

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche**  
**Scientifique**  
**Université Hassiba Ben Bouali – Chlef**

**Faculté de Technologie**  
**Departement Tron Commun Siences et Technologies**



**Polycopie de cours**

**Physique 1**  
**Mécanique du Point Matériel**

Destiné aux étudiants  
de la 1ère année LMD ST et SM

**Réalisé par :**

**Dr FODIL MERIEM**

**Année Universitaire : 2024/2025**

# SOMMAIRE

## RAPPEL MATHEMATIQUE

### 1-Mesure et précision des grandeurs physiques

1.1-Introduction.....	02
1.2-Mesure d'une Grandeurs Physiques.....	02
1.3-Equations aux Dimensions.....	04
1.4-Précision Des Mesures.....	05
<b>2- Calcul vectoriel.....</b>	<b>07</b>
2.1-Introduction.....	07
2.2-Scalaire et vecteurs.....	07
2.3-Vecteurs .....	07
2.4-Addition de vecteur.....	08
2.5-Composante d'un vecteur.....	12
2.6-Produit scalaire.....	13
2.7-Produit vectoriel.....	15
2.8-Produit mixe.....	17
2.9-Dérivés des fonctions vectorielles.....	18
2.10-Différentiation vectorielle .....	19
2.12-Champs scalaires et vectoriels.....	20

## CHAPITRE I : CINEMATIQUE

<b>1-Introduction .....</b>	<b>22</b>
1.1-Notion de mouvement .....	22
1.2-Référentiel .....	22
1.3-Repère d'espace.....	22
1.4-Le Point matériel ou particule.....	22
<b>2-Système de coordonnées .....</b>	<b>23</b>
2.1-Coordonnées cartésiennes $M(x, y, z)$ .....	23
2.1-1-Définition.....	23
2.1-2-Vecteur déplacement élémentaire.....	24
2.1-3-Surface et volume élémentaires.....	25
2.2-4-Coordonnées cylindrique $M(\rho, \theta, z)$ .....	25
2.2-1-Relation entre les coordonnées $(x, y, z)$ et $(\rho, \theta, z)$ de $M$ .....	26
2.2-2-Relations entre les vecteurs de base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .....	27

2.2-3-Vecteur déplacement élémentaire .....	28
2.2-4-Surface et volume élémentaires.....	28
2.3-Coordonnées polaires $M(\rho, \theta)$ .....	29
2.4-Coordonnées sphérique $M(r, \theta, \varphi)$ .....	30
2.4-1-Relations entre les vecteurs de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .....	31
2.4-2-Relations entre les coordonnées $(x, y, z)$ et $(r, \theta, \varphi)$ .....	33
2.4-3-Vecteur déplacement élémentaire .....	33
2.4-4-Surface et volume élémentaires.....	34
<b>3-Grandeurs cinématiques</b> .....	34
3.1-Définitions .....	34
3.2-Vecteur vitesse .....	34
3-2-1-Vitesse moyenne .....	35
3-2-2-Vitesse instantanée .....	35
3-2-3-Vitesse algébrique .....	35
3.3-Vecteur accélération.....	35
3-3-1-Accélération moyenne .....	36
3-3-2-Accélération instantanée .....	36
<b>4-Expression des grandeurs Cinématique dans le système des coordonnées</b>	
4.1-Expression des grandeurs Cinématique dans la base Coordonnées cartésiennes $(x, y, z)$ .....	36
4.2- Expression des grandeurs Cinématique dans la base Coordonnées cylindrique $(\rho, \theta, z)$ .....	37
4.3-Expression des grandeurs Cinématique dans la base Coordonnées sphérique $(r, \theta, \varphi)$ .....	39
4.4-Expression des grandeurs Cinématique dans la base de Serret-Frenet.....	40
<b>5-Etude des mouvements du point matériel</b> .....	41
5.1-Mouvement Rectiligne .....	41
5.1.1-Mouvement rectiligne particuliers .....	45
5.1.2-Mouvement accéléré et retardé .....	46
5.1.3-Représentations vectorielle de la vitesse et de l'accélération dans u mouvement rectiligne .....	47
5.2-Mouvement curviligne .....	48
5.2.1-Accélération tangentielle et normale .....	53
5.2.2-Vecteur vitesse angulaire .....	58
5.2.3-Vecteur d'accélération angulaire .....	60
<b>6-Mouvement relatif</b> .....	62
6.1-Introduction.....	62
6.2-Vitesse relative .....	63
6.3-Mouvement relatif uniforme de translation .....	64
6.4-Mouvement relatif uniforme de rotation .....	68

## CHAPITRE II :DYNAMIQUE

<b>1-Introduction</b> .....	72
<b>2-concept de force</b> .....	72
2-1- Notion de force .....	72
2-2-Interactions fondamentale.....	73
<b>3- La quantité de mouvement</b> .....	73
3-1-Définition.....	73
3-2-Principe de conservation de la quantité de mouvement .....	74
<b>4- Les lois de Newton</b> .....	76
4-1-Introduction.....	76
4-2-La première loi de Newton : le principe d'inertie.....	76
2-2-1: Enoncé de principe .....	77
2-2-2 - la quantité de matière : masse d'inertie.....	76
4-3-Deuxième loi de Newton pour le point matériel .....	77
4-4-Troisième loi de Newton .....	79
<b>5- Autres Forces</b> .....	79
5-1 la notion de force .....	79
5-2- Les forces en électromagnétisme.....	79
5-2-1.Force de Coulomb.....	79
5-2-2.Champ électrique .....	80
5-2-3.Force de Lorenz .....	80
5-3- Modèles de forces de frottement.....	80
5.3-1.Les frottement secs .....	81
5-3-2.Frottement avec glissement .....	82
5-3-3.les frottement visqueux .....	82
<b>6- Moment cinétique et moment de force</b> .....	83
6-1-Moment de force.....	83
6-2 -Le moment cinétique .....	85

## CHAPITRE III : TRAVAIL, PUISSANCE ET ENERGIE D'UNE PARTICULE

<b>1-Introduction</b> .....	89
<b>2-Travail</b> .....	89
<b>3-Puissance</b> .....	92
<b>4-Unité de travail et de puissance</b> .....	92
<b>5-Energie cinétique</b> .....	93
<b>6-Travail d'une force constante en grandeur et direction</b> .....	94
<b>7-Energie potentielle</b> .....	96
<b>8-Conservation de l'énergie d'une particule</b> .....	100
<b>9-Force ne dérivant pas d'un potentiel</b> .....	101
<b>Exercices corrigés</b> .....	103

## **Introduction :**

Le présent polycopié du cours sur la cinématique et la dynamique du point matériel appuyé de quelques exercices, est destiné aux étudiants de la première année des sciences et technologies. Il s'agit d'étudier le mouvement des corps matériels en fonction du temps (la cinématique), et les forces qui provoquent ou modifient leur mouvement (la dynamique). Ce manuscrit est subdivisé comme suit :

La première partie est réservée à la cinématique du point matériel, par un précédé qui consiste en un rappel mathématique sur mesure des grandeurs physiques et de l'analyse vectorielle qui sont nécessaire pour exprimer les lois physiques.

La deuxième partie fera l'objet de l'étude de la dynamique.

La troisième partie de ce polycopié vise le volet travail et énergie, lesquels nous mèneront à faire toute la lumière sur les relations entre les mouvements et leurs causes.

À la fin de ce polycopié, nous vous proposons quelques exercices corrigés pour une meilleure appréhension et une maîtrise du sujet

# RAPPEL MATHÉMATIQUE

---

## 1.1-Introduction :

La physique est une science consacrée à l'étude de phénomènes naturels allant de l'infiniment grand (mouvement des planètes) à l'infiniment petit (fonctionnements des génétiques).

Chaque phénomène est décrit par une grandeur appelée grandeur physique dont l'évolution obéit à des lois physiques bien établies. Ainsi l'observation et l'analyse de tout phénomène doivent aboutir à des informations quantitatives et la mesure de certaines grandeurs appropriées.

## 1.2. Mesure D'une Grandeur Physique :

Mesurer une grandeur physique c'est lui associer un nombre comparé à une quantité, de même nature que la grandeur à mesurer, prise comme référence est appelée **unité**.

### 1.2.a Grandeurs et unités fondamentales :

Il existe quatre grandeurs fondamentales indépendantes en mécanique :

LONGEUR

MASSE

TEMPS

CHARGE

Des grandeurs dérivées se déduisent des grandeurs fondamentales à partir de leur équation de définition, comme par exemple le travail, l'énergie,....

Le système d'unités fondamentales est le système international qu'on note **M** (mètre) **K** (kilogramme) **S** (seconde) **C** (coulomb) .

**Le mètre (m)** est l'unité de longueur ; pendant longtemps, son étalon a été la longueur d'une barre de platine conservée au bureau international des poids et mesures de Sèvres. Actuellement, le mètre étalon est défini comme égal à 1650763.73 fois la longueur d'onde de la radiation monochromatique orange émise par l'isotope <sup>86</sup>du krypton.

Le mètre est aussi la distance parcourue par la lumière dans le vide en une durée égale à 1/C seconde avec  $C = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

# RAPPEL MATHEMATIQUE

---

**Le Kilogramme (Kg)** est l'unité de masse ; c'est la masse d'un cylindre de platine conservé à Sèvres .Récemment on a défini un étalon atomique :le Kg est égal à la masse de  $5,0188.10^{23}$  atomes de l'isotope  $^{12}\text{C}$ .

**La Seconde (s)** est l'unité de temps, c'est la fraction  $1/86400$  partie du jour solaire moyen .On la définit aussi comme étant le temps nécessaire à l' atome d'azote pour effectuer  $2,387.10^{10}$  oscillations dans la molécule d'ammoniac  $\text{NH}_3$

La seconde est aussi la durée de  $9.192.631.770$  périodes de radiation correspondant la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de Césium 133.

**Le Coulomb (C)** est l'unité de la charge électrique ; il est égal à la charge négative contenue dans  $6.2418.10^{18}$  électrons .Le système MKSA est souvent aussi utilisé L'ampère (A) ou est l'unité de mesure de l'intensité électrique I qui n'est autre que la charge écoulee par unité de temps .c'est souvent le courant électrique est choisi comme grandeur fondamentale à la place de la charge électrique

Avant l'adoption du système MKSA, un autre système dans lequel la longueur se mesurait en centimètre, la masse en gramme et le temps en seconde existait déjà , c'est le system CGS .

Le system le plus utilisé aujourd'hui est le système international (SI).Il est constitué du système MKSA et complété par trois autres unités fondamentales :

- la candela (Cd)** , l'unité de mesure de l'intensité lumineuse
- le degré Kelvin (K)**, l'unité de mesure de la température
- **mole (N)** , l'unité de quantité de matière

## 1.2. b- Multiples et sous multiples des unités fondamentales :

Ils sont désignés par des préfixes et représentés par les symboles suivants :

	Grandeur	Préfixe	Symbole
		Unité fondamentale	
multiples	$10^1$	déca	da
	$10^2$	hecto	k
	$10^3$	kilo	K

## RAPPEL MATHEMATIQUE

	10 <sup>6</sup>	méga	M
	10 <sup>9</sup>	giga	G
	10 <sup>12</sup>	téra	T
Sous multiples	10 <sup>-1</sup>	déci	d
	10 <sup>-2</sup>	centi	c
	10 <sup>-3</sup>	Mili	m
	10 <sup>-6</sup>	Micro	μ
	10 <sup>-9</sup>	Nano	n
	10 <sup>-12</sup>	Pico	p
	10 <sup>-15</sup>	femto	f
	10 <sup>-18</sup>	atto	a

### 1.3-Equation Aux Démentions :

Soit G une grandeur physique qu'on exprime en fonction des quatre grandeurs fondamentales par la relation du type :  $G = M^\alpha L^\beta T^\sigma C^\delta$  ou  $\alpha, \beta, \sigma$  et  $\delta$  sont des nombres qui peuvent être positifs, négatifs ou nuls. L'équation aux dimensions de la grandeur physique G s'écrit :

$$[G] = [M]^\alpha [L]^\beta [T]^\sigma [C]^\delta \quad (I-1)$$

Cette équation est indépendante du système d'unités choisi, elle exprime simplement la définition de G

#### Exemple :

L'accélération étant le rapport entre une distance et le carré d'un temps, sa dimension [a] s'exprime alors

$$[a] = [L] \cdot [T]^{-2} \quad (1)$$

Ou [L] et [T] sont respectivement les dimensions de la distance et du temps .dans le système MKSA , l'unité correspondante est tout simplement m.s<sup>-2</sup>.de la même manière , la force étant le produit de la masse par l'accélération , sa dimension s'exprime par :

$$[F] = [M] \cdot [a] = [M] \cdot [L] \cdot [T]^{-2} \quad (2)$$

Ou [M] est la dimension de la masse dans le système MKSA .la force s'exprime en Newton ( N), on a alors ; 1N = 1Kg.m.s<sup>-2</sup>

Les relations( 1) et( 2 )sont respectivement les équation aux dimensions de L'accélération et de la force



# RAPPEL MATHÉMATIQUE

---

## Remarque:

Une grandeur est dite sans dimension, si elle garde la même valeur numérique quel que soit le système d'unité choisi. Un angle est défini comme le rapport de longueur d'un arc d'une circonférence sur celle du rayon de la même circonférence, c'est une grandeur sans dimension. On lui attribue toutefois des unités pour l'exprimer : le degré, le radian.

Deux grandeurs sont dites de même dimension, si elles s'expriment avec la même unité.

## 1.4-Précision des Mesures :

La mesure d'une grandeur physique  $G$  est toujours entachée d'erreur ; cette erreur a principalement deux sources :

- Imperfection des appareils de mesure
- Mode opératoire de l'expérimentateur

L'erreur introduite par l'appareillage est appelée erreur systématique, on peut la considérer constante pendant les différentes mesures ; l'erreur commise par l'expérimentateur est appelée erreur fortuite. Il est, en général, difficile de dissocier ces deux sources d'erreur ; leur résultante est l'erreur globale qui fausse la mesure de  $G$ .

La valeur exacte de cette erreur globale n'est pas bien connue et on se suffit généralement d'apprécier sa limite supérieure qui est l'erreur maximale susceptible d'être commise.

Si  $G$  est la valeur trouvée expérimentalement pour une grandeur physique et si  $\Delta G$  est la limite supérieure de l'erreur globale, la vraie valeur  $G_0$  de  $G$  est telle que

$$G - \Delta G < G_0 < G + \Delta G, \text{ soit } G_0 = G \pm \Delta G$$

$\Delta G$  est appelée **erreur absolue (l'incertitude absolue)**, représente l'erreur maximale que l'on risque d'obtenir sur la grandeur  $G$ , lors de sa mesure. L'unité de celle de la grandeur, elle est nécessairement petite comparé à  $G$ .

L'erreur absolue  $\Delta G$  est souvent insuffisante pour rendre compte de l'importance de l'erreur commise sur la mesure de  $G$  ; en effet,  $\Delta G$  est constante lors d'une mesure, de sorte que plus la valeur trouvée est grande, plus la mesure est précise  $\Rightarrow$  la précision est une notion relative qui dépend de l'importance de la mesure de  $G$ .

## RAPPEL MATHEMATIQUE

---

Ainsi, on introduit l'**erreur relative**  $\frac{\Delta G}{G}$  qui est la limite supérieure de l'erreur absolue commise sur l'unité de la grandeur  $G$  à mesurer. Représente l'importance de l'incertitude par rapport à la grandeur physique, on l'exprime généralement en% en absence d'unité de mesure

**Exemple1** mesure la largeur d'une feuille A4

On mesure ;  $l=21.1$  cm et  $\Delta l =0.1$  cm .

⇒ L'incertitude absolue vaut : 0.1 cm

On écrit :  $l =21.1 \pm 0.1$  cm

⇒ L'incertitude relative vaut :  $\Delta l/l=0.1/21.1=0.00474 \sim 0.47\%$

Le calcul d'incertitude (les erreurs) précis demande exige l'utilisation du calcul différentiel. Vous trouvez dans ce tableau ci-dessous les règles pour le calcul d'incertitude, pour une d'une fonction ayant une ou plusieurs variables dans ce tableau

Grandeur	Erreur absolue	Erreur relative
$G = A + B$	$\Delta G = \Delta A + \Delta B$	$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta A}{A+B} + \frac{\Delta B}{A+B}$
$G = A - B$	$\Delta G = \Delta A + \Delta B$	$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta A}{A-B} + \frac{\Delta B}{A-B}$
$G = A \cdot B$	$\Delta G = B(\Delta A) + A(\Delta B)$	$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$
$G = \frac{A}{B}$	$\Delta G = \frac{B(\Delta A) + A(\Delta B)}{B^2}$	$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$
$G = \sin A$	$\Delta G = \cos A \cdot (\Delta A)$	$\frac{\Delta G}{G} = \cot g A \cdot (\Delta A)$

## RAPPEL MATHÉMATIQUE

---

**Exemple 2** mesure la surface d'une feuille A4( fonction qui dépend de deux variable )

Formule :  $S = a \cdot b$  (  $S$ = surface,  $a$ =base,  $b$ =hauteur)

mesure :  $a=29$  cm et  $b=21$  cm .

calculs :  $S=609$  cm

⇒ L'incertitude absolue :  $\Delta S = b(\Delta a) + a(\Delta b) = 5$  cm

On écrit :  $\Delta S = 609 \pm 5$  cm<sup>2</sup>

⇒ L'incertitude relative:  $\Delta G/G = \Delta A/A + \Delta B/B = 0.0082 = 0.82\%$

# RAPPEL MATHÉMATIQUE

---

## 2.1-Introduction :

Cette partie servira d'introduction ou de revue des idées essentielles associées à une des branches des mathématiques les plus importantes pour le physicien. L'algèbre vectorielle est importante, car elle permet au scientifique d'écrire en notation commode concise et «sténographiée» des expressions très compliquées.

On recouvrera, à la fin de cette partie que la notation vectorielle n'est pas différente de la notation de l'algèbre et de la géométrie analytique. La principale différence réside dans l'interprétation.

## 2.2-Scalaire et vecteur :

Les grandeurs physiques sont de plusieurs natures, Certaines sont dites scalaires, elles sont représentées par des nombres réels positifs ou négatifs. C'est le cas, par exemple de la température, de la durée, de la distance... D'autres grandeurs sont dites vectorielles. Elles sont caractérisées par leur intensité, leur direction et leur sens. On peut citer comme exemple, le déplacement, la vitesse, la force,....

## 2.3-Vecteur :

### 2.3. a-Définition :

Un vecteur est un segment orienté ( Fig. I-1 ). Son module est égal à la longueur du segment. Sa direction est définie par celle de la droite qui porte le segment. A toute direction correspondent deux sens, l'un est positif que l'on choisit arbitrairement, l'autre est négatif.

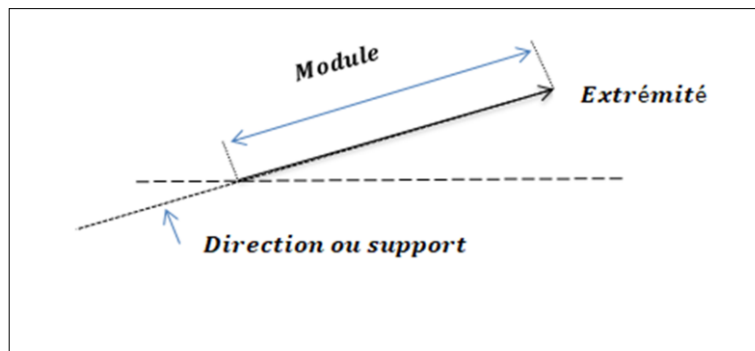


Fig. I-1

- L'intensité d'une grandeur physique vectorielle est égale au module du vecteur qui la représente.

# RAPPEL MATHÉMATIQUE

---

- Deux vecteurs sont égaux s'ils ont le même module, la même direction et le même sens.

Deux vecteurs sont opposés s'ils ont le même module, la même direction mais des sens opposés.

## 2.3.b-Notion de vecteur unitaire :

Un vecteur est dit unitaire lorsque son module est égal à 1. On peut associer à chaque vecteur un vecteur unitaire dans une même direction. On l'exprime en la forme :

$$\vec{V} = |\vec{V}| \cdot \vec{u} \quad (\text{I-2})$$

Alors  $\vec{u} = \vec{V}/V$  est un vecteur unitaire de direction que  $\vec{V}$

- $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont des vecteurs unitaires orthogonaux. Ils sont perpendiculaires deux à deux et dirigés positivement le long des axes  $x, y$  et  $z$  d'un système d'axe orthogonal

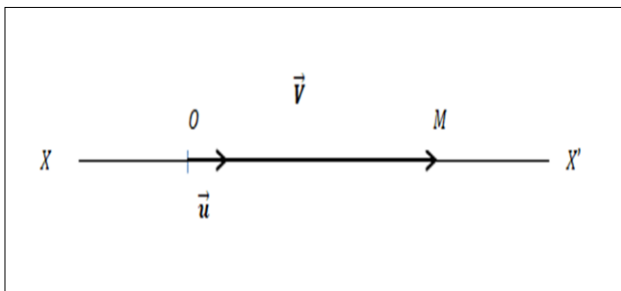


Fig. I-2 : Direction d'un vecteur

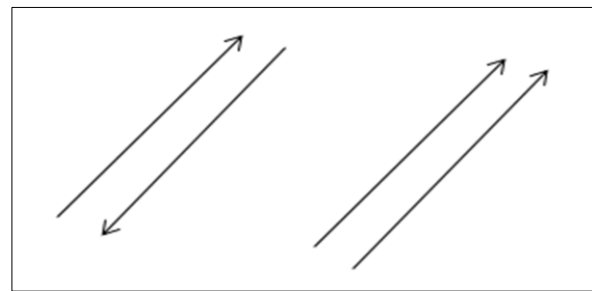


Fig. I-3 Direction parallèle et anti parallèle

## 2.3.c-Multiplication par un scalaire:

Considérons un vecteur  $\vec{V}$  et nombre scalaire  $\lambda$ . Le vecteur  $\lambda\vec{V}$  a la même direction de  $\vec{V}$ , Il a le même sens que  $\vec{V}$  si  $\lambda$  est positive et le sens contraire si  $\lambda$  est négative. Dans le cas où  $\lambda = 0$ ,  $\lambda\vec{V}$  est vecteur nul.

## 2.4-Addition vectorielle :

La somme vectorielle de  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  est un vecteur  $\vec{V}$

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \quad (\text{I-3})$$

## RAPPEL MATHÉMATIQUE

Qui s'obtient en déplaçant par exemple  $\vec{V}_2$  parallèlement à lui-même jusqu'à ce que son origine soit sur l'extrémité de  $\vec{V}_1$ . Le vecteur  $\vec{V}$  a alors pour origine celle de  $\vec{V}_1$  et pour extrémité celle de  $\vec{V}_2$  (Fig. I-4).

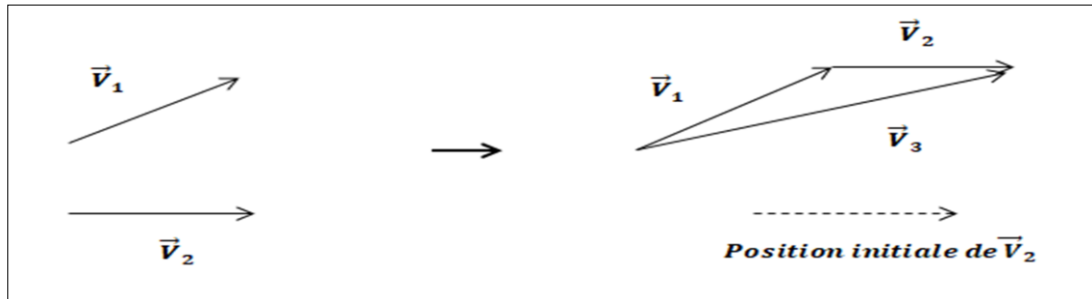


Fig. I-4

**Remarque :** le résultat serait le même si on déplaçait  $\vec{V}_1$  au lieu de  $\vec{V}_2$

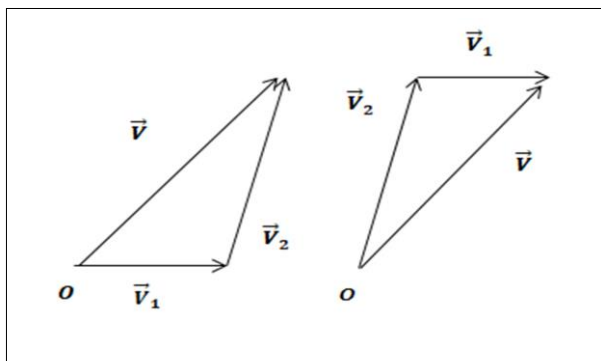


Fig. I-5 L'addition vectorielle est commutative

○ Pour calculer le module de vecteur  $\vec{V}_3$  nous voyons sur la (Fig. I-6) que

$$V^2 = AC^2 = AD^2 + DC^2$$

Mais :  $AD = AB + BD = V_1 + V_2 \cos \theta$

Et  $DC = V_2 \sin \theta$

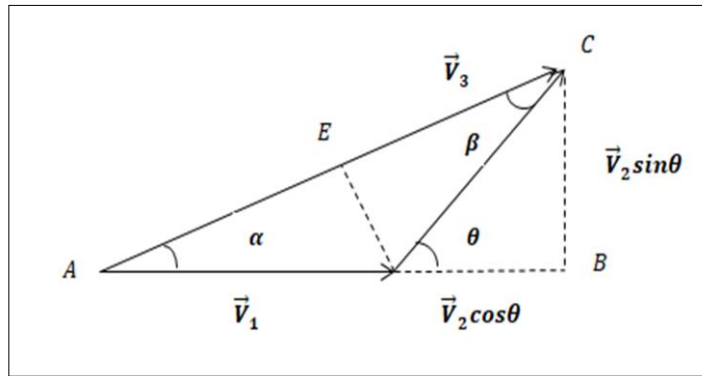
Alors :  $V^2 = (V_1 + V_2 \cos \theta)^2 + (V_2 \sin \theta)^2$

$$= V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2 \cos \theta$$

Donc :

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2 \cos \theta} \quad (\text{I-4})$$

# RAPPEL MATHEMATIQUE



**Fig. I-6 :**

- Pour déterminer la direction de  $\vec{V}_3$  nous faut seulement trouver l'angle  $\alpha$ , D'après la (Fig. I-6) nous voyons que :

Dans le triangle ACD ;

$$CD = AC \sin \alpha$$

Et dans le triangle BDC ;

$$CD = BC \sin \theta$$

Donc ;  $V_3 \sin \alpha = V_2 \sin \theta$

OU

$$V_3 / \sin \theta = V_2 / \sin \alpha$$

De même,  $BE = V_1 \sin \alpha = V_2 \sin \beta$

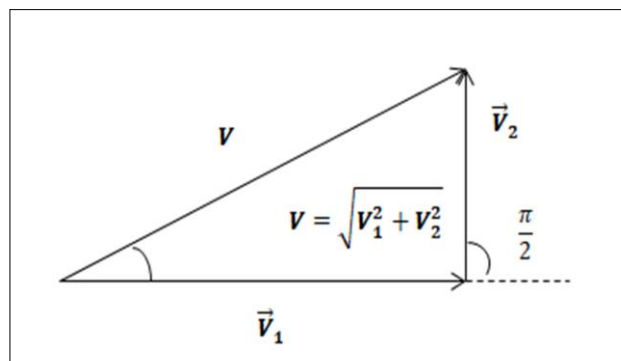
OU

$$V_2 / \sin \alpha = V_1 / \sin \beta$$

En combinant les deux résultats, on obtient la relation symétrique

$$V_3 / \sin \theta = V_2 / \sin \alpha = V_1 / \sin \beta \quad (\text{I-5})$$

Nous avons établi deux expressions trigonométriques fondamentales, la loi des cosinus et la loi des sinus.



**Fig. I-7**

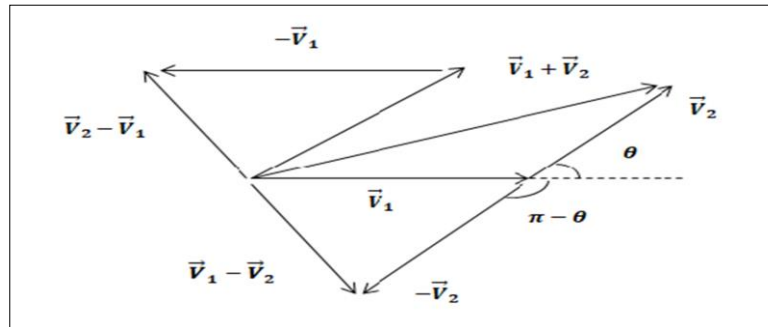
## RAPPEL MATHÉMATIQUE

Dans le cas particulier où  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  sont perpendiculaires ( Fig. I-7 ) ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  .on a la relation suivante :

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} ; \text{tag} \alpha = V_2/V_1 \quad (\text{I-6})$$

- On obtient la différence de deux vecteurs en ajoutant au premier l'opposé du seconde ( Fig. I-8 ) c'est-à-dire

$$\vec{D} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}_1 + (-\vec{V}_2)$$



**Fig. I-8** Une différence vectorielle est anticommutative

La grandeur de la différence est

$$D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos(\pi - \theta)}$$

OU

$$D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\theta} \quad (\text{I-7})$$

### 2.4. a-Propriétés

Considérons trois vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$  et  $\vec{V}_3$  et deux nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$  .On peut facilement monter les propriétés suivantes :

La commutative :

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$$

L'associativité :

$$\vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3$$

$$\alpha(\beta\vec{V}_1) = \beta(\alpha\vec{V}_1) = (\alpha\beta)\vec{V}_1$$

La distributivité :



## RAPPEL MATHEMATIQUE

$$(\alpha + \beta)\vec{V}_1 = \alpha\vec{V}_1 + \beta\vec{V}_1$$

$$\alpha(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \alpha\vec{V}_1 + \alpha\vec{V}_2$$

### 2.5-Composante d'un vecteur :

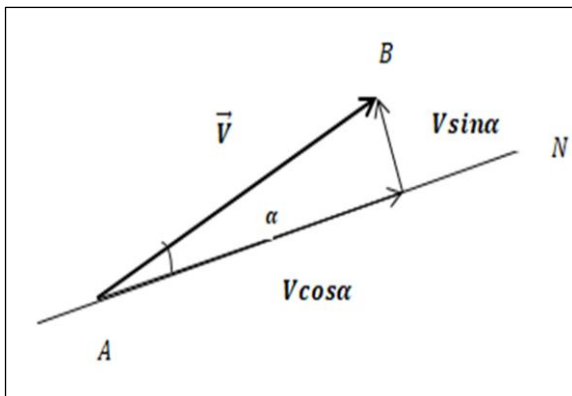
Tout vecteur  $\vec{V}$  peut toujours être comme la somme de deux vecteurs (ou plus), et le nombre de possibilités est fini. Chaque ensemble de vecteurs qui, une fois additionné, donne  $\vec{V}$  et constitue des composantes

Les plus couramment utilisées sont des composantes rectangulaire ; on exprime le vecteur comme la somme de deux vecteur perpendiculaire ( Fig. I-10 ). Alors, comme nous l'indique la figure

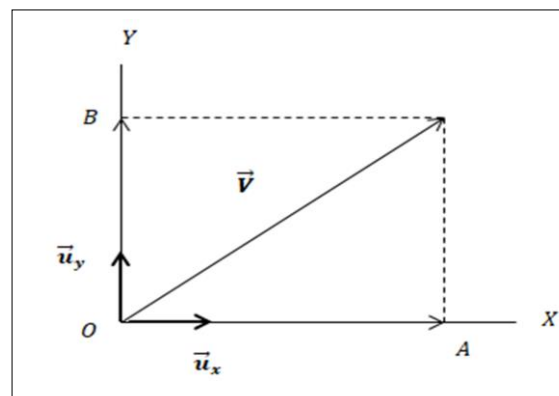
$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y \quad (\text{I-8})$$

Avec :

$$\vec{V}_x = V \cos \alpha \quad \text{et} \quad \vec{V}_y = V \sin \alpha \quad (\text{I-9})$$



**Fig. I-9** Composante d'un vecteur suivant une Certain direction



**Fig. I-10** Composantes rectangulaires d'un Vecteur dans un plan

En définissant les vecteurs unitaires  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  dans les directions des axes  $OX$  et  $OY$ , nous remarquons que :

$$\vec{V}_x = \overrightarrow{OA} = V\vec{u}_x \quad , \quad \vec{V}_y = \overrightarrow{OB} = V\vec{u}_y$$

Nous avons donc

$$\vec{V} = V_x\vec{u}_x + V_y\vec{u}_y \quad (\text{I-10})$$

# RAPPEL MATHÉMATIQUE

Cette équation donne l'expression d'un vecteur en fonction de ces composantes suivant deux dimensions. En utilisant l'éq (I-9), nous pouvons aussi écrire pour l'éq (I-10)

$$\vec{V} = V \cos \alpha \vec{u}_x + V \sin \alpha \vec{u}_y$$

$$\vec{V} = V(\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_y)$$

quand nous comparons ce résultat avec l'éq (I-2) ou que nous posons simplement  $V=1$ , nous en concluons qu'un vecteur unitaire peut s'écrire

$$\vec{u} = \cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_y \quad (\text{I-11})$$

Il s'ensuit, par un calcul immédiat, que

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 \quad (\text{I-12})$$

## 2.6-Produit scalaire :

En plus de l'addition on peut définir d'autres opérations avec les vecteurs. L'une d'elles est le produit scalaire ; le produit vectoriel en est une autre.

Le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ , représenté par le symbole  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  (lire « A scalaire B ») est défini comme la grandeur scalaire obtenue en faisant le produit des grandeurs de A et B et du cosinus de l'angle des deux vecteurs.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \quad (\text{I-13})$$

On a évidemment  $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$ , puisque dans ce cas l'angle est nul.

