UNIVERSITÉ HASSIBA BENBOUALI DE CHLEF
FACULÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE

PHYSIQUE 2

Cours et Exercices

Préparé par

Dr.HOURIA CHAACHOUA SAMEUT

Anneé Univarsitaire : 2023-2024

Avant Propos

Ce polycopié représente un support de cours d éléctricité et magnétisme. Il est destiné aux étudiants qui préparent, dans le cadre de la réforme L.M.D , une licence dans le domaine de Science de la Matière (SM) . Il est conforme au programme officiel.

Le programme d'électricité,du S2 se compose de deux grandes parties :
La première comporte les éléments de base de la théorie électrostatique et l'électrcénétique que nous présentons aux chapitres 01 ,02 et 03 et l'électromagnétisme qui fait lobjet du Chapitre 4 .

On souhaite que les étudiants trouveront dans ce support un bon outil de travail qui leur permettra de combler les éventuelles lacunes qui peuvent avoir lieu lors de la prise des notes pendant l'explication du cours ou des travaux dirigés par leurs enseignants. Ce polycopié n'est qu'un complément de cours. Il ne pourra, en aucune façon, dispenser l'étudiant de sa présence en cours.

Table des matières

1

Electrostatique

1.1 Electrostatique

1.1.1 Introduction

1. **Définition de l'électrostatique** :
   L'électrostatique est la branche de la physique qui étudie les phénomènes créés par des charges électriques statiques pour l'observateur

1. **Principaux constituants de la matière** :
   (a) protons : charge électrique $+e = +1,610^{-19}$ coulomb
   (b) neutrons : pas de charge (neutre)
   (c) électrons : $-e$

* Un atome a autant d'électrons que de protons : il est globalement neutre.

* Un corps électrisé (+ ou -) est un corps qui n'est pas neutre

- **Conducteurs et isolants électriques** :Un conducteur métallique possède des électrons libres.

  * mouvement d'ensemble d'électrons libres = courant électrique

  * l'électrocinétique est l'étude des courants électriques

  * Un isolant ne possède pas d'électron libre.

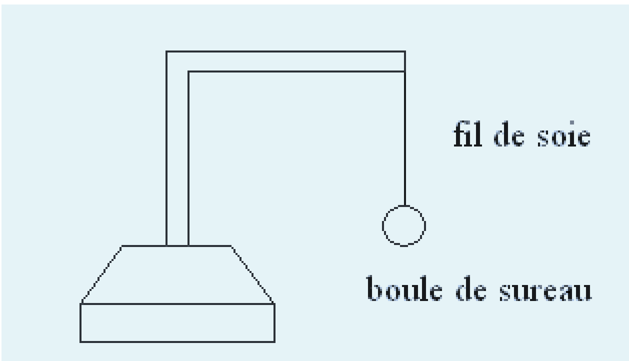
  * L'électrostatique est l'étude de l'électricité statique des corps électrisés (conducteur ou isolant).

- **Les Différents modes d'électrisation**

  1. **Electrisation par frottement :**
     Certains corps frottés acquièrent la propriété d'attirer les corps

légers. On dit qu'ils sont électrisés par frottement. Dans certains matériaux, l'électrisation peut se répartir en tous leurs points, ce sont les conducteurs, dans d'autres, elle ne se manifeste que sur la partie frottée, ce sont les isolants. Dans tous les cas, l'électrisation représente un phénomène de transfert de charges.

2. **Electrisation par influence :**
   On utilise un pendule électrique, qui se compose par exemple, d'une petite boule de moêlle de sureau suspendue par un fil de soie à un support d'araldite .Quand on approche un corps électrisé, la boule est attirée, car elle s'est électrisée par influence. Ce phénomène d'influence est à l'origine de l'attraction des petits



3. **Electrisation par contact :**
   On prend une baguette électrisée A et on la met en contact avec une autre baguette de verre non électrisée B, nous constatons, après séparation, que cette dernière possède à son tour la propriété d'attirer les corps légers. On dit qu'elle s'est électrisée par contact.

- **La charge électrique** :
  La charge électrique d'une particule est une grandeur scalaire qui caractérise les actions électromagnétiques subies ou exercée par la particule. La charge électrique joue dans l'interaction électrostatique le même rôle que joue la masse dans l'interaction gravitationnelle. Les expériences d'électrisation montrent qu'il existe deux

classes de particules chargées : deux particules chargées d'une même classe se repoussent alors que deux particules chargées appartenant à des classes différentes s'attirent. Par convention, l'une des classes sera dite chargée positivement, l'autre chargée négativement.

- **Quantification de la charge** :
  Le physicien américain Robert A. Millikan a montré en 1913, à partir d'une expérience mettant en jeu des gouttes d'huile électrisées, le fait que toute charge électrique q est quantifiée, c'est à dire qu'elle n'existe que sous forme de multiples d'une charge élémentaire indivisible e :
  $q = Ne$
  où :$e = 1,60210^{-19} coulomb$

1.1.2 la Force éléctrique : La loi de coulomb

Coulomb a effectué, en 1785, une série de mesures, à l'aide d'une balance de torsion , qui lui ont permis de déterminer les caractéristiques de la force d'interaction électrostatique entre deux charges ponctuelles q_1 et q_2 séparées par une distance r.

Ces expériences ont mis en évidence une analogie avec la loi de la gravitation universelle de Newton, Coulomb a alors proposé l'expression mathématique :

$$\overrightarrow{F}_{12} = \frac{k_e q_1 q_2}{r_{12}^2} \overrightarrow{u}_{12} \tag{1.1}$$

$\overrightarrow{F_{12}}$ designe la force éxrecée par la charge q_1 sur la charge q_2 .
et $\overrightarrow{u_{12}}$ un vecteur unitaire porté par la droite qui joint les deux charges et orienté de q_1 vers q_2 figure(1.1).
k_e une constante. Dans le système MKSA $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 Nm^2C^2$ avec $\epsilon_0 = 8,854.10^{-12} N^{-1}m^{-2}C^2$ est la permittivité électrique du vide.

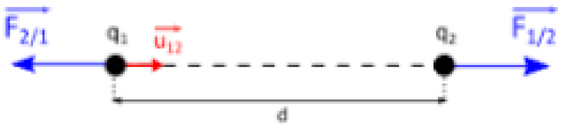
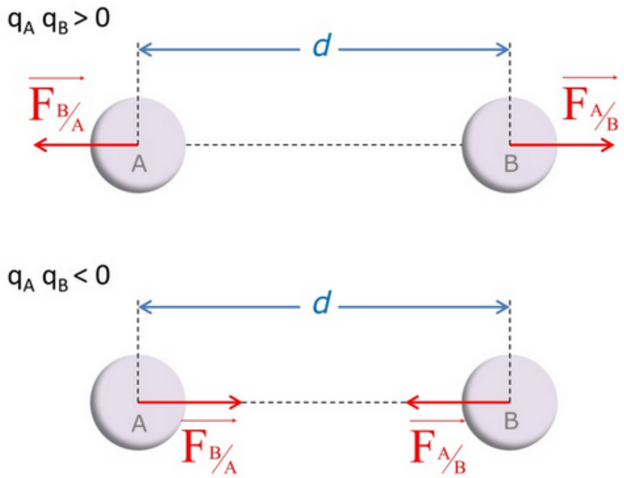


FIGURE 1.1 : la Force éléctrique

- La force électrostatique est répulsive si les charges sont de même signe, et attractive si elles sont de signes opposés.



1.1.2.1 les caractéristiques de la Force éléctrique

1. Elle s'exerce sur des objets de même nature, ici des charges électriques.
2. Elle agit suivant la droite qui joint les deux objets.
3. Elle est proportionnelle au produit des grandeurs liées aux objets considérés : q_1 et q_2.
4. Elle varie comme l'inverse du carré de la distance entre les deux objets.
5. L'interaction entre deux charges est réciproque. :$\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}}$

- **Example** :

  Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, on suppose que celui-ci est constitué d'un électron, de masse me et portant une charge $-e$, qui tourne, sur une trajectoire circulaire de rayon r, autour d'un noyau assimilé à un objet ponctuel. Le noyau de l'atome d'hydrogène ne comporte qu'un proton. Calculer le rapport des deux forces qui interviennent dans ce mouvement : La force électrostatique FE et la force de gravitation FG, on donne : La charge électrique du proton est $+e$ et sa masse $mp = 1,67 \times 10^{-27} kg$, $e = 1,610^{-19} C$, $me = 9,11 \times 10^{-31}$, $r = 5,3 \times 10^{-11} m$.

- **Solution :**

  Calculons les modules des deux forces d'interaction qui interviennent ici :

  $F_E = \frac{K_e e^2}{r^2} = \frac{910^9 (1.610^{-19})^2}{(5.310^{-11})^2} = 8.2\,10^{-8} N.$

  $F_G = \frac{m_p\, m_e}{r^2} = \frac{9{,}11 \times 10^{-31}\, 1{,}67 \times 10^{-27}}{(5{,}3 \times 10^{-11})^2} = 3.6\,10^{-47} N.$

  Le rapport de ces deux forces : $\frac{F_E}{F_G} = 0.23\,10^{40}$. est très grand.

  Par conséquent dans tous les problèmes d'électricité les interactions gravitationnelles seront négligées devant les forces d'origine électromagnétique. Par contre à grande échelle, en astronomie, seules les forces de gravitation interviennent. La matière comporte autant de charges positives que de charges négatives et, à cette échelle, la résultante des forces électrostatiques est nulle.

1.1.3 Action d'une distribution de charges sur une charge ponctuelle :Le principe de superposition

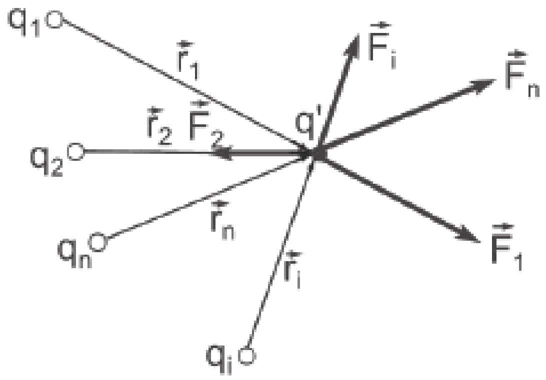
Soit une distribution de n charges ponctuelles réparties dans l'espace :$q_1, q_2 ..., q_n$ agissant sur une charge q'. Chaque charge q_i exerce sur q' une force

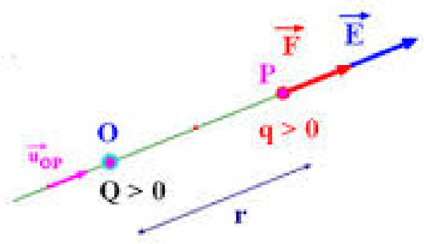
$\overrightarrow{F_i} = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0} \frac{q'\,q_i}{r_i^2} \overrightarrow{u_i}$ avec $\overrightarrow{u_i} = \frac{\overrightarrow{r_i^2}}{r_i}$

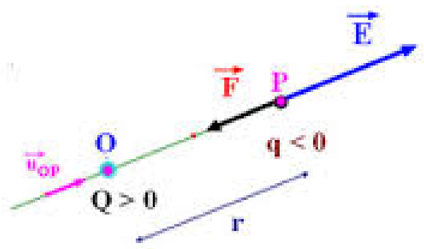
1.1.4 Relation entre le champ électrique et la force de coulomb

Un corps chargé soumis à un champélectrostatique est l'objet d'une force électrostatique : $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$

- Unité du champ électrostatique : $[E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{N}{C}$







1.1.5 Champ et potentiel

1.1.5.1 Cas d'une charge penctuelle

La présence d'une charge ponctuelle q au point M permet de définir deux propriétés en un point $M^{'}$ de l'espace environnant :

- une propriété vectorielle, le champ électrostatique :
  $\overrightarrow{E}_{M'} = \frac{k_e q_M}{r^2_{MM'}} \overrightarrow{u}_{MM'}$
- une propriété scalaire, le potentiel électrostatique (défini à une constante prés.
  $V(M) = K_e \frac{q}{r} + cte$

- Le potentiel s'exprime en Volt (V), c'est à dire en J/C. On déduit également l'unité usuelle du champ E qui est V/m.

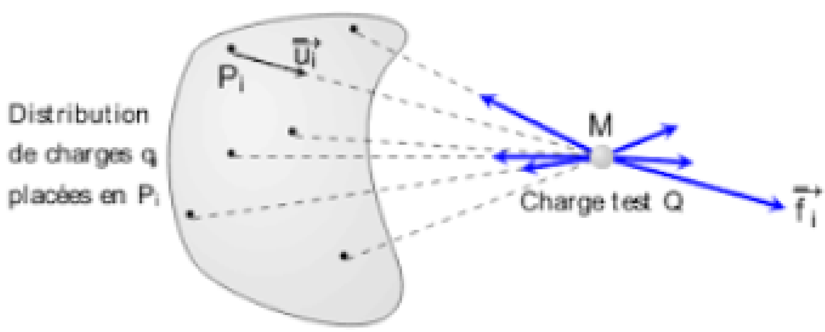
Remarque :
l'énergie potentielle définie aussi à une constante près comme le potentiel :
$E_p = qV(M)$

1.1.5.2 Cas d'un système de charges

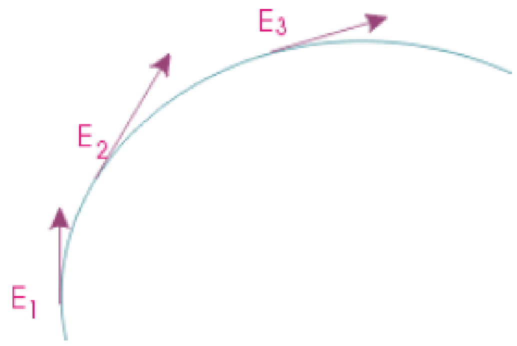
a) Champ électrostatique crée par un ensemble de charges :Principe de superposition

On considère maintenant n particules de charges électriques Q_i , situées en des points p_i . On se propose de déterminer le champ électrostatique créé par cet ensemble de charges en un point M distant de r_i des points P_i.D'aprés le principe de superposition le champ électrique résultant est :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{(r_i)^2} \vec{u_i} \tag{1.2}$$

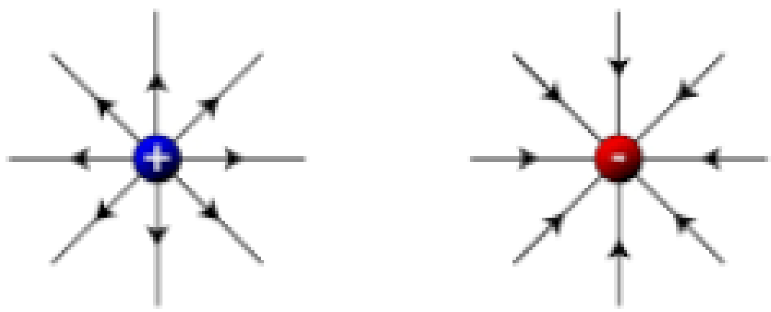


Lignes de champ Une ligne de champ est tangente en tous points au champ. Pour tracer convenablement les lignes de champ, certaines règles s'appliquent.

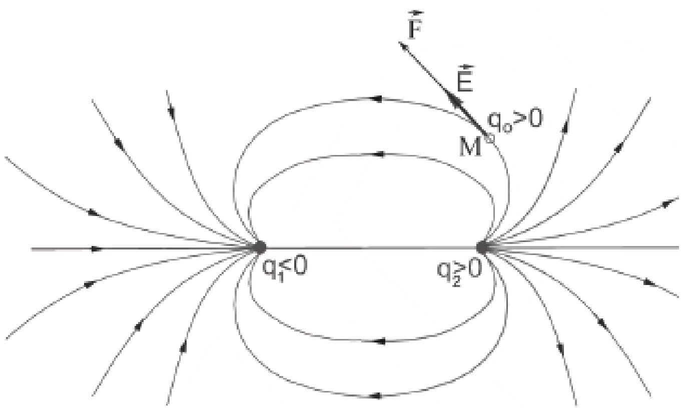


1. Les lignes de champ sont continues entre les charges positives et négatives. Les lignes de champ sont produites par les charges positives et absorbées par les charges négatives.
2. Les lignes de champ doivent respecter la symétrie de la distribution des charges.
3. Les lignes de champ ne doivent pas se croiser.

a. Lignes de champ crées par une charge ponctuelle



b. Lignes de champ crées par deux charges ponctuelles : On présente le cas de deux charges $(-q)$ et $(+q)$. Les lignes de champ créées par ces deux charges partent de la charge positive et convergent vers la charge négative. Une charge q_0 en un point M de l'espace sera soumise à une force $\overrightarrow{F}(M) = q_0\overrightarrow{E}(M)$ avec $\overrightarrow{E}(M)$ tangent à la ligne de champ passant par M. Les lignes de champ sont symétriques par rapport au plan médiateur du segment séparant les 2 charges.



b) Potentiel electrostatique dû a une distribution discontonue de charges

Considérons une distribution de n charges ponctuelles $q_1, ..., q_n$. Chacune des charges q_i crée un potentiel $V_i(M)$ en un point M. Par application du principe de superposition, le potentiel $V(M)$ dû à l'ensemble des charges est :
$V(M) = \sum_{i=1}^{n} V_i(M) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i} + C$

Surface equipotentielles

- **Définition**
  Soit une distribution de charges localisées dans l'espace, créant en un point $M(x, y, z)$ un potentiel $V(x, y, z)$. L'ensemble des points pour lesquels le potentiel est constant constitue une surface équipotentielle qui est caractérisée par l'équation $V(x, y, z) = Cste$.Cette équation représente l'ensemble des surfaces qui ont des potentiels constants

1.1.6 Distribution continue de charges

hypothèse d'une charge macroscopique permettant de définir une charge infinitésimale dq, à laquelle on peut appliquer les formules établies dans le cas d'une charge ponctuelle, avant d'intégrer sur la distribution.
On définit ainsi les densités :
1. volumique dans un volume :$\rho = \frac{dq}{d\tau}$ $[c/m^3]$
2. surfacique sur une surface :$\sigma = \frac{\sigma}{ds}$ $[c/m^2]$
3. linéique sur un fil :$\lambda = \frac{dq}{dl}[c/m]$
   auxquelles correspondent respectivement les charges infinitésimales $\lambda\,dl$, $\sigma\,ds$,$\rho\,dv$

Champ électrostatique créé par une distribution continue de charges

Dans le cas où la distribution de charges est continue, volumique, surfacique ou linéique, le champ électrostatique créé par cette distribution en un point M de l'espace s'écrit :

1. volumique : $\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0} \int\int\int_v \frac{\rho(r)\,d\tau}{r^2}\overrightarrow{u_r}$

2. surfacique : $\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0} \int\int_s \frac{\sigma(r)\,ds}{r^2}\overrightarrow{u_r}$

3. linéique : $\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(r)\,dl}{r^2}\overrightarrow{u_r}$

Potentiel electrostatique dû a une contribution continue de charges

Pour une distribution de charges continue, volumique, surfacique ou linéique, le potentiel électrostatique en un point M de l'espace

1. volumique : $V(M) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0} \int\int\int_v \frac{\rho(r)\,d\tau}{r} + C$

2. surfacique : $V(M) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0} \int\int_s \frac{\sigma(r)\,ds}{r} + C$

3. linéique : $V(M) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(r)\,dl}{r} + C$
   C étant une constante.

