{R})}{2} (|E_2\rangle\langle E_1| e^{-i\omega_L t - i\phi(\hat{R})} + h.c) \end{array} \right. \quad (I.9)$$

Avec,  $\hat{R}$  représente la position du centre de masse de l'atome ;  $\Omega$  est la pulsation de Rabi définie par la formule suivante :

$$h\Omega_1(r) = -(d \cdot \varepsilon_L(r)) \varepsilon_L(r) \quad (\text{I.10})$$

Le quatrième terme de Hamiltonien  $V_{AR}$  est le couplage atome-rayonnement quantifié, qui peut s'écrire comme suit :

$$V_{AR} = -\sum_l \varepsilon_l (d \cdot \varepsilon_l) \hat{a}_l e^{ik\hat{r}} |E_2\rangle \langle E_1| + h.c \quad (\text{I.11})$$

Où,  $h.c$  signifie l'Hermitique conjugué.

### I.2.3. La force de pression de radiation

À partir de l'équation du Hamiltonien définie dans (I.6), l'expression de la force de radiation exercée sur les atomes par le laser peut s'écrire comme suit:

$$F(\vec{r}) = -h \frac{s(\vec{r})}{1+s(\vec{r})} \left( \frac{\delta \vec{\nabla} \Omega(\vec{r})}{\Omega(\vec{r})} + \frac{\Gamma}{2} \phi(\vec{r}) \right) \quad (\text{I.12})$$

Avec,  $s(\vec{r}) = \frac{\Omega^2(\vec{r})}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$  représente le paramètre de saturation.

### I.2.4. La force dipolaire

Dans cette partie, la description de la force dipolaire d'un atome à deux niveaux et dans le cadre de l'approximation dipolaire électrique sera présentée. Lorsque la variation spatiale de l'amplitude du champ extérieure, l'atome aura une énergie totale différente selon sa position. Cette variation donne une force conservative, appelée la force dipolaire, qui est proportionnelle au gradient de l'intensité lumineuse et permet d'écrire l'origine du potentiel dipolaire  $U$  [Dar-05, Cle-08]. La force dipolaire peut être exprimée par la formule suivante:

$$\vec{F}_{dip}(\vec{r}) = -h\delta \frac{s(\vec{r})}{1+s(\vec{r})} \frac{\vec{\nabla} \Omega(\vec{r})}{\Omega(\vec{r})} \quad (\text{I.13})$$

La force de radiation  $\vec{\nabla}$  est définie par la relation suivante :

$$\vec{\nabla} = \frac{\Omega(\vec{r}) \nabla \Omega(\vec{r})}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (\text{I.14})$$

Avec :

$s(\vec{r})$  est le paramètre de saturation, qui est lié à l'intensité lumineuse. Ce paramètre peut être défini comme suit:

$$s(\vec{r}) = \frac{I/I_s}{1 + \frac{4\delta^2}{\Gamma}} \quad (\text{I.15})$$

$\Gamma$  représente le taux de relaxation du niveau excité. Il est inversement proportionnel à la durée de vie des atomes dans l'état excité.

En remplaçant les équations (I.14) et (I.15) dans l'équation (I.13), l'expression de la force dipolaire devient comme suit :

$$\vec{F}_{dip}(\vec{r}) = -\frac{h}{2} \frac{\vec{\nabla}s(\vec{r})}{1+s(\vec{r})} = -\frac{h}{2} \delta \frac{\vec{\nabla}I/I_s}{1+I/I_s + \frac{4\delta^2}{\Gamma^2}} \quad (\text{I.16})$$

Où :

$I$  et  $I_s$  représentent respectivement les intensités du faisceau laser et de saturation.

La force dipolaire est liée avec la dérivation du potentiel par :  $\vec{F}_{dip} = -\vec{\nabla}U_{dip}$ , ce qui signifie que la force dipolaire est une force conservative. Le potentiel  $U_{dip}$  dans le cas de faible saturation en fonction de l'intensité lumineuse s'écrit comme suit :

$$U_{dip} = \frac{h\delta}{4} \frac{\Omega^2(\vec{r})}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = -\frac{h}{2} \delta \frac{\vec{\nabla}I/I_s}{I/I_s + \frac{4\delta^2}{\Gamma^2}} \quad (\text{I.17})$$

La force dipolaire est appliquée afin de piéger l'atome dans un piège optique. En effet, la focalisation de faisceau laser peut être confinée par un profil gaussien et une fréquence plus faible que la fréquence de transition d'un atome à deux niveaux.

### I.3. Atome de Rubidium $^{87}\text{Rb}$

Le rubidium est un élément chimique et un métal alcalin, qui possède des caractéristiques listées dans les tableaux ci-dessous.

Nombre atomique	$z = 30$
Isotopes	$^{87}\text{Rb}(28\%)$
Masse	$1.45e - 25\text{kg}$
Liquéfaction	$39^\circ\text{C}$
Vaporisation	$688^\circ\text{C}$
Spin nucléaire	$I = 3/2$
Configuration électronique	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 5s^1$
État physique	Solide

**Table I.1.** Caractéristique physiques du Rubidium  $^{87}\text{Rb}$

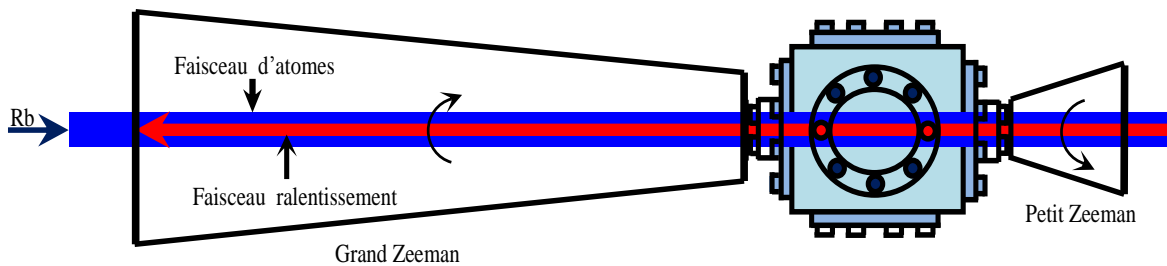
Longueur de diffusion	$a = 5nm$
Taux de collisions à 2 corps	$K_2 = 3.10^{-15} cm^3 s^{-1}$
Taux de collisions à 3 corps	$K_3 = 4.10^{-29} cm^{-6} s^{-1}$

**Table I.2.** Propriétés collision du Rubidium  $^{87}Rb$

**I.4. Ralentissement d'un jet atomique par pression de radiation**

Le jet atomique est ralenti par l'interaction entre l'onde lumineuse et l'atome de façon contre-propagation[Jah-10], et la fréquence de l'onde laser désaccordées doit être sur la couleur rouge de la transition  $\delta$ . Le désaccord de transition est défini par :  $\delta = f_L - f_A$ , Où,  $f_l$  et  $f_a$  sont des fréquences du laser et de fréquence atomique, respectivement. Le mécanisme de ralentissement du jet atomique dépend de la force de pression de radiation, comme le montre l'équation (I.13). Les atomes qui possèdent la vitesse longitudinale  $v_{lon}$  vont interagir significativement avec les photons de manière très limité. En fait, la vitesse longitudinale est liée à la variance par l'équation suivante  $\Delta v_{long} = \Gamma / k \approx 5m / s$ . Pour s'assurer que l'état de résonance entre l'atome et l'onde est maintenu tout au long du ralentissement, la résonance atomique est déplacée spatialement par effet Zeeman. L'effet Zeeman de la transition atomique est déplacé en un point d'abscisse  $z$ . Avec,  $f_L - k_L v(z) = f_A(z)$ , où,  $v^2(z) = v_0^2 - 2a_{max} z$ .

Dans l'effet Zeeman, les atomes sorte du four à une vitesse inférieure à  $v_0$ , puis ralentissent et s'arrêtent au point  $z_0 = v_0^2 / 2a_{max}$ . Avec,  $a_{max}$  représente l'accélération et est définie comme suit:  $a_{max} = \hbar k_L \Gamma / (2m)$ . La Figure 2 illustre le fonctionnement de l'amortisseur d'effet Zeeman pour ralentir un jet atomique.



**Figure I.2.** Amortisseur Zeeman pour ralentir un jet atomique avec une pression de radiation [Ric-15]

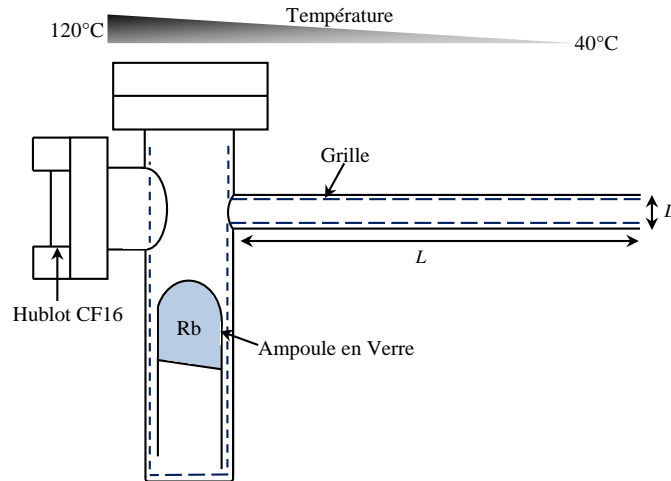
**I.4.1. Présentation de l'expérience de ralentissement à effet Zeeman**

Quelques grammes (5g) de solide de rubidium 87 ont été placé dans un four et mis à  $120^\circ C$ . Par conséquent, les atomes deviennent à l'état gazeux avec une pression de vapeur saturante de l'ordre

$10^{-4} mbr$ , ce qui est suffisant pour obtenir un flux ultérieur d'atomes [Tri-13]. Dans ce cas, la densité  $n$  et la densité de l'espace des phases  $D$  sont données par l'équation ci-dessous :

$$\begin{cases} n = \frac{P}{k_B T} \approx 5 \cdot 10^{12} \\ D \approx 3 \cdot 10^{-15} \end{cases} \quad (I.18)$$

Le four de recyclage a été utilisé afin de réduire les pertes de rubidium et d'augmenter le temps avant de les recharger depuis le four. Ce four repose sur l'application d'un gradient de chaleur le long du tube sortant du four, où, la longueur du tube est égale à  $L = 10cm$  et son diamètre est égal à  $D = 5mm$ . De plus, un grille métallique, qui a été placé à l'intérieure du tube permettant aux atomes de se déplacer à des températures plus élevées. Grâce à la structure du four, les atomes qui touchent la paroi de tube sont récupérés [Che-06]. Le schéma expérimental de la source de ralentissement à effet Zeeman est illustré sur la Figure I.3.



**Figure I.3.** Schéma expérimental de la source de ralentissement à effet Zeeman [Ric-15]

## I.5. Diverses techniques de refroidissement

### I.5.1. Refroidissement Doppler

Le refroidissement Doppler est un processus de refroidissement le plus simple. Ce mécanisme a été découvert en 1975 par Hänsch et Schawlow. Ce refroidissement dépend du calcul du coefficient de friction associé à la force visqueuse agissant sur l'atome. Le principe de ce refroidissement repose sur l'interaction de l'atome avec deux faisceaux lasers de fréquence  $f$ , qui est légèrement inférieure à la fréquence de l'atome  $f_0$ , et de faible intensité  $I$ . Ces faisceaux où ondes planes se propagent dans des directions opposées au long du déplacement de l'atome sur l'axe  $x$ . Si l'atome se déplace vers la droite, il absorbe de préférence le faisceau qui vient de droite. En revanche, le laser gauche semble avoir une impulsion qui est loin de la résonance, comme le montre la Figure I.4. Par conséquent, l'atome va absorber plus de photons venant de la droite que ceux venant de la gauche. L'équilibre entre

les deux forces est rompu pour déplacer l'atome, comme le montre la Figure 4. Chacune des ondes planes crée des forces de pression de radiation  $F_{\pm}$  pour obtenir la force totale agissant sur l'atome [Cas-96, Rem-09].

$$F_{\pm} = \pm \frac{\hbar k_L \Gamma}{2} s_{\pm}(V) \tag{I.19}$$

Avec,  $s_{\pm}$  est le paramètre de saturation, qui peut être défini comme suit :  $s_{\pm} = \frac{\Omega^2}{(\delta^m + k_L V)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$

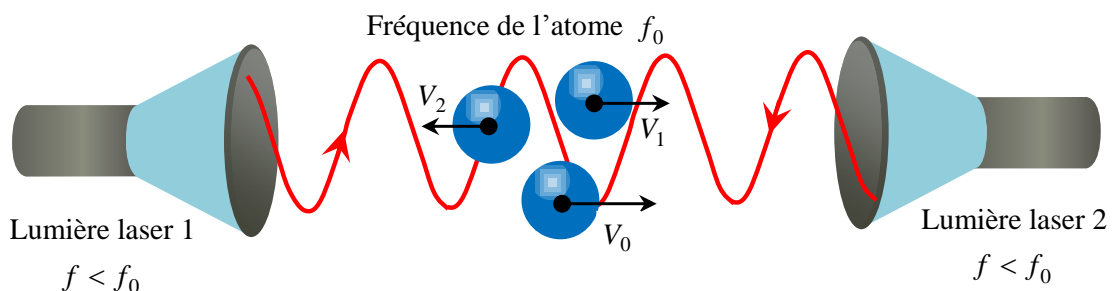
La force totale effectuée sur l'atome est :

$$F(V) = \frac{\hbar k_L \Gamma}{2} (s_+(V) - s_-(V)) \tag{I.20}$$

En déplacement Doppler, la vitesse atomique est faible devant la largeur de la résonance atomique  $\Gamma$ . De plus, la force total agissant sur l'atome est proportionnelle avec la vitesse et peut être défini comme suit :

$$\begin{cases} F(V) = -\alpha V \\ = -\Gamma \frac{\Omega^2 \delta}{\left(\frac{\Gamma^2}{4} + \delta^2\right)^2} \hbar k_i^2 \end{cases} \tag{I.21}$$

Avec,  $\alpha$  un terme qui est présente le coefficient de friction.



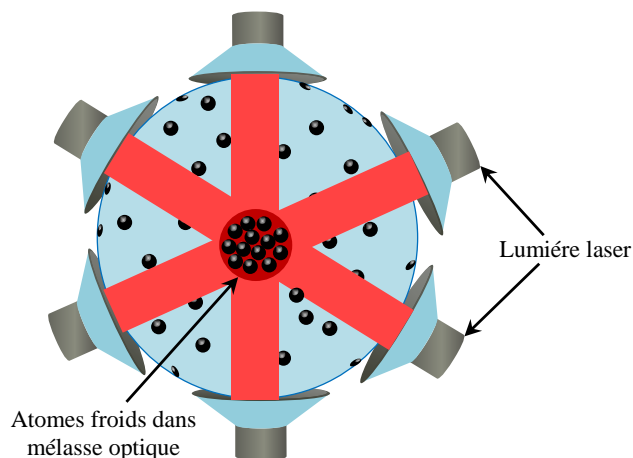
**Figure I.4.** Technique de refroidissement Doppler [Cas-96]

### I.5.2. Mélasse optique

La technique de refroidissement Doppler peut être généralisée en 3D en utilisant six faisceaux laser et en créant un piège immatériel, comme l'illustre la Figure I.5. Les photons laser créent un milieu visqueux dans lequel les atomes vont ralentir et refroidir. Ce gaz piégé est appelé mélasse optique [Elo-18]. En fait, Mélasse optique ne permet pas de piéger les atomes puisque la force totale estimée dans l'équation (I.20) ne dépend que de la vitesse de l'atome et est indépendante de sa position. A



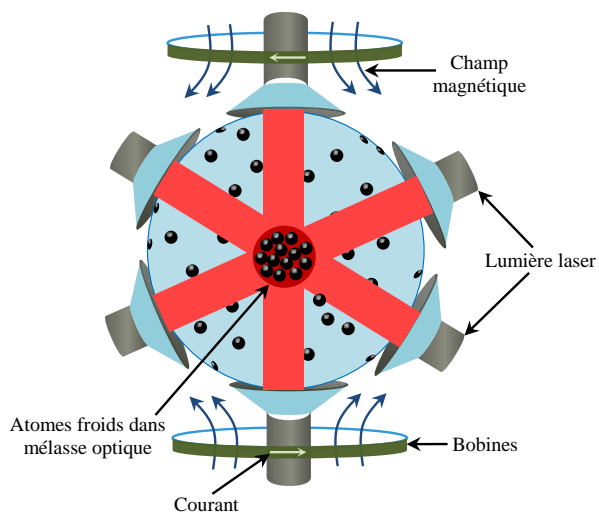
cette fin, il est préférable d'appliquer une autre technique afin d'améliorer les performances de refroidissement de l'atome, telle que la technique de « Piège magnéto-optique PMO »[Jal-19]



**Figure I.5.** Technique de Mélasse optique [Lou-93]

### I.5.3. Piège magnéto-optique (PMO)

Le principe du piège Magnéto-Optique (PMO) a été proposé par J. Dalibard en 1980. Le PMO résout le problème de dépendance entre l'intensité de la pression de radiation et la position de l'atome en ajoutant un gradient de champ magnétique, comme le montre la Figure I.6. [Jal-19, Wil-17]

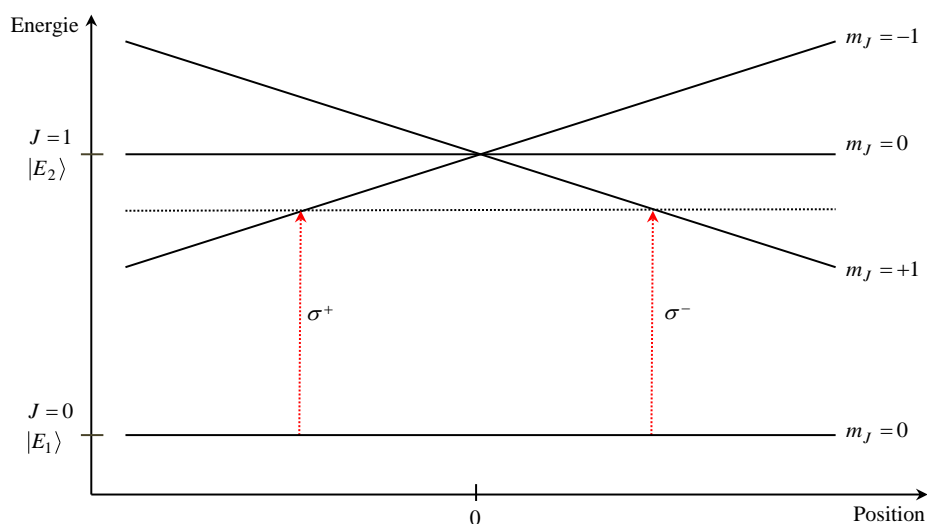


**Figure I.6.** Principe du PMO à trois dimensions [Rom-13]

Le principe du PMO repose principalement sur une dimension pour un atome à deux niveaux énergétique  $|E_2\rangle$  et  $|E_1\rangle$  [Rom-13]. Le mécanisme de PMO est basé sur la transition d'un état fondamental de moment cinétique nulle  $J=0$  à l'état excité de moment cinétique  $J=1$ , comme l'illustre la Figure I.7. En effet, le faisceau laser absorbé par l'atome provient de la droite qui a effectué une transition  $|J=0\rangle \rightarrow |J=1, m_j=1\rangle$ . Puis, l'atome est soumis à une force de pression

radiale dirigée vers l'origine des positions [Cle-08, Dou-01]. Par symétrie, le faisceau laser absorbé par l'atome provient de la gauche est similaire à celui de l'atome droit. Ce raisonnement peut s'étendre à deux et trois dimensions.

La technique PMO est plus efficace pour atteindre des températures de l'ordre du microkelvin. Le développement du PMO n'atteint pas la condensation. Pour cet effet, il faut mettre en place un piège purement magnétique [Bur-01].

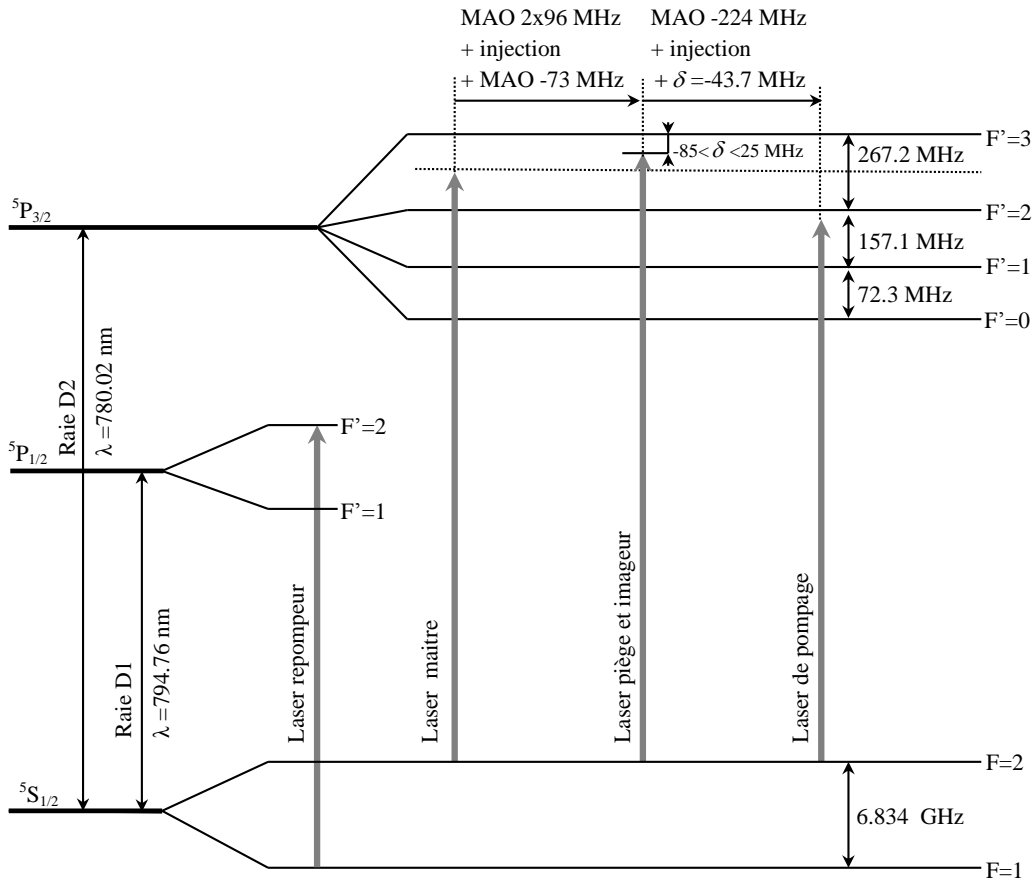


**Figure I.7.** Principe du piège magnéto-optique à une dimension [Dou-01]

### I.5.3.1. Transition de PMO

Le refroidissement de l'atome de Rb permet de disposer des différents types de lasers. Ils ont des longueurs d'onde de  $780\text{ nm}$  et de  $794\text{ nm}$  pour des raies  $D_1$  et  $D_2$ , respectivement, qui émettent une puissance de l'ordre de  $70\text{ mW}$  et de  $30\text{ mW}$ , comme le montre la Figure I.8. Les différentes transitions des faisceaux lasers utilisées sont illustrées sur la Figure I.8 et sont citées comme suit [Aub-10]:

- **Le laser maître** : ce laser est désaccordé dans le rouge de la transition Fermi  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ .
- **Le faisceau de pompage** : ce faisceau doit être résonnant avec la transition, qu'il permet de désexciter une partie des atomes dans l'état  $F = 1$ , de sorte que la probabilité d'excitation de la transition devient  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ .
- **Le faisceau repompeur** : ce faisceau est considéré comme une diode libre asservie sur la raie  $D_1$  de l'atome de Rubidium. Il est utilisé pour repomper les atomes de l'état  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ .
- **Le faisceau polarisé** : ce type de faisceau doit être proche de la transition  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 1\rangle$  et il est permis de transférer les atomes à l'état noir.



**Figure I.8.** La Configuration laser pour le piégeage d’atomes de Rubidium [Aub-10]

**I.6. Piégeage magnétique**

À la fin de la technique de refroidissement, le nombre d'atomes devient d'environ  $6.10^8$  pour former un nuage atomique à une température de  $50\mu k$ . Les atomes vont se diriger vers un piège purement magnétique parce que les techniques précédentes de refroidissement ne permettent pas de réaliser la condensation. Afin d'étudier l'augmentation du nuage atomique de l'atome piégé, nous allons d'abord révéler le principe du piège magnétique [Hoa-03, Nir-07].

**I.6.1. Principe du piège magnétique**

L'expérience du piège magnétique est réalisée lorsque le champ magnétique est minimal au centre de la chambre à vide. Dans ce contexte, les atomes dirigés vers le piège magnétique auront un moment magnétique. Ces atomes sont plongés dans un champ magnétique et dirigés dans le sens opposé du moment magnétique. Par conséquent, les atomes sont confinés autant que possible dans une cuvette de potentiel [Nar-07]. Le moment magnétique  $\vec{\mu}$  et le moment cinétique  $\vec{F}$  d'un atome sont proportionnels, comme le montre l'équation (I.22) [ Bou-63].

$$\vec{\mu} = -\frac{g_F \mu_B}{h} \vec{F} \tag{I.22}$$

Où  $g_F$  est le facteur de Landé,  $\mu_B$  est le magnéton de Bohr et  $h$  est la constante de Planck.

Si on place le moment magnétique  $\mu_B$  dans un champ magnétique inhomogène  $B(\vec{r})$ , l'atome est soumis à la force introduit par l'énergie potentielle.

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(\vec{r}) \quad (\text{I.23})$$

On suppose que  $\vec{\mu}$  et  $B(\vec{r})$  initialement anti-alignés, le potentiel d'interaction entre l'atome et le champ s'écrit comme suit :

$$U = \mu |B(\vec{r})| = g_F m_F \mu_B |\vec{B}(\vec{r})| \quad (\text{I.24})$$

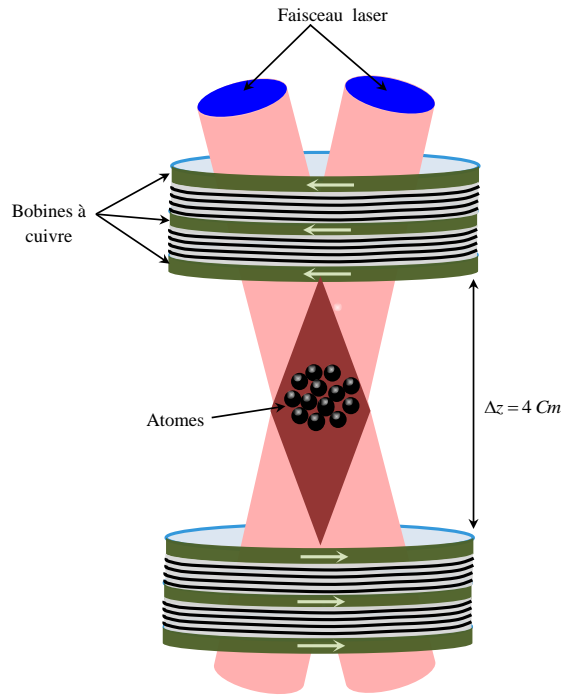
Avec,  $g_F$  représente le facteur de Landé,  $m_F$  est l'état hyperfin et  $\mu_B$  est la magnéto de Bohr. De plus,  $|\vec{B}(\vec{r})|$  représente le minimum de champ.

Les atomes peuvent être piégés magnétiquement dans un minimum de champ  $|\vec{B}(\vec{r})|$  lorsque  $g_F m_F$  est strictement positive.

Parmi les types de piège magnétique qui ont été utilisés afin de piéger les atomes se trouve le piège magnétique quadripolaire. Ce type de piège nécessite une polarisation avant l'échantillon atomique. Le principe de ce piège est de polariser les atomes dans le sous-état magnétique  $|F=1, m_F=-1\rangle$  à partir des atomes du PMO 3D.

### I.6.2. Piège quadripolaire

Le piège quadripolaire est constitué par deux jeux de trois bobines placées au-dessous et au-dessus de la cellule pour piéger les atomes. La forme de la bobine utilisée est évasée permettant le passage du faisceau PMO 3D à grand angle. Chaque bobine est constituée d'un tube de cuivre enroulé sur lui-même. Les deux jeux de bobines sont espacées de  $\Delta_{z,quad} = 4cm$ , comme l'illustre la Figure I.9 [ Van-03].



**Figure I.9.** Structure du piège quadripolaire [Bar-74]

Selon la règle de la main droite, les bobines du piège quadripolaire vont créer un champ magnétique grâce au courant qui les traverse. Le champ magnétique quadripolaire est généré près de  $(x = y = z = 0)$  est défini par la formule suivante:

$$B(x, y, z) = b' \begin{pmatrix} x/2 \\ y/2 \\ z \end{pmatrix} \tag{I.25}$$

Avec,  $b'$  est un gradient dépendant des courants circulant dans les bobines.

Le potentiel des atomes de Rubidium dans le champ magnétique quadripolaire est défini comme suit:

$$U(r) = \mu |\vec{B}| = \mu b' \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4} + z^2} \tag{I.26}$$

Avec,  $\mu = m_F g_F \mu_B$  est le facteur de landé de l'état hyperfin et est égal à  $g_F \approx \frac{(-1)^F}{2}$ .

Le piège quadripolaire n'est pas adapté pour piéger les atomes ultra-froids car le champ magnétique est créé par le piège est insuffisant. A cette fin, les atomes seront piégés par un autre type de piège magnétique appelé le piège magnétique Ioffe-Pritchard. Le champ magnétique créé par ce type est élevé par rapport au champ généré par le piège quadripolaire [Rei-08].

### I.6.3. Piège magnétique Ioffe-Pritchard

La combinaison du champ quadripolaire, qui assure le confinement radial du piège plan  $yoZ$  et du champ dipolaire orienté dans la direction  $x$ , avec le courant donne un autre type de piège magnétique appelé piège de type Ioffe Pritchard [Eas-09]. Ce piège magnétique génère une polarisation magnétique  $B_0$  non nulle dans l'axe d'orientation  $x$ . Le piège magnétique Ioffe-Pritchard est constitué de quatre fils posés parallèlement aux quatre sommets du carré. Le courant passe par deux fils consécutifs dans des directions opposées et dans deux bobines suivant l'axe  $x$  [Moa-06]. Les deux bobines sont séparées l'une de l'autre par leur rayon afin d'avoir une variance quadripolaire du champ, comme le montre la Figure I.11. Le champ magnétique du Piège magnétique Ioffe-Pritchard s'écrit comme suivant :

$$|B(x, y, z)| = \sqrt{\left(B_0 + \frac{b''x^2}{2}\right)^2 + \left(b'^2 + \frac{b''B_0}{2}\right)(y^2 + z^2)} \quad (I.27)$$

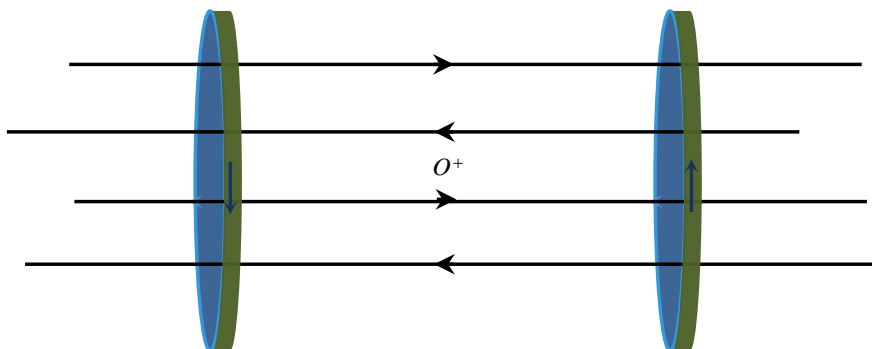
Le potentiel  $U$  de ce type de piège est associé au potentiel harmonique par la relation suivante :

$$U = U_0 + \frac{1}{2}m(w_x^2x^2 + w_y^2y^2 + w_z^2z^2) \quad (I.28)$$

Avec,

$$\begin{cases} w_x = \sqrt{\frac{g_F m_F \mu_B b''}{m}} \\ w_y \approx w_z = \sqrt{\frac{g_F m_F \mu_B b'^2}{m B_0}} \end{cases} \quad (I.29)$$

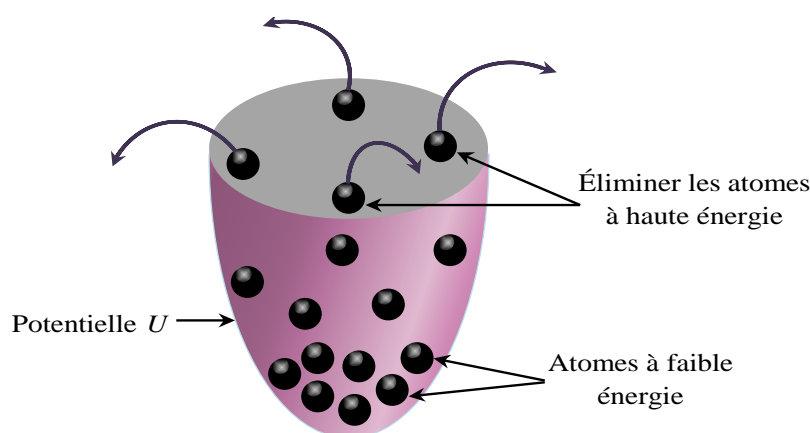
Malgré que le piège magnétique Ioffe-Pritchard puisse appliquer afin de refroidir les atomes, mais il ne peut pas être appliqué afin de réaliser la condensation car ses performances sont limitées. A cet effet, cette technique sera changée par la technique de l'évaporation. Cette dernière peut évoluer le taux de collisions du nuage piégé et permet de préparer le condensat [Eas-09].



**Figure I.11.** Configuration du Piège magnétique Ioffe-Pritchard [Eas-09]

### I.7. Refroidissement évaporatif

En 1985, Hess a proposé la technique de refroidissement des atomes par l'évaporation après la première étude expérimentale du piège magnétique [Des-99]. La suggestion est d'abord donnée par des atomes d'hydrogène mais ensuite a été élargie pour inclure les atomes alcalins. Le principe du refroidissement par l'évaporation repose sur l'idée de confiner les atomes dans un potentiel à une valeur de  $U$  [Bra-09]. Ce principe élimine tous les atomes énergétiques dépassant l'énergie moyenne par particule, comme l'illustre la Figure I.12. Après la thermalisation, l'énergie moyenne des atomes restant dans le piège diminue et la température descend en dessous de la température de refroidissement dissipatif. Ce mécanisme de refroidissement permet d'élever le nombre de collisions atomiques et la densité dans l'espace des phases. Par conséquent, le refroidissement par l'évaporation peut réaliser la condensation de Bose-Einstein [Coh-20].



**Figure I.12.** Élimination des atomes à haute énergie par potentiel de confinement atomique [Bra-09]

Le développement de différentes techniques de refroidissement laser, tels que le piège magnéto-optique, le piège magnétique et la technique de refroidissement par l'évaporation, a conduit à la réalisation du condensat du rubidium  $^{87}\text{Rb}$ . Cette condensation a été prédite pour la première fois en 1924 par le physicien Albert Einstein et appelée Condensation de Bose-Einstein (CBE). Le principe de CBE sera détaillé dans la section suivante.

### I.8. Condensation de Bose-Einstein (CBE)

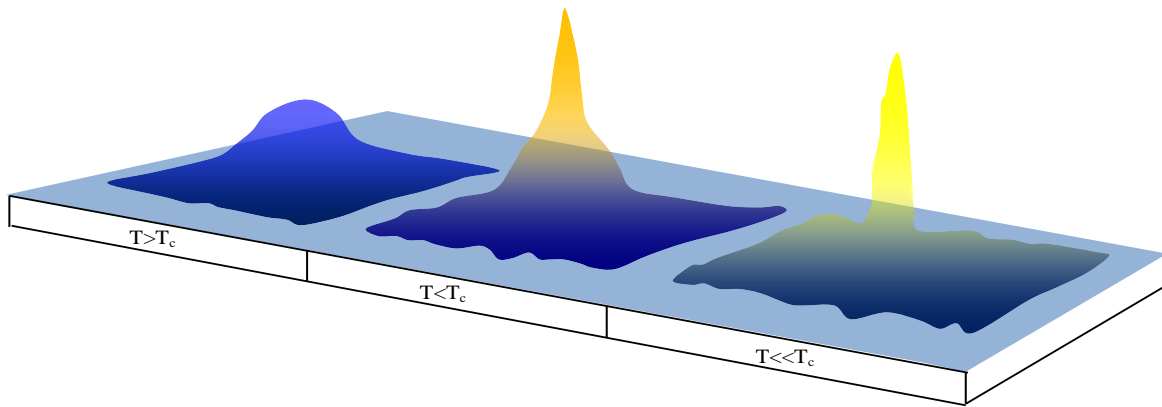
Le domaine de la recherche sur la condensation a explosé depuis la découverte de la condensation de Bose Einstein en 1995. La condensation de Bose-Einstein est un phénomène macroscopique, qui se produit lorsque la densité augmente dans l'espace des phases. Ce phénomène basé sur l'accumulation de bosons dans le même état quantique d'un piège harmonique. L'intérêt principal de la condensation de Bose-Einstein est d'obtenir le comportement ondulatoire des particules de boson dans l'état fondamental [Cor-98, Jul-17]. Dans cette partie, le principe de la condensation de Bose-Einstein sera présenté. De plus, le régime de Thomas-Fermi et l'équation de Gross-Pitaevski pour les interactions interatomiques seront détaillés.

**I.8.1. Principe de Condensation de Bose-Einstein**

La nature ondulatoire des bosons à l'état fondamental du piège harmonique devient dominante, lorsque leur longueur d'onde de Broglie thermique  $\lambda_{dB}$  devient de l'ordre ou supérieure à la distance interatomique  $d$ , Où,  $d \approx n^{1/3}$  avec  $n$  représente la densité du gaz de bosons [Jac-12]. La longueur d'onde de Broglie  $\lambda_{dB}$  et la densité dans l'espace des phases  $D$  sont exprimées comme suit :

$$\begin{cases} D = n \lambda_{dB}^3 \\ \lambda_{dB} = \sqrt{\frac{2\pi \hbar^2}{mk_B T}} \end{cases} \quad (I.30)$$

D'après l'équation (I.30), la longueur d'onde de Broglie est liée à la température  $T$  et à la masse des bosons  $m$ . En fait, la valeur prédite par Einstein pour la température habituelle était très supérieure, environ 10000 fois à la température de condensation  $T \gg T_{CBE}$ . Cette basse température de l'ordre  $\mu k$  permet d'accumuler les bosons à l'état fondamental.