Si les deux vecteurs sont perpendiculaires ( $\theta = \pi/2$ ), le produit scalaire est nul.

Le produit scalaire est commutatif  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$  puisque  $\cos \theta$  est le même dans les deux cas.

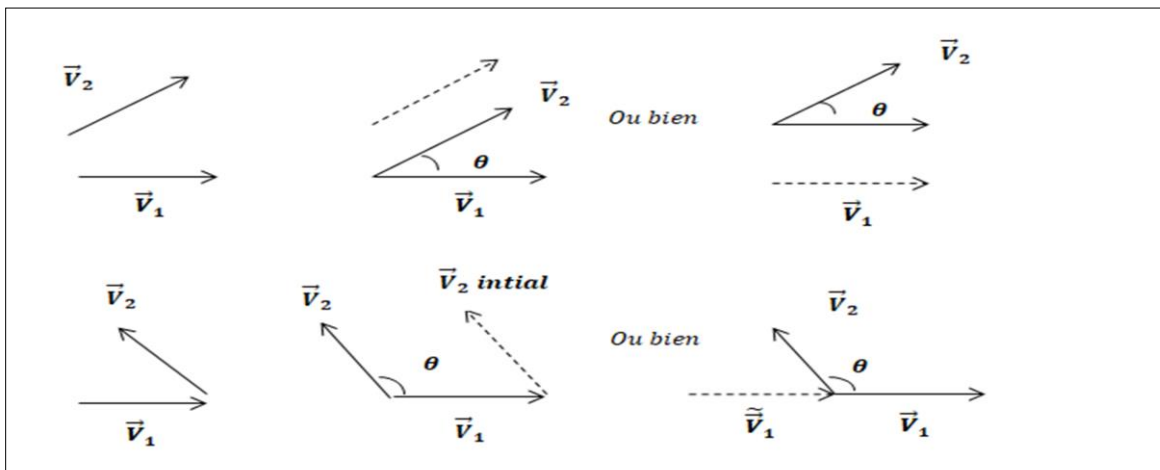


Fig.I-11

## RAPPEL MATHEMATIQUE

---

Le produit scalaire est distributif vis-à-vis de l'addition ;

$$\vec{C} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C} \cdot \vec{A} + \vec{C} \cdot \vec{B} \quad (\text{I-14})$$

Les produit scalaires entre les vecteur unitaires  $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$  ont pour valeur

$$\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_y = \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z = 1 \quad \vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_z = \vec{u}_z \cdot \vec{u}_x = 0 \quad (\text{I-15})$$

En écrivant  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  en fonction de leurs composantes rectangulaires, en accord avec (I-10) tout en lui appliquant la loi distributivité (I-14), nous auront :

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z) \cdot (B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z) \\ &= (\vec{u}_x \vec{u}_x) A_x B_x + (\vec{u}_y \vec{u}_y) A_y B_y + (\vec{u}_z \vec{u}_z) A_z B_z \\ &\quad + (\vec{u}_y \vec{u}_x) A_y B_x + (\vec{u}_y \vec{u}_y) A_y B_y + (\vec{u}_y \vec{u}_z) A_y B_z \\ &\quad + (\vec{u}_z \vec{u}_x) A_z B_x + (\vec{u}_z \vec{u}_y) A_z B_y + (\vec{u}_z \vec{u}_z) A_z B_z \end{aligned}$$

En appliquant les relations (I-15), nous obtenons finalement :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (\text{I-16})$$

Résultat qui a de nombreuses applications. Remarquons que

$$A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

- Nous pouvons appliquer les propriétés du produit scalaire pour déduire très facilement les formules (I-4) relatives à la somme de deux vecteur. A partir  $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$  nous avons :

$$\begin{aligned} V^2 &= (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \cdot (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \\ &= \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 + (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) + \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2 + (\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1) \\ &= V_1^2 + V_2^2 + 2\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 \\ &= V_1^2 + V_2^2 + 2V_1 V_2 \cos\theta \end{aligned}$$

Ce résultat peut être étendu sans difficulté à un nombre quelconque de vecteurs

$$V^2 = \sum_{\text{tous les vecteurs}} V_i^2 + 2 \sum_{\text{tous les paires}} V_i \cdot V_j$$

### Application u calcul vectoriel en mécanique :

En mécanique, le travail d'une force  $\vec{F}$  pour un déplacement élémentaire  $\overrightarrow{\Delta l}$  s'écrit :

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta l} \text{ .On a alors , } W_A^B(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}$$

## RAPPEL MATHEMATIQUE

$$= \int_{x_A}^{x_B} F \cdot dx \cos\theta$$

### 2.7-Produit vectoriel :

Le produit vectoriel de deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ , qu'on représente par le symbole  $\vec{A} \wedge \vec{B}$

(Lire « A vectoriel B ») est défini comme le vecteur perpendiculaire au plan déterminé par  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  et dans la direction de déplacement d'une vis à droite qu'on tourne de A vers B ( Fig. I-12 ). une vis est dite à droite, si en plaçant la main droite comme il est indiqué sur la Fig. I-12, avec les doigts dirigés suivant le sens de rotation, la vis avance dans la direction du pouce. la plupart des vis ordinaires sont des vis à droite.

Le produit vectoriel  $\vec{A} \wedge \vec{B}$  est défini par :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{n} |\vec{A}| |\vec{B}| \sin\theta \quad (\text{I-17})$$

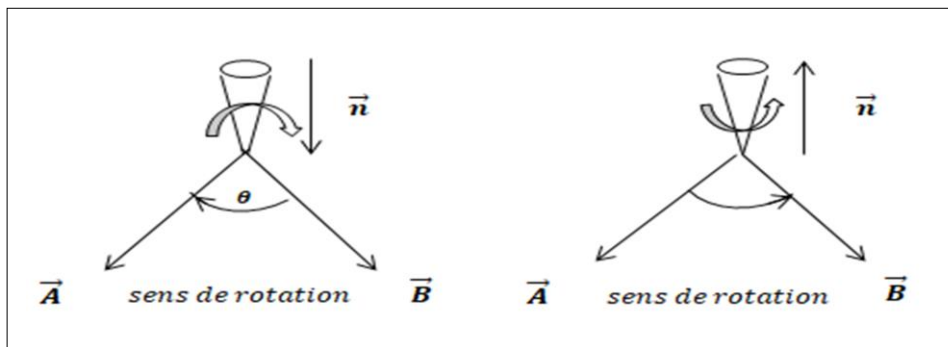


Fig. I-12

Ou  $\theta$  est l'angle formé par  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  tel que  $0 \leq \theta \leq \pi (\sin\theta > 0)$  et  $\vec{n}$  un vecteur unitaire perpendiculaire à  $\vec{A}$  et à  $\vec{B}$ , et dont le sens est défini de manière que  $\vec{A}, \vec{B}$  et  $\vec{n}$  forment un trièdre direct.

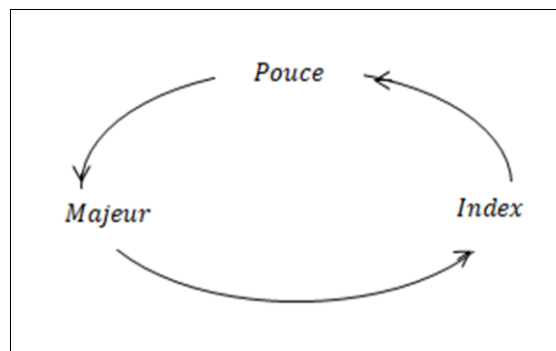
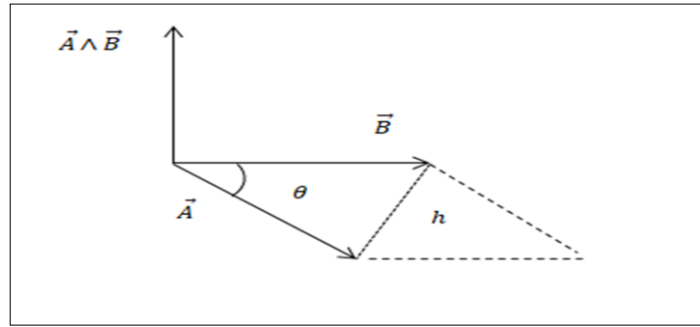


Fig. I-13

Une autre règle utile pour établir la direction de  $\vec{A} \wedge \vec{B}$  est la suivante : disposer la pouce, l'index et le majeur de la main droite dans la position indiquée sur la Fig. I-13.



**Fig. I-14 :** Le produit vectoriel est équivalent à l'aire du parallélogramme

Remarquons que La grandeur du produit vectoriel  $|\vec{A} \wedge \vec{B}|$  est égal à l'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs, ou encore au double de l'aire du triangle formé avec leur résultante .on peut voir comme suit (Fig. I-14 ) La grandeur  $|\vec{A} \wedge \vec{B}|$  est :

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = A \cdot B \cdot \sin\theta \quad (\text{I-18})$$

Mais  $B \sin\theta = h$  , ou  $h$  est la hauteur du parallélogramme ayant  $A$  et  $B$  comme cotés par suite :

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = Ah = \text{aire du parallélogramme}$$

Le produit vectoriel est distributif vis-à-vis de l'addition ; autrement dit,

$$\vec{C} \wedge (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C} \wedge \vec{A} + \vec{C} \wedge \vec{B} \quad (\text{I-19})$$

Les produits vectoriels entre vecteurs unitaires  $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$  sont :

$$\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = -\vec{u}_y \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_z$$

$$\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = -\vec{u}_z \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_x \quad (\text{I-20})$$

$$\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = -\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_x \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_z = 0$$

En écrivant  $A$  et  $B$  en fonction de leurs composantes rectangulaires , et en appliquant la loi de distributivité ( I-19 ), nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{A} \wedge \vec{B} &= (A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z) \wedge (B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z) \\ &= (\vec{u}_x \wedge \vec{u}_x) A_x B_x + (\vec{u}_y \wedge \vec{u}_y) A_y B_y + (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_z) A_z B_z \\ &\quad + (\vec{u}_y \wedge \vec{u}_x) A_y B_x + (\vec{u}_y \wedge \vec{u}_y) A_y B_y + (\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z) A_y B_z \\ &\quad + (\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z) A_x B_z + (\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y) A_x B_y + (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x) A_z B_x \\ &\quad + (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_y) A_z B_y \end{aligned}$$

## RAPPEL MATHÉMATIQUE

$$+(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x)A_z B_x + (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_y)A_z B_y + (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_z)A_z B_z$$

En appliquant les relations (I-20), nous obtenons finalement :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{u}_x(A_y B_z - A_z B_y) + \vec{u}_y(A_z B_x - A_x B_z) + \vec{u}_z(A_x B_y - A_y B_x) \quad (\text{I-21})$$

L'équation (I-21) peut aussi s'écrire sous une forme plus condensée de déterminant,

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (\text{I-21})$$

**Note sur le déterminant** .un déterminants une notation commode pour disposer des valeurs qu' on doit combiner en respectant une certaine symétrie .un déterminant du troisième ordre est tableau de nombres  $3 \times 3$ , qu'on calcule suivant la règle :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} &= \vec{u}_x \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} + \vec{u}_y \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \vec{u}_z \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \\ &= \vec{u}_x(A_y B_z - B_y A_z) + \vec{u}_y(A_x B_z - B_x A_z) + \vec{u}_z(A_x B_y - B_x A_y) \end{aligned}$$

### Application du calcul vectoriel en mécanique :

Le moment d'une force  $\vec{F} = \overline{AB}$  par rapport au point  $O$  .  $\mathcal{M}_O(\vec{F}) = \overline{OA} \wedge \overline{AB}$

Le moment cinétique :  $\vec{L} = \overline{OA} \wedge m\vec{V}$  d'une masse  $m$  par rapport à  $O$

La force de Lorentz :  $\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B}$  sur une charge  $q$

La force de Laplace :  $\vec{F} = i\vec{l} \wedge \vec{B}$  sur un fil parcouru par le courant  $i$

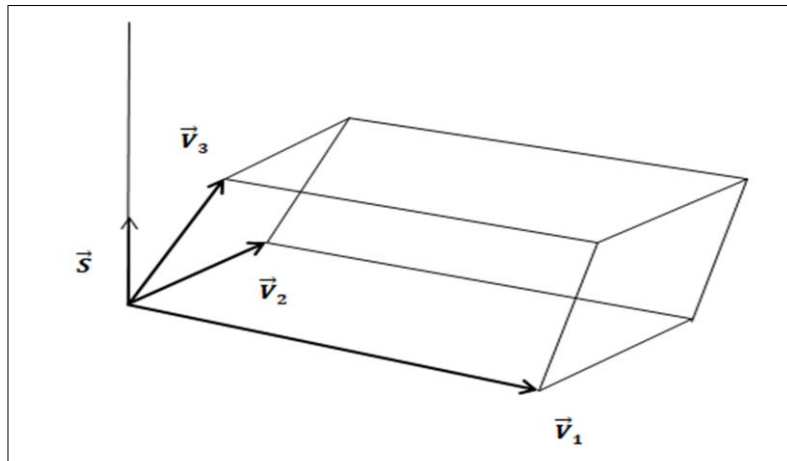
### 2.8-Produit mixte :

Par définition, le produit mixte  $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$  des vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$  et  $\vec{V}_3$  est le produit scalaire de  $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$  et de  $\vec{V}_3$  ; on le note le produit mixte  $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3$

Posons  $\vec{S} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$  :  $\|\vec{S}\|$  mesure l'aire du parallélogramme construit sur  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$

Et le produit mixte  $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = \vec{S} \cdot \vec{V}_3 = \overline{OS} \cdot \overline{OH}$

La valeur absolue du produit mixte mesure donc le volume du parallélépipède construit sur  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$  et  $\vec{V}_3$



**Fig. I-15**

Par permutation circulaires, on obtient les relations :

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 = (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_1 = (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2$$

On peut calculer le produit mixte en fonction des composantes des vecteurs :

$$\vec{V}_1 = (x_1, y_1, z_1) \quad \vec{V}_2 = (x_2, y_2, z_2) \quad \text{et} \quad \vec{V}_3 = (x_3, y_3, z_3)$$

Ecrit dans la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ; on obtient directement :

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 = x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) + y_1(x_3 z_2 - x_2 z_3) + z_1(x_2 y_3 - y_2 x_3)$$

On note aussi le produit mixte :

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

## 2.9-Dérivées des fonctions vectorielles :

Lorsqu'un vecteur  $\vec{V}$  dépend d'une variable  $\theta$ , on dit que  $\vec{V}$  est une fonction vectorielle sa dérivée est définie par :

$$\frac{d\vec{V}}{d\theta} = \lim_{\theta' \rightarrow \theta} \frac{\vec{V}(\theta') - \vec{V}(\theta)}{\theta' - \theta}$$

Lorsque  $V$  est constant, alors  $\frac{dV}{d\theta} = 0$

On considère deux fonctions vectorielles  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  et une fonction scalaire  $f$ , tous de la même variable  $\theta$ . On peut montrer les propriétés suivantes :

$$\frac{d}{d\theta} (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = \frac{d\vec{V}_1}{d\theta} \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \frac{d\vec{V}_2}{d\theta}$$

$$\frac{d}{d\theta} (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \frac{d\vec{V}_1}{d\theta} \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \frac{d\vec{V}_2}{d\theta}$$

$$\vec{V}_1 \cdot \frac{d\vec{V}_1}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (|\vec{V}_1|^2) = |\vec{V}_1| \cdot \frac{d|\vec{V}_1|}{d\theta}$$

$$\frac{d}{d\theta} (f \cdot \vec{V}_1) = \frac{df}{d\theta} \cdot \vec{V}_1 + f \frac{d\vec{V}_1}{d\theta}$$

## 2.10 Différentiation vectorielle :

Soit  $\vec{V}(M) = V\vec{u}$  est une fonction vectorielle de point  $M$ , toute variation de ce dernier peut affecter aussi bien le module  $V$  de Vecteur que sa direction  $\vec{u}$  ; on définit ainsi la différentielle vectorielle de  $\vec{V}$  par :

$$\vec{V} = d(V \cdot \vec{u}) = dV \cdot \vec{u} + V \cdot d\vec{u}$$

$$= \begin{matrix} dV \cdot \vec{u} & \text{Variation du module de } V \text{ de vecteur } \vec{V} \\ V \cdot d\vec{u} & \text{Variation de la direction } \vec{u} \text{ de vecteur } \vec{V} \end{matrix}$$

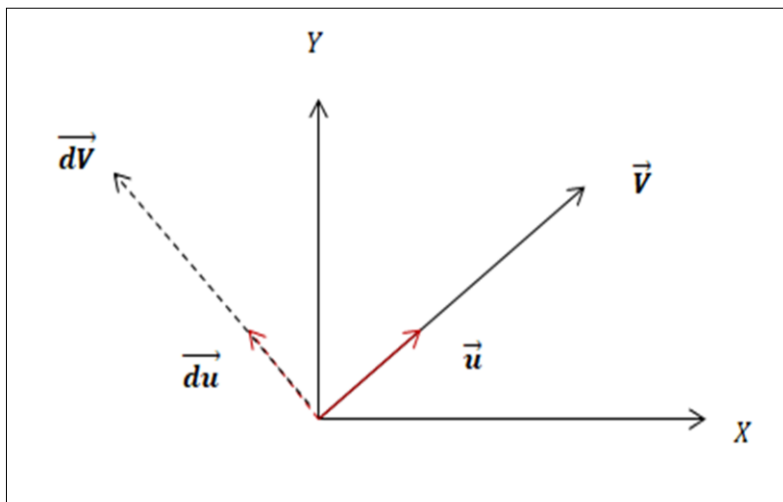


Fig. I-16

$\vec{u}$  est un vecteur unitaire son module constant =1 , seule sa direction change avec la position de  $M$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} = u^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \text{Par différentiation, on obtient } \vec{u} \cdot d\vec{u} = 0 \Rightarrow d\vec{u} \perp \vec{u}$$

Cas particulier : Si  $\vec{V}$  est un vecteur de module constant

$V = cst \rightarrow dV = 0$ , seule sa direction  $\vec{u}$  varie avec la position de  $M$ ,  $d\vec{V}$  porté par  $d\vec{u}$ ,  $d\vec{u}$  étant perpendiculaire à  $\vec{u} \Rightarrow d\vec{V} \perp \vec{V}$



## RAPPEL MATHÉMATIQUE

---

### 2.11-Intégration des fonction vectorielles :

Soit  $\vec{V}$  une fonction vectorielle de variable  $\theta$

$$\vec{V}(\theta) = x(\theta)\vec{i} + y(\theta)\vec{j} + z(\theta)\vec{k}$$

L'intégrale de  $\vec{V}(\theta)$

$$\int \vec{V}(\theta)d\theta = \int x(\theta) d\theta\vec{i} + \int y(\theta) d\theta\vec{j} + \int z(\theta) d\theta\vec{k}$$

Est un vecteur dont les composantes sont les intégrales des composantes de  $\vec{V}(\theta)$  .

### 2.12-Champs scalaires et vectoriels :

Lorsque à tout point  $(x, y, z)$  de l'espace , on peut associer un nombre scalaire  $U(x, y, z)$  , alors la fonction  $U$  s'appelle champ scalaire .De la même manière , lorsque à tout point  $(x, y, z)$  de l'espace , on peut associer un vecteur  $V(x, y, z)$  , alors la fonction  $V$  s'appelle champs vectoriel .

Dans ce qui suit , on utilisera la notation

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$\nabla$  est appelé «opérateur nabra ».

### Gradient d'un champ scalaire

Définition :

C'est un vecteur défini par

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

**Exemple :** calculer le gradient de la fonction  $U = x^2 + xy - z^2$

Solution :  $\overrightarrow{\text{grad}}U = (2x + y)\vec{i} + x\vec{j} - 2z\vec{k}$

Propriétés :

soit  $\vec{r}$  un vecteur de l'espace tel que  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  .la différentielle totale  $dU$

d'un champ scalaire  $U(x, y, z)$  est égale au produit scalaire

$$dU = \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot \vec{dr}$$
$$\Rightarrow dU = \left( \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \right) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

## RAPPEL MATHEMATIQUE

---

En effet, d'une part  $U$  étant une fonction de  $x, y, z$  alors

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

### Divergence d'un champ vectoriel :

C'est un scalaire défini comme le produit scalaire de l'opérateur  $\vec{\nabla}$  avec  $\vec{V}$

$$\text{div}\vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Où  $V_x$ ,  $V_y$  et  $V_z$  sont les composantes de  $\vec{V}$

**Exemple** : calculons la divergence de  $\vec{V} = (zx^2 + y^2)\vec{i} + z^2x\vec{j} + 3z^2y\vec{k}$

Solution :  $\text{div}\vec{V} = 2xz + 6zy$

### Rotationnel d'un champ vectoriel :

C'est un vecteur défini comme le produit vectoriel de l'opérateur  $\vec{\nabla}$  avec  $\vec{V}$

$$\text{rot}\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

**Exemple** : calculons le rotationnel de  $\vec{V} = (zx^2 + y^2)\vec{i} + z^2x\vec{j} + 3z^2y\vec{k}$

Solution :  $\text{rot}\vec{V} = (3z^2 - 2zx)\vec{i} + x^2\vec{j} + (z^2 - 2y)\vec{k}$

## 1. Introduction :

L'objet de la cinématique du point est d'étudier le mouvement d'un point au cours du temps indépendamment des causes qui produisent le mouvement. Les objectifs sont la détermination des grandeurs cinématiques telles que les vectrices accélérations, vitesse, position et l'équation horaire de la trajectoire de ce point par rapport à un référentiel choisi par l'observateur.

### 1.1-Notion de mouvement :

un objet est en mouvement par rapport à un autre lorsque sa position, mesurée par rapport au seconde corps , change en fonction du temps .Par contre , si cette position relative ne change pas en fonction de temps , l'objet est au repos relatif .Le repos comme le mouvement , sont tous deux des notions relatives; ils dépendent de la situation de l'objet par rapport au corps qui sert de référence .Un arbre et une maison sont au repos par rapport a la terre , mais en mouvement par rapport au soleil . Donc pour décrire le mouvement, on doit définir un système d'axes de coordonnées lié un à un observateur muni d'une horloge de telle sorte qu'il puisse donner la date de passage du mobile en n'importe quel point .Un tel ensemble (système d'axes et observateur ) s'appelle référentiel .

### 1.2-Référentiel :

L'ensemble formé d'un repère d'espace et d'un repère du temps constitue un référentiel. c'est-à-dire une référence spatiale et une référence temporelle, toutes deux indispensables dans l'étude de mouvement .

### 1.3-Repère d'espace:

On appelle repère d'espace un ensemble de points dont les distances sont invariables au cours du temps. Un tel ensemble est aussi appelé un solide de référence. Par exemple une table, un bateau, la terre peuvent servir de repère d'espace.

### 1.4-Le point matériel ou particule.:

Un point matériel est un modèle commode pour représenter un corps physique réel. Ce modèle est valable si les dimensions du corps physique sont faibles par rapport à la distance d'observation (de celui qui observe le mouvement). Décrivons de façon plus précise un point matériel :

# CINEMATIQUE

- Il s'agit d'un objet sans dimension, sans forme (un point au sens des mathématiques).
- Le mouvement d'un point matériel se déroule dans l'espace et dans le temps
- Un point matériel est caractérisé par sa masse notée  $m$ . Il s'agit d'une grandeur scalaire (un nombre pur) dont l'unité est le kilogramme (kg). La masse est une grandeur invariante dans le temps et ne dépend pas du référentiel d'étude.

## 2. Système de coordonnées :

On exprime la position d'un objet par rapport à un système de coordonnées qui est constitué d'un ensemble de trois axes dont chacun correspond à une direction de l'espace et qui est considéré comme fixe par rapport à un repère d'espace. On dit que le système de coordonnées est lié au repère. Dans la suite, nous voyons les systèmes de coordonnées suivants : Cartésienne , Cylindrique , Polaire (cylindrique à 2D) et Sphérique .

### 2.1 Coordonnées cartésiennes $M(x, y, z)$ :

#### ▪ Définition:

On considère trois axes  $X'OX$ ,  $Y'OY$ , et  $Z'OZ$  (Fig. II-1) orthogonaux deux à deux, munis respectivement des vecteurs unitaires  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$ . Ce système d'axes définit un repère orthonormé d'origine  $O$ .

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \quad \text{Avec} \quad \begin{cases} \vec{Om} = \vec{OA} + \vec{OB} \\ m\vec{M} = \vec{OC} \end{cases}$$

$A, B$  et  $C$  sont les projections orthogonales de  $M$  sur les trois axes du système

Les vecteurs  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  et  $\vec{OC}$  sont tels que :

$$|\vec{OA}| = x, \quad |\vec{OB}| = y \quad \text{et} \quad |\vec{OC}| = z$$

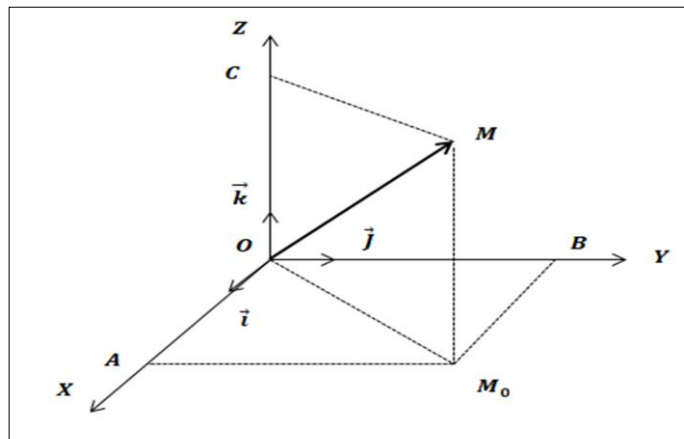


Fig. II-1: Coordonnées cartésienne

## CINEMATIQUE

---

La position d'un point M quelconque dans ce repère est définie par les composantes ( x ,y ,z) du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  dans la base orthonormée ( $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ )

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (\text{II-1})$$

X ,y et z sont appelées « **Cordonnées cartésiennes** ».du point M ou « **composantes du vecteur**» position  $\overrightarrow{OM}$  .

Elles sont données par les relations :

$$M \begin{cases} x = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{i} = \text{abscise de M} \\ y = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{j} = \text{ordonnée de M} \\ z = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{k} = \text{cote de M} \end{cases}$$

Le module du vecteur OM est :

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{II-2})$$

Si le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  est porté par une droite  $\Delta$  de vecteur unitaire  $\vec{u}$  , tel que

$\overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}| \cdot \vec{u}$  , les composantes de ce dernier s'écrivent dans la base ( $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ).

$$\vec{u} \begin{cases} \vec{u}_x = \vec{u} \cdot \vec{i} = \cos\theta_x \\ \vec{u}_y = \vec{u} \cdot \vec{j} = \cos\theta_y \\ \vec{u}_z = \vec{u} \cdot \vec{k} = \cos\theta_z \end{cases}$$

Ou  $\theta_x , \theta_y , \theta_z$  sont les angles que fait le vecteur  $\vec{u}$  respectivement avec les vecteur  $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

Le vecteur  $\vec{u}$  étant un vecteur unitaire  $|\vec{u}| = 1$  .on obtient la relation

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$$

Ces cosinus vérifiant cette relation et représentant les composantes de  $\vec{u}$  sont dites les cosinus directeurs de la droite  $\Delta$  , support du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ .

### ▪ Vecteur déplacement élémentaire :

Déplaçons le point M (x,y,z) jusqu'au point M' (x + dx ,y + dy ,z + dz) .on définit le vecteur de déplacement élémentaire par :

$$\vec{dl} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = d(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{MM'}$$

Ainsi le déplacement  $M \rightarrow M'$  est équivalent à trois déplacement élémentaires parallèlement aux trois axes et respectivement égaux à x , dy et dz (Fig. II-2)

$$\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

Le module de ce vecteur déplacement élémentaire est :

$$|\vec{dl}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

▪ **Surface et volume élémentaires :**

déplacement  $M \rightarrow M'$  engendre un volume élémentaire  $dV = dxdydz$  (c est un prisme droit à base rectangulaire ou  $\vec{dl} = \overline{MM'}$  représente une diagonale principale ;  $dV$  est limité par six surfaces élémentaires deux à deux parallèles et isométriques qu'on représente par des vecteurs perpendiculaires à ces surfaces et orientés vers l'extérieur :

$$\begin{cases} x = Cst : \vec{dS}_x = \pm dydz\vec{i} \\ y = Cst : \vec{dS}_y = \pm dx dz\vec{j} \\ z = Cst : \vec{dS}_z = \pm dx dy\vec{k} \end{cases}$$

Pour recouvrir tout l'espace, les domaines de variation de  $x, y$  et  $z$  sont :

$$-\infty < x, y, z < +\infty$$

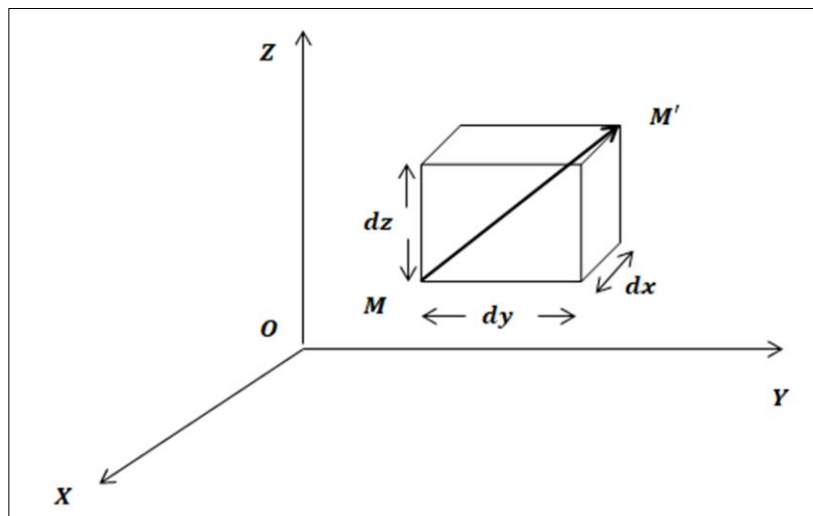


Fig. II-2

**2.2- Coordonnées cylindrique M ( $\rho, \theta, z$ ) :**

Considérons un point M dont les coordonnées cartésiennes sont  $(x, y, z)$ , soit  $M_0$  sa projection sur le plan  $OXY$  ( Fig. II-3 ) les coordonnées cylindrique de M sont définies par les variables  $(\rho, \theta, z)$  telles que :

$$\begin{cases} \rho = |\overrightarrow{OM_0}| \\ \theta = \widehat{OX, \overrightarrow{OM_0}} \\ z = |\overrightarrow{M_0M}| \end{cases}$$

Pour recouvrir tout l'espace, les domaines de variation de  $\rho, \theta$  et  $z$  sont :

$$\rho \in [0, +\infty[ \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad , \quad z \in ]-\infty, +\infty[$$

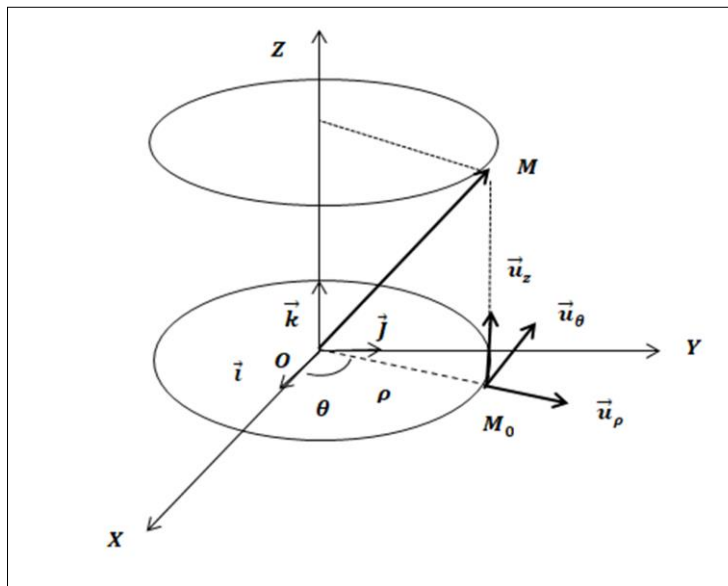
On associe aux coordonnées  $(\rho, \theta, z)$  une base orthonormée direct  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  liée à M donc mobile, dite intrinsèque ou locale, telle que :

$\vec{u}_\rho$  : vecteur unitaire porté par  $\overrightarrow{OM_0}$

$\vec{u}_\theta$  : vecteur unitaire perpendiculaire à  $\vec{u}_\rho$ , donc tangent au cercle centré sur O de rayon  $\rho$

$\vec{u}_z$  : vecteur unitaire porté par  $\overrightarrow{M_0M}$ , donc perpendiculaire à  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$  et orienté suivant les z croissants

$(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  constitue une base orthonormée directe. on a donc  $\vec{u}_z = \vec{u}_\rho \wedge \vec{u}_\theta$



**Fig. II-3 :** Coordonnées cylindrique

L'expression de vecteur du position dans cette base est :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M} \\ \overrightarrow{OM} &= \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z \end{aligned} \quad (\text{II-3})$$

- **Relation entre les coordonnées  $(x, y, z)$  et  $(\rho, \theta, z)$  de M :**

Le passage aux coordonnées cartésiennes se fait par les relations :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (\text{II-4})$$

Le passage aux coordonnées cylindrique se fait par les relations :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{tag} \theta = \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \quad (\text{II-5})$$

▪ **Relations entre les vecteurs de base  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  et  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  :**

Les vecteurs de base  $\vec{u}_\rho$  et  $\vec{u}_\theta$  se trouvent dans un plan parallèle au plan  $OXY$ , leurs projections sur les axes  $OX$  et  $OY$  donnent les relations suivantes :

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \end{cases} \quad (\text{II-6})$$

$$\begin{cases} \vec{i} = \cos \theta \vec{u}_\rho - \sin \theta \vec{u}_\theta \\ \vec{j} = \sin \theta \vec{u}_\rho + \cos \theta \vec{u}_\theta \end{cases} \quad (\text{II-7})$$

Les vecteurs unitaires  $\vec{u}_\rho$  et  $\vec{u}_\theta$  sont représentés sur la Fig. II-4, .en dérivant par rapport à  $\theta$  on trouve :

La relation  $\vec{u}_\rho = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$  donne :

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} = \vec{u}_\theta \quad \Rightarrow \quad d\vec{u}_\rho = d\theta \vec{u}_\theta \quad (\text{II-8})$$

On remarque que le vecteur  $\vec{u}_\rho$  de module constant mais de direction variable, lui correspond un vecteur différentiel  $d\vec{u}_\rho$  de module  $d\theta$  et porté par  $\vec{u}_\theta$  .donc qui lui est perpendiculaire .