1.1.6.1 Circulation du champ éléctrique

Soit un parcours AB orienté de A vers B. La circulation du champ $\overrightarrow{E}(M)$ sur un élément de parcours $\overrightarrow{dl}$ s'écrit :
$d\varphi = \overrightarrow{E}_M.\overrightarrow{dl}$
$d\varphi = -\overrightarrow{grad}\,V_M.\overrightarrow{dl} = -dM_M$
On en déduit les relations :
$\int_{AB} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = V_A - V_B.$
Notez que la circulation du champ de A vers B est égale à la valeur

initiale moins la valeur finale du potentiel. Et en particulier, sur un parcours fermé :
$\oint_{(C)} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = 0.$

1. La circulation de $\overrightarrow{E}$ est indépendante du parcours choisi, puisqu'elle ne dépend que de la différence de potentiel entre A et B. Le potentiel étant défini à une constante près, on voit que le choix de cette constante n,intervient pas dans la différence de potentiel.
2. Par contre, la circulation de$\overrightarrow{E}$ dépend du sens de parcours choisi : c'est ce sens qui fixe le signe de la différence de potentiel. Il faut donc toujours orienter le parcours avant de calculer la circulation de $\overrightarrow{E}$.

1.1.6.2 Loi local et intégrale

1. Forme locale
   La loi $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$ permet de déterminer $\overrightarrow{E}$ en un point quelconque si V est est connu en ce point (ou l'inverse). Elle présente un caractère général, libéré de toute considération de symétrie susceptible d'apparaître à l'échelle globale.
   Cette loi peut s'écrire sous une autre forme,également locale : en effet,sachant que
   $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\,V) \equiv \overrightarrow{O}$
   on peut écrire :
   $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{O}.$
   Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ est dit irrotationnel.
2. Forme intégrale
   (a) La loi $\int_{AB} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = V_A - V_B$
   (b) ou encore $\oint_{(C)} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = 0 \;\; (C)$ contour fermé
   peut permettre le calcul de$\overrightarrow{E}$ en un point.

1.1.6.3 Énergie potentielle Électrostatique

Utilisons la relation entre le travail et l'énergie que nous connaissons bien en mécanique. On se place dans le cas d'une charge électrique ponctuelle qui se déplace dans un champ extérieur (créé par d'autres charges qui ne nous intéressent pas).

le travail de la force électrique de Coulomb $dW_{AB} = \overrightarrow{F}\overrightarrow{dl} = q\,\overrightarrow{E}\,\overrightarrow{dl}$

$\overrightarrow{E}\,\overrightarrow{dl} = -dV \; dW_{AB} = -qdV$

$W_{AB} = \int_A^B -q\,dV = -q = \int_A^B dV = q(V(A) - V(B)) = E_{p_A} - E_{p_B}$

- Ainsi, le travail de la force de Coulomb ne dépend pas du chemin suivi, la force de Coulomb est conservative. Cette force dérive d'une énergie potentielle :

$$E_p(M) = qV(M) + cste \tag{1.3}$$

$E_p(M)$ Energie potentielle éxprimée en (J)

q Charge élèctrique èxprimèe en $(coloumb)$

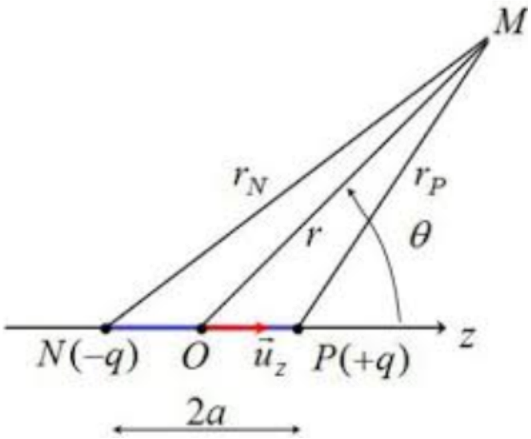
V Polentiel éléctrique éxpriméé en $Volt$

$cste$ Constante éxpriméé en J.fixée par définition de l'origine des énergie potentielles.

1.1.7 Dipole électrostatique

1.1.7.1 Définition

Un dipôle électrostatique est un doublet composé de deux points portant des charges opposées : le point P qui porte la charge $+q$ et le point N qui porte la charge $-q$. La distance NP est considérée petite et constante.



1.1.7.2 Moment dipolaire

On associe une grandeuràce dipôle, appelée moment dipolaire et définie par :
$\overrightarrow{P} = q\,\overrightarrow{NP}$.
La charge q s'exprime en Coulomb (C), la distance NP en mètre (m) donc le moment dipolaire s'exprime en Coulomb mètre $(C \times m)$.

1.1.7.3 Champ et potentiel créé par le dipôle électrostatique actif

1. **Approximation dipolaire** Le dipôle électrostatique est actif lorsque l'on se place suffisamment loin du dipôle, le point M où l'on observe le champ créé par le dipôle vérifie $r = OM >> NP$. Cette relation définit l'approximation dipolaire : grâce à elle, on aura la possibilité de négliger certains termes dans l'expression du champ et du potentiel.

2. **Calcul du potentiel créé par un dipôle dans l'approximation dipolaire**
   Le potentiel en M est la somme des potentiels créés par$N$ et P
   $V(M) = V_p(M) + V_N(M)$
   $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM})$
   $PM = |\overrightarrow{PM}| = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}|$

$PM = \sqrt{(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP})(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP})}$
$PM = \sqrt{OM^2 - 2\,\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} + OP^2}$
$PM = \sqrt{r^2 - ra\cos\theta + \frac{a^2}{4}}$
Comme $a << r$, on peut négliger les termes du 2^{nd} ordre :
$PM \simeq \sqrt{r^2 - ra\cos\theta} = r\sqrt{1 - \frac{a}{r}\cos\theta}$
On effectue un développement limité au 1^{er} ordre :

$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2}$.
d'où $\frac{1}{PM} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a}{r}\cos\theta}} = \frac{1}{r}(1 + \frac{a\cos\theta}{2r})$.
De même pour NM :
$\frac{1}{NM} = \frac{1}{r}(1 - \frac{a\,\cos\theta}{2\,r})$.
$[\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM}] = \frac{a\cos\theta}{r^2} \Rightarrow\ V(M) = \frac{q\,a\,\cos\theta}{4\pi\,\epsilon_0 r^2}$.
Comme $qa\cos\theta = q\,\overrightarrow{NP}.\frac{\overrightarrow{r}}{r} = q\,\overrightarrow{NP}.\overrightarrow{u_r}$.
$V(M)$ peut s'écrire :
$V(M) = \frac{\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{r}}{4\,\pi\,\epsilon_0 r^3} = \frac{\overrightarrow{p}.\overrightarrow{u_r}}{4\,\pi\,\epsilon_0 r^2}$

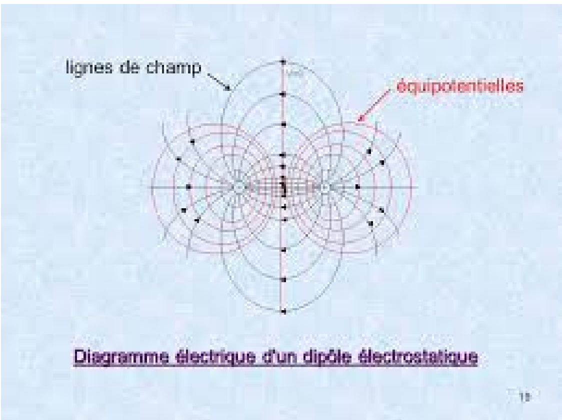
3. **Champ créé par un dipôle dans l'approximation dipolaire :**
On déduit le champ électrique $E(M)$ créé au point M à partir de l'expression du potentiel
$E(M) = -\,\overrightarrow{grad\,V}$
On travaille en coordonnées sphériques. Comme le problème a une symétrie axiale, les grandeurs physique E et V ne dépendent pas de φ mais seulement de r et θ.
$\overrightarrow{E(r)} =\ E_r\overrightarrow{u_r} + E_\theta\overrightarrow{u_\theta}$.
Avec
$E_r = -\frac{\partial\,V}{\partial\,r} = \frac{qa\cos\theta}{2\pi\,\epsilon_0 r^3}$.
$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\,V}{\partial\,\theta} = \frac{qa\sin\theta}{4\,\pi\,\epsilon_0 r^3}$
D'où
$\overrightarrow{E}\ = \frac{p}{4\pi\,\epsilon_0 r^3}\,[2\,\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} + \sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}]$.

- On peut encore réécrire l'expression du champ électrique en fonction de $\overrightarrow{p}$

$\overrightarrow{P} = P\,\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} - P\,\sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$
$P\,\sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta} = P\,\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} - \overrightarrow{P}$
En introduisant cette égalité dans l'expression de $\overrightarrow{E}$ il vient
$\overrightarrow{E}(r,\theta) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0 r^3}[3\,P\,\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} - \overrightarrow{P}].$
$\overrightarrow{E}(r,\theta) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0 r^3}[3\,(\overrightarrow{P} - \overrightarrow{u_r})\,\overrightarrow{u_r} - \overrightarrow{P}]$

4. **Equipotentielles :**
   Elles sont définies par l'équation
   $V(M) = \frac{q\,a\,\cos\theta}{4\,\pi\,\epsilon_0\,r^2} = cte.$
   Soit
   $r^2 = k\,\cos\theta.$

5. **Lignes de champ :**
   Elles sont définies par l'équation
   $\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}\ .$
   Soit
   $r = r\,\sin^2\theta$
   .

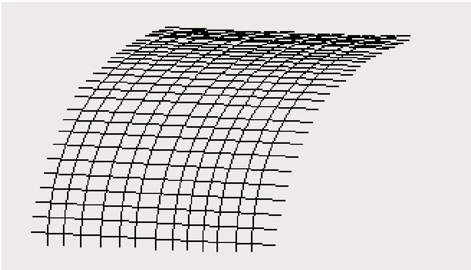


- Les équations définissant les lignes de champ et les équipotentielles ne sont valables que pour$r >> a$

1.1.8 Théoréme de Gauss

1.1.8.1 Elément de surface

En traçant deux réseaux de lignes sur une surface quelconque,S on la décompose en surfaces plus petites, délimitées par ces lignes (voir la figure).



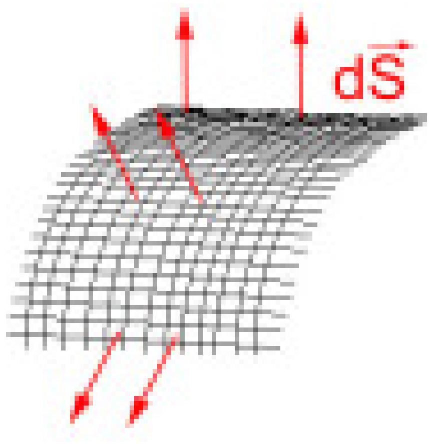
Si les lignes sont très nombreuses et si elles sont distribuées régulièrement, chacune de ces surfaces a une aire très petite. Soit un point,M , de la surface (S). Si le nombre des lignes augmente indéfiniment, la petite surface où se trouve le point, , diminue et tend à se rapprocher de la portion de plan tangent en M, à la surface (S). A la limite, son aire, , est infiniment petite et elle se confond avec une portion de plan. On l'appelle élément de surface entourant le point M, . On peut ainsi considérer qu'une surface quelconque, S, est la juxtaposition d'un nombre infini d'éléments de surface dS.

1.1.8.2 Vecteur normale

Considérons un élément de surface d'aire dS.

On associe à cet élément un vecteur appelé vecteur normale défini de la manière suivante :

1. son origine est un point M de l'élément
2. sa direction est normale à la surface

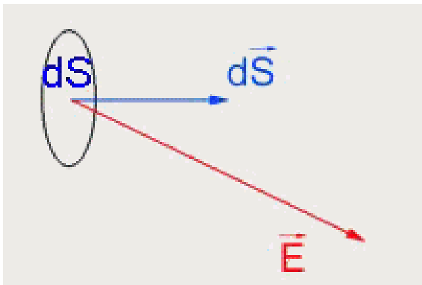


3. son module estégal à l'aire dS

Le vecteur $\overrightarrow{dS}$ est donc infiniment petit. Son orientation est choisie arbitrairement (vers l'extérieur pour les surfaces fermées).

1.1.8.3 Notion de flux

Désignons par le vecteur champ électrique au point M . Soit dS l'élément de surface entourant ce point et le vecteur $\overrightarrow{dS}$ correspondant.



Par définition, le flux $d\Phi$ du champ électrique $\overrightarrow{E}$ à travers l'élément de surface considéré dS est égal au produit scalaire :
$d\Phi = \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS}$
On l'appelle flux élémentaire pour indiquer qu'il est relatif à un élément de surface.

1.1.8.4 Définition du flux

On considère les éléments de surface composant la surface (S). On calcule pour chacun d'eux le flux élémentaire $d\Phi = \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS}$. On obtient le flux du champ électrique à travers la surface (S) en faisant la somme des flux élémentaires. On convient de désigner cette somme par la notation :
$\Phi = \int\int_S \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS}$.
Pour faire ce calcul, les vecteurs $\overrightarrow{dS}$ associés aux éléments de surface sont tous orientés du même cêté de la surface (S).

1.1.8.5 Relation entre flux et angle solide

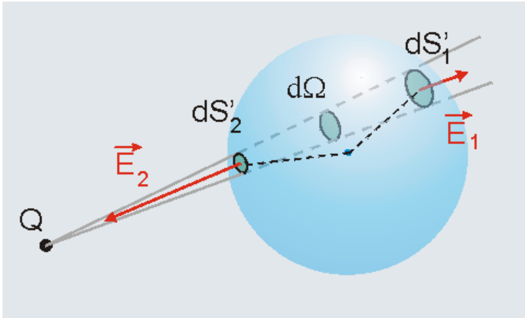
soit un point$M$ appartenant à l'élément de surface dS. Le champ$\overrightarrow{E}$ créé en M par la charge Q est porté parOM et dirigé de O vers M si $Q > 0$; son module est : $\mid \overrightarrow{E} \mid = \frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0 r^2}$ avec $r = OM$.
Le flux élémentaire de ce champ électrique à travers l'élément de surface dS entourant le point M est :
$d\Phi = \mid \overrightarrow{E} \mid dS \cos\theta$; $d\Phi = \frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0 r^2} dS\ \cos\theta$
or $\frac{dS\cos\theta}{r^2}$ est l'angle solide $d\Omega$ sous lequel le contour de dS est vu de O.

$$d\Phi = \frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0 r^2} dS\ \cos\theta = \frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0} d\Omega$$

1.1.8.6 Enoncé du théorème de Gauss

Le flux du champ électrique envoyé à travers une surface fermée S_g quelconque vaut $\frac{1}{\epsilon_0}$ fois la charge algébrique totale, contenue dans le volume délimité par cette surface.
$\Phi = \oint_{S_g} \overrightarrow{E}\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{intrieureS_g}}{\epsilon_0}$

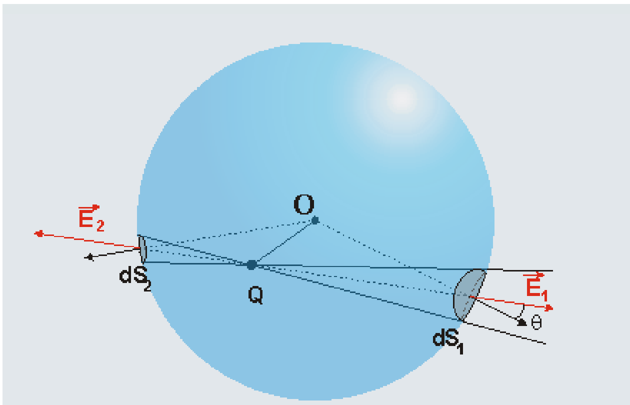
[*] Démonstration



a) Cas de charges extérieures à une surface fermée

Les éléments $\overrightarrow{dS_1'}$ et dS_2' sont vus sous le même angle $d\Omega$ en valeur absolue.

Cependant, $\overrightarrow{E_1}$ et $\overrightarrow{dS_1'}$ sont colinéaires alors que $\overrightarrow{E_2}$ et $\overrightarrow{dS_2'}$ sont opposés. flux $d\Phi = \overrightarrow{E_1}.\overrightarrow{dS_1'}$ et $d\Phi = \overrightarrow{E_2}.\overrightarrow{dS_2'}$ sont donc de signe opposé. Les flux élémentaires s'annulant 2 à 2,le flux total du champ créé par la charge extérieure à la surface fermée est nul.



b) Cas de charges interieures à une surface fermée.