**Figure I.13.** Constitution du condensat de Bose-Einstein. En dessous de la température critique  $T_c$ , les atomes rassemblent dans un seul état quantique, comme l'indiquent les pics [Lew-07]

**I.8.2. Distribution de Bose-Einstein dans un potentiel harmonique**

Le gaz boson de masse  $m$  est confiné sans interaction dans un piège de potentiel tridimensionnel  $U$  à température  $T$  [Che-17]. Dans le cadre d'un ensemble canonique où le nombre de particules  $N$  est constant, le piège harmonique tridimensionnel s'écrit :

$$U = \frac{m}{2} (w_x^2 x^2 + w_y^2 y^2 + w_z^2 z^2) \quad (I.31)$$

Hamiltonien d'un oscillateur harmonique en trois dimensions est défini comme suit :

$$H_{x,y,z} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2} m w^2 (x^2 + y^2 + z^2) \quad (I.32)$$



Nous cherchons à résoudre l'équation (I.33) aux valeurs propres.

$$\hat{H}_{x,y,z}|\psi_{x,y,z}\rangle = E_{x,y,z}|\psi_{x,y,z}\rangle \quad (\text{I.33})$$

Avec:

$$\hat{H}_{x,y,z} = \frac{1}{2} \left[ (\hat{P}_x^2 + \hat{X}_x^2) + (\hat{P}_y^2 + \hat{Y}_y^2) + (\hat{P}_z^2 + \hat{Z}_z^2) \right] \quad (\text{I.34})$$

Où:

$$\begin{cases} \hat{P}_x = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^+ - \hat{a}_x), \hat{X}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^+ + \hat{a}_x) \\ \hat{P}_y = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}_y^+ - \hat{a}_y), \hat{Y}_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_y^+ + \hat{a}_y) \\ \hat{P}_z = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}_z^+ - \hat{a}_z), \hat{Z}_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_z^+ + \hat{a}_z) \end{cases} \quad (\text{I.35})$$

En remplaçant l'équation (I.35) dans l'équation (I.34), on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{x,y,z} &= \frac{1}{4} \left[ -(\hat{a}_x^+ - \hat{a}_x)^2 + (\hat{a}_x^+ + \hat{a}_x)^2 - (\hat{a}_y^+ - \hat{a}_y)^2 + (\hat{a}_y^+ + \hat{a}_y)^2 \right. \\ &\quad \left. - (\hat{a}_z^+ - \hat{a}_z)^2 + (\hat{a}_z^+ + \hat{a}_z)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \hat{a}_x^+ \hat{a}_x + \hat{a}_x \hat{a}_x^+ + \hat{a}_y^+ \hat{a}_y + \hat{a}_y \hat{a}_y^+ + \hat{a}_z^+ \hat{a}_z + \hat{a}_z \hat{a}_z^+ \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{l} \hat{a}_x^+ \hat{a}_x + \hat{a}_x \hat{a}_x^+ + \hat{a}_x^+ \hat{a}_x - \hat{a}_x^+ \hat{a}_x + \\ \hat{a}_y^+ \hat{a}_y + \hat{a}_y \hat{a}_y^+ + \hat{a}_y^+ \hat{a}_y - \hat{a}_y^+ \hat{a}_y + \\ \hat{a}_z^+ \hat{a}_z + \hat{a}_z \hat{a}_z^+ + \hat{a}_z^+ \hat{a}_z - \hat{a}_z^+ \hat{a}_z \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left[ \hat{a}_x, \hat{a}_x^+ \right] + 2\hat{a}_x^+ \hat{a}_x + \left[ \hat{a}_y, \hat{a}_y^+ \right] + 2\hat{a}_y^+ \hat{a}_y + \left[ \hat{a}_z, \hat{a}_z^+ \right] + 2\hat{a}_z^+ \hat{a}_z \right] \\ &= \left[ \frac{1}{2} + \hat{a}_x^+ \hat{a}_x + \frac{1}{2} + \hat{a}_y^+ \hat{a}_y + \frac{1}{2} + \hat{a}_z^+ \hat{a}_z \right] \\ &= \left[ \frac{3}{2} + (n_x + n_y + n_z) \right] \end{aligned} \quad (\text{I.36})$$

$$\text{Où, } \left[ \hat{a}_x, \hat{a}_x^+ \right] = \left[ \hat{a}_y, \hat{a}_y^+ \right] = \left[ \hat{a}_z, \hat{a}_z^+ \right] = 1$$

L'opérateur nombre de particules est défini par :  $n_x = \hat{a}_x^+ \hat{a}_x$ ,  $n_y = \hat{a}_y^+ \hat{a}_y$ ,  $n_z = \hat{a}_z^+ \hat{a}_z$

Par conséquent, l'hamiltonien devient comme suit:

$$H = \hbar\omega \hat{H} \quad (\text{I.37})$$

Enfin, la distribution des particules de bosons sur les niveaux d'énergie s'écrit sous la forme suivante :

$$E_\lambda = E_{x,y,z} = \hbar\omega \left( n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) \quad (\text{I.38})$$

Dans le piège harmonique tridimensionnel, l'énergie du niveau fondamental est nulle. Par conséquent, la distribution de Bose-Einstein peut être définie comme suit [Kri-15] :

$$f(E_\lambda) = \frac{1}{e^{(E_\lambda - \mu)/k_B T} - 1} \quad (\text{I.39})$$

Où, le potentiel chimique est positif  $\mu > 0$ . Avec,  $f(E_\lambda)$  est une fonction d'occupation des nombres moyens de l'état quantique,  $E_\lambda$  est l'énergie et  $k_B T$  représente l'énergie thermique du système.

Le nombre total des atomes peut être calculé comme suit :

$$N = \sum_\lambda f(E_\lambda) \quad (\text{I.40})$$

À partir des équations (I. 33) et (I. 34), le potentiel chimique  $\mu$  ne dépend que de la température et du nombre d'atomes. La condensation de Bose-Einstein peut se produire pour des températures basses et des densités élevées et apparaîtra donc pour de grandes valeurs de potentiel chimique, c'est-à-dire  $\mu \rightarrow 0$ . Lorsque le potentiel chimique tend vers zéro, le nombre des atomes à l'état fondamental s'écrit:

$$N_0 = \frac{-k_B T}{\mu} \quad (\text{I.41})$$

L'énergie du première état excité est de l'ordre de  $\hbar\varpi$ , avec :  $\varpi = (w_x w_y w_z)^{1/3}$ . Où, l'énergie de niveau excité est très inférieure à l'énergie thermique  $\hbar\varpi \ll k_B T$ . La population du premier état excité s'écrit sous la forme suivante :

$$N_1 \approx \frac{1}{e^{(\hbar\varpi - \mu)/k_B T} - 1} \quad (\text{I.42})$$

En utilisant le développement limité d'  $\exp(x)$ , l'équation (I.36) devient comme suit :

$$N_1 = \frac{1}{\frac{\hbar\varpi}{k_B T} - \frac{\mu}{k_B T}} = \frac{k_B T / \mu}{\frac{\hbar\varpi}{\mu} - 1} \quad (\text{I.43})$$

A partir les équations (I.42) et (I.43), le facteur entre les deux états, fondamental et excité, peut être défini comme suit :

$$\frac{N_1}{N_0} \approx \frac{1}{1 - \frac{\hbar \varpi}{\varpi}} \quad (\text{I.44})$$

Lorsque le potentiel chimique tend vers zéro, la population au niveau excitant est inférieure à la population au niveau fondamentale et à la population des autres états excités. Pour cet effet, l'occupation des atomes dans le piège harmonique sera effectuée au niveau fondamental [Mul-97, Gro-95, Edw-96].

### I.8.3. Condensation à une température critique

Après avoir démontré que le niveau fondamental peut inclure la population macroscopique. Alors, l'évolution des atomes sera étudiée au niveau fondamental en fonction de la température de CBE et de la température critique à laquelle la condensation se produit [Ber-86, Che-09]. Le nombre des atomes dans le piège harmonique s'écrit en fonction de la densité comme suit :

$$N = \int_0^{\infty} \rho(E) f(E) dE \quad (\text{I.45})$$

Où,  $\rho(E)$  représente la densité d'états, et peut être définie par l'équation (I.46) [Ber-86].

$$\rho(E) = \frac{E^2}{2(\hbar \varpi)^3} \quad (\text{I.46})$$

Le nombre total des atomes exprimé dans l'équation (I.45) est valable que dans la séparation d'énergie entre le niveau fondamental et le niveau excité. A cette fin, le nombre total des atomes dans le piège harmonique peut être calculé en ajoutant le nombre d'atomes dans l'état fondamental au nombre d'atomes dans l'état excité, comme indiqué l'équation (I.47).

$$N = N_0 + N_1 \quad (\text{I.47})$$

Avec,  $N_0$  et  $N_1$  sont les nombres des atomes dans les états fondamental et excité, respectivement.

L'équation de  $N_1$  est défini comme suit :

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{2(\hbar \varpi)^3} \int_0^{\infty} E^2 f(E) dE \\ = \left( \frac{k_B T}{\hbar \varpi} \right)^3 g_3(z) \end{cases} \quad (\text{I.48})$$

$$\text{Avec, } g_3(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^3} .$$

La fonction de distribution de Bose-Einstein devient comme suit :

$$f(E) = \frac{z}{e^{E/k_B T} - z} = \sum_{l=1}^{\infty} (ze^{-E/k_B T})^l \tag{I.49}$$

Où :  $z$  est appelé fugacité et est égal à  $z = e^{\mu/k_B T}$  .

Dans les états excités, le nombre d'atomes a une relation directe avec la fugacité  $z$  . Pour  $z=1$ , le nombre maximal d'atomes dans l'état excité à la température de CBE s'exprime comme suit :

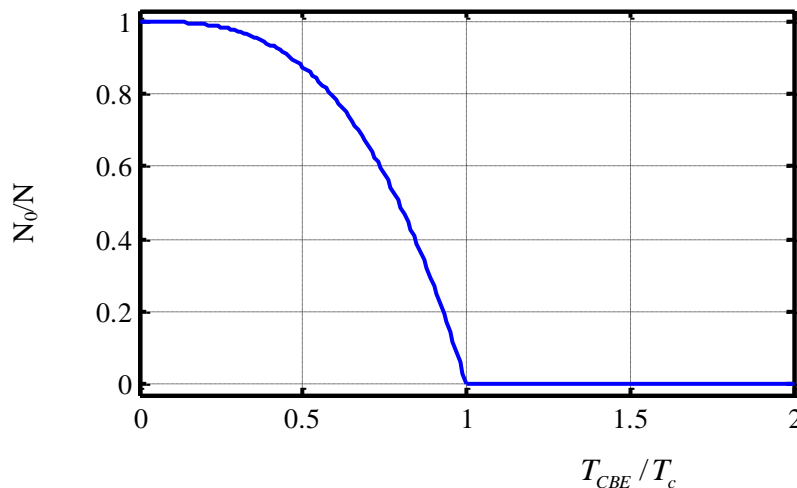
$$N_1^{\max} = \left(\frac{k_B T}{\hbar \varpi}\right)^3 g_3(1) \approx 1.202 \left(\frac{k_B T_{CBE}}{\hbar \varpi}\right)^3 \tag{I.50}$$

A partir de l'équation (I.49) et pour  $N = N_1^{\max}$ , la température de CBE est valide dans la limite  $k_B T \gg \hbar \varpi$  et peut être calculée comme suit [Cle-08] :

$$T_c = 0.94 \cdot \left(\frac{\hbar \varpi}{k_B}\right) (N)^{1/3} \tag{I.50}$$

La fraction condensée entre le nombre d'atomes total et condensé devient comme suit [Rob-01]:

$$\left(\frac{N_0}{N}\right) = 1 - \left(\frac{T_{CBE}}{T_c}\right)^3 \tag{I.51}$$



**Figure I.14.** Fraction d'atomes condensés en fonction de la température [Cle-08]

**I.9. Effet des interactions dans le gaz de Bose**

À des températures inférieures à la température critique pour la condensation de Bose-Einstein, l'accumulation des particules dans l'état fondamental nécessite des interactions. En fait, les interactions entre les atomes jouent un rôle important dans la description de la condensation. Les interactions

répulsives ou attractives de  $N$  particules dans le potentiel harmonique peuvent être décrites par la diffusion d'onde  $S(a_s)$ , qui est caractérisée par une longueur de diffusion  $a$ . Dans le cas du Rubidium, lorsque la longueur de diffusion est positive ou négative indiquant que les interactions sont répulsives ou attractives, respectivement. Par d'ailleurs, lorsque le gaz d'atome du Rubidium est dilué pour  $na^3 \ll 1$ , les interactions sont importantes et sont exprimées en fonction du potentiel de l'approximation du champ moyen  $n.g$ , avec  $n$  est la densité et  $g$  représente la constante de couplage de collision. Le potentiel de ces interactions interatomiques conduit à résoudre difficilement l'équation de Schrödinger et la fonction d'onde associée au condensat, qui est définie dans l'équation (I.52). Pour cela, l'équation de Gross-Pitaevskii peut être utilisée afin de faciliter la résolution de l'équation de Schrödinger [Smi-11, Tun-10, Gio-98].

$$\phi(r) \approx e^{ikr} + f(k) \frac{e^{ikr}}{r} \tag{I.52}$$

Où,  $e^{i\vec{k}\vec{r}}$  est une onde plane  $k$  est le vecteur d'onde et  $f(k)$  est l'amplitude de diffusion.

**I.9.1. Fonction d'onde macroscopique à N particules**

La modélisation du système de collision entre les atomes est compliquée à cause des interactions. Pour cela, le modèle du système de collision a été simplifié par l'approximation de Hartree, qui basée sur l'indépendance des particules. A base de l'approximation de Hartree, la fonction d'onde sans interaction s'écrit comme le produit des fonctions d'onde individuelles, comme démontre l'équation (I.53). De plus, le Hamiltonien  $H$  du système de collision est exprimé comme la somme des hamiltoniens  $h_i$  associés à chaque particule, comme le montre l'équation (I.54).

$$\phi(r_1, r_2, \dots, r_N) = \prod_{i=1}^N \phi(r_i) \tag{I.53}$$

$$H = \sum_{i=1}^N h_i \tag{I.54}$$

Chaque particule dans l'état fondamental est associée à la fonction d'onde, comme indiqué l'équation (I.55).

$$\phi_i(r) = \left(\frac{m\varpi}{\pi\hbar}\right)^{3/4} \exp\left(-\frac{m}{2\hbar}(w_x x^2 + w_y y^2 + w_z z^2)\right) \tag{I.55}$$

À partir de l'équation (I.55), la densité spatiale de condensat dans l'état fondamental  $n(r)$  s'exprime comme suit:

$$n(r) = N|\phi_0(r)|^2 = N\left(\frac{m\varpi}{\pi\hbar}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{2\hbar}(w_x x^2 + w_y y^2 + w_z z^2)\right) \tag{I.56}$$

**I.9.2. Potentiel d'interaction**

Le potentiel d'interaction a deux types, attractif et répulsif. Le potentiel harmonique devient attractif [Bat-15] lorsque la distance entre les atomes est courte, et devient répulsif [Bon-18] lorsque la distance est longue. Le potentiel répulsif a une interaction électrique de faible intensité entre deux atomes. Ces

interactions dans le potentiel est appelé la force de van der Waals ou liaison faible, qui dépend de la distance  $r$  entre deux particules. La force de van der Waals caractérise par trois types d'énergie:

- L'énergie des forces de Keesom entre molécules polaires ;
- L'énergie des forces de Debye entre molécules polaires et dipôles induits ;
- L'énergie des forces de dispersion de London entre dipôles instantanés.

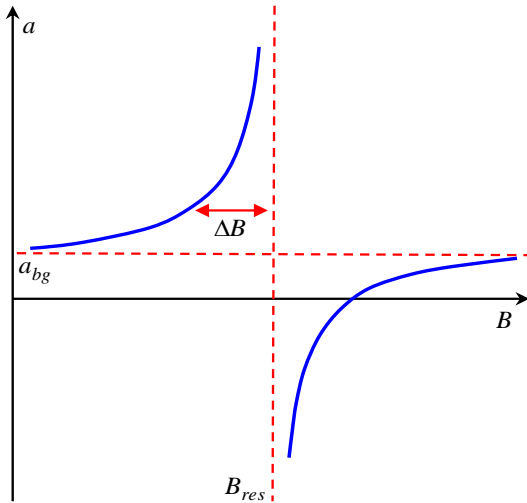
**I.9.3. Contrôle des interactions interatomiques**

L'interaction atomique dans le condensat est contrôlée à l'aide de la résonance de Feshbach. Cette résonance est obtenue à partir du champ magnétique. En fait, le champ magnétique crée un couplage entre l'état de diffusion incident dans les potentiels extérieur et effectif [Lab-01, Cub-04, Bea-09]. La résonance de diffusion se produit à partir des valeurs du champ magnétique, comme l'illustre les Figures (I.5) et (I.6).

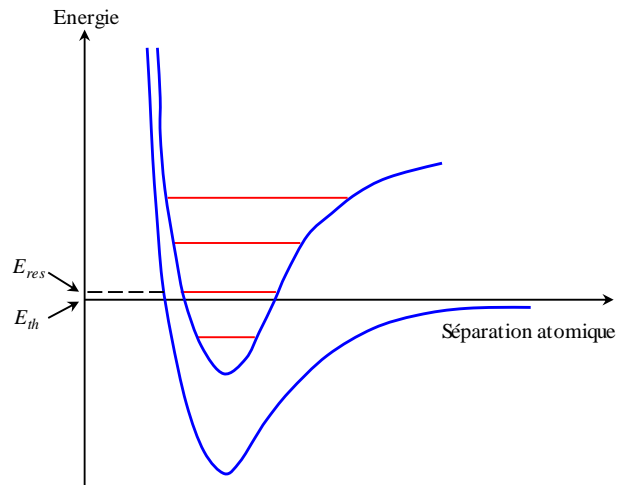
Dans ce contexte, la longueur de diffusion  $a$  caractérisant les interactions est liée au champ magnétique, comme le montre l'équation (I.66).

$$a = a_{bg} \left( 1 - \frac{\Delta B}{B - B_0} \right) \tag{I.66}$$

Où  $a_{bg}$  «background» est la longueur de diffusion des atomes dans le potentiel extérieur,  $\Delta B$  représente la largeur de la résonance de Feshbach et  $B_0$  correspond au champ magnétique à l'unité.



**Figure I.5.** Résonance de diffusion en fonction des valeurs du champ magnétique [Chi-07]



**Figure I.6.** Séparation atomique dans le potentiel extérieur [Chi-07]

### I.9.4. Equation de Gross-Pitaevskii

Le potentiel effectif a été introduit pour la description du Hamiltonienne d'un système composé de N-bosons interagissant dans un potentiel externe. Le potentiel effectif s'écrit sous la forme suivante:

$$V_{eff}(r-r') = g \delta(r-r') \quad (I.57)$$

Avec,  $g = \frac{4\pi \hbar^2 a_s}{m}$ . Où,  $a_s$  la longueur de diffusion et  $m$  la masse des particules.

Basant sur l'équation du potentiel effectif, l'expression du Hamiltonienne devient comme suit:

$$H = \sum_{i=1}^N \left( \frac{P_i^2}{2m} + V_{ext}(r_i) \right) + g \sum_{i<j} \delta(r_i - r_j) \quad (I.58)$$

Où  $m$  est la masse atomique, et nous avons introduit un potentiel externe  $V_{ext}(r)$ . Réécrivons maintenant  $H$  dans le formalisme de seconde quantification, en introduisant l'opérateur de champ atomique  $\psi$ .

$$H = \int dr \psi^\dagger(r) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(r) \right) \psi(r) + \frac{1}{2} \int dr' dr \psi^\dagger(r') \psi^\dagger(r) V(r-r') \psi(r) \psi(r') \quad (I.59)$$

Afin de dériver l'équation régissant le champ  $\psi_0$ , nous passons d'abord à l'image de Heisenberg. Dans cette représentation, le champ quantique  $\psi(r,t)$  remplit l'équation exacte

$$\left\{ \begin{array}{l} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r,t) = \left[ \psi(r,t), \hat{H} \right] \\ \\ = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(r) + \int dr' \psi^\dagger(r',t) V(r'-r) \psi(r',t) \right] \psi(r,t) \end{array} \right. \quad (I.60)$$

On peut donc légitimement faire le remplacement simultané de  $\psi$  par  $\psi_0$  et de  $V$  par  $V_{eff}$ , donc l'équation (I.60) devient comme suit :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_0(r,t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(r) + \int dr' g \delta(r-r') |\psi_0(r',t)|^2 \right] \psi_0(r,t) \quad (I.61)$$

Avec :  $\int dr' \delta(r-r') |\psi_0(r')|^2 = |\psi_0(r)|^2$ ,  $|\psi_0(r',t)|^2 = |\psi_0(r')|^2$ ,  $\psi_0(r,t) = \psi_0(r) e^{-i\mu t/\hbar}$ ,

$$\int dr' \delta(r-r') = 1 .$$

L'équation de Gross-Pitaevskii prend les valeurs du potentiel chimique comme étant positives et inférieures à la température critique. De plus, elle explique l'augmentation de l'énergie du système résultant de l'ajout d'un atome dans le condensat. L'équation de Gross-Pitaevskii a été réécrite en normalisant la fonction d'onde à l'unité, [Bao-03, Erd-07, Ben-15, Erd-10].

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{ext}(r) + g|\psi_0(r)|^2 \right] \psi_0(r) = \mu\psi_0(r) \quad (I.62)$$

Où,  $g$  la constant de couplage dû aux collisions.

L'équation de Gross-Pitaevskii est une équation de Schrödinger non linéaire. Elle est constituée de trois termes d'énergie qui sont :

- Terme d'énergie cinétique ;
- Terme d'énergie potentielle ;
- Terme d'énergie d'interaction entre les atomes. Ce dernier est un terme non linéaire de champ moyen, qui montre le potentiel effectif.

### I.9.5. L'approximation de Thomas-Fermi

La longueur de diffusion est importante pour déterminer la nature des collisions dans le condensat, soit répulsives ou attractives, comme présenté dans la section (I.9). Lorsque les interactions sont répulsives et pour un grand nombre d'atomes, l'énergie cinétique est négligeable devant les interactions. Pour cela, l'équation de Gross-Pitaevskii sera réécrite pour définir l'approximation de Thomas-Fermi [Hod-73, Mar-57, Pol-15, Zlo-21], comme exprimé dans l'équation (I.63)

$$V_{ext}(r)\psi(r) + Ng |\psi(r)|^2 \phi(r) = \mu\psi(r) \quad (I.63)$$

Avec,  $\mu$  représente le potentiel chimique.

La fonction d'onde de condensat dans l'approximation de Thomas-Fermi peut prendre l'équation suivante :

$$\psi(r) = \sqrt{\frac{\mu - V_{ext}(r)}{g}} \quad (I.64)$$

Le profil de densité spatiale du condensat devient comme suit:

$$n(r) = |\psi(r)|^2 = (\mu - V_{ext}(r)) / Ng \quad (I.65)$$

Avec,  $\mu \geq V_{ext}(r)$ .



## **I.10. Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons présenté les différentes techniques de refroidissement pour obtenir des atomes froids. En effet, la manipulation avec les atomes froids commence avec l'interaction entre le faisceau laser et les atomes à une température équivalente au nano kelvin. Ce faisceau crée deux forces, les forces de la radiation et du dipolaire, qui contrôle la vitesse et ralenti le mouvement des atomes.

Le phénomène d'interaction permet d'écrire le faisceau laser, comme un champ électrique dépendant du temps, et de générer les moments dipolaire induit et dipolaire électrique à partir de la transition entre le niveau fondamental et le niveau excité. A cette fin, le Hamiltonien a été ajouté pour d'écrire le phénomène d'interaction entre l'atome et le laser.

Ce chapitre est également consacré à l'étude des interactions entre les bosons dans l'état fondamental. Les interactions distinctes sont des interactions attractives ou répulsives, qui peuvent être écrites en termes de la longueur de diffusion entre les atomes. La fonction d'onde et l'hamiltonien du condensat sont très difficiles à traiter à cause de ces interactions. A cet effet, le modèle a été simplifié à basse température pour pouvoir étudier l'effet du désordre.

---



---

## Localisation d'Anderson des atomes froids en expansion optique

---



---

II.1.	Introduction .....	32
II.2.	Propagation des ondes dans un milieu désordonné .....	32
II.2.1.	Diffusion simple .....	33
II.2.2.	Diffusion multiple .....	33
II.2.3.	Interférence.....	35
II.3.	Transition de phase.....	35
II.3.1.	Théorie classique de Drude .....	36
II.3.2.	Modèle d'Anderson.....	37
II.4.	Critère de localisation.....	39
II.4.1.	Critère d'Ioffe-Regel .....	39
II.4.2.	Critère de Thouless.....	39
II.5.	Théorie d'échelle.....	40
II.6.	Localisation des atomes froids .....	43
II.6.1.	Localisation de l'onde plane dans un faible désordre .....	43
II.6.2.	Localisation de condensat dans un champ de speckle.....	44
II.7.	Réalisation d'un désordre basée sur un champ de speckle.....	47
II.7.1.	Répartition de l'intensité.....	48
II.7.2.	Rugosité du champ de speckle .....	49
II.7.3.	Propriété statistique du champ de speckle.....	49
II.7.4.	Dimension du grain du champ de speckle.....	50
II.8.	Conclusion.....	51

## II.1.Introduction

Dans ce chapitre, nous commençons par une brève présentation de la diffusion d'une onde scalaire sans interaction dans un milieu faiblement désordonné et les différents types de propagation. Une attention particulière est accordée à la diffusion multiple, dont les interférences engendrent le phénomène de localisation pour certaines longueurs d'onde. Ensuite, nous examinons le scénario où le désordre est intensif et son impact sur la propagation des ondes de manière générale. Nous approfondissons ensuite le cas spécifique d'un condensat en expansion dans un potentiel optique tridimensionnel, en présence d'une corrélation non gaussienne, afin d'analyser le phénomène de localisation. Nous exposons les critères de localisation, concluant le chapitre par une discussion sur la réalisation et les propriétés statiques du potentiel optique connu sous le nom de speckel.

## II.2.Propagation des ondes dans un milieu désordonné

Cette section présente la propagation d'une onde plane monochromatique de vecteur d'onde  $k$  dans un milieu statistiquement désordonné de taille fini. Ce milieu désordonné est constitué de diffuseurs ponctuels élastiques répartis aléatoirement aux positions  $r_i$ . Afin de décrire la propagation des ondes dans un milieu aléatoire, il est nécessaire d'introduire les différentes échelles spatiales, parmi lesquels [Ric-15, Lec-20, Con-22]:

- La longueur d'onde  $\lambda$ , qui a une relation inversement proportionnelle avec le vecteur d'onde  $k$ , tel que  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ ;
- Le libre parcours moyen  $l$ , qui définit la distance entre deux diffuseurs dans un milieu désordonné de taille  $L$ ;
- La longueur de localisation  $L_{loc}$ , qui correspond à l'échelle spatiale typique de variation d'une fonction d'onde localisée.

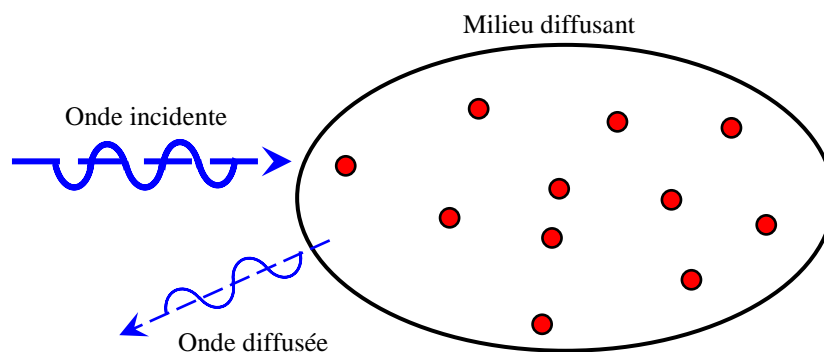
Les longueurs mentionnées ci-dessus permettent de distinguer trois régimes de transport, parmi lesquels:

- Le régime de diffusion simple est obtenu lorsque la taille du milieu désordonné est plus petite que le libre parcours moyen  $L \ll l$ . Dans ce régime, l'onde de matière subit peu de diffusion et le milieu devient presque transparent ;
- Le régime de diffusion multiple est obtenu lorsque la taille du milieu désordonné est comprise entre le libre parcours moyen et la longueur de localisation  $l \ll L \ll L_{loc}$ . Dans ce régime, l'onde de matière subit de multiples collisions dans le milieu désordonné avant de repartir.

- Le régime de localisation forte est obtenu lorsque la longueur de localisation est comprise entre le libre parcours moyen et la taille du milieu désordonné  $l \ll L_{loc} \ll L$ .

### II.2.1. Diffusion simple

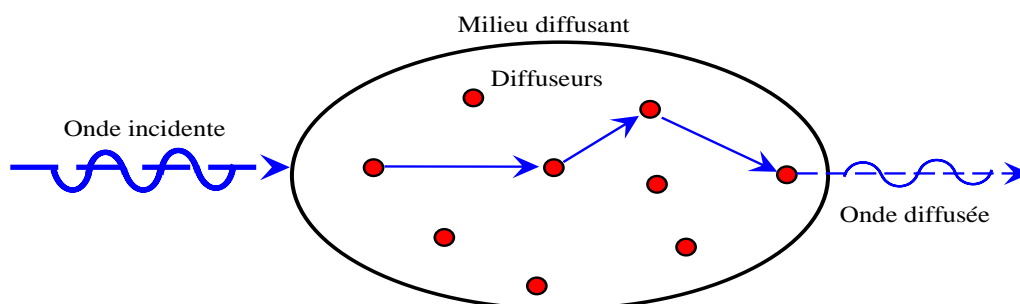
Le phénomène de la diffusion simple se produit lorsqu'une onde rencontre un seul diffuseur et sort immédiatement du milieu désordonné, comme l'illustre la Figure II.1. La théorie de diffusion simple a été établie afin de développer la théorie du transport radiatif des ondes électromagnétiques et le modèle de Drude-Boltzmann des ondes électroniques. En diffusion simple, la probabilité qu'une onde de matière rencontre des diffuseurs est plus faible. Par conséquent, cette théorie ne prenant pas en compte les interférences des ondes diffusées dans un milieu désordonné. Elle permet d'écrire l'évolution du coefficient de transmission  $T$  en fonction du libre parcours moyen  $l$  et de la taille du milieu aléatoire  $L$ , avec  $\langle T \rangle \propto \frac{l}{L}$ . De plus, elle permet aussi d'écrire la propagation des ondes dans un milieu désordonné à l'aide de l'équation de propagation représentant la constante de diffusion  $D_0 = vl/d$ , où  $v$  est la vitesse de l'onde et  $d$  est la dimension du système désordonné [Bas-95].



**Figure II.1.** Diffusion simple de l'onde incidente dans un milieu désordonné [Sha-12]

### II.2.2. Diffusion multiple

La diffusion multiple se produit lorsqu'une onde incidente rencontre multi diffuseurs dans un milieu désordonné et chaque fois change leur trajectoire résultant que l'onde diffusée se transmette hors du milieu désordonné, comme le montre la Figure II.2.



**Figure II.2.** Diffusion multiple de l'onde incidente dans un milieu désordonné [Sha-12]

Dans la diffusion multiple, la propagation de l'onde plane dans un milieu désordonné est caractérisée par une amplitude complexe  $A(k, k')$  définie par la relation suivante :

$$A(k, k') = \sum_{r_1, r_2} f(r_1, r_2) e^{i(k \cdot r_1 - k' \cdot r_2)} \quad (\text{II.1})$$

Où,  $f(r_1, r_2)$  représente l'amplitude complexe associée au chemin de diffusion multiple entre deux points  $r_1, r_2$ ,  $k$  et  $k'$  sont les vecteurs de l'onde incidente et de l'onde diffusée, respectivement.

A partir de l'équation (II.1), l'intensité des ondes planes peut être déduite et est définie comme suit :

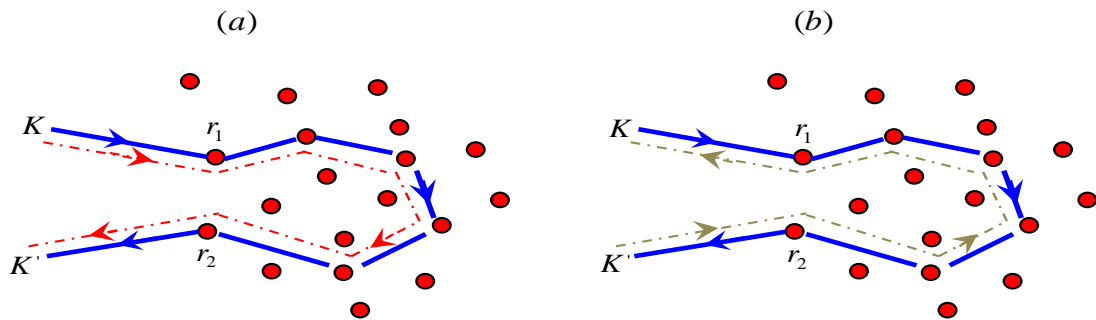
$$|A(\varepsilon, k)|^2 = \sum_{r_1, r_2} \sum_{r_3, r_4} f(r_1, r_2) f(r_3, r_4) e^{i(k \cdot r_1 - k' \cdot r_2)} e^{-i(k \cdot r_3 - k' \cdot r_4)} \quad (\text{II.2})$$

Le produit des amplitudes  $f(r_1, r_2) f(r_3, r_4)$  peut être défini la différence de phase entre les deux chemins  $r_1 \rightarrow r_2$  et  $r_3 \rightarrow r_4$ , qui sont variés aléatoirement avec les chemins de diffusion. Le produit des amplitudes est nul lorsque les chemins de diffusion ayant les mêmes directions et devient non nul lorsque les directions des chemins de diffusion sont opposés, où  $r_1 = r_2$  et  $r_3 = r_4$  quand les chemins de diffusion de même sens de propagation et  $r_1 = r_3$  et  $r_2 = r_4$  dans le cas de sens opposé, comme l'illustre la Figure II.3.

L'intensité moyenne de l'onde diffusée dans un milieu désordonné peut s'exprimer comme suit :

$$\langle |A(k, k')|^2 \rangle = \left\langle \sum_{r_1, r_2} |f(r_1, r_2)|^2 [1 + e^{i(k+k') \cdot (r_1 - r_2)}] \right\rangle \quad (\text{II.3})$$

L'équation (II.3) a deux termes: le premier terme est la phase nulle correspondant à des chemins du même sens et le deuxième terme est la phase non nulle correspondant à l'interférence entre les chemins opposés, qui est l'origine de phénomène de recto-diffusion [Zha-05, Jen-12, Pir-13, Cha-11].



**Figure II.3.** Les chemins de diffusion dans un milieu désordonné : a) les chemins de diffusion identiques b) les chemins de diffusion inversés [Clé-07].

### II.2.3. Interférence

Dans la diffusion multiple, le terme d'interférence est un terme non nul, qui est responsable sur les effets persistants après la moyenne d'ensemble sur le désordre dans deux cas particuliers mentionnés ci-dessus. Ces cas particuliers ont exactement la même origine et se produisent au même temps.

- Le premier cas correspond à l'onde diffusée et à la direction opposée au vecteur d'onde incident, où  $k + k' \approx 0$ . Pour cet effet, l'intensité de l'onde incidente égale au double d'intensité diffusée selon les autres directions de l'espace.
- Le deuxième cas correspond à boucle de diffusion fermée, où  $r_1 = r_2$ . Ce phénomène appelé localisation faible, qui est traduit par une diminution de la diffusion de l'onde dans un milieu désordonné. Dans ce cas, il est possible de définir et de calculer le coefficient de diffusion  $D_{loc}$ . En effet, le coefficient de diffusion est positif et inférieure à la constante de diffusion du cas simple, où  $0 < D_{loc} < D_0$ .

La présence d'interférences conduit aux phénomènes de rétrodiffusion et de faible localisation [Wol-25, Rav-92, Coh-17, Bid-02].

### II.3. Transition de phase

En 1958, Philip W. Anderson a étudié l'impact des cristaux imparfaits sur le transport électronique. En fait, la plupart des cristaux contient des défauts et des impuretés, qui peuvent modifier radicalement le comportement de l'onde électronique. Ce phénomène est fourni par la théorie classique de Drude expliquant la transition de phase entre le régime diffusé et le régime de localisation forte ou localisation d'Anderson. Les deux régimes sont séparés par un point appelé la mobilité edge. Dans le régime de diffusion, la constante de diffusion devient non nulle, et s'annule dans le régime de localisation. En effet, le régime diffusif est déterminé par le libre parcours moyen. En fait, si le libre parcours moyen est grand, l'onde se propage rapidement sur de grandes distances entre les diffuseurs dans le milieu désordonné, et la conductivité devient plus élevée. En revanche, si le libre parcours moyen est petit alors le milieu désordonné devient très fort, le mouvement diffusif des électrons s'arrête complètement et la conductivité s'annule et le matériau devient isolant permettant de localiser l'électron, où la localisation d'Anderson est établie [Mie-17, Asp-09, Bill-08, Mod-10, Cro-11, Ric-15].

Anderson a montré que la fonction d'onde localisée présente une décroissance spatiale exponentielle à partir du point de la localisation. Cette décroissance exponentielle est la signature symbolique de la localisation d'Anderson, et est caractérisée par la longueur de la localisation. Dans ce contexte, la localisation d'Anderson est fortement dépendant de la dimensionnalité du système désordonné, tels que [Pir-13]:

- Dans un système unidimensionnel (1D), l'onde se localise même en présence d'un désordre faible et l'effet de l'interférence existe ;
- Dans un système bidimensionnel (2D), le phénomène de la localisation est plus délicat et le milieu désordonné a plus de chemins de diffusion possibles. De plus, l'effet d'interférence et la localisation d'électron sont moins marqués comparant avec le système désordonné unidimensionnel;
- Dans un système tridimensionnel (3D), la localisation d'Anderson présentant une transition de phase entre les régimes localisé et diffusé.

### II.3.1. Théorie classique de Drude

La théorie classique du model de Drude permet d'écrire le transport de l'onde dans un milieu cristal réel. En fait, la plupart des cristaux contiennent des défauts, tels que les lacunes et les impuretés. Le model de Drude montre que la conductivité d'un métal est liée avec le temps typique entre deux collisions [Ash-02, Ren-05, Sal-18]. L'expression de la conductivité du matériau s'exprime comme suit :

$$\sigma = \frac{n.e^2\tau}{m} \quad (\text{II.4})$$

Où,  $n$  est la densité de l'électron,  $e$  est la charge et  $\tau$  représente le temps typique entre deux collisions.

Le matériau conducteur dépend de la théorie de Bande et de la position du niveau de fermi. La conduction des électrons quasi libre de masse  $m$  et de charge  $e$  est accélérée par le champ électrique  $E$ , telle que l'expression de la densité du courant établie s'exprime comme suit [Pot-73, Ruf-93] :

$$\vec{J} = -n.e.v = \sigma.E \quad (\text{II.5})$$

Où,  $v$  représente la vitesse moyenne des électrons définie par :  $\vec{v} = -\frac{e.\vec{E}.\tau}{m}$ .

Dans le bon conducteur, la longueur d'onde  $\lambda$  est faible devant le libre parcours moyen  $l$ . Dans ce cas, la fonction d'onde de l'électron est donnée sous la forme d'une onde de Bloch, comme le montre la Figure (II.4-a-). En 1928, les travaux de Bloch donnent des fonctions d'onde de Bloch pour des états étendus dans un milieu non-désordonné. Ces fonctions d'ondes établies sont égales au produit de l'onde plane  $\exp(i.\vec{r}.\vec{k})$  et de la fonction périodique  $U_n(\vec{r} + \vec{R})$  [Pot-20], telle que :

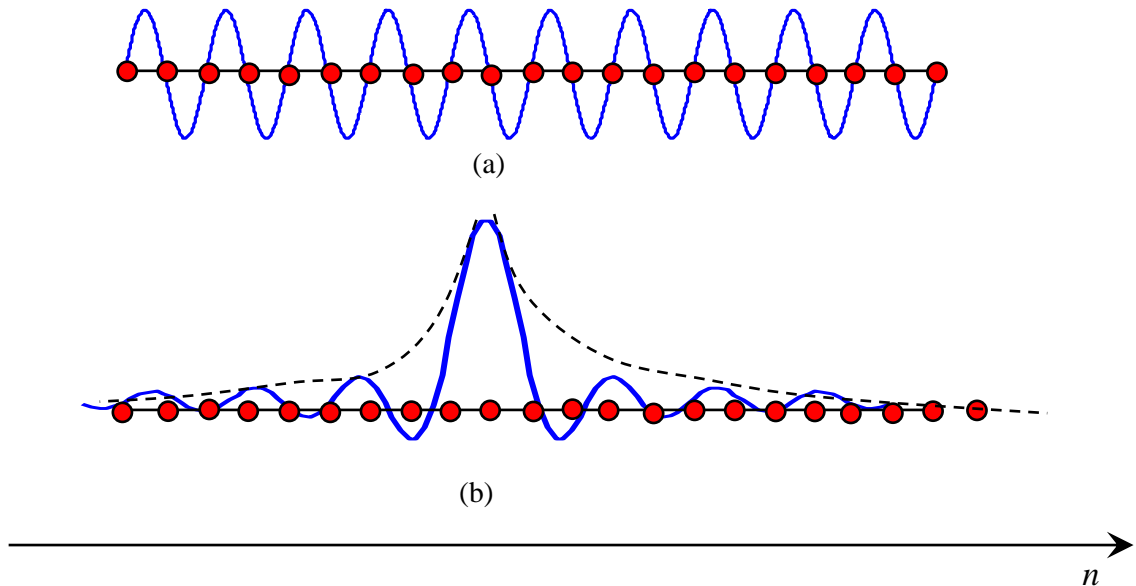
$$\Psi_{n,k} = U_n(\vec{r}) \exp(i.\vec{r}.\vec{k}) \quad (\text{II.6})$$

Avec :  $U_n(\vec{r} + \vec{R}) = U_n(\vec{r})$ .

Où,  $\vec{R}$  est le vecteur de translation du réseau,  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde et  $n$  est l'indice de la bande.

Dans le cas d'un matériau isolant, où le désordre existe, la symétrie est perdue et des quantités physiques deviennent aléatoirement distribuées. De plus, l'électron perd sa phase métallique à cause de l'interférence forte. Par conséquent, l'électron possède un régime localisé ou isolant. Dans ce contexte, la fonction d'onde localisée, définie dans l'équation (II.7), présente une décroissance spatiale exponentielle et caractérisée par une longueur de localisation [Cro-17], comme l'illustre la Figure (II.4-b-). Dans ce régime, la taille du système excède la longueur de localisation. Les principales propriétés de localisation sont simplifiées par le modèle d'Anderson.

$$\psi_{n,k}(\vec{r}) = f(\vec{r}) \exp(-\frac{\vec{r}}{\lambda}) \quad (\text{II.7})$$



**Figure II.4.** Fonction d'onde de l'électron ; (a) Ondes de Bloch, (b) Onde localisée [Gas-13]

### II.3.2. Modèle d'Anderson

Le modèle d'Anderson a étudié le transport électronique dans des systèmes fortement désordonnés. Ce modèle décrit la transition d'un électron d'un site  $|i\rangle$  à un autre site voisin  $|j\rangle$ , où chaque site possède une énergie aléatoire  $\varepsilon_i$ . Ces énergies aléatoires modélisent les fluctuations énergétiques introduites par les impuretés du système désordonné. Le modèle d'Hamiltonien, définie dans l'équation (II.8), peut être utilisé afin d'exprimer le modèle d'Anderson [Poi-98, Chi-07].

$$\hat{H} = \sum_i \varepsilon_i |i\rangle\langle i| + \sum_{i \neq j} V_{ij} |j\rangle\langle i| \quad (\text{II.8})$$



Le modèle de la liaison forte ou d'Anderson peut décrire l'état des électrons dans les sites, étant donné que les sites sont proches les uns des autres. Le modèle d'Hamiltonien peut être détaillé comme suit :

- Dans la première somme du modèle Hamiltonien  $\hat{H}$ , les électrons sont représentés par des fonctions d'onde  $|i\rangle$  et l'énergie associée à ces fonctions d'onde est définie par  $\varepsilon_i$ . Dans des cas particuliers, les fonctions d'onde peuvent être négligées lorsqu'elles sont attachées aux différents sites, c'est-à-dire, les fonctions d'onde dans le modèle d'Anderson ne sont pas orthogonales et ne correspondent pas à l'état approprié de l'Hamiltonien  $\hat{H}$ .
- Dans la seconde somme de l'Hamiltonien  $\hat{H}$ ,  $V_{i,j} = \langle i, j \rangle$  représente l'amplitude de la transition tunnel des électrons d'un site  $i$  à un autre site  $j$ .