De même pour le vecteur unitaire  $\vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$  .on obtient :

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\sin \theta \vec{i} - \cos \theta \vec{j} = -\vec{u}_\rho$$

$\Rightarrow$

$$d\vec{u}_\theta = -d\theta \vec{u}_\rho \quad (\text{II-9})$$



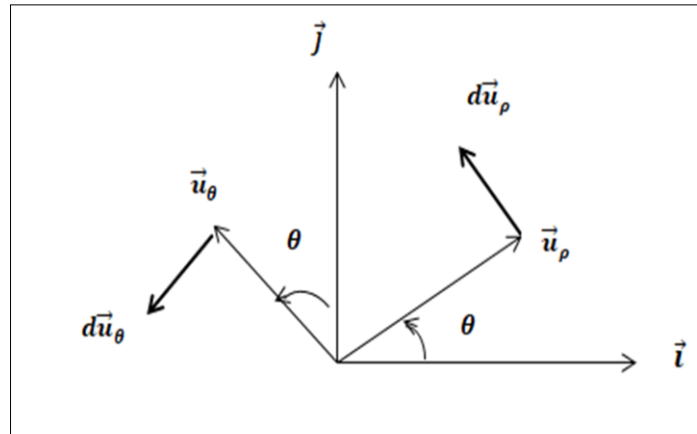


Fig. II-4

▪ **Vecteur déplacement élémentaire :**

Déplaçons le point  $M(\rho, \theta, z)$  jusqu'au point  $M'(\rho + d\rho, \theta + d\theta, z + dz)$

Le vecteur de déplacement élémentaire (Fig. II-5) définit par :

$$\begin{aligned} \vec{dl} &= \overline{MM'} = d(\overline{OM}) \\ \vec{dl} &= d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z \end{aligned}$$

Ainsi le déplacement  $M \rightarrow M'$  est équivalent à trois déplacements élémentaires  $d\rho$ ,  $d\theta$ ,  $dz$  parallèlement aux : vecteur  $\overline{OM}$ , l'arc de centre  $O'$  et de rayon  $\rho$ , et à l'axe  $\overline{OZ}$  respectivement.

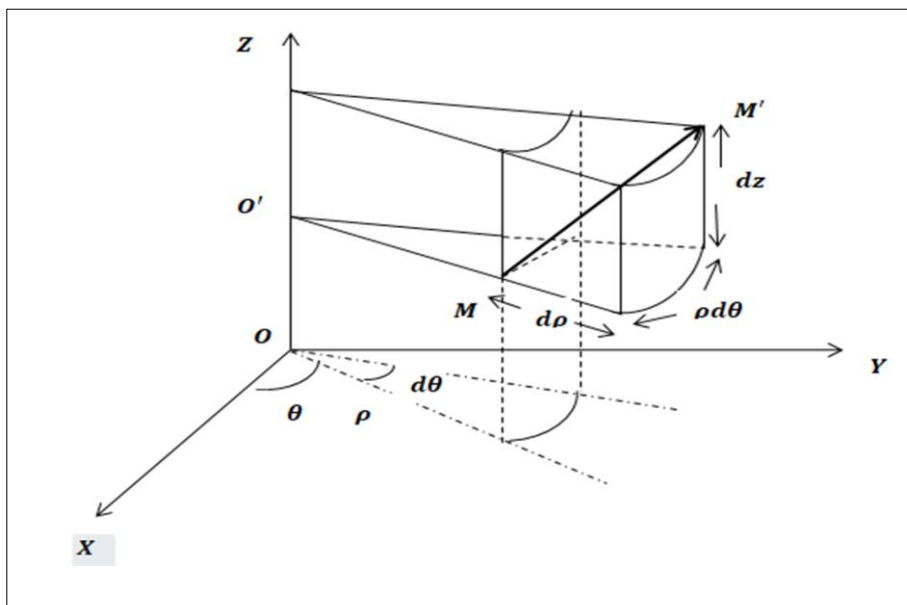


Fig. II-5

▪ **Volume et surface élémentaire :**

Les déplacements élémentaires  $d\rho$ ,  $\rho d\theta$ ,  $dz$  suivant les trois directions  $\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$  étant élémentaires, on assimile le volume construit par ces déplacements à celui d'un prisme droit à base rectangle de côtés  $d\rho, \rho d\theta, dz$  soit :

$$dV = \rho d\rho \cdot d\theta \cdot dz$$

Ce volume élémentaire  $dV$  est limité par six surfaces élémentaires deux à deux parallèles et isométriques qu'on représente par des vecteurs orientés vers l'extérieur tels que :

$$\begin{cases} \rho = Cst : \vec{dS}_\rho = \rho d\theta dz \vec{u}_\rho \\ \theta = Cst : \vec{dS}_\theta = d\rho dz \vec{u}_\theta \\ z = Cst : \vec{dS}_z = \rho d\rho d\theta \vec{u}_z \end{cases}$$

**2.3-Coordonnées polaires M ( $\rho, \theta$ ):**

Lorsque ce point se place dans le plan OXY, les seules variables qui restent sont  $\rho$  et  $\theta$ . On les appelle « coordonnées polaires ». Elles sont définies de la même manière qu'en coordonnées cylindriques.

$$\begin{cases} \rho = |\vec{OM}| \\ \theta = \widehat{OX, OM} \end{cases}$$

Où M est un point du plan. L'espace est donc réduit à deux dimensions et la base locale qu'on associe aux coordonnées polaires est donnée par les équations :

$$\begin{aligned} \vec{u}_\rho &= \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j} \\ \vec{u}_\theta &= -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j} \\ \Rightarrow \vec{OM} &= \rho \vec{u}_\rho \end{aligned} \quad (\text{II-10})$$

**2.4-coordonnées sphériques M ( $r, \theta, \varphi$ ) :**

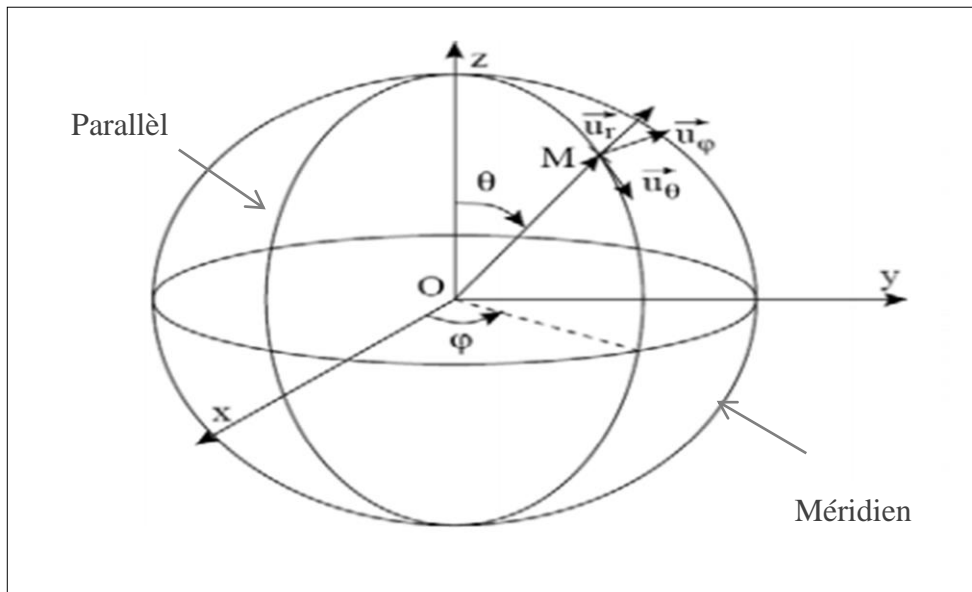
Reprenons le point M dans les coordonnées cartésiennes sont  $(x, y, z)$  et dont la projection sur le plan OXY est le point M<sub>0</sub>. Les coordonnées sphériques sont définies par les variables  $(r, \theta, \varphi)$  telles que (Fig. II-6) :

$$\begin{cases} r = |\vec{OM}| = \text{rayon de la sphère} \\ \theta = \widehat{OZ, OM} = \text{colatitude} \\ \varphi = \widehat{OX, OM_0} = \text{longitude} \end{cases}$$

# CINEMATIQUE

Pour recouvrir tout l'espace, les domaines de variation de  $\rho, \theta$  et  $\varphi$  sont :

$$r \in [0, +\infty[ \quad , \quad \theta \in [0, \pi] \quad , \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$



**Fig. II-6:** Coordonnées sphérique

On associe à ces coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$  une base orthonormée direct  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  liée à  $M$  donc mobile, dite intrinsèque ou locale, telle que :

$\vec{u}_r$  : vecteur unitaire porté par  $\overline{OM}$

$\vec{u}_\theta$  : vecteur unitaire perpendiculaire à  $\vec{u}_r$ , tangent au méridien passant par  $M$  et orienté dans le sens des angles  $\theta$  croissants

$\vec{u}_\varphi$  : vecteur unitaire perpendiculaire à  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  tangent au parallèle passant par  $M$  et orienté dans le sens des angles  $\varphi$  croissants .

$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  constitue une base orthonormée directe .on a donc  $\vec{u}_\varphi = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$

Dans ce repère  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  le vecteur du position s'écrit :

$$\overline{OM} = r\vec{u}_r \tag{II-11}$$

- **Relations entre les vecteurs de base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  et  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  :**

On remarque :

$\widehat{\vec{k}, \vec{u}_r} = \theta \Rightarrow$  la projection de  $\vec{u}_r$  dans le plan  $XOY$  est égale à  $\sin \theta$  et porté par  $\overline{Om}$

$\widehat{OX, \overrightarrow{Om}} = \varphi \Rightarrow$  les projections de cette dernière respectivement sur  $OX$  et  $OY$  sont  $\cos\varphi$  et  $\sin\varphi$

$$\vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k} \quad (\text{II-12})$$

De la même façon, les projections de  $\vec{u}_\theta$  dans le plan  $XOY$  puis sur les deux axes  $OX$  et  $OY$  donnent

$$\vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\vec{j} - \sin\theta\vec{k} \quad (\text{II-13})$$

Le vecteur  $\vec{u}_\varphi$  est parallèle au plan  $XOY$  ; il est perpendiculaire à  $\overrightarrow{Om}$ , ces composantes sont :

$$\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j} \quad (\text{II-14})$$

En peut exprimer, de la même façon, les vecteurs  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  en fonction de  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$

$$\begin{cases} \vec{i} = \sin\theta\cos\varphi\vec{u}_r + \cos\theta\cos\varphi\vec{u}_\theta - \sin\varphi\vec{u}_\varphi \\ \vec{j} = \sin\theta\sin\varphi\vec{u}_r + \cos\theta\sin\varphi\vec{u}_\theta + \cos\varphi\vec{u}_\varphi \\ \vec{k} = \cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta \end{cases} \quad (\text{II-15})$$

Ces relations entre les vecteurs de base peuvent être représentées sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{u}_\theta \\ \vec{u}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \quad (\text{II-16})$$

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{u}_\theta \\ \vec{u}_\varphi \end{pmatrix} \quad (\text{II-17})$$

En dérivant les Eqs (II-12), (II-13) et (II-14) par rapport à  $\theta$  on trouve :

$$\frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \theta} = \vec{u}_\theta \quad (\text{II-18})$$

$$\frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{u}_r \quad (\text{II-19})$$

$$\frac{\partial \vec{u}_\varphi}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{II-20})$$

En dérivant les Eqs ( II-12) , (II-13) et ( II-14) par rapport à  $\varphi$  on trouve :

$$\frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \varphi} = \sin\theta \vec{u}_\varphi \quad (\text{II-21})$$

$$\frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial \varphi} = \cos\theta \vec{u}_\varphi \quad (\text{II-22})$$

$$\frac{\partial \vec{u}_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin\theta \vec{u}_r - \cos\theta \vec{u}_\theta \quad (\text{II-23})$$

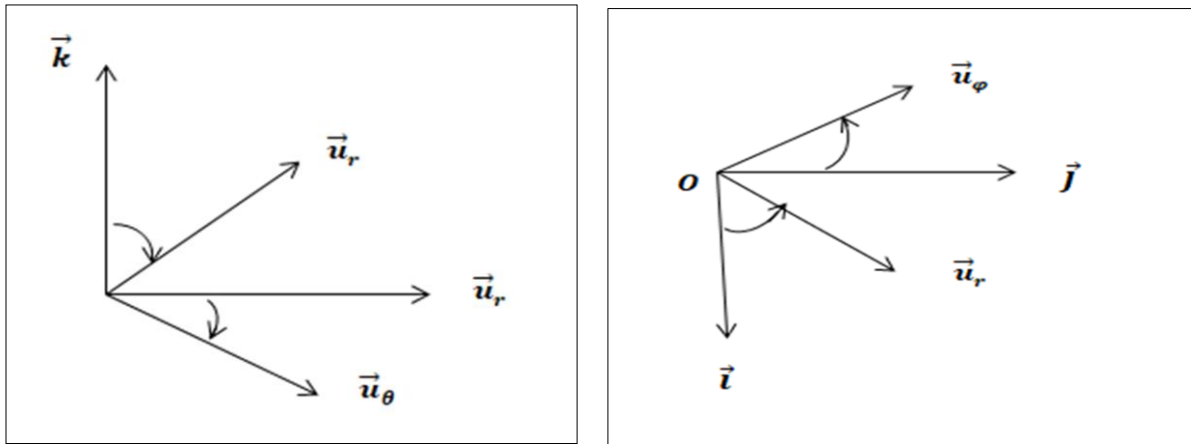


Fig. II-7

- **Relations entre les coordonnées (  $x, y, z$  ) et (  $r, \theta, \varphi$  ) :**

Ces relations sont établies à partir des projections de  $\vec{OM} = r\vec{u}_r$  sur les axes  $OX, OY, OZ$

$$\begin{cases} x = |\vec{Om}| \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi : \text{projection de } \vec{Om} \text{ sur l'axe } OX \\ y = |\vec{Om}| \sin\varphi = r \sin\theta \sin\varphi : \text{projection de } \vec{Om} \text{ sur l'axe } OY \\ z = r \cos\theta \end{cases} \quad (\text{II-24})$$

Inversement, on peut exprimer  $r, \theta$  et  $\varphi$  en fonction  $x, y$  et  $z$  :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos\theta = z / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \text{tag}\varphi = y/x \end{cases} \quad (\text{II-25})$$

- **Vecteur déplacement élémentaire :**

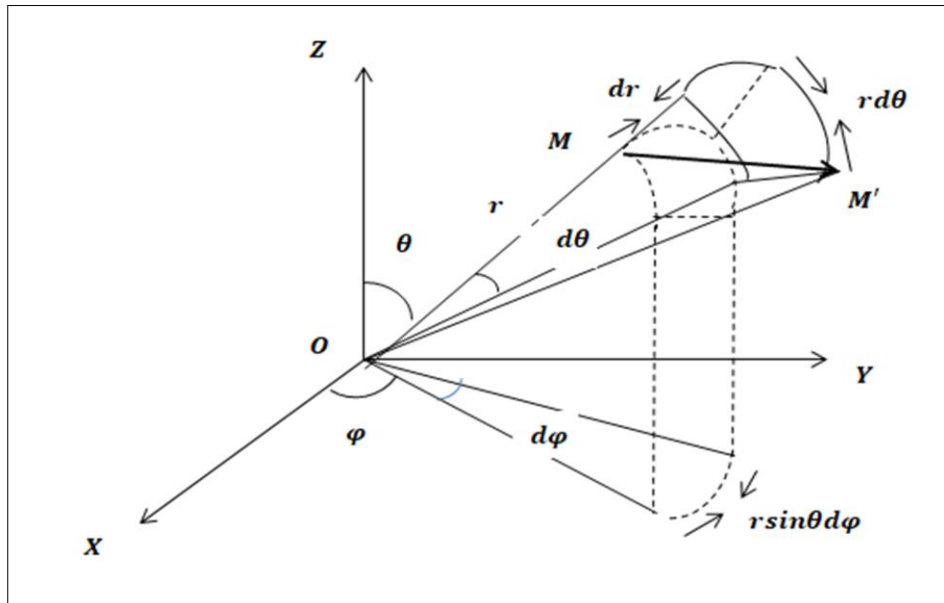


Fig. II-8

Soit le point  $M ( r, \theta , \varphi )$  déplaçons jusqu'à une position  $M' ( r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi )$  .  
 Et exprimons dans la base  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$  , le vecteur déplacement

$$\vec{dl} = \overline{MM'} = d(\overline{OM}) = d(r\vec{u}_r) = dr\vec{u}_r + rd\vec{u}_r$$

Comme  $\vec{u}_r = f(\theta, \varphi) \Rightarrow d\vec{u}_r = \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \varphi} d\varphi$

$$\vec{dl} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$$

Représentons sur la figure II-8 ce vecteur  $\vec{dl}$  qui est la somme de trois déplacements élémentaires parallèlement à  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$  .

▪ **Volume et surface élémentaires :**

Ainsi le volume élémentaire construit sur les déplacements qu'on assimile à un parallélépipède de cotés  $dr, rd\theta, r\sin\theta d\varphi$  est égale à :

$$dV = dr, rd\theta, r\sin\theta d\varphi$$

Ce volume est limité par six faces parallèles et isométriques deux à deux qu'on représente par les vecteurs surfaces élémentaires orientés vers l'extérieur tels que :

$$\begin{cases} r = Cst : dS_r = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{u}_r \\ \theta = Cst : \vec{dS}_\theta = r \sin\theta dr d\varphi \vec{u}_\theta \\ \varphi = Cst : \vec{dS}_\varphi = r dr d\theta \vec{u}_\varphi \end{cases}$$

**Grandeurs cinématiques :**

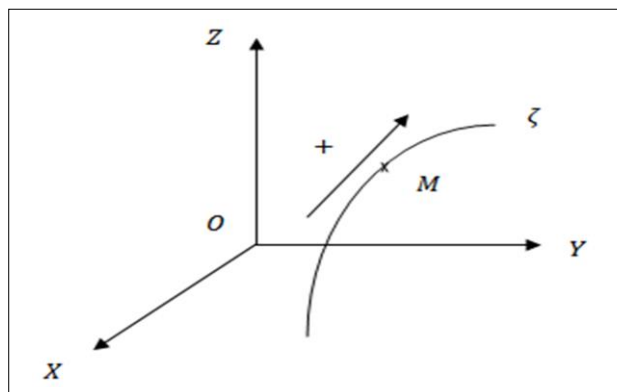
### 3.1-Définitions :

Comme nous l'avons vu précédemment, tout vecteur est complètement défini, après le choix d'un repère adéquat ( une origine O et une base orthonormée directe de vecteurs unitaires (  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  ) par la donnée de trois grandeurs scalaires  $r_1, r_2$  et  $r_3$ , dans ce repère, tout point M sera repéré par le vecteur position

$$\overrightarrow{OM}(t) = r_1(t)\vec{e}_1 + r_2(t)\vec{e}_2 + r_3(t)\vec{e}_3 \quad (\text{II-26})$$

Appelé aussi *équation du mouvement* ou *loi horaire* de M sur  $\zeta$

A partir de la variation  $r_1(t)$ ,  $r_2(t)$ , et  $r_3(t)$ , on définit la trajectoire  $\zeta$  par la courbe que décrit le point M au cours du temps. C'est une courbe orientée positivement dans le sens du mouvement de M



**Fig. II-9**

### 3.2-Vecteur vitesse :

#### a) Vitesse moyenne :

Le vecteur vitesse moyenne d'une particule M qui se trouve à l'instant  $t_1$  en  $M_1$  et à l'instant  $t_2 = t_1 + \Delta t$  en  $M_2$  est donnée par :

$$\vec{V}_m = \frac{\overrightarrow{OM}_2(t_2) - \overrightarrow{OM}_1(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\vec{V}_m = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t}$$

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta \overline{OM}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (\text{II-27})$$

## b) Vitesse instantanée :

Le vecteur vitesse instantanée du point M par rapport à un repère orthonormé  $R(O, x, y, z)$

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{OM}_2(t_1 + \Delta t) - \overline{OM}_1(t_1)}{\Delta t}$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overline{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (\text{II-28})$$

## c) vitesse algébrique :

Dans ce cas c'est la trajectoire elle-même qui sert à repérer le mobile, à l'aide de l'abscisse curviligne  $\Delta s = \text{arc } M_1 M_2$ , la vitesse algébrique de M

$$V = \frac{ds}{dt} \quad (\text{II-29})$$

Si  $\vec{T}$  est un vecteur unitaire tangent à la trajectoire  $\zeta$  en M et orienté dans le sens de mouvement. Le vecteur de vitesse instantanée peut donc s'écrire :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{T} \quad (\text{II-30})$$

## 3.3-Vecteur accélération :

### a) Accélération moyenne :

Le vecteur vitesse d'une particule M qui se trouve à l'instant  $t_1$  en  $M_1$  est

$\vec{V}(t_1) = \frac{d\overline{OM}_1}{dt}$ . Et à l'instant  $t_2 = t_1 + \Delta t$  en  $M_2$  est  $\vec{V}(t_2) = \frac{d\overline{OM}_2}{dt}$ . Ainsi, pendant l'intervalle de temps  $\Delta t = t_2 - t_1$ , la vitesse de M varie de  $\Delta \vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$  et on définit l'accélération moyenne par le vecteur :

$$\vec{\gamma}_m = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} \quad (\text{II-31})$$

### b) Accélération instantanée :

La limite de l'accélération moyenne quand  $\Delta t \rightarrow 0$  devient accélération instantanée du point M à l'instant  $t$ , soit

$$\vec{\gamma}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{\gamma}_m = \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$



$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d^2 \overline{OM}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (\text{II-32})$$

**-Expression des grandeurs Cinématique dans le système des coordonnées :**

**4.1- Expression des grandeurs Cinématique dans la base Coordonnées cartésiennes (x ,y ,z):**

Soit un référentiel  $R(O, x, y, z)$  fixe muni d'une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et le point M de coordonnées cartésiennes  $x, y, z$ .

Le vecteur position s'écrit :

$$\overline{OM}(t) = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (\text{II-33})$$

Ou  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  sont les équations paramétriques ; elles sont données par

$$\begin{cases} x(t) = \overline{OM}(t) \cdot \vec{i} \\ y(t) = \overline{OM}(t) \cdot \vec{j} \\ z(t) = \overline{OM}(t) \cdot \vec{k} \end{cases}$$

Son module est  $|\overline{OM}| = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Le vecteur vitesse  $\vec{V}$  défini dans la même base s'écrit :

$$\vec{V}(t) = \frac{d}{dt} \overline{OM}(t) \quad (\text{II-34})$$

$$\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{i} + V_y(t)\vec{j} + V_z(t)\vec{k}$$

Soit ;

$$\vec{V}(t) \begin{cases} V_x = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) \\ V_y = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) \\ V_z = \frac{dz(t)}{dt} = \dot{z}(t) \end{cases} \quad (\text{II-35})$$

$$\vec{V}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \vec{i} + \frac{dy(t)}{dt} \vec{j} + \frac{dz(t)}{dt} \vec{k} \quad (\text{II-36})$$

Son module est :  $|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

Le vecteur accélération instantanée du point M s'écrit :

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} \vec{V}(t) \quad (\text{II-37})$$

$$\vec{\gamma}(t) = \gamma_x(t)\vec{i} + \gamma_y(t)\vec{j} + \gamma_z(t)\vec{k}$$

Avec ;

$$\vec{\gamma}(t) \begin{cases} \gamma_x(t) = \frac{d}{dt} V_x(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t) \\ \gamma_y(t) = \frac{d}{dt} V_y(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \ddot{y}(t) \\ \gamma_z(t) = \frac{d}{dt} V_z(t) = \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = \ddot{z}(t) \end{cases} \quad (\text{II-38})$$

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \vec{k} \quad (\text{II-39})$$

Son module est :  $|\vec{\gamma}| = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$

## 4.2-Expression des grandeurs Cinématique dans la base Coordonnées cylindrique $(\rho, \theta, z)$ :

Soit la base locale cylindrique orthonormée direct  $\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$  .le point M est donné par ces coordonnées  $(\rho, \theta, z)$ .

Le vecteur position est donné par :

$$\vec{OM}(t) = \rho(t)\vec{u}_\rho + z(t)\vec{u}_z \quad (\text{II-40})$$

Son module est :  $|\vec{OM}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$

Le vecteur vitesse s'écrit dans la même base :

$$\vec{V}(t) = \frac{d}{dt}(\rho(t)\vec{u}_\rho + z(t)\vec{u}_z) \quad (\text{II-41})$$

$$\vec{V}(t) = V_\rho(t)\vec{u}_\rho + V_\theta(t)\vec{u}_\theta + V_z(t)\vec{u}_z$$

$$\vec{V}(t) \begin{cases} V_\rho(t) = \frac{d\rho(t)}{dt} = \dot{\rho}(t): \text{composante radiale} \\ V_\theta(t) = \rho \frac{d\theta(t)}{dt} = \rho\dot{\theta}(t): \text{composante orthoradiale} \\ V_z(t) = \frac{dz(t)}{dt} = \dot{z}(t): \text{composante altitude} \end{cases} \quad (\text{II-42})$$

$$\vec{V}(t) = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta + \dot{z}(t)\vec{u}_z \quad (\text{II-43})$$

Son module est :  $|\vec{V}| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}$

L'accélération du point M s'écrit :

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} \vec{V}(t) = \gamma_\rho(t) \vec{u}_\rho + \gamma_\theta(t) \vec{u}_\theta + \gamma_z(t) \vec{u}_z$$

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} [\dot{\rho}(t) \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta + \dot{z}(t) \vec{u}_z] \quad (\text{II-44})$$

$$\vec{\gamma}(t) = \ddot{\rho}(t) \vec{u}_\rho + \dot{\rho}(t) \frac{d}{dt} \vec{u}_\rho + \dot{\rho}(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta + \dot{\rho}(t) \ddot{\theta}(t) \vec{u}_\theta + \rho(t) \dot{\theta}(t) \frac{d}{dt} \vec{u}_\theta + \ddot{z}(t) \vec{u}_z \quad (\text{II-45})$$

D'après l'Eqs ( II-8) et ( II-9) , nous trouvons pour  $\vec{\gamma}(t)$  :

$$\vec{\gamma}(t) = [\ddot{\rho}(t) - \rho(t) \dot{\theta}^2(t)] \vec{u}_\rho + [\rho(t) \ddot{\theta}(t) + 2\dot{\rho}(t) \dot{\theta}(t)] \vec{u}_\theta + \ddot{z}(t) \vec{u}_z \quad (\text{II-46})$$

$$\vec{\gamma}(t) \begin{cases} \gamma_\rho = \ddot{\rho}(t) - \rho(t) \dot{\theta}^2(t) \\ \gamma_\theta = \rho(t) \ddot{\theta}(t) + 2\dot{\rho}(t) \dot{\theta}(t) \\ \gamma_z = \ddot{z}(t) \end{cases} \quad (\text{II-47})$$

Son module est  $|\vec{\gamma}| = \sqrt{\gamma_\rho^2 + \gamma_\theta^2 + \gamma_z^2}$

### Remarque:

Dans le cas d'un mouvement plan, nous avons  $z = 0$  et le vecteur vitesse et le vecteur d'accélération s'écrivent alors:

$$\vec{V}(t) \begin{cases} V_\rho(t) = \frac{d\rho(t)}{dt} = \dot{\rho}(t) \\ V_\theta(t) = \rho \frac{d\theta(t)}{dt} = \rho \dot{\theta}(t) \end{cases} \quad (\text{II-48})$$

$$\vec{\gamma}(t) \begin{cases} \gamma_\rho = \ddot{\rho}(t) - \rho(t) \dot{\theta}^2(t) \\ \gamma_\theta = \rho(t) \ddot{\theta}(t) + 2\dot{\rho}(t) \dot{\theta}(t) \end{cases} \quad (\text{II-49})$$

### 4.3-Expression des grandeurs Cinématique dans la base Coordonnées sphérique $(r, \theta, \varphi)$ :

Soit la base locale cylindrique orthonormée direct  $\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$  .tout point M est repéré par les trois coordonnées  $r, \theta, \varphi$ .

Le vecteur position est donné par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t) \vec{u}_r \quad (\text{II-50})$$

Le vecteur vitesse s'écrit dans la même base :

$$\vec{V}(t) = V_r(t) \vec{u}_\rho + V_\theta(t) \vec{u}_\theta + V_\varphi(t) \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM}(t) = \frac{d}{dt} [r(t) \cdot \vec{u}_r] \quad (\text{II-51})$$

$$\vec{V}(t) = \frac{dr(t)}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

$$\vec{V}(t) = \frac{dr(t)}{dt} \vec{u}_r + r \left[ \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \varphi} d\varphi \right]$$

Nous utilisant l'Eqs (II-18) et (II-20), nous obtenons :

$$\vec{V}(t) = \dot{r}(t) \vec{u}_r + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta + r(t) \sin\theta(t) \dot{\varphi}(t) \vec{u}_\varphi \quad (\text{II-52})$$

$$\vec{V}(t) \begin{cases} V_r(t) = \dot{r}(t) : \text{composante} \\ V_\theta(t) = r(t) \dot{\theta}(t) \\ V_\varphi(t) = r(t) \sin\theta(t) \dot{\varphi}(t) \end{cases} \quad (\text{II-53})$$

Son module est  $|\vec{V}| = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2 + V_\varphi^2}$

L'accélération est donnée par :

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} \vec{V}(t) = \gamma_r(t) \vec{u}_r + \gamma_\theta(t) \vec{u}_\theta + \gamma_\varphi(t) \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} [\dot{r}(t) \vec{u}_r + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta + r(t) \sin\theta(t) \dot{\varphi}(t) \vec{u}_\varphi] \quad (\text{II-54})$$

$$\vec{\gamma}(t) = \ddot{r}(t) \vec{u}_r + \dot{r}(t) \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r}(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta + r(t) \ddot{\theta}(t) \vec{u}_\theta + r(t) \dot{\theta}(t) \frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$+ \dot{r}(t) \sin\theta(t) \dot{\varphi}(t) \vec{u}_\varphi + r(t) \frac{d}{dt} \sin\theta(t) \dot{\varphi}(t) \vec{u}_\varphi + r(t) \sin\theta(t) \ddot{\varphi}(t) \vec{u}_\varphi$$

$$+ r(t) \sin\theta(t) \dot{\varphi}(t) \frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}$$

D'après

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \varphi} d\varphi \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \\ \frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = \end{cases} \quad (\text{II-55})$$

$$\begin{cases} \gamma_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r(\sin\theta)^2 \dot{\varphi}^2 \\ \gamma_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta \dot{\varphi}^2 \\ \gamma_\varphi = r\sin\theta \ddot{\varphi} + 2r\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta \end{cases} \quad (\text{II-56})$$

Son module est  $|\vec{\gamma}| = \sqrt{\gamma_r^2 + \gamma_\theta^2 + \gamma_\varphi^2}$

#### 4.4-Expression des grandeurs Cinématique dans la base de Serret –Frenet :

On considère la trajectoire  $\zeta$  orientée décrite par le point M au cours du temps .On définit la base  $(\vec{T}, \vec{B}, \vec{N})$  de Serret –Frenet par trois vecteurs unitaires, perpendiculaires deux à deux et formant un trièdre direct tel que :

$\vec{T}$  : vecteur unitaire tangent à  $\zeta$  en M et orienté dans le sens du mouvement

$\vec{N}$  : vecteur unitaire perpendiculaire à  $\vec{T}$  et tourné vers la partie concave de  $\zeta$ ,  $\vec{N}$  est appelée la normale principale à  $\zeta$  en M .le plan  $(\vec{T}, \vec{N})$  forme le plan osculateur

$\vec{B}$  : vecteur unitaire tel que  $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$  ;  $\vec{B}$  est appelée la binormale à  $\zeta$  en M

La position de point M sur la trajectoire  $\zeta$  est repérée par son abscisse curviligne :

$$\widehat{AM} = S(t) \quad (\text{II-57})$$

Ou A est origine arbitraire sur  $\zeta$

La vitesse V du point M s'écrit

$$\vec{V} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{AM} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt}$$

Ou  $\frac{d\vec{r}}{dS} = \vec{u}_T$  est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire, d'où :

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{u}_T \quad (\text{II-58})$$

Le vecteur de vitesse est donc tangent à la trajectoire , ces composantes dans le plan normal N ,B étant nulles , et a pour module  $\frac{ds}{dt}$

Pour déterminer vecteur d'accélération, on dérive l'expression  $\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{u}_T$

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \vec{u}_T \right) \\ \vec{\gamma} &= \frac{d^2s}{dt^2} \vec{u}_T + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{u}_T}{dt} \\ \vec{\gamma} &= \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + v \frac{d\vec{u}_T}{dt} \end{aligned} \quad (\text{II-59})$$

Le premier terme  $\frac{dv}{dt}\vec{u}_T$  est un vecteur tangent à la trajectoire, On l'appelle " accélération tangentielle "

$$\vec{\gamma}_T = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T \quad (\text{II-60})$$

Et le second terme  $v\frac{d\vec{u}_T}{dt}$ , on l'appelle accélération normale

$$\vec{\gamma}_N = v\frac{d\vec{u}_T}{dt} \quad (\text{II-61})$$

Donc :

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_T + \vec{\gamma}_N$$

## Etude des mouvements du point matériel

### 5.1-Mouvement Rectiligne :

- **Définition :**

Un mouvement est rectiligne lorsque la trajectoire suivie par le mobile est ligne droite

- **Vecteur de position :**

Appelons X'OX l'axe sur lequel s'effectue le mouvement (Fig. II-10) .la position M d'un point matériel à l'instant t est défini par son déplacement  $x(t)$  à partir d'un point arbitraire O , appelé origine .