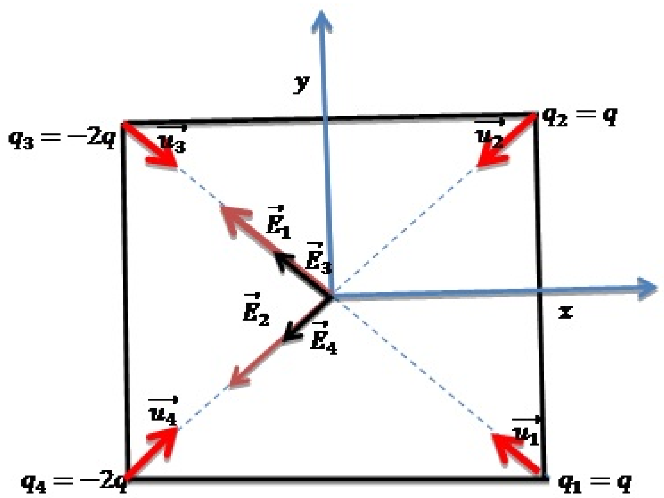
La somme des flux élémentaires ne sera pas nulle car tous les vecteurs élément de surface sont par exemple tous orientés de la surface vers l'extérieur. Le flux total envoyé par à travers sera la somme des flux élémentaires soit : $\Phi = \frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0} \int \, d\Omega$.

L'unité d'angle solide est l'angle qui découpe sur une sphère de rayon unité une surface unité. Comme la surface de la sphère de rayon unité est $4\,\pi\,R^2$ l'angle solide qui d'un point voit tout l'espace a pour valeur

$4\,\pi$. La somme étant étendue à tout l'espace soit $\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$.
si il se trouve, àl'intérieur de S , n charges Q_1, Q_2, Q_2, Q_n :
$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i$.
En posant :
$\Phi = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$.
Le flux de E envoyé à travers une surface fermée est égal au quotient par ϵ_0 de la somme des charges intérieures, quelles que soient les charges extérieures.

1.1.9 Exercices corrigés

- **Exercice 01** :
  On dispose des charges ponctuelles $q_1 = q_2 = q, et\, q_3 = q_3 = -2q$, aux sommets d'un carré de côté a.
  Déterminer le champ électrique au centre O du carré.
  Application numérique : $q = 1,6.10^{-9}c; a = 42m$.



Solution
On applique le principe de superposition pour le champ électrostatique :
$$\vec{E}_O = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$$

Les champs électrostatiques s'écrivent respectivement :

$\overrightarrow{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Q}{a^2}\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Q}{a^2}(-\cos\theta\overrightarrow{i} + \sin\theta\overrightarrow{j})$
$\overrightarrow{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Q}{a^2}\overrightarrow{u_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Q}{a^2}(-\cos\theta\overrightarrow{i} - \sin\theta\overrightarrow{j})$
$\overrightarrow{E}_3 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4Q}{a^2}\overrightarrow{u_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Q}{a^2}(\cos\theta\overrightarrow{i} - \sin\theta\overrightarrow{j})$
$\overrightarrow{E}_4 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{24Q}{a^2}\overrightarrow{u_4} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Q}{a^2}(\cos\theta\overrightarrow{i} + \sin\theta\overrightarrow{j})$
Le champ électrostatique total au centre O est donc :
$\overrightarrow{E}_O = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{12Q}{a^2}\cos\theta\overrightarrow{i}$ où $\theta = \frac{\pi}{4}$
Finalement on obtient :
$\overrightarrow{E}_O = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{3\sqrt{2}Q}{a^2}\overrightarrow{i}$
Application numérique : $\overrightarrow{E}_O = -3.82\overrightarrow{i}\,V\,m^{-1}$

- **Exercice 02 :** Soit un ensemble de 3 charges (figure 2) électriques ponctuelles $-2q$,$+q$,$+q$ disposées aux sommets A,B et C d'un triangle équilatéral de côté a

  1. Déterminer le champ E et le potentiel V creé par cette distribution de charges au centre de gravité G du triangle.
  2. A quelle force F est soumise une charge $Q = 3q$ placée en G
  3. Calculer l'énergie potentielle de la charge Q en G

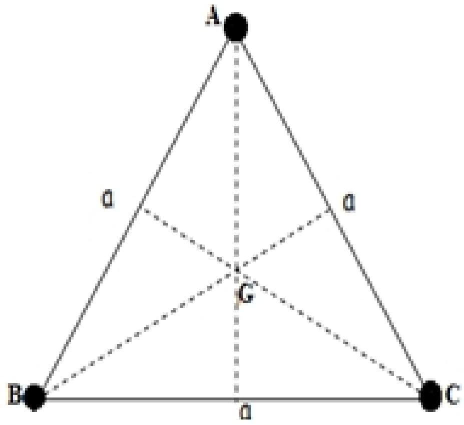


figure2

- **Solution**

1. Le champ électrique E_G en point G
   $\overrightarrow{E}_G = \overrightarrow{E}_A + \overrightarrow{E}_B + \overrightarrow{E}_C$
   Par projection $\overrightarrow{E}_G$ sur $X\acute{X}$
   $E_G = E_A + E_B \cos\alpha + E_C \cos\alpha$

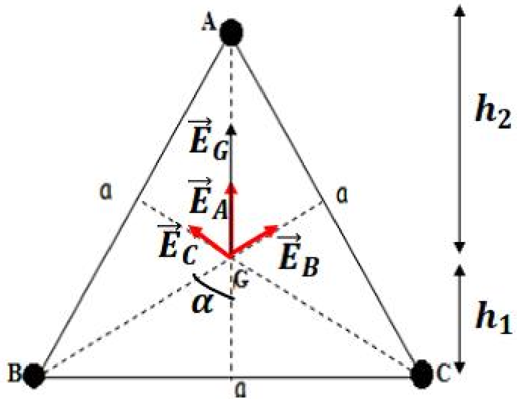
$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{h_2^2}$$

$$E_B = E_C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 h_2^2}$$

   D'après la figure $\alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$
   On sait que

$$\sin\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{h_2} \Rightarrow h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$
$$E_G = E_A + E_B\cos\alpha + E_C\cos\alpha$$
$$\Rightarrow E_G = E_A + 2E_B\cos\alpha$$
$$E_G = E_A + E_B$$
$$E_G = \frac{9q}{4\pi\epsilon_0 a^2} N/C$$

2. Le potentiel V_G en point G
   $V_G = V_A + V_B + V_C$
   $\Rightarrow V_G = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 h_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 h_2} - \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 h_2} = 0Volt$
3. La force électrique F_G en point G avec $Q = 3q$
   $\overrightarrow{F} = Q\overrightarrow{E}_G \Rightarrow \|\overrightarrow{F}\| = Q = \frac{9q}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{27q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}N$



- **Exercice 03 :**

  Quatre charges ponctuelles sont placées aux sommets d'un carré de côté a (Figure 3).

  1. Calculer le champ et le potentiel électrique au centre O de carré.
  2. Determiner l'énergie potentielle et la force électrique de la charge $(-q)$ situé au centre de carré.
  3. Calculer le travail de la force électrique de la charge $(-q)$ qui se déplace du point O au point O' (le point O' représente la symétrie du point O par rapport au côté supérieur).

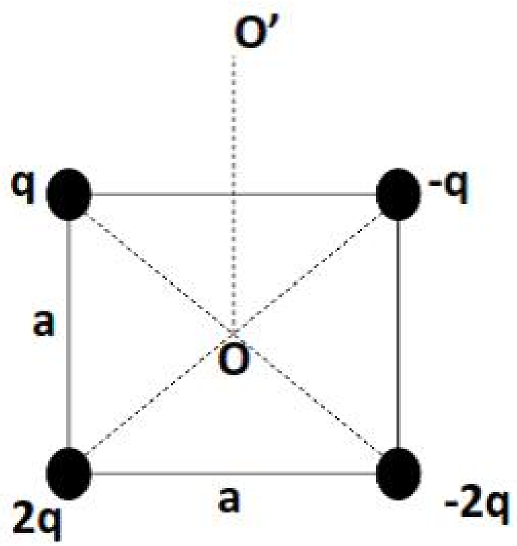
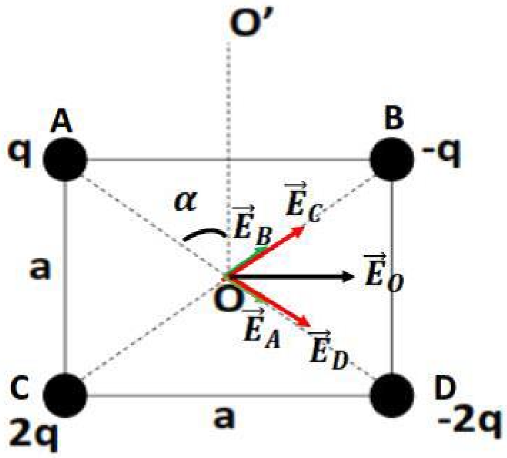


figure3

- **Solution**



- Le champ éléctrique au point O :
$\overrightarrow{E}_O = \overrightarrow{E}_A + \overrightarrow{E}_B + \overrightarrow{E}_C + \overrightarrow{E}_D$
Par projection $\overrightarrow{E}_O$ sur l'axe Oxy

$$Ox : E_{Ox} = E_A \cos\alpha + E_B \cos\alpha + E_C \cos\alpha + E_D \cos\alpha$$
$$Oy : E_{Oy} = E_A \sin\alpha + E_B \sin\alpha + E_C \sin\alpha + E_D \sin\alpha$$

Avec

$$E_A = E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(\frac{a}{2})^2}$$

$$E_C = E_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{(\frac{a}{2})^2}$$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$
Donc

$$Ox : E_{Ox} = 2(E_A + E_C)\cos\alpha$$
$$Oy : E_{Oy} = 0$$

$$E_{Ox} = 2\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(\frac{a}{2})^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{(\frac{a}{2})^2}\right)\cos\alpha$$

$$E_{Ox} = \sqrt{E_{Ox}^2 + E_{Oy}^2} = \frac{3q}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}\frac{N}{C}$$

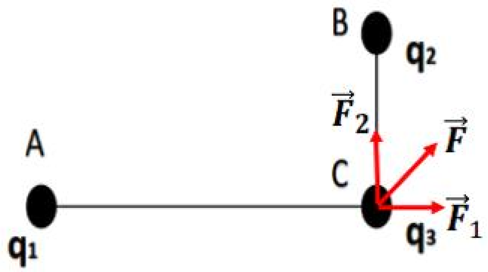
- Le Ptentiel éléctrique V_O en point O :
  $V_O = V_A + V_B + V_C + V_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a\sqrt{2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a\sqrt{2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{a\sqrt{2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{a\sqrt{2}} = 0V$
- lénergie potentielle E_p de la charge $-q$ en point O
  $E_p = -qV_O \Rightarrow E_p = 0Joul$
- La force électrique de la charge $-q$ dans le point O
  $\overrightarrow{F} = -q\overrightarrow{E}_O \Rightarrow F = qE_0$
  Donc $F = \frac{3q^2}{\sqrt{2}\pi\epsilon_O a^2}N$ item Le travail de la force éléctrique de la charge $-q$ pour la déplacéde point O a $\grave{O}$
  $W = -q[V_O - V_{\grave{O}}]$
  Avec $V_O = 0$,
  $V_{\acute{O}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\frac{a}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{\frac{a\sqrt{10}}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\frac{a\sqrt{10}}{\sqrt{2}}} = 0V$
  Donc $W = 0J$ car la force éléctrique est perpondiculaire avec le déplacement.

- **Exercice 04 :** Trois charges ponctuelles q_1, q_2, q_3 occupent les points A, B, C, comme indiqué sur la figure 4 avec :
  $q_1 = 1.510^{-3}C$, $q_2 = -0.510^{-3}C$, $q_3 = 0.210^{-3}C$ et $AC = 1.2m$, $BC = 0.5m$.

  1. Calculer la force appliquée sur la charge q_3.
  2. Calculer le champ et le potentiel électrique produit par q_1 et q_2 au point C.
  3. Calculer l'énergie potentielle de la charge q_3

figure04

- **Solution**



- La force électrique $\overrightarrow{F}$ appliqué sur la charge q_3

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2\,,\ \ (\overrightarrow{F}_1 \perp \overrightarrow{F}_2)$$

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$
$$r_1 = AC$$
$$r_2 = BC$$
$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_1^2} = 1.8710^3 N$$
$$F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_3q_2}{r_2^2} = 3.610^3 N$$
$$\text{Donc } F = 4.0610^3 N$$

- Le champ électrique E en point C
  D'aprés la loi de coulomb $\overrightarrow{F} = q_3\overrightarrow{E}$

$F = q_3E \Rightarrow E = \frac{F}{q_3} = 2.0310^7 V/m$

- Le potentiel V_C en point C

$$V_C = V_1 + V_2\ V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_1}$$

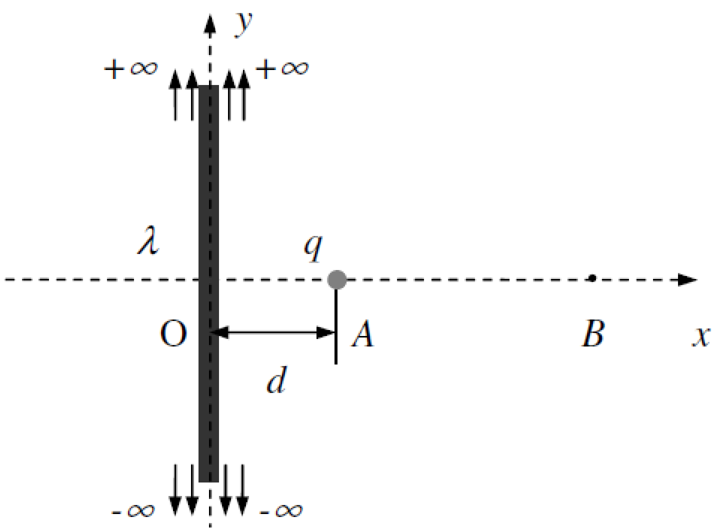
$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_2}$$
$$V = 2.2510^6 V$$

Energie potentielle E_p de la charge q_3

$$E_p = q_3 V_C \Rightarrow E_p = 4.510^2 J$$

- **Exercice 05 : Champ électrique créé par un fil uniformément chargé infiniment long**

Un fil metallique infiniment long est charge uniformement avec la densite de charges λ.
Déterminer le champ électrostatique en un point A situé sur la médiatrice du fil à une distance r de son milieu O.



- **Solution**

On se propose de trouver le champ éléctrostatique creé en un point M par un filament rectiligne infiniment long, portant une charge λ par unité de longueur.

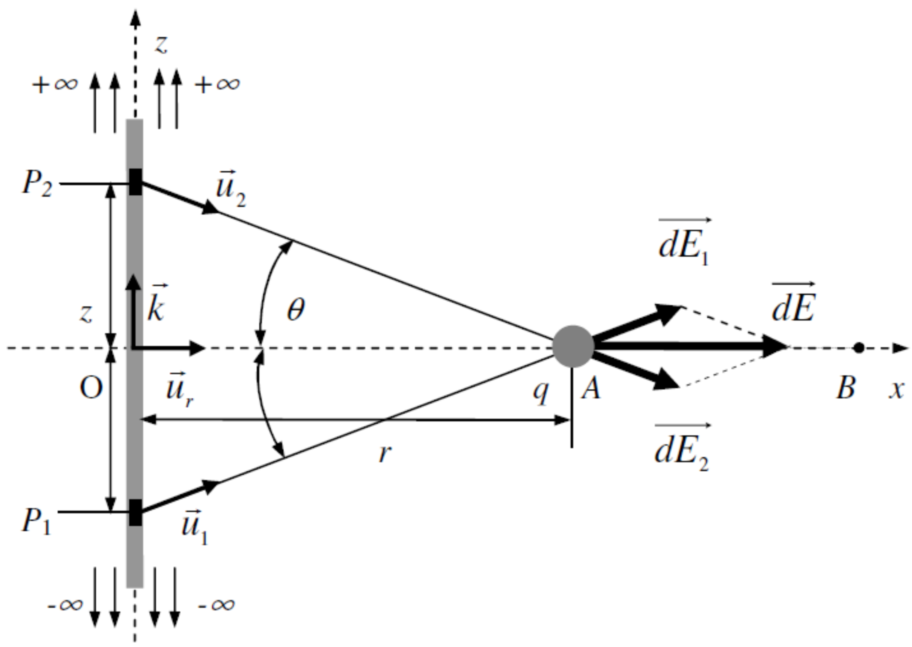
Pour cela, on divise le filament en petits segments de longueur dz portant chacun une charge $dq = \lambda\, dz$. On exprime le champ éléctrostatique $\overrightarrow{dE}_1$ créé par la charge élémentaire $dq_1 = \lambda\, z$, située en $P1$, en un point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}$.

$\overrightarrow{dE}_1 = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\frac{\lambda\, dz}{r^2+z^2}\,\overrightarrow{u}_1 = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\frac{\lambda\, dz}{r^2+z^2}(\cos\theta\,\overrightarrow{u}_r + \sin\theta\,\overrightarrow{k})$

Le champ éléctrostatique $\overrightarrow{dE}_2$ créé en M par la charge éleméntaire $dq_2 = \lambda\, z$, situéé en P_2. symétrique de $P1$ par rapport à O , s'obtient de la même façon : $\overrightarrow{dE}_2 = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\frac{\lambda\, dz}{r^2+z^2}\,\overrightarrow{u}_2 = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\frac{\lambda\, dz}{r^2+z^2}(\cos\theta\,\overrightarrow{u}_r + \sin\theta\,\overrightarrow{k})$.