L'énergie des sites dans le model d'Hamiltonien est distribuée aléatoirement à l'aide d'une distribution gaussienne ou lorentzienne  $P(V_i)$ . Cette fonction de distribution est donnée par la relation suivante :

$$P(V_i) = \frac{1}{W} \Theta\left(\frac{1}{2}W - |V_i|\right) \quad (\text{II.9})$$

Où,  $\Theta$  est la fonction de Heaviside et  $W$  est l'intensité des fluctuations énergétiques.

Le model d'Anderson conduit à comprendre la localisation de l'onde à une ou deux dimensions. Dans les systèmes unidimensionnel ou bidimensionnel, les fonctions d'onde sont localisées pour toutes les valeurs  $W/V$  et pour toutes les énergies proches du bord de bande. D'autre part, le model d'Anderson à tridimensionnel présente une transition de phase entre le régime diffusif et localisé, introduisant une énergie critique  $E_c$  et un désordre critique  $W_c$ , qui séparent entre les deux régimes. En fait, la localisation et la diffusion peuvent être considérées comme des régimes isolant et métallique, respectivement. Dans ce contexte, l'énergie des atomes froids peut déterminer l'état de la transition, métal ou isolant, des atomes froids dans un milieu désordonné.

- Dans le cas de régime isolant, l'énergie des atomes doit être inférieure à l'énergie critique  $E < E_c$  et les atomes froids seront dans un état de la localisation.
- Dans le cas de régime métallique, l'énergie des atomes doit être supérieure à l'énergie critique  $E > E_c$  et les atomes froids seront dans un état de diffusion [Her-20].

Le model d'Anderson est liée au concept de front de mobilité afin d'illustrer les états localisé et étendu. En fait, l'état localisé est obtenu lorsque l'énergie de l'atome est comprise entre  $E_c$  et  $E_c'$ .

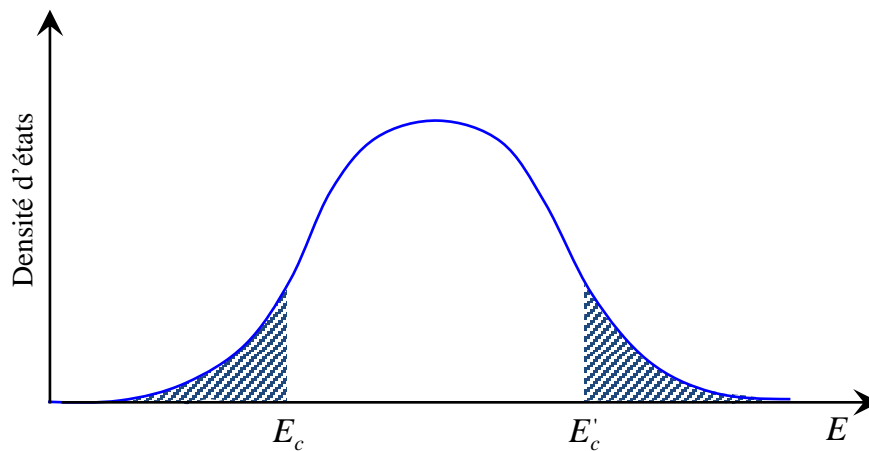
( $E < E_c, E > E_c$ ). D'autre part, l'état étendu est obtenu lorsque l'énergie de l'atome est confinée entre  $E_c$  et  $E_c'$  ( $E_c < E < E_c'$ ) [Kun-83, Pir-12], comme l'illustre la Figure (II.5).

À partir de la longueur de la localisation d'Anderson, les exposants critiques peut déterminer la transition d'Anderson, comme le montre l'équation (II.10)

$$L_{loc} \propto (W - W_c)^{-\nu} \tag{II.10}$$

Avec,  $\nu$  représente l'exposant critique.

Comme un résumé de l'étude théorique du modèle d'Anderson, on peut conclure que le degré du désordre  $W$ , l'énergie de l'onde  $E$  et la dimension du système désordonné  $d$  peuvent déterminer l'état et le régime du système désordonné.



**Figure II.5.** Front de mobilité du modèle d'Anderson selon la densité d'état [All-15]

#### II.4. Critère de localisation

L'étude du phénomène de localisation par le modèle d'Anderson est très complexe. Il est donc nécessaire de générer des critères pour obtenir une image simple sur la localisation.

##### II.4.1. Critère d'Ioffe-Regel

Dans un milieu désordonné à 3D, le critère d'Ioffe-Regel est communément considéré comme nécessaire afin d'obtenir des effets prépondérants des interférences. Ce critère stipule que la longueur d'onde doit être supérieure au libre parcours moyen. Ce critère sera détaillé dans la suite de la thèse [Bel-16].

$$2\pi l < \lambda \tag{II.11}$$

##### II.4.2. Critère de Thouless

Le critère de Thouless est utilisé afin d'étudier la propagation des ondes dans un régime étendu. Il peut être appliqué sur la propagation de l'onde, le critère de Thouless peut être appliqué lorsque la taille du système désordonné  $L$  doit être supérieure au libre parcours moyen  $l$ . Dans un régime

étendu, le temps nécessaire à une onde pour se propager dans un milieu désordonné peut être calculé à travers la relation suivante :

$$t_D = L^2 / D \quad (\text{II.12})$$

Avec  $D$  est le coefficient de diffusion.

A base de critère de Thouless, la longueur typique des états propres du système est définie par l'énergie de Thouless comme suit :

$$\delta E \approx D / L^2 \quad (\text{II.13})$$

L'état du système désordonné peut être connu à travers le coefficient du critère de Thouless, qui est appelé la conductance  $g$ . Ce coefficient est le rapport entre l'énergie de Thouless  $\delta E$  et l'écart moyen entre les niveaux  $\Delta E$ , qui est défini en fonction de la densité  $\rho(E)$  [Ski-10, All-15], comme indiqué dans l'équation (II.14).

$$\Delta E = \frac{1}{\rho(E)L^d} \quad (\text{II.14})$$

Par conséquent, la conductance  $g$  est définie comme suit :

$$g \equiv \frac{\delta E}{\Delta E} \approx \rho(E)D(E)L^{d-2} \quad (\text{II.15})$$

Le régime du système désordonné peut être classifié entre trois selon les valeurs de la conductance, telle que :

- Si la conductance est supérieure à 1,  $g > 1$ : Le système désordonné a un régime diffusif non localisé ;
- Si la conductance est inférieur à 1,  $g < 1$ : Le système désordonné a un régime localisé non diffusé;
- Si la conductance est proche de 1,  $g \approx 1$  : Le système désordonné a un régime localisé pour un milieu désordonné fini.

## II.5. Théorie d'échelle

La théorie d'échelle est aussi appliquée afin d'étudier un système désordonné de régime étendu. Cette théorie permet d'exprimer la conductance en fonction de la taille du système désordonné. La théorie d'échelle est considérée que la conductance est une mesure de désordre effectif lorsque l'échelle du système est modifiée [Pfe-12, Ski-10, All-15].

A base de la théorie d'échelle, la conductance à deux comportements:

- Dans un système de faible désordre, les fonctions d'onde des électrons sont des ondes étendues. Par conséquent, la conductance peut être exprimée en fonction de la conductivité  $\sigma$  et la taille du système désordonné  $L$  comme suit :

$$g(L) = \sigma L^{d-2} \quad (\text{II.16})$$

La remarque extraite de l'équation (II.16), qu'en la dimension du système égale à 3 ( $d = 3$ ), la conductance est directement proportionnelle avec la taille du système, et inversement proportionnelle avec la taille du système si la dimension du système est inférieure à 2.

- Dans un système de fort désordre, la longueur de localisation devient faible devant la longueur du système ( $L_{loc} < L$ ) et la conductance diminue exponentiellement, comme indique l'équation (II.17)

$$g(L) \propto \exp\left(-\frac{L}{L_{loc}}\right) \quad (\text{II.17})$$

La fonction d'échelle  $B(g)$  de cette théorie est définie en fonction de la conductance et de la taille du système comme suit:

$$B(g) = \frac{d \ln(g)}{d \ln(L)} \quad (\text{II.16})$$

Figure II.6 illustre les courbes de la fonction d'échelle  $B(g)$  en fonction de  $\ln(g)$  dans les trois dimensions. Ces courbes montrent les deux régions asymptotiques définies par les valeurs de la conductance  $g$ , qui sont :

- *Région de forte conductance* : cette région est obtenue lorsque la conductance est largement supérieure à la conductance critique ( $g \gg g_c$ ). Dans ce cas, la limite de la fonction d'échelle est donnée par la relation suivante :

$$\lim_{g \rightarrow \infty} B(g) = d - 2 \quad (\text{II.17})$$

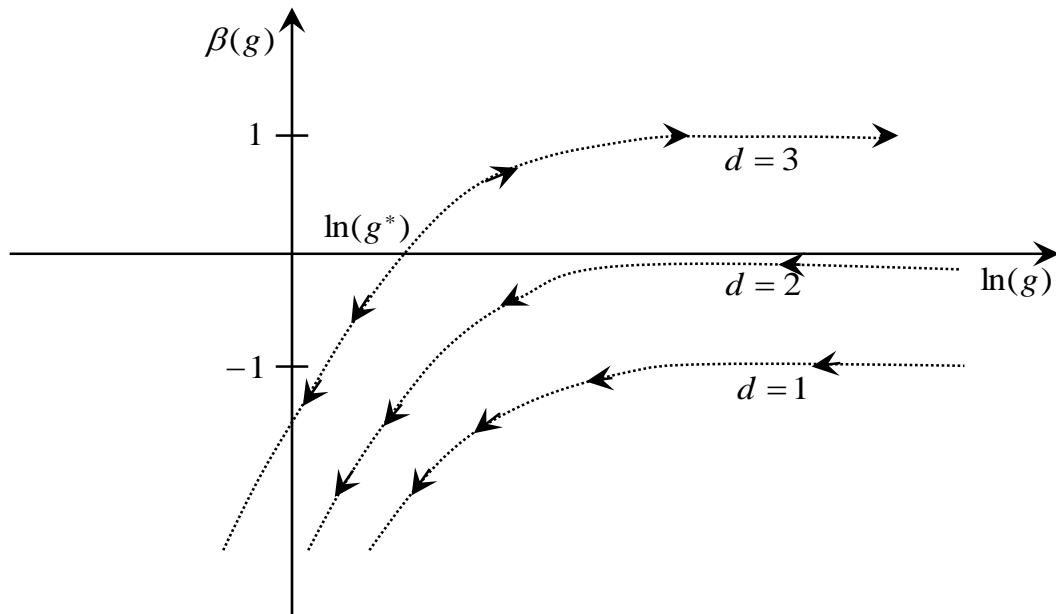
Pour un système à deux dimension ( $d = 2$ ), la fonction d'échelle tend vers zéro. Par conséquent, la conductance est indépendante de la taille du système.

- *Région de faible conductance* : cette région est obtenue lorsque la conductance est largement inférieure à la conductance critique ( $g \ll g_c$ ). Dans ce cas, la conductance décroît exponentiellement et la localisation de l'onde dans le système désordonné augmente. Par conséquent, la limite de la fonction d'échelle est donnée par la relation suivante :

$$\lim_{g \rightarrow 0} B(g) = \ln(g / g_c) \quad (\text{II.18})$$

A travers les courbes obtenues dans la Figure II.6, on peut conclure les résultats suivants :

- Quand la fonction d'échelle est positive  $B(g) > 0$ , la conductance augmente avec la taille du système et le régime devient métallique ;
- Quand la fonction d'échelle est négative  $B(g) < 0$ , la conductance diminue avec la taille du système et le régime devient isolant ;
- Quand la fonction d'échelle est nulle  $B(g) = 0$ , la transition métal-isolant est apparue.



**Figure II.6.** Fonction d'échelle en fonction de  $\ln(g)$  dans les trois dimensions [Pfe-12]

Le tableau ci-dessous illustre les différents d'état électronique de l'onde pour les trois dimensions, en présentant la nature de la fonction d'onde pour chaque dimension.

**Table II.1.** Différents d'état électronique de l'onde [All-15]

Dimension	État localisé	Etat étendu	Nature de la fonction d'onde
1	Oui	Non	$\psi(L) = \exp\left(-\frac{L}{L_c}\right)$
2	Oui	Non	$\psi(L) = \exp\left(-\frac{L}{L_c}\right)$
3	Oui	Oui	$\psi(L) = L^{-aF}$ Où $\psi(L) = \exp\left(-\frac{L}{L_c}\right)$

Après avoir présenté la localisation d'Anderson en général, les sections suivantes détaillent la localisation d'Anderson des ondes de matière dans le désordre.

## II.6. Localisation des atomes froids

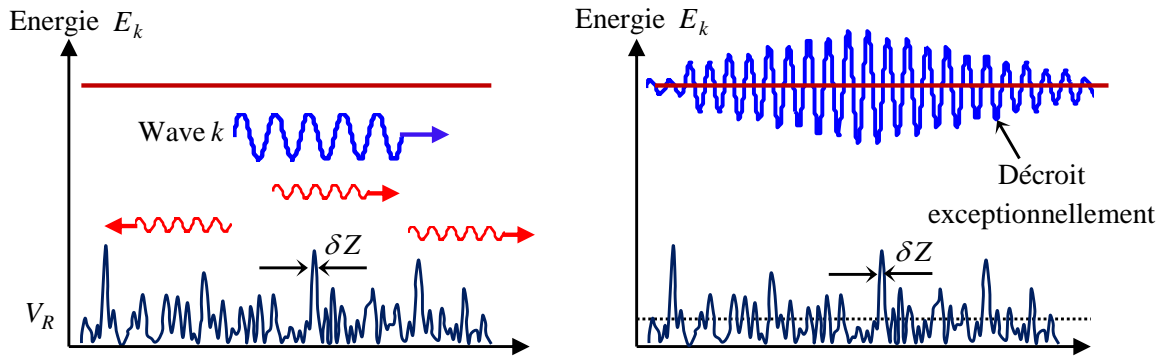
Cette partie débute en abordant la localisation de l'onde plane dans un milieu désordonné unidimensionnel (1D). Ensuite, nous nous tournons vers l'exposition de la théorie de localisation d'Anderson appliquée au condensat de Bose-Einstein, en fournissant une analyse détaillée du potentiel désordonné qui repose sur un champ de speckle en trois dimensions [Jen-12]

### II.6.1. Localisation de l'onde plane dans un faible désordre

Cette partie est consacrée à étudier la propagation de l'onde plane de vecteur d'onde  $k$  et de l'énergie  $\hbar^2 k^2 / 2m$  dans un potentiel désordonné  $V(r)$ . Le potentiel désordonné constitué de barrières de potentiel désordonné réparties spatialement et d'amplitudes aléatoires  $V_r$ , qui se caractérise par une longueur d'une variation spatiale  $\delta z$ , comme l'illustre la Figure II.9. Cette échelle de la variation spatiale  $\delta z$  est faible devant la longueur d'onde  $\lambda_k = \frac{2\pi}{k}$ . La localisation de l'onde  $k$  dans un potentiel désordonné a une amplitude de désordre  $V_r$ , qui est faible devant l'énergie de l'onde plane  $E_k$  ( $V_r \ll E_k$ ). Par conséquent, l'onde subit des multi réflexions quantique à la barrière de potentiel. À cet effet, la localisation de l'onde dans le potentiel crée des interférences destructives entre toutes ces réflexions, qui sont aléatoires induisant une diminution de l'amplitude, jusqu'à leur annulation, et conduisant à établir la localisation de l'onde  $\phi_k$ . En effet, la fonction d'onde de l'onde localisée décroît exponentiellement dans le potentiel désordonné  $V(r)$ . Cette décroissance a une longueur de localisation  $L_{loc}(k)$ , qui est grande devant la variation spatiale  $\delta z$ . La décroissance de l'onde localisée est décrite à l'aide de l'exposant de Lyapounov comme suit:

$$\gamma(k) = \frac{1}{L_{loc}(k)} = -\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\log(r(z))}{|z|} \right\rangle \quad (\text{II.19})$$

L'équation de Lyapounov, définie dans l'équation (II.19), est égale à l'inverse de la longueur de localisation  $L_{loc}$ . Avec,  $r(z)$  représente l'enveloppe de la fonction d'onde localisée [Bill-08, Mod-10, Cro-11].



**Figure II.7.** Localisation de l'onde en présence de faible désordre [Bil-10]

L'équation de Schrödinger peut être exprimée en fonction du potentiel désordonné, de l'énergie de l'onde et de la fonction d'onde comme suit :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_z^2 + V(z) \right] \phi_k(z) = E_k \phi_k(z) \quad (\text{II.20})$$

L'équation de Schrödinger, définie dans (II.20), est résolue par un traitement de perturbation appelé approximation de Born, qui permet de calculer explicitement l'exposant Lyapounov  $\gamma(k)$ . Par conséquent, l'exposant Lyapounov, définie dans l'équation (II.19), est réécrit par l'équation suivante :

$$\gamma(k) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \frac{m^2}{\hbar^4 k^2} C(2k) \quad (\text{II.21})$$

Où,  $\gamma(k)$  est proportionnel à la densité spectrale  $C(2k)$  du désordre et à la fréquence spatiale  $2k$ . A partir de l'équation de l'exposant Lyapounov, l'onde plane  $k$  devient localisée par le désordre quand la condition de Bragg dans le désordre  $k_{\text{désordre}} = 2k$  est vérifiée. D'autre part, l'onde devient très faiblement diffusée par le désordre et la longueur de localisation tend vers l'infini quand l'exposant Lyapounov est nulle [Ski-10, Ger-88].

La partie suivante présentera le cas particulier de la propagation des ondes de matière dans un système désordonné basé sur le champ de speckle.

### II.6.2. Localisation de condensat dans un champ de speckle

Expérimentalement, le condensat est la superposition des ondes planes caractérisées par une distribution  $D(k)$ , qui sont indépendantes entre elles et se propagent librement. Dans cette partie, nous tentons de décrire la localisation d'Anderson d'une onde de matière, qui est générée par un condensat en expansion, en présence d'un désordre basé sur un champ de speckle. Le champ de speckle a une faible d'amplitude de désordre  $V$ , afin d'éviter tout piégeage classique entre deux barrières élevées du désordre.

Initialement, le condensat est en équilibre thermodynamique de fréquence longitudinale  $\omega$  dans le potentiel harmonique, qui se dilate en présence du potentiel désordonné à l'instant  $t=0$ . L'expansion du condensat dans le désordre est dévissée en deux phases, qui sont :

- La première phase est établie lorsque l'inverse de la fréquence longitudinale du condensat  $\omega$  est supérieur ou égale au temps de l'expansion du condensat dans un désordre  $\frac{1}{\omega} \geq t$ .

Dans cette phase, les interactions répulsives entre les atomes dominent l'expansion du condensat, et l'énergie d'interaction transforme en énergie cinétique. Par conséquent, il est possible de décrire le condensat comme la superposition des ondes planes ;

- La deuxième phase est établie lorsque la superposition des ondes planes est diffusée à travers un désordre de faible amplitude. Chaque onde diffusée  $k$  dans le désordre est localisée et a une longueur de localisation  $L_{loc}$ . Le profil de densité de l'onde de matière, créée par le condensat, est donné par la superposition des ondes localisées  $\phi_k$  comme suit :

$$n(z) = \langle |\psi(z)|^2 \rangle = 2 \int_0^{\infty} dk D(k) \langle |\phi_k(z)|^2 \rangle \quad (\text{II.22})$$

Où,  $\langle \dots \rangle$  représente la moyenne des différentes réalisations dans le potentiel désordonné ;  $D(k)$  est la distribution de superposition de l'onde plane en expansion ;  $\phi_k(z)$  représente le profil de densité de l'onde localisée.

La distribution d'onde du condensat en expansion  $D(k)$  est initialement obtenue dans le régime de Thomas-Fermi, qui a une forme de parabole inversée, comme le montre la Figure II.8. Cette distribution est caractérisée par le nombre d'onde maximal  $k_{\max}$  et est définie par la relation suivante :

$$D(k) \approx \frac{3N}{4k_{\max}} \left( 1 - \frac{k^2}{k_{\max}^2} \right) \Theta \left( 1 - \frac{k}{k_{\max}} \right) \quad (\text{II.23})$$

Avec,  $N$  est le nombre des atomes dans le condensat et  $k_{\max}$  est le nombre d'onde maximal.

L'énergie cinétique de l'onde de matière peut être exprimée en fonction du nombre d'onde et du potentiel chimique  $\mu$ . Par conséquent, l'énergie cinétique maximale de l'onde peut être définie comme suit ;

$$E_c^{\max} = \frac{(\hbar k_{\max})^2}{2m} = 2\mu_{in} \quad (\text{II.24})$$

Où,  $\mu_{in}$  représente la valeur du potentiel initial.



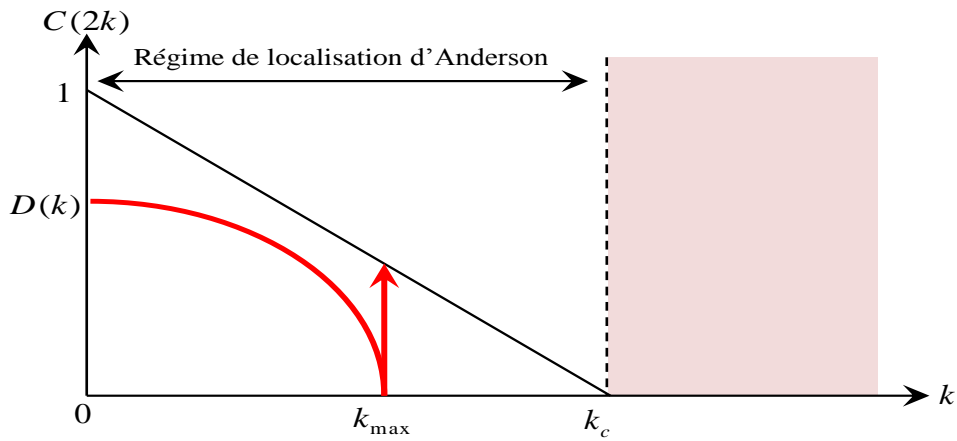
Il est nécessaire de connaître la fonction d'onde de chaque onde localisée pour établir le profil de l'onde de matière localisée en présence de désordre. La fonction d'onde localisée  $\phi_k$  est décroît exponentiellement en fonction de la longueur de localisation  $L_{loc}$ . La longueur de la localisation est exprimée en fonction du nombre d'onde maximal comme suit :

$$L_{loc}(k_{max}) = \frac{2\hbar^4 k_c k_{max}^2}{\pi m^2 V_r^2 \left(1 - \frac{k_{max}}{k_c}\right)} \quad (\text{II.25})$$

La localisation de l'onde de matière créée par un condensat en présence de désordre basé sur le champ de speckle ayant une distribution spatiale  $C(2k)$  d'un nombre d'onde critique  $k_c = \pi / \delta z$ . Dans ce contexte, l'onde localisée dans le champ de speckle est caractérisée par une amplitude de faible désordre devant l'énergie cinétique et le potentiel chimique. La condition, définie dans l'équation (II.26), est vérifiée pour toute onde localisée dans le potentiel désordonné basé sur le champ de speckle, qui a des grandes variations spatiales  $\Delta z$  de l'ordre  $\mu m$ .

$$k_{max} < k_c \quad (\text{II.26})$$

Finalement,  $L_{loc}$ ,  $k_{max}$ ,  $k_c$  et  $V_r$  sont des clés afin de réaliser la localisation de l'onde de matière dans un champ de speckle.



**Figure II.8.** Localisation exponentielle d'un condensat en expansion dans un désordre créé à partir de speckle  $k_{max} < k_c$  [Bil-10]

La première partie précédente est reposée sur la localisation des ondes planes dans un potentiel désordonné caractérisée par des changements spatiales. La partie suivante est consacrée afin de montrer les conditions de la localisation des ondes de matière créée par le condensat dans le désordre. Dans la partie suivante, la réalisation d'un désordre basé sur un champ de speckle sera détaillée [Sal-14, All-15, Bill-08].

## II.7. Réalisation d'un désordre basée sur un champ de speckle

Les expériences réalisées illustrent que le champ de speckle a créé un désordre. Ce désordre résulte de la diffusion d'un faisceau laser cohérent à travers une surface rugueuse introduisant une répartition spatiale aléatoire d'intensité. En effet, la diffusion se produit à la fois en réflexion et en transmission. La base des expériences réalisées sont le dispositif de diffusion en transmission, comme l'illustre la Figure II.9. La transmission en amplitude de l'onde diffusée dans le speckle est définie comme suit:

$$t_{diff}(x) = \exp(i\phi_{diff}(x)) \quad (\text{II.27})$$

La transmission de l'onde diffusée à travers le dispositif de diffusion change la phase de l'onde incidente d'amplitude  $A_0$ . Par conséquent, l'amplitude de l'onde incidente après la diffusion devient comme suit:

$$A_0 \rightarrow A_0 \times \exp(i\phi_{diff}(x)) = A_0 t_{diff}(x) \quad (\text{II.28})$$

La phase de l'onde diffusée  $\phi_{diff}(x)$  est proportionnelle à l'épaisseur locale de diffuseur, et est définie par la relation suivante :

$$\phi_{diff}(x) = \frac{2\pi}{\lambda} (n-1)e(x) \quad (\text{II.29})$$

Avec,  $n$  l'indice de réfraction du matériau.

Le faisceau laser est diffracté lorsqu'il traverse un verre dépoli d'une épaisseur aléatoire résultant un grand nombre des éléments diffusants, qui est du à l'effet du champ laser incident, et transmettant des ondes déphasées de manière aléatoire. Les ondes diffusées ont établi des interférences constructives ou destructives suivant le point du champ de speckle  $M$ , qui est la place de la répartition spatialement aléatoire d'intensité. L'onde incidente de faisceau laser choisie est désaccordée dans le bleu de la raie  $D_2$  du Rubidium 87 de longueur d'onde  $514nm$ .

Le dépoli a été utilisé afin de réaliser le champ de speckle, qui est caractérisé par un rayon de corrélation du diffuseur  $r_c$  et une épaisseur aléatoire  $e(x)$ . Les diffuseurs dans le dépoli sont indépendants et sont diffractés dans un cône d'angle  $\theta \approx \lambda/r_c$  résultant une distribution spatialement aléatoire d'intensité sur la taille de  $f\theta$  suivant le plan focal de la lentille.

Ce potentiel désordonné a ressenti par les atomes constituant des barrières d'amplitude variable. Le champ de speckle est obtenu dans le régime de diffraction Fraunhofer suivant le plan focal d'une lentille convergente de focale  $f$ . En effet, les grains de speckle sont formés à travers l'ouverture numérique  $ON$  illustrée sur la Figure II. 9, où  $ON = D/2f$ .

Suivant le plan focal, la superposition des taches d'intensité produit l'enveloppe de la répartition totale de l'intensité. À l'intérieur de cette enveloppe se trouve des grains de speckle  $\delta z$  de taille  $\lambda/2ON$ . L'amplitude des champs linéaires diffractés est obtenue à travers la transformation de Fourier de l'amplitude de l'onde incidente après la diffusion définie dans l'équation (II.28). Par conséquent, l'amplitude de l'onde diffractée dans le speckle en un point  $M$  donné dans le plan focal est exprimée par la relation suivante :

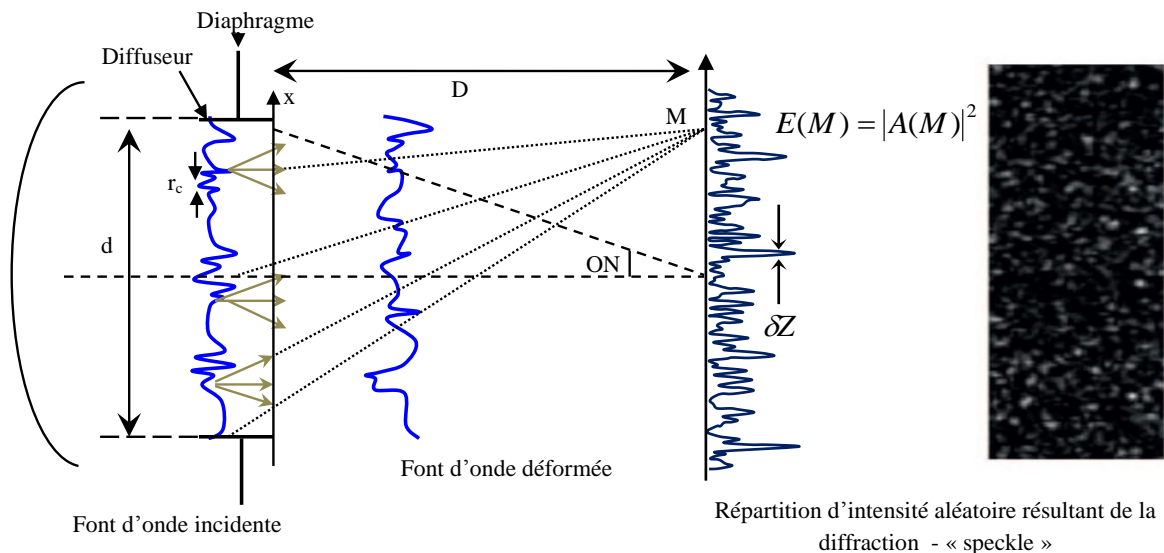
$$A(M) = A_0 \int_{diff} t_{diff}(x) \exp(2i\pi \frac{M}{\lambda D} x) dx \tag{II.30}$$

Avec,  $\lambda$  représente la longueur d'onde.

Au final, le champ de speckle est un milieu aléatoire réparti uniformément. Par conséquent, l'amplitude de l'onde diffusée en un point donné dans le dépoli a une même amplitude avec l'onde diffractée totale dans le speckle. A cette fin, l'équation de l'amplitude de l'onde diffractée, définie dans l'équation (II.30), peut être exprimée sous la forme d'une somme discrète comme suit :

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{i\phi_n} \tag{II.31}$$

Avec,  $N$  est le nombre de diffuseurs et est égal à  $N = D/r_c$ . Où,  $D$  est la distance entre le dépoli et le speckle [kai-20, Ber-19, Les-16, Cle-07].



**Figure II.9.** Représentation graphique de speckle [Clé-07]

### II.7.1. Répartition de l'intensité

D'après l'équation de l'amplitude diffractée en point  $M$ , définie dans l'équation (II.31), et en appliquant le théorème de la limite centrale, on déduit que la loi de probabilité de l'amplitude est gaussienne. L'intensité de l'onde diffractée par le dipôle est donnée par la relation suivante:

$$I = |A|^2 \quad (\text{II.32})$$

La distribution spatiale de l'intensité de l'onde diffractée a une forme exponentielle et est définie comme suit:

$$P(I) = \frac{1}{\langle I \rangle} e^{-\frac{I}{\langle I \rangle}} \quad (\text{II.33})$$

Où  $\langle I \rangle$  représente l'intensité moyenne au sens statistique.

### II.7.2. Rugosité du champ de speckle

Le champ de speckle d'amplitude  $A(M)$  associé au corps diffusant rugueux, qui a deux types de rugosité :

- **Rugosité forte :** Pour ce type de rugosité, la variation de l'épaisseur du verre dépoli  $e(x)$  est importante afin d'introduire le déphasage au niveau des diffuseurs et de détruire la phase du champ incident. Dans ce cas, la condition de l'écart-type de la distribution de phase, définie dans l'équation (II.34), doit être vérifiée. L'équation (II.34) implique que l'amplitude du champ de speckle est nulle en moyenne  $\langle A(M) \rangle = 0$ . Par conséquent, le champ de speckle est pleinement développé, qui compose des grains d'éclairement aléatoire  $E(M) = |A(M)|^2$ .

$$\sigma_{diff} = \frac{2\pi}{\lambda} (n-1)\sigma(e) > \pi \quad (\text{II.34})$$

Où,  $\sigma(e)$  représente l'écart-type de la distribution d'épaisseur.

- **Rugosité faible :** Pour ce type de rugosité : la variation de l'épaisseur du verre dépoli  $e(x)$  est faible et la phase du champ incident ne peut pas être détruite car le déphasage aléatoire introduit est insuffisant. Dans ce cas, la condition de l'écart-type de la distribution de phase, définie dans l'équation (II.35), doit être vérifiée. L'équation (II.35) implique que l'amplitude du champ de speckle est non nulle en moyenne  $\langle A(M) \rangle \neq 0$ . Par conséquent, le nombre de diffraction obtenu en l'absence de diffuseurs donne une partie facilement reconnaissable et une partie aléatoire de type speckle [Gaz-80, Tri-77, Ber-08, Men-77].

$$\sigma_{diff} = \frac{2\pi}{\lambda} (n-1)\sigma(e) < \pi \quad (\text{II.35})$$

### II.7.3. Propriété statistique du champ de speckle

Le champ de speckle a des propriétés spatiales, qui sont:

- *Fonction d'auto-corrélation en amplitude:* Cette fonction est définie comme suit :

$$C_{A,speckle}(\delta x) = \langle A_{speckle}(M) + A_{speckle}(M + \delta x) \rangle \quad (\text{II.36})$$

- *Répartition d'intensité spatiale*: La répartition d'intensité spatiale du champ de speckle est définie par l'équation (II.37). Avec,  $C_{diff}(\delta x)$  est la fonction de corrélation spatiale du diffuseur, comme s'exprimée dans l'équation (II.37).

$$\begin{cases} \langle E(M) \rangle_{diff} \propto TF[C_{diff}(\delta x)]_{U=\frac{x}{\lambda D}} \\ C_{diff}(\delta x) = \langle e(x)e(x + \delta x) \rangle - \langle e(x) \rangle^2 \end{cases} \quad (\text{II.37})$$

- *Fonction d'auto-corrélation en intensité*: La fonction d'auto-corrélation en intensité est définie dans l'équation (II.38), qui est liée à celle de l'amplitude en point  $M$  donné par le théorème de Wick, comme l'indique l'équation (II.39).

$$C_{E,speckle}(\delta x) = \langle E(M)E_{speckle}(M + \delta x) \rangle \quad (\text{II.38})$$

$$C_{E,speckle}(\delta x) \propto \langle E \rangle^2 + C_{E,speckle}(\delta x)^2 \quad (\text{II.39})$$

- *Fonction de corrélation de l'intensité*: Dans le plan de focal, la fonction de corrélation en intensité du champ de speckle en point  $M$  donné est définie par la relation suivante :

$$C_{\delta}(\delta x) = \langle E_{speckle}(M)E_{speckle}(\delta x) \rangle - \langle E_{speckle}(M) \rangle^2 \quad (\text{II.40})$$

- *Distribution en fréquence spatiale* : La distribution en fréquence spatiale du champ de speckle est la densité spectrale de puissance, qui peut être calculée à travers la transformation de Fourier de la fonction de corrélation de l'intensité définie dans l'équation (II.40). La distribution en fréquence spatiale du champ de speckle est définie par l'équation (II.41). Avec,  $\Theta$  est la fonction de Heaviside [Pie-03, Car-08, Ric-93].

$$C(2k) = \langle I \rangle^2 \frac{1}{k_c} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{k}{k_c}\right) \Theta\left(1 - \frac{k}{k_c}\right) \quad (\text{II.41})$$

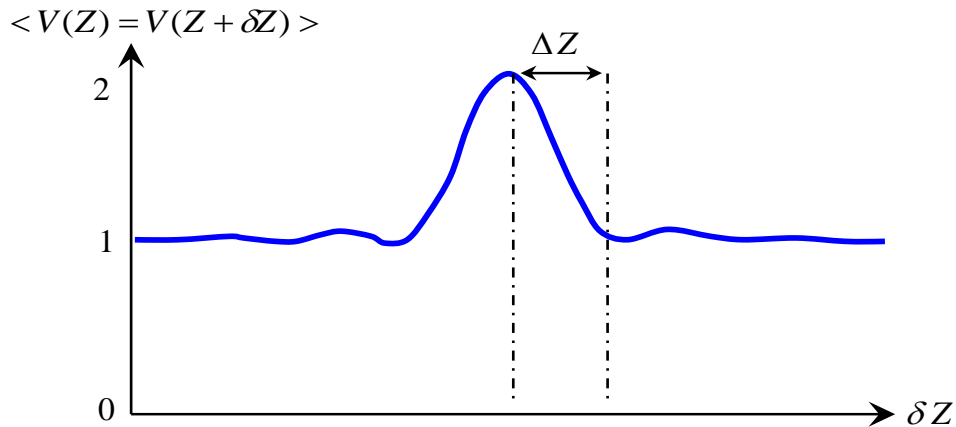
#### II.7.4. Dimension du grain du champ de speckle

La limite de diffraction de l'ouverture numérique  $ON$  apportée par l'éclairement dans le plan du diffuseur correspond aux dimensions du grain de speckle. Dans le plan de focal, on considère le cas d'un champ de speckle éclairé uniformément sur une ouverture de longueur  $D_z$  et de largeur rectangulaire  $D_x$ , comme le montre la Figure II.10. A cette fin, la fonction de corrélation de l'intensité, définie dans l'équation (II.40)[ Tri-77, Ber-08, Ric-93] devient comme suit:

$$C_{\delta}(\delta_x, \delta_z) = \langle I \rangle^2 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi D_x}{\lambda f} \delta_x\right) \text{sinc}^2\left(\frac{\pi D_z}{\lambda f} \delta_z\right) \quad (\text{II.42})$$

En utilisant la fonction de corrélation définie dans l'équation (II.42), les tailles transversales d'un grain de speckle,  $\delta_x$  et  $\delta_z$ , peut-être s'exprimées comme suit :

$$\begin{cases} \delta_x = \lambda \frac{f}{D_x} \\ \delta_z = \lambda \frac{f}{D_z} \end{cases} \quad (\text{II.43})$$



**Figure II.10.** Dimension du grain du champ de speckle à base de la fonction d'auto-corrélation [Les-16]

### II.8. Conclusion

Ce chapitre se concentre sur la compréhension de la propagation des ondes dans un milieu désordonné. Il débute en introduisant diverses échelles spatiales telles que le libre parcours moyen, la taille du système, la longueur d'onde et la longueur de localisation. Ces paramètres sont essentiels pour évaluer la propagation des ondes dans un milieu constitué d'éléments répartis de manière aléatoire. En utilisant ces échelles, on peut identifier les différents régimes de propagation des ondes dans le milieu désordonné. Cette analyse spatiale permet de mieux apprendre comment les ondes interagissent avec le désordre.

Puis nous avons abordé la diffusion des ondes dans un milieu désordonné, en examinant différents types de diffusion tels que la diffusion simple et la diffusion multiple. Une attention particulière a été accordée aux interférences entre les chemins de diffusion dans le cas de la diffusion multiple. La présence de ces interférences dans un milieu désordonné peut donner lieu à des phénomènes significatifs tels que la rétrodiffusion et la localisation.

Enfin, une attention particulière est accordée à la localisation des atomes froids dans un champ optique et à la mise en œuvre d'un champ de speckle. La création du speckle repose d'un côté sur l'utilisation d'un dispositif de transmission de l'onde incidente et d'un verre dépoli pour diffuser cette onde. À travers une ouverture numérique dans le dépoli, des grains de speckle se forment dans

le plan focal. D'un autre côté, il a été observé que la localisation des atomes froids en présence d'un champ de speckle résulte en une distribution spatiale caractérisée par un nombre d'onde critique. Cette localisation est intrinsèquement liée aux paramètres physiques qui définissent le potentiel désordonné.