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} \quad (\text{II-62})$$

X(t) est l'abscisse du point M à l'instant t

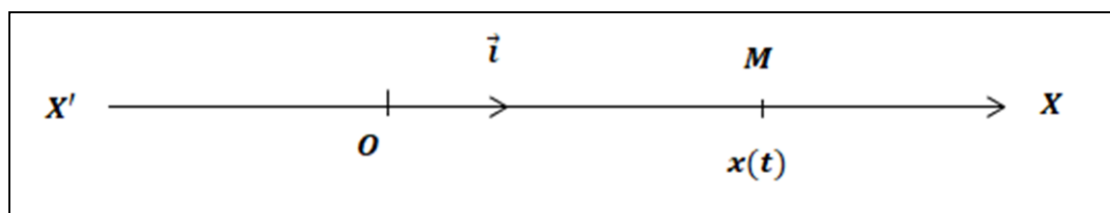


Fig. II-10

- **Vecteur de Vitesse :**

Le déplacement peut être relié au temps au moyen d'une relation fonctionnelle  $x = f(t)$  .supposons qu'au temps  $t_1$  l'objet soit à la position A, avec  $OA = x_1$  .A un moment ultérieur  $t_2$  , il est en B avec  $OB = x_2$  .on définit la vitesse moyenne entre A et B par :

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \quad (\text{II-63})$$

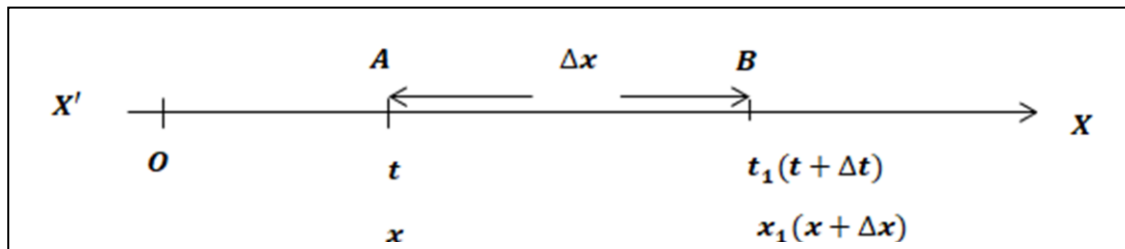


Fig. II-11

Ou  $\Delta \vec{x}(t) = \vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)$  est le déplacement de la particule et  $\Delta t = t_2 - t_1$  le temps écoulé. Pour déterminer la vitesse instantanée en un point, tel que A, nous devons rendre l'intervalle de temps  $\Delta t$  aussi petit que possible, de sorte que pratiquement aucun changement de l'état de mouvement ne se produise durant ce petit intervalle. En langage

mathématiquement, ceci revient à calculer la valeur limite de vitesse moyenne. ceci s'écrit sous la forme

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{moy} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

Nous obtenons la vitesse instantanée en calculant la dérivée du déplacement par rapport au temps

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (\text{II-64})$$

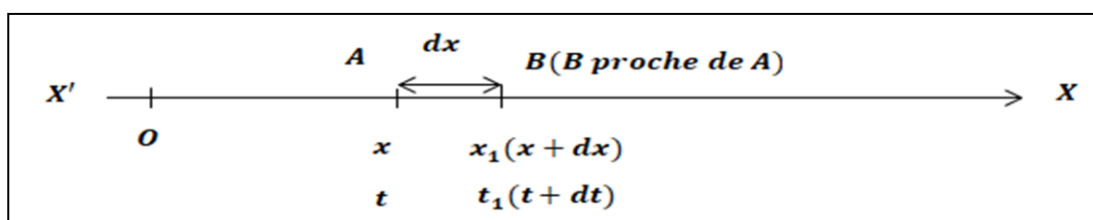


Fig. II-12

Pratiquement, en observant le corps en mouvement en deux positions très voisines séparées par la petite distance  $dx$  et en mesurant le petit intervalle de temps  $dt$  nécessaire pour aller d'une position à l'autre.

## CINEMATIQUE

---

Nous pouvons résoudre l'Eq. (II-64) pour la variable  $x$  par intégration. ;

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v dt$$

Où  $x_0$  désigne la valeur  $x$  au temps  $t_0$ , puisque  $\int_{x_0}^x dx = x - x_0$ ,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt \quad (\text{II-65})$$

- ❖ Le terme « **vitesse** » se rapportera toujours à la vitesse instantanée.
- ❖ Le déplacement  $\Delta x$  ( ou  $dx$  ) peut être positif ou négatif suivant le mouvement de la particule avec pour conséquence un signe plus ou moins pour la vitesse .
- ❖ Le signe de la vitesse dans le mouvement rectiligne indique-t-il la direction du mouvement ; la direction est suivant  $+OX$  si la vitesse est positive et suivant  $-OX$  si elle est négative.
- ❖ Quelquefois on utilise une autre notion de vitesse, définie comme le rapport distance /temps, elle est toujours positive et numériquement égale à la valeur absolue de la vitesse  $|\vec{v}|$  .
- ❖ Dans le système d'unités , la vitesse s'exprime en mètre par seconde ou  $ms^{-1}$
- **Vecteur d'accélération :**

Nous reportant de nouveau à la Fig. ( II-11 ) , supposons qu'au temps  $t_1$ , l'objet soit en A avec la vitesse  $v_1$ , et qu'au temps  $t_2$  il soit en B avec la vitesse  $v_2$ . L'accélération moyenne entre A et B est définie par :

$$a_{moy} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (\text{II-66})$$

Où  $\Delta v = v_2 - v_1$  est la variation de vitesse et comme précédemment  $\Delta t = t_2 - t_1$  le temps écoulé.

L'accélération instantanée est la valeur limite de L'accélération moyenne quand l'intervalle de temps  $\Delta t$  devient très petit .C'est à dire

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{moy} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

D'où il résulte

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (\text{II-67})$$



## CINEMATIQUE

---

Pratiquement, on trouve l'accélération instantanée en observant le petit changement de vitesse  $dv$  qui a lieu dans le petit intervalle de temps .

D'après l'Eq (II-67), nous avons  $dv = a dt$ , nous pouvons calculer la vitesse en intégrant l'Eq, nous obtenons

$$\int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a dt$$

Ou  $v_0$  est la vitesse au temps  $t_0$ , alors puisque  $\int_{v_0}^v dv = v - v_0$

$$v = v_0 + \int_{t_0}^t a dt \quad (\text{II-68})$$

On peut aussi relier l'accélération à la position en combinant les Eqs (II-64) et (II-67) .ce qui donne

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right)$$

Ou

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (\text{II-69})$$

Une autre relation importante entre la position et la vitesse peut être obtenue de la manière suivante :

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a. dt$$

$$v.(dv) = v(a. dt)$$

$$v.(dv) = \frac{dx}{dt} (a. dt)$$

$$v. dv = a. dx$$

En intégrant, nous obtenons :

$$\int_{v_0}^v dv = \int_{x_0}^x a dx$$

Ou

$$\frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) = \int_{x_0}^x a dx \quad (\text{II-70})$$

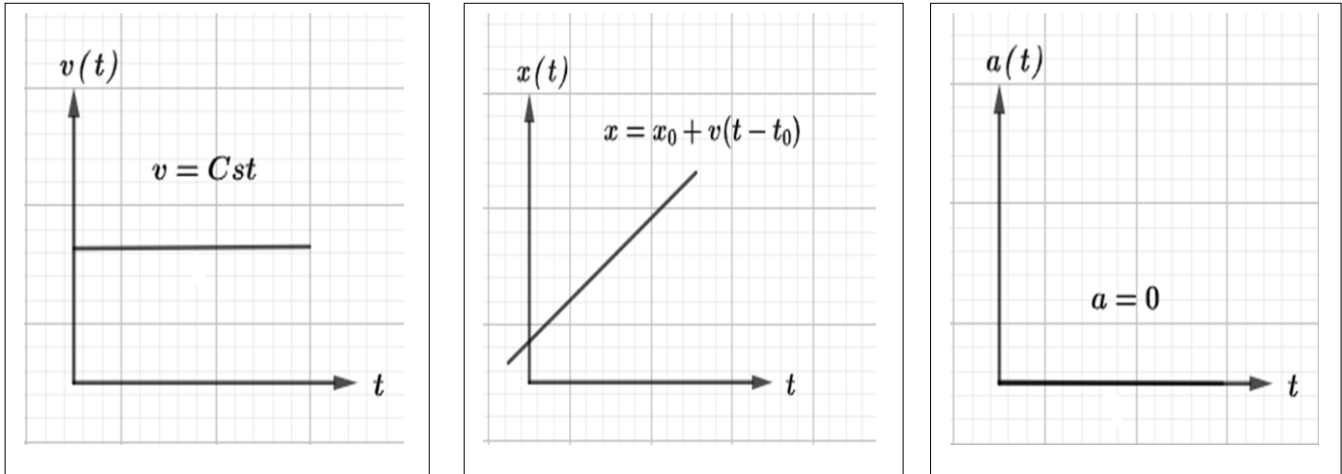
Le terme « **accélération** » signifiera toujours accélération instantanées.

# CINEMATIQUE

Dans le système MKSC, l'accélération s'exprime en mètres par seconde par seconde ou  $(m/s)/s = ms^{-2}$ .

## 5.1.1-Mouvement rectiligne particuliers :

### ▪ Mouvement rectiligne uniforme :



**Fig. II-13:** Graphe de la vitesse , l'accélération et du déplacement dans un mouvement uniforme

Un mouvement rectiligne est dite uniforme lorsque la vitesse  $v$  du mobile est une constante .Son accélération est donc nulle. En utilisant l'éq (II-65 ) , on peut déterminer l'abscisse du mobile à n'importe quel instant  $t$ .

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0) \quad (\text{II-71})$$

### ▪ Mouvement rectiligne uniformément varié :

Un mouvement rectiligne est dite uniformément varié lorsque son accélération  $a$  est constante des Eqs . (II-65) , (II-68) et (II-70) , on peut déterminer l'abscisse et la vitesse du mobile à n'importe quel instant :

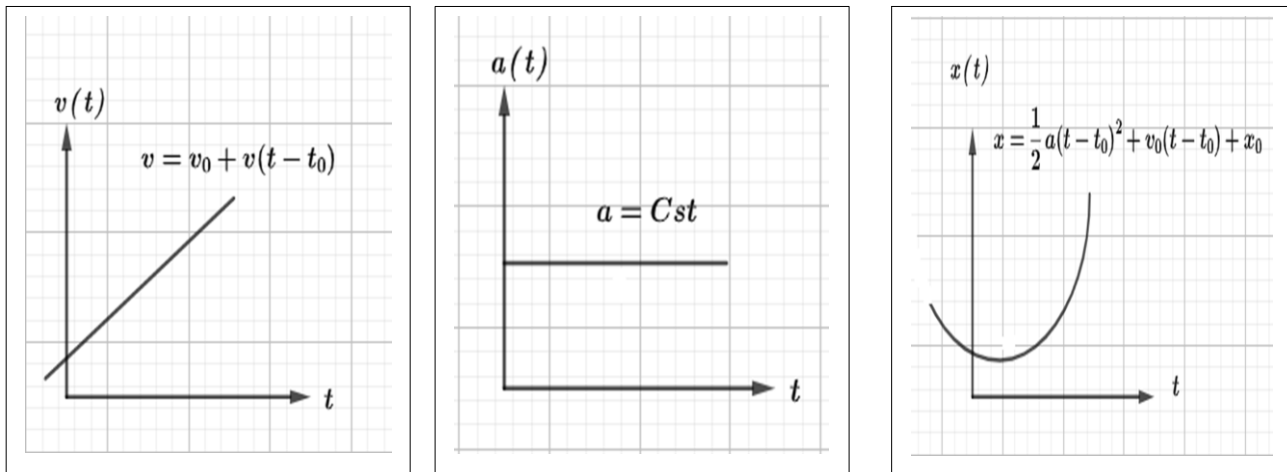
$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \quad (\text{II-72})$$

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0) \quad (\text{II-73})$$

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = a(x - x_0)$$

Alors

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (\text{II-74})$$



**Fig. II-14:** Graphe de la vitesse, l'accélération et du déplacement dans un mouvement uniformément varié

### 5.1.2-Mouvement accéléré et retardé :

un mouvement est dit accéléré lorsque le module de la vitesse du mobile est une fonction croissante du temps .un mouvement est dit retardé lorsque le module de la vitesse du mobile est une fonction décroissante du temps .

en effet , dans le cas du mouvement accéléré , le module  $v$  de la vitesse étant une fonction croissante du temps , sa dérivé par rapport au temps  $\frac{dv}{dt}$  est alors positive .De ce fait le produit  $v \cdot \frac{dv}{dt}$  est aussi positif .Or

$$\frac{d}{dt} v^2 = \frac{d}{dt} (v \cdot v) = v \frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dt} v = 2v \cdot \frac{dv}{dt} > 0$$

$$v \cdot \frac{dv}{dt} > 0 \Leftrightarrow v \cdot a > 0$$

dans le cas du mouvement retardé, le raisonnement est analogue avec  $\frac{dv}{dt}$  négative.

On peut conclure que dans le mouvement accéléré, on a la propriété

$$v \cdot a > 0$$

et que pour un mouvement retardé, on a

$$v \cdot a < 0$$

## 5.1.3- Représentations vectorielle de la vitesse et de l'accélération dans un mouvement rectiligne :

Si  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire dans la direction des X positifs, nous pouvons écrire sous forme vectorielle

$$\vec{v} = v\vec{u} = \frac{dx}{dt}\vec{u}$$

Et

$$\vec{a} = a\vec{u} = \frac{dv}{dt}\vec{u}$$

Les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{a}$  sont dirigés suivant  $\vec{u}$  ou dans la direction opposée, suivant les signes de  $\frac{dx}{dt}$  et  $\frac{dv}{dt}$ . Le mouvement est accéléré ou retardé, suivant que  $\vec{v}$  et  $\vec{a}$  ont la même direction ou des directions opposées ( Fig II-15 ). Il y a une règle simple : si  $\vec{v}$  et  $\vec{a}$  sont de même signe, le mouvement est accéléré ; s'ils sont de signes contraires, le mouvement est retardé .

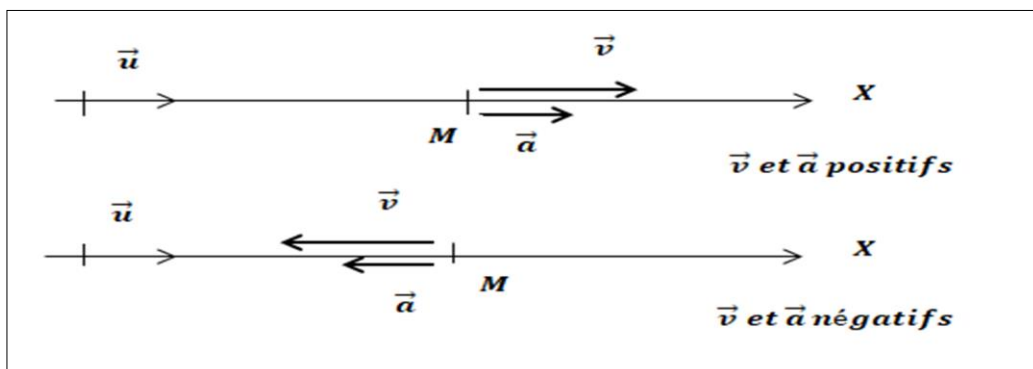


Fig . II-15: (a) Mouvement accéléré (  $(\vec{v} \cdot \vec{a} > 0)$  )

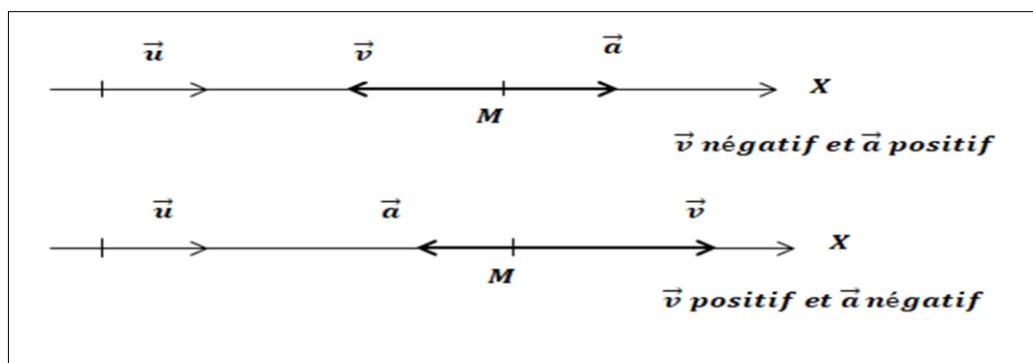


Fig . II-15: ( b) Mouvement retardé (  $(\vec{v} \cdot \vec{a} < 0)$  )

## 5.2-Mouvement curviligne :

- **Définition :**

Un mouvement est curviligne lorsque nous considérons un mobile  $M$  qui se déplace le long d'une courbe  $\zeta$  quelconque .

- **Vecteur Position :**

Dans l'espace à 3D .la position  $M$  d'un point matériel à l'instant  $t$  est défini par son déplacement  $x(t)$  ,  $y(t)$  et  $z(t)$  .On appelle vecteur position, la fonction de  $t$

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z \quad (\text{II-75})$$

Ou  $x(t)$  ,  $y(t)$  et  $z(t)$  sont les coordonnées à l'instant  $t$  de  $M$  .

- **Vecteur vitesse :**

### i) Définition à partir du vecteur position :

Considérons une particule décrivant un chemin curviligne  $\xi$  , comme le présente la Fig.II-16

Au temps  $t$  la particule est au point  $A$  , repéré par le vecteur position :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OA} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

Au temps  $t_1$ , la particule sera en  $B$  avec position :

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OB} = x_1 \vec{u}_x + y_1 \vec{u}_y + z_1 \vec{u}_z$$

Bien que la particule ait parcouru l'arc  $AB = \Delta s$ , le déplacement qui est un vecteur est

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta r}$$

Remarquons d'après la figure que  $\vec{r}_1 = \vec{r} + \overrightarrow{\Delta r}$  , et que par conséquent

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta r} &= \vec{r}_1 - \vec{r} \\ &= (x_1 - x)\vec{u}_x + (y_1 - y)\vec{u}_y + (z_1 - z)\vec{u}_z \\ &= (\Delta x)\vec{u}_x + (\Delta y)\vec{u}_y + (\Delta z)\vec{u}_z \end{aligned}$$

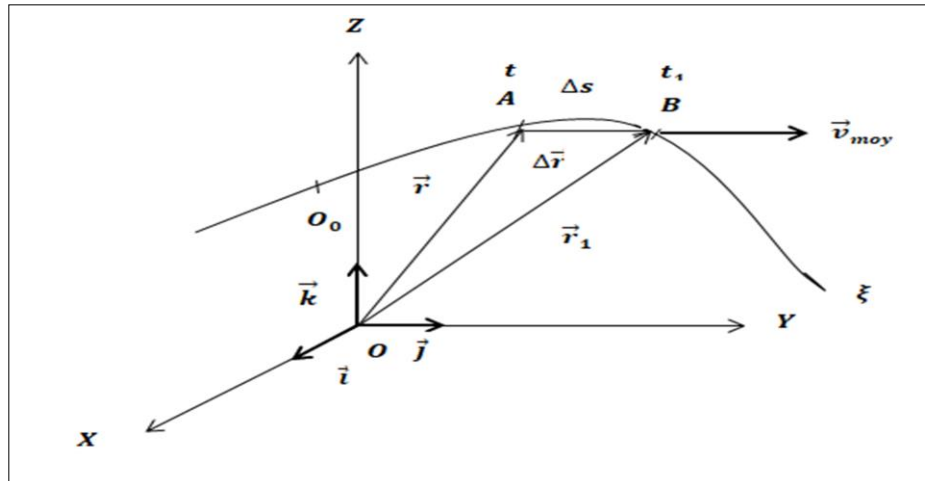
Ou  $\Delta x = x_1 - x$  ,  $\Delta y = y_1 - y$  et  $\Delta z = z_1 - z$  .

La vitesse moyenne qui est aussi un vecteur , est défini par

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{u}_x + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{u}_y + \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{u}_z \quad (\text{II-76})$$

La vitesse moyenne est représentée par un vecteur parallèle au déplacement  $\overrightarrow{AB}$



**Fig. II-16:** déplacement et vitesse moyenne dans un mouvement curviligne.

Pour calculer la vitesse instantanée, nous devons procéder comme précédemment, faire  $\Delta t$  très petit ; d'où

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{moy} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Si maintenant  $\Delta t$  tend vers zéro, le point B s'approche du point A, comme indiquant les points B', B'', .... De la ( Fig. II-17 ). En même temps le vecteur  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta r}$  varie continuellement en grandeur et en direction, et il en est de même de la vitesse moyenne.

A la limite, quand B est très près de A, le vecteur  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta r}$  a la même direction que la tangente AT, donc dans un mouvement curviligne, la vitesse instantanée est un vecteur tangent à la trajectoire, qui est donné par

$$v = \frac{dr}{dt}$$

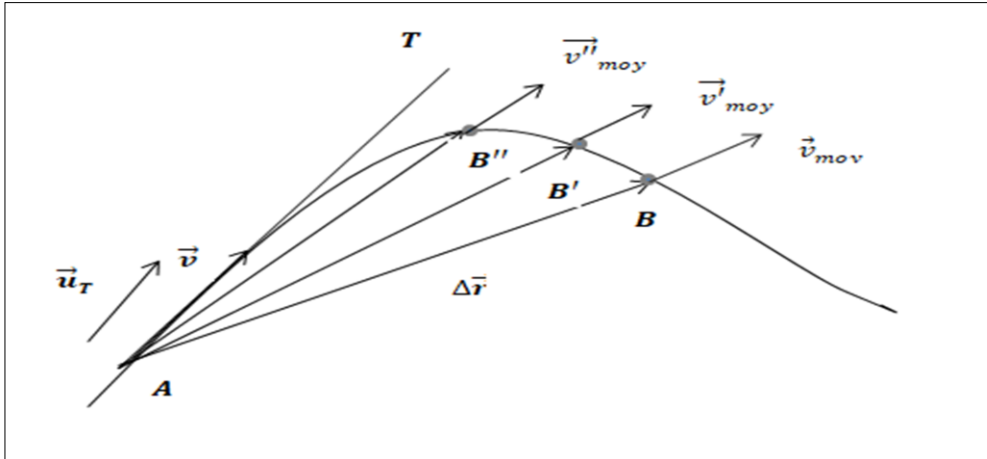
Les composantes de la vitesse suivant les axes OX, OY et OZ sont

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{cases} \quad (\text{II-77})$$

Et le passage de la vitesse à la position se fait par :

$$\begin{cases} x = x_0 + \int_{t_0}^t v_x \cdot dt \\ y = y_0 + \int_{t_0}^t v_y \cdot dt \\ z = z_0 + \int_{t_0}^t v_z \cdot dt \end{cases} \quad (\text{II-87})$$

Ou  $x_0, y_0$  et  $z_0$  sont les coordonnées du mobile à l'instant  $t_0$



**Fig . II-17:** la vitesse tangente à la trajectoire dans un mouvement curviligne

### i) Définition à partir de l'abscisse curviligne :

Soit  $O_0$  ( Fig .II-16 ) un point de référence arbitraire sur la trajectoire .la quantité  $s = O_0A$  donne la position de la particule mesurée par son déplacement le long de la courbe .comme pour un mouvement rectiligne ,  $s$  peut être positif ou négatif , suivant la position relative de  $O_0$  et de la particule , quand la particule se déplace de  $A$  à  $B$  le déplacement  $\Delta s$  suivant la courbe est donné par la longueur de l'arc  $AB$  .

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$v = \left( \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} \right) \cdot \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) \quad (\text{II-88})$$

Nous pouvons voir sur la Fig (II-16 ) que la grandeur  $\Delta r$  est presque égale à celle de  $\Delta s$  , et que ces deux valeurs sont d'autant plus proches l'une de l'autre que  $B$  se rapproche de  $A$ .la limite de  $\frac{\Delta r}{\Delta s}$  quand  $\Delta s$  tend vers zéro représente donc un vecteur de grandeur unité et dont la direction est tangente à la trajectoire .on a donc

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \vec{u}_T \quad (\text{II-89})$$

Par ailleurs

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (\text{II-90})$$

Nous pouvons donc écrire  $v$  sous la forme :

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{u}_t \quad (\text{II-91})$$

Ou  $\frac{ds}{dt} = v$  donne la valeur de la vitesse, et le vecteur unitaire  $\vec{u}_t$  en donne la direction. Cette valeur est en accord avec  $v = \frac{dx}{dt}$  puisque maintenant  $ds$  est le déplacement suivant la trajectoire courbe pendant le temps  $dt$  .ainsi  $ds$  joue-t-il le même rôle dans le mouvement curviligne que  $dx$  dans le mouvement rectiligne.

Le passage de la vitesse à l'abscisse curviligne se fait par

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt \quad (\text{II-92})$$

### ▪ Vecteur d'accélération :

Dans le mouvement curviligne la vitesse , en générale , change à la fois de grandeur et de direction .la grandeur de la vitesse change car la particule peut être accélérer ou ralentir

la direction de la vitesse change car la vitesse est tangente à la trajectoire et celle-ci se courbe continuellement .la Fig (II-18 ) donne la vitesse aux temps  $t$  et  $t'$  quand la particule est respectivement en A et en B .Le changement vectoriel de vitesse en allant de A à B est indiqué par  $\Delta v$  dans le triangle formé par les vecteur .il en résulte que l'accélération moyenne dans l'intervalle de temps  $\Delta t$  , qui est un vecteur , est définie par

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$

Puisque

$$\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z ,$$

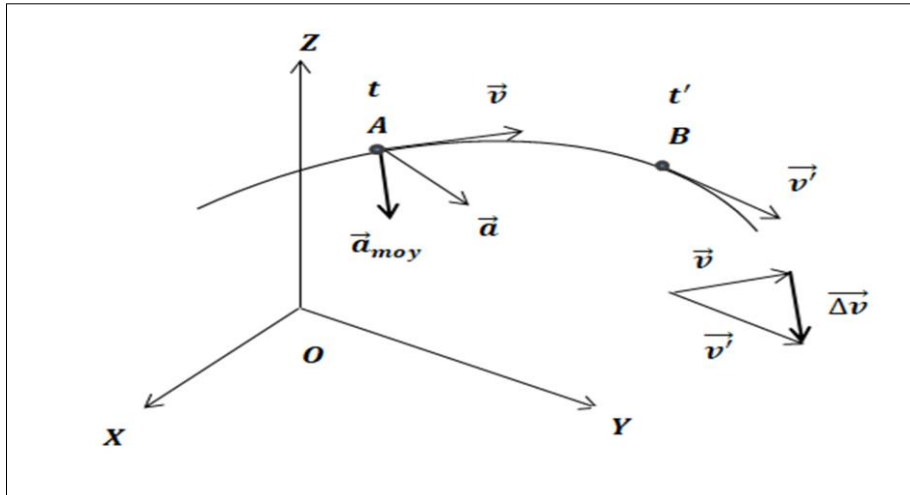
nous avons

$$\overrightarrow{\Delta v} = \Delta v_x \vec{u}_x + \Delta v_y \vec{u}_y + \Delta v_z \vec{u}_z$$

Et



$$\vec{a}_{moy} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \vec{u}_x + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \vec{u}_y + \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \vec{u}_z \quad (\text{II-93})$$



**Fig. II-18 :** l'accélération dans un mouvement curviligne

L'accélération instantanée, que par la suite nous appellerons simplement accélération, est défini par

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_{moy} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$

Ou

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Nous pouvons écrire aussi cette équation sous la forme :

$$a = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

Les composante de l'accélération suivant les axes OX, OY et OZ sont

$$\begin{cases} a_x = \frac{d^2 x}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{d^2 y}{dt} = \frac{dv_y}{dt} \\ a_z = \frac{d^2 z}{dt} = \frac{dv_z}{dt} \end{cases} \quad (\text{II-94})$$

Le passage de l'accélération à la vitesse se fait par les relations

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} + \int_{t_0}^t a_x(t) dt \\ v_y(t) = v_{0y} + \int_{t_0}^t a_y(t) dt \\ v_z(t) = v_{0z} + \int_{t_0}^t a_z(t) dt \end{cases} \quad (\text{II-95})$$

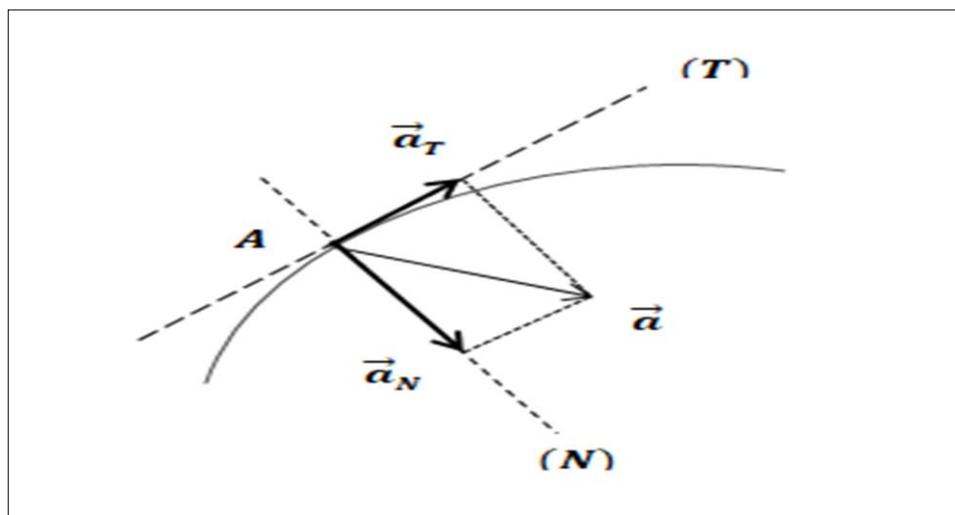
Ou  $v_{0x}$  ,  $v_{0y}$  et  $v_{0z}$  sont les composantes de la vitesse à l'instant  $t_0$ .

## 5.2.1-Accélération tangentielle et normale :

Considérons une particule qui décrit une trajectoire courbe( Fig .II-19) .pour simplifier, nous supposons que la courbe est plane, mais le résultat que nous trouvons seront valable pour un mouvement sur une courbe quelconque .A l 'instant  $t$  la particule est en  $A$  avec une vitesse  $v$  et une accélération  $a$  .puisque  $a$  est dirigé vers la concavité de la courbe , nous pouvons le décomposer en une composante tangentielle :parallèle à la tangente  $AT$  et appelée *accélération tangentielle* , et une composante normale : parallèle à la normale  $AN$  et appelée *accélération normale* .chacun de ces composantes a une signification physique bien définie .quand la particule se déplace , la grandeur de la vitesse peut changer , et ce changement est relié à l'accélération tangentielle .la direction de la vitesse change également , et ce changement est relié à l'accélération normale , autrement dit :

Changement de la grandeur de la vitesse : accélération tangentielle

Changement de direction de la vitesse : accélération normale



**Fig. II-19:** l'accélération tangentielle et normale dans un mouvement curviligne

## CINEMATIQUE

Traçons en A Fig II-20 le vecteur unitaire tangent à la courbe, la vitesse selon l'Eq (II-91) se met sous forme

$$\vec{v} = v \cdot \vec{u}_T$$

L'accélération sera donc :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{u}_T)$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + v \cdot \frac{d\vec{u}_T}{dt}$$

Il ne faut calculer  $\frac{d\vec{u}_T}{dt}$ . introduisons le vecteur unitaire  $\vec{u}_N$ , normale à la courbe et dirigé vers la concavité. En appelons  $\theta$  l'angle que la tangente à la courbe en A fait avec l'axe des  $x$ , nous pouvons écrire, en utilisant l'Eq (I-11).