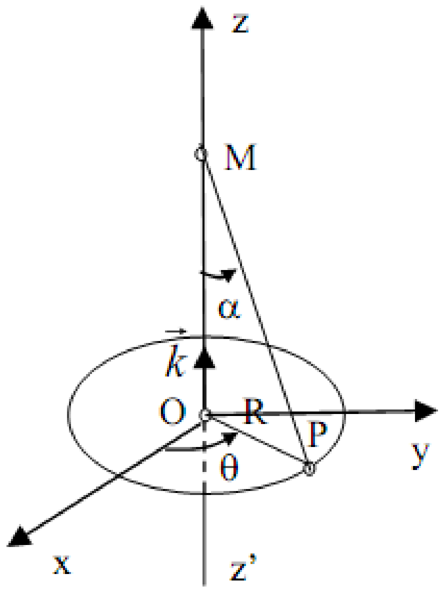
Le champ éléctrostatique $\overrightarrow{dE}$ créé en M par la paire de charges élémentaires (dq_1, dq_2) a pour expression :

$\overrightarrow{dE} = \overrightarrow{dE}_1 + \overrightarrow{dE}_2 = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\frac{2\,\lambda\, dz}{r^2+z^2}\,(\cos\theta\,\overrightarrow{u}_r) = dE_r\,\overrightarrow{u}_r$



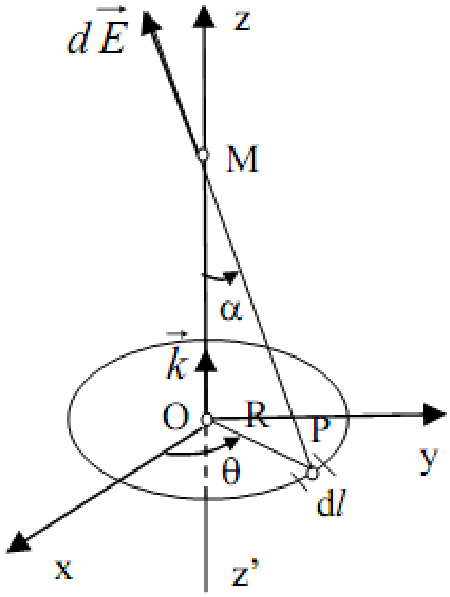
avec :
$dE_r = \frac{1}{2\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{dz}{r^2+z^2}\cos\theta.$
En appliquant le principe de superposition, le champ éléctrostatique résultant au point M, s'obtient en intégrant cette expression de $\theta = 0$ à $\theta = \frac{\pi}{2}$.
$E_r = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\epsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dz}{r^2+z^2}\cos\theta.$
Comme :$\cos\theta = \sqrt{\frac{r^2}{r^2+z^2}}.$
alors :$r^2 + z^2 = \frac{r^2}{\cos^2\theta}.$
$\tan\theta = \frac{z}{r}$ et $dz = \frac{r d\theta}{\cos^2\theta}.$
En substituant $r^2 + z^2$ et dz par leurs expressions respectives dans celle de E_r, on obtien : $E_r = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\epsilon_0 r}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\epsilon_r}[\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\epsilon_0 r}.$
D'où :$\overrightarrow{E} = E_r\overrightarrow{u}_r = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\epsilon_0\,r}\overrightarrow{u}_r(N/C)$

- **Exercice 06** : **Boucle circulaire portant une charge linéique uniforme**
  Soit une boucle circulaire de centre O, de rayon R, uniformément chargée avec une densité linéique $\lambda_0 = \lambda$.
  Calculer le champ $\overrightarrow{E}$ crée par cette distribution de charges, en un point M de l'axe $\overrightarrow{z'z}$ de la boucle :
  a) A partir du potentiel électrostatique



- **Solution** a) Calcul du champ électrostatique à partir du potentiel
  Le potentiel $dV(M)$ créé en un point $M(0,0,z)$ par la charge $dq = \lambda\, dl$ portée par un élément dl de la boucle entourant P est :
  La charge $dq = \lambda_0\, dl = \lambda_0 R d\theta$ crée en M le potentiel $V(M)$:

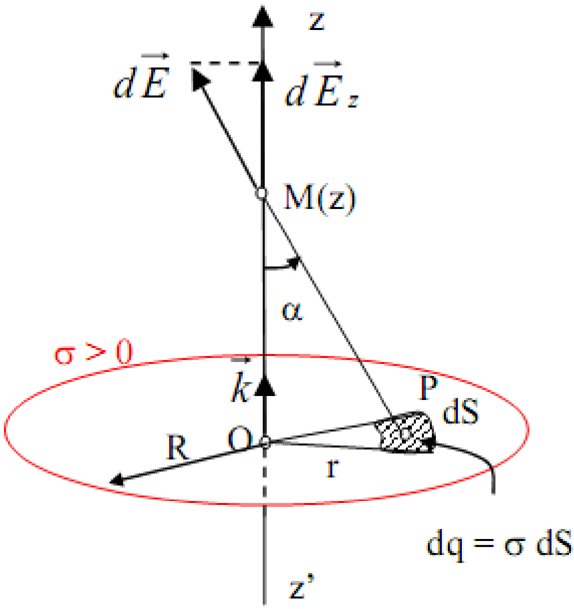
$dV(M) = \frac{dq}{4\,\pi\,\epsilon_0 \|\overrightarrow{PM}\|} = \frac{\lambda_0\, dl}{4\,\pi\,\epsilon_0 \|\overrightarrow{PM}\|}$
avec $dl = R\, d\theta$ et $\|\overrightarrow{PM}\| = (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$
Le potentiel $V(M)$ est obtenu par intégration sur le contour C de la boucle :
$V(M) = \oint_C dV(M) = \frac{\lambda_0 R}{4\,\pi\,\epsilon_0 (R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{2\,\pi} d\theta.$



Ce qui donne :
$V(M) = \frac{\lambda_0 R}{2\,\epsilon_0 (R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} V = V(0,0,z) = V(0,0,-z)$.
Le champ est déduit du potentiel par dérivation :
$\overrightarrow{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M) = -\frac{dV}{dz}\overrightarrow{k} = \frac{\lambda_0 R\, z}{2\,\epsilon_0 (R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\overrightarrow{k}\, N/C = \overrightarrow{E}(0,0,z) = -\overrightarrow{E}(0,0,-z)$

- **Exercice 07 Disque uniformément chargé avec la densité superficielle uniforme**
  Soit un disque de centre O, de rayon R, uniformément chargé avec une densité surfacique de charge $\sigma > 0$. Calculer le champ $\overrightarrow{E}$ créé par cette distribution de charges en un point M de l'axe $\overrightarrow{zz'}$ du disque :
  a) A partir du potentiel éléctrostatique
  b) directement

- **Solution**
  a) Calcul du champ éléctrostatique à partir du potentiel
  Le potentiel $dV(M)$ créé en un point $M(0,0,z)$ par la charge $dq = \sigma\, dS$ entourant le point P est :



La charge $dq = \sigma\, dS$ créé en M le potentiel $V(M)$ s'écrit :
$dV(M) = \frac{dq}{4\,\pi\,\epsilon_0 \|\overrightarrow{PM}\|} = \frac{\sigma\, ds}{4\,\pi\,\epsilon_0 \|\overrightarrow{PM}\|}$
avec $ds = r dr d\theta$ et $\|\overrightarrow{PM}\| = (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$
Ce qui donne :
$dV(M) = \frac{\sigma}{4\,\pi\,\epsilon_0} \frac{r dr\, d\theta}{(r^2+z^2)^{\frac{1}{3}}}$.
Le potentiel $V(M)$ est obtenu par intégration sur la surface du disque :
$V(M) = \frac{\sigma}{4\,\pi\,\epsilon_0} \int_0^{2\,\pi} \int_{r=0}^{r=R} \frac{r dr d\theta}{(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma}{2\,\epsilon_0} [(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}]_{r=0}^{r=R}$.
$V(M) = \frac{\sigma}{2\,\epsilon_0} [(R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} - |z|] V = V(0,0,z) = V(0,0,-z)$.
Le champ $\vec{E}$ est déduit du potentiel par dérivation :
$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad} V(M) = -\frac{dV}{dz} \vec{k}$
Ainsi
$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\,\epsilon_0} [\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}]\, \vec{k}\, N/C = \vec{E}(0,0,z) = \vec{E}(0,0,-z)$.

b) Calcul direct du champ $\vec{E}$ en un point $M(0,0,z)$

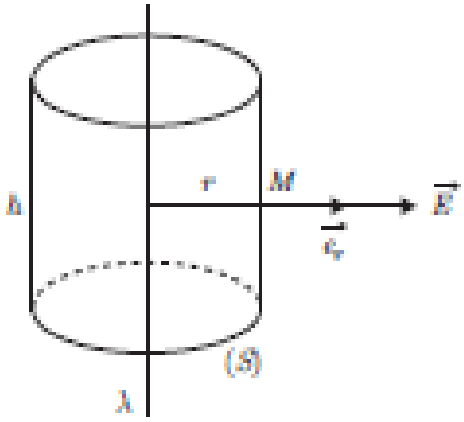
Examinons d'abord la symétrie du problème : la distribution présente une symétrie de révolution autour de $\overrightarrow{zz'}$. Tout plan contenant l'axe $\overrightarrow{zz'}$ est un plan de symétrie paire de la distribution. Donc

le champ en un point M de l'axe est porté par $\overrightarrow{k}$:
$\overrightarrow{E}(M) = \overrightarrow{E}(0,0,z) = \overrightarrow{E}(z)\overrightarrow{k}$
Un élément $\overrightarrow{dE}$ de charge $dq = \sigma\, dS$, centré en P , crée en un point M de l'axe du disque un champ élémentaire donné par :
$\overrightarrow{dE} = \frac{dq}{4\,\pi\,\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}\overrightarrow{u}$.
$ds = rdr\, d\theta, \|\overrightarrow{PM}\| = \sqrt{r^2+z^2}$ and $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|}$.
Le disque chargé présente une symétrie de révolution autour de son axe, par exemple l'axe z'z, le champ est alors porté par cet axe. On a :
$\overrightarrow{dE} = \frac{\sigma}{4\,\pi\,\epsilon_0}\frac{rdr\theta}{r^2+z^2}\overrightarrow{u}$
$\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{4\,\pi\,\epsilon_0}\int\int_S \frac{rdrd\theta}{(r^2+z^2)}\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\overrightarrow{u_z}$
$\overrightarrow{E} = \frac{\sigma\, z}{4\pi\,\epsilon_0}\int_0^R \frac{rdr}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\,\pi} d\theta\,\overrightarrow{u_z}$

$\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{2\,\epsilon_0}[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}]\overrightarrow{u_z}$.
Soit
$\overrightarrow{E}(M) = \frac{\sigma}{2\,\epsilon_0}[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}]\overrightarrow{u_z}N/C$

- **Exercice 08 Champ créé par un fil rectiligne infini chargéé d'une densité linéïque**

- **Solution** :
La distribution de charge est invariante par rotation autour du fil et par translation parallèle au fil : le potentiel et le champ ne peuvent donc dépendre des coordonnées cylindriques φ et z
$V = V(r)$, $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{dV}{dr}\overrightarrow{e_r}$
Le champ électrique est donc radial.
Pour calculer le champ en M , on peut alors choisir comme surface fermée d'intégration (S) un cylindre de révolution autour du fil, de rayon r et de hauteur h (surface de Gauss).
Le flux sortant par les bases de (S) étant nul, on a :



$\Phi = \oint_{(s)} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \int\int_S E.dS = E\int\int_s dS = 2\,\pi\, r\, h\, E.$
$\sum \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{\lambda\, h}{\epsilon_0}.$
Le théorème de Gauss s'écrit donc :
$2\,\pi\, r\, h\, E = \frac{\lambda\, h}{\epsilon_0} \Rightarrow \overrightarrow{E} = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\epsilon_0 r}\overrightarrow{e_r}$. Le potentiel en M se déduit de $\overrightarrow{E}$ par :

$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V \Rightarrow dV = -E.dr.$
D'où
$V = -\int E.dr = -\frac{\lambda}{2\,\pi\,\epsilon_0}\ln r + cte$

- **Exercice 09 Champ créé par une sphere chargée d'une densité volumique ρ uniforme**
- **Solution** :
  la symétrie est sphérique, on peut considérer que $V = V(r)$ et par et par conséquent que $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{dV}{dr}\overrightarrow{e_r}$ est radial d'une part, et ne dépend que de r d'autre part.
  1) Champ à l'extérieur : $OM \geq R$.
  Soit (S_1) la surface de Gauss passant par le point M extérieur (sphère de rayon r).
  On a :
  $\sum \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{4}{3}\pi\,\frac{R^3}{\epsilon_0}\rho$
  Le théorème de Gauss donne donc :

$4\,\pi\,r^2 E_{ext} = \frac{4}{3}\pi\,\frac{R^3}{\epsilon_0}\rho \Rightarrow \overrightarrow{E}_{ext} = \rho\,\frac{R^3}{3\,\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e}_r = \frac{K\,Q}{r^2}\overrightarrow{e}_r.$

2) Champ à l'intérieur :$OP \leq R$.

Soit (S_s) la surface de Gauss passant par le point P intérieur (sphère de rayon r).

On a encore :

$\oint_{(S_2)} E_{int}.dS = E_{int}\oint_{(S_1)} dS = 4\,\pi\,r^2 E_{int}.$

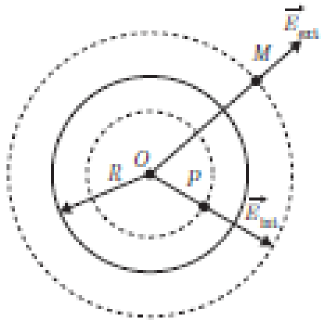
$\sum\frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{4}{3}\pi\,\frac{r^3}{\epsilon_0}\rho$

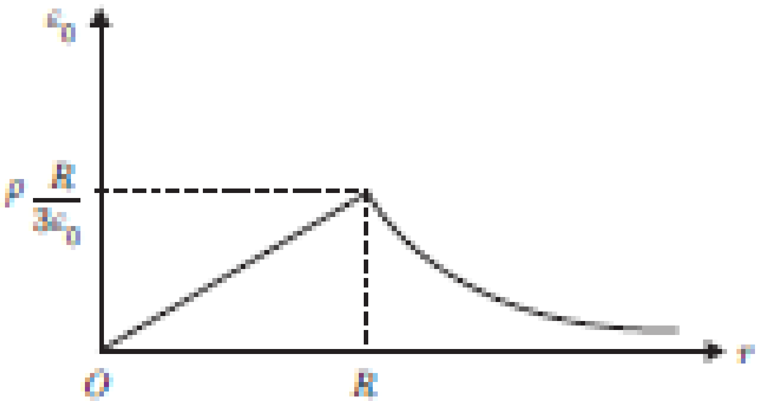
Le théorème de Gauss donne cette fois :

$4\,\pi\,r^2 E_{int} = \frac{4}{3}\pi\,\frac{r^3}{\epsilon_0}\rho.$

$\overrightarrow{E}_{int} = \frac{\rho\,r}{3\,\epsilon_0}\overrightarrow{u}_r$

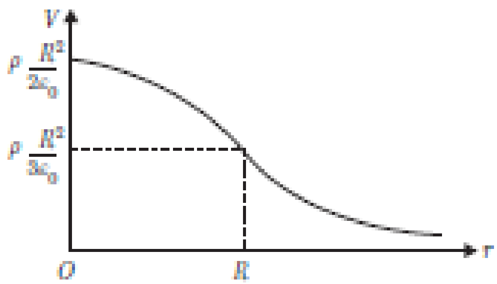
D'où la variation de E en fonction de r représentée sur la figure.





3) Calcul du potentiel Le champ $\overrightarrow{E}$ étant radial, $dV = -\overrightarrow{E}.\overrightarrow{dr} =$

$-E.dr$.A l'extérieur, on a :
$V_{ext} = -\int E_{ext}dr = -\frac{\rho R^3}{3\,\epsilon_0}\int \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\,\epsilon_0 r} + C_1$
Lorsque $r \mapsto \infty, V \mapsto 0 \Rightarrow C_1 = 0.$
A l'interieur :
$V_{int} = -\int E_{int}dr = -\frac{\rho}{3\,\epsilon_0}\int rdr = -\frac{\rho\, r^2}{6\,\epsilon_0} + C_2$
La continuité de V à la surface de la sphère donne :
$\frac{\rho R^3}{3\,\epsilon_0 R} = -\frac{\rho R^2}{6\,\epsilon_0} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{\rho R^2}{2\,\epsilon_0}.$
Finalement :
$V_{int} = \rho\,\frac{R^2}{2\,\epsilon_0}[1 - \frac{r}{3\,R^2}].$



- **Exercice 10**

On dispose d'une sphère de centre O et de rayon R , chargée uniformément en volume, de densité volumique de charge charge $\rho(r)$ qui correspond à la distance r (la séparation entre le point étudié et le centre O, tel que $\rho(r)$ est donnée par la forme suivante :

$$\rho(r) = \rho_0(1 - \alpha\frac{r^2}{R^2}) \quad \text{Où } \rho_0 \text{ et } \alpha \text{ sont des constantes}$$

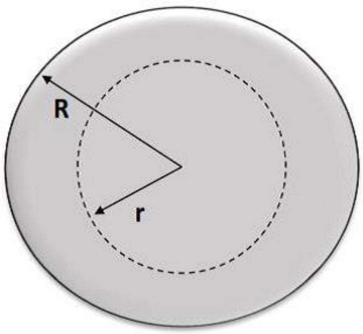
1. Calculer la charge totale de la sphère.
2. Trouver l'intensité du champ électrique à l'intérieure et l'extérieure de la sphère.
3. Déterminer la valeur de r pour le champ électrique maximal E_{max} à l'intérieure de la sphère et déduire E_{max}.
4. Quelle est la condition qui doit être obtenue par α pour que le

champ électrique atteigne une valeur maximale à l'intérieur de la sphère.

5. Calculer le potentiel électrique à l intérieure et l'extérieure de la sphère.
6. Trouver les deux valeurs de r pour les deux potentiels minimal et maximal (V_{min}, V_{max}) à l'intérieure de la sphère et déduire V_{min} ,V_{max}
7. Quelle est la condition qui doit être obtenue par α pour que le potentiel électrique atteigne une valeur minimale à l'intérieur de la sphère
8. Tracer graphiquement $E(r)$ et $V(r)$.