---



---

## Transport quantique des atomes froids dans le champ de speckle à 3D

---



---

III.1. Introduction .....	55
III.2. Équation de Lippmann – Schwinger .....	55
III.3. Fonction de Green .....	57
III.3.1. Fonction de Green libre .....	58
III.4. Matrice de diffusion .....	60
III.5. Diffusion multiple .....	60
III.6. Fonction de corrélation.....	61
III.6.1. Transformation de Fourier de la fonction de corrélation.....	62
III.7. Modèle physique .....	63
III.8. Diagramme des diffusions basé sur la fonction de Green .....	64
III.9. Self énergie.....	65
III.9.1. Approximations de la self énergie.....	68
III.9.2. Approximation de Born au premier ordre(FBA).....	68
III.9.3. Approximation de Born self-consistante (SCBA).....	70
III.10. Fonction spectral .....	70
III.11. Résultat et discussion .....	71
III.11.1. Résultat de la self énergie.....	71
III.11.1.1. Résultat des approximations FBA et SCBA.....	71
III.11.1.2. Effet de la longueur de corrélation sur la self énergie.....	74
III.11.1.3. Effet d'énergie des ondes de matière sur la self énergie .....	75
III.11.1.4. Self énergie à une impulsion nulle .....	78
III.11.2. Résultats de la Fonction spectrale .....	81
III.11.2.1. Effet de l'énergie de l'onde de matière sur la fonction spectrale .....	81
III.11.2.2. Effet de l'amplitude de désordre sur la fonction spectrale .....	81
III.11.2.3. Effet du nombre d'onde sur la fonction spectrale .....	82
III.12. Conclusion.....	83



### III.1. Introduction

La self-énergie est une fonction complexe qui découle de la fonction de Green et de la transformation de Fourier de la fonction de corrélation. Son calcul repose sur l'approximation de Born au premier ordre (FBA) et l'approximation self-consistante (SCBA). L'étude du transport des atomes froids dans le champ de speckle, à travers ces deux approximations, implique l'analyse des paramètres clés du phénomène de transport tels que l'amplitude du désordre, la longueur de corrélation, le nombre d'onde et l'énergie de l'onde de matière. Ces paramètres influent significativement sur le comportement des atomes froids lors de la diffusion multiple d'après la littérature [Yed-10, Yed-17].

La relation entre la partie imaginaire de la self-énergie et la fonction de Green donne naissance à une nouvelle entité appelée la fonction spectrale. Nous avons l'intention d'exploiter cette fonction spectrale pour enrichir notre analyse du transport quantique des atomes froids dans le champ de speckle. Dans ce contexte, les approches analytiques et numériques des différentes approximations s'avèrent insuffisantes pour caractériser la transition du régime localisé au régime diffusif. En fin, nous nous orientons notre étude vers la fonction spectrale afin de justifier les résultats issus de la self-énergie dans les deux approximations FBA et SCBA. Ces résultats seront ensuite utilisés pour examiner les paramètres critiques lors de la transition.

Ce chapitre présente nos calculs numériques de la self-énergie, comprenant ses parties réelles et imaginaires, ainsi que leurs dérivées à partir de l'approximation de Born. Par la suite, nous cherchons la fonction spectrale afin d'évaluer l'impact du désordre sur la propagation des condensats de Bose-Einstein. Une comparaison approfondie de nos résultats numériques est réalisée entre l'approximation de premier ordre et l'approximation self-consistante, mettant en cause leurs implications sur la localisation des condensats.

### III.2. Équation de Lippmann – Schwinger

L'équation différentielle de Schrödinger est une équation de base afin d'étudier le transport quantique des atomes froids, qui est liée avec l'Hamiltonien  $H$  et le potentiel désordonné  $V$  par la relation suivante:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi = (H_0 + V)\psi \quad (\text{III.1})$$

Avec,  $H_0$  est l'Hamiltonien libre définie par :  $H_0 = -(\hbar^2 / 2m)\nabla^2$  ;  $V$  est le potentiel désordonné, qui représente l'énergie d'interaction du système.

L'état propre de l'Hamiltonien libre  $H_0$  est défini comme suit :

$$H_0|\phi\rangle = E|\phi\rangle \quad (\text{III.2})$$

Avec,  $E$  représente les valeurs propres d'énergie de l'Hamiltonien.

L'équation de Schrödinger doit être résolue avec des conditions initiales ou aux limites pour le problème physique donné. Comme l'équation de Schrödinger est une équation différentielle complexe et ses conditions initiales sont inconnues, elle sera remplacée par une autre équation, qui peut nous aider dans notre étude. L'équation de Lippmann-Schwinger est équivalente et souvent plus pratique que l'équation de Schrödinger, que nous pouvons l'utiliser afin d'étudier le transport quantique des atomes froids parce qu'elle a des conditions aux limites typiques liées aux problèmes de diffusion. La forme générale de l'équation de Lippmann – Schwinger est exprimée en deux équations, l'un a une signe positive (+) et l'autre a une signe négative (-), comme l'indique l'équation (III.3).

$$|\psi^{(\pm)}\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V |\psi^{(\pm)}\rangle \quad (\text{III.3})$$

Avec,  $H_0$  est l'Hamiltonien, qui décrit la situation du système désordonné dans lequel les diffuseurs sont infiniment éloignés et n'ont pas des interactions entre eux.  $|\phi\rangle$  est le vecteur propre et a une valeur propre de leur énergie propre  $E$  [Bad-13, All-15, Bur-04, Kat-87, Muk-81].

La solution de l'équation de Schrödinger a été écrite par l'équation de Lippmann – Schwinger, comme l'indique l'équation (III.4), considérant que les valeurs propres d'énergie de l'Hamiltonien changent constamment avec des changements continus de l'Hamiltonien.

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - H_0} V |\psi\rangle \quad (\text{III.4})$$

L'évolution de l'état  $\psi(t)$  en fonction de temps  $t$  est décrite par l'opérateur unitaire d'évolution  $U(t)$  comme suit :

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi_0(0)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\psi_0(0)\rangle \quad (\text{III.6})$$

Où,  $\psi_0(0)$  représente l'état initiale de la fonction d'onde à  $t = 0$ .

L'évolution spatiale de l'état  $\psi$  à l'instant  $t$ , définie dans l'équation (III.7), est donnée par la projection de l'évolution temporelle sur  $r$ .

$$\langle r | \psi(t) \rangle = \langle r | e^{i\hat{H}(t-t_0)/\hbar} | \psi(t_0) \rangle \quad (\text{III.7})$$

En introduisant le calcul intégral dans l'équation (III.7), l'équation de l'évolution spatiale devient comme suit :

$$\langle r | \psi(t) \rangle = \int dr_i \langle r | e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar} | r_i \rangle \langle r_i | \psi(t_0) \rangle \quad (\text{III.8})$$

Avec,  $\int dr_i |r_i\rangle\langle r_i| = 1$ .

### III.3. Fonction de Green

La fonction de Green est une solution élémentaire, qui permet de résoudre les équations différentielles, telle que l'équation de Schrödinger, et des équations liées aux dérivées partielles à des coefficients constants. Dans notre étude, nous utilisons la fonction de Green pour analyser le problème du transport quantique des atomes froids dans un champ du speckle. En utilisant les représentations temporelle et spatiale de l'état  $\psi$ , la fonction de Green peut être définie comme suit [All-15, Fug-75, Dec-80]:

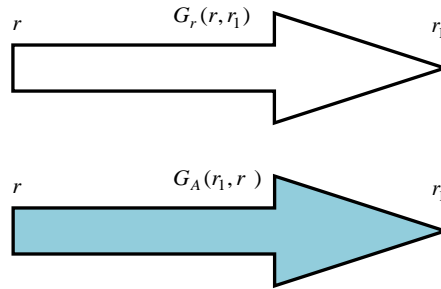
$$G(r_i, r, t) = \langle r | e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar} | r_i \rangle = \varepsilon_n \varphi_n^*(r_i) \varphi_n(r) e^{-i\varepsilon_n(t-t_0)} \quad (\text{III.9})$$

Où,  $\varepsilon_n$ ,  $\varphi_n$  représentent les valeurs et les vecteurs propres, respectivement.

La fonction de Green est décrite l'évolution de l'état  $|r_i\rangle$  au temps initial  $t_0$  à l'état  $|r\rangle$  au temps  $t$ , qui est donnée par la formule suivante :

$$\begin{cases} \hat{G}^R(t) = -i\theta(t)e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \\ \hat{G}^A(t) = -i\theta(-t)e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

Avec,  $\hat{G}^R(t)$  et  $\hat{G}^A(t)$  représentent les opérateurs des fonctions de Green retardée et avancée, respectivement. Ces fonctions sont représentées dans la Figure (III.1).



**Figure III.1.** Représentation de la fonction de Green retardée et avancée [All-15]

L'évolution spatiale des fonctions de Green retardée et avancée est définie par les relations suivantes:

$$\begin{cases} G^R(r_i, r, t) = -i\theta(t) \langle r | e^{-i\hat{H}(t-t_0)} | r_i \rangle = -i\theta(t) \sum_n \varphi_n^*(r_i) \varphi_n(r) e^{-i\varepsilon_n(t-t_0)} \\ G^A(r_i, r, t) = i\theta(-t) \langle r | e^{-i\hat{H}(t-t_0)} | r_i \rangle = i\theta(-t) \sum_n \varphi_n^*(r_i) \varphi_n(r) e^{-i\varepsilon_n(t-t_0)} \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

En utilisant la transformation de fourrier sur les fonctions de Green retardée et avancée, l'équation (III.11) devient comme suit :

$$G^{R,A}(r_i, r, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\varepsilon t} G^{R,A}(r_i, r, t) \quad (\text{III.12})$$

En calculant l'intégrale de l'équation (III.12) et en ajoutant la partie imaginaire à l'énergie ( $\varepsilon \pm i0$ ), les fonctions de Green résultantes deviennent comme suit :

$$G^{R,A}(r_i, r, \varepsilon) = \sum_n \frac{\phi_n^*(r_i) \phi_n(r_i)}{\varepsilon - \varepsilon_n \pm i0} \quad (\text{III.13})$$

Le résultat obtenu dans l'équation (III.13) permet de définir les opérateurs de Green  $\hat{G}_0^{R,A}$  et  $\hat{G}^{R,A}$  associés aux Hamiltoniens  $H_0$  et  $H$ , respectivement. Ces opérateurs de Green sont définis comme suit :

$$\begin{cases} \hat{G}_0^{R,A}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon - H_0 \pm i0} \\ \hat{G}^{R,A}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon - H \pm i0} \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

La représentation spatiale de l'opérateur de Green  $\hat{G}^{R,A}$  est :

$$(\varepsilon - H \pm i0) \hat{G}(r_i, r, \varepsilon) = \delta(r - r_i) \quad (\text{III.15})$$

La relation entre l'opérateur  $\hat{G}$  et  $\hat{G}_0$  peut être exprimée comme suit :

$$G(r_i, r, \varepsilon) = G_0(r_i, r, \varepsilon) + \int G(r_i, r, \varepsilon) V(r) G_0(r_i, r, \varepsilon) \quad (\text{III.16})$$

La relation entre les fonctions de Green, avancée et retardée, basée sur l'énergie de l'atome  $\varepsilon$  et le temps  $t$  peut être donnée par les relations définies dans l'équation (III.17).

$$\begin{cases} G^A(r_i, r, \varepsilon) = G^R(r_i, r, \varepsilon)^* \\ G^A(r_i, r, t) = G^R(r_i, r, -t)^* \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

Où, \* le complexe conjugué.

### III.3.1. Fonction de Green libre

En supposant que le désordre est absent, dans ce cas, il s'agit d'un Hamiltonien  $H$  diagonal et la fonction de Green libre  $\hat{G}_0$  s'écrit comme suit:

$$\hat{G}_0 = \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon(k) \pm i\alpha} \quad (\text{III.18})$$

Avec,  $\varepsilon(k) = k^2 / 2m$  ,  $\alpha$  représente un nombre infinitésimal.

Dans un milieu à trois dimensions, la fonction de Green libre est définie en fonction des positions de diffuseurs  $(r, r_i)$  et de l'énergie de l'atome  $\varepsilon$  comme suit :

$$\hat{G}_0(r_i, r, \varepsilon) = \frac{2m}{(2\pi)^3} \int dk' e^{ik'(r-r_i)} \frac{1}{k^2 - (k')^2 \pm i\alpha} \quad (\text{III.19})$$

En supposant que  $R = |r - r_i|$  et en introduisant les bornes d'intégration de zéro jusqu'à l'infini, l'intégrale de l'équation (III.19) devient comme suit :

$$\hat{G}_0(r_i, r, \varepsilon) = \frac{2m}{(2\pi)^2} \int_0^\infty k'^2 dk' \frac{1}{ik'R} \frac{e^{ik'R} - e^{-ik'R}}{k^2 - k'^2 + i\alpha} \quad (\text{III.20})$$

En introduisant les bornes d'intégration de moins l'infini jusqu'à plus l'infini, l'intégrale sur  $k'$  s'écrit comme suit:

$$\hat{G}_0(r_i, r, \varepsilon) = -\frac{2m}{2i\pi^2 R} \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \frac{k' e^{ik'R}}{(k' - k \mp i\alpha)(k' + k \pm i\alpha)} \quad (\text{III.21})$$

L'intégrale de l'équation (III.21) est calculée à travers la méthode de résidus et la fonction de Green libre s'exprime comme suit :

$$\hat{G}_0(r_i, r, \varepsilon) = -\frac{m}{2\pi} \frac{e^{\pm ikR}}{R} \quad (\text{III.22})$$

Avec,  $k = \sqrt{2m\varepsilon}$  .

La solution de l'équation différentielle de Schrödinger, définie dans l'équation (III.4), peut être définie en fonction de la position de diffuseur  $r$  comme suit :

$$\psi(r) = \phi(r) + \int dr' G_0(r, r_1) V(r_1) \psi(r_1) \quad (\text{III.23})$$

Afin d'éviter le calcul d'intégral dans l'équation (III.16), la relation entre les opérateurs  $\hat{G}$  et  $\hat{G}_0$  peut être définie à base de la fonction de Green libre  $\hat{G}_0$  obtenue dans l'équation (III.22) comme suit :

$$\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}_0 V \hat{G}_0 \quad (\text{III.24})$$

La relation obtenue dans l'équation (III.24) peut être utilisée afin d'étudier la diffusion simple et sera reformulée pour étudier la diffusion multiple de l'onde dans un champ du speckle à trois dimensions [All-15].

### III.4. Matrice de diffusion

Afin d'exprimer la solution de Schrödinger en fonction de trois positions de diffuseurs  $(r, r_1, r_2)$ , la fonction d'onde obtenue dans l'équation (III. 23) devient comme suit :

$$\psi(r) = \phi(r) + \iint dr_1 dr_2 G_0(r, r_1) t(r_1, r_2) \phi(r_2) \quad (\text{III.25})$$

La matrice de diffusion  $t(r)$  est obtenue à travers le développement en série de Taylor de l'équation (III.25), et s'exprime comme suit:

$$t(r) = V(r)\delta(r - r_1) + V(r)G_0(r, r_1)V(r_1) + \int dr_2 V(r)G_0(r, r_2)V(r_2)G_0(r_2, r_1)V(r_1) \quad (\text{III.26})$$

La matrice de diffusion  $t(r)$  définie dans l'équation (III.26) peut être réécrite afin d'étudier la diffusion simple de l'onde dans un champ du speckle, comme l'indique l'équation (III.27).

$$\hat{t} = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{V} \quad (\text{III.27})$$

La moyenne de l'opérateur  $\hat{t}$  est définie par la relation suivante:

$$\langle \hat{t} \rangle = \left\langle \sum_i^N \hat{t}_i \right\rangle + \sum_{i \neq j}^{N,N} \langle \hat{t}_i \hat{G}_0 \hat{t}_j \rangle \quad (\text{III.28})$$

La relation entre les opérateurs de la fonction de Green  $\hat{G}$ , de la fonction de Green libre  $\hat{G}_0$  et de la matrice de diffusion  $\hat{t}$  s'exprime comme suit [Yed-10, Yed-17, Yed-11]:

$$\hat{G} = \hat{G}_0 \hat{t} \hat{G}_0 \quad (\text{III.29})$$

### III.5. Diffusion multiple

L'étude théorique du transport quantique des atomes froids montre que la diffusion multiple de l'onde dans un champ du speckle à trois dimensions est liée avec le libre parcours moyen, c'est-à-dire, la diffusion multiple a une relation avec la position de diffuseurs. Par conséquent, le développement de l'équation de la diffusion multiple est basé sur les opérateurs de la fonction de Green. L'équation (III.24) montre la relation entre les opérateurs de la fonction de Green dans la diffusion simple et dans la diffusion multiple, qui est connue par l'équation de Dyson, peut être définie comme suit :

$$\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}_0 \hat{V} \hat{G}_0 + \hat{G}_0 \hat{V} \hat{G}_0 \hat{V} \hat{G}_0 + \dots \quad (\text{III.30})$$

La représentation spatiale de l'opérateur  $\hat{G}$  pour  $N$  diffuseurs est exprimée de la forme suivante :

$$G(r, r_1) = G_0(r, r_1) + \int dr_1 G_0(r, r_1)V(r_1) + \int dr_1 G_0(r, r_1)V(r_1)G_0(r, r_1) \\ + \int dr_1 dr_2 G_0(r, r_1)V(r_1)G_0(r_1, r_2)V(r_2)G_0(r_2, r_1) + \dots \quad (\text{III.31})$$

A partir de l'équation de la matrice de diffusion pour la diffusion simple définie dans l'équation (III.27), on peut déduire l'opérateur de diffusion  $\hat{t}_i$  pour  $N$  diffuseurs de  $i^{eme}$  particule, qui s'exprime par la relation suivante :

$$\hat{t}_i = V_i + \hat{V}_i \hat{G}_0 \hat{V}_i + \hat{V}_i \hat{G}_0 \hat{V} \hat{G}_0 \hat{V}_i + \hat{V}_i \hat{G}_0 \hat{V} \hat{G}_0 \hat{V}_i \hat{G}_0 \hat{V}_i + \dots \quad (\text{III.32})$$

L'opérateur de la matrice de diffusion  $\hat{t}$  peut être défini en fonction de l'opérateur  $\hat{t}_i$  et de la fonction de Green libre  $\hat{G}_0$  comme suivante :

$$\hat{t} = \sum_i^N \hat{t}_i + \sum_{i \neq j}^{N,N} \hat{t}_i \hat{G}_0 \hat{t}_j + \sum_{i \neq j \neq k}^{N,N,N} \hat{t}_i \hat{G}_0 \hat{t}_j \hat{G}_0 \hat{t}_k + \sum_{i \neq j \neq k \neq l}^{N,N,N,N} \hat{t}_i \hat{G}_0 \hat{t}_j \hat{G}_0 \hat{t}_k \hat{G}_0 \hat{t}_l \dots \quad (\text{III.33})$$

Où,  $i, j, k, l$  représentent des indices, qui sont consécutifs et non identiques.

D'après l'équation (III.33), la première sommation représente la diffusion simple, tandis que les deuxième et troisième sommations décrivent la diffusion double et triple de l'onde incidente dans le milieu désordonné. Les moyennes de ces sommations sont définies comme suit [Yed-10, Yed-11]:

- La moyenne de la première sommation est définie comme suit:

$$\left\langle \sum_i^N \hat{t}_i \right\rangle = \sum_i^N \langle \hat{t}_i \rangle \quad (\text{III.34})$$

- La moyenne de la deuxième sommation s'exprime par la relation suivante:

$$\left\langle \sum_{i \neq j}^{N,N} \hat{t}_i \hat{G}_0 \hat{t}_j \right\rangle = \sum_{i \neq j}^{N,N} \langle \hat{t}_i \hat{G}_0 \hat{t}_j \rangle \quad (\text{III.35})$$

- La moyenne de la troisième sommation est définie comme suit:

$$\left\langle \sum_{i \neq j}^{N,N} \hat{t}_i \hat{G}_0 \hat{t}_j \hat{G}_0 \hat{t}_k \right\rangle = \sum_{i \neq j}^{N,N} \langle \hat{t}_i \hat{G}_0 \hat{t}_j \hat{G}_0 \hat{t}_k \rangle \quad (\text{III.36})$$

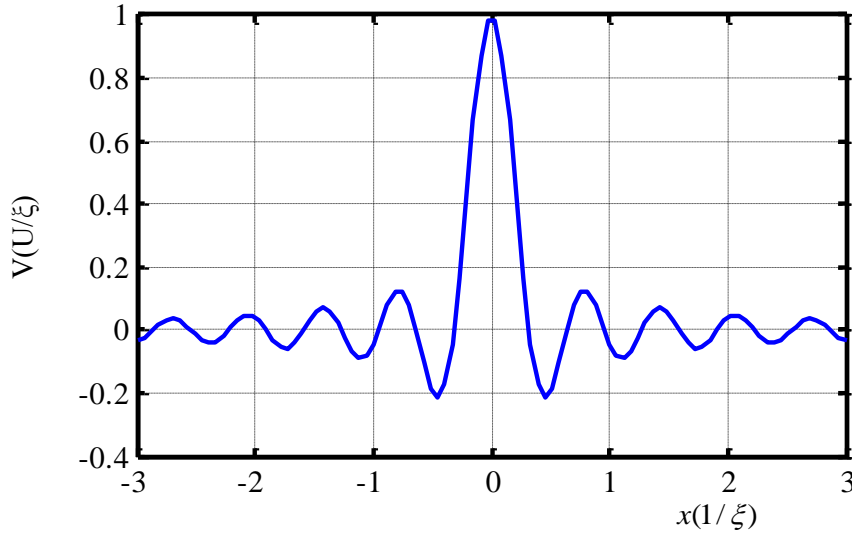
### III.6. Fonction de corrélation

La fonction de corrélation décrit la relation entre deux diffuseurs dans le potentiel optique désordonné  $V(r)$ , qui a une amplitude décroissante dans le champ de speckle. La fonction de corrélation est définie comme suit:

$$\langle \delta V(r) \delta V(r_1) \rangle = \langle V(r) V(k+x) \rangle = U \frac{\sin c^2 \left( \frac{x}{\xi} \right)}{\left( \frac{x}{\xi} \right)^2} \quad (\text{III.37})$$

Avec,  $U$  est l'amplitude de speckle, présente l'intensité optique moyenne du potentiel désordonné  $U = \langle V \rangle$  ;  $x$  est la distance de corrélation entre deux diffuseurs ; et  $\xi$  est la longueur de corrélation.

La Figure (III.2) illustre la courbe de la fonction de corrélation. Cette fonction prend une forme Poissonien d'amplitude moyenne  $\langle V \rangle$  parce que les fluctuations du potentiel  $\delta V(r)$  sont introduites à travers les intensités optiques [Yed-20, Yed-22, Yed-17].



**Figure III.2.** Fonction de corrélation [All-15]

### III.6.1. Transformation de Fourier de la fonction de corrélation

La transformation de Fourier de la fonction de corrélation est définie par la sommation aléatoire des ondes plane électromagnétique, comme l'indique l'équation (III.38), elle est connue par une fonction de structure.

$$U_{kk'} = 4\pi^2 U \sum_{k'} \left( \frac{\sin \frac{x}{\xi}}{\frac{x}{\xi}} \right) e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{x}} \quad (\text{III.38})$$

Avec,  $\vec{k}$  est le vecteur de l'onde incidente, qui a une énergie de  $\varepsilon = \hbar^2 k^2 / 2m$ ,  $\vec{k}'$  est le vecteur de l'onde diffusée, qui a une énergie de  $\varepsilon = \hbar^2 k'^2 / 2m$ . Le vecteur d'onde  $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$  illustre la nature du changement de vitesse à l'intérieur des diffuseurs par rapport à la longueur de corrélation  $\xi$ .

En supposant que la corrélation entre deux diffuseurs dans le champ de speckle ne dépend que de la distance entre les positions de diffuseurs  $|r_1 - r_2|$ , c'est-à-dire que le potentiel désordonné est statiquement homogène. Par conséquent, la fonction de structure définie dans l'équation (III.38) a une relation inverse avec la longueur de corrélation  $\xi$ .



Les atomes dans le milieu désordonné à trois dimensions sont propagés selon une trajectoire aléatoire caractérisée par le libre parcours moyen  $l$  et la vitesse d'onde  $v(\varepsilon)$ . Cette marche aléatoire contribue à la décroissance de la fonction de corrélation, qui est déterminée par le déphasage de l'onde de matière entre les diffuseurs. Le déphasage de l'onde de matière dans le champ de speckle sur toutes les trajectoires aléatoires s'écrit comme suit [Yed-11] :

$$\Delta\phi^n = \sum_{j=0}^{n+2} (\vec{k} - \vec{k}_j) \quad (\text{III.39})$$

### III.7. Modèle physique

On considère un condensat de Bose Einstein (BEC) composé de  $N \gg 1$  atomes de masse  $m$ , piégés dans un potentiel harmonique isotrope  $V(r)$  en 3D avec une fréquence de piégeage  $w_0$ , et soumis à un potentiel aléatoire externe  $U(r)$ . Le potentiel de désordre est supposé satisfaire aux propriétés statistiques suivantes :  $\langle U(r) \rangle = 0$ , et  $\langle U(r)U(r') \rangle = R(r-r')$ , où  $\langle \dots \rangle$  représente la moyenne d'ensemble du désordre et  $R(r-r')$  est la fonction de corrélation de désordres. La fonction d'onde  $\psi(r,t)$  d'un tel système évolue selon l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(r,t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V + U + g|\psi|^2 \right] \psi(r,t) \quad (\text{III.40})$$

Où  $g$  est la force des interactions répulsives entre atomes, et  $|\psi(r,t)|^2 = n(r,t)$  est la densité BEC dans un potentiel aléatoire. À  $t=0$ , le piège est soudainement stoppé ( $w$  est mis à 0), et le BEC commence à se propager. Pendant le temps  $t \geq w_0^{-1}$  il n'y a pas de diffusion du condensat sur le potentiel aléatoire (les atomes ne ressentent pas le potentiel), et l'énergie potentielle se transforme en énergie cinétique qui devient de l'ordre du potentiel chimique. Pour le temps  $t > w_0^{-1}$ , le désordre est activé et le condensat devient suffisamment dilué, ainsi l'énergie d'interaction peut être négligée car elle est beaucoup plus petite que l'énergie cinétique ( $(g \rightarrow 0)$ ). À cet égard, l'expansion peut être décrite par l'équation linéaire de Schrödinger, formulée comme suit :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(r,t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right] \psi(r,t) \quad (\text{III.41})$$

Où :

$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05457.10^{-34} Js$ ,  $\nabla^2$  est le laplacien,  $V(r)$  l'énergie potentielle de la particule au point

$r$ .

### III.8. Diagramme des diffusions basé sur la fonction de Green

Le diagramme de Feynman est utilisé à fin d'interpréter la diffusion simple de l'onde de matière dans un champ de speckle à trois dimensions, comme l'illustre la Figure (III.3). D'après le diagramme de Feynman, la ligne et le disque représentent la fonction de Green et le diffuseur, respectivement [Cle-17 , Akk-20, Boc-99].

$$\langle G \rangle = \text{---} + \text{---} \bullet \text{---}$$

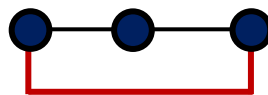
**Figure III.3.** Diagramme de Feynman pour la diffusion simple [Les-16]

Figure (III.4) montrent la diffusion double de l'onde de matière dans un champ de speckle à trois dimensions. Dans cette figure, l'arc de cercle pointillé en rouge décrit la corrélation entre les deux diffuseurs dans le potentiel désordonné.

$$\langle G \rangle = \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---}$$

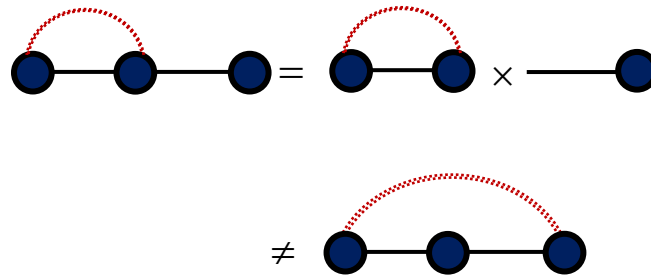
**Figure III.4.** Diagramme de Feynman pour la diffusion double [Les-16]

Le diagramme de la diffusion triple de l'onde de matière est illustré dans la Figure (III.5). Les diffuseurs identiques sont reliés par une ligne brisée, qui décrit que l'onde diffusé peut propager d'un diffuseur à l'autre et revenir au précédent diffuseur. D'autre part, il est possible de relier deux diffuseurs identiques avec la ligne brisée parce que l'onde de matière peut propager entre les deux diffuseurs dans le milieu désordonné.



**Figure III.5.** Diagramme de la diffusion triple de l'onde de matière [Les-16]

Il est possible d'appliquer le produit entre les diagrammes précédents, qui est connu par la factorisable des diagrammes. La figure (III.6-a) illustre le produit entre la diffusion double, qui a une corrélation entre les deux diffuseurs, avec la diffusion simple d'une onde de matière, tandis que la figure (III.6-b) montre la diffusion triple, qui a une corrélation entre les diffuseurs, c'est à dire que chaque diagramme illustre une certaine fonctionnement, comme le montre la Figure (III.6).



**Figure III.6.** Exemple sur la différence entre la factorisation des diagrammes et les diagrammes simples [Les-16]

**III.9. Self énergie**

La self énergie décrit l’ensemble des diagrammes de la diffusion multiple présenté dans la section précédente, en prenant en compte la corrélation entre les diffuseurs dans le champ de speckle. Il est difficile de calculer la self énergie parce qu’elle contient des diagrammes infinis. A cette fin, l’approximation de Born a été introduite afin de simplifier les équations de la diffusion et de faciliter l’étude la diffusion de l’onde dans le champ de speckle. Cette approximation peut être appliquée lorsque l’énergie de potentielle est faible devant l’énergie cinétique de l’onde de matière. L’approximation de Born au premier ordre peut être appliquée afin d’étudier la diffusion de l’onde par un diffuseur, tandis que l’approximation de Born self-consistante peut être utilisée afin d’étudier la diffusion de l’onde de matière par N diffuseurs dans le potentiel désordonné. Dans l’approximation de Born self-consistante, le temps moyen entre deux trajectoires de diffusion est donné par la relation suivante:

$$t = l / v \tag{III.42}$$

Avec,  $v = \frac{\hbar k}{m}$ .

Le développement de l’équation de la self énergie dans un champ de speckle tridimensionnels est basé sur le calcul de la moyenne de la fonction de Green en trois dimensions, qui est définie par la relation suivante :

$$\langle G(r, r_1, w) \rangle = G_0(r, r_1, w) + \int G_0(r, r_1, w) \Sigma(r_1, r_2) \langle G(r_2, r_1, w) \rangle d^3r_1 d^3r_2 \tag{III.43}$$

La transformation de Fourier de l’équation (III.43) permet de définir la moyenne de la fonction de Green en fonction de nombre d’onde  $k$  et de la self énergie  $\Sigma(\varepsilon, k')$ .

$$\langle G(\varepsilon, k') \rangle = \frac{1}{k^2 - k_0^2 - \Sigma(\varepsilon, k')} \tag{III.44}$$

Après un développement itératif, la self énergie en fonction de l’énergie et de nombre d’onde diffusée, peut être exprimée par la relation suivante :

$$\sum_{k'}(\varepsilon, k') = \sum_{k'} U(k-k')G(\varepsilon, k') \quad (\text{III.45})$$

Où:  $U_{kk'} = U(k-k')$  est la transformation de Fourier de la fonction de corrélation, voir l'équation

$$(III.38). \text{ De plus, } \sum_{k'} \text{ est la somme des ondes diffusées, qui est définie par : } \sum_{k'} = \int \frac{d^3 \vec{k}'}{(2\pi)^3}$$

En utilisant la relation de la self énergie obtenue dans l'équation (III.45), la fonction de Green s'écrit comme suit :

$$G(\varepsilon, k') = \frac{1}{\varepsilon - (\hbar^2 k'^2 / 2m) - \Sigma(\varepsilon, k')} \quad (\text{III.46})$$

En remplaçant les équations (III.46) et (III.38) dans l'équation (III.45), l'équation de la self énergie en trois dimensions s'exprime par la relation suivante :

$$\Sigma(\varepsilon, k) = \frac{4\pi^2 U}{(2\pi)^3} \int d^3 k' \int d^3 x \left( \frac{\sin \frac{x}{\xi}}{\frac{x}{\xi}} \right)^2 e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{x}} \frac{1}{\varepsilon - \left( \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} \right) - \Sigma(\varepsilon, k')} \quad (\text{III.47})$$

D'après l'équation (III.47), nous pouvons évaluer la self énergie en calculant les intégrales suivantes :

- La première intégrale est calculée par rapport au vecteur de l'onde diffusée  $\vec{k}'$  ;
- La deuxième intégrale est calculée par rapport à la distance de corrélation  $\vec{x}$  .

Par l'utilisation de symétrie, le domaine d'intégration de l'équation (III.47) devient sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ . Par conséquent, l'équation de la self énergie est donnée par la relation suivante :

$$\Sigma(\varepsilon, k) = \frac{2U\xi^2}{\pi} \int_0^{+\infty} dk' k'^2 \int_0^{+\infty} dx \sin^2 \left( \frac{x}{\xi} \right) \frac{\sin kx}{kx} \frac{\sin k'x}{k'x} \frac{1}{\varepsilon - \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} - \Sigma(\varepsilon, k')} \quad (\text{III.48})$$

Afin de calculer l'intégrale par rapport à la distance de corrélation  $\vec{x}$  , on suppose que :

$$I(k, k') = \int_0^{\infty} dx \sin^2(x/\xi) \text{sinc}(kx) \text{sinc}(k'x) \quad (\text{III.49})$$

En remplaçant la fonction de sinus cardinal par leur expression, l'équation (III.49) devient comme suit :

$$I(k, k') = \frac{1}{kk'} \int_0^{\infty} dx \sin^2(x/\xi) \frac{\sin kx}{x} \frac{\sin k'x}{x} \quad (\text{III.50})$$

En dérivant l'équation (III.50) par rapport au nombre d'onde diffusée  $k'$ , la dérivation de  $I(k, k')$  est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial k'} k' I(k, k') = \int_0^{\infty} dx \sin^2\left(\frac{x}{\xi}\right) \frac{\sin kx}{kx} \cos(k'x) \quad (\text{III.51})$$

En utilisant l'expression  $\sin^2(X) = (-1/4)(e^{2iX} - 2)$ , la dérivation de  $I(k, k')$  devient comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial k'} k' I(k, k') = -\frac{1}{4} \int_0^{\infty} dx (e^{2ix/\xi} - 2) \frac{\sin kx}{kx} \cos(k'x) \quad (\text{III.52})$$

En utilisant l'expression  $\cos(X) \sin(Y) = \frac{1}{4i} (e^{iX} + e^{-iX})(e^{iY} - e^{-iY})$ , l'équation (III.52) est réécrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial k'} k' I(k, k') = -\frac{1}{16ik} \int_0^{+\infty} dx (e^{2ix/\xi} - 2) \left( \frac{e^{i(k+k')x} - e^{i(-k+k')x} + e^{i(k-k')x} - e^{-i(k+k')x}}{x} \right) \quad (\text{III.53})$$

Après des calculs simples, la dérivation de  $I(k, k')$  par rapport au nombre d'onde  $k'$  est définie comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial k'} k' I(k, k') = -\frac{1}{16ik} \int_0^{+\infty} dx (1/x) \left( \begin{array}{l} e^{i(k+k'+\frac{2}{\xi})x} - e^{i(-k+k'+\frac{2}{\xi})x} + e^{i(k-k'+\frac{2}{\xi})x} - e^{i(-k-k'+\frac{2}{\xi})x} \\ -2e^{i(k+k')x} + 2e^{i(-k+k')x} - 2e^{i(k-k')x} + 2e^{-i(k+k')x} \end{array} \right) \quad (\text{III.54})$$

En utilisant la relation trigonométrique donnée dans l'équation (III.55) afin de calculer l'intégrale de la dérivée de l'équation (III.54).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx (e^{iqx} / x) = \pi i \theta(q) \quad (\text{III.55})$$

Par conséquent, la dérivée de  $I(k, k')$  s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial k'} k' I(k, k') = \frac{-\pi}{16k} \left[ \begin{array}{l} \theta(k+k'+\frac{2}{\xi}) - \theta(-k+k'+\frac{2}{\xi}) + \theta(k-k'+\frac{2}{\xi}) - \theta(-k-k'+\frac{2}{\xi}) \\ -2\theta(k+k') + 2\theta(-k+k') - 2\theta(k-k') + 2\theta(-k-k') \end{array} \right] \quad (\text{III.56})$$

Afin d'obtenir l'équation finale de  $I(k, k')$ , la relation définie dans l'équation (III.57) est appliquée sur la dérivée de  $I(k, k')$ .

$$\int \theta(x') dx' = |x| + \text{const} \quad (\text{III.57})$$

D'après la relation (III.57), l'équation de  $I(k, k')$  s'exprime par la relation suivante :

$$I(k, k') = -\frac{\pi}{16kk'} \left[ \begin{array}{c} \left| k + k' + \frac{2}{\xi} \right| - \left| -k + k' + \frac{2}{\xi} \right| + \left| k - k' + \frac{2}{\xi} \right| - \left| -k - k' + \frac{2}{\xi} \right| \\ \left[ 2|k + k'| + 2|-k + k'| - 2|k - k'| + 2|-k - k'| \right] \end{array} \right] \quad (III.58)$$

$I(k, k')$  représente la fonction de structure définie dans l'équation (III.38) et calculée dans l'équation (III.58). Dans notre cas, la fonction de structure est utilisée afin d'étudier la diffusion de l'onde dans le champ de speckle à trois dimensions.

En fin, l'équation de la self énergie définie dans (III.48), peut être exprimée en fonction du nombre d'onde incidente  $k$  et l'énergie de l'onde de matière  $\varepsilon$  sous la forme suivante :

$$\Sigma(k, \varepsilon) = \frac{2U\xi^2}{\pi} \int dk' \frac{k'^2 I(k, k')}{\varepsilon - \frac{\hbar k'^2}{2m} - \Sigma(k', \varepsilon)} \quad (III.59)$$

L'équation (III.60) est une fonction complexe, qui a une partie réelle et une partie imaginaire. La partie imaginaire de la self énergie représente la diffusion de l'atome par le champ de speckle et la partie réelle décrit le déplacement de l'énergie  $\varepsilon$ .

Figure (III.7) illustre le diagramme de la self énergie, qui décrit la somme de tous les diagrammes non factorisables.

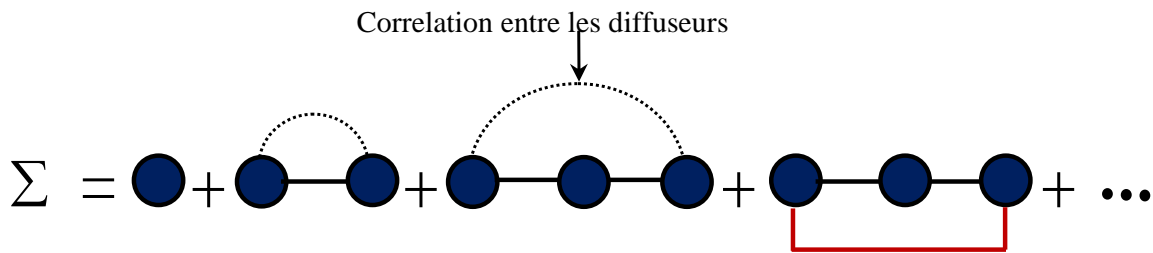


Figure III.7. Diagramme de la self énergie [Yedj-11]

Dans la suite du chapitre, nous allons détailler les approximations de la self énergie mentionnées dans la section (III.9) à partir les équations obtenues dans cette partie [Yed-10, All-15, Yed-17, Yed-11, Ben-23].

### III.9.1.Approximations de la self énergie

#### III.9.2.Approximation de Born au premier ordre(FBA)

L'approximation de Born au premier ordre décrit l'interaction entre une onde de matière et un potentiel désordonné. Dans ce cas, le nombre de l'onde diffusée dans le potentiel désordonné est considéré fini parce que le nombre de diffuseurs dans le champ est limité. Pour  $k' = k + \frac{2}{\xi}$ , la

fonction de structure définie dans l'équation (III.58) s'annule, ce qui signifie que le milieu est faiblement désordonné. A cette fin, les bornes de l'intégration dans l'équation de la self énergie définie dans (III.59) sont posées sur l'intervalle  $\left[0; k + \frac{2}{\xi}\right]$ . Par conséquent, l'approximation de

Born au premier ordre est définie par la relation suivante :

$$\Sigma(k, \varepsilon) = \frac{2U\xi^2}{\pi} \int_0^{k+\frac{2}{\xi}} dk' \frac{k'^2 I(k, k')}{\varepsilon - \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} - \Sigma(k', \varepsilon)} \quad (\text{III.60})$$

Lorsque l'onde incidente rencontre un diffuseur avec une énergie inférieure à l'énergie de potentiel  $\varepsilon < \left(k + \frac{2}{\xi}\right)^2$ , la partie imaginaire de la fonction de la self énergie est défini par la relation suivante :

$$\text{Im}\Sigma(k, \varepsilon) = -U\xi^2 \sqrt{\varepsilon_k} I(k, \sqrt{\varepsilon}) \quad (\text{III.61})$$

Avec,  $I(k, \sqrt{\varepsilon})$  décrit la fonction de structure entre deux diffuseurs dans le champ de speckle.

Dans ce cas, la partie réelle de la self énergie est donnée par la relation suivante:

$$\text{Re}\Sigma(\varepsilon, k) = 4\pi U\xi^2 \sum_{k'} \frac{1}{\varepsilon - \frac{\hbar^2 k'^2}{2m}} I(k, k') \quad (\text{III.62})$$

Afin de calculer la partie réelle, en remplaçant l'expression  $\sum_{k'} = \int \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3}$  dans l'équation (III.62).