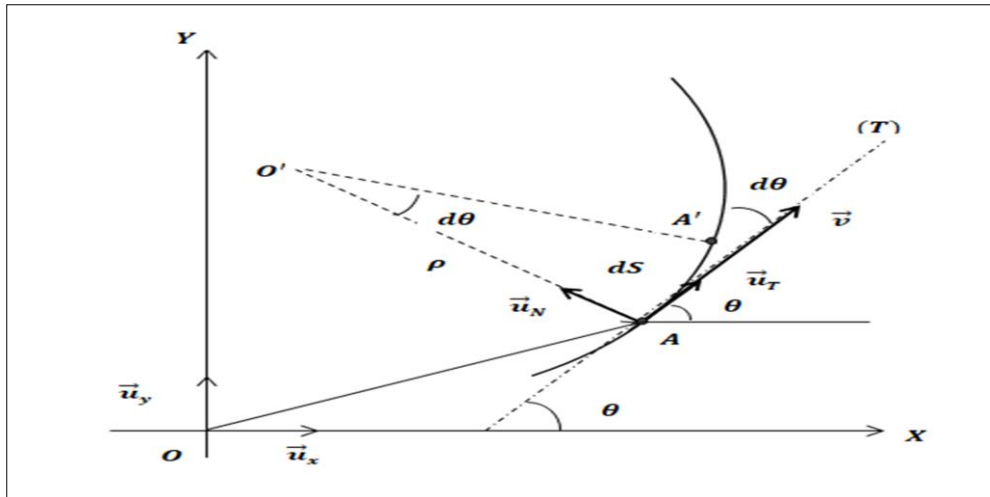


Fig II-20

$$\vec{u}_T = \cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_N = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \vec{u}_x + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_N = -\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y$$

Donc

$$\frac{d\vec{u}_T}{d\theta} = -\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y = \vec{u}_N$$

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{d\vec{u}_T}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \vec{u}_N \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

## CINEMATIQUE

---

Ceci indique que  $\frac{d\vec{u}_T}{dt}$  est normale à la courbe .On a aussi

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \cdot v$$

Ou  $ds = AA'$  est le petit arc que parcourt la particule dans l'intervalle de temps  $dt$  , et  $O'A = \rho$  le rayon de la courbure , nous pouvons écrire

$$ds = \rho \cdot d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

Donc

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{v}{\rho} \cdot \vec{u}_N \quad (\text{II-96})$$

Introduisant ce résultat dans l'expression de  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  , nous obtenons finalement

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{u}_N \quad (\text{II-97})$$

Le premier terme  $\left[\frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_T\right]$  est vecteur tangent à la courbe , proportionnelle à la dérivée par rapport au temps de la grandeur du vecteur vitesse ; il correspond à l'accélération

tangentielle  $\vec{a}_T$  .le second terme  $\left[\frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{u}_N\right]$  est un vecteur normale à la courbe , et qui correspond à l'accélération normale  $\vec{a}_N$  ;il associé au changement de direction , car il correspond à  $\frac{d\vec{u}_T}{dt}$  .En ce qui concerne les grandeurs , nous pouvons écrire :

$$a_T = \frac{dv}{dt} \quad , \quad a_N = \frac{v^2}{\rho} \quad (\text{II-98})$$

La grandeur de l'accélération au point A est alors

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$

## Cas particulier :

### i) Mouvement rectiligne :

La direction de la vitesse ne change pas au cours de temps car le rayon de la courbure est infini  $\rho = \infty$ , de sorte que  $\vec{a}_N = 0$  donc il n'y a pas accélération normale.

$$\frac{d}{dt} \vec{u}_T = 0 \Rightarrow \vec{a}_N = 0$$

L'accélération totale est égale à sa composante tangentielle

$$\vec{a} = \vec{a}_T = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_T \quad (\text{II-99})$$

### ii) Mouvement curviligne uniforme :

La grandeur de la vitesse reste constant au cours de temps, de sorte que  $\vec{a}_T = 0$  donc il n'y a pas accélération tangentielle.

$$v = Cst \Rightarrow \vec{a}_T = 0$$

L'accélération totale est égale à sa composante normale.

$$\vec{a} = \vec{a}_N = \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{u}_N \quad (\text{II-100})$$

### iii) -Mouvement circulaire :

c'est un mouvement pour lequel la trajectoire est un cercle. Quel que soit le point considéré de la trajectoire, le centre et le rayon de courbure sont respectivement le centre et le rayon du cercle. En choisissant comme origine  $O$  d'un référentiel  $OXY$  le centre de cercle et comme origine des abscisses curviligne le point  $M_0$  (Fig II-21), à un instant quelconque, on peut écrire :

$$s(t) = R\theta(t) \quad (\text{II-101})$$

Le vecteur vitesse est alors donné par :

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{ds(t)}{dt} \vec{u}_T = R \frac{d\theta(t)}{dt} \vec{u}_T \\ \frac{d\theta(t)}{dt} &= \omega(t) \\ \Rightarrow \vec{v}(t) &= R \cdot \omega(t) \vec{u}_T \end{aligned} \quad (\text{II-102})$$

# CINEMATIQUE

Ou  $\omega(t)$  est appelé la vitesse angulaire ,et est égale à la dérivée de l'angle par rapport au temps . Elle s'exprime en radian par seconde (rad/s).

En module, on a bien sûr :

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = R\omega(t) \quad (\text{II-103})$$

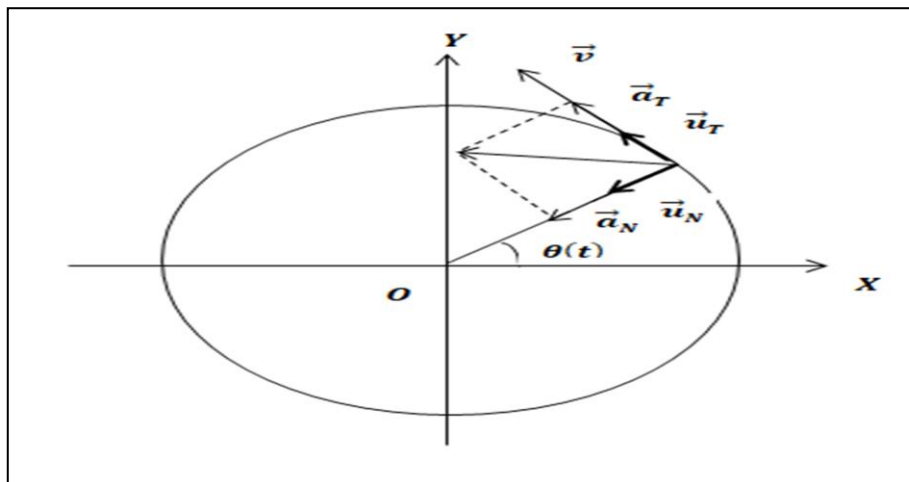
La relation ( II-97) permet de déterminer l'expression du vecteur accélération

$$\vec{a}(t) = R \frac{d}{dt} [\omega(t)] \vec{u}_T + \frac{v^2(t)}{R} \vec{u}_N \quad (\text{II-104})$$

$$\vec{a}(t) = R\alpha(t) \vec{u}_T + \frac{v^2(t)}{R} \vec{u}_N \quad (\text{II-105})$$

$$\vec{a}(t) = R\alpha(t) \vec{u}_T + R\omega^2(t) \vec{u}_N \quad (\text{II-106})$$

Ou  $\alpha(t)$  est appelé accélération angulaire, elle s'exprime en radian par seconde au carré (rad/s<sup>2</sup> ).Le terme  $[R\alpha(t)\vec{u}_T]$  représente l'accélération tangentielle , le terme  $[R\omega^2(t)\vec{u}_N]$  représente l'accélération normale , elle se dirige toujours vers le centre du cercle .



**Fig. II-21:** accélération tangentielle et accélération normale dans un mouvement circulaire

## 5.2.2-Vecteur vitesse angulaire :

### ▪ Définition :

On définit le vecteur vitesse de rotation  $\vec{\omega}$  par :

- sa grandeur qui est la vitesse angulaire :  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ,  $\theta$  étant l'angle de rotation
- sa direction qui est celle de l'axe autour duquel se fait la rotation

- son sens qui est celui dans lequel avancerait une vis posée le long de l'axe de rotation et qui tournerait dans le sens du mouvement du mobile (Fig.II-22).

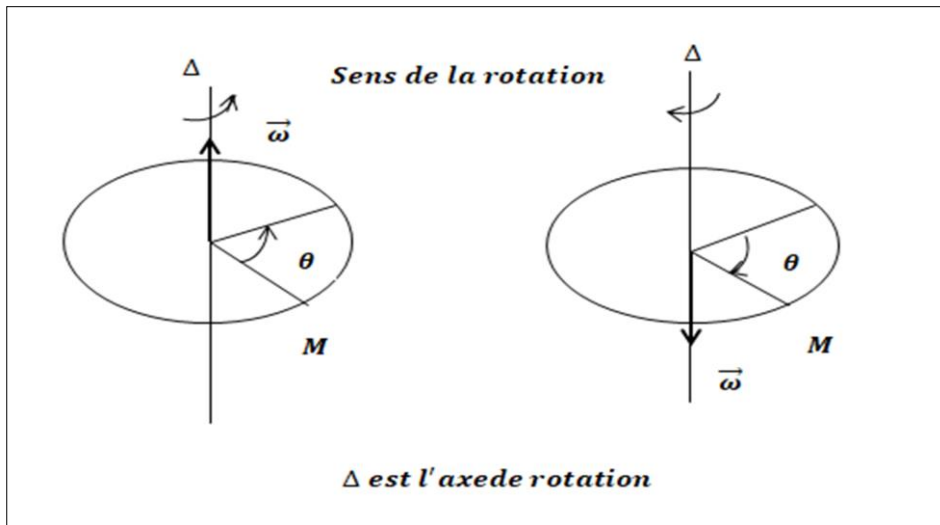


Fig .II-22 : direction du vecteur vitesse angulaire

- **Relation entre  $\vec{v}$  et  $\vec{\omega}$  :**

choisissons un repère OXYZ tel que l'axe OZ coïncide avec l'axe de rotation  $\Delta$  ,En coordonnées cylindrique , on peut écrire :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z$$

Le mouvement de M étant circulaire autour de l'axe OZ , le coordonnée  $\rho$  est constant .z est nulle , On a alors

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM} = \rho \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad (\text{II-107})$$

$$\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho$$

$$\vec{v} = \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta = \rho \dot{\theta} (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho)$$

$$\vec{v} = \dot{\theta} \vec{u}_z \wedge [\rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z]$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} \quad (\text{II-108})$$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = R\omega \quad (\text{II-109})$$

Ceci n'est vrai que pour un mouvement circulaire ou de rotation

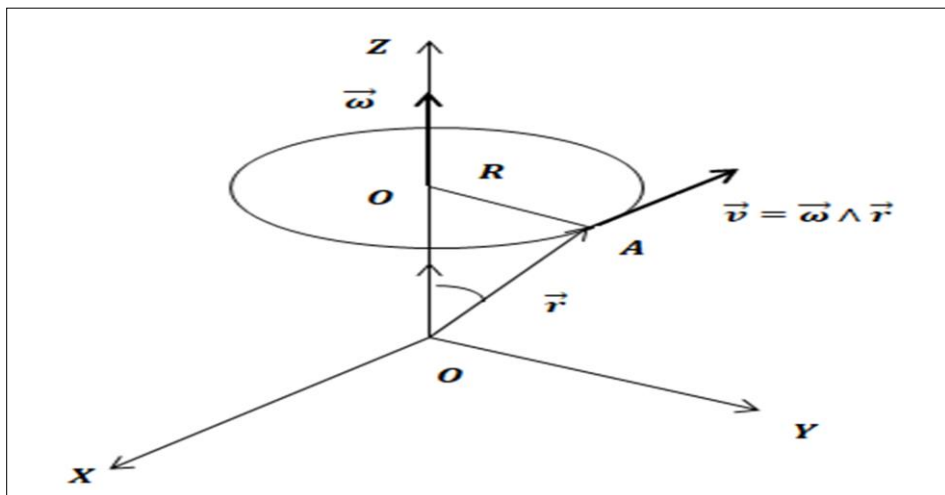


Fig. II-23

### i) Mouvement circulaire uniforme :

C'est un mouvement où  $\vec{\omega} = \text{constante}$ . ce mouvement est périodique et la particule passe en un point quelconque du cercle à intervalles de temps régulier. La période  $P$  est le temps nécessaire pour faire un tour complet ou révolution, et la fréquence  $\nu$  est le nombre de révolution par unité de temps

$$\nu = \frac{1}{P}$$

Les notions de période et de fréquence s'appliquent à tous les phénomènes périodiques qui se présentent sous forme cyclique par exemple, le mouvement de la terre autour du soleil n'est ni circulaire ni uniforme, mais périodique.

Si  $\omega$  est constant, nous avons, par intégration de l'Eq (II-102)

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^t \omega dt = \omega \int_{t_0}^t dt$$

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \omega(t - t_0) \quad (\text{II-110})$$

### 5.2.3-Vecteur d'accélération angulaire :

Quand la vitesse angulaire d'une particule varie avec le temps, l'accélération angulaire est définie par le vecteur



$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} \quad (\text{II-111})$$

Puisque le mouvement circulaire est plane , la direction  $\omega(t)$  reste la même , et la relation (II-111) s'applique également aux grandeurs des quantités en jeu , par conséquent ,

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (\text{II-112})$$

### Relation entre $\mathbf{a}(t)$ et $\alpha(t)$ :

Les relation ( II-67) et ( II-109) permettent de déterminer l'expression du vecteur accélération :

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} \\ \vec{a}(t) &= \vec{\alpha} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \\ \vec{a}(t) &= \vec{\alpha} \wedge \vec{r} + \omega \vec{k} \wedge (\omega \vec{k} \wedge R\vec{u}_\rho) \\ \vec{a}(t) &= \vec{\alpha} \wedge \vec{r} + \omega \vec{k} \wedge (\omega R\vec{u}_\theta) \\ \vec{a}(t) &= \vec{\alpha} \wedge \vec{r} - \omega^2 R\vec{u}_\theta \end{aligned} \quad (\text{II-113})$$

### i) Mouvement circulaire accéléré :

le mouvement circulaire est accéléré, quand l'accélération angulaire est constante ( $\alpha = Cst$ ) , nous avons , par intégration de l'Eq (II-111)

$$\begin{aligned} \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega &= \int_{t_0}^t \alpha dt = \alpha \int_{t_0}^t dt \\ \omega(t) &= \omega_0(t) + \alpha(t - t_0) \end{aligned} \quad (\text{II-114})$$

Ou  $\omega_0$  est la valeur de  $\omega$  à l'instant  $t_0$  . En portant l'Eq (II-113) dans (II-102), nous obtenons :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

Et en intégrant de nouveau ;

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^t \omega_0 dt = \alpha \int_{t_0}^t (t - t_0) dt$$

De sort que

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \omega(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 \quad (\text{II-115})$$

Cette relation donne la position angulaire à chaque instant  $t$ .

En combinant les Eqs ( II- 97 ), ( II- 109 ) et ( II- 112 ) nous trouvons que l'accélération tangentielle ( transversale ) a pour valeur :

$$a_T = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R \frac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha \quad (\text{II-116})$$

et l'accélération normale ( ou centripète ) :

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \quad (\text{II-117})$$

## ii) Mouvement circulaire uniforme :

Remarquons que dans le mouvement circulaire uniforme, pas accélération angulaire = 0 , il n'y a pas d'accélération tangentielle, mais il subsiste une accélération normale ou centripète due au changement de direction de la vitesse. Dans ce cas du mouvement circulaire uniforme , nous pouvons calculer directement l'accélération en utilisant l'eq (II-108) .

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

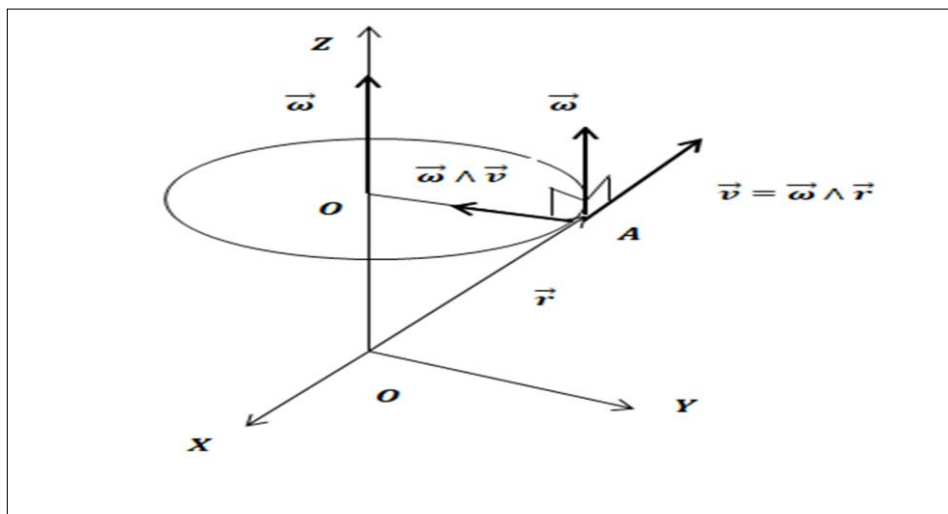


Fig. II-18

.puisque  $\omega$  est constant, on a alors :

$$\vec{a} = \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v} \quad (\text{II-118})$$

Car  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$  . nous pouvons écrire l'accélération sous une autre forme

$$\vec{a} = \vec{\omega} \wedge \vec{v} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \quad (\text{II-119})$$

nous voyons ( Fig . II-18) que le vecteur  $\vec{\omega} \wedge \vec{v}$  est dirigé vers le centre du cercle et que sa grandeur  $|\vec{\omega} \wedge \vec{v}| = \omega v \sin \theta = \omega(R\omega) = \omega^2 R$  puisque  $\omega$  et  $v$  sont perpendiculaires ( $\sin \theta = 1$  ). Cette valeur coïncide avec résultat ( II-117).

## 6.Mouvement relatif :

### 6.1-Introduction :

La pratique nous montre que les mouvements usuels sont loin d'être des "mouvements simples" rectilignes ou circulaires. Ils sont, dans la plupart des cas, la résultante de plusieurs mouvements simultanés.

Par exemple, le mouvement (complexe !) décrit par un insecte gravissant le levier d'un pendule, résulte de la "combinaison" d'un mouvement circulaire du pendule avec un mouvement rectiligne de l'insecte par rapport au levier du pendule; quant au mouvement de l'extrémité d'une pale d'hélice d'avion, il peut également s'étudier à partir du mouvement rectiligne de l'avion, et du mouvement circulaire de l'hélice, par rapport à l'avion, mais suivant une autre "combinaison" que dans le premier exemple...

Ainsi, on peut envisager de "décomposer" le mouvement d'un point en deux mouvements plus simples et d'étude plus facile, grâce à l'introduction d'un trièdre de référence supplémentaire, mobile, qui se déplace de façon déterminée par rapport au trièdre initial, considéré conventionnellement comme fixe (la possibilité de définir un trièdre "absolument fixe" devra être approfondie dans le cadre de la dynamique du point).

### 6.2-Vitesse relative :

Considérons deux objet A et B et un observateur O , qui prend comme système de référence le trièdre OXYZ ( Fig. II-19) .Par rapport à O , A et B ont pour vitesse

$$\vec{V}_A = \frac{d}{dt} \vec{r}_A \quad (\text{II- 120})$$

$$\vec{V}_B = \frac{d}{dt} \vec{r}_B$$

La vitesse de B par rapport à A et celle de A par rapport à B sont définies par :

$$\vec{V}_{B/A} = \frac{d}{dt} \vec{r}_{B/A}$$

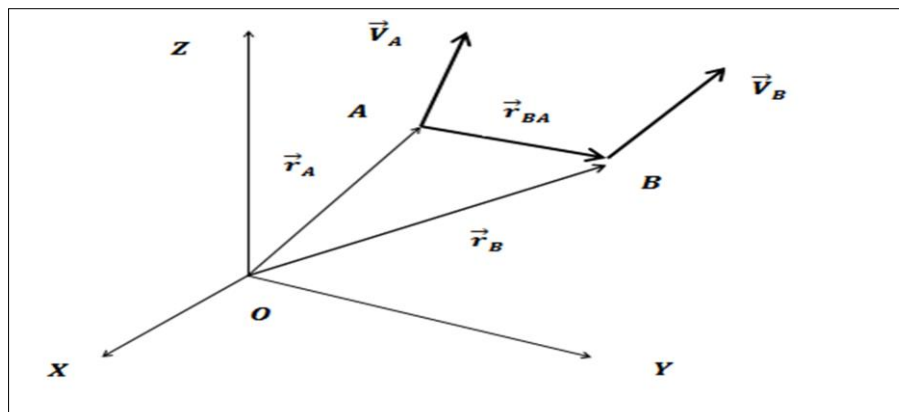
$$\vec{V}_{A/B} = \frac{d}{dt} \vec{r}_{A/B}$$

$$\vec{r}_{A/B} = \overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

$$\vec{r}_{B/A} = \overrightarrow{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B \quad (\text{II-121})$$

Remarquons que , comme  $\vec{r}_{A/B} = -\vec{r}_{B/A}$  , nous avons aussi

$$\vec{V}_{B/A} = -\vec{V}_{A/B} \quad (\text{II-122})$$



**Fig. II-19:** définition de la vitesse relative

En d'autre termes , la vitesse de B par rapport à A est égale et opposée à la vitesse de A par rapport à B , en dérivant par rapport au temps l'Eq ( II-121) , nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_{A/B} = \frac{d}{dt} \vec{r}_B - \frac{d}{dt} \vec{r}_A$$

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_{B/A} = \frac{d}{dt} \vec{r}_A - \frac{d}{dt} \vec{r}_B$$

Ou encore , en utilisant les Eqs (II-120) et (II-121) , nous avons:

$$\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A \quad , \quad \vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B \quad (\text{II-123})$$

Donc , pour obtenir la vitesse relative de deux corps , on soustrait leurs vitesse par rapport à l'observateur .Par dérivation de l'E q ( II-123 ) , nous trouvons que ;

$$\frac{d\vec{V}_{B/A}}{dt} = \frac{d\vec{V}_B}{dt} - \frac{d\vec{V}_A}{dt}$$

# CINEMATIQUE

Et une expression semblable pour  $\frac{d\vec{v}_{B/A}}{dt}$ , le premier terme appelé accélération de B par rapport à A, et on désigne par  $\vec{a}_{B/A}$ . Les deux autres termes sont, respectivement, les accélérations de B et de A par rapport à O. Donc :

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A \quad \vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B \quad (\text{II-124})$$

### 6.3-Mouvement relatif uniforme de translation :

Considérons deux observateurs O et O', qui se déplacent, l'un par rapport à l'autre, d'un mouvement de translation uniforme, ceci veut dire que l'observateur O voit donc l'observateur O' se déplacer à la vitesse v, tandis que O' voit O se déplacer à la vitesse -v. Ce qui nous intéresse, c'est de comparer leurs descriptions du mouvement d'un objet

Nous choisissons, pour simplifier, comme axes OX et OX', la droite de mouvement relatif (Fig. II-19) et les axes OY, OZ et OY', OZ' parallèles entre eux ; les axes de coordonnées resteront toujours parallèles en raison de l'absence de rotation relative

Considérons une particule en M, dans R et R' sont respectivement, d'après la Fig. (II-19), nous voyons que :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{O'M} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

Les vecteurs positions sont reliés par :

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M} \quad (\text{II-125})$$

Cette équation vectorielle peut être décomposée selon les trois composantes :

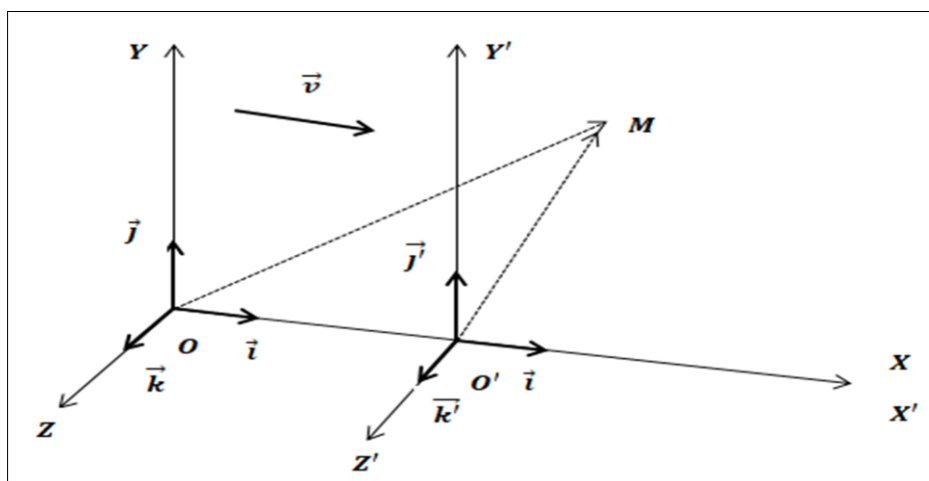


Fig. II-19: Référentiels dans un mouvement relatif uniforme de translation

$$\begin{cases} y = y' \\ z = z' \\ x = x' + \overline{OO'} \end{cases} \quad (\text{II-126})$$

En tenant compte que  $t = t'$  ; Les deux observateurs sont supposés utiliser le même temps , ceci signifie que les mesures de temps sont supposées indépendantes du mouvement de l'observateur.

Dans le référentiel fixe  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  , le point  $M$  repéré par  $x, y, z$  a une vitesse absolue  $\vec{V}_a$  donnée par :

$$\vec{V}_a(M/R) = \frac{d}{dt} \overline{OM} \Big|_R = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

$$\text{Avec } \frac{d\vec{i}}{dt} \Big|_R = \frac{d\vec{j}}{dt} \Big|_R = \frac{d\vec{k}}{dt} \Big|_R = \vec{0}$$

Dans le référentiel fixe  $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  , le point  $M$  repéré par  $x', y', z'$  a une vitesse relative  $\vec{V}_r$  donnée par :

$$\vec{V}_r(M/R') = \frac{d}{dt} \overline{O'M} \Big|_{R'} = \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}'$$

Avec  $\frac{d\vec{i}'}{dt} \Big|_{R'} = \frac{d\vec{j}'}{dt} \Big|_{R'} = \frac{d\vec{k}'}{dt} \Big|_{R'} = \vec{0}$  car  $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  est une base liée à  $R'$  ( donc fixe par rapport à  $R'$  ).

Dérivons par rapport au temps l'Eq (II-125 )

$$\frac{d\overline{OM}}{dt} = \frac{d\overline{O'O}}{dt} + \frac{d\overline{O'M}}{dt} \quad (\text{II-127})$$

$$\frac{d\overline{OM}}{dt} = \frac{d\overline{O'O}}{dt} + \frac{d}{dt} (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')$$

Le référentiel  $R'$  étant en mouvement par rapport à  $R$  donc :

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} \Big|_R = \frac{d\vec{j}'}{dt} \Big|_R = \frac{d\vec{k}'}{dt} \Big|_R \neq \vec{0}$$

En dérivant, nous obtenons :

$$\left. \frac{d\overline{OM}}{dt} \right|_R = \frac{d\overline{O'O}}{dt} + \left( \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} \right) + \left( \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} \right) + \left( \frac{dz'}{dt} \vec{k}' + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} \right)$$

$$\vec{V}_a(t) = \left. \frac{d}{dt} \overline{OM} \right|_R = \left[ \frac{d\overline{O'O}}{dt} + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} \right] + \left[ \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}' \right]$$

La première expression entre crochets comprend d'abord le terme de translations  $\frac{d\overline{O'O}}{dt}$  qui représente la vitesse de l'origine  $O'$  par rapport au référentiel absolu  $R$ , puis des termes proportionnels aux dérivées des vecteurs unitaires  $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$  déterminant ainsi la vitesse de mouvement de rotation des axes  $O'X', O'Y', O'Z'$  de  $R'$  par rapport à ceux de  $R$ . tout cette expression décrit donc le mouvement de  $R'$  par rapport à  $R$ , on l'appelle vitesse d'entraînement

$$\vec{V}_e = \frac{d\overline{O'O}}{dt} + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} \quad (\text{II-128})$$

Dans la seconde expression entre crochets, on reconnaît la vitesse de  $M$  dans  $R'$ . On l'appelle vitesse relative.

$$\vec{V}_r = \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}' \quad (\text{II-129})$$

La vitesse du point dans  $R$  est appelée vitesse absolue, elle est donc la somme des vitesses relative et d'entraînement

$$\vec{V}_a = \left. \frac{d}{dt} \overline{OM} \right|_R = \vec{V}_e + \vec{V}_r \quad (\text{II-130})$$

Dérivons une seconde fois la relation (II-127) par rapport au temps :

$$\frac{d^2 \overline{OM}}{dt^2} = \frac{d^2 \overline{O'O}}{dt^2} + \frac{d^2 \overline{O'M}}{dt^2} \quad (\text{II-131})$$

$$\ddot{\vec{a}}_a(t)|_R = \frac{d}{dt} \left[ \left[ \frac{d\overline{O'O}}{dt} + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} \right] + \left[ \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}' \right] \right]$$

$$\vec{a}_a(t) = \left[ \frac{d^2 \vec{O'O}}{dt^2} + x' \frac{d^2 \vec{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2 \vec{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2 \vec{k}'}{dt^2} \right] + \left[ \frac{d^2 x'}{dt^2} \vec{i}' + \frac{d^2 y'}{dt^2} \vec{j}' + \frac{d^2 z'}{dt^2} \vec{k}' \right] + 2 \left[ \frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{k}'}{dt} \right]$$

Dans la deuxième expression entre crochets , on reconnait l'accélération de M dans R ' , on l'appelle accélération relative

$$\vec{a}_r = \frac{d^2 x'}{dt^2} \vec{i}' + \frac{d^2 y'}{dt^2} \vec{j}' + \frac{d^2 z'}{dt^2} \vec{k}' \quad (\text{II-132})$$

Notons que accélération relative  $\vec{a}_r$  peut être obtenue en dérivant par rapport aux temps l'expression (II-129) de la vitesse en considérons les vecteurs  $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$  de R' comme fixe .La première expression entre crochets est l'accélération d'entraînement

$$\vec{a}_e = \frac{d^2 \vec{O'O}}{dt^2} + x' \frac{d^2 \vec{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2 \vec{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2 \vec{k}'}{dt^2} \quad (\text{II-133})$$

Elle comprend d'abord le terme de translations  $\frac{d^2 \vec{O'O}}{dt^2}$  qui est l'accélération du point O' dans référentiel absolu R , puis des termes proportionnels aux seconde dérivées des vecteurs unitaires  $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$  déterminant ainsi l'accélération du mouvement de rotation des axes O'X', O'Y', O'Z' de R' par rapport à ceux de R . Notons que accélération d'entraînement  $\vec{a}_e$  peut être obtenue en dérivant par rapport aux temps l'expression (II-128) de la vitesse d'entraînement en considérons les coordonnées  $x', y'$  et  $z'$  'du point dans R' comme fixes .

Enfin , la troisième expression entre crochets est appelée l'accélération de Coriolis

$$\vec{a}_c = 2 \left[ \frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{k}'}{dt} \right] \quad (\text{II-134})$$

L'accélération du point dans R est appelée accélération absolue  $\vec{a}_a$  , elle est donc la somme des accélération relative, d'entraînement et Coriolis.

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \quad (\text{II-135})$$

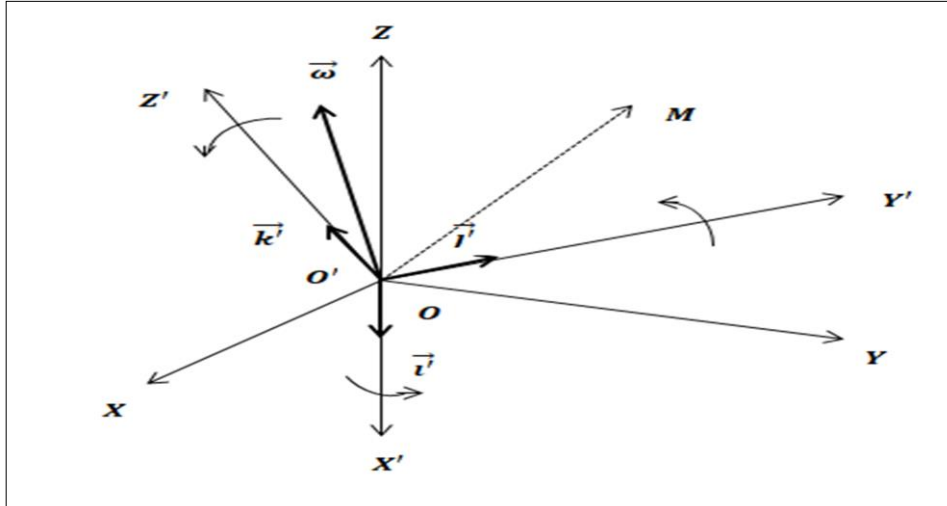
## 6.4-Mouvement relatif uniforme de rotation :

Soient deux observateurs O et O' , en rotation l'un par rapport à l'autre , sans mouvement relatif de translation .Pour simplifier , nous supposons que O et O' sont dans la même région de l'espace et que chacun utilise son propre référentiel mais avec origine commune



## CINEMATIQUE

par exemple l'observateur O , qui utilise le référentiel OXYZ (Fig .II-20) , remarque que référentiel O'X'Y'Z' lié à O' tourne à la vitesse angulaire  $\omega$  , O' observe le référentiel OXYZ qui tourne à la vitesse angulaire  $= \omega$  .