- **Solution**

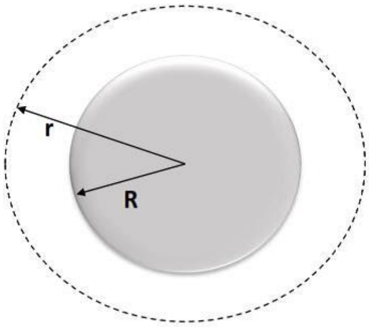
1. La charge électrique totale



$$q = \int \rho dV \Rightarrow q = \int_0^R \rho_0(1 - \alpha\frac{r^2}{R^2})4\pi r^2 dr$$
$$\Rightarrow q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0(1 - \frac{3\alpha}{5})$$

2. Le champ électrique

$$r < R$$
$$q = \int_0^r \rho_0(1 - \alpha\frac{r^2}{R^2})4\pi r^2 dr$$
$$\Rightarrow q = 4\pi\rho_0(\frac{r^3}{3} - \frac{\alpha r^5}{5R^2})$$



D'aprés le théoréme de Gauss

$$ES = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon_0}(\frac{r^3}{3} - \frac{\alpha r^5}{5R^2})$$

$E = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}(1 - \frac{3\alpha r^2}{5R^2})$. $r > R$ la charge total

$$ES = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E4\pi r^2 = \frac{4\pi R^3\rho_0}{3\epsilon_0}(1 - \frac{3\alpha}{5})$$

$$E = \frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0 r^2}(1 - \frac{3\alpha}{5}).$$

3. La valeur de r pour un champ électrique maximal

$$E_{max} \Rightarrow \frac{dE_{int}}{dr} = 0$$

$\frac{dE_{int}}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}(1 - \frac{9\alpha r^2}{5R^2}) = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{R}{3}\sqrt{\frac{5}{\alpha}}$ Alors la valeur de champ maximal E_{max}

$$E_{max} = E_{int}(r_0) \Rightarrow E_{max} = \frac{\rho_0 r_0}{3\epsilon_0}(1 - \frac{3\alpha r_0^2}{5R^2}) \Rightarrow E_{max} = \frac{2\rho_0 R}{27\epsilon_0}\sqrt{\frac{5}{\alpha}}$$

4. La valeur α pour le champ $E_{max} l'inteieur$

$$r_0 < R \Rightarrow \frac{R}{3}\sqrt{\frac{5}{\alpha}} < R \Rightarrow \alpha > \frac{5}{9}$$

5. Le potentiel électrique

$$r > 0$$

$$V_{ext} = -\int E_{ext} dr = -\int \frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0 r^2}(1 - \frac{3\alpha}{5})dr \Rightarrow V_{ext} = \frac{R^3\rho_0}{3{\epsilon_0} r}(1 - \frac{3\alpha}{5}) + C_1$$

On calcul C_1

$V_{ext}(\infty) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ alors

$$V_{ext} = \frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0 r}(1 - \frac{3\alpha}{5})$$

$$r < 0$$

$$V_{int} = -\int E_{int}dr = -\int \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}(1 - \frac{3\alpha r^2}{5R^2})dr \Rightarrow V_{int} = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}(\frac{r^2}{2} - \frac{3\alpha r^4}{20R^2}) + C_2$$

On calcule C_2

La continuité du potentiel en $r = R$

$$V_{int}(R) = V_{ext}(R) \Rightarrow -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}(\frac{R^2}{2} - \frac{3\alpha R^4}{20R^2}) + C_2 = V_{ext} = \frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0 R}(1 - \frac{3\alpha}{5}) \Rightarrow C_2 = \frac{R^2\rho_0}{2\epsilon_0}(1 - \frac{\alpha}{2})$$

Alors $V_{int} = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}(\frac{r^2}{2} - \frac{3\alpha r^4}{20R^2}) + \frac{R^2\rho_0}{2\epsilon_0}(1 - \frac{\alpha}{2})$

6. Les deux valeurs de r pour V_{min} et V_{max}

$$\frac{dV_{min}}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}(r - \frac{3\alpha r^3}{5R^2}) = 0 \Rightarrow (r_1 = 0 \;\; r_2 = R\sqrt{\frac{5}{3\alpha}})$$

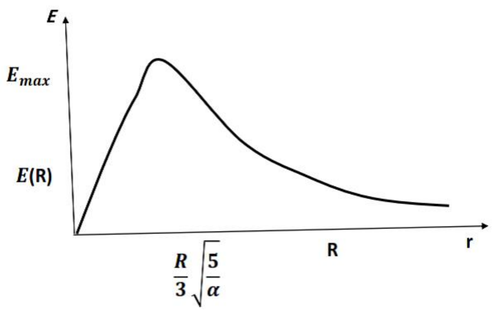
$$r_1 = 0 \Rightarrow V_{max} = \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0}(1 - \frac{\alpha}{2})$$

$$r_2 = R\sqrt{\frac{5}{3\alpha}} \Rightarrow V_{min} = \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0}(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{5}{10\alpha})$$

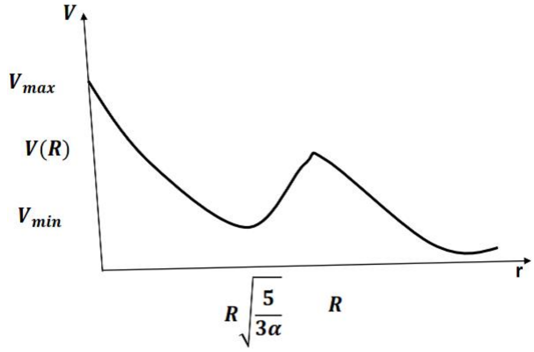
7. la condition pour que V_{int} soit minimal

$$r_2 < R \Rightarrow R\sqrt{\frac{5}{3\alpha}} < R \Rightarrow \alpha > \frac{5}{3}$$

8. Présentation graphique de $E(r)$



9. Présentation graphique de $V(r)$



2

Conducteurs en équilibre

2.1 Conducteurs en équilibre

2.1.1 Conducteurs isolés

2.1.1.1 Notion d'équilibre électrostatique

* Définition :

  l'équilibre électrostatique d'un conducteur est atteint lorsque aucune charge électrique ne se déplace plus à l'intérieur du conducteur.

* Remarques :

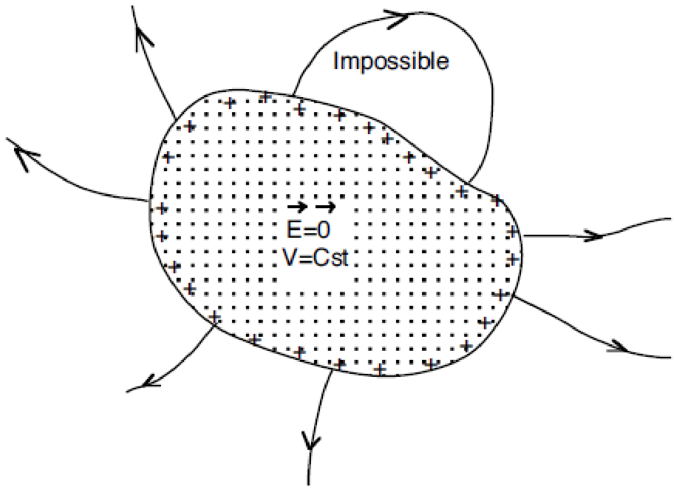
  1. Du point de vue de chaque charge élémentaire, cela signifie que le champ électrostatique total auquel elle est soumise est nul.
  2. Si le conducteur est chargé, le champ électrostatique total est (principe de superposition) la somme du champ extérieur et du champ créé par la distribution de charges contenues dans le conducteur. Cela signifie que les charges s'arrangent (se déplacent) de telle sorte que le champ qu'elles créent compense exactement, en tout point du conducteur, le champ extérieur.
  3. Comme le champ dérive d'un potentiel, cela implique qu'un conducteur à l'équilibre électrostatique est équipotentiel.

2.1.1.2 Quelques propriétés des conducteurs en équilibre

(a) Lignes de champ :

À l'intérieur d'un conducteur (chargé ou non) le champ électrostatique total est nul. Mais ce n'est pas forcément le cas à l'extérieur, en particulier si le conducteur est chargé. Puisqu'un conducteur à l'équilibre est équipotentiel, cela entraîne alors que, sa surface étant au même potentiel, le champ électrostatique est normal à la surface d'un conducteur. Par ailleurs, aucune ligne de champ ne peut revenir vers le conducteur.

En effet, la circulation du champ le long de cette ligne impose
$V(A) - V(B) = \int_A^B \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl}$.
Si les points A et B appartiennent au même conducteur, alors la circulation doit être nulle, ce qui est impossible le long d'une ligne de champ (où, par définition $\overrightarrow{E}$ est parallèle à $\overrightarrow{dl}$).



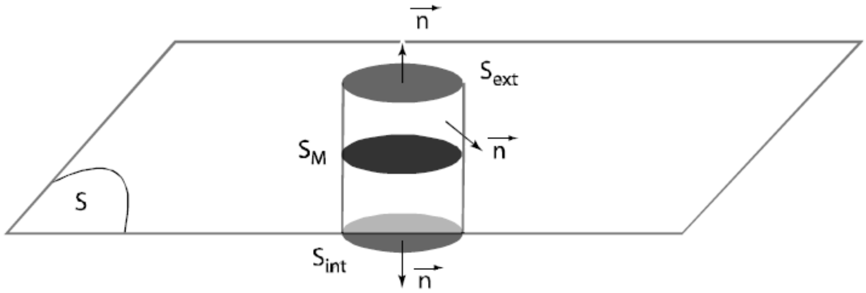
(b) Distribution des charges :
Si un conducteur est charge, ou se trouvent les charges non compensees ? Supposons qu'elles soient distribuees avec une distribution volumique ρ. Prenons un volume quelconque V situé À l'interieur d'un conducteur à l'équilibre électrostatique. En vertu du théoreme de Gauss, on a
$\oint_S \overrightarrow{E}\overrightarrow{ds} = \int\int\int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$.

puisque le champ $\overrightarrow{E}$ est nul partout. Cela signifie que $\rho = 0$ (autant de charges + que de charges -) et donc, qu'à l'équilibre, aucune charge non compensée ne peut se trouver dans le volume occupé par le conducteur. Toutes les charges non compensées se trouvent donc necessairement localisées à la surface du conducteur.

(c) Théorème de Coulomb :
En un point M infiniment voisin de la surface S d'un conducteur,

le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ est normal à S. Considérons une petite surface S_{ext} parallèle à la surface S du conducteur. On peut ensuite construire une surface fermée $\sum$ en y adjoignant une surface rentrant à l'interieur du conducteur S_{int} ainsi qu'une surface laterale S_L . En appliquant le théoreme de Gauss sur cette surface fermée, on obtient

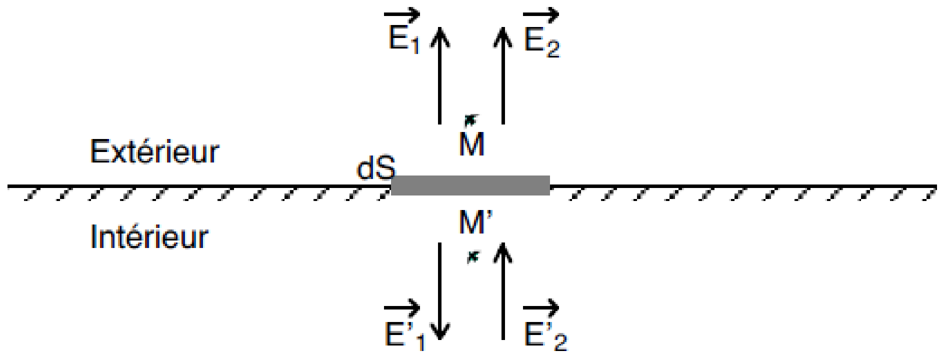
$\Phi = \oint_{\sum} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \int\int_{S_L} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} + \int\int_{S_{ext}} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} + \int\int_{S_{ext}} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = E.S_{ext}$
$\Phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int\int_{S_M} \sigma.dS = \frac{\sigma\, S_M}{\epsilon_0}$.



où S_M est la surface dessinée par le tube de flux passant par S_{ext} , donc $S_M = S_{ext}$

Théoreme : le champ électrostatique à proximité immediate d'un conducteur de densité surfacique σ vaut
$\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{n}$.
où $\overrightarrow{n}$ est un vecteur unitaire normal au conducteur et dirigé vers l'éxtérieur.

(d) Pression éléctrostatique :
Soient deux points M' et M infiniment proches de la surface d'un conducteur de densité surfacique σ,M situé à l'éxtérieur tandis que M' est situé à l'intérieur. Considérons maintenant une surface élementaire dS située entre ces deux points. Soit E_1 le champ créé en M par les charges situees sur dS et E_2 le champ créé en M par toutes les autres charges situées à la surface du conducteur. Soient E'_1 et E'_2 les champs respectifs en M'.



On à alors les trois propriétés suivantes :

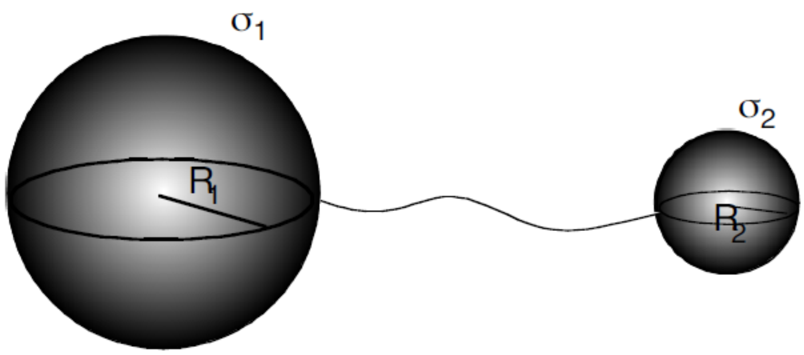
1. $\overrightarrow{E}_2(M) = \overrightarrow{E}_2(M')$ car M et M' sont infiniment proches.
2. $\overrightarrow{E'}_2 = -\overrightarrow{E'}_1$ car le champ éléctrostatique à l'intérieur du conducteur est nul.
3. $\overrightarrow{E}_1(M) = -\overrightarrow{E}_1(M')$ car E_1 est symétrique par rapport à dS, considérée comme un plan puisque M et M' peuvent être infiniment rapprochés.

Grâce à ces trois propriétés, on en déduit que $\overrightarrow{E}_1 = \overrightarrow{E}_2$, c'est à dire que la contribution de l'ensemble du conducteur est égale à celle de la charge située à proximité immédiate. Comme le champ total vaut $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_1 + \overrightarrow{E}_2 = \frac{\sigma}{2\,\epsilon_0}\overrightarrow{n}$ (théorème de Coulomb), on en déduit que le champ créé par l'ensemble du conducteur (à l'exclusion des charges situées en dS) au voisinage du point M est $\overrightarrow{E}_2 = \frac{\sigma}{2\,\epsilon_0}\overrightarrow{n}$ Autrement dit, la force éléctrostatique $\overrightarrow{dF}$ subie par cette charge $dq = \sigma dS$ de la part de l'ensemble des autres charges du conducteur vaut
$\overrightarrow{dF} = dq\,\overrightarrow{E}_2 = \sigma\,dS\,\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\overrightarrow{n} = \frac{\sigma^2}{2\,\epsilon_0}\overrightarrow{n}\,dS$ Quel que soit le signe de σ, la force est normale et toujours dirigée vers l'extérieur du conducteur. Cette propriété est caractéristique d'une pression, force par unité de surface. Ainsi, la pression éléctrostatique subie en tout point d'un conducteur vaut

$P = \frac{\sigma^2}{2\,\epsilon_0}$.

(e) Pouvoir des pointes

Cette expression décrit le fait expérimental que, à proximité d'une pointe, le champ éléctrostatique est toujours très intense. En vertu du théorème de Coulomb, cela signifie que la densité surfacique de charges est, au voisinage d'une pointe, très élevée. On peut aborder ce phéno-



mène avec deux sphères chargées de rayons différents, reliées par un fil conducteur et placées loin l'une de l'autre. On peut donc considérer que chaque sphère est isolée mais qu'elle partage le même potentiel V. Cela implique alors

$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0} \int\int_{S_1} \frac{\sigma_1 R_1}{R_1} = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0} \int\int_{S_2} \frac{\sigma_2 R_2}{R_2} \Rightarrow \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2 R_2}{\epsilon_0}$

$\Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$

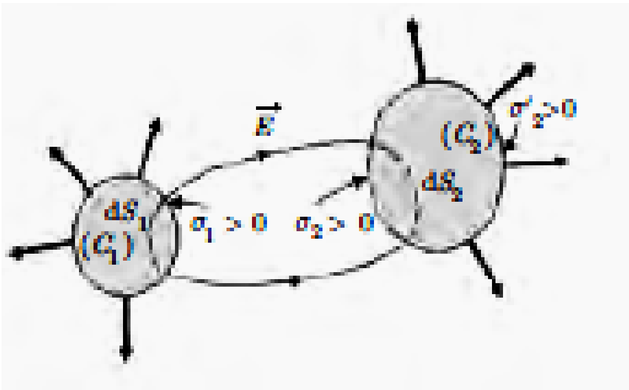
Donc, plus l'une des sphères aura un rayon petit et plus sa densité de charges sera élevée.

2.1.1.3 Influence de deux conducteurs chargés théorème de faraday

a) Influence partielle

Soit deux conducteurs (C_1) et (C_2). On suppose que, initialement (C_1) est charge avec une densité $\sigma_1 > 0$, et C_2 est neutre.

Dès que l'on approche (C_1) de (C_2), il apparaît sur la surface de (C_2) :ne densité de charge $\sigma_2' < 0$ sur la partie faisant face a (C_1) et une densité $\sigma_2' > 0$ sur la partie opposée. Les densités sont de signes contraires pour assurer la neutralité de (C_2). Les lignes de champ ont l'allure indiquée sur la figure : elles partent de (C_1) perpendiculaires à la surface et aboutissent à (C_2) également perpendiculaires à la surface. On considère le tube de champ de section dS_1 sur (C_1) : il va délimiter sur (C_2) une section dS_2. Le flux sortant de ce tube est nul, car aucun flux ne sort de la paroi latérale ($\overrightarrow{E}$ tangent à la paroi) ni des calottes dS_1, dS_2 ($\overrightarrow{E}$ nul àl'intérieur des conducteurs).