La partie réelle est devient comme suit [Yed-20, Yed-22, Yed-11] :

$$\text{Re}\Sigma(\varepsilon, k) = U\xi^2 \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{k+\frac{2}{\xi}} dk' \frac{k'^2}{\varepsilon - \frac{\hbar^2 k'^2}{2m}} I(k, k') \quad (\text{III.63})$$

Après des calculs simples, la partie réelle de la self énergie aura la relation suivante :

$$\text{Re}\Sigma(\varepsilon, k) = \frac{U\xi^2}{8\pi^2 k} \left\{ \begin{array}{l} 2(k - \sqrt{\varepsilon}) \log|\sqrt{\varepsilon} - k| + 2(k + \sqrt{\varepsilon}) \log|\sqrt{\varepsilon} + k| + \\ \sqrt{\varepsilon - k - \frac{2}{\xi}} \log\left|\sqrt{\varepsilon} + k - \frac{2}{\xi}\right| + \sqrt{\varepsilon - k - \frac{2}{\xi}} \log\left|\sqrt{\varepsilon} - k + \frac{2}{\xi}\right| \\ \sqrt{\varepsilon - k - \frac{2}{\xi}} \log\left|\sqrt{\varepsilon} - k - \frac{2}{\xi}\right| + \sqrt{\varepsilon + k + \frac{2}{\xi}} \log\left|\sqrt{\varepsilon} + k + \frac{2}{\xi}\right| \end{array} \right\} \quad (\text{III.64})$$

### III.9.3. Approximation de Born self-consistante (SCBA)

L'approximation de Born self-consistante a été développée par la fonction de Green et l'équation de Dyson pour  $N$  diffuseurs afin d'étudier la localisation de l'onde de matière dans le champ de speckle. Dans ce cas, le nombre de l'onde diffusée dans le potentiel désordonné est considéré infini parce que le nombre de diffuseurs dans le champ est non limité. A cette fin, les bornes de l'intégration dans l'équation de la self énergie définie dans (III.59) sont posées sur l'intervalle  $[0; +\infty]$ . Par conséquent, l'approximation de Born self-consistante peut être exprimée par la relation suivante :

$$\Sigma(\varepsilon, k) = \frac{2U\xi^2}{\pi} \int_0^\infty dk' k'^2 \frac{I(k, k')}{\varepsilon - \varepsilon_{k'} - \Sigma(\varepsilon, k')} \quad (\text{III.65})$$

Avec,  $\varepsilon_{k'} = \frac{\hbar k'^2}{2m}$ .

En posant que  $\Sigma(\varepsilon, k') = i\alpha$ , la partie réelle et la partie imaginaire de la self énergie dans le cas de la diffusion multiple s'écrivent comme suit :

- La partie réelle de l'approximation de Born self-consistante est définie par la relation suivante :

$$\text{Re}(\Sigma(\varepsilon, k)) = \frac{2U\xi^2}{\pi} \int_0^\infty dk' k'^2 \frac{I(k, k')(\varepsilon - \varepsilon_{k'})}{(\varepsilon - \varepsilon_{k'})^2 + \alpha^2} \quad (\text{III.66})$$

- La partie imaginaire de l'approximation de Born self-consistante est définie comme suit:

$$\text{Im}(\Sigma(\varepsilon, k)) = \frac{2U\xi^2}{\pi} \int_0^\infty dk' k'^2 \frac{-I(k, k')\alpha}{(\varepsilon - \varepsilon_{k'})^2 + \alpha^2} \quad (\text{III.67})$$

Où,  $\alpha$  est une grandeur très petite.

Le calcul des parties réelle et imaginaire de l'approximation de Born self-consistante est très compliqué. Alors, nous allons utiliser des méthodes numériques afin de calculer les intégrales de ces équations de la self énergie dans le cas de la diffusion multiple, telles que la méthode de Simpson et trapèze [Yed-17, Yed-20, Yed-11].

### III.10. Fonction spectral

La fonction spectral peut être utilisée afin d'étudier la diffusion de l'onde de matière dans le champ de speckle en illustrant le nombre d'onde diffusée dans le potentiel désordonné. Le développement du modèle de la fonction spectral est basé sur les modèles de la fonction de Green et de la self énergie. En effet, la fonction spectrale est liée avec la fonction de Green par la relation suivante :



$$A(\varepsilon, k) = -\frac{1}{\pi} G(\varepsilon, k) \quad (\text{III.68})$$

Où,  $G(\varepsilon, k)$  représente la fonction de Green, qui peut être exprimée en fonction de l'imaginaire de la self énergie comme suit :

$$G(\varepsilon, k) = \frac{\text{Im}\Sigma(\varepsilon, k)}{|\varepsilon - k^2 - \Sigma(\varepsilon, k)|^2} \quad (\text{III.69})$$

En remplaçant l'équation (III.69) dans l'équation (III.68), la fonction spectrale devient comme suit [Vol-18, Yed-11, Sig-19, Jen-12]:

$$A(\varepsilon, k) = \frac{1}{\pi} \frac{-\text{Im}\Sigma(\varepsilon, k)}{|\varepsilon - k^2 - \Sigma(\varepsilon, k)|^2} \quad (\text{III.70})$$

### III.11. Résultat et discussion

Dans cette partie, nous discutons les résultats numériques de la self énergie et la fonction spectrale dans l'approximation de Born au première ordre et l'approximation self cohérent afin d'étudier numériquement le transport quantique des atomes froids dans le champ du speckle à 3D. Ces deux grandeurs physiques sont utilisées afin de simuler la propagation des ondes de matière dans le champ de speckle. Les paramètres expérimentaux de diffusion et de localisation des ondes de matière dans les potentiels désordonnés, sont choisis comme des paramètres numériques dans cette simulation, où, les énergies de l'onde de matière sont exprimées en unités d'échelle  $\varepsilon_\xi = \varepsilon / \xi$ , tandis que les nombres d'onde  $k$  sont exprimés en unité d'échelle  $k_\xi = k / \xi$ .

#### III.11.1. Résultat de la self énergie

Dans cette partie, les modèles des approximations de la self énergie sont simulés afin d'illustrer la différence entre la diffusion de l'onde par un diffuseur basée sur l'approximation de Born au premier ordre (FBA) et la diffusion par N diffuseurs basée sur l'approximation de Born self-consistance (SCBA). De plus, ces simulations seront examinées afin de montrer l'influence du nombre et l'énergie de l'onde de matière, de la longueur de corrélation et de l'amplitude sur le comportement de l'onde de matière dans un champ de speckle tridimensionnels.

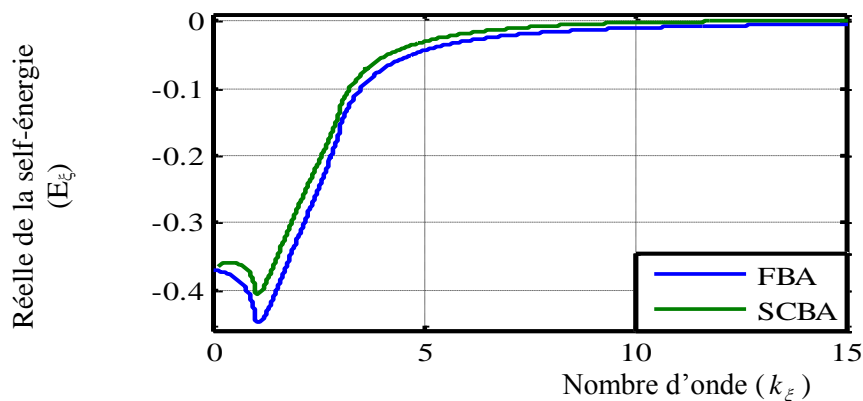
##### III.11.1.1. Résultat des approximations FBA et SCBA

La simulation numérique des approximations FBA et SCBA est réalisée à travers l'algorithme détaillée dans l'annexe. Le développement de cet algorithme est basé sur la méthode Simpson, afin d'évaluer les intégrales de la self énergie indiquée dans les équations (III.63) et (III.64).

Dans la première simulation, les approximations FBA et SCBA sont testées en maintenant l'énergie de l'onde de matière, l'amplitude de désordre et la longueur de corrélation constantes, et en variant les valeurs du nombre d'onde. Dans ce cas, les paramètres de simulation sont définis comme suit :

Paramètres	Valeurs
Energie de l'onde de matière $\varepsilon$	$1 \varepsilon_\xi$
Amplitude de désordre $U$	$1 \varepsilon_\xi^2$
Longueur de corrélation $\xi$	$1 \mu m$

La figure (III.8) représente le déplacement d'énergie  $\varepsilon_k$  dans le champ de speckle. En effet, les résultats de déplacement d'énergie  $\varepsilon_k$  sont obtenus en calculant la partie réelle des approximations FBA et SCBA pour un et  $N$  diffuseurs, respectivement. D'après la figure (III.8), le déplacement d'énergie  $\varepsilon_k$  diminue pour  $k_\xi < 1$  et une tendance inverse est observée pour  $k_\xi > 1$ . Ce changement dans le comportement de l'énergie en fonction du nombre d'onde indique l'émergence d'un état intermédiaire (En anglais, Mid-gap) qui se produit au borne du spectre. De plus, le déplacement d'énergie converge vers une valeur nulle pour les nombres d'onde élevés pour les deux approximations. Cette convergence est obtenue lorsque le nombre d'onde est proche de  $10 k_\xi \approx 10$ , où le mouvement des atomes froids est moins affecté par les diffuseurs. Selon la figure (III.10), la bande edge du spectre et le déplacement d'énergie, qui sont obtenues pour  $N$  diffuseurs, sont inférieurs à ceux d'un seul diffuseur. Ces résultats obtenus dans l'étude numérique de la partie réelle des approximations FBA et SCBA montre que l'onde de matière peut être localisée rapidement dans la diffusion multiple que la diffusion simple. Par conséquent, la diffusion multiple peut améliorer la localisation des atomes froids dans le milieu désordonné en diminuant la conductivité et en réduisant la consommation d'énergie [Yed-10, Yed-17].



**Figure III.8.** Déplacement d'énergie des ondes de matière dans le potentiel désordonné pour un et  $N$  diffuseurs.

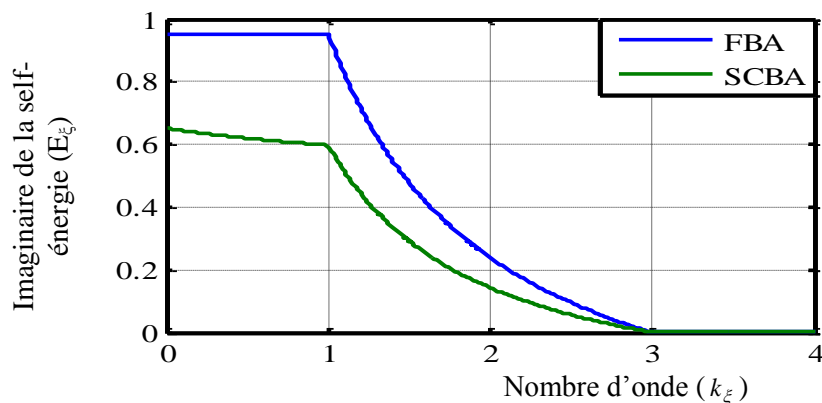
Nous passons maintenant à la partie imaginaire de la self énergie, la figure (III.9) illustre les résultats obtenus pour la diffusion de l'atome froid dans le champ de speckle pour un et  $N$  diffuseurs. D'après la figure (III.9), nous pouvons distinguer trois cas selon le nombre d'onde  $k_\xi$ , qui sont :

- Pour  $k_\xi \leq 1$  : la courbe obtenue dans l'approximation FBA est constante, alors qu'elle diminue lentement en fonction du nombre d'onde dans l'approximation SCBA. Dans ce cas, les atomes froids dans le champ de speckle restent à l'état diffusif initial pour FBA approximation, sans diffusion d'ondes de matière dans le potentiel désordonné. Ce résultat obtenu pour  $k_\xi \leq 1$  est due au fait que la probabilité de rencontrer les atomes froids avec un diffuseur est très petit par rapport au cas de  $N$  diffuseurs.

Pour  $1 < k_\xi < 3$ , la diffusion de l'onde de matière diminue de façon exponentielle vers le zéro. En effet, la diffusion des atomes froids s'arrête à un nombre d'onde égal ou supérieur à 3 ( $k_\xi \geq 3$ ). Selon la figure (III.9), la courbe d'approximation SCBA se situe en dessous de la courbe d'approximation FBA par un facteur égal à 1.66. Ce résultat obtenu en simulation numérique de la partie imaginaire suggère que le temps de diffusion des atomes froids dans le champ de speckle pour  $N$  diffuseurs est plus élevé que pour un diffuseur.

- Pour  $k_\xi \geq 3$  : Les approximations FBA et SCBA devient nulle. Cela signifie que les atomes froids dans le potentiel désordonné à trois dimensions sont localisés [Hsu-20].

Cette variation entre FBA et SCBA pour une valeur d'énergie  $\varepsilon = 1\varepsilon_\xi$  s'explique par le fait que les interactions dépassent l'énergie de corrélation du potentiel aléatoire dans le cas de l'approximation de Born où les atomes bougent sous l'effet des interaction et ils sont moins sensibles au potentiel désordonné causées par le désordre., tandis que dans l'approximation self-cohérente, la force de diffusion est moindre en raison des corrélations induites par le potentiel, entraînant la localisation de certaines particules froides.

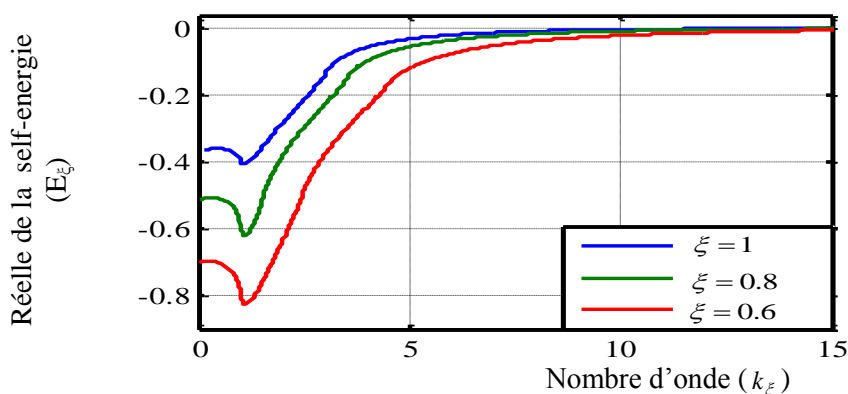


**Figure III.9.** Diffusion des ondes de matière dans le potentiel désordonné pour un et  $N$  diffuseurs.

### III.11.1.2. Effet de la longueur de corrélation sur la self énergie

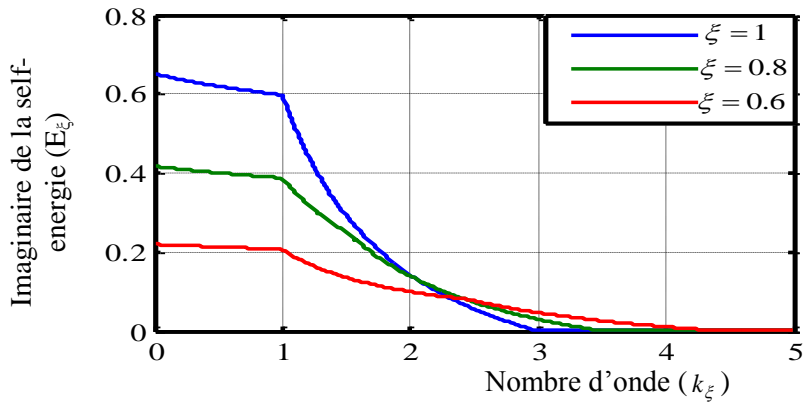
L'effet de la longueur de corrélation  $\xi$  sur le comportement de l'onde de matière dans un potentiel désordonné a été examiné en analysant les parties réelle et imaginaire dans l'approximation SCBA. Dans ce cas, nous avons utilisé les paramètres de la première simulation, et en variant la longueur de corrélation et les valeurs du nombre d'onde. En effet, la simulation numérique de l'effet de la longueur de corrélation est testée pour trois valeurs de la longueur de corrélation  $\xi = 0.6\mu m$ ,  $\xi = 0.8\mu m$  et  $\xi = 1\mu m$ .

La figure (III.10) représente l'effet de la longueur de corrélation  $\xi$  sur le déplacement d'énergie et la diffusion de l'onde de matière dans le champ de speckle. Dans la figure (III.10), on voit clairement que lorsque la longueur de corrélation augmente, le déplacement d'énergie et la bande edge diminuent. Par conséquent, le temps de réponse de la localisation des atomes froids dans le milieu désordonné diminue. Par conséquent, l'augmentation de la longueur de corrélation peut entraîner une diminution de la conductivité du matériau désordonné, une augmentation de la vitesse de recul des atomes froids dans le champ de speckle et une minimisation de la consommation d'énergie.



**Figure III.10.** Déplacement de l'énergie dans un potentiel désordonné pour un et N diffuseurs et une longueur de corrélation variable  $\xi$ .

La diffusion et la localisation des atomes froids dans le champ de speckle tridimensionnels sont liées aux valeurs de la longueur de corrélation  $\xi$ , comme le montre la figure (III.11). D'un côté, nous remarquons que la diffusion des atomes froids est importante à l'état initial et est diminué avec la diminution de la longueur de corrélation. D'un autre côté, les atomes froids deviennent localisés lorsque la diffusion tend vers zéro, c'est-à-dire lorsque la partie l'imaginaire de la self énergie dans l'approximation SCBA s'annule. Par conséquent, la diffusion dans le champ de potentiel désordonné diminue et les atomes froids se localisent rapidement lorsque la longueur de corrélation augmente [Yed-11].

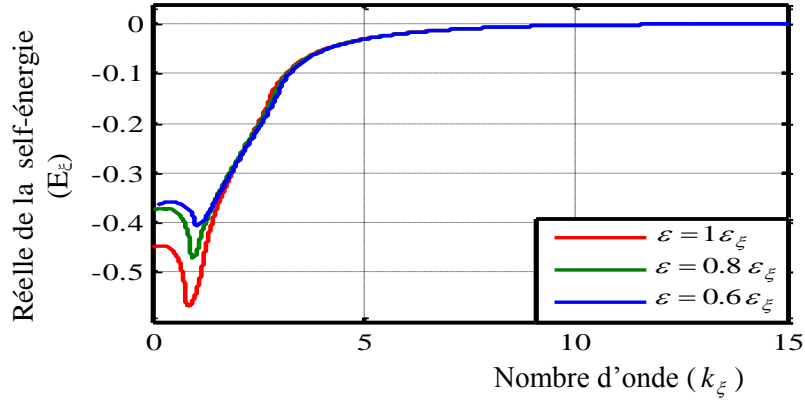


**Figure III.11.** Diffusion des ondes de matière dans un potentiel désordonné pour un et N diffuseurs et une longueur de corrélation variable  $\xi$ .

### III.11.1.3. Effet d'énergie des ondes de matière sur la self énergie

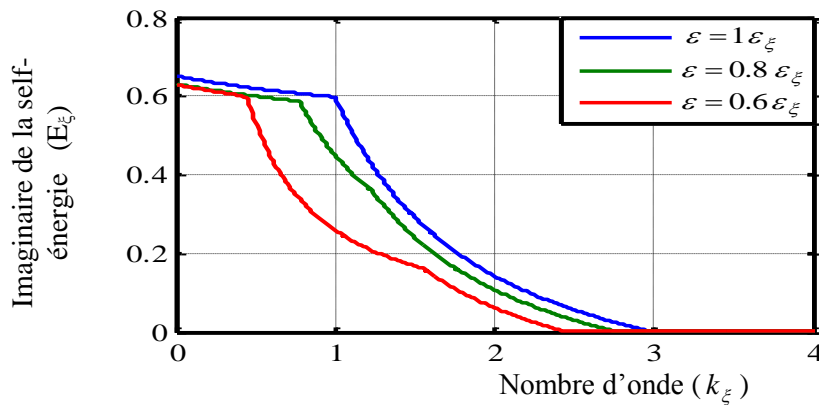
Maintenant, nous allons étudier l'effet de l'énergie des ondes de matière  $\varepsilon$  dans un milieu désordonné tridimensionnels sur le déplacement d'énergie, en traitant la partie réelle de la self énergie. Cependant, l'approximation d'auto-consistance (SCBA) est testée en utilisant les paramètres de la première simulation, et en variant l'énergie de l'onde de matière et les valeurs du nombre d'onde. En effet, la simulation numérique sur l'effet de l'énergie des ondes de matière est testée à  $\varepsilon = 0.6\varepsilon_\xi$ ,  $\varepsilon = 0.8\varepsilon_\xi$  et  $\varepsilon = 1\varepsilon_\xi$  [Yed-20].

Figures (III.12) représente l'effet de l'énergie d'onde  $\varepsilon_\xi$  sur le déplacement d'énergie et sur la diffusion de l'onde de matière dans le champ de speckle. D'après la figure (III.12), la variation de l'énergie de l'onde influencer uniquement sur la largeur de la band edge (Mid-gap) par rapport à effet de la longueur de corrélation. Selon le résultat numérique, lorsque l'énergie de l'onde de matière diminue, la largeur de la bande edge diminue. La diminution de la largeur de la bande edge signifie que la diffusion de l'onde diminue et la localisation de l'onde de matière dans le champ de speckle augmente. Par conséquent, la diminution de l'énergie de l'onde de matière va diminuer le temps de réponse de la localisation des ondes dans le potentiel désordonné, c'est-à-dire que les ondes de matière se localisent rapidement pour une faible d'énergie[Waf-99, Bul-85].



**Figure III.12.** Déplacement d'énergie dans l'approximation SCBA pour une énergie de l'onde de matière  $\varepsilon$  variable.

Figure (III.13) présente l'effet de l'énergie d'onde  $\varepsilon_\xi$  sur la diffusion de l'onde de matière dans le champ de speckle. D'après la figure (III.13), la partie imaginaire de la self énergie s'annule rapidement lorsque l'énergie de l'onde de matière diminue. Par conséquent, la diffusion s'annule rapidement lorsque l'énergie de l'onde diminue, c'est-à-dire que l'onde de matière localise rapidement dans un potentiel désordonné tridimensionnels pour une faible énergie. Le résultat obtenu dans figure (III.13) pour l'effet de l'énergie de l'onde de matière sur la localisation confirme le résultat obtenu dans la figure (III.12).



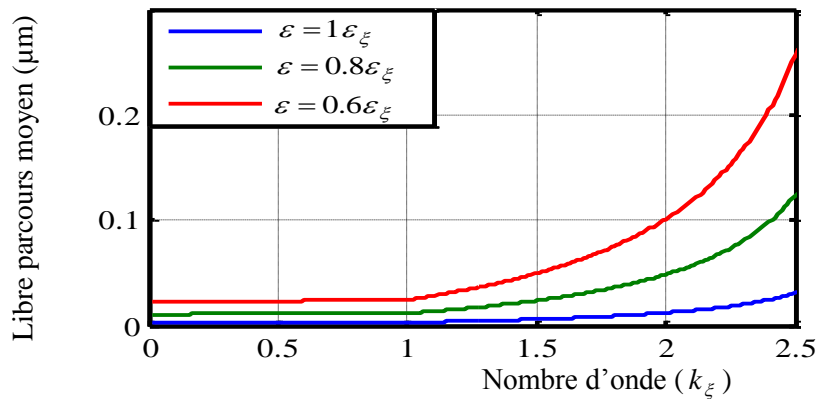
**Figure III.13.** Diffusion des ondes de matière dans un potentiel désordonné et une énergie de l'onde de matière.

Les résultats obtenus dans l'étude de l'effet de l'énergie des ondes de matière  $\varepsilon$  dans un milieu désordonné tridimensionnels peuvent être justifiés en calculant les paramètres physiques caractérisant la diffusion tels que le libre parcours moyen  $l$  et le temps de diffusion  $\tau$  définis dans l'équation (III.71). Le libre parcours moyen décrit la distance moyenne parcourue par l'onde de matière entre les diffuseurs dans le potentiel désordonné, tandis que le temps de diffusion décrit le temps nécessaire à une onde pour se propager entre deux diffuseurs dans le potentiel désordonné [Yed-17].

$$\begin{cases} \tau = \hbar / 2 \text{Im}(\Sigma(\varepsilon, k)) \\ l = \hbar^2 k_0 / (2m \text{Im}(\Sigma(\varepsilon, k))) \end{cases} \quad (\text{III.71})$$

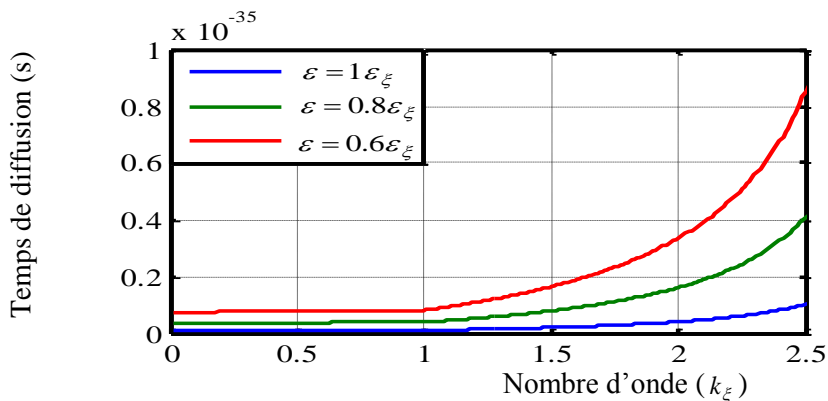
Avec,  $k_0 = \frac{\sqrt{2m\varepsilon_\xi}}{\hbar} = \frac{1}{\xi}$ .

D'après la Figure (III.14), la distance parcourue entre les diffuseurs a une relation inverse avec l'énergie de l'onde de matière, c'est-à-dire qu'une diminution de l'énergie de l'onde va causer une augmentation du libre parcours moyen. En effet, les ondes de matière deviennent localisées lorsque le libre parcours moyen est grand. Par conséquent, la localisation de l'onde de matière à une relation inverse avec l'énergie de l'onde, c'est-à-dire l'onde de matière va localiser rapidement dans le milieu désordonné avec une faible énergie.



**Figure III.14.** Libre parcours moyen pour une énergie de l'onde de matière  $\varepsilon$ .

La Figure (III.15) montre que le temps de diffusion a une relation inverse avec l'énergie de l'onde de matière, c'est-à-dire qu'une diminution de l'énergie de l'onde va causer une augmentation du temps de diffusion. En effet, les ondes de matière deviennent localisées lorsque le temps de diffusion est grand. Par conséquent, la localisation de l'onde de matière à une relation inverse avec l'énergie de l'onde, c'est-à-dire l'onde de matière va localiser rapidement dans le milieu désordonné avec une faible énergie.



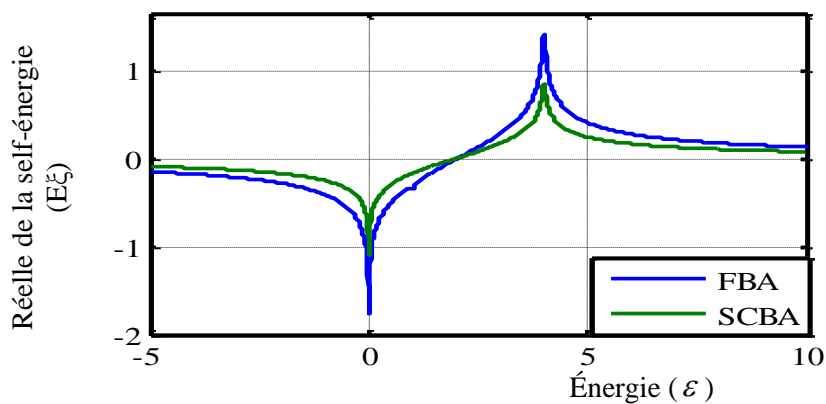
**Figure III.15.** Temps de diffusion pour une énergie de l'onde de matière  $\varepsilon$  variable.

### III.11.1.4. Self énergie à une impulsion nulle

À la fin de cette partie, nous examinons le cas où le nombre de l'onde de matière est nul dans des approximations FBA, SCBA. Dans cette situation, nous prenons l'amplitude de désordre et la longueur de corrélation comme des valeurs constante, et en variant l'énergie de l'onde de matière  $\varepsilon$ . Dans ce cas, les paramètres de simulation sont définis comme suit [Yed-17] :

Paramètres	Valeurs
Nombre de l'onde de matière $k$	$0 k_\xi$
Amplitude de désordre $U$	$1 \varepsilon_\xi^2$
Longueur de corrélation $\xi$	$1 \mu m$

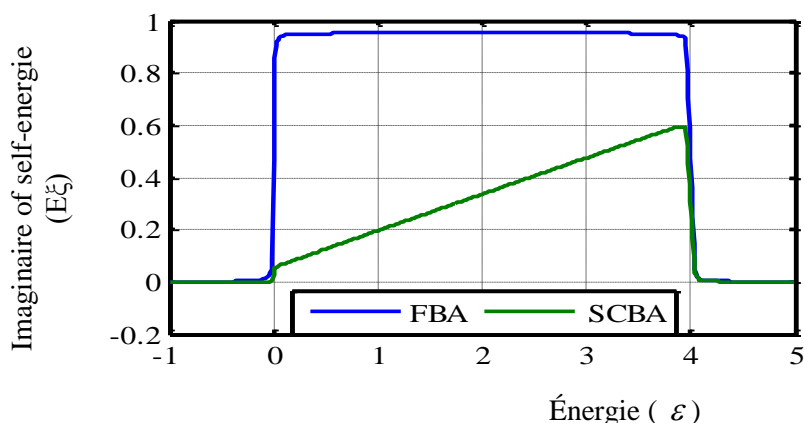
La figure (III.16) représente le déplacement d'énergie  $\varepsilon_k$  dans le champ de speckle à une impulsion nulle, où  $k_\xi$  tend vers zéro ( $k_\xi \rightarrow 0/\xi$ ). D'après la figure (III.16), la partie réelle de la self énergie diminue significativement lorsque l'énergie de l'onde de matière est négative ( $\varepsilon < 0\varepsilon_\xi$ ) ou supérieure strictement à quatre ( $\varepsilon > 4\varepsilon_\xi$ ), alors qu'elle augmente exponentiellement pour une énergie confinée entre  $0\varepsilon_\xi$  et  $4\varepsilon_\xi$  ( $\varepsilon \in [0,4]$ ). Les valeurs maximales du déplacement d'énergie sont atteintes pour  $\varepsilon = 0\varepsilon_\xi$  et  $\varepsilon = 4\varepsilon_\xi$ , comme le montre la figure (III.17). De plus, la convergence du déplacement d'énergie atteint une valeur nulle, ce qui signifie que la diffusion des ondes de matière dans le potentiel désordonné est très faible. Selon la Figure (III.17), la largeur de la bande edge et le déplacement d'énergie dans l'approximation SCBA est plus petite que dans l'approximation FBA, c'est-à-dire que l'onde de matière peut localiser rapidement dans le régime de diffusion multiple que la diffusion simple. Le résultat obtenu dans cette simulation est cohérent avec celui obtenu dans la figure (III.8).



**Figure III.16.** Déplacement d'énergie  $\varepsilon_k$  dans le champ de speckle pour un et N diffuseurs à une impulsion nulle

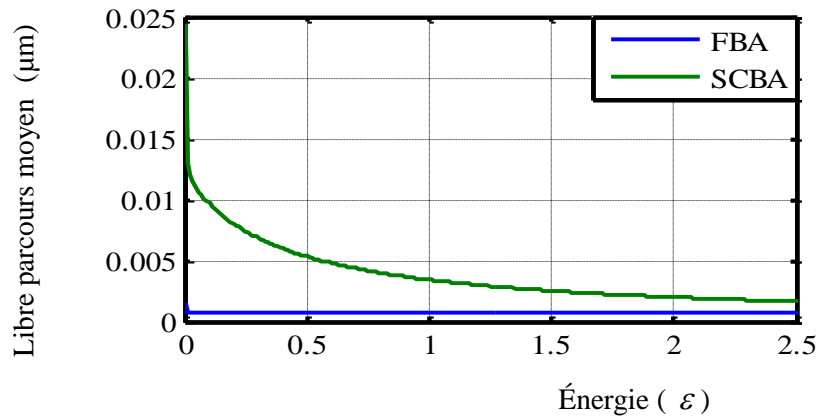


D'après la figure (III.17), la partie imaginaire de la self énergie pour les deux régimes de diffusion a des valeurs non-nulle lorsque l'énergie est confinée entre  $0\varepsilon_\xi$  et  $4\varepsilon_\xi$  ( $\varepsilon \in [0,4]$ ). Par contre, elle s'annule pour  $\varepsilon < 0\varepsilon_\xi$  et  $\varepsilon > 4\varepsilon_\xi$ . De plus, la courbe de partie imaginaire de la self énergie pour la diffusion multiple (SCBA) situe en dessous de la courbe de la diffusion simple (FBA). Par conséquent, la localisation est atteinte dans le potentiel désordonné lorsque l'onde de matière est supérieure à 4 ( $\varepsilon > 4\varepsilon_\xi$ ) due que la diffusion des atomes froids s'arrête à ces valeurs. De plus, les atomes froids se localisent rapidement dans le potentiel désordonné pour la diffusion à N diffuseurs que la diffusion à un diffuseur.

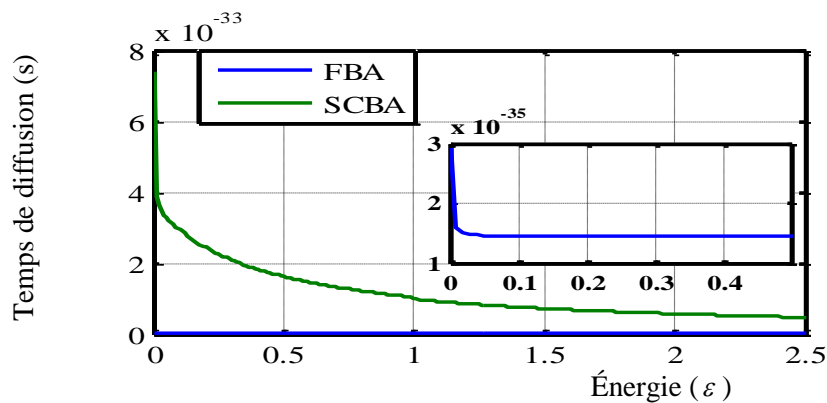


**Figure III.17.** Diffusion de l'onde de matière dans le champ de speckle pour un et N diffuseurs à une impulsion nulle

A travers les résultats obtenus, nous calculons le libre parcours moyen et le temps de diffusion définis dans l'équation (III.71). En effet, les courbes de libre parcours moyen et de temps de diffusion dans l'approximation SCBA se situent en dessous de la courbe d'approximation FBA, comme le montrent les figures (III.18) et (III.19). Par conséquent, les atomes froids sont moins dispersés dans le milieu désordonné et peuvent être localisés plus rapidement dans SCBA que dans l'approximation FBA. Les résultats obtenus dans l'analyse du libre parcours moyen et du temps de diffusion sont en cohérents avec ceux obtenus dans l'analyse de la self énergie pour les deux régimes de diffusion [All-15].



**Figure III.18.** Libre parcours moyen pour les ondes de matière tend vers zéro ( $k_\xi \rightarrow 0/\xi$ )



**Figure III.19.** Temps de diffusion pour les ondes de matière tend vers zéro ( $k_\xi \rightarrow 0/\xi$ ).

D'après les résultats obtenus dans nos simulations numériques de l'étude du comportement des atomes froids dans le champ de speckle pour les diffusions simple et multiple, nous tirons les remarques suivantes :

- La courbe de la partie imaginaire de SCBA se situe en dessous de la courbe de l'approximation FBA. Par conséquent, la réponse temporelle de la localisation des atomes froids à  $N$  diffuseurs est plus petite que un diffuseur;
- La probabilité de rencontrer les atomes froids avec un diffuseur est très faible par rapport à  $N$  diffuseurs. Par conséquent, les atomes froids peuvent être localisés rapidement à  $N$  diffuseurs ;
- Le déplacement d'énergie en diffusion multiple est faible qu'en diffusion simple ;
- Les atomes froids se localisent rapidement pour une faible énergie de l'onde de matière et pour une grande valeur de la longueur de corrélation.

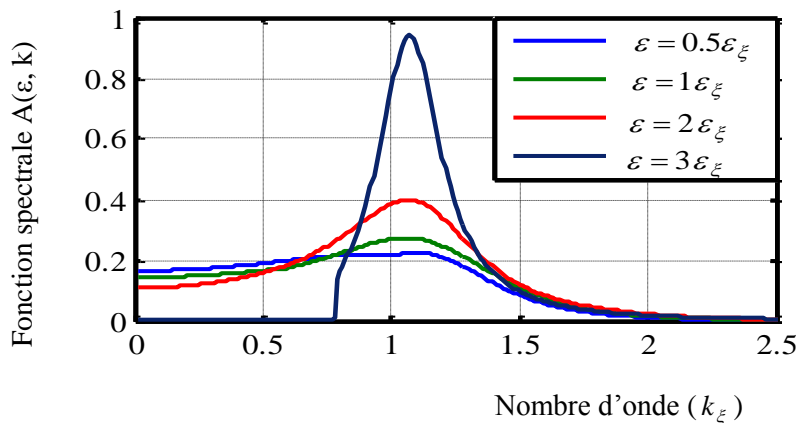
### III.11.2. Résultats de la Fonction spectrale

La fonction spectrale  $A(\varepsilon, k)$  est analysée pour étudier la diffusion et la localisation des atomes froids dans le champ de speckle à 3D. Cette fonction permet de connaître le nombre d'atomes, qui seront diffusés dans le potentiel désordonné.

#### III.11.2.1. Effet de l'énergie de l'onde de matière sur la fonction spectrale

L'effet de l'énergie des ondes de matière  $\varepsilon$  sur le comportement des atomes froids dans un milieu désordonné tridimensionnels est illustré, en traitant la fonction de spectrale. Cependant, la fonction de spectrale est examinée en maintenant l'amplitude de désordre constante  $U = 1\varepsilon_\xi^2$ , et en variant l'énergie et le nombre de l'onde de matière. En effet, la simulation numérique de l'effet de l'énergie des ondes de matière est testée à  $\varepsilon = 0.5\varepsilon_\xi$ ,  $\varepsilon = 1\varepsilon_\xi$ ,  $\varepsilon = 2\varepsilon_\xi$  et  $\varepsilon = 3\varepsilon_\xi$ .

Figure (III.20) représente la variation de la fonction spectrale  $A(\varepsilon, k)$  en fonction du nombre d'onde de la matière  $k_\xi$ . D'après la figure (III.20), le nombre des atomes froids qui seront diffusés dans le potentiel désordonné tridimensionnels augmente avec l'augmentation de l'énergie de l'onde de matière. On observe aussi que la courbe de la fonction spectrale à  $\varepsilon = 3\varepsilon_\xi$  prend la forme de la courbe de condensation BEC (Lorentzian broadening), ce qui signifie que les atomes froids ne sont pas encore diffusés. Par conséquent, la localisation des atomes froids dans le champ de speckle a une relation inverse avec l'énergie de l'onde de matière, c'est-à-dire que les atomes froids localisent avec une faible énergie de l'onde de matière. Le résultat obtenu dans la figure (III.20) est cohérent avec celui obtenu dans la figure (III.13).

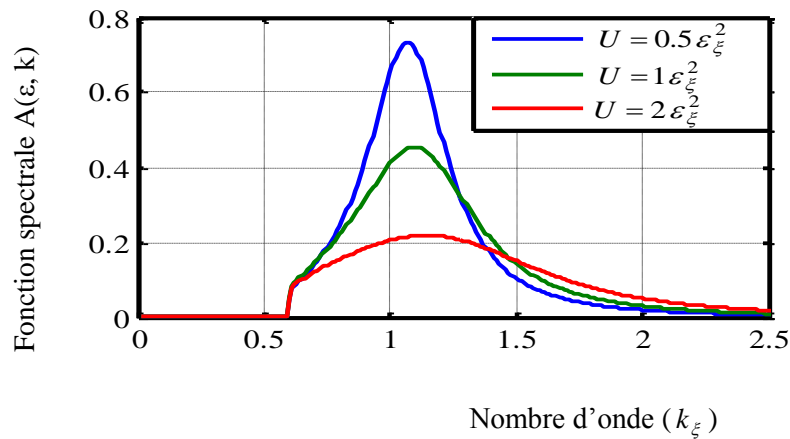


**Figure III.20.** Fonction de spectrale pour une énergie de l'onde de matière  $\varepsilon$  variable

#### III.11.2.2. Effet de l'amplitude de désordre sur la fonction spectrale

La figure (III.21) représente la variation de la fonction spectrale en fonction du nombre d'onde de matière pour  $U = 0.5\varepsilon_\xi^2$ ,  $U = 1\varepsilon_\xi^2$  et  $U = 2\varepsilon_\xi^2$  à une énergie d'onde de matière égale à  $\varepsilon = 3\varepsilon_\xi$ .