**Fig. II-20:** Référentiels en mouvement relatif uniforme de rotation

Le vecteur position de la particule M rapporté à OXYZ :

$$\overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (\text{II-136})$$

Et par suite la vitesse de la particule M , telle que O la mesure dans son référentiel OXYZ , est

$$\vec{V}_a = \frac{d}{dt}\overline{OM} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \quad (\text{II-137})$$

De même le vecteur position de M rapporté à O'X'Y'Z' est

$$\overline{O'M} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' \quad (\text{II-138})$$

Le vecteur  $\overline{O'M}$  est le même que dans l'Eq ( II-136), Puisque les origines coïncident .la vitesse de M mesurée par O' dans son propre référentiel O'X'Y'Z' a pour valeur

$$\vec{V}_r = \frac{d}{dt}\overline{O'M} = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' \quad (\text{II-139})$$

En prenant la dérivée de l'Eq ( II-138) , l'observateur O' a supposé que son référentiel O'X'Y'Z' ne tournait pas et a donc considéré les vecteur unitaires constantes en directions .l'observateur O , pour lui , X'Y'Z' tourne et que par suite les vecteurs unitaires  $\vec{i}'$ ,  $\vec{j}'$  et  $\vec{k}'$  ne

## CINEMATIQUE

sont pas constantes en direction ; en calculant la dérivée par rapport au temps de l'Eq ( II-138)

$$\vec{V}_a = \left( \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}' \right) + \left( x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} \right) \quad (\text{II-140})$$

Par ailleurs , les extrémités des vecteurs  $\vec{i}'$ ,  $\vec{j}'$  et  $\vec{k}'$ , sont en mouvement circulaire uniforme par rapport à O , avec la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  .En d'autres termes ,  $\frac{d\vec{i}'}{dt}$  est la vitesse d'un point situé à une distance unité O , se déplacement d'un mouvement circulaire uniforme avec une vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  . donc en utilisant l'Eq ( II-108) , nous avons :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}' \\ \frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}' \\ \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}' \end{cases}$$

En conséquence , d'après l'Eq (II-140) , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} &= x' (\vec{\omega} \wedge \vec{i}') + y' (\vec{\omega} \wedge \vec{j}') + z' (\vec{\omega} \wedge \vec{k}') \\ &= (\vec{\omega} \wedge x' \vec{i}') + (\vec{\omega} \wedge y' \vec{j}') + z' (\vec{\omega} \wedge z' \vec{k}') \\ &= \vec{\omega} \wedge (x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}') \\ &= \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \end{aligned} \quad (\text{II-141})$$

En introduisant ce résultat dans l'Eq (II-140), nous obtenons finalement :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \quad (\text{II-142})$$

Cette expression donne la relation entre les vitesse  $\vec{V}_a$  et  $\vec{V}_r$  de M , mesurées par les observateurs O et O' en mouvement relatif de rotation .

pour obtenir la relation les accélération, nous procédons de la même manière .l'accélération de M , mesurées par O par rapport à OXYZ, est

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}_x}{dt} \vec{i} + \frac{d\vec{V}_y}{dt} \vec{j} + \frac{d\vec{V}_z}{dt} \vec{k} \quad (\text{II-143})$$

l'accélération de M , mesurées par O' par rapport à O'X'Y'Z' , en ne tenant de nouveau pas compte de la rotation , a pour valeur

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{d\vec{v}_{x'}}{dt} \vec{i}' + \frac{d\vec{v}_{y'}}{dt} \vec{j}' + \frac{d\vec{v}_{z'}}{dt} \vec{k}' \quad (\text{II-144})$$

Quand nous dérivons l'Eq ( II-142) .par rapport à t . En nous rappelant que  $\vec{\omega}$  est supposé constant , nous obtenons ,

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overline{OM}}{dt} \quad (\text{II-145})$$

Par ailleurs , puisque  $\vec{V}_r = V_{x'}\vec{i}' + V_{y'}\vec{j}' + V_{z'}\vec{k}'$  , nous obtenons par différentiation

$$\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \left[ \frac{d\vec{V}_{x'}}{dt} \vec{i}' + \frac{d\vec{V}_{y'}}{dt} \vec{j}' + \frac{d\vec{V}_{z'}}{dt} \vec{k}' \right] + \left[ \vec{V}_{x'} \frac{d\vec{i}'}{dt} + \vec{V}_{y'} \frac{d\vec{j}'}{dt} + \vec{V}_{z'} \frac{d\vec{k}'}{dt} \right]$$

La première expression entre crochet définit l'accélération relative  $\vec{a}_r$  , comme le donne l'Eq (II-144) , et la deuxième , par un procédé identique à celui utilisé pour obtenir l'Eq ( II-141) , sont égaux à  $\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$ . ce qui fait qu'en substituant les grandeurs convenables dans l'Eq (II-141) , nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge \vec{V}_{x'}\vec{i}' + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_{y'}\vec{j}' + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_{z'}\vec{k}' &= \vec{\omega} \wedge (V_{x'}\vec{i}' + V_{y'}\vec{j}' + V_{z'}\vec{k}') \\ &= \vec{\omega} \wedge \vec{V}_r \end{aligned}$$

Donc  $\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \vec{a}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$  .des Eqs (II-137) et (II-142) , nous avons , aussi

$$\frac{d}{dt} \overline{OM} = \vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \overline{OM}$$

De sorte que

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}_a = \vec{\omega} \wedge (\vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \overline{OM}) = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{OM})$$

En substituant les deux résultats dans l'Eq ( II-145 ) , nous obtenons finalement

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{OM}) \quad (\text{II-146})$$

Cette équation donne la relation entre les accélérations  $\vec{a}_a$  et  $\vec{a}_r$  de M mesurées par des observateurs O et O' en mouvement relatif uniforme de rotation .Le terme  $2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$  est appelé *accélérations de Coriolis* .Le terme  $\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{OM})$  est identique à l'Eq ( II-119) et correspond à une *accélération centripète* . l'accélérations de Coriolis et l'accélération centripète résultent toutes deux du mouvement relatif de rotation des deux observateurs .

## 1-Introduction :

Après avoir entamé une étude géométrique du mouvement au chapitre précédent, il est impératif de rechercher les raisons qui conditionnent le déplacement des particules. Ce qui nous amène à se poser les questions suivantes :

De quelles façons se déplacent les particules et quel est l'impact du mouvement du corps par rapport au voisinage de la terre sur la constance de l'accélération.

Pourquoi les atomes se lient-ils les uns aux autres pour former des molécules?

Pourquoi un ressort oscille-t-il après avoir été étiré ?

pourquoi la terre se déplace-t-elle autour du soleil sur une orbite elliptique ?

Pour comprendre ces phénomènes de mouvements et beaucoup d'autres que nous observons actuellement autour de nous .En fait comprendre comment sont produits les mouvements et leurs effets sur les dispositifs pratiques telles que les machines et autres. On appelle la science de la dynamique en l'étude de la relation entre le mouvement d'un corps et les causes qui le produisent

Après avoir fait une étude géométrique du mouvement au chapitre précédent, cherchons maintenant pour quelles raisons les particules se déplacent de telle ou telle façon .Pourquoi, au voisinage de la terre, les corps tombent-ils avec une accélération constante ? Pourquoi les atomes se lient-ils les uns aux autres pour former des molécules? Pourquoi un ressort oscille-t-il après avoir été étiré ?pourquoi la terre se déplace-t-elle autour du soleil sur une orbite elliptique ? nous voulons comprendre ces mouvements ainsi que beaucoup d'autres que nous observons actuellement autour de nous .Si nous comprenons comment en général sont produits les mouvements, nous sommes capables de construire des machines et les autres dispositifs pratiques qui fonctionnent comme nous le voulons. On appelle *dynamique* l'étude de la relation entre le mouvement d'un corps et les causes qui le produisent

## 2- Concept de Force:

### 2-1- notion de force :

Dans notre vie d'expérience quotidienne, nous constatons que le mouvement d'un corps est le résultat direct de ces interactions avec les autres corps qui l'entourent, Quand un joueur frappe une balle, il interagit avec elle et modifie sa trajectoire d'un projectile .Cette action n'est autre que le résultat de ses interactions avec la terre. A travers plusieurs exemples

# DYNAMIQUE

---

comme celui ci similaires .on peut noter que les interactions sont décrites d'une manière convenable correcte par une notion mathématique, appelée *force*.

## 2-2-Interactions fondamentales:

L'étude de la dynamique est au fond l'analyse de la relation qui existe entre la force et les variations du mouvement d'un corps

Dans la nature on distingue plusieurs types de forces : le poids, la force de tension, la force de frottement, la force de pression, ...bien qu'elles soient nombreuses, ces forces ne sont en fait que des manifestations différentes de quatre interactions fondamentales :

*Interactions gravitationnelles* : tous les particules lui sont sensibles, elles dépendent des masses des corps mis en jeu, ses effets est négligeables devant les autres interactions à l'échelle des particules .elles sont responsables du mouvement des planètes, des étoiles et des astres. Quelle que soit la distance qui sépare deux masses, l'effet de leur interaction est non nul

*Interactions électromagnétique* : elle est la mieux connue par les physiciens .Seuls les particules chargées électriquement lui sont sensibles .On croyait d'abord auparavant qu'il y avait deux interactions différentes : électrique et magnétique, mais en vérité il s'agit d'une seule interaction. Lorsque les charges mises en jeu sont immobiles, elles se réduisent à l'interaction électriques .elle est attractive lorsque les charges sont de signes contraire et répulsive lorsqu'elles s'ils sont de même signe.

*Interactions forte* : les particules qui lui sont sensibles sont appelées les hadrons. en particulier, elles assurent la cohésion entre les protons et les neutrons à l'intérieur du noyau atomique .son intensité est beaucoup plus grande que celle de l'interaction électromagnétique

*Interactions faible* : Toutes les particules lui sont sensibles dont la portée de l'ordre de  $10^{-17}$  m .Elle est qualifiée de faible interaction et elle est aussi responsable des phénomènes de radioactivité  $\beta$

## 3- La quantité de mouvement :

### 3-1-Définitions:

Une grande idée, attribuée à Newton, est celle d'associer au *mouvement* une grandeur vectorielle extensive qui caractérise l'état du mouvement .On appelle cette grandeur *quantité*

## DYNAMIQUE

---

*de mouvement* .Il est impossible, à ce stade de réaliser pleinement la validité de cette démarche .La notion de quantité de mouvement persistera, en effet, en mécanique relativiste et en mécanique quantique. L'idée d'associer au mouvement une grandeur vectorielle extensive qui caractérise l'état du mouvement est appelé quantité de mouvement, notion attribuée à Newton. On retrouve ce phénomène en mécanique relativiste et en mécanique quantique.

La quantité de mouvement d'une particule est définie comme le produit de sa masse par sa vitesse. en la désignant par, que nous écrivons désignons ci-après

$$p = mv \quad \text{(III-1)}$$

La quantité de mouvement est une grandeur vectorielle, qui a la même direction que la vitesse .C'est Cette une notion en physique est très importante car elle combine les deux éléments qui caractérisent l'état dynamique d'une particule : sa masse et sa vitesse.

Dans le système MKSC la quantité de mouvement s'exprime en  $\text{m kg s}^{-1}$

**Exemple :** un camion chargé en mouvement est plus difficile à arrêter ou à accélérer qu'un camion vide, ayant la même vitesse, parce que la quantité de mouvement du camion chargé est plus grande

### 3-2-Principe de conservation de la quantité de mouvement :

Supposons, nous observons deux particules soumises uniquement à leur interaction mutuelle, et qui par ailleurs sont isolées du reste du monde, en raison de leur interaction. Leurs vitesses individuelles ne sont pas constantes mais varient avec le temps et leurs trajectoires courbées sont en général courbées comme indiquent la Fig. (III-1).

A un instant  $t$  donné, la particule 1 est en A avec une vitesse  $v_1$  et la particule 2 est en B avec une vitesse  $v_2$  .A un instant ultérieur  $t'$  , les particules sont respectivement en A' et B' avec des vitesses  $v'_1$  et  $v'_2$ .En désignant les masses des particules par  $m_1$  et  $m_2$  , nous disons que la quantité de mouvement totale du système a pour valeur à l'instant  $t$

$$P = p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad \text{(III-2)}$$

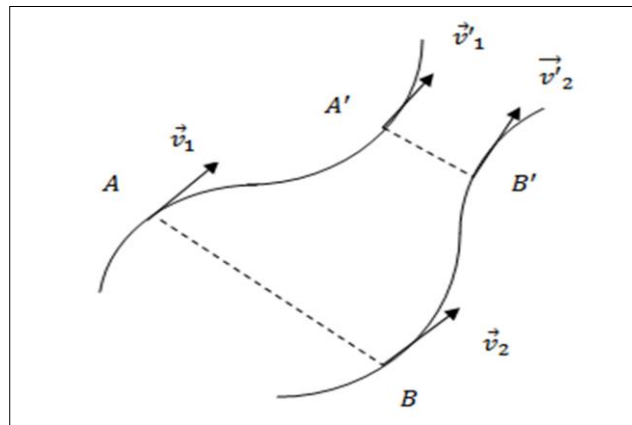
A l'instant  $t'$  , la quantité de mouvement totale est

$$P' = p'_1 + p'_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad \text{(III-3)}$$

# DYNAMIQUE

les masses des particules sont indépendantes de leur état de mouvement, nous avons donc utilisé les mêmes masses que dans l'Eq (III-2). Le résultat important c'est que, quels que soient les temps  $t$  et  $t'$ , nous trouvons toujours, comme un résultat d'observation, que

$$P = P'$$



**Fig. III-1:** Interaction entre deux particules

En d'autres termes;

« La quantité de mouvement totale d'un système composé de deux particules soumises seulement à leur interaction mutuelle reste constante »

On peut exprimer mathématiquement la conservation de la quantité de mouvement en écrivant l'équation suivante:

$$P = \sum p_i = p_1 + p_2 + p_3 \dots = cst \quad (\text{III-4})$$

qui Cela signifie que, dans un système isolé, la variation de la quantité de mouvement d'une particule pendant un intervalle de temps donné est égale et opposée à la variation de la quantité de mouvement du reste du système pendant le même intervalle de temps.

A titre exemple, dans le cas d'une molécule isolée d'hydrogène, la variation de la quantité de mouvement de l'un des électrons est égale et opposée à la somme des variations des quantités de mouvement de l'autre électron et des deux protons

Dans le cas particulier de deux particules

$$p_1 + p_2 = Cst \quad (\text{III-5})$$

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 \quad (\text{III-6})$$

$$\Rightarrow p'_1 - p_1 = p_2 - p'_2 \quad (\text{III-7})$$

$$\Rightarrow p'_1 - p_1 = -(p'_2 - p_2) \quad (\text{III-8})$$

en appelant  $p' - p = \Delta p$  la variation de la quantité de mouvement entre les instants  $t$  et  $t'$  est

$$\Delta p_1 = -\Delta p_2 \quad (\text{III-9})$$

la quantité de mouvement « perdue » par une des particules en interactions est égale à celle « gagnée » par l'autre particule.

On peut aussi exprimer ce résultat en disant que :

« Une interaction produit un échange de quantité de mouvement »

## 4- Les lois de Newton:

### 4-1-Introduction

La cinématique peut aller très loin dans sa démarche qui consiste à interroger la nature dans un langage mathématique. Cependant, le but ultime de la mécanique est de prédire le mouvement d'un corps soumis à certaines forces, ou d'étudier ces forces en analysant

le comportement d'objet qui lui sont soumis. Trois lois physiques, énoncées par Newton dans ces *Principia*, fournissent les bases de ce programme qu'on appelle *dynamique*.

**La mise** en forme systématiques, logique et déductive de la mécanique par Newton constitue contribue énormément au un moment charnière du un développement de la science moderne. Newton commence par un commentaire sur le temps et l'espace. Ensuite, Newton introduit deux définitions La première celle de quantité de la matière, qui peut paraître triviale, mais elle permet de mieux faire comprendre appréhender la deuxième : la quantité de mouvement.

### 4-2-La première loi de Newton : Le principe d'inertie

#### 4-2-1-la quantité de matière : masse d'inertie

La masse représente la quantité de matière. On dit que c'est *une grandeur extensive*. Cela veut dire que la valeur de cette grandeur pour un système formé de deux sous-systèmes est la somme des valeurs de cette grandeur dans chaque sous-système.



## DYNAMIQUE

---

Dans le cadre de la mécanique newtonienne, la masse est aussi *une grandeur conservée*, la perte ou le gain de masse d'un système est égal à la quantité de masse qui quitte le système ou qui y entre, respectivement. En plus, la masse d'un système qui n'échange pas de masse avec l'extérieur est une constante, qui ne dépend ni de l'état du système, ni du référentiel.

### 4-2-2-Énoncé du principe :

La cinématique commence par la définition d'un mouvement par rapport à un référentiel. La question se pose naturellement de savoir si n'importe quel référentiel peut être choisi. La première loi de Newton, dite loi d'inertie, répond à cette question. En effet, elle stipule :

« Tous corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite à moins que quelque force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état ».

On note que pour Newton, l'absence de force est un concept évident. La notion de mouvement uniforme dépend du référentiel choisi.

Par définition, on appellera *référentiel d'inertie* ou *galiléens* tout référentiel par rapport auquel le principe d'inertie est vérifié. En ce sens, la première loi est en fait une définition du référentiel d'inertie. Par exemple, si nous voulons décrire un objet lancé à quelques mètres dans le champ de pesanteur, il suffit de considérer la Terre comme un référentiel d'inertie, nous savons que la terre est animée d'un mouvement de rotation

autour d'elle-même, qu'elle tourne autour du soleil et que tout le système solaire dans son ensemble tourne autour du centre de la galaxie à laquelle il appartient. Cependant, même si le mouvement de la terre est une composition de plusieurs rotations, notre

planète reste un bon référentiel d'inertie pour la plupart des expériences qu'on réalise sur elle. Un autre référentiel d'inertie d'une meilleure approximation est celui de Copernic. Il a pour origine le centre de masse du système solaire et ses axes dirigés vers trois étoiles.

### 4-2 Deuxièmes lois de Newton pour le point matériel

Newton pose la définition suivante : une force imprimée est une action exercée sur un corps, afin de lui modifier son état, que ce soit un état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme. Si des actions différentes ont le même effet sur un point matériel, on dira que la même force agit

## DYNAMIQUE

---

Autrement dit : «les changement de mouvement sont proportionnels à la force motrice, et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force est imprimée à l'objet »

Dans le langage moderne, il faut comprendre que si  $F$  est la force appliquée,  $F \cdot \Delta t$  est la *force motrice* invoquée par Newton,  $\Delta t$  étant le temps pendant lequel  $F$  agit .Comme Newton a décidé d'introduire l'état du mouvement donné par la quantité de mouvement du système, le changement du mouvement est à comprendre assimilé comme un changement de la quantité de mouvement du système.

Dans le formalisme vectoriel moderne, la deuxième loi de Newton du mouvement s'exprime par :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (\text{III-10})$$

ou  $\vec{F}$  est la somme des forces appliquées sur le point matériel .On se souvient qu'on a déjà spécifier le référentiel (par la première loi).

En nous souvenant de la définition (III-1) de la quantité de mouvement, nous pouvons écrire l'Eq (III-10) sous la forme:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) \quad (\text{III-11})$$

et si  $m$  est constant, nous avons

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (\text{III-12})$$

On voit que la force s'exprime en  $\text{Kg m /s}^2$  .Cette unité est appelée le newton ;  $1\text{N}=1\text{kg.m/s}^2$

Nous pouvons énoncer l'Eq (III-12) en disant :

« *La force est égale au produit de la masse par l'accélération, si la masse est constante* ».

Remarquons que dans ce cas, la force a la même direction que l'accélération .D'après l'Eq (III-12) nous voyons que si la force est constante, l'accélération est aussi constante et donc le mouvement est uniformément accéléré .C'est ce qui arrive aux corps qui tombent près de la surface de la terre ; tous les corps qui tombent avec la même accélération  $\vec{g}$  , et par suite ont la force d'attraction de la pesanteur, appelée poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ .

## 4-3-Troisième loi de Newton :

l'équation relie les variations de la quantité de mouvement des particules 1 et 2 pendant l'intervalle de temps  $\Delta t = t' - t$ . En divisant par  $\Delta t$  les deux cotés de cette équation, nous pouvons écrire ce qui suit :

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta p_2}{\Delta t} \quad (\text{III-13})$$

Ce qui indique que les variations moyennes du vecteur quantité de mouvement des particules dans l'intervalle de temps  $\Delta t$  sont égal en grandeur et opposées en direction.

Si nous faisons  $\Delta t$  très petits

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{dp_2}{dt} \quad (\text{III-14})$$

En utilisant la notion de force l'Eq (III-10), nous pouvons écrire l'Eq (III-14) sous la forme

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad (\text{III-15})$$

Ou  $\vec{F}_1 = \frac{dp_1}{dt}$  est la force s'exerçant sur la particule 1 en raison de son interaction avec la particule 2

Et  $\vec{F}_2 = \frac{dp_2}{dt}$  la force s'exerçant sur 2 en raison de son interaction avec la particule 1.

Nous en concluons que :

*« Quand deux particules sont en interaction, la force qui s'exerce sur une particule est égale et opposée à la force qui s'exerce sur l'autre » .*

C'est la troisième loi de Newton du mouvement, elle est aussi une conséquence de la définition de la force et du principe de conservation de la quantité de mouvement .

On l'appelle quelquefois *la loi de l'action et de la réaction*.

## 5- Autres forces:

### 5-1 - Les forces en électromagnétisme

#### 5-1-1- Force de Coulomb:

Une charge électrique  $q_1$  immobile exerce sur une charge électrique  $q_2$  immobile

Une force  $\vec{F}$  donnée par :

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (\text{III-16})$$

avec  $1/4\pi\epsilon_0 = 8.98 \times 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$  ,  $r$  la distance entre les charges et  $\vec{r}$  le vecteur d'origine à la position de  $q_1$  et d'extrémité à celle de  $q_2$  .Ainsi, si  $q_1$  et  $q_2$  sont de même signe, cette force est répulsive.

### 5-1-2-Champ électrique :

La notion de champ électrique peut être comprise par analogie avec le champ de la gravitation et la force gravitationnelle .Un ensemble de charges produit un champ électrique  $\vec{E}$  tel que la somme des forces de Coulomb entre une charge test  $q$  et toutes les autres vaut

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (\text{III-17})$$

### 5-1-3-Force de Lorenz :

Dans un champ d'induction  $\vec{B}$  , une particule de charge  $q$ , de vitesse  $\vec{v}$  , subit une force

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (\text{III-18})$$

On note que la force est perpendiculaire à la vitesse, par conséquent, la force de Lorenz ne travaille pas et l'énergie cinétique de particule est constante.

## 5-2-Modèles de forces de frottement

Dans de grand nombre de situations, les forces en présence n'ont pas d'expressions simples .C'est tout particulièrement le cas des forces de frottement pour lesquelles il n'y pas de lois dont l'expression mathématique serait pure comme celles pour la force de la gravitation ou la loi coulomb, il faut accepter de travailler avec des modèles approximatifs.

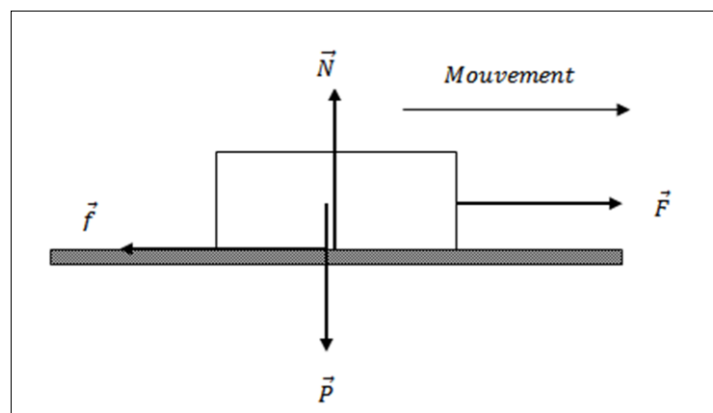
Supposons par exemple que nous poussions le livre le long de la table , en lui donnant une certaine vitesse , après l'avoir lâché ,il ralenti et finalement s'arrête .Cette perte de quantité de mouvement indique qu'une force s'oppose au mouvement ; cette force est appelée *force de frottement* .Elle est due a l'interaction entre les molécules des deux corps , qu'on mentionne parfois sous le nom de cohésion suivant que les deux corps sont formés de matériaux identiques ou défèrent différents.

La force de frottement a une grandeur telle que, dans la plupart des applications, elle peut être considérée comme proportionnelle à la force normale  $N$  appliquant un corps contre l'autre, et par suite a (dans une) (avec) direction opposée à celle de la vitesse.

La constante de proportionnalité est appelée *coefficient de frottement* qu'on désigne par  $\mu$ .

## 5-2-1 - Les frottement secs :

On considère un solide immobile sur une surface (Fig. III-2) .il subit une force de réaction  $N$  .On suppose qu'on applique au solide une force de traction tangente à la surface  $F$  mais sans que le solide ne glisse.



**Fig. III-2:** la force de frottement s'oppose au mouvement et dépend de la force normale

Alors le solide subit aussi une force de frottement  $\vec{f}$  tangente à la surface, la force  $\vec{f}$  s'ajuste pour qu'il n'y ait pas de glissement .Cette situation est maintenue jusqu'au point où la force  $\vec{f}$  atteint la valeur maximale de son module .Au -delà de cette valeur, il y a décrochement et glissement .Cette force maximale est donnée par :

$$\vec{f}_{max} = \mu_s \vec{N} = -\mu_s |N| \left(\frac{\vec{v}}{v}\right) \quad (\text{III-19})$$

$\mu_s$  est appelé *coefficient de frottement statique*. ce coefficient donne la force minimum nécessaire pour mettre en mouvement relatif deux corps qui initialement sont en contact et immobiles l'un par rapport à l'autre.

La valeur de  $\mu_s$  dépend des matériaux en contact de leur état de surface et de la présence d'humidité, notamment .Une valeur de l'ordre de 1.0 est souvent observée.

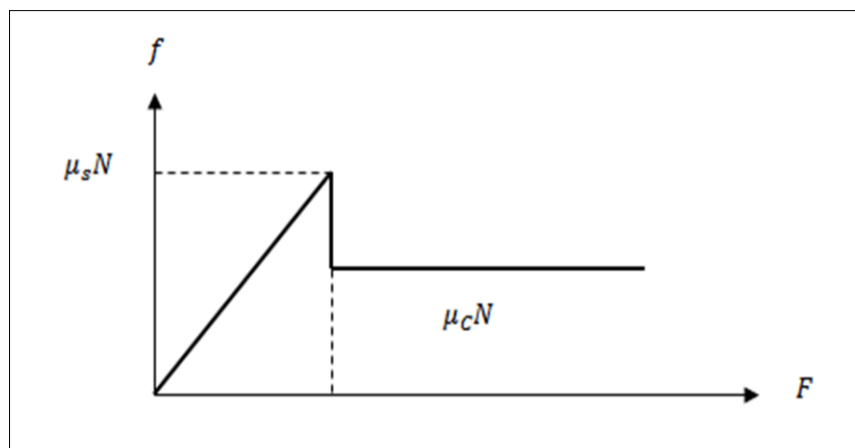
## 5-2-2- Frottement avec glissement :

Pour un solide sur une surface, subissant une force de réaction de la surface  $N$ , glissant à une vitesse  $v$  par rapport à la surface, la force de frottement est donnée par :

$$\vec{f} = \mu_c \vec{N} = -\mu_c |N| \left(\frac{\vec{v}}{v}\right) \quad (\text{III-20})$$

$\mu_c$  appelé *coefficient de frottement cinétique*, il donne produit une la force nécessaire pour maintenir les deux corps en mouvement relatif uniforme.

On a trouvé Il a été prouvé expérimentalement que  $\mu_c$  est toujours plus petit que le coefficient statique  $\mu_s$  pour tous les matériaux essayés .On en fait l'expérience A titre d'exemple lorsqu'on fait glisser une armoire sur un sol lisse .En résumé la force de frottement  $f$  dépend de la traction  $F$  comme indiqué sur la Fig. (III-3)



**Fig. III-3**

A basse valeur de la traction, la force de frottement  $f = F$  et l'objet est immobile sur son support .A une valeur limite, il y'a un décrochement et au -delà de celle -ci, la force de frottement est constante, plus petite que la valeur au décrochement, et indépendante de la traction  $F$

## 5-2-3-le frottement visqueux

Dans le fluides a très basse vitesse, la force de frottement subie par un objet, se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$  par rapport au fluide peut être estimée par:

$$\vec{F} = -k\eta\vec{v} \quad (\text{III-21})$$

ou le coefficient  $\eta$  est la viscosité,  $k$  un facteur géométrique ( $k = 6\pi R$  pour une sphère de rayon  $R$ ).

## 6- Moment cinétique et moment de force

### 6-1- Moment de force :

Considérons une force  $F$  agissant sur un corps  $C$  qui peut tourner autour d'un point  $O$  (Fig. III-4) si la force ne passe pas par  $O$ , elle aura pour effet de faire tourner le corps autour de  $O$ .

L'efficacité de  $F$  à produire une rotation croît avec la distance (appelée bras de levier) ou  $b=OB$  de  $O$ . par exemple, quand nous ouvrons une porte, nous poussons ou nous tirons toujours le plus loin possible des gonds et nous essayons de maintenir perpendiculaire à la porte la direction suivant laquelle nous poussons ou nous tirons.

Cette expérience nous suggère donc qu'il est commode de définir une grandeur physique  $\tau$ , qu'on appellera *moment*

$$\tau = F \wedge b \quad (\text{III-22})$$

$$\tau = \text{force} \wedge \text{bras de levier}$$

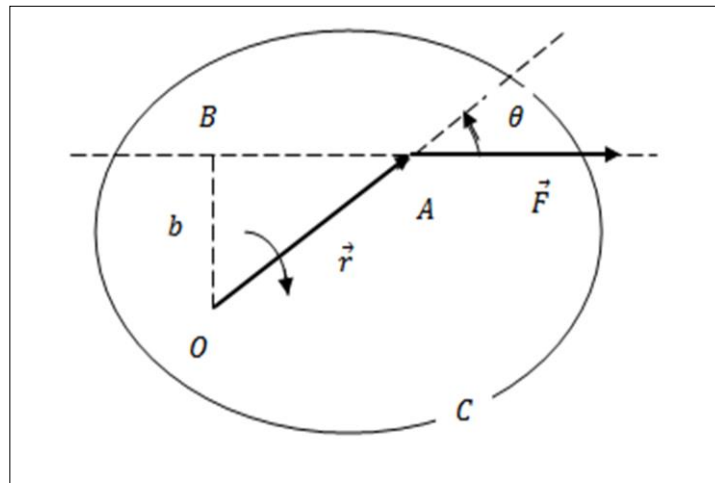


Fig. III-4: Moment d'une force

Par conséquent, un moment peut s'exprimer comme le produit d'une unité de force et d'une unité de distance. Ainsi dans le système MKSC, on exprime un moment en N.m

# DYNAMIQUE

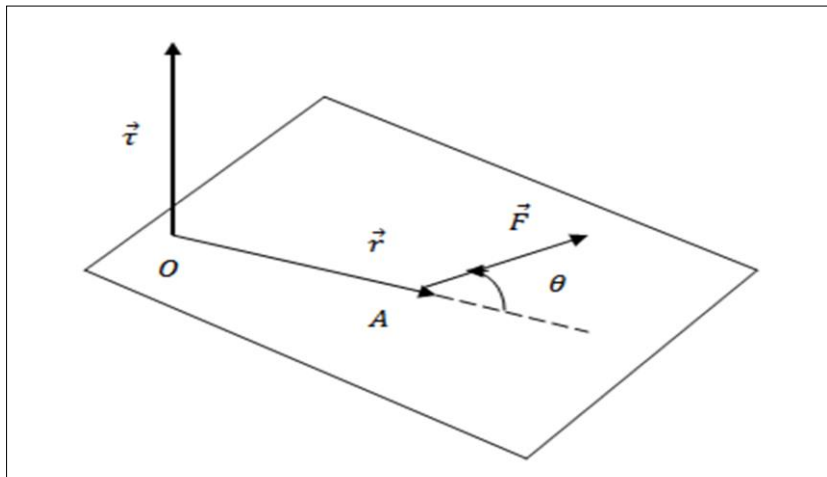
En remarquons d'après la figure que  $\tau = r \sin \theta$ , nous pouvons aussi écrire

$$\tau = Fr \sin \theta \quad (\text{III-23})$$

En conclusion que le moment peut être considéré comme une grandeur vectorielle

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (\text{III-24})$$

Ou  $\vec{r}$  vecteur de position, par rapport au point O, du point A ou s'applique la force  $\vec{F}$ . D'après les propriétés du produit vectoriel, le moment est représenté par un vecteur perpendiculaire à la fois à  $\vec{r}$  et  $\vec{F}$ , c'est à dire perpendiculaire au plan défini par  $\vec{F}$  et  $\vec{r}$  Fig. (III-5)



**Fig. III-5:** Relation vectorielle entre le moment, la force et le vecteur position

Nous avons par application de l'Eq (I-21),

$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\tau} = \vec{u}_x (yF_z - zF_y) + \vec{u}_y (zF_x - xF_z) + \vec{u}_z (xF_y - yF_x) \quad (\text{III-25})$$

ou  $\tau_x = yF_z - zF_y$ ,  $\tau_y = zF_x - xF_z$ ,  $\tau_z = xF_y - yF_x$ , si  $\vec{r}$  et  $\vec{F}$  sont tous les deux dans le plan XOY,  $z=0$  et  $F_z = 0$  de sorte que

$$\vec{\tau} = \vec{u}_z (xF_y - yF_x)$$

et  $\vec{\tau}$  est parallèle à l'axe des Z, comme illustre la Fig. (III-6).