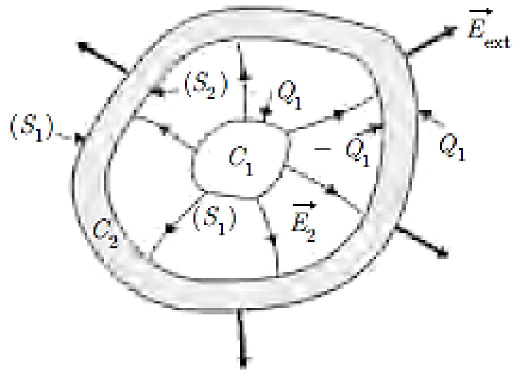
Le théorème de Gauss appliqué à ce tube donne :
$\oint_{(tube)} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = 0 = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$.
soit :
$\sum q_{int} = \sigma_1 dS_1 + \sigma_2 dS_2 = 0$.
Les charges $\sigma_1 dS_1$ et $\sigma_2 dS_2$ qui se font face sur deux éléments de surface correspondants sont égales et opposées (théorème de Faraday).
L'influence est dite partielle car seule une partie des lignes de champ issues de (C_1) aboutit à (C_2).

b) Influence totale

Si l'un des deux corps (C_2 par exemple) entoure totalement l'autre, il y a correspondance totale entre les charges de la

surface (S_1) de (C_1) et la surface interne (S_2) de (C_2). On peut alors écrire : Si l'un des deux corps (C_2 par exemple) entoure totalement l'autre, il y a correspondance totale entre les charges de la surface

(S_1) de (C_1) et la surface interne (S_2) de (C_2). On peut alors écrire :
$Q_1 = \int_{S_1} \sigma_1 dS_1 = -\int_{S_2} \sigma_2 dS_2$.
Les charges globales portées par les deux surfaces en regard sont égales et opposées. On peut donc rèsumer la situation de la manière suivante :

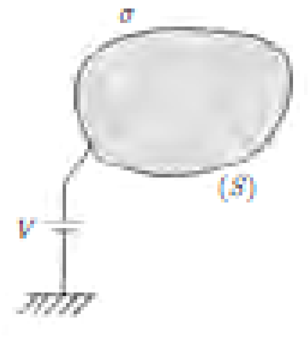


- dans la partie massive de (C_1) : $\overrightarrow{E}_1 = \overrightarrow{0}$,
- sur la surface de $(C_{1)}$: charge $Q_1 > 0$ créant $\overrightarrow{E}_2$,
- sur la surface interne de (C_2) : charge $-Q_1$,
- dans la partie massive de (C_2) : $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$,
- sur la surface externe de (C_2) : apparition de la charge $+Q_1$ pour assurer la neutralitéde (C_2) (si l'on suppose (C_2) neutre au départ),
- à l'éxtérieur des deux conducteurs : le champ $\overrightarrow{E}_{ext}$ est celui créé par la seule charge Q_1 portée par la surface externe de (C_2).

2.1.1.4 Capacité d'un conducteur unique

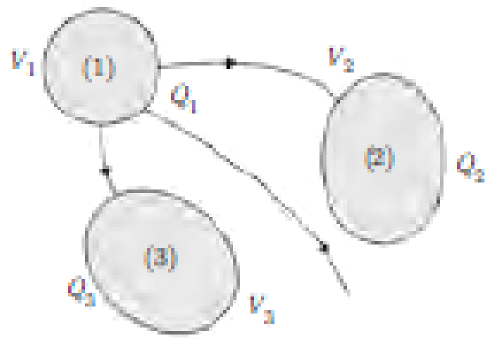
Soit un conducteur porté au potentiel V. Il apparaît alors sur sa surface, une charge q définie par :
$q = \oint_{(S)} \sigma \, dS$
Si le potentiel devient V_1, puis V_2, puis V_3, la charge devient $q1$, $q2$, $q3$.
Les relations charge potentiel étant linéaires.on peut écrire

$\frac{q}{V} = \frac{q1}{V_1} = \frac{q2}{V_2} = \frac{q3}{V_3} = C$.Le coefficient de proportionnalité C, indépendant de q et de V, est appeléla capacité du corps conducteur. Il se mesure en farad (F), si q est en coulomb et V en volt.



2.1.1.5 Système de n conducteurs en équilibre

Pour simplifier, on se limite à un système de trois conducteurs. Il s'agit de trouver les relations entre les charges et les potentiels des différents conducteurs. Pour cela, on définit trois états d'équilibre auxquels on applique ensuite le principe de superposition.



1. 1^{er} état : conducteur $n°1$ au potentiel $V_1 > 0$ par exemple, les autres au potentiel 0.
2. 2^e état : conducteur $n°2$ au potentiel V_2, les autres au potentiel 0.
3. 3^e état : conducteur $n°3$ au potentiel V_3, les autres au potentiel 0.

1^{er} état :$Q11$, $Q21$, $Q31$ étant les charges portées respectivement par les conducteurs 1, 2, 3, on a :
$Q_{11} = C_{11}V_1 \quad C_{11} > 0.$
$Q_{21} = C_{21}V_1 \quad C_{21} < 0$ car charge $Q_{21} < 0$.
$Q_{31} = C_{31}V_1 \quad C_{31} < 0$. car charge $Q_{31} < 0$

avec $|C_{21} + C_{31}| \leq C_{11}$ (ifluence partielle)
2^e état :
$Q_{12} = C_{12}V_2$
$Q_{22} = C_{22}V_2$
$Q_{32} = C_{32}V_2$
3^e état :
$Q_{13} = C_{13}V_3$
$Q_{23} = C_{23}V_3$
$Q_{33} = C_{33}V_3$
Superposition des potentiels :
$V_1 + 0 + 0 = V_1$
$V_2 + 0 + 0 = V_2$
$V_3 + 0 + 0 = V_3$

Superposition des charges :
$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C_{13}V_3$
$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + C_{23}V_3$
$Q_3 = C_{31}V_1 + C_{32}V_2 + C_{33}V_3$
La relation entre charges et potentiels est une relation matricielle. La matrice C ainsi définie, soit :

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

constitue la matrice des coefficients d'influence du système des trois conducteurs. On peut généraliser la relation entre charges et potentiels

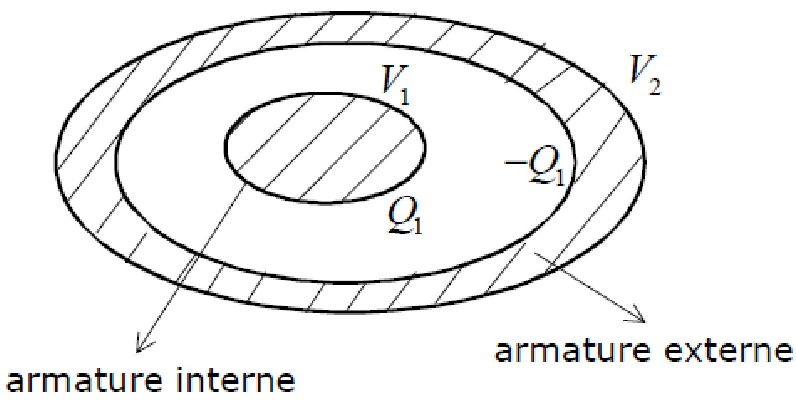
à un système de n conducteurs. Sous forme matricielle, cette relation s'écrit :
$[Q_i] = [C_{ij}][V_j]$
où les indices i et j varient entre 1 et n. Cette écriture signifie que, pour chaque valeur de i, il faut sommer cette expression sur j.

Propriétés de la matrice C :
- elle est symétrique : C_{ij} = C_{ji} (identité de Gauss),
- les termes diagonaux sont positifs :$C_{ii} > 0$, ils constituent les coefficients de capacité,
- les termes non diagonaux sont néégatifs : $C_{ij} < 0$, ce sont les coefficients d'influence.

2.1.1.6 Condensateurs

a) Définition

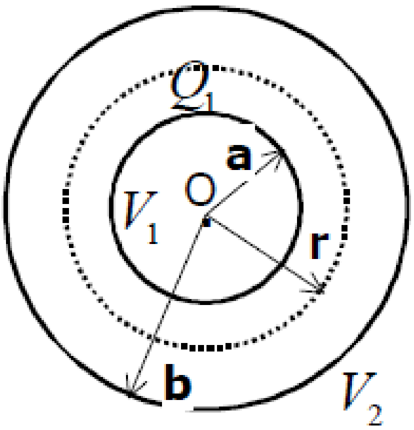
On appelle condensateur un système de 2 conducteurs, dont l'un est creux et entoure complètement l'autre.
l'espace séparant les 2 armatures peut être vide ou rempli d'un isolant.
les faces en regard portes des charges opposées.
On pose $Q_1 = C(V_1 - V_2)$ où C est la **capacité** du condensateur en Farad (F).



b) Calculs de capacité

- **Condensateur sphérique :**

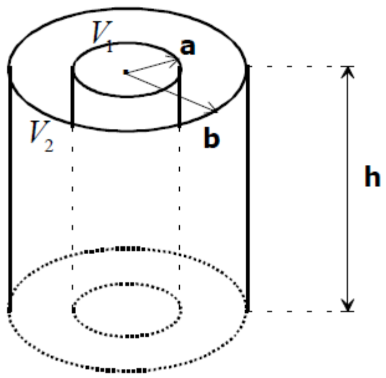
  Les symétries et les invariances donnent : $\overrightarrow{E} = E(r)\overrightarrow{e}_r$. Le théorème de Gauss appliqué à une sphère de centre O, de rayon r conduit à :
  $\overrightarrow{E} = \frac{Q_1}{4\,\pi\,\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e}_r$.



  La méthode est alors générale : on fait circuler le champ d'une armature à l'autre.D'où :
  $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V \Rightarrow E_r = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} = -\frac{dV}{dr}$
  $\Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1}{4\,\pi\,\epsilon_0}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})Volt.$

- **Condensateur cylindrique :**

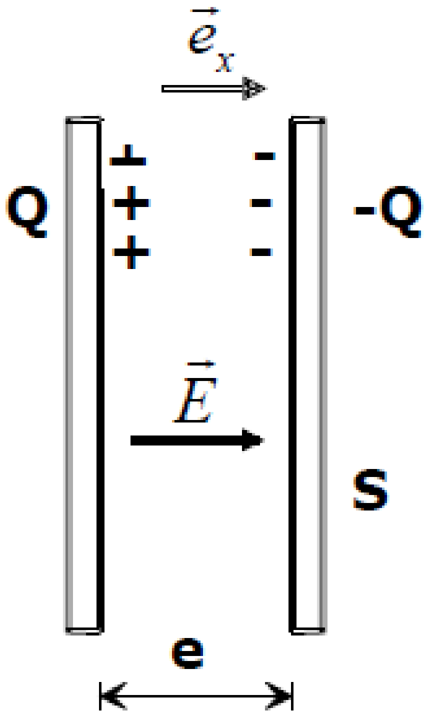
  On considère 2 cylindres illimités et coaxiaux. on cherche la capacité d'un tronçon de hauteur h. les symétries et les invariances nous donnent :
  $\overrightarrow{E} = E(r)\overrightarrow{e}_r \quad (r = distance$ à l'axe)



On applique le théoreme de Gauss à un cylindre de rayon r $(a \leq r \leq b)$ et de hauteur h, en remarquant que le flux à travers les surfaces de base sera nul $\overrightarrow{E} \perp \overrightarrow{dS}$ et que sur la surface latérale, $\overrightarrow{E}\overrightarrow{dS}$ sont colinéaires ;enfin, on servira du fait que le module de $\overrightarrow{E}$ est constant sur cette même surface latérale, ce qui conduit à :
$\oint_{cyl} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \int\int_{S.lat} E(r)dS = E(r)2\,\pi\,rh = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$
$\Rightarrow \overrightarrow{E} = \frac{Q_1}{2\,\pi\,\epsilon_0 hr}\overrightarrow{e}_r.$
Circulation entre les 2 armateures :
$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{2\,\pi\,\epsilon_0 h}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{Q_1}{2\,\pi\,\epsilon_0 h}\ln(\frac{b}{a})$
$\Rightarrow C = \frac{2\,\pi\,\epsilon_0 h}{\ln\frac{b}{a}}.$

- **Condensateur plan :**

On considère que : $e \ll \sqrt{S}$ En néglige les effets de bord, les invariances et les symétries permettent d'écrire :
$\overrightarrow{E} = E(x)\overrightarrow{e}_x$
$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V \Rightarrow E_x = -\frac{dV}{dx} = cte\,;$
on détermine la constante sachant que le champ à la surface des armateures vaut :
$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}.$
la circulation du champ permet d'obtenir :
$V_1 - V_2 = E.e = \frac{Q.e}{\epsilon_0 S} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 S}{e}.$



2.1.1.7 Association de condensateurs

a) Association en série

La charge Q se conserve : toutes les armatures de rang impair portent la même charge $+Q$, toutes les armatures de rang pair la même charge $-Q$: $Q = C_1V_{12} = C_2V_{23} = C_3V_{34}$

Les d.d.p. s'ajoutent pour donner V :

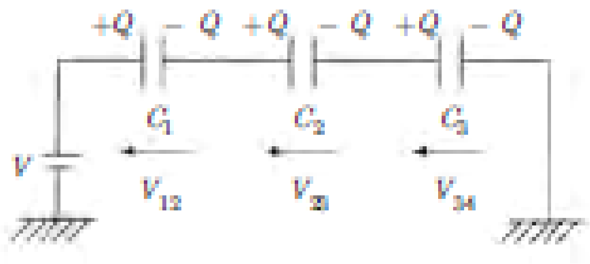
$V_{12} + V_{23} + V_{34} = V$

On en déduit :

$\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = V = \frac{Q}{C}$

La capacité équivalente est donc donnée par :

$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_3}$



b) Association en parallèle

La d.d.p. se conserve ; elle est commune à tous les condensateurs :

$Q_1 = C_1V$

$Q_2 = C_2V$

$Q_3 = C_3V$

Les charges se répartissent différemment, l'ensemble donnant la charge

$Q = CV$

On en déduit :

$C_1V + C_2V + C_3V$

D'où la capacité équivalente :

$C = C_1 + C_2 + C_3.$

2.1.2 énergie électrostatique

2.1.2.1 énergie potentielle d'une charge ponctuelle

Dans le cas de deux charges q et q' en interaction, l'énergie potentielle s'exprime par :
$E_p = \frac{K\,q\,q'}{r}$
où q et q' sont des valeurs algébriques et r est la distance séparant les deux charges.

Supposons maintenant que la charge q se trouve en un point M_0 dans le champ $\overrightarrow{E}_{(M_0)}$ créé par une distribution de charge quelconque. Pour exprimer son énergie potentielle,on peut calculer le travail que l'expérimentateur doit effectuer pour amener cette charge q de l'infini au point M_0.

La force que l'expérimentateur doit exercer en un point M quelconque est l'opposée de la force électrostatique, soit :
$\overrightarrow{F}_{exp} = -\overrightarrow{F}_e = -q\,\overrightarrow{E}(M).$
On a donc :
$E_p(M_0) = \int_{\infty}^{M_0} F_{exp}.\overrightarrow{dM} = -q\int_{\infty}^{M_0} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dM} = q\int_{\infty}^{M_0} dV = q\,V(M_0)$

en supposant le potentiel nul à l'infini.

2.1.2.2 énergie potentielle d'un système de charge

a) Cas d'une distribution de charges ponctuelles

Soit un système de charges q_1, q_2, q_3 placées respectivement aux points $A1$, $A2$, $A3$. l'énergie potentielle d'un tel système est donner par :
$E_p = \frac{1}{2}(q_1V_1 + q_2V_2 + q_3V_3)$.
soit, en généralisant au cas de n charges
$E_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_iV_i$

b) Cas d'une distribution continue de charges

On peut étendre la sommation discontinue précédente à une sommation intégrale. En désignant par dq la charge élémentaire et par V le potentiel auquel est soumis cette charge, on obtient :
$E_p = \frac{1}{2}\int_{espacecharg} V\,dq$

1. distribution linéaire $dq = \lambda\,dl$ $E_p = \frac{1}{2}\int_L \lambda\,V\,dl$
2. distribution superficielle $dq = \sigma\,ds$ $E_p = \frac{1}{2}\int_S \sigma\,V\ dS$
3. distribution volumique $dq = \rho\,dr$ $E_p = \frac{1}{2}\int_r \rho\ V\,dr$

2.1.2.3 énergie électrostatique emmagasinée dans les conducteurs chargés

a) énergie d'un conducteur unique

Pour un conducteur de capacité C portant la charge q,

L'énergie emmagasinée s'écrit donc, compte tenu que $q = CV$:
$E_p = \frac{1}{2}q\,V = \frac{1}{2}C\,V^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$.

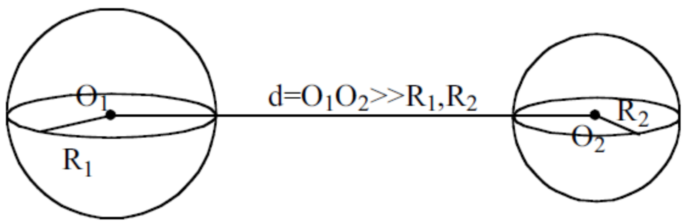
b) énergie d'un système à n conducteurs

On a alors :
$E_p = \frac{1}{2}q_1V_1 + \frac{1}{2}q_2V_2 + ... + \frac{1}{2}q_nV_n$.
$E_p = \frac{1}{2}\sum_i q_i\, V_i$
où q_i est la charge portée par le conducteur i et V_i son potentiel.