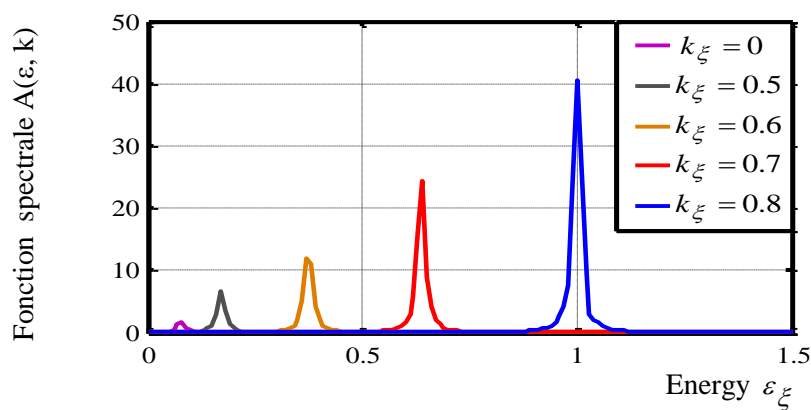
D'après la Figure (III.21), l'amplitude de la fonction spectrale  $A(\varepsilon, k)$  augmente avec la diminution de l'amplitude de désordre  $U$ , c'est-à-dire que l'amplitude a une relation inverse avec le nombre des atomes qui seront diffusées dans le milieu désordonné. Nous concluons que, la localisation a une relation directe avec l'amplitude de désordre, où, les atomes froids localisent rapidement lorsque l'amplitude de désordre augmente [Mos-00].



**Figure III.21.** Fonction de spectrale pour une amplitude de désordre  $U$  variable

### III.11.2.3.Effet du nombre d'onde sur la fonction spectrale

La figure (III.22) représente la variation de la fonction spectrale en fonction de l'énergie de l'onde de matière pour  $k_ξ = 0/ξ, k_ξ = 0.5/ξ, k_ξ = 0.6/ξ, k_ξ = 0.7/ξ$  et  $k_ξ = 0.8/ξ$ . Le résultat obtenu par cette simulation montre que le nombre des atomes froids, qui seront diffusées dans le milieu désordonné, augmente avec l'augmentation de nombre d'onde de matière. On observe encore que la courbe de la fonction spectrale à  $k_ξ = 0.8/ξ$  prend la forme de la courbe de condensation BEC, ce qui signifie que les atomes froids ne sont pas encore diffusés. Par conséquent, les atomes froids se localisent rapidement dans le milieu désordonné lorsque le nombre d'onde tend vers zéro ( $k_ξ \rightarrow 0/ξ$ ).



**Figure III.22.** Effet de nombre d'onde sur le comportement de l'onde de matière

### III.12. Conclusion

Ce chapitre est consacré à l'étude du transport quantique des atomes froids dans le champ de speckle tridimensionnels. Il convient d'étudier le comportement de l'onde de matière lorsqu'elle est exposée à un potentiel désordonné pour examiner l'effet des paramètres caractéristiques, tels que l'amplitude de désordre, la longueur de corrélation, le nombre d'onde et l'énergie de l'onde de matière, sur la propagation de l'onde dans le champ de speckle.

Nous avons utilisé l'approximation de Born pour calculer la self-énergie, qui repose essentiellement sur le modèle de la fonction de Green. La self-énergie ainsi établie comprend une partie réelle et une partie imaginaire. La partie réelle a été traitée pour examiner le transfert d'énergie, tandis que la partie imaginaire a été évaluée afin d'analyser la diffusion de l'onde de matière dans le champ de speckle. Les deux composantes de la self-énergie impliquent des intégrales, lesquelles ont été numériquement évaluées à l'aide de la méthode de Simpson.

Tout d'abord, nous avons effectué le calcul numérique de la self-énergie dans l'approximation de Born au premier ordre, puis nous avons passé vers l'approximation self-cohérente. Nous avons mis en évidence les différences entre ces deux approches afin d'analyser l'impact du potentiel optique sur la propagation des condensats. Pour une énergie donnée  $\varepsilon = 1\varepsilon_{\xi}$ , nous avons constaté que l'approximation de Born génère une force de diffusion plus importante, avec un spectre de diffusion plus large par rapport à l'approximation self-cohérente. Cette variation s'explique par le fait que les interactions dépassent l'énergie de corrélation du potentiel aléatoire dans le cas de l'approximation de Born, tandis que dans l'approximation self-cohérente, la force de diffusion est moindre en raison des corrélations induites par le potentiel, entraînant la localisation de certaines particules froides.

Ces résultats présentent une légère variation par rapport à ceux de la référence [Del-14] indiquant l'influence significative des paramètres énergétiques des condensats de Bose-Einstein sur le phénomène de diffusion.

Par la suite, nous avons examiné l'influence de la longueur de corrélation et de l'énergie de l'onde de matière sur le transport des atomes froids dans le champ de speckle, en particulier lors de la diffusion multiple. Nos résultats indiquent que la localisation des atomes froids est directement liée à la longueur de corrélation, tout en présentant une relation inverse avec l'énergie de l'onde de matière. Ces conclusions concordent avec les résultats obtenus dans la référence [Yed-20].

À la fin de ce chapitre, nous avons examiné la diffusion de l'onde de matière à travers la fonction spectrale en manipulant l'énergie de l'onde de matière, l'amplitude du désordre et le nombre d'onde. Les résultats de simulation obtenus via la fonction spectrale pour la variation de l'énergie de l'onde de matière sont en accord avec ceux obtenus dans l'approximation self-cohérente de Born. De manière significative, nous avons observé que la localisation des atomes froids présente une

relation directe avec l'amplitude du désordre, tandis qu'elle est inversement proportionnelle au nombre d'onde de l'onde de matière.

---

---

## Etude des paramètres critiques de la localisation

---

---

IV.1	Introduction .....	85
IV.2	Localisation du point de vue d'Anderson.....	85
IV.2.1	Etat de la matière.....	85
IV.2.2	Densité d'états.....	86
IV.2.3	Conductivité des matériaux.....	89
IV.3	Modèle de la théorie auto-cohérente .....	91
IV.3.1	Etude analytique de la théorie auto-cohérente.....	92
IV.4	Critère d'Ioffe-Regel.....	94
IV.5	Modèle de la matrice de transfert quasi-1D .....	96
IV.5.1	Etude analytique de la matrice de transfert quasi-1D.....	97
IV.6	Résultats et discussion.....	99
IV.6.1	Estimation de l'intervalle du passage continu du régime diffusif.....	99
IV.6.2	Estimation de l'énergie critique par le critère d'Ioffe-Regel .....	101
IV.6.3	Estimation les grandeurs critiques par la matrice de transfert quasi-1D .....	102
IV.7	Conclusion.....	106

## IV.1 Introduction

Ce chapitre se focalise sur la détermination de la position de l'énergie critique dans une plage maximale en se basant sur la fonction spectrale, la densité d'états et la conductivité de Drude. Ensuite, nous procéderons à une estimation de l'intervalle du nombre critique maximal de l'onde de matière en utilisant le modèle de l'approximation auto-consistante (SCBA). La section suivante du chapitre appliquera le critère d'Ioffe Regel pour prédire cette position critique. En conclusion, notre tentative consistera à déterminer la position de l'énergie critique, le nombre critique de l'onde de matière, et l'intensité critique du désordre en utilisant le modèle de la matrice de transfert quasi-unidimensionnel.

## IV.2 Localisation du point de vue d'Anderson

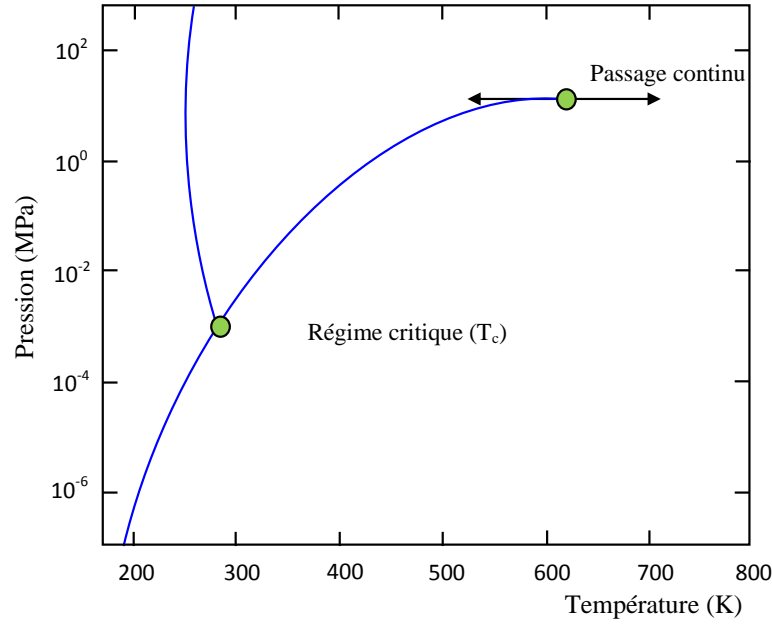
À température ambiante, les électrons dont l'énergie se rapproche de celle de Fermi se déplacent à travers un métal ou un semi-conducteur de manière similaire à des particules classiques. Leur trajectoire rectiligne est perturbée par la diffusion causée par des défauts du réseau cristallin. Cette diffusion est responsable de la résistance électrique  $R = 1/G$ , conformément à la loi d'Ohm qui établit la proportionnalité entre la tension électrique  $V$  et le courant électrique  $I$ .

À des températures plus basses, les électrons commencent à exhiber des propriétés quantiques et à adopter un comportement davantage ondulatoire que particulaire. Les phénomènes d'interférence entrent en jeu et influent sur la conductance  $G$  de l'échantillon. Si la diffusion est suffisamment prononcée, les interférences peuvent devenir destructives, confinant ainsi l'électron dans une région spatiale de dimension finie appelée la longueur de localisation. À ce stade, le matériau devient un isolant électrique et cesse de conduire l'électricité. Ce phénomène est connu sous le nom de « localisation d'Anderson », en hommage à Philip Anderson qui l'a découvert en 1958 [And-58].

### IV.2.1 Etat de la matière

Généralement, la transition de phase d'un état vers un autre est défini par le changement de l'état de matière et leurs propriétés physico-chimiques. Dans la nature, le cycle de l'eau dans la terre a trois états, à savoir les états gazeuse, liquide et solide. Le passage d'un état à une autre peut obtenir en variant des grandeurs thermodynamiques, telles que la température et la pression. Le passage des états du cycle de l'eau, telle que le passage liquide-solide, a une température critique, qui nous permet de distinguer l'eau sous sa forme liquide de sa forme solide, comme le montre la figure (IV.1). Ce passage est effectué à travers un échange d'énergie entre l'eau et l'environnement en absorbant ou émettant des énergies thermiques. Dans le cas de l'état solide-liquide, cette énergie doit être suffisante afin de briser complètement les interactions interatomiques. Au point critique, la densité du système n'est plus homogène, et peuvent contenir des régions de faible et forte densité, telle que le gaz et l'eau. Après le point critique, le passage continu est obtenu et la densité du système devient plus homogène [Bru-05, Lac-97, Lev-00].





**Figure IV.1.** Diagramme de phase pression-température de l'eau [Akr-20]

Dans les systèmes quantiques, le passage des atomes froids peut être observé pendant la diffusion des atomes froids dans le champ de speckle pour un ou  $N$  diffuseurs. Ce passage est caractérisé par des fluctuations quantiques modifiant la conductivité du matériau et la densité d'états, qui permet de changer l'état de régime passant du régime localisé au régime diffusif, qui va changer l'intensité de désordre et l'énergie de l'onde de matière dans le système désordonné tridimensionnels. Dans le passage localisé-diffusif, la longueur de localisation se diverge, tandis que le coefficient de diffusion s'annule. Ces coefficients s'expriment par la relation suivante [Eve-08, Del-14, Akr-20]:

$$\begin{cases} L_{loc} \approx (E_c - \varepsilon)^{-\nu} \\ D \approx (\varepsilon - E_c)^s \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

Avec,  $\varepsilon$  est l'énergie de l'onde de matière,  $E_c$  représente l'énergie critique,  $s$  et  $\nu$  sont les exposants critiques.

Comme nous avons expliqué dans le passage de cycle de l'eau que les valeurs de la densité changent à et après la température critique, et à la même manière se changent dans le passage des atomes froids dans le champ de speckle pendant le transport quantique.

#### IV.2.2 Densité d'états

En physique de la matière condensée et dans la physique de solide, la densité d'états électroniques  $D(\varepsilon)$  détermine le nombre d'états électroniques. En fait, le nombre des états électronique  $D(\varepsilon)d\varepsilon$  est compris entre  $\varepsilon$  et  $\varepsilon + d\varepsilon$  par unité de volume du matériau [Pet-00, Akr-20].

La densité d'états  $D(\varepsilon)$  peut être calculée en intégrant la fonction spectrale  $A(\varepsilon, k)$  définie dans le chapitre précédent. Par conséquent, la densité s'exprime par la relation suivante:

$$D(\varepsilon) = \sum_k A(\varepsilon, k) \quad (\text{IV.2})$$

Avec:  $\sum_k = \frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2$

La densité d'états électroniques est exprimée en fonction de l'énergie  $\varepsilon$  et du nombre d'onde de matière  $k$ . Afin d'écrire la densité en fonction d'une seule variable, c'est-à-dire en fonction de l'énergie ou du nombre d'onde, la relation de dispersion du système définie dans l'équation (IV.3) sera appliquée.

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (\text{IV.3})$$

Le comportement des atomes froids dans le champ de speckle est lié à la dimension du système désordonné. Par conséquent, les valeurs de la densité d'états sont aussi reliées à la dimension du système. Afin d'avoir la relation entre les deux grandeurs, nous allons exprimer la densité d'états électroniques pour des électrons libres comme suit :

$$D_d(\varepsilon) = \frac{d\Omega_d(\varepsilon)}{d\varepsilon} \quad (\text{IV.4})$$

Où,  $d$  est la dimension du système

désordonné ;

Avec,  $\Omega_d$  est le volume d'une hypersphère et est défini en fonction du nombre d'onde  $k$  par l'équation suivante :

$$\Omega_d(k) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} k^d \quad (\text{IV.5})$$

En appliquant la relation de dispersion définie dans l'équation (IV.3) afin d'exprimer le volume d'une hypersphère  $\Omega_d$  en fonction de l'énergie de l'onde de matière  $\varepsilon$ . Par conséquent, la relation de la densité définie dans l'équation (IV.4) devient comme suit:

$$\left\{ \begin{aligned} D_d(\varepsilon) &= \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)} \left(\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}\right)^{\frac{d}{2}} \right) \\ &= \frac{(2\pi m\hbar^{-2})^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \varepsilon^{\frac{d}{2}-1} \end{aligned} \right. \quad (\text{IV.6})$$

Les relations qui définissent la densité d'état selon les dimensions du système s'expriment comme suit :

- Pour  $d=1$ , la densité d'états pour le système désordonné unidimensionnel est définie comme suit :

$$D(\varepsilon) = \frac{L}{4\pi} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

- Pour  $d=2$ , la densité d'états pour le système désordonné bidimensionnels s'exprime comme suit :

$$D(\varepsilon) = \frac{S}{\pi} \frac{m}{\hbar^2}$$

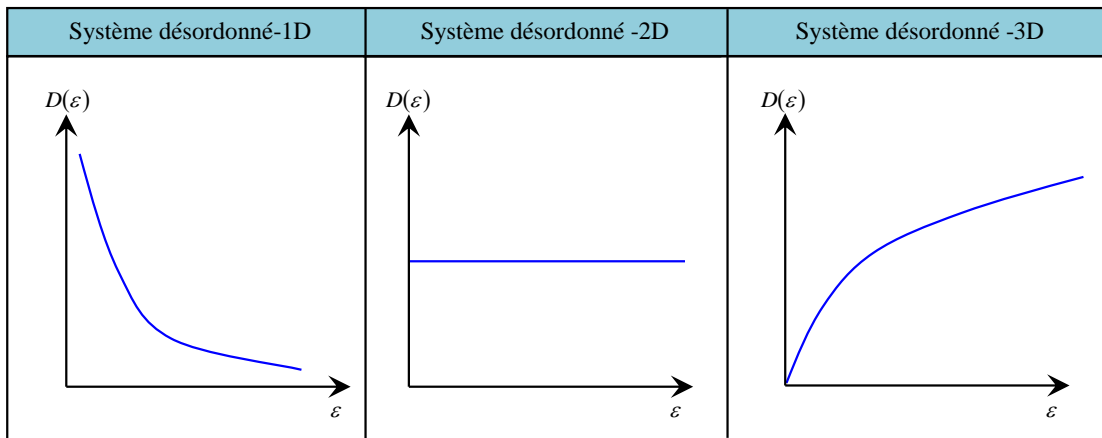
- Pour  $d=3$ , la densité d'états pour le système désordonné tridimensionnels est définie par :

$$D(\varepsilon) = \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon}$$

Avec,  $L$ ,  $S$  et  $V$  représentent respectivement la longueur, la surface et le volume du système [Pot-74, Ari-70].

La figure (IV.2) illustre la densité d'états des atomes froids dans les systèmes désordonnés unidimensionnels, bidimensionnels et tridimensionnels. D'après la figure (IV.2), la densité d'états est constante dans les systèmes bidimensionnels, c'est-à-dire que le comportement des atomes froids ne dépend pas de l'énergie de l'onde de matière  $\varepsilon$ . Dans ce cas, la fonction d'échelle tend vers zéro et la conductance est indépendante de la taille du système, comme nous avons montré dans la section (5) du chapitre (II). D'autre part, la densité d'état a une relation inversement proportionnelle avec l'énergie de l'onde de matière  $\varepsilon$  dans le système unidimensionnel, tandis que a une relation directement proportionnelle avec l'énergie  $\varepsilon$  dans le système tridimensionnels. D'après l'étude théorique et analytique du transport quantique des atomes froids dans le milieu désordonné tridimensionnels, nous avons vu que les atomes froids localisent rapidement avec une énergie d'onde faible, c'est-à-dire que les atomes froids qui seront diffusées augmente avec

l'augmentation de l'énergie. Ce dernier confirme le résultat obtenu dans la densité d'états pour le système tridimensionnels [Sal-14].



**Figure IV. 2.** Densité d'états des atomes froids selon les dimensions du système désordonné [Akr-20]

D'après la théorie d'échelle présentée dans le deuxième chapitre, on peut conclure que la densité est liée à la conductivité du matériau, qui sera détaillée dans la suite de cette partie.

### IV.2.3 Conductivité des matériaux

Le transport des ondes de matière dans les matériaux a attiré l'attention des chercheurs à partir de la première théorie découverte par Paul Drude en 1900. Les équations de cette théorie peuvent être considérées comme un modèle typique afin d'étudier la conductivité des ondes de matière dans le milieu désordonné à  $N$  diffuseurs. Le modèle de Drude est basé sur quatre concepts principaux, qui sont :

- *Onde de matière indépendante et libre* : Les ondes de matière dans ce cas propagent librement dans le milieu désordonné sans interagir entre elles. Ici, le déplacement de l'onde de matière entre deux diffuseurs dans le champ de speckle est décrit par la loi de Newton pour une propagation libre et l'onde de matière va prendre la forme de l'onde de Bloch;
- *Collisions instantanées* : Drude introduit les interactions entre les atomes froids dans le champ de speckle pour  $N$  diffuseurs sous forme des collisions ayant une durée extrêmement petite. Dans ce cas, la vitesse de l'onde de matière change au cours de leur déplacement ;
- *Temps de relaxation* : La probabilité qu'une onde subit une collision s'écrit par unité de temps  $1/\tau$ , qui est connu par le temps de relaxation. Ce temps est indépendant de la position et de la vitesse de l'onde de matière, ce qui signifie que l'onde de matière se propage pendant le temps de collision ou le temps de libre moyen ;

- *Chaos moléculaire* : Dans ce cas, la vitesse et la direction ne sont pas corrélées après la collision comme elles l'étaient avant la collision. En effet, la vitesse et la direction prennent des valeurs aléatoires après la collision.

La loi d'Ohm définie dans l'équation (IV.7) décrit la relation entre la résistance du conducteur  $R$ , le potentiel du conducteur  $V$  et le courant  $I$ .

$$V = RI \quad (\text{IV.7})$$

Le modèle de Drude a expliqué que la résistance d'un conducteur est liée à la taille et la géométrie du conducteur et est indépendante du courant  $I$  et du potentiel  $V$ . En effet, la conductivité  $\sigma$  a une relation inverse avec la résistance du conducteur par unité de volume  $\rho$ , comme l'indique l'équation (IV.8).

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (\text{IV.8})$$

La résistance du conducteur par unité de volume ou la résistivité  $\rho$  dépend principalement de la densité du courant  $j$  et du champ électrique  $E$ , et est définie par la relation suivante :

$$\rho = \frac{E}{j} \quad (\text{IV.9})$$

Avec,  $J$  est définie par  $J = -Dev$

Où,  $v$  est la vitesse moyenne de  $n$  électrons de charge  $e$ , et  $D$  est la densité d'états électronique ;

En remplaçant l'équation (IV.9) dans l'équation (IV.8), la conductivité  $\sigma$  peut être définie en fonction de la densité du courant et du champ électrique comme suit :

$$\sigma = \frac{-Dev}{E} \quad (\text{IV.10})$$

Les ondes de matière subissent à une force  $\vec{F} = -e\vec{E}$  lorsqu'elles se déplacent. En appliquant la loi de Newton, l'équation différentielle de la vitesse de l'onde de matière est donnée par la relation suivante :

$$m \frac{dv}{dt} = -eE - \frac{mv}{\tau} \quad (\text{IV.11})$$

En supposant que la vitesse moyenne des ondes de matière est constante. Par conséquent, la relation de la vitesse s'exprime comme suit :

$$v = \frac{-eE\tau}{m} \quad (\text{IV.12})$$

En remplaçant l'équation (IV.12) dans l'équation (IV.10), le modèle Drude peut être défini par la relation suivante :

$$\sigma = \frac{De^2\tau}{m} \quad (\text{IV.13})$$

D'après le modèle de Drude établi dans l'équation (IV.13), on conclut que la densité d'état  $D$  a une relation directe avec la conductivité  $\sigma$ , c'est-à-dire que la conductivité du matériau augmente quand le nombre des ondes diffusées augmente dans le milieu désordonné tridimensionnels, ou la conductivité a une relation inverse avec la localisation des atomes froids dans le champ de speckle tridimensionnels [Arb-14, All-15, Lux-93, Akr-20].

### IV.3 Modèle de la théorie auto-cohérente

Les fluctuations quantiques dans les systèmes désordonnés tridimensionnels, telles que la conductivité du matériau et la densité d'états d'électroniques, peuvent être étudiées à travers les lois des théories de Thouless et d'échelle. Cependant, ces théories ne peuvent pas utiliser afin d'étudier l'exposant Lyapounov  $\gamma(k)$  caractérisant la densité spectrale  $C(k)$  et la distribution des ondes du condensat en expansion  $D(k)$ . A cette fin, nous allons étudier ces fluctuations quantiques dans le champ de speckle en utilisant le modèle de la théorie auto-cohérente, qui peut être considéré comme une extension de la théorie d'échelle.

Considérant qu'une onde de matière se déplace d'un diffuseur de position  $r$  à un autre de position  $r_1$  pendant un certain temps  $t$  a une probabilité de  $P(r, r_1, t)$ . La transformation de Fourier de cette probabilité s'exprime en fonction du produit des fonctions de Green retardée et avancée comme suit :

$$P(r, r_1, t) = \frac{\pi \hbar^2}{m^3 \sqrt{2\varepsilon}} \langle G^R(r, r_1, \varepsilon) G^A(r_1, r, \varepsilon - \hbar\omega) \rangle \quad (\text{IV.14})$$

L'équation de la probabilité n'est valable que pour les très basses fréquences, où la pulsation  $\omega$  est très petite devant la largeur du paquet d'onde en unité de l'énergie  $\omega \ll L_\varepsilon$ . De plus, leur calcul est possible uniquement pour un faible désordre, où la conductance du matériau est élevée. Dans ce cas, l'équation de la probabilité s'exprime dans le régime diffusif  $P_d$  pour un temps longs et une grande distance comme suit :

$$P_d(r, r_1, t) = \frac{\delta(r - r_1)}{-i\omega - D_B \Delta_r} \quad (\text{IV.15})$$

Avec,  $D_B$  est le coefficient de diffusion et est définie par :  $D_B = \frac{1}{3} v l$ , où,  $v = \hbar k / m$  est la vitesse de l'onde de matière et  $l$  est le libre parcours moyen.

En appliquant la transformation de Fourier sur l'équation (IV.15), la probabilité  $P_d$  s'exprime dans le régime diffusif comme suit :

$$P_d(q, t) = \frac{1}{-i\omega + D_B q^2} \quad (\text{IV.16})$$

Avec,  $q = r - r_1$ .

L'équation (IV.16) décrit la diffusion de l'onde de matière dans un potentiel désordonné à  $N$  diffuseurs pour les temps longs. Comme nous avons vu dans les chapitres précédents que la propagation de l'onde de matière s'arrête, où les atomes froids localisent dans le champ de speckle, à cause des interférences entre les trajectoires de diffusion. Pour une localisation faible, le coefficient de diffusion  $D_B$  diminue vers zéro mais ne s'annule pas ( $D_B \rightarrow 0$ ). Dans ce cas, le coefficient de diffusion  $D_B$  peut être normalisé à une valeur  $D(\omega)$  comme suit:

$$\frac{1}{D(\omega)} = \frac{1}{D_B} + \frac{2\pi\hbar^2}{m^3(2\varepsilon)^{1/2} D_B} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{-i\omega + D_B q^2} \quad (\text{IV.17})$$

Le deuxième terme dans l'équation (IV.17) décrit le phénomène de rétrodiffusion, où les ondes de matière diffusées reviennent au voisinage de ses positions initiales.

L'équation (IV.17) ne peut pas l'appliquer dans une localisation forte. A cette fin, les chercheurs Vollhardt et Wölfle ont remplacé le coefficient de diffusion  $D_B$  de l'intégrale du deux terme par  $D(\omega)$ , comme l'indique l'équation (IV.18).

$$\frac{1}{D(\omega)} = \frac{1}{D_B} + \frac{2\pi\hbar^2}{m^3(2\varepsilon)^{1/2} D_B} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{-i\omega + D(\omega)q^2} \quad (\text{IV.18})$$

La simplification et le calcul d'intégral des équations (IV.17) et (IV.18) nous permet d'étudier le passage localisé-diffusif dans le système désordonné tridimensionnels [Akr-20].

### IV.3.1 Etude analytique de la théorie auto-cohérente

Dans cette partie, le modèle de la théorie auto-cohérente sera utilisé afin d'étudier le passage des atomes froids du régime localisé au régime diffusif dans un système tridimensionnels. Ce modèle est uniquement valable aux temps longs et aux grandes distances, comme l'indique l'équation (IV.19).

$$\begin{cases} \omega \ll \frac{1}{\tau} \\ |q| \ll \frac{1}{l} \end{cases} \quad (\text{IV.19})$$

Où,  $\tau$  est le temps de diffusion.

Pour les systèmes désordonnés tridimensionnels, le modèle de la théorie auto-cohérente à une distance donnée dans le speckle  $q_M$  s'exprime comme suit :

$$\frac{1}{D(\omega)} = \frac{1}{D_B} + \frac{2\pi\hbar^2}{m^3(2\varepsilon)^{1/2}D_B} \int_0^{q_M} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{q^2}{-i\omega + D(\omega)q^2} dq \quad (\text{IV.20})$$

En calculant l'intégrale du deuxième terme de l'équation (IV.20), le rapport entre le coefficient de la diffusion  $D_B$  et sa normalisation  $D(\omega)$  devient comme suit :

$$\frac{D(\omega)}{D_B} = 1 - \frac{2\pi\hbar^2 q_M}{m^3(2\varepsilon)^{1/2}D_B} \left[ 1 - \frac{1}{q_M L_\omega} \arctan(L_\omega q_M) \right] \quad (\text{IV.21})$$

Avec,  $L_\omega = \sqrt{\frac{D(\omega)}{-i\omega}}$ .

Afin d'assurer le caractère réel du propagateur, l'équation de la probabilité doit être égale à son conjuguée hermitique. Cette condition peut être exprimée comme suit :

$$P_d(q^*, \omega^*) = P_d^*(q, -\omega) \quad (\text{IV.22})$$

D'un autre part, la condition définie dans (IV.22) peut être exprimée en fonction du coefficient de diffusion comme suit :

$$D(q^*, \omega^*) = D^*(q, -\omega) \quad (\text{IV.23})$$

Si la distance  $q$  et la pulsation  $\omega$  sont des valeurs réelles, la relation (IV.23) implique que le coefficient de diffusion est réel. Par conséquent, la partie imaginaire de l'équation (IV.21) doit être égale à zéro, où  $\text{Im}\left(\frac{D(\omega)}{D_B}\right) = 0$ . A cette fin, nous choisissons  $q_M = \frac{\pi}{3l}$  afin que la relation  $\frac{D(\omega)}{D_B}$  se devienne purement réelle. Pour ce choix de la distance  $q_M$ , la relation (IV.21) devient comme suit :

$$\frac{D(i\omega)}{D_B} = 1 - \frac{1}{(kl)^2} \left[ 1 - \frac{3l}{\pi L_{i\omega}} \arctan\left(\frac{\pi L_{i\omega}}{3l}\right) \right] \quad (\text{IV.24})$$



En utilisant les conditions définies dans (IV.19) et en appliquant la limite de la réciproque de la fonction tangente ( $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \pi / 2$ ), la relation (IV.24) peut être exprimée comme suit :

$$\frac{D(i\omega)}{D_B} = 1 - \frac{1}{(kl)^2} \left[ 1 - \frac{3l}{\pi L_{i\omega}} + \frac{\sqrt{27\omega\tau/4}}{(kl)^2} \sqrt{\frac{D(i\omega)}{D_B}} \right] \quad (IV.25)$$

L'équation (IV.25) admet une solution réelle  $\frac{D(i\omega)}{D_B}$  dépendant uniquement sur le produit entre le vecteur de nombre d'onde  $k$  et le libre parcours moyen  $l$  ( $kl$ ).

A base de l'étude du critère d'Ioffe-Regel et les approches des valeurs de coefficient de diffusion dans les régimes des atomes froids dans le milieu désordonné, les solutions de  $D(i\omega)/D_B$  peuvent être définies dans la suite du chapitre [Akr-20, Yed-A-23, Yed-B-23].

#### IV.4 Critère d'Ioffe-Regel

La diffusion des ondes de matière dans un milieu désordonné est caractérisée par un libre parcours moyen  $l$  du même ordre ou plus court que la longueur d'onde  $\lambda$ , qui est définie par :  $\lambda = 2\pi / k$ . Les valeurs du produit entre le libre parcours moyen  $l$  et le nombre d'onde  $k$  peuvent être définies le critère d'Ioffe Regel, à savoir [Ski-10, Akr-20, Bel-16, Kai-20] :

- Si  $kl > 1$  : Le nombre des ondes diffusées est supérieur au nombre des ondes localisées dans un milieu désordonné. Dans ce cas, le milieu désordonné tridimensionnels est décrit comme suit :
  - ❖ Le régime du milieu devient régime diffusif ;
  - ❖ Le milieu devient faiblement désordonné ;
  - ❖ Les ondes de matière propagent dans le milieu désordonné sous forme des ondes Blocks ;
  - ❖ La conductance et la conductivité du matériau deviennent élevées ;
  - ❖ Le coefficient de diffusion devient positif ;
- Si  $kl < 1$  : Le nombre des ondes localisées domine sur les ondes diffusées dans le milieu désordonné. Dans ce cas, le milieu désordonné tridimensionnels est décrit comme suit :
  - ❖ Le régime du milieu devient régime localisé ;
  - ❖ Le milieu devient fortement désordonné ;
  - ❖ La fonction d'onde de matière décroît exponentiellement dans le milieu désordonné ;
  - ❖ La conductance et la conductivité du matériau deviennent basses ;
  - ❖ Le coefficient de diffusion tend vers zéro mais ne s'annule pas ;

- Si  $kl \approx 1$  : Le passage localisé-diffusif est apparu dans le système désordonné tridimensionnels. Dans ce cas, le milieu désordonné tridimensionnels est caractérisé par les grandeurs quantiques suivantes :
  - ❖ L'onde de matière a une énergie critique  $E_c$  séparant le régime diffusif au régime localisé. Les ondes de matière ont un régime diffusif lorsque l'énergie de l'onde de matière est supérieur à l'énergie critique  $\varepsilon > E_c$ , tandis que ont un régime localisé lorsque l'énergie de l'onde de matière est inférieure à l'énergie critique  $\varepsilon < E_c$  ;
  - ❖ Le milieu désordonné a un désordre critique  $W_c$  et un nombre d'onde critique  $k_c$  .

D'après le critère d'Ioffe-Regel, les solutions de  $D(i\omega)/D_B$  peuvent être définies selon les régimes des atomes froids dans le milieu désordonné tridimensionnels comme suit :

#### A. Régime diffusif

Dans ce régime, la longueur  $L_{i\omega}$  est infiniment supérieure que le libre parcours moyen  $L_{i\omega} \gg l$ , c'est-à-dire que le terme  $\frac{3l}{\pi L_{i\omega}}$  dans l'équation (IV.24) tend vers zéro. Par conséquent, la solution de  $D(i\omega)/D_B$  s'exprime comme suit :

$$\frac{D(i\omega)}{D_B} = 1 - \frac{1}{(kl)^2} \quad (IV.26)$$

#### B. Régime localisé

Dans ce régime, le coefficient de diffusion tend vers zéro et la longueur  $L_{i\omega}$  tend vers une valeur finie. Par conséquent, la solution de  $D(i\omega)/D_B$  est définie par la relation suivante:

$$\frac{D(i\omega)}{D_B} = \omega(L_{loc})^2 \quad (IV.27)$$

Avec,  $L_{loc} = \frac{3l}{2(1-(kl)^2)}$  est la longueur de la localisation.

#### C. Régime critique

D'après le critère d'Ioffe-Regel, la valeur de  $kl$  est proche de un ( $kl \approx 1$ ). Par conséquent, la solution de l'équation (IV.25) devient comme suit :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{D(i\omega)}{D_B} &= \left(\frac{3l}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{\omega}{D_B}\right)^{1/3} \\ &= \left(\frac{27\omega\tau}{4}\right)^{1/3} \end{aligned} \right. \quad (IV.28)$$

Le critère d'Ioffe-Regel peut être examiné en fonction du nombre et d'énergie de l'onde de matière en utilisant la relation suivante [Akr-20]:

$$kl = \frac{\sum_k k^2 F_0(\varepsilon, k)}{\sum_k -\text{Im} G(\varepsilon, k)} \quad (\text{IV.29})$$

La fonction  $F_0(\varepsilon, k)$  est définie comme suit :

$$F_0(\varepsilon, k) = |G(\varepsilon, k)|^2 \left( 1 + \frac{\partial \text{Re} \sum(\varepsilon, k)}{\partial k^2} \right) - \frac{\partial \text{Re} G(\varepsilon, k)}{\partial k^2} \quad (\text{IV.30})$$

Pour les corrélations à courte portée, le déplacement des ondes de matière peut être négligé, qui est exprimée par la partie réelle de la self énergie et de la fonction de Green. Par conséquent, la fonction  $F_0(\varepsilon, k)$  s'exprime par la relation suivante :

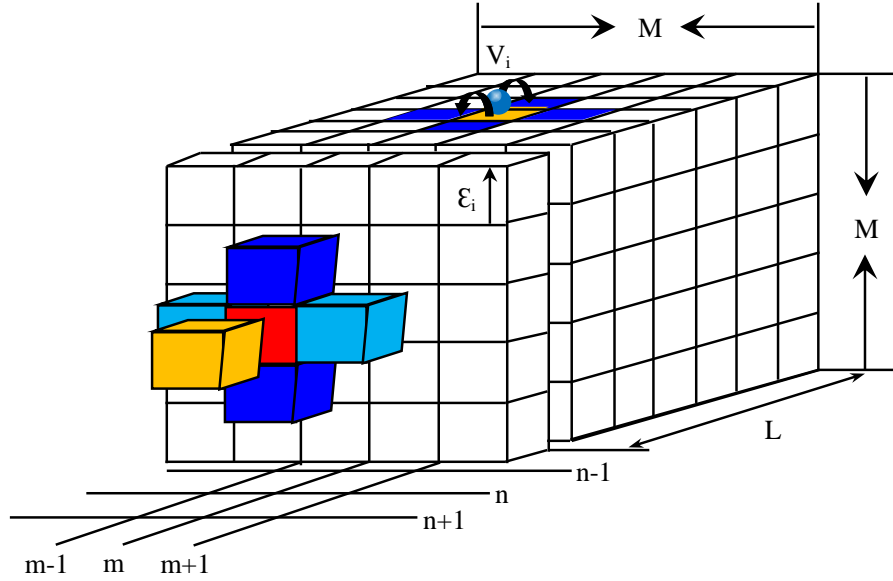
$$F_0(\varepsilon, k) = 2\text{Im}^2 G(\varepsilon, k) \quad (\text{IV.31})$$

Le critère d'Ioffe-Regel est utilisé afin d'estimer l'énergie critique de l'onde de matière mais il est insuffisant d'estimer avec précision l'énergie critique. A cette fin, nous proposons une autre technique à un meilleur résultat d'estimation que celui obtenu par le critère d'Ioffe-Regel [Kro-90, Gas-13].

#### IV.5 Modèle de la matrice de transfert quasi-1D

Nous avons présenté dans la section précédente que la position critique qui sépare le régime localisé au régime étendu peut être calculée à travers la théorie auto-cohérente basant sur le critère d'Ioffe-Regel. D'après ce critère, l'énergie critique du passage localisé-diffusif est déterminée lorsque le produit  $kl$  est proche de la valeur un  $kl \approx 1$ . Dans ce cas, il existe une infinité de nombres proches de un, c'est-à-dire que le critère d'Ioffe-Regel a un résultat d'estimation imprécis de l'énergie critique. A cette fin, nous allons utiliser le modèle de la matrice de transfert quasi-unidimensionnel afin d'estimer la position de l'énergie critique ( $E_c$ ) et le désordre critique  $W_c$  [Bul-85, Del-14, Kro-90, Gas-13].

L'approche de matrice de transfert du quasi-unidimensionnel a été utilisée pour étudier le modèle du passage des atomes froids. Cette matrice est plus appropriée pour étudier le comportement des ondes de matière dans le champ de speckle en calculant la longueur de la localisation  $L_{loc}$  d'une grille en forme de barre de longueur  $L_{quasi}$  et de section carrée  $M_{quasi} \times M_{quasi}$ , comme l'illustre la Figure (IV. 3).



**Figure IV.3.** Représentation de la matrice de transfert quasi-unidimensionnel [Gas-13]

L'évolution de la fonction d'onde de l'équation de Schrödinger peut être exprimée comme le produit de matrices de transfert quasi-unidimensionnel, pour lesquelles le système quasi-unidimensionnel est divisé en  $L$  couches dans la direction longitudinale, avec  $L \gg M$ . Basant sur l'équation de Schrödinger, le model d'Anderson peut être exprimé sous la forme suivante :

$$V_{n+1,m}'' \psi_{n+1,m} = (E - \varepsilon_{n,m}) \psi_{n,m} - V_{n,m+1}^\perp \psi_{n,m+1} - V_{n,m}^\perp \psi_{n,m-1} - V_{n,m}'' \psi_{n-1,m} \quad (\text{IV.32})$$

Où,  $\psi_{n,m}$  représente la fonction d'onde aux sites  $n$  et  $m$ ,  $V_{n,m}^\perp$  est le couplage par effet tunnel entre les sites  $(n, m)$  et  $(n, m-1)$ ,  $V_{n,m}''$  est le couplage par effet tunnel entre les sites  $(n-1, m)$  et  $(n, m)$ ,  $\varepsilon_{n,m}$  est l'énergie de site.

L'équation (IV.32) peut être définie sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [V_{n+1}'' ]^{-1} (\varepsilon - \varepsilon_n - H_\perp) & -[V_{n+1}'' ]^{-1} V_n'' \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{bmatrix} \\ = T_n \begin{bmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{IV.33})$$

Où,  $T_n$  est la matrice de transfert quasi-1D,  $\varepsilon_n = \text{diag}(\varepsilon_{n,1}, \varepsilon_{n,2}, \dots, \varepsilon_{n,M})$  et  $V_n'' = \text{diag}(V_{n,1}'', V_{n,2}'', \dots, V_{n,M}'')$ .

### IV.5.1 Etude analytique de la matrice de transfert quasi-1D

Dans cette étude, nous établirons une relation décrivant la longueur de la localisation  $L_{loc}$  en fonction de l'intensité du désordre  $W$ . Cette relation sera utilisée afin d'estimer la valeur de désordre critique  $W_c$ .

L'énergie de l'onde de matière  $\varepsilon$  dans le système quasi-unidimensionnel peut être exprimée comme suit :

$$\varepsilon = 2t_x \cos k_n + 2t_y \cos \frac{\pi n}{M+1}; \quad n = 1, 2, \dots, M \quad (\text{IV.33})$$

Où,  $t_x$  et  $t_y$  sont le transfert d'énergie vers le plus proche site selon les directions  $x$  et  $y$ .