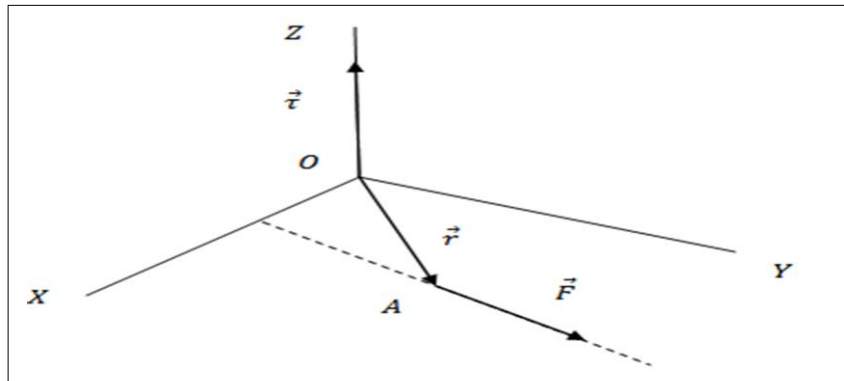


Fig. III-6

## 6-2-Le moment cinétique :

Le moment cinétique par rapport au point O (Fig.III-7) d'une particule de masse  $m$  se déplaçant à la vitesse  $v$  (et ayant par conséquent une quantité de mouvement  $P = mv$ ) est défini par le produit vectoriel

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{P} \quad (\text{III-26})$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{v}$$

Le moment cinétique est un vecteur perpendiculaire au plan déterminé par  $\vec{r}$  et  $\vec{v}$ . le moment cinétique de la particule change en générale de grandeur et de direction quand la particule se déplace. Cependant, si la particule se déplace dans un plan, et que le point O soit situé dans ce plan, la direction de moment cinétique reste la même, c'est à dire perpendiculaire au plan, puisque  $\vec{r}$  et  $\vec{v}$  sont tous deux dans le plan,

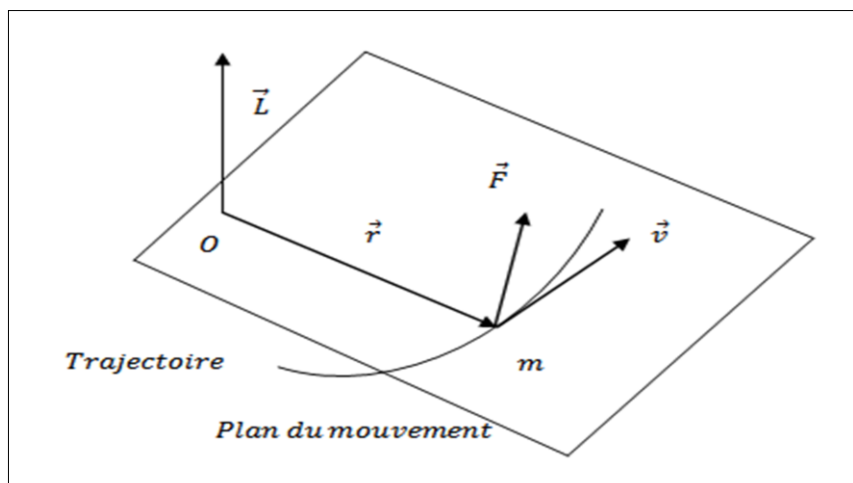


Fig. III-7 : Moment cinétique d'une particule

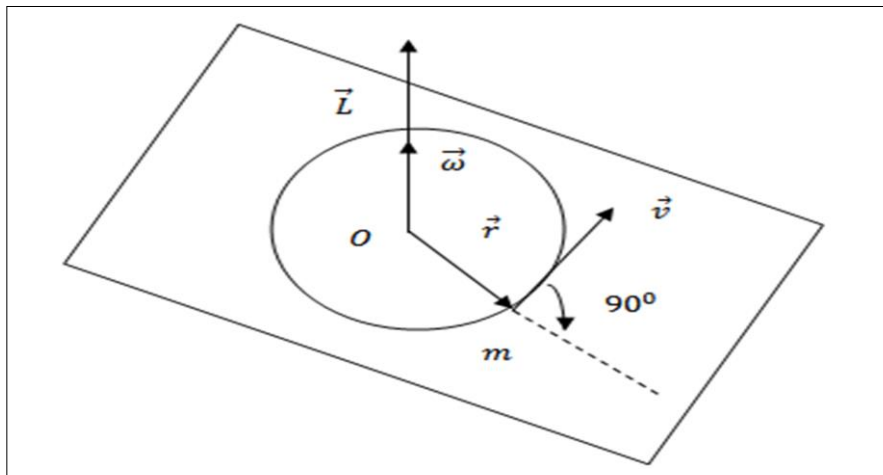
# DYNAMIQUE

Dans le cas du mouvement circulaire (Fig. III-8), si O est le centre du cercle, les vecteurs  $\vec{r}$  et  $\vec{v}$  sont perpendiculaire, et  $\vec{v} = \omega\vec{r}$ , de sorte que :

$$L = mrv = mr^2\omega \quad (\text{III-27})$$

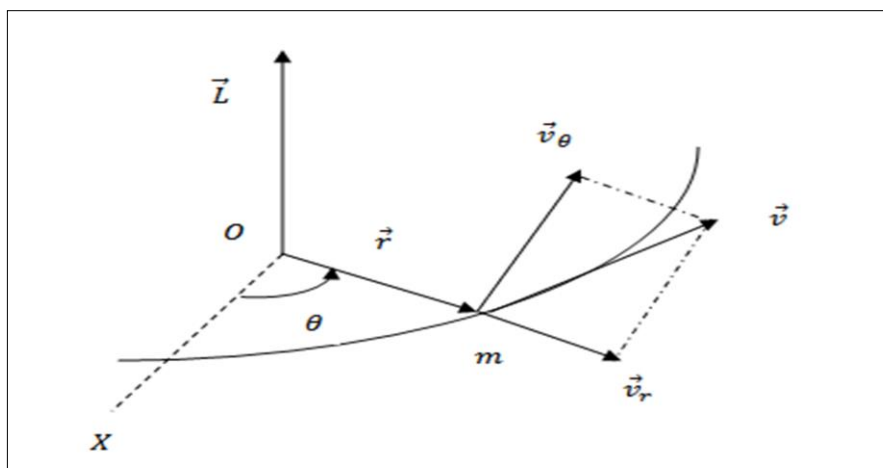
la direction de L est la même que celle de  $\omega$ , et l'Eq (III-27) peut s'écrire vectoriellement

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega} \quad (\text{III-28})$$



**Fig. III-8 :** Relation vectorielle entre la vitesse angulaire et le moment cinétique dans le mouvement circulaire

si le mouvement plan n'est pas circulaire, mais curviligne, nous pouvons décomposer la vitesse suivant ses composantes radiales et transversale ; ce qui donne  $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$  (Fig. III-9)



**Fig. III-9 :** relation entre le moment cinétique et la composante transversale de la vitesse

## DYNAMIQUE

---

nous pouvons écrire le moment cinétique sous la forme :

$$\vec{L} = m\vec{r} \wedge (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta)$$

puisque  $\vec{r} \wedge \vec{v}_r = 0$  (les deux vecteurs sont parallèles). Nous obtenons alors comme valeur de  $\vec{L}$

$$\vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{v}_\theta = mr v_\theta \quad (\text{III-30})$$

comme  $v_\theta = r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)$ , nous pouvons écrire :

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{III-31})$$

Cette équation est identique à l'Eq (III-27) obtenue pour le mouvement circulaire, puisque

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$  mais dans le cas générale  $r$  n'est pas constant.

En nous rappelant l'Eq (I-21) pour le produit vectoriel, nous pouvons écrire le moment cinétique d'une particule sous la forme :

$$\vec{L} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}$$

ou, en fonction des composantes,

$$L_x = yP_z - zP_y$$

$$L_y = zP_x - xP_z \quad (\text{III-32})$$

$$L_z = xP_y - yP_x$$

Dans le cas d'un mouvement plan, par exemple dans le plan XOY, nous avons  $z=0, P_z = 0$

de sorte que  $L_x = L_y = 0$ , et que seule la composante  $L_z$  demeure.

Nous retrouvons que le moment cinétique est perpendiculaire au plan, comme nous l'avions indiqué précédemment. Prenons maintenant la dérivée par rapport au temps de l'Eq (III-26). celle ci donne

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (\text{III-33})$$

## DYNAMIQUE

---

Comme  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$  et que  $\vec{p} = m\vec{v}$  est toujours parallèle à  $\vec{v}$ , on a

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} = \vec{v} \wedge \vec{p} = \vec{v} \wedge m\vec{v} = 0$$

par ailleurs  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ . l'Eq (III-33) devient donc :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (\text{III-34})$$

Si nous rappelons que suivant la définition énoncé au (III-24) le moment de  $\vec{F}$  par rapport à O est la suivante :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Nous obtenons finalement

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \quad (\text{III-35})$$

*«Le dérivé par rapport au temps du moment cinétique d'une particule est égal au moment de la force qui lui est appliquée »*

Ceci implique que la variation  $d\vec{L}$  du moment cinétique pendant un court intervalle  $dt$  est parallèle au moment  $\vec{\tau}$  appliqué à la particule.

# TRAVAIL ET ENERGIE

## 1-Introduction:

Après avoir étudié la dynamique du point en s'appuyant exclusivement sur le PDF, sur une autre approche faisant appel aux notions de travail et d'énergie est présentée dans ce chapitre, de leurs utilisations et avantages lorsque les forces appliquées sont d'un genre particulier ou on peut leur associer des énergies potentielles.

## 2-Travail:

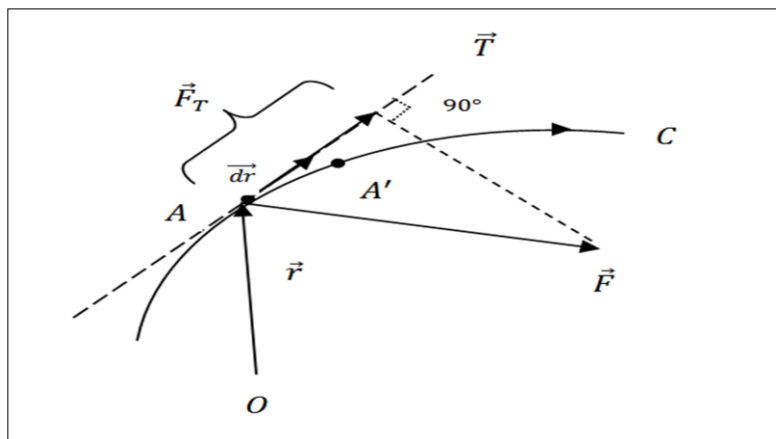
Considérons une particule A se déplaçant le long d'une courbe C sous l'action d'une force F (Fig. IV-1)

pendant un temps très court  $t$ , elle va de A en A', le déplacement étant  $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{dr}$ . Le travail effectué par la force F pendant ce déplacement est défini par le produit scalaire

$$dW = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} \quad (\text{IV-1})$$

En désignant la grandeur de  $dr$  (c'est-à-dire la distance parcourue) par  $s$ , nous pouvons aussi écrire l'Eq (IV-1) sous la forme

$$dW = F \cdot ds \cdot \cos \theta \quad (\text{IV-2})$$



**Fig. IV-1:** Le travail est égal au produit du déplacement par la composante de la force suivant le déplacement

ou  $\theta$  est l'angle que fait la direction de la force  $F$  avec le déplacement  $dr$ . Comme  $F \cdot \cos \theta$  est la composante  $F_T$  de la force sur la tangente à la trajectoire, on a

$$dW = F_T ds \quad (\text{IV-3})$$

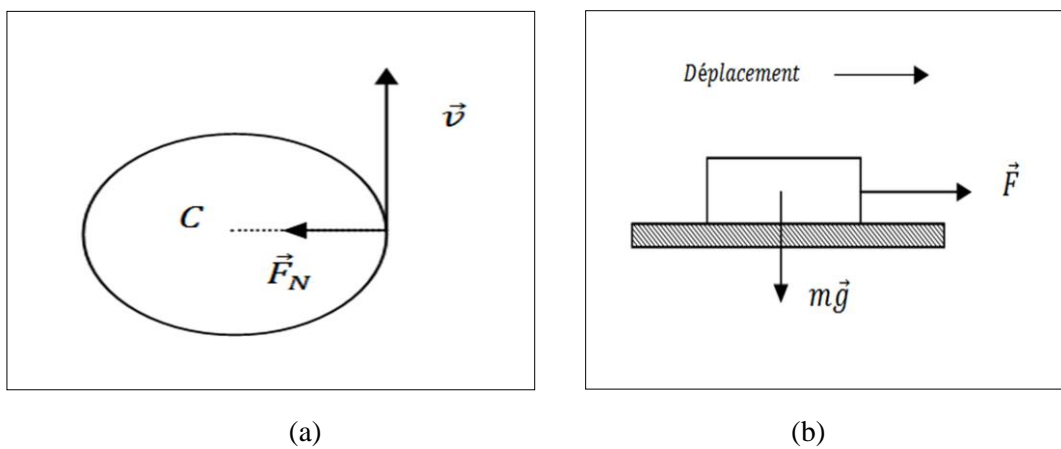
# TRAVAIL ET ENERGIE

Ceci peut s'exprimer en disant que

" Le travail est égal au déplacement multiplié par la composante de la force suivant le déplacement "

Remarquons que si la force est perpendiculaire au déplacement ( $\theta = 90^\circ$ ), le travail fait par cette force est nul .C'est le cas de la force centripète dans le mouvement circulaire (Fig. IV-2a) ou de la force de pesanteur  $mg$  quand un corps se déplace sur un plan horizontal (Fig. IV-2b)

l'équation ( ) donne l'expression du travail pour un déplacement infiniment petit .



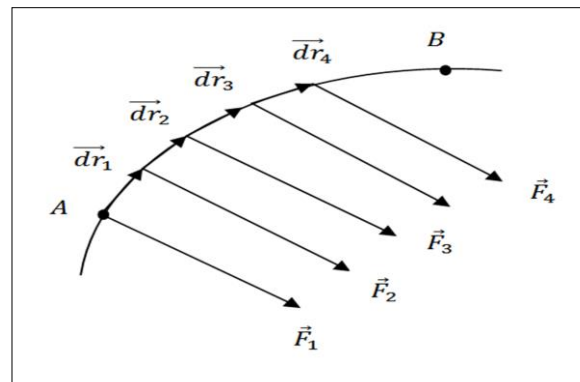
**Fig. IV-2** Forces qui ne travaillent pas

le travail total effectué sur la particule quand elle se déplace de A à B (Fig. IV-3) est la somme de tous les travaux infiniment petits accomplis durant les déplacements infinitésimaux successifs .C'est -à dire ,

$$dW = \vec{F}_1 \cdot \vec{dr}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{dr}_2 + \vec{F}_3 \cdot \vec{dr}_3 + \dots$$

ou

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_A^B F_T ds \tag{IV-4}$$



**Fig. IV-3** Le travail totale est la somme d'un grand nombre de travaux très petits

# TRAVAIL ET ENERGIE

Avant de calculer l'intégrale qui apparait dans l'Eq (IV-4) , nous devons connaître  $F$  en fonction de  $x$ ,  $y$  et  $z$  .Nous devons aussi , en général , connaître l'équation de trajectoire le long de laquelle la particule se déplace .Une autre possibilité consiste à connaître  $F$ ,  $x$ ,  $y$  et  $z$  en fonction du temps ou de toute autre variable .

Il est quelquefois commode de représenter  $F_T$  . Dans la figure nous avons porté  $F_T$  en fonction de la distance  $s$  .Le travail  $dW = F_T ds$  effectué pendant un petit déplacement  $ds$  correspond à l'aire du petit rectangle.

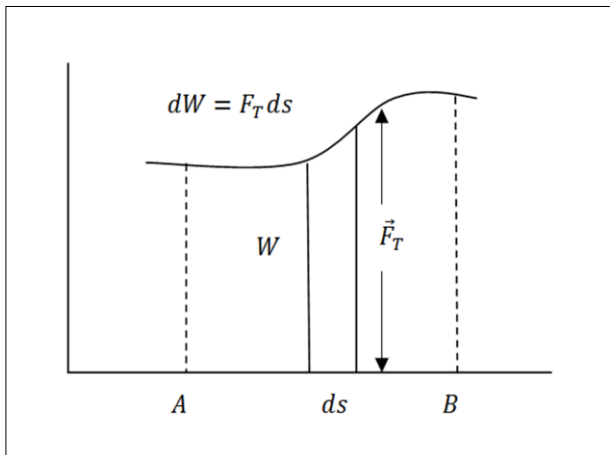
Ainsi pouvons-nous trouver le travail total effectué sur la particule de la Fig. IV-3.

Evidemment pour la déplacer de A à B, il faut subdiviser en premier lieu le en divisant d'abord la surface hachurée de la Fig. IV-4 en petits rectangles et en ajoutant ensuite en faisant apparaître respectivement leurs aires de chacun d'eux .ceci doit, autrement dit, le travail effectué est donné par correspondre à l'aire globale hachurée de la Fig. IV-4.

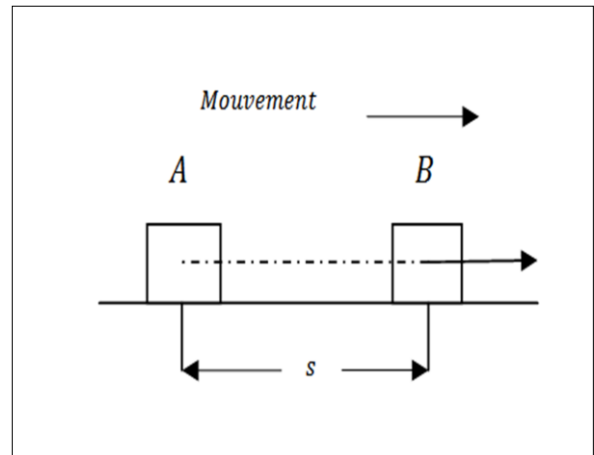
Un cas particulier intéressant est celui dans lequel la force est constante en grandeur et direction et ou le corps se déplace en ligne droite dans la direction de la force (Fig. IV-5).

Alors  $F_T = F$  et l'Eq (IV-4) devient

$$W = \int_A^B F \cdot ds = F \int_A^B ds = F \cdot s \quad (IV-5)$$



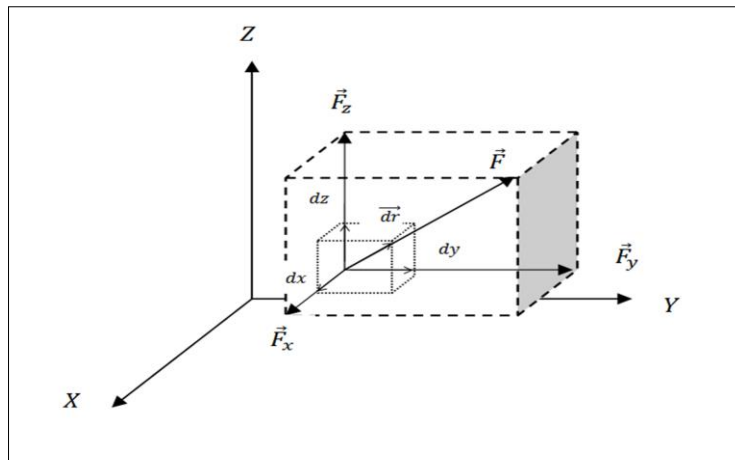
**Fig. IV-4 :** Le travail total effectué en allant de A à B est égal à l'aire située sous la courbe



**Fig. IV-5:** Le travail d'une force constante en grandeur et direction

Si  $F_x$  ,  $F_y$  et  $F_z$  sont les composantes rectangulaires de  $F$  et  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  celles de  $dr$  (Fig. IV-6), l'application de l'Eq (I-21) nous donne :

$$W = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (IV-6)$$



**Fig. IV-6:** Le travail effectué par une force est égal à la somme des travaux effectués par ses composantes rectangulaires

Quand plusieurs forces  $F_1, F_2, F_3, \dots$  agissent sur la particule, le travail effectué par chaque force au cours de déplacement  $\overline{AA'} = \overline{dr}$  (fig ) est  $dW_1 = F_1 \cdot dr$ ,  $dW_2 = F_2 \cdot dr$ ,  $dW_3 = F_3 \cdot dr$  et ainsi de suite .Remarquons que  $dr$  est le même pour toutes les forces puisqu'elles agissent toutes sur la même particules .On obtient le travail total effectué sur la particule en ajoutant les travaux infinitésimaux

$dW_1, dW_2, dW_3, \dots$ , effectués par chacune des forces .Ainsi

$$\begin{aligned} dW &= dW_1 + dW_2 + dW_3 + \dots \\ &= F_1 \cdot dr + F_2 \cdot dr + F_3 \cdot dr \\ &= (F_1 + F_2 + F_3 + \dots) dr \\ &= F \cdot dr \end{aligned} \quad (IV-7)$$

ou  $F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$  est la force résultante .Le dernier résultat de l'Eq (IV-7) n'est autre que le travail effectué par la force résultante agissant sur la particule .Ceci démontre que le travail de la résultante de plusieurs forces appliquées à la sur même particule est égal à la somme des travaux des composantes.

### 3-Puissance

Dans certaines applications pratiques, il est important de connaître la vitesse à laquelle le travail est fait réaliser. La puissance instantanée est définie par



## TRAVAIL ET ENERGIE

---

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (IV-8)$$

Autrement dit la puissance est définie comme le un travail par unité de temps pendant un très petit intervalle  $dt$ . En utilisant les Eqs (IV-7) et (IV-8) nous pouvons aussi écrire

$$P = F \cdot \frac{dr}{dt} = F \cdot v \quad (IV-9)$$

et La puissance peut ainsi être définie comme le produit la force par la vitesse. On obtient la puissance moyenne pendant intervalle de temps  $t$  en divisant le travail total  $W$ , tel qu'il est donné énoncé dans l'Eq (IV-4), par le temps  $t$ , ce qui donne en résulte :

$$P_m = \frac{W}{t} \quad (IV-10)$$

### 4-Unité de travail et de puissance:

D'après En examinons les Eqs (IV-1) ou, (IV-5) nous voyons constatons que le travail peut s'exprimer comme le produit d'une unité de force par unité de distance.

Dans le système MKSC, on exprime le travail en newton-mètre, unité appelée joule, par abréviation J. Un joule est donc le travail effectué par une force d'un newton quand elle déplace une particule d'un mètre dans la direction de la force. En se rappelant que  $1N = 1kg \cdot s^{-2}$ , nous aurons  $J = Nm = m^2 kg s^{-2}$ .

D'après En appliquons le système CGS, le travail s'exprime en dynes centimètres, unité appelé erg. Donc :  $1erg = 1dyne \cdot cm$ . comme  $1N = 10^5 dynes$  et  $1m = 10^2 cm$ , nous avons  $1J = Nm = 10^7 ergs$

Suivant Selon la définition (IV-8), la puissance doit s'exprimer comme le rapport entre unité de travail et une unité de temps. Dans le système MKSC la puissance s'exprime en joule par seconde, unité appelée watt, par abréviation W. un watt est la puissance d'une machine qui effectue un travail à raison d'un joule par seconde. comme  $J = m^2 kg s^{-2}$ , nous avons  $W = J \cdot s^{-1} = m^2 kg s^{-3}$ .

On utilise généralement deux multiples du watt ; le kilowatt (KW) et le mégawatt (MW), définis par  $1KW = 10^3W$  et  $1MW = 10^6W$ . Une unité de puissance couramment utilisée par les ingénieurs est le cheval-vapeur, par abréviation CV, qui vaut environ 736W

### 5-Energie cinétique :

La force tangentielle a pour valeur  $F_T = m \frac{dv}{dt}$ .

Donc :

$$F_T ds = m \frac{dv}{dt} ds = m dv \frac{ds}{dt} = mv dv$$

## TRAVAIL ET ENERGIE

---

puisque  $v = \frac{ds}{dt}$ . L'intégrale qui apparaît dans l'Eq (IV-4) pour le travail total est donc

$$W = \int_A^B F_T ds = \int_A^B mvdv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \quad (\text{IV-11})$$

ou  $v_B$  est la vitesse de la particule en B et  $v_A$  celle en A. Le résultat (IV-11) indique que quelle que soit la fonction représentant la force F et la trajectoire suivie par la particule, la valeur de travail effectué par la force est toujours égale à la différence de la quantité  $\frac{1}{2}mv^2$  évaluée à la fin et au début de la trajectoire. Cette grandeur importante appelée *énergie cinétique*, est désigné par  $E_C$ .

Donc

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{ou} \quad E_C = \frac{p^2}{2m} \quad (\text{IV-12})$$

Puisque  $p = mv$ . L'équation (IV-11) s'écrit alors

$$W = E_{CB} - E_{CA} \quad (\text{IV-13})$$

ce qu'on on peut aisément exprimer en disant que le travail comme suit:

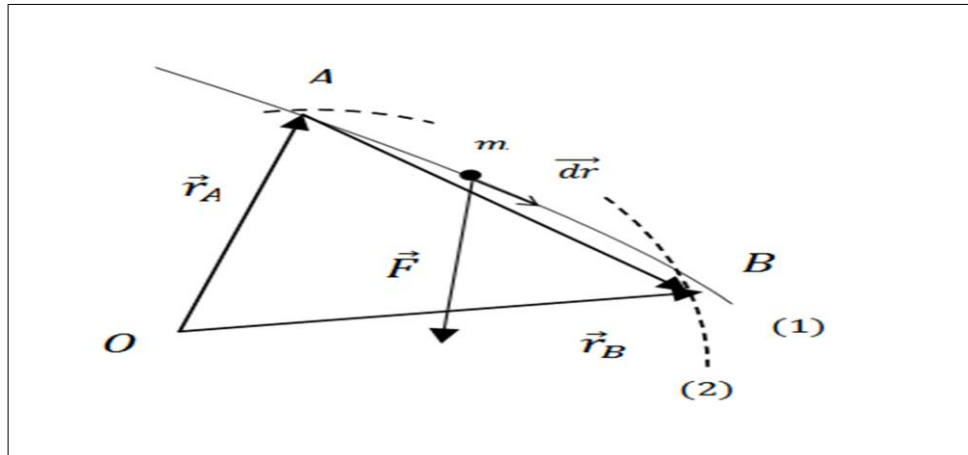
*" Le travail effectué sur une particule est égal à la variation de son énergie cinétique "*

La lecture de l'Eq (IV-13) nous montre permet de conclure que l'énergie cinétique se mesure évidemment avec les même unité que le travail, c'est à dire en joules dans le système MKSC et en ergs dans le système cgs. On peut aussi le vérifier en remarquant statuer sur l'unité de mesure d'après de l'Eq (IV-12) que  $E_C$  dans le système MKSC peut s'exprimer en  $m^2 kg s^{-2}$ , ce qui est l'équation aux dimensions du joule en fonction des unités fondamentales.

### 6-Travail d'une force constante en grandeur et direction :

Considérons une particule m se déplaçant sous l'action une force F constante en grandeur et direction (**Fig. IV-7**). Quand la particule se déplace de A à B suivant la trajectoire (1), le travail de la force F est :

$$W = \int_A^B F \cdot dr = F \int_A^B dr = F \cdot (r_B - r_A) \quad (\text{IV-14})$$



**Fig. IV-7** : Travail effectué par une force constant grandeur et direction

Le travail dans ce cas est indépendant du chemin joignant les point A et B .A titre d'exemple, si la particule au lieu de se déplacer suivant le chemin défini (1), suit le chemin (2) qui relie aussi A et B, le travail sera le même identique car la différence vectorielle

$$\vec{r}_B - \vec{r}_A = \overline{AB} \quad \text{est encore la meme.}$$

Remarque : qu'on peut aussi écrire l'Eq (IV-14) sous la forme

$$W = F \cdot r_B - F \cdot r_A \quad (\text{IV-15})$$

et que Le travail est donc égal à la différence entre la grandeur  $F \cdot r$  évaluée à une extrémité du chemin et celle évaluée à de l'autre

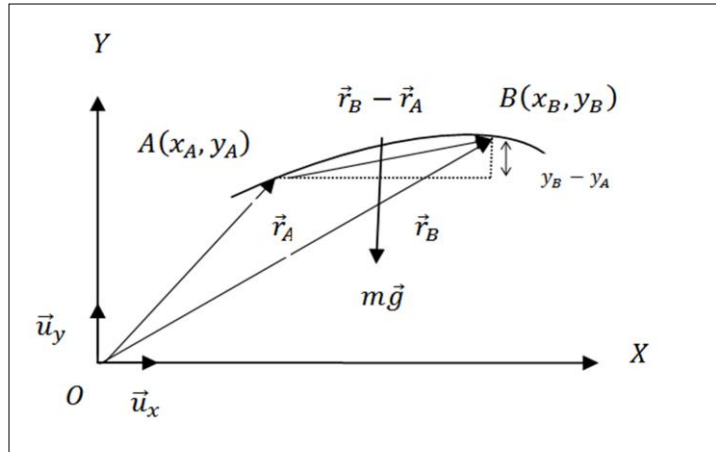
On trouve une application importante de l'Eq (IV-14) dans le cas du travail effectué par la force de pesanteur (Fig. IV-8).

Dans ce cas

$$\begin{cases} \vec{F} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y \\ \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A)\vec{u}_x + (y_B - y_A)\vec{u}_y \end{cases}$$

Donc on substituant dans l'Eq (IV-14) et en utilisant l'Equation de produit scalaire, nous avons

$$W = -mg(y_B - y_A) = mgy_A - mgy_B \quad (\text{IV-16})$$



**Fig. IV-8:** travail effectué par la pesanteur

Dans l'Eq (IV-16) évidemment on ne fait pas mention de la trajectoire, et que le travail ne dépend que la différence  $y_B - y_A$  des hauteurs des deux extrémités.

## 7-Energie potentielle

Une force dérive d'un potentiel si la manière dont elle dépend du vecteur position  $r$  ou des coordonnées  $x, y, z$  de la particule est telle que le travail  $W$  peut toujours s'exprimer comme la différence des valeurs d'une même quantité  $E_p(x, y, z)$  évaluées au point de départ et au point d'arrivée. La quantité  $E_p(x, y, z)$  est appelée *énergie potentielle*.

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = E_{pA} - E_{pB} \quad (\text{IV-17})$$

Le travail accompli est égale à  $E_p$  au point de départ moins  $E_p$  au point d'arrivée. En d'autres termes

*" L'énergie potentielle est une fonction des coordonnées telle que la différence entre les valeurs prises au départ et à l'arrivée soit égale au travail fourni à la particule pour se déplacer de sa position initiale à sa position finale "*.

Comparant l'Eq (IV-17) avec la relation (IV-12), obtenu pour l'énergie cinétique, que l'Eq (IV-12) est valable en générale quelle que soit la force  $\mathbf{F}$ .

Il est toujours vrai que  $E_C = \frac{1}{2}mv^2$ , alors que la forme de la fonction  $E_p(x, y, z)$  dépend de la nature de  $F$ , et que la condition posée par l'Eq (IV-17) ne peut être satisfaite par n'importe quelle force. Seules celles qui la vérifient sont dites *dérivant d'un potentiel*. Par exemple la force de pesanteur dérive d'un potentiel et que l'énergie potentielle de pesanteur est

## TRAVAIL ET ENERGIE

---

$$E_p = mgy \quad (\text{IV-18})$$

L'énergie potentielle est toujours définie à une constante arbitraire près  $C$ , car, si nous écrivons par exemple  $mgy + C$  au lieu de l'Eq (IV-18), l'Eq (IV-16) restera la même puisque la constante  $C$ , apparaissant dans les deux termes, s'élimine. A cause de cet arbitraire, nous pouvons définir le zéro ou niveau de référence de l'énergie potentielle là où cela nous convient le mieux.

Par exemple, dans les problèmes de chute des corps, la surface de la terre est le niveau de référence le mieux adapté, et on prend donc pour zéro l'énergie potentielle à la surface de la terre. Pour un satellite naturel ou artificiel, on définit habituellement le zéro de l'énergie potentielle à une distance infinie.

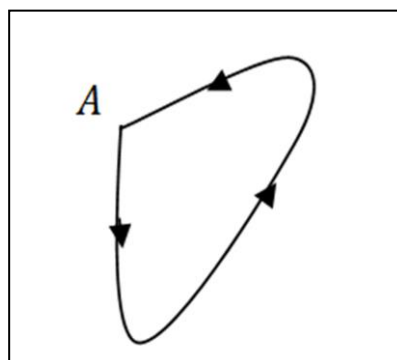
*"Le travail accompli par des forces dérivant d'un potentiel est indépendant du trajet "*

D'après l'équation de définition (IV-17), quel que soit le chemin joignant les points  $A$  et  $B$ , la différence  $E_{pA} - E_{pB}$  reste la même car elle ne dépend que des coordonnées de  $A$  et  $B$ . En particulier, si la trajectoire est fermée (IV-9) de sorte que le point final coïncide avec le point initial, c'est à dire que  $A$  et  $B$  sont un même point  $E_{pA} = E_{pB}$ , et

le travail est nul. Ceci signifie que pendant une partie de chemin le travail est positif et durant l'autre partie est négatif et égale en valeur absolue, ce qui donne au total un résultat nul.

Quand la trajectoire est fermée, l'intégrale apparaissant dans l'Eq ( ) s'écrit  $\oint$ . Le cercle sur le signe intégrale indique que la trajectoire est fermée

$$W_o = \oint F \cdot dr = 0 \quad (\text{IV-19})$$



**Fig. IV-9:** Le travail effectué par une force dérivant d'un potentiel le long d'un circuit fermé est nul

## TRAVAIL ET ENERGIE

---

Réciproquement, on peut démontrer que la condition exprimée par l'Eq (IV-19) peut être adoptée comme la définition d'une force dérivant d'un potentiel. En d'autres termes, si une force  $F$  satisfait à l'Eq (IV-19) pour un chemin fermé quelconque, on peut démontrer alors que l'Eq (IV-17) est correcte.

Pour satisfaire à l'Eq (IV-17) il est nécessaire que

$$F \cdot dr = -dE_P \quad (\text{IV-20})$$

car alors

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B F \cdot dr = - \int_A^B dE_P \\ &= -(E_{PB} - E_{PA}) = E_{PA} - E_{PB} \end{aligned}$$

Remarquons que le signe moins apparaît dans l'Eq (IV-20) est nécessaire si nous voulons obtenir  $E_{PA} - E_{PB}$  au lieu de  $E_{PB} - E_{PA}$ .