- **Exemple. énergie d'une sphère conductrice chargée :**
  Si la sphère est conductrice et en équilibre, elle ne peut être chargée qu'en surface. Soit Q la charge portée par cette sphère, et C sa capacité. Son énergie est donnée par : $E_p = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$
  Et comme $C = 4\,\pi\,\epsilon_0\,R$ où R est le rayon de la sphère, on a :
  $E_p = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\,\pi\,\epsilon_0 R}$

2.1.3 Exercices corrigés

- **Exercice 01** :
  Soient deux conducteurs sphériques, $(A1)$ et $(A2)$, de rayons R_1 et R_2 portant une charge Q_1 et Q_2, situés àune distance d l'un de l'autre. A quels potentiels se trouvent ces deux conducteurs ?



- **Solution** :
  En vertu du principe de superposition, le potentiel de $(A1)$, pris en son centre O est
  $V_1(O) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\int\int_{S_1}\frac{\sigma_1 dS_1}{P_1O} + \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\int\int_{S_2}\frac{\sigma_2 dS_2}{P_2O}$.
  ou le premier terme est dû aux charges Q_1 et le second à celles situées sur $(A2)$. Lorsque la distance d est beaucoup plus grande

que les rayons, on peut assimiler $P_2O \approx O'O = d$ pour tout point P_2 de la surface de $(A2)$ et l'on obtient.
$V_1(O) = \frac{Q_1}{4\,\pi\,\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\,\pi\,\epsilon_0 d} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_d}$.

où l'on reconnaît en C_1 la capacité d'une sphère isolée et en C_d un coefficient qui dépend à la fois de la géométrie des deux conducteurs et de leur distance. En faisant de même pour $(A2)$, on obtient
$V_2(O) = \frac{Q_2}{4\,\pi\,\epsilon_0 R_2} + \frac{Q_1}{4\,\pi\,\epsilon_0 d} = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_1}{C_d}$.

- **Exercice 02** :
  Une sphère métallique (S_1) de rayon $R_1 = 9cm$ porte la charge positive $Q1 = 10^{-8}$.
  1) Quels sont la capacité C_1 et le potentiel V_1 de (S_1) ?
  2) On relie (S_1) à une autre sphère métallique $(S2)$ de rayon $R_2 = 1cm$, par un fil conducteur long et fin. (S_2) est suffisamment éloigné de (S_1) pour négliger l'influence mutuelle de (S_1) et (S_2). Les charges superficielles sur le fil fin sont supposées négligeables.
  Calculer, à l'équilibre, les charges Q'_1 et Q'_2 portées par les deux sphères et la valeur du champ électrique au voisinage de chaque sphère.

- **Solution :**
  1) On a successivement :
  $C' = 4\,\pi\,\epsilon_0 R_1 = \frac{R_1}{K}$.et $V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = K\,\frac{Q_1}{R_1}$.
  A.N. :$C_1 = 10^{-11}F = 10pF$ et $V_1 = 10^3 V = 1KV$.

  2) La charge Q_1 va se répartir sur les deux sphères de façon qu'à l'équilibre le potentiel soit le même sur les deux sphères.
  On a donc :
  $V'_1 = V'_2 \Rightarrow \frac{Q'_1}{R_1} = \frac{Q'_2}{R_2} = \frac{Q'_1 + Q'_2}{R_1 + R_2}$.
  avec la condition de conservation de la charge :

$Q_1 = Q'_1 + Q'_2$.

Par conséquent :

$Q'_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2} Q_1$ et $Q'_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2} Q_1$

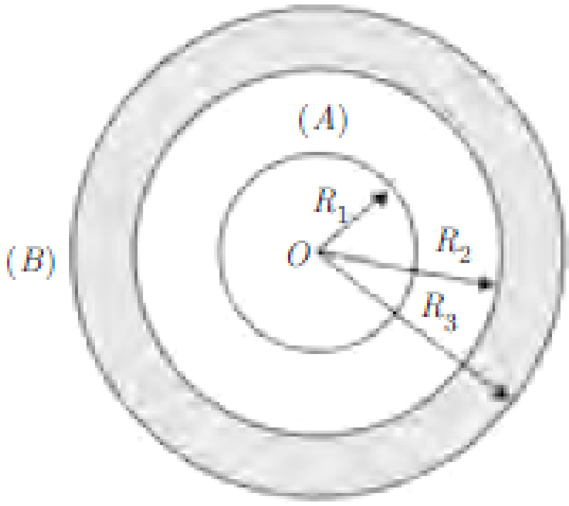
- **Exercice 03** :

  1) Quelle est la charge $Q1$ d'une sphère métallique (A) de rayon $R1 = 6cm$ lorsqu'elle est portée au potentiel $V0 = 45000$ volts ? Dans tout le problème on supposera cette sphère isolée.

  2) On entoure la sphère (A) par une autre sphère métallique creuse (B) concentrique, de rayons $R_2 = 12cm$ et $R_3 = 15cm$, initialement neutre et isolée. a) Quelles sont les charges portées par (B) ? b) En déduire les potentiels V_A et V_B des deux sphères. c) Déterminer et représenter graphiquement le potentiel $V(r)$ et la norme du champ $\overrightarrow{E}(r)$ en tout point M de l'espace, tel que $OM = r$. 3) La sphère (B) est reliée à la terre $(V_B = 0)$. Quel est le nouveau potentiel V'_A de (A) ?.

- **Solution**

  1)Capacité de la sphère A :



$C_1 = 4\,\pi\,\epsilon_0 R_1 = 6.67.10^{-12}F.$

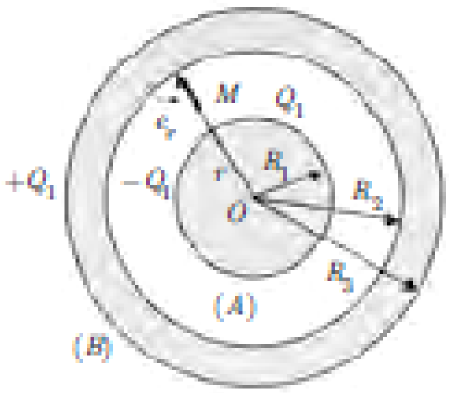
$Q_1 = C_1 V_0 = 0.3\mu C.$

2)

a)Par influence totale entre (A) et (B) la surface interne de (B) prend la charge $-Q_1$ et la surface externe la charge $+Q_1$.

b) On a :

$V_A = \frac{KQ_1}{R_1} - \frac{K\,Q_1}{R_2} + \frac{KQ_1}{R_3} = 40.5kV.$



c) $0 < r < R_1$:

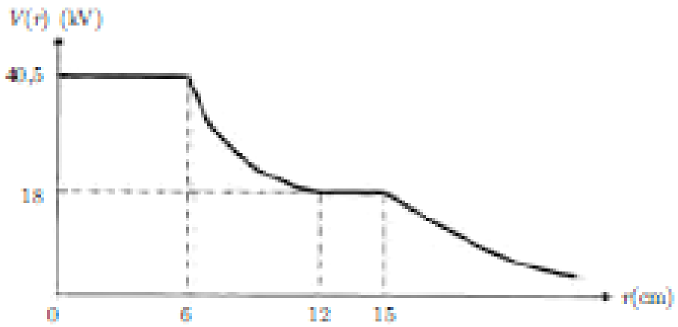
$V(r) = V_A = 40.5kV$

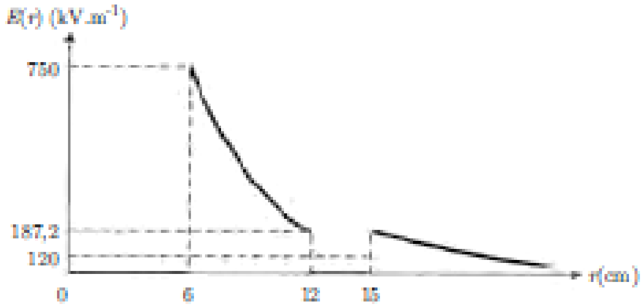
$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$.
$R_1 < r < R_2$:Le théorème de Gauss s'écrit :
$4\,\pi\, r^2 E = \frac{Q_1}{\epsilon_0} \Rightarrow \overrightarrow{E}_r = \frac{K\,Q_1}{r^2} e_r$.
$V(r) = \frac{K\,Q_1}{r} + C_1$
d'où
La continuité de V pour $r = R_1$ s'écrit :
$V(R_1) = V_A$ et $\frac{K\,Q_1}{R_1} + C = V_A \Rightarrow C_A - V_0 = -4.5kV$.
$V(r) = \frac{K\,Q_1}{r} - 4.5kV$.
$R_2 < r < R_3$: Le conducteur est équipotentiel,soit :
$V(r) = V(R_2) = V(R_3) = V_B = 18kV = \overrightarrow{E}(r) = \overrightarrow{0}$.
$r > R_3$: On obtient de même par le théoreme de Gauss :
$\overrightarrow{E}(r) = \frac{K\,Q_1}{r^2} \overrightarrow{e}_r$.
$V(r) = \frac{K\,Q_1}{r^2}$ avec $V(\infty) = 0$.
Discontinuuité de $\overrightarrow{E}$ au passage des surfaces des conducteurs :

- **Surface** $r = R_1$ **:**
  $E(r < R_1) = 0$
  $E(r = R_1) = \frac{K\,Q_1}{R_1^2} = 750kV.m^{-1}$
- **Surface** $r = R_2$ **:**
  $E(r < R_2) = \frac{K\,Q_1}{R_2^2} = \frac{K\,Q_1}{R_1^2}(\frac{R_1}{R_2})^2 = 187.5kV.m^{-1}$.
  $E(r = R_2) = 0$.
- **Surface** $r = R_3$ **:**
  $E(r < R_3) = 0$
  $E(r = R_3) = \frac{K\,Q_1}{R_3^2} = \frac{K\,Q_1}{R_1^2}(\frac{R_1}{R_3})^2 = 187.5kV.m^{-1}$

Représentations graphiques :

3) La sphère (B) étant reliée à la terre, elle perd sa charge extérieure $+Q_1$; le potentiel de la sphère A devient :
$V'_A = \frac{K\,Q_1}{R_1} - \frac{K\,Q_1}{R_2} = V_0(\frac{1-R_1}{R_2})$.
$V'_A = 22.5kV$.





- **Exercice 04** :

  Soit le groupement de condensateurs suivant :

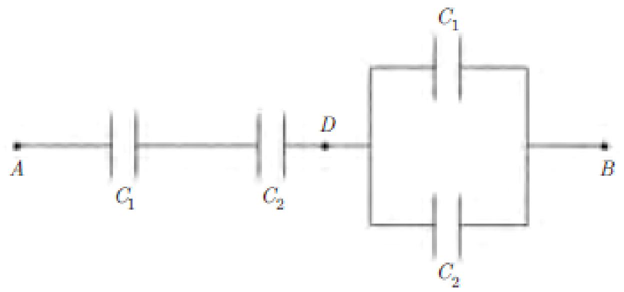
  1) La capacité C_1 étant donnée, quelle doit être la capacité C_2 pour qu'il y ait entre A et B une capacité équivalente C_e telle que $C_e = \frac{C_2}{2}$?

  A.N. : $C_1 = 8\mu F$.

  2) Une tension $u_{AB} = 500$ V est appliquée entre les points A et B. Calculer les tensions aux bornes de chaque condensateur ainsi que les charges qu'ils portent.

- **Solution :**

  1)La capacité C'_1 équivalente à l'association série (C_1, C_2) entre A et D est donnée par :

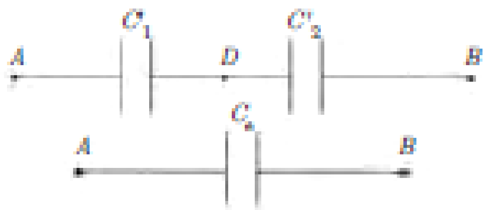


$\frac{1}{C'_1} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1+C_2}{C_1C_2}$.

La capacité C'_2 équivalente à l'association parallèle (C_1, C_2) entre D et B est égale à :

$C'_2 = C_1 + C_2$

On obtient donc le circuit équivalent :



avec $\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C'_1} + \frac{1}{C'_2} = \frac{C_1+C_2}{C_1C_2}$

$C_e = \frac{C_1C_2(C_1+C_2)}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}$.

C_1 étant donnée, C_2 doit vérifier la condition :$C_e = \frac{C_2}{2}$.

$\frac{1}{2} = \frac{C_1C_2(C_1+C_2)}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}$.

soit

$(C_1 + C_2)^2 + C_1C_2 = 2C_1(C_1 + C_2)$

Après simplication, on obtient l'équation du second degré :

$C_2^2 + C_1C_2 - C_1^2 = 0$.

qui a pour discriminant :

$\Delta = C_1^2 + 4C_1^2 = 5C_1^2$.

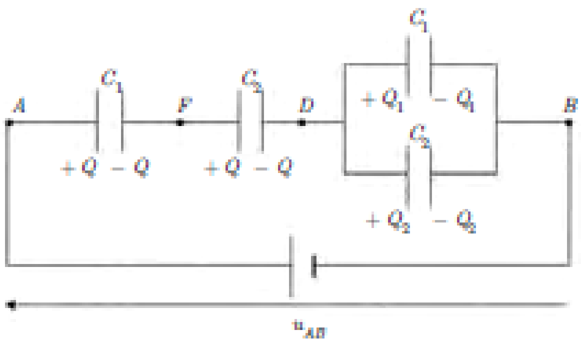
Seule la racine positive est acceptable.On trouve :

$C_2 = \frac{-C_1+C_1\sqrt{5}}{2}$

$C_2 = 4.94\,\mu\,F$

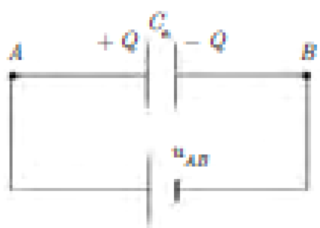
2) Soit $u_{AB} = V_A - V_B$ la tension appliquée entre les points A et B. On a alors la répartition des charges représentée sur la figure ci-dessous :

avec



$$\begin{cases} u_{AB} = & u_{AF} + u_{FD} + u_{DB} \,; \\ Q = & Q_1 + Q_2. \end{cases}$$

D'après la première question, dans le montage équivalent, on aura : avec $C_e = \frac{C_e}{2}$ donc la charge Q portée par C_1 et C_2 est égale à :



$Q = C_e u_{AB} = \frac{C_2}{2} u_{AB}$.

On obtient alors

$u_{AF} = \frac{Q}{C_1} = \frac{C_2}{2C_1} u_{AB}$. $u_{FD} = \frac{Q}{C_2} = \frac{u_{AB}}{2}$.

$u_{AD} = u_{AF} + u_{FD} = (1 + \frac{C_2}{C_1} \frac{u_{AB}}{2})$

$u_{DB} = u_{AB} - u_{AD} = (2 - (1 + \frac{C_2}{C_1}))\frac{u_{AB}}{2}$

Soit : $u_{DB} = (1 - \frac{C_2}{C_1})\frac{u_{AB}}{2} = \frac{C_1 - C_2}{2C_1} u_{AB}$

On en déduit :

$Q_1 = C_1 u_{DB} = \frac{C_1 - C_2}{2} u_{AB}$

$Q_2 = C_2 u_{DB} = \frac{C_2(C_1-C_2)}{2C_1} u_{AB}$

A.N. :

$u_{AF} = \frac{C_2}{2C_1} u_{AB} = 154.5\text{V} \quad u_{FD} = \frac{u_{AB}}{2} = 250\text{V}$

$u_{DB} = \frac{C_1-C_2}{2\,C_1} u_{AB} = 95.5\text{V}$

$Q = \frac{C_2}{2} u_{AB} = 1.23\,\mu\,C$

$Q_1 = \frac{C_1-C_2}{2} u_{AB} = 0.76\,\mu\,C$

$Q_2 = \frac{C_2(C_1-C_2)}{2\,C_1} u_{AB} = 0.47\,\mu\,C$

3
Electrocinétique

3.1 Electrocinétique

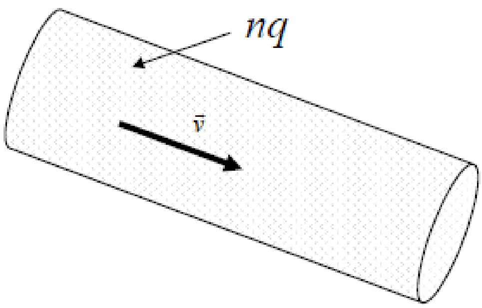
Effets des charges électriques qui sont en mouvement, sans prendre en considération les champs magnétiques créés.

3.1.1 Le courant éléctrique

Nous avons vu qu'il était possible d'électriser un matériau conducteur, par exemple par frottements. Si l'on met ensuite ce conducteur en contact avec un autre, le deuxième devient à son tour électrisé, c'est à dire qu'il a acquis une certaine charge Q. Cela signifie que lors du contact des charges se sont déplacées de l'un vers l'autre. On définit alors le courant par
$I = \frac{dQ}{dt}$

3.1.1.1 La densité de courant électrique

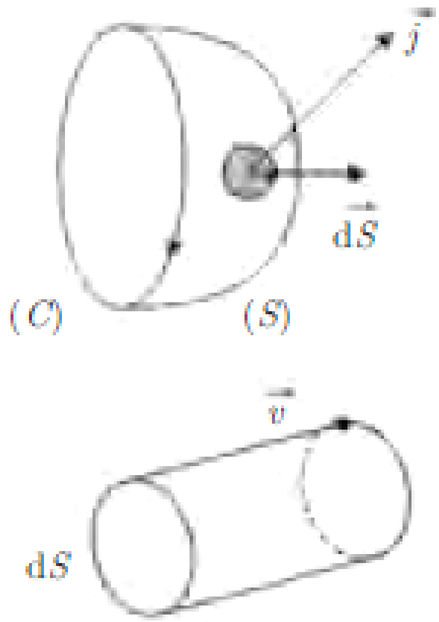
On peut se limiter, pour le moment, a un seul type de porteurs, les electrons par exemple. Sous l'action d'un champ éléctrique $\overrightarrow{E}$, chaque éelectron acquiert une vitesse. En designant par $\overrightarrow{v}$, la vitesse moyenne de l'ensemble desélectrons (on dit aussi vitesse d'entrainement ou de derive), et par ρ la charge volumique du milieu, on definit le vecteur de courant en tout point du milieu par :
$\overrightarrow{j} = \rho\overrightarrow{v}$
ou encore, puisque $\rho = -ne$ ou n est le nombre d'électrons par unite de volume et e la valeur absolue de la charge de l'électron :



$\overrightarrow{j} = -n\,e\overrightarrow{v}$

3.1.1.2 L'intensité du courant électrique

Soit Φ le flux de $\overrightarrow{j}$ à travers une surface (S) orientée (s'appuyant sur un contour (C) orienté).
On a : $\Phi = \int_S \overrightarrow{j}\,\overrightarrow{dS}$
Le flux élémentaire
$\overrightarrow{j}\,\overrightarrow{dS} = \rho\,\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{dS}$



représente la charge contenue dans le volume du cylindre de longueur v s'appuyant sur dS ; c'est aussi la charge qui traverse dS pendant l'unité de temps. On peut donc écrire :
$\int_{(S)} \overrightarrow{j}\,\overrightarrow{dS} = \frac{dQ}{dt} = I$
définissant ainsi l'intensité du courant qui traverse (S), laquelle s'exprime en ampère (A) : $1A = 1Cs^{-1}$.