Les fonctions propres appropriées de la fonction de Schrödinger suivant la direction  $y$  peuvent être définies comme suit :

$$\psi_n(y_l) = \sqrt{\frac{2}{M}} \sin \frac{\pi l n}{M+1}; \quad n, l = 1, 2, \dots, M \quad (\text{IV.34})$$

D'après la matrice de transfert quasi-1D, l'évolution de l'onde de matière dans le système désordonné devient comme suit :

$$T_{n,m} \approx \begin{cases} e^{ik_m(L-1)} \left( 1 - i \frac{\sum_{l=1}^M \sum_{j=1}^L V_{j,l} \psi_m(y_l) \psi_m^*(y_l)}{4DL_t \sin(k_m)} \right) & \text{Si } n = m \\ e^{ik_m(L-1)} \left( -i \frac{\sum_{l=1}^M \sum_{j=1}^L V_{j,l} e^{i\phi_j} \psi_m(y_l) \psi_m^*(y_l)}{2L_t \sqrt{\sin k_n \sin k_m}} \right) & \text{Si } n \neq m \end{cases} \quad (\text{IV.35})$$

Avec,  $A_l = \frac{1}{L_t} \sum_{l=1}^M \frac{\sin(n\pi l / L_t)}{\sin(k_n)}$ ,  $\phi = (k_n - k_m)(j-1)$ ,  $D = 1 + i \sum_{l=1}^M \sum_{j=1}^L V_{j,l} A_l$  et  $L_t = M + 1$ .

A partir de l'équation de l'évolution de l'onde de matière définie dans (IV.35), l'inverse de la longueur de localisation s'exprime par la relation suivante :

$$\frac{1}{L_{loc}} = -\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2ML} \left\langle \ln \sum_{n,m} |T_{n,m}|^2 \right\rangle \quad (\text{IV.36})$$

En remplaçant  $\left\langle \ln \sum_{n,m} |T_{n,m}|^2 \right\rangle$  par  $\ln \left\langle \sum_{n,m} |T_{n,m}|^2 \right\rangle$  et en supposant que pour un désordre faible les coefficients de transmission sont proches de un et les coefficients de réflexion sont proches de zéro. Après le calcul moyen de potentiels aléatoires distribués uniformément  $V_{j,l}$ , l'inverse de la longueur de localisation devient comme suit :

$$\frac{1}{L_{loc}} = \frac{W^2}{96M^2} \sum_{l=1}^M \left( \sum_{n=1}^M \frac{\psi_n(y_l) \psi_n^*(y_l)}{k_n} \right)^2 \quad (\text{IV.37})$$

L'équation (IV.37) montre que la longueur de localisation dépend de la largeur du système quasi unidimensionnel  $M$ , du désordre et de l'énergie de l'onde de matière. En revanche, d'après les

auteurs D. Delande et G. Orso [Del-14, Gas-13], la longueur de localisation change de trois manières selon le régime des atomes froids dans le système désordonné tridimensionnel, à savoir :

- *Régime diffusif* : La longueur de localisation a une relation proportionnelle avec la largeur de quasi unidimensionnel  $M$  ;
- *Régime localisé* : La longueur de localisation a une relation inversement proportionnelle avec la largeur de quasi unidimensionnel  $M$  ;
- *Régime critique* : La longueur de localisation tend vers une valeur constante.

D'une part, la position de l'énergie critique  $E_c$  peut être estimée quand la longueur de localisation tend vers une valeur constante, ou en utilisant le point d'intersection des courbes de la longueur de localisation  $L_{loc}$  tracées en fonction de la largeur du système quasi unidimensionnel  $M$  [Gas-13].

D'une autre part, les auteurs Bulka et Kramer ont estimé que la valeur critique du désordre  $W_c$  est obtenue lorsque la pente de la courbe de longueur de localisation  $L_{loc}$  atteint la valeur zéro [Kro-90, Bul-85].

## IV.6 Résultats et discussion

Dans ce paragraphe, nous passons aux calculs numériques afin d'étudier le passage localisé-diffusif des atomes froids dans un potentiel désordonné tridimensionnel, en estimant de trouver une valeur d'énergie critique qui sépare le régime localisé du régime diffusif. En effet, la position de l'énergie critique a été estimée par les modèles proposés dans le troisième et le quatrième chapitre.

La simulation numérique est effectuée comme suit :

- À travers la partie réelle du modèle SCBA, la fonction spectrale et la conductivité de Drude, nous chercherons de trouver la position de l'énergie critique et du nombre critique de l'onde de matière;
- Ensuite, le critère d'Ioffe-Regel est basé sur la théorie auto-cohérente sera utilisé afin d'estimer et de confirmer l'intervalle de la position de l'énergie critique obtenu dans la première estimation;
- Enfin, le modèle de la matrice de transfert quasi unidimensionnel sera utilisé pour préciser la position de l'énergie critique  $E_c$ , l'intensité du désordre critique  $W_c$  et le nombre critique de l'onde de matière  $k_c$ .

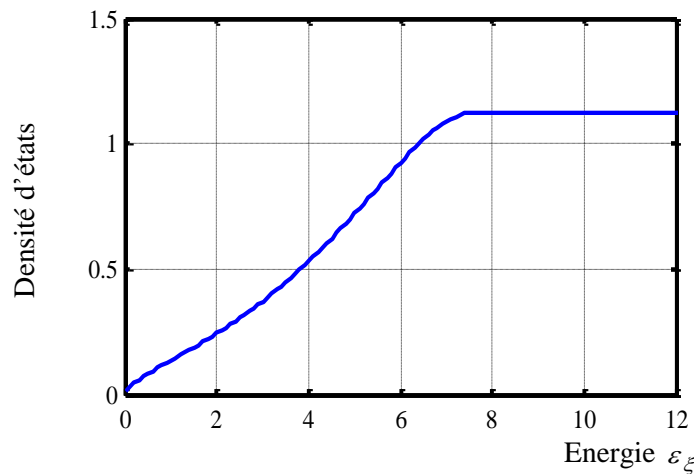
### IV.6.1 Estimation de l'intervalle de passage continu du régime diffusif

Les résultats de la partie réelle de SCBA, de la fonction spectrale et du Drude conductivité peuvent être utilisés afin d'estimer la position maximale de la bande edge et le nombre critique maximal de l'onde de matière illustrant l'intervalle du passage continu du régime diffusif.

**A. Position maximale de la bande edge**

La figure (III.21) obtenue dans le troisième chapitre qui montre que l'augmentation ou la diminution de l'énergie des ondes de matière peut diminuer ou augmenter la diffusion des atomes froids dans le speckle optique. Afin d'estimer la valeur maximale de l'énergie de l'onde de matière, où les atomes froids sont dans le passage continu du régime diffusif, nous examinerons la densité d'état dans le milieu désordonné. Après le point d'énergie maximale de l'onde, le système désordonné devient plus stable et le nombre des ondes diffusées ne change pas même si l'énergie de matière augmente, c'est-à-dire que la densité du système désordonné devient homogène.

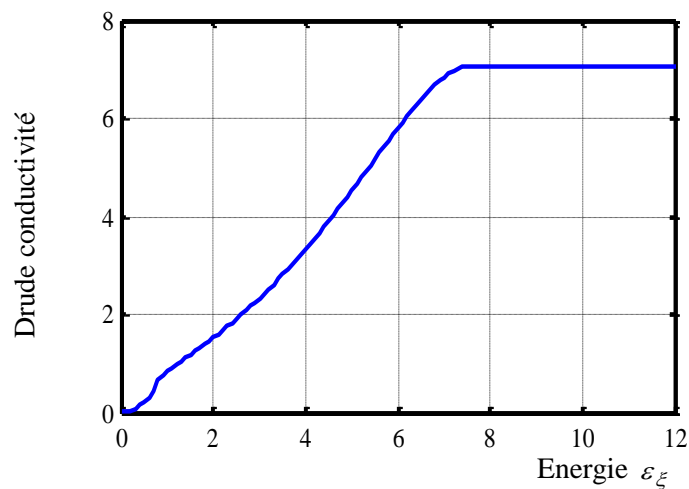
La Figure (IV.4) montre la densité des atomes diffusés dans le potentiel désordonné tridimensionnel. D'après le résultat obtenu, on observe clairement que les atomes froids atteints le passage continu du régime diffusif, où le nombre des atomes froids diffusés restera constant pour  $\varepsilon > 7\varepsilon_\xi$ . Par conséquent, le passage continu du régime diffusif est obtenu pour  $\varepsilon = 7\varepsilon_\xi$ , ce que signifie que la position de l'énergie critique de l'onde de matière  $E_c$ , qui contient les régimes de la localisation et de la diffusion, est estimée entre  $0\varepsilon_\xi$  et  $7\varepsilon_\xi$ . En conséquence, la position maximale de l'énergie critique est confinée entre  $E_c \in ]0, 7]$ . Ces résultats obtenus peuvent être justifiés en examinant le modèle de Drude conductivité.



**Figure IV.4.** Densité des atomes diffusés dans un potentiel désordonné 3D.

Figure (IV.5) illustre le résultat obtenu pour la conductivité du matériau en examinant le modèle de Drude conductivité. D'après la figure (IV.5), une relation proportionnelle entre l'énergie de l'onde de matière  $\varepsilon$  et la conductivité  $\sigma$  est obtenue, c'est-à-dire que l'augmentation de l'énergie des ondes de matière peut augmenter la conductivité des atomes froids dans le potentiel désordonné tridimensionnels. En fait, la conductivité du matériau peut atteindre le régime de stabilité pour

$\varepsilon > 7\varepsilon_\xi$ , ce qui signifie que la position de l'énergie critique de l'onde de matière  $E_c$  est située entre  $0\varepsilon_\xi$  et  $7\varepsilon_\xi$ . Ce résultat confirme le résultat obtenu dans la figure (IV.4)



**Figure IV.5.** Variation de la conductivité en termes d'énergie des ondes de matière.

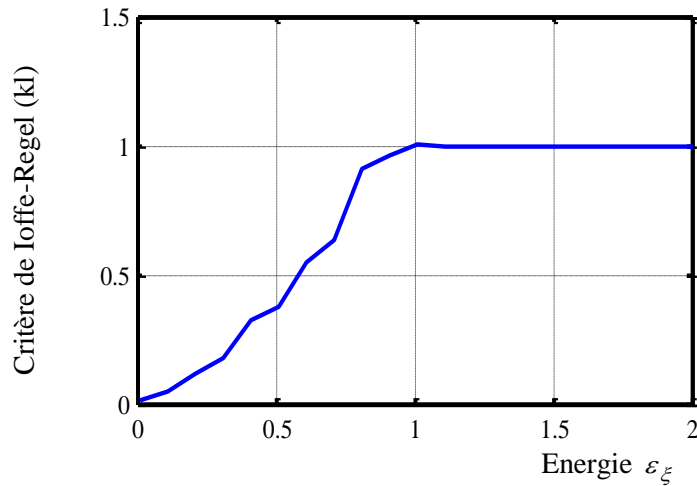
**B. Nombre critique maximal de l'onde de matière**

D'après la figure (III.12) du troisième chapitre, le déplacement d'énergie  $\varepsilon_k$  diminue pour un nombre d'onde de matière inférieure à  $1k_\xi$  ( $k < 1k_\xi$ ) et augmente pour un nombre d'onde supérieure à  $1k_\xi$  ( $k > 1k_\xi$ ). L'augmentation et la diminution de l'énergie de l'onde de matière indiquent l'émergence d'un état intermédiaire « mid-gap » représentant la mobilité edge du spectre. D'après les résultats obtenus, nous avons trouvés que les graphes du déplacement d'énergie en fonction du nombre d'onde sont intersectés au point égale à  $k \approx 2k_\xi$  pour différentes valeurs de l'énergie de l'onde  $\varepsilon$ . Par conséquent, la bande edge du spectre est confinée entre  $0k_\xi$  et  $2k_\xi$  pour n'importe quelle valeur de l'énergie de l'onde  $\varepsilon$ , ce qui signifie que le nombre critique de l'onde de matière est confiné entre  $k_c \in ]0, 2]$ , où  $k_{c,max} \approx 2k_\xi$ .

**IV.6.2 Estimation de l'énergie critique par le critère d'Ioffe-Regel**

La figure (IV. 6) montre le résultat obtenu par le critère d'Ioffe-Regel basée sur la théorie auto-cohérente. Selon le critère d'Ioffe-Regel étudié dans la section (IV.4), l'énergie critique est obtenue lorsque la valeur du critère proche à un ( $kl \approx 1$ ). D'après la figure (IV.6), la valeur du critère d'Ioffe-Regel pour le régime critique ( $kl \approx 1$ ) correspond à l'énergie de l'onde de matière  $\varepsilon_\xi \approx 1$ . Par conséquent, la position de l'énergie critique dans le potentiel désordonné tridimensionnel est proche de la valeur un  $E_c \approx 1\varepsilon_\xi$ . Cependant, la valeur de l'énergie critique estimée est imprécise car il existe d'infinité des nombre proches de un. A cette fin, nous allons examiner le modèle de la matrice de transfert quasi unidimensionnel pour prédire la valeur exacte de l'énergie critique.





**Figure IV.6.** Valeurs du critère d'Ioffe-Regel en termes de l'énergie des ondes de matière

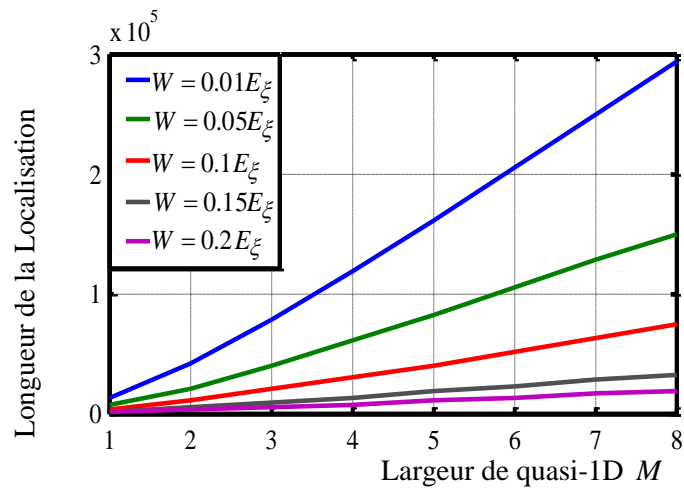
### IV.6.3 Estimation les grandeurs critiques par la matrice de transfert quasi-1D

#### A. Estimation de l'intensité du désordre critique

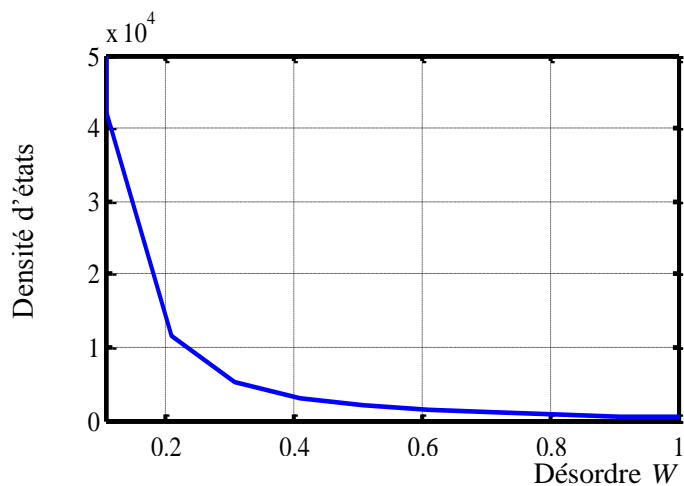
La figure (IV.7) illustre les résultats obtenus dans la troisième simulation en examinant le modèle de la matrice de transfert quasi unidimensionnel détaillé dans la section (IV.5). Au début de la simulation, l'effet du désordre sur le comportement des atomes froids dans le système désordonné tridimensionnels est illustré en calculant la densité d'états de la longueur de localisation. De plus, la valeur du désordre critique  $W_c$  est calculée en traçant les graphes de la longueur de localisation en fonction de la largeur de quasi unidimensionnel  $M$  avec des valeurs variables du désordre  $W$ , comme le montre la Figure (IV.7). D'après les auteurs Bulka et Kramer [Bul-85], la valeur critique du désordre  $W_c$  est obtenue lorsque la pente de la courbe de longueur de localisation est proche de zéro. À cette fin, l'équation de la longueur de localisation définie dans (IV.37) sera étudiée numériquement dans cette simulation avec les mêmes paramètres que l'article de recherche de Bulka et Kramer [Bul-85].

Selon le résultat obtenu sur la figure (IV.7), une relation proportionnelle inverse entre la longueur de localisation et l'intensité du désordre  $W$  est obtenue, c'est-à-dire que l'augmentation ou la diminution de l'intensité du désordre  $W$  entraîne une diminution ou une augmentation de la longueur de localisation  $LL$ , respectivement. Par conséquent, la localisation des atomes froids dans le champ de speckle a une relation directe avec l'intensité du désordre, et a une relation inverse avec la pente de la longueur de localisation. Pour cela, les auteurs Bulka et Kramer a prédit que le passage critique des atomes froids dans le potentiel désordonné peut être obtenue lorsque la pente de la longueur de localisation égale à zéro. D'après la Figure (IV.7), on voit clairement que la

penne de la courbe de longueur de localisation atteint une valeur proche de zéro à  $W = 0.2 \varepsilon_\xi$ . Par conséquent, la valeur critique du désordre est estimée à proche de  $0.2 \varepsilon_\xi$  ( $W_c \approx 0.2 \varepsilon_\xi$ ).



**Figure IV.7.** Effet de l'intensité du désordre sur la longueur de localisation



**Figure IV.8.** Densité de la longueur de localisation en termes de l'intensité du désordre  $W$ .

**B. Estimation de la position de l'énergie critique**

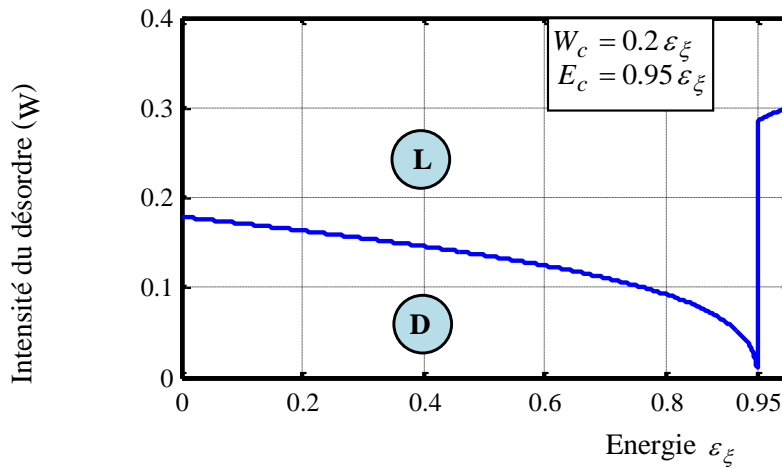
Dans cette partie, la variation de l'intensité du désordre  $W$  en fonction de l'énergie de l'onde de matière  $\varepsilon$  est présentée sur la figure (IV.9). D'après la figure (IV.9), deux états peuvent être distingués selon la variation de l'intensité du désordre  $W$  :

- **État 1** : Pour  $\varepsilon_\xi \leq 0.95 \varepsilon_\xi$ , l'intensité du désordre  $W$  diminue lorsque l'énergie des ondes de matière augmente, ce qui signifie que la localisation des atomes froids va diminuer comme nous l'avons expliqué précédemment. Par conséquent, les atomes froids peuvent

être considérés dans le régime localisé, qui se trouve au-dessous de la valeur critique du désordre  $W_c = 0.2 \varepsilon_\xi$  ;

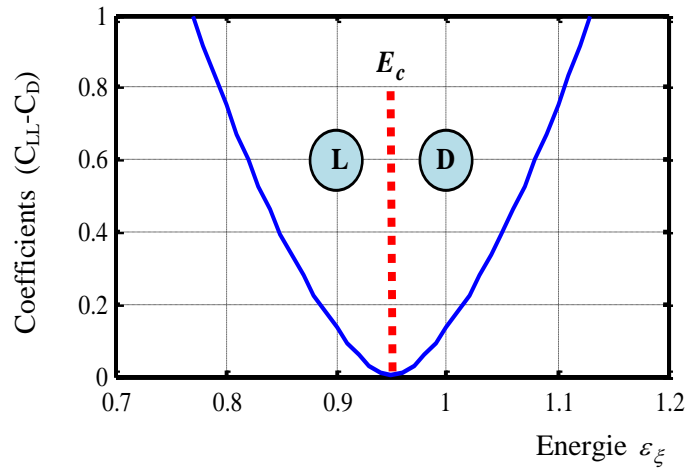
- **État 2 :** Pour  $\varepsilon_\xi > 0.95 \varepsilon_\xi$ , l'intensité du désordre  $W$  augmente lorsque l'énergie des ondes de matière augmente, ce qui signifie que la localisation des atomes froids va augmenter. Par conséquent, les atomes froids peuvent être considérés dans le régime diffusif, qui se trouve au-dessus de la valeur critique du désordre  $W_c = 0.2 \varepsilon_\xi$  ;

A partir des deux états ci-dessous, les valeurs critiques de l'énergie de l'onde de matière  $E_c$  et du désordre  $W_c$  peuvent être estimées par  $E_c \approx 0.95 \varepsilon_\xi$  et  $W_c \approx 0.2 \varepsilon_\xi$ , respectivement. Ces valeurs critiques séparent entre les régimes localisé et diffusif.



**Figure IV.9.** Intensité du désordre en termes de l'énergie de l'onde de matière illustrant la position de l'énergie critique dans un potentiel désordonné 3D.

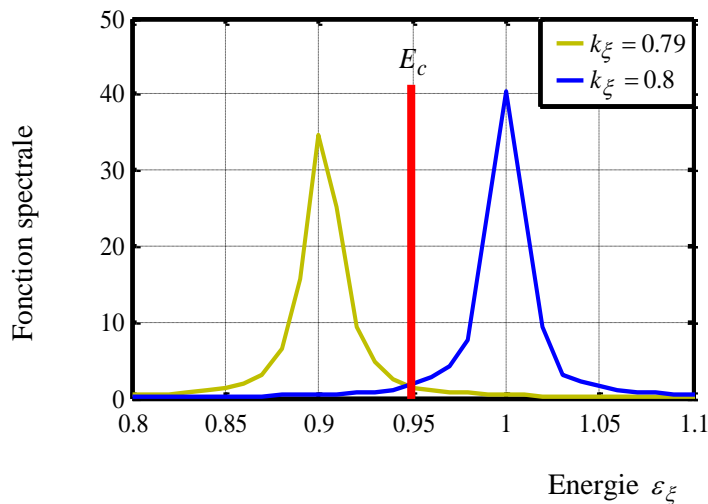
Figure (IV.10) illustre la variation des coefficients de localisation  $C_{LL}$  et de diffusion  $C_D$  en fonction de l'énergie de l'onde de matière  $\varepsilon$ . D'après la figure (IV.10), le coefficient de localisation diminue pour  $\varepsilon_\xi < E_c$ , ce qui signifie que les atomes froids sont dans le régime localisé, tandis que le coefficient de diffusion augmente pour  $\varepsilon_\xi > E_c$ , ce qui signifie que les atomes froids sont dans le régime diffusif. Par conséquent, on peut conclure que la position de l'énergie critique est estimée par une valeur de  $0.95 \varepsilon_\xi$  ( $E_c \approx 0.95 \varepsilon_\xi$ ). Ce résultat obtenu confirme le résultat obtenu dans la figure (IV.9).



**Figure IV.10.** Variation des coefficients de localisation et de diffusion autour de l'énergie critique

**C. Estimation du nombre critique de l'onde de matière**

La valeur critique du nombre d'ondes de matière  $k_c$  peut être déterminée en utilisant la valeur de l'énergie critique obtenue dans cette étude ( $E_c \approx 0.95 \varepsilon_\xi$ ). À cette fin, la fonction spectrale  $A(\varepsilon, k)$  est tracée en termes de l'énergie de l'onde de matière  $\varepsilon_\xi$  avec la variation du nombre de l'onde de matière  $k$ . D'après la figure (IV.11), on observe que lorsque que l'énergie de l'onde de matière se rapproche de l'énergie critique, alors les atomes diffusés dans le milieu désordonné augmentent. De plus, il est clair que la valeur de l'énergie critique  $E_c \approx 0.95 \varepsilon_\xi$  est corresponde à une valeur proche de  $0.8k_\xi$ . Par conséquent, la valeur critique du nombre d'onde  $k_c$  est estimée à  $0.8k_\xi$  ( $k_c \approx 0.8k_\xi$ ).



**Figure IV.11.** Estimation du nombre critique de l'onde de matière  $k_c$  en utilisant la position de l'énergie critique obtenue  $E_c \approx 0.95 \varepsilon_\xi$ .

## IV.7 Conclusion

Le but de notre travail est de chercher l'intervalle du seuil de la transition d'un régime localisé vers un régime diffusif en utilisant l'approximation de Born. Pour cela, nous avons examiné la fonction spectrale et la conductivité de Drude pour prédire la position maximale de l'énergie critique et le nombre critique maximale de l'onde de matière. Les résultats obtenus montrent que la position maximale de l'énergie critique est confinée entre  $E_c \in ]0, 7]$ , et le nombre critique de l'onde de matière se trouve entre  $k_c \in ]0, 2]$ , où  $k_{c, \max} \approx 2k_\xi$ . Ces valeurs sont légèrement différentes par rapport à ceux trouvés dans la littérature.

Dans la suite de notre travail, nous avons essayé de s'approcher à la valeur de la position de l'énergie critique dans l'intervalle du passage continu du régime diffusif en utilisant le critère d'Ioffe-Regel. D'après le résultat de simulation de cette partie, montre que la valeur du critère d'Ioffe-Regel pour le régime critique ( $kl \approx 1$ ) correspond à l'énergie de l'onde de matière ( $E_c \approx 1\varepsilon_\xi$ ) indiquant un passage des atomes froids du régime localisé vers un régime diffusif.

Nous avons aussi constaté que la valeur de l'énergie critique estimée par le critère d'Ioffe-Regel est imprécise, car il existe une infinité des nombre proches de 1. Alors, nous avons utilisé la matrice de transfert quasi unidimensionnel pour valoriser notre travail. D'après le calcul la matrice de transfert, nous avons conclu que la longueur de localisation dépend de la largeur de quasi unidimensionnel  $M$ , du désordre et de l'énergie de l'onde de matière. De plus, nous avons trouvé qu'il existe une relation proportionnelle inverse entre la longueur de localisation et l'intensité du désordre  $W$ , ce qui signifie que l'augmentation de l'intensité du désordre va surmonter la localisation des atomes froids dans le système désordonné tridimensionnels. A partir de cette relation entre la longueur de localisation et le désordre, nous avons calculé l'intensité du désordre critique. En conséquence, nous avons obtenu que la valeur critique du désordre est proche de  $0.2\varepsilon_\xi$  ( $W_c = 0.2\varepsilon_\xi$ ) et la position de l'énergie critique est proche de  $0.95\varepsilon_\xi$  ( $E_c \approx 0.95\varepsilon_\xi$ ). D'un autre côté, le nombre critique de l'onde de matière est calculé en utilisant la fonction spectrale à la valeur de l'énergie critique obtenue. Enfin, nous avons trouvé que la valeur de l'énergie critique  $E_c \approx 0.95\varepsilon_\xi$  correspond à  $0.8k_\xi$ . La valeur critique du nombre d'onde  $k_c$  est proche de: ( $k_c \approx 0.8k_\xi$ ) confirme le critère de Ioffe-Regel.

## Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons étudié les propriétés d'un gaz d'atomes froids dilués soumis à un potentiel désordonné présentant une corrélation non gaussienne à basse température. Au cours de ces années de recherche, nous avons revisité certaines propriétés statistiques d'un potentiel optique, notamment sa distribution d'intensité diffusée, souvent appelée "figure de tavelure". L'analyse révèle que, leur apparence aléatoire, présentent certaines corrélations spatiales. En exploitant ces corrélations, il devient possible d'extraire des informations significatives des ondes dans le régime de diffusion multiple.

Dans le cadre de l'approche théorique, nous avons utilisé l'approximation auto-cohérente de Born, valable pour un désordre faible. Nous avons dérivé des expressions analytiques pertinentes pour les fluctuations du condensat induites par le désordre, ainsi que les corrections associées entre l'approximation de Born au premier ordre et l'approximation auto-cohérente de Born. De plus, nous avons souligné que la compétition entre le désordre et les interactions place les atomes froids dans une situation critique. Cette situation critique émerge du fait que les atomes sont diffusés de manière multiple par les taches aléatoires du speckle, remettant en cause l'idée de perdre la propagation balistique.

D'abord, nous avons procédé à une comparaison entre l'approximation auto-cohérente et l'approximation de Born, mettant en évidence les différences entre ces deux approches. À une énergie donnée, nous avons observé que l'approximation de Born engendre une force de diffusion plus significative, avec un spectre de diffusion plus étendu par rapport à l'approximation auto-cohérente. Cette variation s'explique par le dépassement des interactions au-delà de l'énergie de corrélation du potentiel aléatoire dans l'approximation de Born où les atomes bougent sous l'effet des interaction et ils sont moins sensibles au potentiel désordonné

En revanche, dans l'approximation auto-cohérente, la force de diffusion est atténuée en raison des corrélations induites par le désordre, où certains atomes se trouvent piégés autour de ces corrélations. Ces résultats obtenus révèlent une légère divergence par rapport à ceux de la référence [Del-14], soulignant ainsi l'influence significative des paramètres énergétiques des condensats de Bose-Einstein sur le phénomène de localisation. Par ailleurs, lors de l'examen de la conductivité de Drude, nous avons observé une variation monotone avec l'énergie de corrélation, soulignant considérablement l'existence d'une transition d'un régime localisé vers un régime délocalisé. Nos résultats révèlent que les corrélations sont responsables à la localisation de Bose-Einstein, cette localisation connue sous le nom de localisation faible, peuvent non seulement entraîner un déplacement des quantités mentionnées

dans la thèse, telles que le libre parcours moyen, la longueur de localisation et la durée de vie des condensats de Bose-Einstein, mais également influencer la position du seuil de mobilité. Le résultat est satisfaisant, car une modification de la position du seuil de mobilité suggère la possibilité de localiser davantage d'atomes, contribuant ainsi à atteindre la localisation d'Anderson.

### **Perspectives**

Dans le même contexte, il existe un vaste domaine de recherche pour des travaux futurs sur la localisation d'Anderson de la lumière en 3D. Nos résultats ouvrent la voie à une application prometteuse consistant à étudier le rôle du milieu désordonné dans des conditions dimensionnelles et de contraste d'indice de réfraction sans précédent. Du point de vue expérimental, la localisation d'Anderson de la lumière en 3D pourrait être observée dans un milieu désordonné dense composé de petites sphères conductrices. Dans ce contexte, les photons subissent une marche aléatoire, tout en restant confinés par des interférences dans une région de taille finie. Cette situation diffère considérablement des études de propagation antérieures, permettant aux photons de parcourir des distances arbitraires dans un temps suffisamment long. Ces aspects ouvrent des perspectives intrigantes pour des explorations futures.

## Bibliographie

- [Akk-20] AKKERMANS, Eric et MONTAMBAUX, Gilles. Physique mésoscopique des électrons et des photons. 2020.
- [Akr-20] AKRIDAS-MOREL, Panayotis. Multifractalité des paquets d'ondes à la transition métal/isolant d'Anderson. 2020. Thèse de doctorat. Sorbonne université.
- [All-15] ALLAL, Mr KHACHAI Ilias. Transport dans les condensats de Bose Einstein dans un milieu désordonné. 2015. Thèse de doctorat. UNIVERSITE D'ORAN.
- [Ang-02] ANGLIN, James R. et KETTERLE, Wolfgang. Bose–Einstein condensation of atomic gases. *Nature*, 2002, vol. 416, no 6877, p. 211-218.
- [And-58] ANDERSON, Philip W. Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical review*, 1958, vol. 109, no 5, p. 1492.
- [And-72] ANDERSON, Philip W. More Is Different: Broken symmetry and the nature of the hierarchical structure of science. *Science*, 1972, vol. 177, no 4047, p. 393-396.
- [Arb-14] ARBENZ, Laure, BENABOU, Abdelkader, CLÉNET, Stéphane, et al. Approche combinée expérimentale/numérique pour la mesure de la conductivité électrique locale avec minimisation de l'incertitude de mesure. In : Symposium de Génie Électrique 2014. 2014.
- [Ari-70] ARIZUMI, T., YOSHIDA, A., et SAWAKI, N. 2. Mesure de la densité d'états électroniques par effet tunnel. *Revue de Physique Appliquée*, 1970, vol. 5, no 6, p. 900-900.
- [Ash-02] ASHCROFT, Neil William et MERMIN, N. David. *Physique des solides*. 2002.
- [Asp-09] ASPECT, Alain et INGUSCIO, Massimo. Anderson localization of ultracold atoms. *Phys. Today*, 2009, vol. 62, no 8, p. 30.
- [Aub-10] AUBRY, Monique, MÜLLER, Ralf, HOBBS, Brian, et al. Project management offices in transition. *International Journal of Project Management*, 2010, vol. 28, no 8, p. 766-778.
- [Bad-13] BADRA, BAGHDAD. La solution de l'équation de Schrödinger pour le potentiel woods-saxon dépendant du temps. 2013. Thèse de doctorat. Université Mohamed BOUDIAF de M'Sila.
- [Bao-03] BAO, Weizhu, JAKSCH, Dieter, et MARKOWICH, Peter A. Numerical solution of the Gross–Pitaevskii equation for Bose–Einstein condensation. *Journal of Computational Physics*, 2003, vol. 187, no 1, p. 318-342.
- [Bar-01] BARRETT, M. D., SAUER, J. A., et CHAPMAN, M. S. All-optical formation of an atomic Bose-Einstein condensate. *Physical review letters*, 2001, vol. 87, no 1, p. 010404.
- [Bar-74] BARIL, M. et SEPTIER, A. Piégeage des ions dans un champ quadrupolaire tridimensionnel à haute fréquence. *Revue de Physique Appliquée*, 1974, vol. 9,



- no 3, p. 525-531.
- [Bas-02] BASDEVANT, Jean-Louis, DALIBARD, Jean, et JOFFRE, Manuel. Mécanique quantique. Editions Ecole Polytechnique, 2002.
- [Bas-95] BASSER, Peter J. Inferring microstructural features and the physiological state of tissues from diffusion-weighted images. *NMR in Biomedicine*, 1995, vol. 8, no 7, p. 333-344.
- [Bat-15] BATY, Hubert. Approche numérique à l'usage du physicien pour résoudre les équations différentielles ordinaires. IV. Intégration numérique de la trajectoire d'une particule dans un potentiel central attractif, et dans un potentiel de type Hénon-Heiles. Trajectoires régulières et chaotiques. 2015.
- [Bea-09] BEAUFILS, Quentin. Condensation de Bose-Einstein du chrome et étude de collisions inélastiques dues aux interactions dipolaires. 2009. Thèse de doctorat. Paris 13.
- [Bel-03] LE BELLAC, Michel et BERS, Abraham. Physique quantique. EDP sciences, 2003.
- [Bel-16] BELTIUKOV, Iaroslav. Matrices aléatoires et propriétés vibrationnelles de solides amorphes dans le domaine terahertz. 2016. Thèse de doctorat. Montpellier.
- [Bel-94] BELITZ, D. et KIRKPATRICK, T. R. The anderson-mott transition. *Reviews of modern physics*, 1994, vol. 66, no 2, p. 261.
- [Ben-15] BENEDIKTER, Niels, DE OLIVEIRA, Gustavo, et SCHLEIN, Benjamin. Quantitative Derivation of the Gross-Pitaevskii Equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2015, vol. 68, no 8, p. 1399-1482.
- [Ben-23] BENMAHDJOUR, Hanane, YEDJOUR, Afifa, et BENMAHDJOUR, Mohammed Amin. Analytical and numerical study of diffusion and localization of cold atoms in 3D optical speckles. *Indian Journal of Physics*, 2023, vol. 97, no 1, p. 25-38.
- [Ber-08] BERGOËND, Isabelle. Etude numérique des transitions statistiques circulaire et gaussienne du speckle laser. 2008. Thèse de doctorat. Toulouse, ISAE.
- [Ber-19] BERTHET, Guillaume. Désordre et interactions dans les gaz quantiques bosoniques. 2019. Thèse de doctorat. Université Paris-Saclay (ComUE).
- [Ber-86] BERTINAT, M. P. Fluids for high temperature heat pumps. *International journal of refrigeration*, 1986, vol. 9, no 1, p. 43-50.
- [Bid-02] BIDEL, Yannick. Piégeage et refroidissement laser du strontium, Etude de l'effet des interférences en diffusion multiple. 2002. Thèse de doctorat. Université Nice Sophia Antipolis.

- [Bid-20] BIDEL, Yannick, ZAHZAM, Nassim, BRESSON, Alexandre, et al. Absolute airborne gravimetry with a cold atom sensor. *Journal of Geodesy*, 2020, vol. 94, p. 1-9.
- [Bil-10] BILLY, Juliette. Propagation quantique d'ondes de matière guidées: Laser à atomes et localisation d'Anderson. 2010. Thèse de doctorat. Université Paris Sud-Paris XI.
- [Bill-08] BILLY, Juliette, JOSSE, Vincent, ZUO, Zhanchun, et al. Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder. *Nature*, 2008, vol. 453, no 7197, p. 891-894.
- [Bit-96] BITBOL, Michel. Mécanique quantique. Une introduction philosophique. Paris: Flammarion, 1996.
- [Boc-99] BOCCARA, Monsieur Claude. Diffusion multiple et renversement du temps des ondes ultrasonores. 1999. Thèse de doctorat. Université Paris.
- [Bon-18] BONY, Jean-François, CARLES, Rémi, HÄFNER, Dietrich, et al. Scattering pour l'équation de Schrödinger en présence d'un potentiel répulsif Scattering for the Schrödinger equation with a repulsive potential.
- [Bon-19] BONGS, Kai, HOLYNSKI, Michael, VOVROSH, Jamie, et al. Taking atom interferometric quantum sensors from the laboratory to real-world applications. *Nature Reviews Physics*, 2019, vol. 1, no 12, p. 731-739.
- [Bor-14] BORRELLI, Arianna. Bose—einstein statistics. In : *Compendium of Quantum Physics*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2009. p. 74-78. des Sciences Appliquées de Toulouse, France, 2014.
- [Bou-16] BOUBAHA, Boualem. Mise en forme spatiale de faisceaux lasers. 2016. Thèse de doctorat. Faculté de Physique.
- [Bou-63] BOUCHIAT, Marie-Anne. Relaxation magnétique d'atomes de rubidium sur des parois paraffinées. *Journal de Physique*, 1963, vol. 24, no 6, p. 379-390.
- [Bra-09] BRANTUT, Jean-Philippe. Manipulation d'atomes froids dans des potentiels lumineux. 2009. Thèse de doctorat. Paris-Sud XI.
- [Brr-14] BARRETT, Brynle, GEIGER, Rémy, DUTTA, Indranil, et al. The Sagnac effect: 20 years of development in matter-wave interferometry. *Comptes Rendus Physique*, 2014, vol. 15, no 10, p. 875-883.
- [Bru-05] BRUAND, Ary et COQUET, Yves. Les sols et le cycle de l'eau. 2005.
- [Bul-85] BULKA, B. R., KRAMER, B., et MACKINNON, A. Mobility edge in the three dimensional Anderson model. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 1985, vol. 60, p. 13-17.
- [Bur-01] BURLEIGH, Mark C., MARKOWITZ, Michael A., SPECTOR, Mark S., et al. Direct synthesis of periodic mesoporous organosilicas: functional incorporation by co-condensation with organosilanes. *The Journal of Physical Chemistry B*,

2001, vol. 105, no 41, p. 9935-9942.

- [Bur-04] BURQ, Nicolas, GÉRARD, Patrick, et TZVETKOV, Nicolay. On nonlinear Schrödinger equations in exterior domains. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C*, 2004, vol. 21, no 3, p. 295-318.
- [Car-08] CARVALHO, Odile. Exploitation de la statistique du champ de speckle pour l'aide au diagnostic du syndrome cutané d'irradiation aigüe: confrontation des résultats biophysiques et biologiques. 2008. Thèse de doctorat. Paris Est.
- [Cas-96] CASTIN, Y. Refroidissement d'atomes par laser et optique atomique. In: *Collection de la Société Française d'Optique*. EDP Sciences, 1996. p. 427-463.
- [Cha-11] CHANDRASHEKAR, C. M. Disordered-quantum-walk-induced localization of a Bose-Einstein condensate. *Physical Review A*, 2011, vol. 83, no 2, p. 022320.
- [Che-06] CHEINET, Patrick. Conception et réalisation d'un gravimètre à atomes froids. 2006. Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.
- [Che-09] CHEVALLIER, Maguelonne. Bosons à basse température: des intégrales de chemin aux gaz quasi-bidimensionnels. 2009. Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.
- [Che-17] CHEMANI SOURIA, Guettar Siham. Comportement du condensat de Bose Einstein dans un piège harmonique. 2017.
- [Che-18] CHEN, J., XIAOHUI, W., HAO, W., et al. *IOP conference series: earth and environmental science*. 2018.
- [Chi-07] CHIVALLON, Christine. Retour sur la «communauté imaginée» d'Anderson. Essai de clarification théorique d'une notion restée floue. *Raisons politiques*, 2007, no 3, p. 131-172.
- [Clé-07] CLÉMENT, David. Propriétés statiques et dynamiques d'un condensat de Bose-Einstein dans un potentiel aléatoire. 2007. Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.
- [Clé-08] CLÉMENT, Jean-François. Réalisation d'un condensat de Bose-Einstein dans un piège dipolaire optique à 1565 NM. 2008. Thèse de doctorat. Université Paris Sud-Paris XI.
- [Clé-08] CLÉMENT, Jean-François. Réalisation d'un condensat de Bose-Einstein dans un piège dipolaire optique à 1565 NM. 2008. Thèse de doctorat. Université Paris Sud-Paris XI.
- [Clé-17] CLERC, Vincent. Caractérisation de milieux multiples diffusants à l'aide de corrélations dans la coda. 2017. Thèse de doctorat. Université Grenoble Alpes.
- [Coh-17] COHEN-TANNOUDJI, Claude, DIU, Bernard, et LALOË, Franck. *Mécanique quantique-Tome III: Fermions, bosons, photons, corrélations et intrication*. 2017.
- [Coh-20] COHEN-TANNOUDJI, Claude, DALIBARD, Jean, et LALOË, Franck. 3 La condensation de Bose-Einstein dans les gaz. In : *Einstein aujourd'hui*. EDP sciences, 2020. p. 87-128.