Comme  $dr = f \cdot ds \cdot \cos\theta$ , où  $\theta$  est l'angle entre la force et le déplacement, nous pouvons écrire à la place de l'Eq (IV-20)

$$F \cdot \cos\theta = -\frac{dE_P}{ds} \quad (\text{IV-21})$$

Or, comme nous l'avons expliqué à propos de la Fig (IV-1),  $F \cos\theta$  est la composante de la force suivant la direction du déplacement  $ds$ ; donc si nous connaissons  $E_P(x, y, z)$  nous pouvons obtenir la composante de  $F$  suivant n'importe quelle direction en calculant la quantité  $-\frac{dE_P}{ds}$  qui est la dérivée changée de signe de  $E_P$  par rapport à la distance comptée suivant cette direction. On l'appelle *dérivée directionnelle* de  $E_P$ .

Quand un vecteur est tel que sa composante suivant une direction quelconque est égale à la dérivée directionnelle d'une fonction suivant cette direction, le vecteur est appelé le gradient de la fonction. Nous disons donc que  $F$  est le gradient changé de signe de  $E_P$ , et nous écrivons l'Eq (IV-21) sous la forme générale :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_P$$

## TRAVAIL ET ENERGIE

---

Si nous intéressons aux composantes rectangulaires de  $F$  suivant les axes  $OX$ ,  $OY$  et  $OZ$ ,  $F \cos \theta$  dans l'Eq (IV-21) devient  $F_x, F_y$  et  $F_z$ , et le déplacement  $ds$  devient respectivement  $dx, dy, dz$  de sorte que

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_P = -\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{u}_x - \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{u}_y - \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{u}_z \quad (\text{IV-22})$$

ou

$$F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_P}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_P}{\partial z} \quad (\text{IV-23})$$

Si le mouvement est plan et qu'on utilise les coordonnées  $r$  et  $\theta$  (Fig. IV-9), le déplacement suivant le rayon vecteur  $r$  est  $dr$  et le déplacement perpendiculaire  $r d\theta$ .

Les composantes radiales et transversales de la force sont donc :

$$\begin{cases} F_r = -\frac{\partial E_P}{\partial r} \\ F_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial E_P}{\partial \theta} \end{cases} \quad (\text{IV-24})$$

Un cas important est celui dans lequel l'énergie potentielle dépend de la distance  $r$  mais non de l'angle ; autrement dit au lieu de  $E_P(r, \theta)$ , nous avons  $E_P(r)$ . On a alors  $\frac{\partial E_P}{\partial \theta} = 0$  et d'après l'Eq (IV-24),  $F_\theta = 0$ . La force dans ce cas n'a pas de composante transversale, mais uniquement une composante radiale de sorte que la *force est centrale* et que sa droite d'action passe toujours par le centre. On peut énoncer ce résultat en disant que

*"L'énergie potentielle associée à une force centrale ne dépend que de la distance de la particule au centre de forces".*

Si les forces ne sont pas centrales, il y a un moment par rapport au point  $O$  donné par  $= F_\theta \cdot r$ , puisque la force radiale ne contribue pas au moment. En utilisant la seconde relation de l'Eq (IV-24), nous trouvons que le moment par rapport à  $O$  est :

$$\tau = -\frac{\partial E_P}{\partial \theta} \quad (\text{IV-25})$$

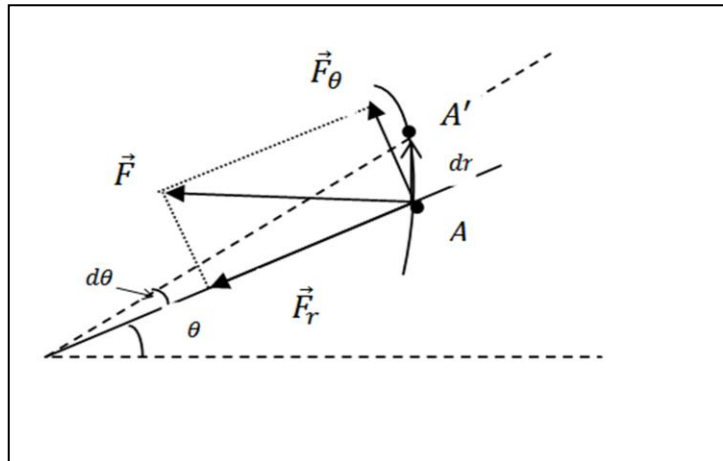


Fig. IV-10

C'est une expression générale qui donne le moment dans une direction perpendiculaire au plan dans lequel l'angle  $\theta$  est mesuré. Comme un moment produit une variation correspondante du moment cinétique, nous concluons que

*"Lorsque l'énergie potentielle dépend d'un angle, un moment est appliqué au système, produisant une variation du moment cinétique dans une direction perpendiculaire au plan de l'angle"*

### 8-Conservation de l'énergie d'une particule :

Quand la force agissant sur une particule dérive d'un potentiel, nous pouvons combiner l'Eq (IV-17) avec l'équation générale (IV-13), ce qui nous donne

$$E_{CB} - E_{CA} = E_{PA} - E_{PB}$$

ou

$$(E_C + E_P)_B = (E_C + E_P)_A \quad (IV-26)$$

La quantité  $E_C + E_P$  est appelée *énergie totale* de la particule, qu'on désigne par  $E$  ; autrement dit,

*L'énergie totale d'une particule est égale à la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle*

ou

$$E = E_C + E_P = \frac{1}{2}mv^2 + E_P(x, y, z) \quad (IV-27)$$

L'équation (IV-26) indique que



## TRAVAIL ET ENERGIE

---

*"Si les forces dérivent d'un potentiel l'énergie totale de la particule demeure constante"*

Puisque l'état désignés par A et B sont arbitraires .Nous pouvons donc écrire pour toute position de la particule,

$$E = E_C + E_P = \text{const} \quad (\text{IV-28})$$

### **9-Force ne dérivant pas d'un potentiel :**

Nous trouvons dans la nature des forces qui ne dérivant pas d'un potentiel .Le frottement en est un exemple. Le frottement de glissement s'oppose toujours au déplacement .Son travail dépendra du chemin suivi, et même si la trajectoire est fermée, le travail n'est pas nul, de sorte que l'Eq (IV-19) n'est pas valable .Parallèlement, le frottement fluide s'oppose à la vitesse, et dépend de la vitesse et non de la position .Une particule peut donc être soumise simultanément à des forces dérivant ou non d'un potentiel.

Par exemple une particule tombant dans un fluide est soumise à la force de gravitation qui dérive d'un potentiel et au frottement fluide qui n'en dérive pas .En appelant  $E_P$  l'énergie potentielle correspondant au premier type de forces et  $W'$  le travail fourni par les autres forces ( travail en générale négative , car les forces de frottement s'opposent au mouvement ) , le travail total fourni à la particule quand elle se déplace de A à B est :

$$W = E_{PA} - E_{PB} + W'$$

Utilisant l'Eq (IV-13), nous écrivons alors :

$$E_{CB} - E_{CA} = E_{PA} - E_{PB} + W'$$

ou

$$(E_C + E_P)_B - (E_C + E_P)_A = W' \quad (\text{IV-29})$$

La quantité  $(E_C + E_P)$  ne reste pas constante mais décroît (ou croît) selon que  $W'$  est négative ou positive, nous ne pouvons pas appeler  $E_C + E_P$  l'énergie totale de la particule, car cette notion n'est pas applicable dans ce cas, puisqu'elle ne comprend pas toutes les forces présentes.

*"La notion d'énergie totale d'une particule ne garde une signification que si toutes les forces dérivent d'un potentiel "*

l'Eq (IV-29) est utile quand nous voulons comparer le cas où seules agissent des forces dérivant d'un potentiel avec le cas où il y'a des forces supplémentaires qui ne dérivent pas d'un

## TRAVAIL ET ENERGIE

---

potentiel .autrement dit l'Eq (IV-29) donne le gain ou la perte d'énergie due aux forces ne dérivant pas d'un potentiel.

# EXERCICES

---

## Exercice 1 :

Soit un vecteur  $\vec{A} = 4\vec{i} - 9\vec{j}$  suivant les coordonnées cartésiennes.

Convertir ce vecteur en coordonnées polaire ?

Solutions :

Les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées polaires s'écrivent :

$$\vec{i} = \cos \theta \vec{U}_r - \sin \theta \vec{U}_\theta$$

$$\vec{j} = \sin \theta \vec{U}_r + \cos \theta \vec{U}_\theta$$

$$\vec{A} = 4\vec{i} - 9\vec{j} = 4(\cos \theta \vec{U}_r - \sin \theta \vec{U}_\theta) - 9(\sin \theta \vec{U}_r + \cos \theta \vec{U}_\theta)$$

$$\vec{A} = (4 \cos \theta + 9 \sin \theta) \vec{U}_r - (4 \sin \theta + 9 \cos \theta) \vec{U}_\theta$$

## Exercice 2 :

Dans un repère cartésien (O, x, y), muni de la base (i, j), un point M en mouvement tel que :

$$\overrightarrow{OM} = \sin t \vec{i} + (1 + \cos t) \vec{j}$$

- 1)- Déterminer la nature de la trajectoire de M ?
- 2)- Exprimer le vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et déterminer son module
- 3)- En déduire la nature du mouvement et déterminer la vitesse angulaire  $\omega$  ?
- 4)- Exprimer le vecteur accélération en coordonnées cartésiennes et déterminer son module. Que représente cette accélération dans le repère de Frenet et pourquoi?
- 5)- Déterminer l'angle  $\alpha$  que fait l'accélération avec la vitesse ?
- 6)- Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération en coordonnées polaires ?

Solution :

### 1)- Nature de la trajectoire :

$$y = 1 + \cos t$$

$$x = \sin t$$

D'où

$$(y - 1)^2 = \cos^2 t \dots (1)$$

$$x^2 = \sin^2 t \dots (2)$$

(1)+(2) nous donne :  $(y - 1)^2 + x^2 = 1$

## EXERCICES

---

La trajectoire est un cercle de rayon  $R = 1\text{m}$  et de centre  $(0,1)$

### 2)- Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \cos t \vec{i} - \sin t \vec{j}$$

Le module de la vitesse est :  $v = 1\text{m/s}$

### 3)- La nature du mouvement :

La vitesse est constante donc le mouvement est circulaire uniforme.

La vitesse angulaire  $\omega$  est constante

$$\omega = \frac{v}{R} = 1 \text{ rad/s}$$

### 4)- Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\sin t \vec{i} - \cos t \vec{j}$$

Le module de l'accélération est :  $1 \text{ m/s}^2$

Cette accélération représente l'accélération normale  $\vec{a}_N$  dans le repère de Frenet car le mouvement est circulaire uniforme : l'accélération tangentielle est nulle  $\vec{a}_T=0\text{m/s}^2$

### 5)- L'angle $\alpha$ entre l'accélération et la vitesse :

Par le produit scalaire ou par le produit vectoriel :

$$\vec{a} \times \vec{v} = -\cos t \sin t (\vec{i} \times \vec{i}) + \sin^2 t (\vec{i} \times \vec{j}) - \cos^2 t (\vec{j} \times \vec{i}) + \cos t \sin t (\vec{j} \times \vec{j})$$

$$\vec{a} \times \vec{v} = +\vec{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{v}| = 1$$

D'autre part :

$$|\vec{a} \times \vec{v}| = a \cdot v \cdot \sin(\alpha, v) = 1 \cdot 1 \cdot \sin(\alpha, v)$$

$$\alpha = \pi/2$$

### 6)- Vecteur vitesse et vecteur accélération en coordonnées polaire :

$\vec{OM} = R \vec{U}$ ,  $R=1\text{m}$  est constant et  $\theta = t$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{R}\vec{U}_r + R \dot{\theta}\vec{U}_\theta = \vec{U}_\theta$$

Le module de la vitesse en coordonnées polaire  $v=1\text{m/s}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{U}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{U}_r = -\vec{U}_r$$

## EXERCICES

---

D'où  $a=1\text{m/s}^2$

### Exercice 3 :

Soit un mobile M en mouvement tel que :

$$\overrightarrow{OM} = 3 \cos t \vec{i} + 3 \sin t \vec{j} + (4t - 2)\vec{k}$$

- 1)- Déterminer la nature de la trajectoire de M dans l'espace (O, x, y, z) ?
- 2)- Exprimer  $v$  et  $a$  en coordonnées cylindriques et déterminer leur module?
- 3)- Trouver  $v$  et  $a$  dans la base de Frenet ?
- 4)- En déduire le rayon de courbure  $r$  ?

Solution :

#### 1)- La nature de la trajectoire dans le plan (O, x, y) :

$$x=3 \cos t$$

$$y= 3 \sin t$$

D'où

$$x^2=9 (\cos t)^2$$

$$y^2= 9 (\sin t)^2$$

$$x^2+ y^2=9$$

Le mouvement dans le plan (O, x, y) est circulaire de rayon  $R = 3\text{m}$  et de centre (0, 0)

Suivant l'axe Oz :

$$z = 4t-2$$

Équation d'une droite donc le mouvement est rectiligne suivant Oz. Donc le mouvement suivant l'espace (O, x, y, z) est hélicoïdal.

#### 2)- $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en coordonnées cylindriques et déterminer leur module :

$$\overrightarrow{OM} = R \vec{U}_r + z \vec{k}$$

$$= 3 \vec{U}_r + (4t - 2) \vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{R} \vec{U}_r + R \dot{\theta} \vec{U}_\theta + \dot{z} \vec{k}$$

$$= 3 \vec{U}_\theta + 4 \vec{k}$$

$v=5 \text{ m/s}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -3 \vec{U}_r$$

## EXERCICES

---

$$a=3 \text{ m/s}^2$$

3)-  $\vec{v}$  et  $\vec{a}$  dans la base de Frenet :

$$\vec{v} = v \vec{U}_t = 5 \vec{U}_t$$

$$\vec{a} = a_t \vec{U}_t + a_n \vec{U}_n$$

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \vec{U}_t = 0$$

D'autre part, nous avons :  $a^2 = a_t^2 + a_n^2$

D'où

$$a_n^2 = a^2 - a_t^2 = a^2$$

$$\vec{a}_n = 3 \vec{U}_n$$

4)- Le rayon de courbure r :

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

$$r = \frac{v^2}{a_n} = \frac{25}{9} = 2.7m$$

### Exercice 4 :

Soit un repère mobile  $R'(O', x', y', z')$  en mouvement de translation par rapport à un autre repère fixe  $R(O, x, y, z)$  avec une vitesse  $\vec{v}_e = (1, 0, 0)$  et  $R/R'$ . On suppose que les coordonnées de M par rapport à  $R'$  sont :  $x' = 8t^2 + 4t$ ,  $y' = -4t^2$ ,  $z' = 4$  et on suppose qu'à  $t=0s$ , les coordonnées de M par rapport à R sont  $O(0, 0, 0)$

1. Donner la vitesse relative de ce point ainsi que sa vitesse absolue ?
2. En déduire les coordonnées du point M par rapport à R ?
3. Déterminer l'expression de l'accélération relative et absolue ?

Solution :

1)- La vitesse relative et la vitesse absolue :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

$$\vec{v}_r = \frac{d\vec{O'M}}{dt}$$

$$\vec{v}_e = \vec{i}'$$

$$\vec{v}_r = (16t + 4)\vec{i}' - 8t\vec{j}'$$

$$\vec{v}_a = (16t + 5)\vec{i}' - 8t\vec{j}'$$

## EXERCICES

---

$\mathbb{R} // \mathbb{R}'$  donc :

$$\vec{v}_a = (16t + 5)\vec{i} - 8t\vec{j}$$

2)- Les coordonnées du point M par rapport à R

$$\vec{v}_a = d\overline{OM}/dt$$

$$\int d\overline{OM} = \int_0^t \vec{v}_a$$

$$x = 8t^2 + 5t + c_1$$

$$y = -4t^2 + c_2$$

$$z = c_3$$

À l'instant  $t=0$ s,  $x=y=z=0$  donc  $c_1=c_2=c_3=0$

3)- L'expression de l'accélération relative et absolue

$$\vec{a}_a = d\vec{v}_a/dt = 16\vec{i} - 8\vec{j}$$

$$\vec{a}_r = d\vec{v}_r/dt = 16\vec{i} - 8\vec{j}$$

### Exercice 5 :

Soient  $\mathfrak{R}(O, xyz)$  un référentiel absolu muni de la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et  $\mathfrak{R}_1(O_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{k})$  le référentiel relatif dont l'origine  $O_1$  est en mouvement rectiligne sur l'axe  $(Oz)$ . On donne  $\overline{OO_1} = at\vec{k}$  où  $a$  est une constante positive et  $t$  le temps.

En plus,  $\mathfrak{R}_1$  tourne autour de l'axe  $(Oz)$  avec une vitesse angulaire constante  $\omega_1$  telle que  $\Omega(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}) = \omega_1\vec{k}$  ( $\omega_1 =$  ). Dans le plan horizontal  $(O_1, u_1, u_2)$ , une tige  $(T)$  tourne autour de l'axe  $(O_1z)$  avec une vitesse angulaire constante  $\omega_2$ , tel que  $\varphi = \omega_2t = (u_1, e)$  où  $e$  est le vecteur unitaire porté par la tige  $(T)$ .

Un point  $M$  est assujéti à se déplacer sur la Tige  $(T)$ . Il est repéré dans le référentiel  $\mathfrak{R}_1$  par :

$$\overline{O_1M} = \rho\vec{e}_\rho \text{ où } (\vec{e}, \vec{e}_\rho, \vec{k}) \text{ est une base mobile dans } \mathfrak{R}_1.$$

N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base  $(\vec{e}, \vec{e}_\rho, \vec{k})$

I-Etude de la cinématique de M par décomposition de mouvement :

1) Déterminer  $\vec{V}_r(M)$  la vitesse relative de M.

2) Déterminer  $\vec{V}_e(M)$  la vitesse d'entraînement de M.

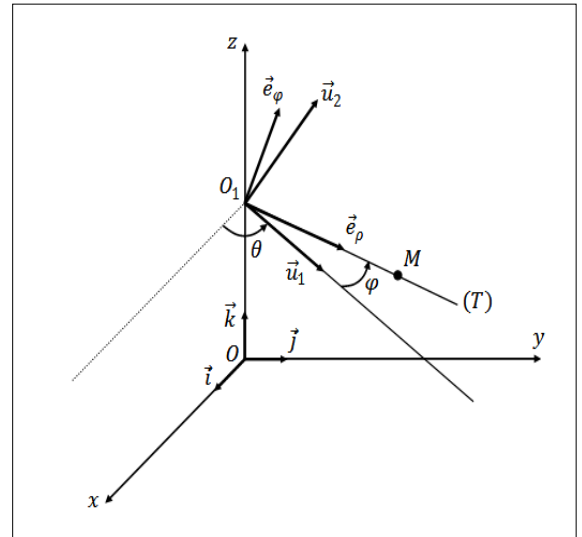
3) En déduire  $\vec{V}_a(M)$  la vitesse absolue de M.

## EXERCICES

- 4) Déterminer  $\vec{\gamma}_r(M)$  l'accélération relative de  $M$ .
- 5) Déterminer  $\vec{\gamma}_e(M)$  l'accélération d'entraînement de  $M$ .
- 6) Déterminer  $\gamma_c(M)$  l'accélération de Coriolis de  $M$ .
- 7) En déduire  $\vec{\gamma}_a(M)$  l'accélération absolue de  $M$ .

II-Etude de la cinématique de  $M$  par calcul direct :

- 8) Retrouver  $\vec{V}_a(M)$  par calcul direct.
- 9) Retrouver  $\vec{\gamma}_a(M)$  par calcul direct.



**I-Etude de la cinématique de  $M$  par décomposition de mouvement :**

1. la vitesse relative de  $M$  :

$$\vec{V}(M) = \left. \frac{d\overline{O_1M}}{dt} \right|_{\mathfrak{R}_1} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \omega_2 \vec{e}_\varphi$$

2. La vitesse d'entraînement de  $M$  :

$$\vec{V}_e(M) = \vec{V}(O_1/\mathfrak{R}) + \Omega \mathfrak{R}_1/\mathfrak{R} \wedge \overline{O_1M} = \rho \omega_1 \vec{e}_\varphi + a \vec{k}$$

3. La vitesse absolue de  $M$  :

$$\vec{V}(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho (\omega_1 + \omega_2) \vec{e}_\varphi + a \vec{k}$$

4. l'accélération relative de  $M$  :

$$\vec{\gamma}_r(M) = (\ddot{\rho} - \rho \omega_2^2) \vec{e}_\rho + 2\dot{\rho} \omega_2 \vec{e}_\varphi$$

5. L'accélération d'entraînement de  $M$  :

$$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(O_1/\mathfrak{R}) + \frac{d\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R})}{dt} \wedge \overline{O_1M} + \vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}) \wedge (\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}) \wedge \overline{O_1M}) = -\rho \omega_1^2 \vec{e}_\rho$$

6. L'accélération de Coriolis de  $M$ :

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}) \wedge \vec{V}(M/\mathfrak{R}_1) = 2\omega_1(\dot{\rho} \vec{e}_\varphi - \rho \omega_2 \vec{e}_\rho)$$

7. L'accélération absolue de  $M$  :

$$\gamma_a(M) = \gamma_r(M) + \gamma_e(M) + \gamma_c(M) = (\ddot{\rho} - \rho (\omega_1 + \omega_2)^2) \vec{e}_\rho + 2\dot{\rho} (\omega_1 + \omega_2) \vec{e}_\varphi$$

**II-Etude de la cinématique de  $M$  par calcul direct :**

- 8)  $\vec{V}_a(M)$  par calcul direct :



## EXERCICES

$$\begin{aligned}\vec{V}(M) &= d\vec{OM}/dt (\mathfrak{R}) \\ &= d\vec{OM}/dt (\mathfrak{R}_1) + \vec{\Omega} (\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}) \wedge \vec{OM} \\ &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho (\omega_1 + \omega_2) \vec{e}_\varphi + a \vec{k}\end{aligned}$$

9)  $\vec{\gamma}_a(M)$  par calcul direct :

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_a M &= d\vec{V}_a(M)/dt \mathfrak{R} = d\vec{V}_a(M)/dt \mathfrak{R}_1 + \Omega \mathfrak{R}_1/\mathfrak{R} \wedge \vec{V}_a(M) \\ &= (\ddot{\rho} - \rho (\omega_1 + \omega_2)^2) \vec{e}_\rho + 2\dot{\rho} (\omega_1 + \omega_2) \vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

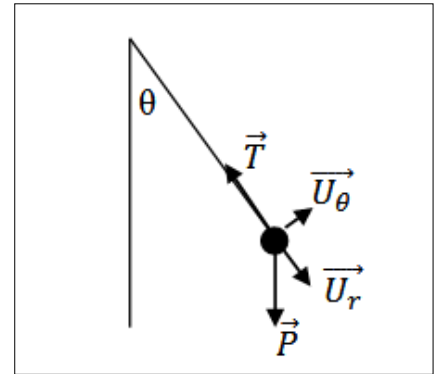
### Exercice 6 :

On écarte de sa position d'équilibre une masse ponctuelle  $m$  suspendue à un fil inextensible de longueur  $l$ . On repère la position de la masse  $m$  par l'angle  $\theta$  entre la verticale et la direction du fil.

Etablir l'équation différentielle du mouvement en utilisant :

1)- Le principe fondamental de la dynamique (utiliser le système des coordonnées polaires).

2)- Le théorème du moment cinétique



### Solution

Les forces appliquées sont : tension du fil et le poids.

1)- En appliquant le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{T} = m \vec{a}$$

L'accélération dans les coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{U}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{U}_\theta$$

Dans ce cas, nous avons :  $r = l$

Donc

$$\vec{a} = (l\ddot{\theta}^2) \vec{U}_r + (l\ddot{\theta}) \vec{U}_\theta$$

Projection sur  $\vec{U}_r$  et  $\vec{U}_\theta$  nous donne :

$$-T + mg \cos \theta = -ml\dot{\theta}^2$$

$$-mgl \sin \theta = ml\ddot{\theta}$$

## EXERCICES

---

D'où

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

2)- En appliquant le théorème du moment cinétique :

$$d\vec{L}/dt = \sum \tau(\vec{F})$$

$$\vec{L} = \overrightarrow{OM} \times m \vec{v}$$

La vitesse en coordonnées polaire est :

$$\vec{v} = l \dot{\theta} \vec{U}_\theta$$

$$\vec{L} = l \vec{U}_r + m l \dot{\theta} \vec{U}_\theta = m l^2 \dot{\theta} \vec{k}$$

$$d\vec{L}/dt = m l^2 \ddot{\theta} \vec{k}$$

Le moment des forces est :

$$\tau(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \times \vec{P} = -m l g \sin\theta \vec{k}$$

$$\tau(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \times \vec{T} = \vec{0}$$

$$d\vec{L}/dt = \tau(\vec{P}) + \tau(\vec{T})$$

$$m l^2 \ddot{\theta} = -m l g \sin\theta$$

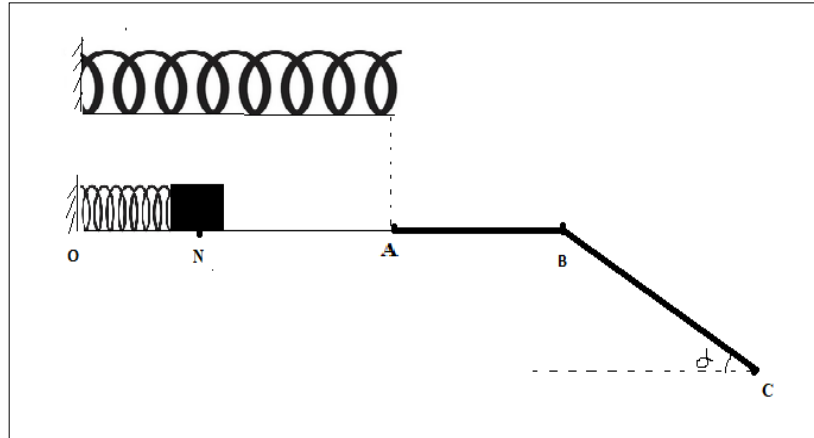
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

### Exercice7 :

La figure ci-contre représente une piste OABC contenue un plan vertical .elle est constituée de deux parties rectilignes horizontal OA et OB .et une parties BC melenée par rapport à l'horizontale d'un angle  $\alpha$ ( section d'un plan) .un ressort parfait de constante de raideur k de masse négligable et de longure à vide.OA=l0.est attaché au mur ( au niveau du point O).l'autre extrémité du ressort rest libre mais en contact avec un corp de masse m assimilable à un point material.les frottements sont caractérisés par les coeifficient de frottements statique et dynamique  $\mu_d$  et  $\mu_s$  sur ABC mais sont négligables sur la partie OA

**On donne :** m=1Kg , k=400N/m , BC =1m , g=10m/s<sup>2</sup> ,  $\mu_d = 0.25$

## EXERCICES



**I-** Au moyen du corps de masse  $m$ , on comprime le ressort d'une valeur  $= |\Delta l| = 10\text{cm}$ , puis on l'abandonne sans vitesse initiale.

1. Représente qualitativement, lorsque le ressort est comprimé, les forces agissant sur le corps de masse  $m$
2. Montrer que la vitesse du corps de masse  $m$  au point A est donnée par  $V_A = 2\text{m/s}$

**II-** Le corps de masse  $m$  arrive au point B avec la vitesse  $V_B = 0\text{m/s}$

1. Représenter les forces qui s'exercent sur le corps de masse  $m$  durant le trajet AB
2. Calculer son accélération
3. Calculer la variation de l'énergie totale entre les points A et B. Dédurre la longueur du trajet AB.

**III-** Le corps de masse  $m$  étant au point B sur le plan incliné, l'angle d'inclinaison choisi correspond à la valeur maximale  $\alpha_0 = 20^\circ$  pour laquelle le corps reste à l'équilibre

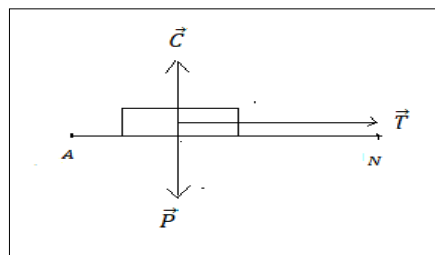
1. Calculer le coefficient de frottement statique

**VI-** On relève le plan incliné jusqu'à l'angle de valeur  $\alpha = 30^\circ$ ; le corps de masse  $m$  tenu au point B est alors abandonné sans vitesse initiale.

1. Représente qualitativement les forces agissant sur le corps de masse  $m$ .
2. Calculer son accélération
3. Calculer sa vitesse au point C.

### Solution

#### 1- les forces agissant sur le corps de masse $m$



2- la vitesse du corps au point A est  $V_A = 2\text{m/s}$  :

## EXERCICES

lorsque le ressort est comprimé le corps est au point N. nous utilisons le TEM (théorème de l'énergie mécanique) entre les points N et A

$$\Delta E_T 1_N^A = W(\vec{F})_N^A = W(\vec{C})_N^A + W(\vec{T})_N^A + W(\vec{P})_N^A$$

$$\int \vec{C} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ car } \vec{C} \perp d\vec{l}$$

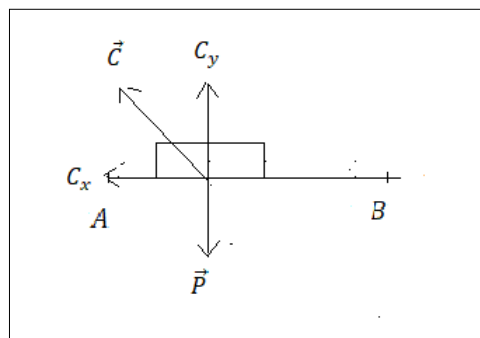
$$\int \vec{P} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ car } \vec{P} \perp d\vec{l}$$

Ce qui donne

$$mgh_N + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A$$

$$v_A = \sqrt{\frac{kx^2}{m}} = 2\text{m/s}$$

### II-1-les forces agissant sur le corps de masse m durant le trajet AB



### II-2-calcul de l'accélération du corp m :

$$\vec{P} + \vec{C} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} -C_x = ma \\ C_y = mg \end{cases}$$

$$a = \frac{-C_x}{m} = -\frac{\mu_d C_y}{m} = -\mu_d g = -2.5\text{m/s}^2$$

### II-3. Calcul de la variation de l'énergie

$$\begin{aligned} \Delta E_T 1_A^B &= W(\vec{F})_A^B = W(\vec{C})_A^B = \int_A^B \vec{C} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= -CAB = -\mu_d mgAB \end{aligned}$$

or

$$\begin{cases} E_T(A) = E_P(A) + E_C(A) = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A \\ E_T(B) = E_P(B) + E_C(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B \end{cases}$$

$$\Delta E_{T_A}^B = E_T(B) - E_T(A) = \frac{1}{2}mv_A^2 = -2J$$

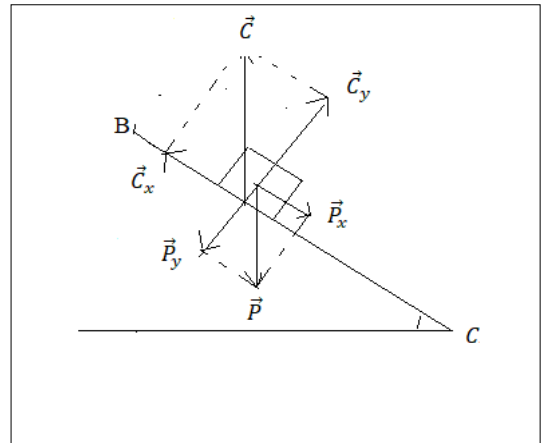
## EXERCICES

$$AB = \frac{\Delta E_T}{-\mu_d mg} = \frac{v_A^2}{2\mu_d g}$$

III-1. Calcul du coefficient de frottement statique :

$$\mu_s = \frac{C_x}{C_y} = \operatorname{tg} \alpha_0 = 0.36$$

III-2- les forces agissant sur le corps de masse m durant le trajet BC



III-3- calcul son acceleration :

$$\vec{P} + \vec{C} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} -C_x + P_x = ma \\ C_y = P \end{cases}$$

Ce qui donne

$$a = \frac{-C_x + P}{m} = \frac{-\mu_d C_x + P}{m} = g(-\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha) = 2.84 \text{ m/s}^2$$

Sachant :

$$\begin{cases} P_x = mg \cos \alpha \\ P_y = mg \sin \alpha \end{cases} \quad C_x = \mu_d C_y$$

III-4- calcul La vitesse au point C

Le mouvement étant rectiligne uniformément varié, on peut utiliser la loi

$$v_C^2 - v_B^2 = 2a AB \Rightarrow v_C = \sqrt{2aBC} = 2.38 \text{ m/s}$$

## Bibliographie

- [1] JEAN-MARIE BRÉBEC, TANIA CHABOUD, THIERRY DESMARAIS, ALAIN FAVIER, MARC .MÉNÉTRIER, ET RÉGINE NOËL, Exercices et Problèmes 1re Année, Physique MPSI/PCSI/PTSI, Hachette Livre, Paris, France, 2010.
- [2] AHMED FIZAZI, Cahier de la Mécanique du Point Matériel, Office des Publications Universitaires, Algérie, (2013)
- [3] VINCENT DEMERY, Physique Résumé du cours en fiches MPSI-MP, Dunod, Paris, France, 2010.
- [4] Lamria BENALLEGUE, Mohamed DEBIANE, Azeddine GOURARI, et Ammar MAHAMEDIA, Physique I Mécanique du Point Matériel, Edité par la Faculté de Physique U.S.T.H.B., Alger, (2011).
- [5] ALAIN GIBAUD ET MICHEL HENRY, Cours de Physique Mécanique du Point, Dunod, Paris, 1999, 2007 pour la Seconde Edition.