- [Con-22] CONOIR, Jean-Marc, ROHFRTSCH, Adrien, MARCHIANO, Régis, et al. Propagation d'ondes acoustiques à travers des milieux denses désordonnés et corrélés à courte et longue portées. In : 16ème Congrès Français d'Acoustique, CFA2022. 2022.
- [Cor-98] CORNELL, Eric A. et WIEMAN, Carl E. The bose-einstein condensate. *Scientific American*, 1998, vol. 278, no 3, p. 40-45.
- [Cra-10] CRAUSTE, Olivier. Étude des transitions de phases quantiques supraconducteur- isolant, métal--isolant dans des matériaux amorphes désordonnés proches de la dimension 2. 2010. Thèse de doctorat. Université Paris Sud-Paris XI.
- [Cro-09] CRONIN, Alexander D., SCHMIEDMAYER, Jörg, et PRITCHARD, David E. Optics and interferometry with atoms and molecules. *Reviews of Modern Physics*, 2009, vol. 81, no 3, p. 1051.
- [Cro-11] CROY, Alexander, CAIN, Philipp, et SCHREIBER, Michael. Anderson localization in 1D systems with correlated disorder. *The European Physical Journal B*, 2011, vol. 82, p. 107-112.
- [Cro-17] CROSNIER DE BELLAISTRE, Cécile. Conductance et étalement d'une onde quantique dans un guide unidimensionnel: effet d'une force. 2017. Thèse de doctorat. Université Paris-Saclay (ComUE).
- [Cro-96] CROONENBROEK, Thomas. Diagnostics optiques appliqués aux milieux réactifs (diffusion rayleigh, fluorescence induite par laser, absorption, analyse de la chimiluminescence,...) application aux flammes laminaires étirées à contre-courant. 1996. Thèse de doctorat. Paris 6.
- [Cub-04] CUBIZOLLES, Julien. Fermions et bosons dégénérés au voisinage d'une résonance de Feshbach: production de molécules et solitons d'ondes de matière. 2004. Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.
- [Dal-91] Dalichaouch, R., Armstrong, J. P., Schultz, S., Platzman, P. M., & McCall, S. L. (1991). Microwave localization by two-dimensional random scattering. *Nature*, 354(6348), 53-55.
- [Dal-17] DALIBARD, Jean et COHEN-TANNOUDJI, Claude. Dressed-atom approach to atomic motion in laser light: the dipole force revisited. *JOSA B*, 1985, vol. 2, no 11, p. 1707-1720.
- [Dar-05] DARQUIÉ, Benoît. Manipulation d'atomes dans des pièges dipolaires microscopiques et émission contrôlée de photons par un atome unique. These de doctorat, Université Paris XI, 2005.
- [Dar-05] DARQUIÉ, Benoît. Manipulation d'atomes dans des pièges dipolaires microscopiques et émission contrôlée de photons par un atome unique. These de doctorat, Université Paris XI, 2005.
- [Dec-80] DECARPIGNY, J. N. Application des méthodes de fonction de Green aux défauts dans les semiconducteurs. *Revue de Physique Appliquée*, 1980, vol. 15, no 3, p. 661-669.

- [Del-14] DELANDE, Dominique et ORSO, Giuliano. Mobility edge for cold atoms in laser speckle potentials. *Physical review letters*, 2014, vol. 113, no 6, p. 060601.
- [Den-18] DENECHAUD, Vincent. Vers une étude spectroscopique de la transition d'Anderson. 2018. Thèse de doctorat. Université Paris Saclay (COMUE).
- [Des-99] DESRUELLE, Bruno. Evaporation par radio-fréquence et condensation de bose-Einstein d'un gaz d'alcalins en régime de champ fort. 1999. Thèse de doctorat. Université Paris Sud-Paris XI.
- [Dou-01] DOUGHERTY, Ralph C. Molecular orbital treatment of gas-phase ion molecule collision rates: Reactive and nonreactive collisions. *Mass Spectrometry Reviews*, 2001, vol. 20, no 3, p. 142-152.
- [Eas-09] EASWARAN KOLLENGODE, Raghavan. Spectroscopy and evaporative cooling of rubidium atoms in radiofrequency dressed traps. 2009. Thèse de doctorat. Paris 13.
- [Edw-96] EDWARDS, Mark, DODD, R. J., CLARK, Charles W., et al. Properties of a Bose-Einstein condensate in an anisotropic harmonic potential. *Physical Review A*, 1996, vol. 53, no 4, p. R1950.
- [Elb-13] ELBAZ, CLAUDE. Sur les programmes d'Albert Einstein et de Louis de Broglie. Une contribution. In : *Annales de la Fondation Louis de Broglie*. 2013. p. 195.
- [Elo-18] ELOY, Aurélien. Étude des fluctuations temporelles de la lumière diffusée par des atomes froids. 2018. Thèse de doctorat. Université Côte d'Azur.
- [Erd-07] ERDŐS, László, SCHLEIN, Benjamin, et YAU, Horng-Tzer. Rigorous derivation of the Gross-Pitaevskii equation. *Physical review letters*, 2007, vol. 98, no 4, p. 040404.
- [Erd-10] ERDŐS, László, SCHLEIN, Benjamin, et YAU, Horng-Tzer. Derivation of the Gross-Pitaevskii equation for the dynamics of Bose-Einstein condensate. *Annals of mathematics*, 2010, p. 291-370.
- [Eve-08] EVERS, Ferdinand et MIRLIN, Alexander D. Anderson transitions. *Reviews of Modern Physics*, 2008, vol. 80, no 4, p. 1355.
- [Eve-11] EVELLIN, Charles. Interactions entre atomes de rubidium dans des états de Rydberg et intrication par blocage de Rydberg. 2011. Thèse de doctorat. Ecole Polytechnique X.
- [Fry-21] FRYE, Kai, ABEND, Sven, BARTOSCH, Wolfgang, et al. The Bose-Einstein condensate and cold atom laboratory. *EPJ Quantum Technology*, 2021, vol. 8, no 1, p. 1.
- [Fug-75] FUGLEDE, Bent. Sur la fonction de Green pour un domaine fin. In : *Annales de l'institut Fourier*. 1975. p. 201-206.

- [Gar-15] GARDINER, Crispin et ZOLLER, Peter. The quantum world of ultra-cold atoms and light book II: the physics of quantum-optical devices. World Scientific Publishing Company, 2015.
- [Gas-13] GASPARIAN, Vladimir et CUEVAS, Emilio. Localization length in the quasi one-dimensional disordered system revisited. Solid state communications, 2013, vol. 164, p. 11-15.
- [Gaz-80] GAZANHES, C., CALAORA, A., et CONDAT, R. Mesure de rugosité par interférométrie acoustique et corrélation de speckles. Revue de Physique Appliquée, 1980, vol. 15, no 10, p. 1553-1561.
- [Ger-88] GERMANO-FLESIA, San, et al. Localisation d'ondes classiques par le désordre. EPFL, 1988.
- [Gio-98] GIORGINI, S., PITAEVSKII, L. P., et STRINGARI, S. Anomalous fluctuations of the condensate in interacting Bose gases. Physical review letters, 1998, vol. 80, no 23, p. 5040.
- [Gol-14] GOLDMAN, Nathan, JUZELIŪNAS, G., ÖHBERG, Patrik, et al. Light-induced gauge fields for ultracold atoms. Reports on Progress in Physics, 2014, vol. 77, no 12, p. 126401.
- [Gou-48] GOUDET, Georges et VOGÉ, Jean. Rayonnement et propagation des ondes électromagnétiques de courte longueur d'onde. In Annales Des Télécommunications. Springer-Verlag, 1948. p. 233-256.
- [Gri-92] GRISON, Delphine. Atomes piégés et refroidis par laser à quelques microkelvins: un piège magnéto-optique dans une cellule de Césium et quelques applications. 1992. Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.
- [Gro-95] GROSSMANN, Siegfried et HOLTHAUS, Martin. On Bose-Einstein condensation in harmonic traps. Physics Letters A, 1995, vol. 208, no 3, p. 188-192.
- [MAK-69] MAKI, K. et GUYON, E. Effets de taille dans l'hélium superfluide-II. Étude par une méthode de fonctionnelle. Journal de Physique, 1969, vol. 30, no 1, p. 63-70.
- [Had-08] HADZIBABIC, Zoran, KRÜGER, Peter, CHENEAU, Marc, et al. The trapped two-dimensional Bose gas: from Bose–Einstein condensation to Berezinskii–Kosterlitz–Thouless physics. New Journal of Physics, 2008, vol. 10, no 4, p. 045006.
- [Her-20] HÉRITIER, Michel. Physique de la matière condensée: Des atomes froids aux supraconducteurs à haute température critique. 2020.
- [Hoa-03] HOANG, Nathalie. Développement d'un piège atomique lumineux et magnétique: Etude du régime de collisions; Perspectives pour la condensation de Bose-Einstein du césium. 2003. Thèse de doctorat. Université Paris Sud-Paris XI.

- [Hod-73] HODGES, C. H. Quantum corrections to the Thomas–Fermi approximation—the Kirzhnits method. *Canadian Journal of Physics*, 1973, vol. 51, no 13, p. 1428-1437.
- [Hsu-20] HSU, Hsiu-Chuan et CHEN, Tsung-Wei. Topological Anderson insulating phases in the long-range Su-Schrieffer-Heeger model. *Physical Review B*, 2020, vol. 102, no 20, p. 205425.
- [Hu-08] Hu, H., Strybulevych, A., Page, J. H., Skipetrov, S. E., & van Tiggelen, B. A. (2008). Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network. *Nature Physics*, 4(12), 945-948.
- [IEE-05] BALEMBOIS, F. et BARRACO, L. Relations structures-propriétés dans les lasers solides de puissance à l'ytterbium. *Elaboration et caractérisation de nouveaux matériaux et de cristaux composites soudés par diffusion*.
- [Iof-60] IOFFE, A. F. et REGEL, A. R. Non-crystalline, amorphous, and liquid electronic semiconductors. In : *Progress in semiconductors*. 1960. p. 237-291.
- [Jac-07] JACQUES, Vincent. Source de photons uniques et interférences à un seul photon. De l'expérience des fentes d'Young au choix retardé. 2007. Thèse de doctorat. École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan.
- [Jac-12] JACQMIN, Thibaut. Mesures de corrélations dans un gaz de bosons unidimensionnel sur puce. 2012. Thèse de doctorat. Paris 11.
- [Jad-21] JADUSZLIWER, Bernardo et CAMPARO, James. Past, present and future of atomic clocks for GNSS. *GPS Solutions*, 2021, vol. 25, p. 1-13.
- [Jah-10] JAHIER, Erwan et LEDUC, Michèle. *Les atomes froids*. EDP sciences, 2010.
- [Jah-20] JAHIER, Erwan. *Les atomes froids*. 2020.
- [Jai-21] JAIN, Ankit, KRAWINKEL, Thomas, SCHÖN, Steffen, et al. Performance of miniaturized atomic clocks in static laboratory and dynamic flight environments. *GPS Solutions*, 2021, vol. 25, no 1, p. 5.
- [Jal-19] JALLAGEAS, Antoine, ROMAIN, Rudy, et VERKERK, Daniel Hennequinet Philippe. *Etude des instabilités spatio-temporelles dans un piège magnéto-optique*.
- [Jav-58] JAVAN, A. Transitions à plusieurs quanta et amplification maser dans les systèmes à deux niveaux. *J. phys. radium*, 1958, vol. 19, no 11, p. 806-808.
- [Jen-12] JENDRZEJEWSKI, Fred, MÜLLER, Kilian, RICHARD, Jérémie, et al. Coherent backscattering of ultracold atoms. *Physical Review Letters*, 2012, vol. 109, no 19, p. 195302.
- [Jen-12] JENDRZEJEWSKI, Fred, BERNARD, Alain, MUELLER, Killian, et al. Three-dimensional localization of ultracold atoms in an optical disordered potential. *Nature Physics*, 2012, vol. 8, no 5, p. 398-403.
- [Jul-17] JULIEN, Alibert. Une nouvelle source pour l'interférométrie atomique avec un condensat de Bose-Einstein double espèce. 2017. Thèse de doctorat. Université

Paul Sabatier-Toulouse III.

- [kai-20] KAISER, Robin, LEDUC, Michèle, et PERRIN, Hélène. Atomes, ions, molécules ultrafroids et technologies quantiques. 2020.
- [Kat-87] KATO, Tosio. On nonlinear Schrödinger equations. In : Annales de l'IHP Physique théorique. 1987. p. 113-129.
- [Kri-15] KRISTENSEN, Tom. Quelques problèmes à petit nombre d'atomes froids dans des guides d'onde. 2015. Thèse de doctorat. Paris 6.
- [Kro-90] KROHA, J., KOPP, T., et WÖLFLE, P. Self-consistent theory of Anderson localization for the tight-binding model with site-diagonal disorder. Physical Review B, 1990, vol. 41, no 1, p. 888.
- [Kun-83] KUNZ, H. et SOUILLARD, B. The localization transition on the Bethe lattice. Journal de Physique Lettres, 1983, vol. 44, no 11, p. 411-414.
- [Lab-01] LABURTHE-TOLRA, Bruno. Atomes, molecules et plasmas ultra-froids:-transition d'un gaz de rydberg gele vers un plasma ultra-froid.-controle de collisions de photoassociation dans des schemas de resonance de feshbach et de transition raman stimulee. 2001. Thèse de doctorat. Paris 11.
- [Lac-97] LACASSAGNE, Vincent, BESSADA, Catherine, OLLIVIER, Benoît, et al. Étude de la transition solide/liquide de la cryolithe par résonance magnétique nucléaire de  $^{27}\text{Al}$ ,  $^{23}\text{Na}$  et  $^{19}\text{F}$ . Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy, 1997, vol. 325, no 2, p. 91-98.
- [Lec-20] LECOUTRE, Baptiste. Transport quantique d'atomes ultra-froids en milieu désordonné: Temps de diffusion élastique et fonctions spectrales. 2020. Thèse de doctorat. Université Paris-Saclay.
- [Lee-11] LEE, Jongmin. Collective Atom-Cavity Interactions in a High-Finesse Dual-Wavelength Cavity. Stanford University, 2011.
- [Lem-09] LEMARIÉ, Gabriel. Transition d'Anderson avec des ondes de matière atomiques. 2009. Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.
- [Les-16] LESEUR, Olivier. Diffusion, localisation et absorption de lumière en milieux désordonnés. Impact des corrélations spatiales du désordre. 2016. Thèse de doctorat. Paris 6.
- [Lev-00] LEVY, Jérôme. La congélation par relâchement de pression appliquée à des émulsions H/E. Etude de la cinétique, du diagramme de phases et de la microscopie. 2000. Thèse de doctorat. Montpellier 2.
- [Lew-07] LEWENSTEIN, Maciej, SANPERA, Anna, AHUFINGER, Veronica, et al. Ultracold atomic gases in optical lattices: mimicking condensed matter physics and beyond. Advances in Physics, 2007, vol. 56, no 2, p. 243-379.
- [Lou-93] LOUNIS, Brahim. Atomes refroidis par laser: de la mélasse au cristal optique. 1993. Thèse de doctorat. Université Paris Sud-Paris XI.



- [Lux-93] LUX, F. Models proposed to explain the electrical conductivity of mixtures made of conductive and insulating materials. *Journal of materials science*, 1993, vol. 28, p. 285-301.
- [Mar-21] MARTIN, Simon. Conductivité pour des fermions de Dirac près d'un point critique quantique. 2021.
- [Mar-57] MARCH, N. H. The Thomas-Fermi approximation in quantum mechanics. *Advances in Physics*, 1957, vol. 6, no 21, p. 1-101.
- [Mel-04] MELENTIEV, P. N., BORISOV, P. A., et BALYKIN, V. I. Zeeman laser cooling of 85 Rb atoms in transverse magnetic field. *Journal of experimental and theoretical physics*, 2004, vol. 98, p. 667-677.
- [Men-77] MENU, M. et ROBLIN, Madame ML. Détermination de rugosité par corrélation des speckles dans l'image de la surface diffusante. *Optics Communications*, 1977, vol. 21, no 3, p. 355-360.
- [Mie-17] MIERZEJEWSKI, Marcin, GIERGIEL, Krzysztof, et SACHA, Krzysztof. Many-body localization caused by temporal disorder. *Physical Review B*, 2017, vol. 96, no 14, p. 140201.
- [Moa-06] MOAL, Steven. Photoassociation à 2 photons de l'hélium métastable ultrafroid. 2006. Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.
- [Mod-10] MODUGNO, Giovanni. Anderson localization in Bose-Einstein condensates. *Reports on progress in physics*, 2010, vol. 73, no 10, p. 102401.
- [Mos-00] MOSKALENKO, Svâtoslav Anatol'evič, MOSKALENKO, S. A., et SNOKE, D. W. Bose-Einstein condensation of excitons and biexcitons: and coherent nonlinear optics with excitons. Cambridge University Press, 2000.
- [Mot-68] MOTT, Nevill F. Metal-insulator transition. *Reviews of Modern Physics*, 1968, vol. 40, no 4, p. 677.
- [Mug-97] MUGUR-SCHÄCHTER, Mioara. Les leçons de la mécanique quantique: vers une épistémologie formelle. *Le débat*, 1997, no 1, p. 169-192.
- [Muk-81] MUKHERJEE, Suproakash. Lippmann-schwinger equation. *Pramana*, 1981, vol. 16, p. 81-89.
- [Mul-97] MULLIN, W. J. Bose-Einstein condensation in a harmonic potential. *Journal of low temperature physics*, 1997, vol. 106, no 5-6, p. 615-641.
- [Nar-07] NAREVICIUS, E., PARTHEY, C. G., LIBSON, A., et al. Towards magnetic slowing of atoms and molecules. *New Journal of Physics*, 2007, vol. 9, no 4, p. 96.
- [Nir-07] NIRRENGARTEN, Thomas. Piégeage magnétique d'atomes de Rubidium au voisinage d'une surface supraconductrice. 2007. Thèse de doctorat. Paris 6.
- [Ohn-87] OHNO, M. MANY-BODY THEORY OF MULTIPLE CORE HOLE. *Le Journal de Physique Colloques*, 1987, vol. 48, no C9, p. C9-505-C9-508.

- [Pet-00] PETIT, Nathalie. Conductivité optique de matériaux nouveaux. 2000. Thèse de doctorat. Tours.
- [Pfe-12] PFEUTY, P. THÉORIE DES PHÉNOMÈNES CRITIQUES. Le Journal de Physique Colloques, 1976, vol. 37, no C1, p. C1-203-C1-212.
- [Phi-98] PHILLIPS, William D. Nobel Lecture: Laser cooling and trapping of neutral atoms. Reviews of Modern Physics, 1998, vol. 70, no 3, p. 721.
- [Pie-03] PIEDERRIERE, Yann. Etude du speckle de milieux diffusants liquides. Application à la détermination de paramètres biophysiques. 2003. Thèse de doctorat. Université de Bretagne occidentale-Brest.
- [Pir-12] PIRAUD, Marie. Localisation d'Anderson d'ondes de matière dans un désordre corrélé: de 1D à 3D. 2012. Thèse de doctorat. Paris 11.
- [Pir-13] PIRAUD, Marie, PEZZÉ, Luca, et SANCHEZ-PALENCIA, Laurent. Quantum transport of atomic matter waves in anisotropic two-dimensional and three-dimensional disorder. New Journal of Physics, 2013, vol. 15, no 7, p. 075007..
- [Poi-98] POIROT, Gilles. Modèle d'Anderson à faible désordre. 1998. Thèse de doctorat. Palaiseau, Ecole polytechnique.
- [Pol-15] POLO, J., AHUFINGER, V., MASON, P., et al. Analysis beyond the Thomas-Fermi approximation of the density profiles of a miscible two-component Bose-Einstein condensate. Physical Review A, 2015, vol. 91, no 5, p. 053626.
- [Pot-20] POTTIER, Noëlle. Physique statistique hors d'équilibre: Processus irréversibles linéaires. 2020.
- [Pot-73] POTIER, Antoine et ROUSSELET, Daniel. Conductivité électrique et diffusion du proton dans le perchlorate d'oxonium. Journal De Chimie Physique, 1973, vol. 70, p. 873-878.
- [Pot-74] POTTIER, N. et CALECKI, D. DENSITÉ D'ÉTATS ÉLECTRONIQUES ET FLUCTUATIONS LOCALES DE CONCENTRATION DANS LES ALLIAGES BINAIRES DÉSORDONNÉS. Le Journal de Physique Colloques, 1974, vol. 35, no C4, p. C4-103-C4-107.
- [Raj-11] RAJENDRAN, S., LAKSHMANAN, M., et MURUGANANDAM, P. Matter wave switching in Bose–Einstein condensates via intensity redistribution soliton interactions. Journal of mathematical physics, 2011, vol. 52, no 2, p. 023515.
- [Rav-92] RAVY, S., POUGET, J. P., et COMES, R. Destructive interferences between diffuse scatterings due to disorder and displacive modulation (X-ray “white line” effect). Journal de Physique I, 1992, vol. 2, no 6, p. 1173-1190.
- [Rei-08] REINAUDI, Gael. Manipulation et refroidissement par évaporation forcée d'ensembles atomiques ultra-froids pour la production d'un jet intense dans le régime de dégénérescence quantique: vers l'obtention d'un " laser à atomes continu". 2008. Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.
- [Rem-09] REMOVILLE, Sébastien. Vers une mémoire quantique dans des ions piégés. 2009. Thèse de doctorat. Paris 7.

- [Ren-20] REN, Wei, LI, Tang, QU, Qiuzhi, et al. Development of a space cold atom clock. *National Science Review*, 2020, vol. 7, no 12, p. 1828-1836.
- [Ren-05] RENARD, Vincent. Corrections quantiques à la conductivité dans les systèmes d'électrons bidimensionnels: effet de l'interaction électron-électron. 2005. Thèse de doctorat. Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse.
- [Ric-15] RICHARD, Jérémie. Propagation d'atomes ultra-froids en milieu désordonné- Étude dans l'espace des impulsions de phénomènes de diffusion et de localisation. 2015. Thèse de doctorat. Université Paris Saclay (COMUE).
- [Ric-93] RICORT, Gilbert, LANTERI, Henri, AIME, Claude, et al. Sur l'ordre d'analyse d'une structure de speckles en astronomie a haute resolution angulaire. In : 14e colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images. 1993.
- [Rob-01] ROBERT, Alice. Réalisation d'un condensat de Bose-Einstein d'atomes d'hélium métastable. 2001. Thèse de doctorat. Université Paris Sud-Paris XI.
- [Rom-13] ROMAIN, Rudy. Dynamique spatio-temporelle dans un piège magnéto-optique. 2013. Thèse de doctorat. Université de Lille1.
- [Ruf-93] RUFFET, Clotilde. La conductivité électrique complexe dans quelques roches cristallines. 1993. Thèse de doctorat. Strasbourg 1.
- [Sal-14] SALOMON, Guillaume. Production tout optique de condensats de Bose-Einstein de 39K: des interactions contrôlables pour l'étude de gaz quantiques désordonnés en dimensions réduites. 2014. Thèse de doctorat. Palaiseau, Institut d'optique théorique et appliquée.
- [Sal-18] SALETTES, Lionel. Analyse de quelques problèmes de conductivité avec changement de signe. 2018. Thèse de doctorat. Université Grenoble Alpes (COMUE).
- [Sch-10] SCHWOB, Catherine et JULIEN, Lucile. Le laser: principe de fonctionnement. *Revue de la physique*, 2010, no 21, p. 12-16.
- [Sch-21] SCHRECK, Florian et DRUTEN, Klaasjan van. Laser cooling for quantum gases. *Nature Physics*, 2021, vol. 17, no 12, p. 1296-1304.
- [Sch-99] SCHÄFER, Steffen et SCHUCK, Peter. Dyson equation approach to many-body Green's functions and self-consistent RPA: Application to the Hubbard model. *Physical Review B*, 1999, vol. 59, no 3, p. 1712.
- [Sha-12] SHAPIRO, Boris. Cold atoms in the presence of disorder. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2012, vol. 45, no 14, p. 143001.
- [Sig-19] SIGNOLES, Adrien, LECOUTRE, Baptiste, RICHARD, Jérémie, et al. Ultracold atoms in disordered potentials: elastic scattering time in the strong scattering regime. *New Journal of Physics*, 2019, vol. 21, no 10, p. 105002.
- [Ski-10] SKIPETROV, Sergey E., VAN TIGGELEN, B., et PAGE, John H. La localisation forte d'Anderson des ondes classiques. *Images de la physique* 2009, 2010, p. 75-80.
- [Smi-11] SMITH, Robert P., CAMPBELL, Robert LD, TAMMUZ, Naaman, et al. Effects of interactions on the critical temperature of a trapped Bose gas. *Physical review*

- letters, 2011, vol. 106, no 25, p. 250403.
- [Stö-06] STÖRZER, Martin, GROSS, Peter, AEGERTER, Christof M., et al. Observation of the critical regime near Anderson localization of light. *Physical review letters*, 2006, vol. 96, no 6, p. 063904.
- [Tin-21] TINO, Guglielmo M. Testing gravity with cold atom interferometry: results and prospects. *Quantum Science and Technology*, 2021, vol. 6, no 2, p. 024014.
- [Tol-95] TOLLETT, Jeffrey John, BRADLEY, C. C., SACKETT, C. A., et al. Permanent magnet trap for cold atoms. *Physical Review A*, 1995, vol. 51, no 1, p. R22.
- [Tri-13] TRIMECHE, Azer. Décélération Zeeman-Stern Gerlach d'un jet supersonique de particules paramagnétiques par une onde de champ magnétique progressive. 2013. Thèse de doctorat. Paris 11.
- [Tri-77] TRIBILLON, G. Sur quelques methodes de speckle en métrologie. *Optica Acta: International Journal of Optics*, 1977, vol. 24, no 8, p. 877-891.
- [Tun-10] TUNG, S., LAMPORESI, G., LOBSER, D., et al. Observation of the presuperfluid regime in a two-dimensional Bose gas. *Physical review letters*, 2010, vol. 105, no 23, p. 230408.
- [Vai-00] VAINIKKO, Gennadi. Fast solvers of the Lippmann-Schwinger equation. *Direct and inverse problems of mathematical physics*, 2000, p. 423-440.
- [Van-03] VANHAECKE, Nicolas. Molécules froides: formation, piégeage et spectroscopie.-Accumulation de dimères de césium dans un piège quadrupolaire magnétique.-Spectroscopie par frustration de photoassociation. 2003. Thèse de doctorat. Ecole Polytechnique X.
- [Viv-07] VIVES GILABERT, Yolanda. Modélisation des émissions rayonnées de composants électroniques. 2007. Thèse de doctorat. Rouen.
- [Vol-80] VOLLHARDT, Dieter et WÖLFLE, Peter. Diagrammatic, self-consistent treatment of the Anderson localization problem in  $d \leq 2$  dimensions. *Physical Review B*, 1980, vol. 22, no 10, p. 4666
- [Vol-18] VOLCHKOV, Valentin V., PASEK, Michael, DENECHAUD, Vincent, et al. Measurement of spectral functions of ultracold atoms in disordered potentials. *Physical Review Letters*, 2018, vol. 120, no 6, p. 060404.
- [Waf-99] WAFFENSCHMIDT, S., PFLEIDERER, C., et LÖHNEYSSEN, H. v. Critical behavior of the conductivity of Si: P at the metal-insulator transition under uniaxial stress. *Physical review letters*, 1999, vol. 83, no 15, p. 3005.
- [Wai-99] WAIN TAL, Xavier. Effet de l'interaction coulombienne sur la localisation d'Anderson dans des systèmes de basses dimensions. 1999. Thèse de doctorat. Palaiseau, Ecole polytechnique.
- [WEA-90] WEAVER, Richard L. Anderson localization of ultrasound. *Wave motion*, 1990, vol. 12, no 2, p. 129-142.

- [Wie-97] WIERSMA, Diederik S., BARTOLINI, Paolo, LAGENDIJK, Ad, et al. Localization of light in a disordered medium. *Nature*, 1997, vol. 390, no 6661, p. 671-673.
- [Wie-99] WIEMAN, Carl E., PRITCHARD, David E., et WINELAND, David J. Atom cooling, trapping, and quantum manipulation. *Reviews of Modern Physics*, 1999, vol. 71, no 2, p. S253.
- [Wil-17] WILLIAMS, H. J., TRUPPE, S., HAMBACH, M., et al. Characteristics of a magneto-optical trap of molecules. *New Journal of Physics*, 2017, vol. 19, no 11, p. 113035.
- [Wil-97] WILKOWSKI, David. Dynamics of a cold atoms cloud in a magneto-optical trap. Université de Lille I, 1997.
- [Win-79] WINELAND, David J. et ITANO, Wayne M. Laser cooling of atoms. *Physical Review A*, 1979, vol. 20, no 4, p. 1521.
- [Whi-20] WHITE, Donald H., HAASE, Thomas A., BROWN, Dylan J., et al. Observation of two-dimensional Anderson localisation of ultracold atoms. *Nature communications*, 2020, vol. 11, no 1, p. 4942.
- [Wol-25] WOLFERS, Frithiof. Sur un nouveau phénomène en optique; interférences par diffusion. *J. Phys. Radium*, 1925, vol. 6, no 11, p. 354-368.
- [Yed-10] YEDJOUR, Afifa et VAN TIGGELEN, B. A. Diffusion and localization of cold atoms in 3D optical speckle. *The European Physical Journal D*, 2010, vol. 59, p. 249-255.
- [Yed-17] YEDJOUR, A., BAHLOULI, S., DOUMI, B., et al. Self-energy of cold atoms in a long-range disordered optical potential. *Journal of Computational Electronics*, 2017, vol. 16, p. 18-23.
- [Yed-20] AFIFA, Yedjour, ALLEL, Mokaddem, et DOUMI, Bendouma. Effect of Disorder Amplitude on the Transport of Bose Einstein Condensates at Lowest Energy. *International Journal of Theoretical Physics*, 2020, vol. 59, no 12, p. 3840-3851.
- [Yed-22] YEDJOUR, Afifa, BENMAHDJOUR, Hanane, et BOUDJEMÂA, Abdelâali. Dynamic evolution of expanding Bose–Einstein condensates in the presence of a three-dimensional random optical speckle potential. *Physica Scripta*, 2022, vol. 97, no 2, p. 025401.
- [Yed-A-23] YEDJOUR, Afifa et BOUDJEMÂA, Abdelâali. Anisotropy effects on the quantum transport of atomic matter waves. *Physica Scripta*, 2023, vol. 98, no 4, p. 045404.
- [Yed-B-23] YEDJOUR, Afifa et BOUDJEMAA, Abdelaali. Quantum localization corrections from the Bethe–Salpeter equation. *Physica B: Condensed Matter*, 2023, vol. 654, p. 414683.
- [Yed-11] YEDJOUR, Afifa. Etude de l'effet d'une perturbation extérieure dans un alliage binaire et l'effet de l'influence de la distribution sur les propriétés électroniques: Application sur les alliages binaires et ternaires. 2011. Thèse de doctorat. Université des Sciences et de La Technologie d'Oran.
- [Zha-05] ZHAO, Ji-Cheng. The diffusion-multiple approach to designing alloys. *Annu. Rev. Mater. Res.*, 2005, vol. 35, p. 51-73.

- [Zlo-21] ZLOSHCHASTIEV, Konstantin G. Acoustic oscillations in cigar-shaped logarithmic Bose–Einstein condensate in the Thomas–Fermi approximation. *International Journal of Modern Physics B*, 2021, vol. 35, no 22, p. 2150229.

## Annexe

### Transport des atomes froid dans le champ de speckle à 3D

Le modèle de la self énergie nécessite un algorithme afin d'effectuer l'intégration fonctionnelle dans les équations (III.63) et (III.64). Cet algorithme est développé en utilisant la méthode numérique "Simpson" dans un code écrit en langage "Fortran 90". L'équation de la self énergie peut être définie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Re}(\Sigma(\varepsilon, k)) = \frac{2U\xi^2}{\pi} \int_0^\infty dk' \text{Re}_{F_s}(\varepsilon, k, k') \\ \quad = \frac{2U\xi^2}{\pi} \int_0^\infty dk' k'^2 \frac{I(k, k')(\varepsilon - \varepsilon_{k'})}{(\varepsilon - \varepsilon_{k'})^2 + \alpha^2} \\ \text{Im}(\Sigma(\varepsilon, k)) = \frac{2U\xi^2}{\pi} \int_0^\infty dk' \text{Im}_{F_s}(\varepsilon, k, k') \\ \quad = \frac{2U\xi^2}{\pi} \int_0^\infty dk' k'^2 \frac{-I(k, k')\alpha}{(\varepsilon - \varepsilon_{k'})^2 + \alpha^2} \end{array} \right. , \quad (\text{A.1})$$

D'autre part, l'intégration de la fonction est effectuée par une fréquence d'échantillonnage  $f_s$  de 1MHz. Pour cette étude analytique, la partie réelle de la self énergie " $\text{Re}(\Sigma(\varepsilon, k))$ " est manipulée pour évaluer le déplacement d'énergie, tandis que la partie imaginaire " $\text{Im}(\Sigma(\varepsilon, k))$ " est calculée pour étudier la diffusion des atomes froids.

Les intégrations sont effectuées en utilisant la méthode de Simpson suivante :

$$\int_0^\infty dk' F_s(\varepsilon, k, k') = \left( \frac{b-a}{n} \right) (S_a + 2S_{\text{even}} + 4S_{\text{odd}} + S_b) , \quad (\text{A.2})$$

Avec,  $(b-a)/N$  est le temps d'échantillonnage. De plus,  $S_{\text{even}}$  et  $S_{\text{odd}}$  représentent la somme des fonctions de  $\text{Imag}_{F_s}$  et de  $\text{Real}_{F_s}$  lorsque les valeurs du temps d'échantillonnage sont paires et impaires, respectivement.

Les valeurs de  $S_{\text{even}}$  et de  $S_{\text{odd}}$  peuvent être données par l'équation globale ci-dessous:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{\text{even}} = \sum_{m=1}^{n/2-1} F_s(\varepsilon, k, k') \quad \text{for: } j = 2m, m \in \mathbb{N} - \{0\} \\ S_{\text{odd}} = \sum_{m=0}^{n/2} F_s(\varepsilon, k, k') \quad \text{for: } j = 2m + 1, m \in \mathbb{N} \end{array} \right. , \quad (\text{A.3})$$

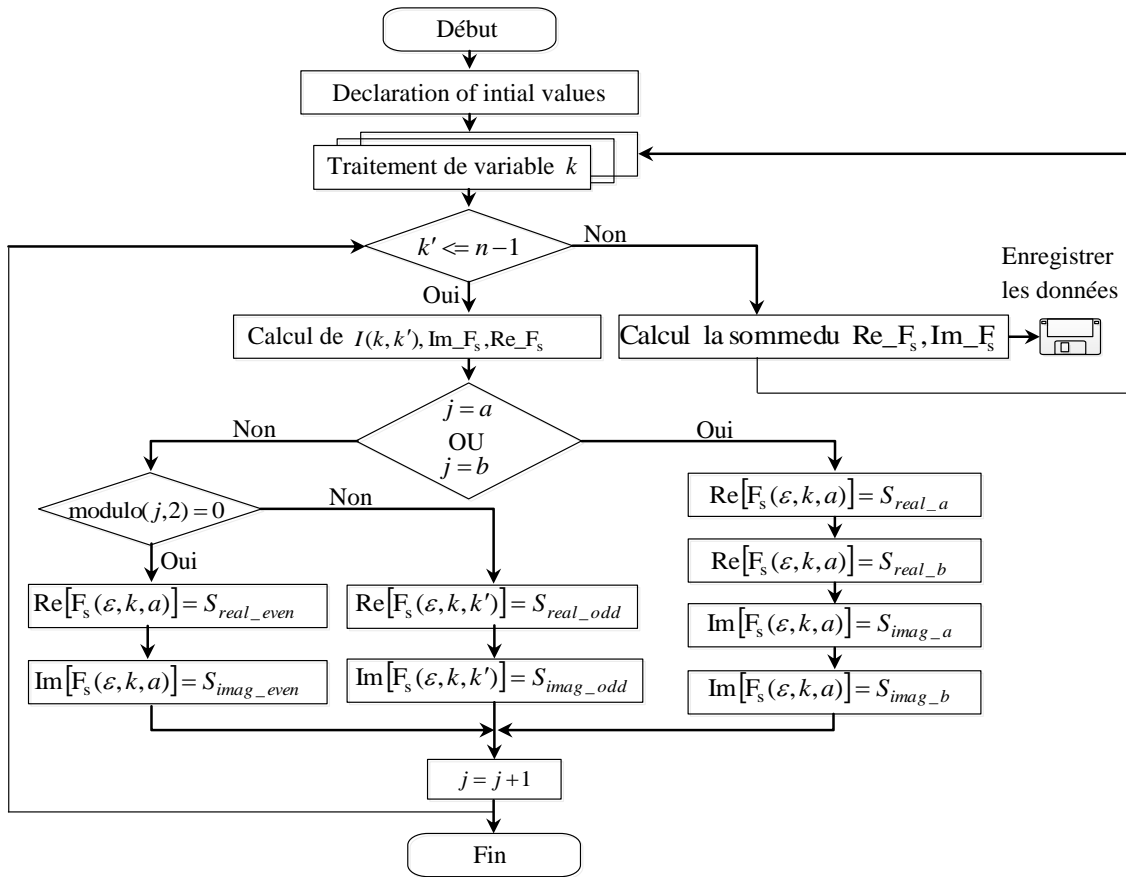


Figure A.1. Algorithme de calcul de la self énergie.



## " التشتت المتعدد لموجات المادة عند درجات حرارة منخفضة في احتمالية البقع خارج المصيدة التوافقية "

الملخص:

الهدف الرئيسي من هذا العمل البحثي لأطروحة الدكتوراه هو دراسة التحديات المستدامة في النقل الكمي للذرات الباردة. تسعى هذه الدراسة إلى المساهمة في فهم عملية انتشار الذرات الباردة في حقل متشتت ثلاثي الأبعاد. في هذا العمل، تمت مناقشة ثلاث دراسات. الدراسة الأولى تتعلق بدراسة سلوك موجة المادة في حالات الانتشار الفردي والمتعدد. أما الثانية فتتجلى في فهم تأثير الكميات الكمومية على انتشار موجات المادة في نظام مضطرب ثلاثي الأبعاد. وبالنسبة للدراسة الثالثة، فهي تركز على تقدير حركة الحافة، والعدد الحرج لموجة المادة، والشدة الحرجة للاضطراب أثناء انتقال موجات المادة في الوسط المضطرب.

كلمات مفتاحية: النقل الكمي، الذرات الباردة، التمرکز والتشتت، انتقال اندرسون، بقعة بصرية مضطربة.

### « Diffusion multiples des ondes de matière à basse température dans un champ de speckle en dehors d'un piège harmonique »

#### Résumé :

L'objectif principal des travaux de recherche de cette thèse de doctorat est d'étudier les défis real dans le transport quantique des atomes froids. Cette étude cherche à comprendre le processus de la propagation des atomes froids dans un champ de speckle tridimensionnels. Dans ce travail, trois études sont abordées. La première concerne l'étude du comportement de l'onde de matière dans les cas de diffusion simple et multiple. La deuxième s'intéresse à comprendre l'effet des grandeurs quantiques sur la propagation des ondes de matière dans un système désordonné tridimensionnels. La troisième se focalise autour de l'énergie critique, du nombre critique de l'onde de matière, de l'intensité critique du désordre pendant la transition des ondes de matière dans le milieu désordonné.

**Mots clés :** Transport quantique, Atomes froids, localisation-diffusion, transition d'Anderson, potentiel optique désordonné.

### « Multiple scattering of matter waves at low temperatures in a speckle potential outside a harmonic trap »

#### Abstract:

The research work of this doctoral thesis deals with the study of the sustainable challenge in the quantum transport of cold atoms. Indeed, the main contribution of this work is to study the scattering of cold atoms in a three-dimensional optical speckle. In this work, three studies are discussed. The first concerns the study of the matter wave behavior in the cases of single and multiple scattering. The second is interested in understanding the effect of quantum quantities on the matter waves scattering in a disordered three-dimensional system. The third deals with the estimation of the edge mobility, the critical number of the matter wave, the critical intensity of the disorder during the transition of the matter waves in the optical speckle.

**Key words:** Quantum transport, Cold atoms, Localization-diffusion, Anderson transition, disordered optical speckle.