3.1.1.3 Différentes formes de conducteurs

a Conducteurs filiformes Si la section S d'un conducteur est constante et très petite devant sa longueur, on admet que le vecteur densité de courant est uniforme :

$j = \frac{I}{S}$ s'exprime en $A\ m^{-2}$.

b Conducteurs massifs cylindriques On a :

$I = \int_{(S)} \overrightarrow{j}.\overrightarrow{dS}$

Si $\overrightarrow{j}$ est uniforme, on a encore :

$j = \frac{I}{S}$ s'exprime en $A\ m^{-2}$

c Nappe de courant C'est le cas d'un ruban mince ou d'une couche mince. On définit alors une densité surfacique de courant (exprimée en $A\ m^{-1}$.) donnée par :

$\overrightarrow{j_s} = \sigma \overrightarrow{v}$

ou σ est la charge libre surfacique. En introduisant la ligne AB, perpendiculaire en tout point à $\overrightarrow{j_s}$ l'intensite du courant le long de la nappe est :

$I = \int_{AB} \overrightarrow{j_s}.\overrightarrow{N}.dl = \int_{AB} j_s dl$

Si $\overrightarrow{j_s}$ est uniforme, on a :

$j_s = \frac{I}{AB}$

3.1.1.4 Ordre de grandeur

La vitesse de dérive des électrons due au champ appliqué $E\rightarrow$ est très inférieure àla vitesse des électrons due à l'agitation thermique :

- Vitesse d'agitation thermique

Dans ce mouvement tout à fait aléatoire, l'énergie moyenne d'un

électron est de l'ordre de quelques eV. Si on identifie une énergie de $1eV$ à l'énergie cinétique de l'électron, on trouve :
$\varepsilon = \frac{1}{2}mv_0^2 \;\Rightarrow\; v_0 = \sqrt{\frac{2\,\varepsilon}{m}}$
$v_0 = \sqrt{\frac{2\times 1{,}6\ 10^{-19}}{9{,}1\ 10^{-31}}} = 0,6\ 10^6 m\,s^{-1}$
À cette vitesse ne correspond aucun courant électrique : l'agitation thermique étant désordonnée, la vitesse moyenne vectorielle correspondante est nulle.

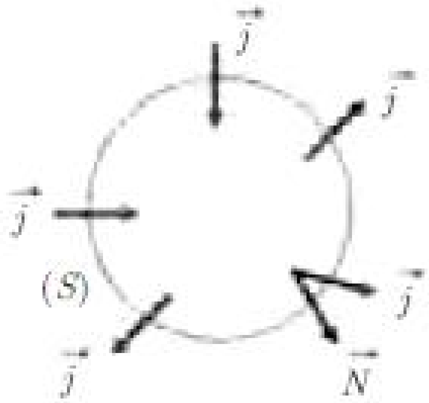
- Vitesse de dérive

Soit un fil de cuivre parcouru par un courant de densité $10A/mm^2$.
Pour le cuivre, on a :
$$\begin{cases} masse\ atomique & M = 63.6g\,; \\ masse\ volumique & \mu = 8,8\,10^3\,Kg\,m^{-3}. \end{cases}$$

En admettant que chaque atome libère en moyenne un électron libre, on peut trouver le nombre n d'électrons libres par m^3, soit :
$n = \frac{\mu\,N}{M}$
où N est le nombre d'[Avogadro.
On trouve
$n = \frac{8{,}8\ 10^3 \times 6.02\ 10^{23}}{63{,}6\ 10^{-3}} = 0,83\ 10^{10} C\,m^{-3}$
On en déduit :
$|\rho| = n\,e\ = 0,83 \times\ 10^{29} \times\ 1,6\,10^{-19} = 1,33\,10^{10} C\,m^{-3}.$
$v = \frac{j}{\rho} = \frac{10\ 10^6}{1{,}33\ 10^{10}} = 7,5\ 10^{-4} m\,s^{-1}.$
La vitesse de dérive des électrons est très faible devant la vitesse d'agitation thermique.

3.1.2 équation de continuité

Soit S une surface fermée entourant un volume τ d'un conducteur. Supposons que la charge volumique ρ soit une fonction de temps. Pendant un intervalle de temps dt, la variation de charge qui en resulte dans un volume élémentaire $d\,\tau$, s'écrit :



$dq = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\, d\tau$

d'où la variation de charge pour le volume τ :

$q = \int_{(\tau)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\, d\tau$

Par ailleurs, l'intensité du courant traversant un élément de surface $\overrightarrow{dS}$ est :

$dI = \overrightarrow{j}\, \overrightarrow{dS} = \overrightarrow{j}\, \overrightarrow{N}\, \overrightarrow{dS}$

où $\overrightarrow{N}$ est le vecteur unitaire de la normale sortante. La charge totale transférée pendant le même intervalle de temps est donc :

$q' = dt\ \int_{(S)} \overrightarrow{j}\, \overrightarrow{N}\, dS$

ce qui s'écrit, d'après le théorème d'Ostrograsky :

$q' = dt \int_{(\tau)} div\, \overrightarrow{j}\ d\tau$

La loi de conservation de la charge pour un système isolé entraîne que :

$q + q' = 0$

Soit $\int_{(\tau)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau\ + \int_{(\tau)} div\, \overrightarrow{j}\ d\tau = 0$

Cela étant vrai pour tout volume (τ), on en déduit que :

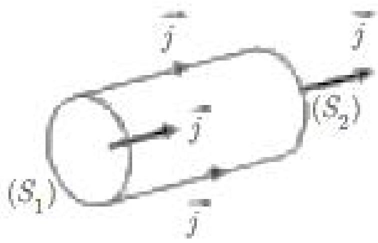
$div\, \overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Cette équation constitue l'équation de continuité, qui régit tout phénomène de transfert de charges. Elle traduit l'idée que dans un circuit, il ne peut y avoir d'accumulation de charges, ni de courant : c'est la formulation locale de la loi de conservation de la charge électrique.

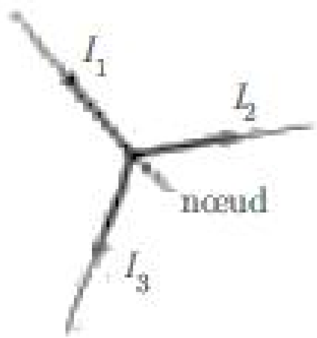
- **Cas particulier d'un régime stationnaire**

Un régime est dit stationnaire (ou permanent) si la distribution des charges et des courants est indépendante du temps. Par conséquent :
$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
Autrement dit, la charge contenue dans le volume $d\tau$ est renouvelée par le passage du courant, sans aucune variation de la charge volumique. C'est le cas du courant continu.
L'équation de continuité se réduit alors à :
$div \overrightarrow{j} = 0$
Il en résulte que : $\int_S \overrightarrow{j} \overrightarrow{N} \, dS = 0$
Cette équation exprime que le flux de j est conservatif. En d'autres termes :

- l'intensité du courant se conserve à travers un tube de courant.
  (S_1) et (S_2) étant deux sections différentes du tube, on a :
  $I(S_1) = I(S_2)$



- À un noeud de circuit, la somme des courants algébriques (par exemple positifs s'ils arrivent, négatifs s'ils partent) est nulle :
  $\sum_K I_K = 0 \ (loidesnoeuds)$



3.1.3 Conductivité éléctrique :Loi D'ohm locale

Il s'agit d'exprimer la densité de courant $\overrightarrow{j}$ dans un conducteur, en fonction du champ appliqué $\overrightarrow{E}$,en partant tout simplement du principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule de charge q et de masse m.
On suppose la variation de $\overrightarrow{E}$ au cours du temps nulle ou faible en chaque point du conducteur (régime stationnaire ou quasi stationnaire).
$m\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = q\overrightarrow{E} \Rightarrow \overrightarrow{V} = \frac{q}{m}\overrightarrow{E}t + \overrightarrow{V}_0$
Visiblement, cette vitesse (et par conséquent $\overrightarrow{j}$) tend vers l'infini au cours du temps, ce qui ne peut être satisfaisant. La solution consiste à envisager les **chocs** multiples que subit la charge q dans son mouvement, notamment sur les atomes du réseau cristallin.
Tout d'abord, la vitesse initiale $\overrightarrow{V}_0$ étant aleatoire, sa valeur moyenne $\overrightarrow{v}_0$ est nulle. En désignant par τ le temps moyen separant deux chocs successifs, la vitesse de derive s'écrit :
$\overrightarrow{v} = \langle\overrightarrow{v}\rangle = \frac{q\overrightarrow{E}}{m}\tau$
On en déduit :
$\overrightarrow{j} = \rho\overrightarrow{v} = \frac{nq^2\tau}{m}\overrightarrow{E}$.
puisque $\rho = nq$ où n est le nombre de charges par unité de volume.
La relation cherchée s'écrit :

$\overrightarrow{j} = \sigma \overrightarrow{E}$

où : $\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}$

σ est la conductivité électrique du matériau, elle s'exprime en siemens par mètre $(s\Delta m^1)$.

La loi $\overrightarrow{j} = \sigma \overrightarrow{E}$ constitue la loi d'Ohm dans sa forme locale, valable en tout point du conducteur.

3.1.3.1 La mobilité des porteurs

La mobilité μ est définit par la relation

$\overrightarrow{v} = \mu \overrightarrow{E}$

et comme $\overrightarrow{v} = q\frac{\tau}{m}\overrightarrow{E}$

on a : $\mu = \frac{q\tau}{m} = \frac{\sigma}{nq}$

La mobilité définie ainsi est une grandeur algébrique, qui a le méme signe de la charge q. Elle s'exprime en $m^2\Delta V^{-1}\Delta s^{-1}$

3.1.4 Résistance d'un conducteur : loi d'Ohm macroscopique

Un conducteur ohmique est un dipôle dont la caractéristique est une droite passant par l'origine. Il répond donc à la loi d'Ohm qui s'écrit :

$U = RI$

Avec U, la tension en Volt(V), I, l'intensité en ampère (A) et R la résistance du conducteur ohmique exprimée en Ohm Ω

3.1.5 Effet Joule

On appelle effet Joule la dissipation de l'énergie électrique reçue par énergie thermique dans un dipôle.

Le conducteur ohmique dissipe sous forme de chaleur la puissance :

$P = RI^2$

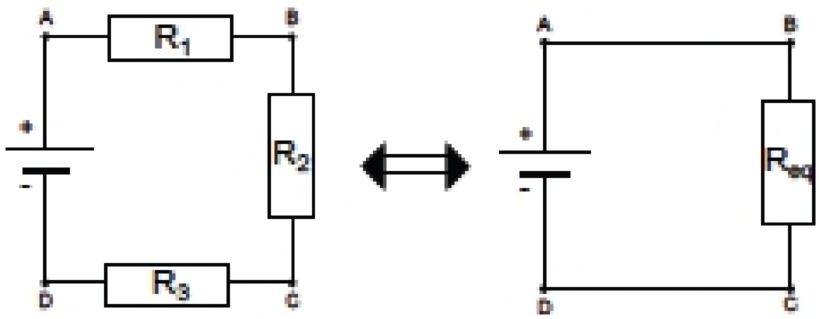
3.1.6 Association de conducteurs ohmiques

3.1.6.1 Association en série : montage diviseur de tension

Lorsque l'on associe plusieurs conducteurs ohmiques en série, leurs résistances s'ajoutent : La résistance globale est appelée "résistance équivalente"

- Pour la situation ci-contre, on a :

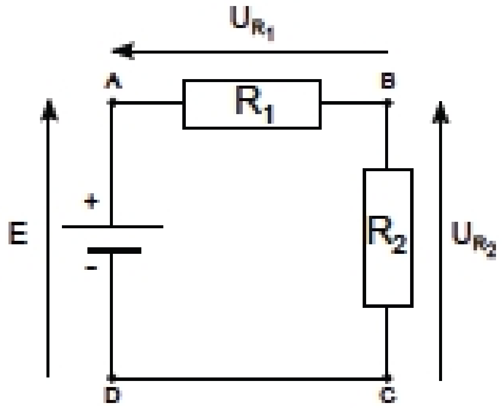
$$Req = R_1 + R_2 + R_3$$



Dans cette association en série de conducteurs, on peut utiliser la propriété "diviseur de tension". Elle consiste à exprimer la tension aux bornes d'un conducteur en fonction de sa résistance, de la résistance équivalente et de la tension aux bornes de l'ensemble.

$$U_{R_1} = \frac{R_1}{R_1+R_2}E = \frac{R_1}{R_{eq}}E$$

$$U_{R_2} = \frac{R_2}{R_1+R_2}E = \frac{R_2}{R_{eq}}E$$



U_{R_1} et U_{R_2} ne sont qu'une fraction de la tension E, le montage s'appelle un diviseur de tension.

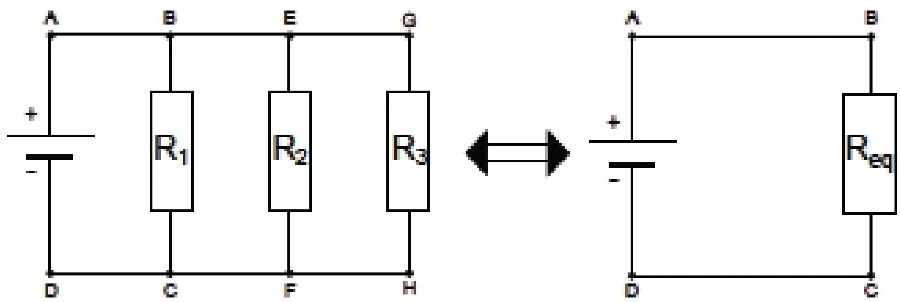
3.1.6.2 Association en en parallèle : montage diviseur de courant

Lorsque l'on associe plusieurs conducteurs ohmiques en parallèle, leurs conductances définies par $G = \frac{1}{R}$ s'ajoutent : Dans cette configuration en parallèle, on peut utiliser le diviseur de courant :

- Pour la situation ci-contre, on a :

$$\frac{1}{Req} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + G_3$$



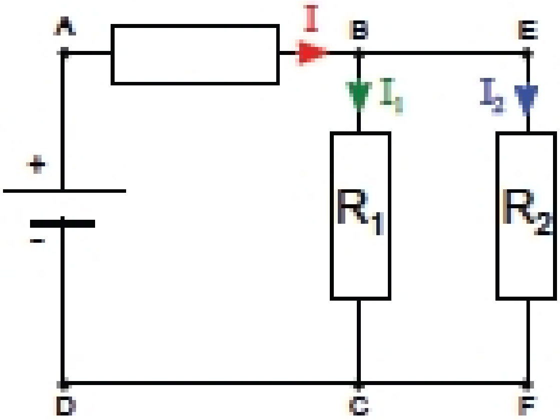
- Pour la situation ci-contre, on a :

$$I_1 = \frac{G_1}{G_1+G_2} I = \frac{G_1}{G_{eq}} I = \frac{R_2}{R_1+R_2} I$$

En effet, pour deux résistances en parallèle,on a

$R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$, donc :

$I_1 = \frac{G_1}{G_{eq}} I = \frac{1}{R_1} \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} = \frac{R_2}{R_1+R_2} I$

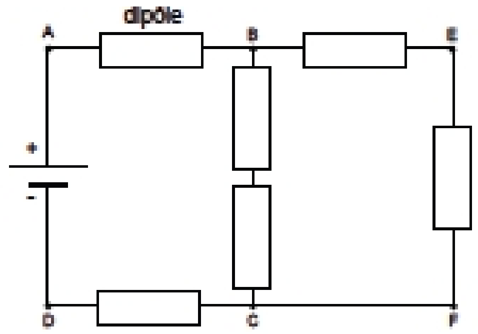


I_1 n'est qu'une fraction de l'intensité I, le montage s'appelle un diviseur de courant.

3.1.7 Quelques notions relatives au circuit électrique

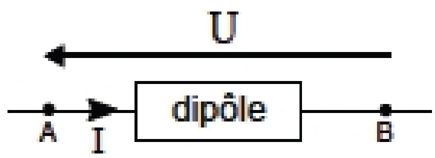
- Un circuit électrique est constitué d'un ensemble de dispositifs appelés dipôles, reliés entre eux par un fil conducteur et formant ainsi une structure fermée.
- Une branche est constituée d'une association en série d'un ou plusieurs dipôles (fils, résistance, bobine, ...) : dans le circuit ci-contre, AB est une branche, BC également,..
- Un noeud est un point du circuit où se retrouvent plusieurs branches : le noeud B réunit les branches AB, BC et BE.

- Une maille est une série de branches qui part d'un noeud pour revenir au même noeud : on définit la maille ABCD ou BEFC ou AEFD

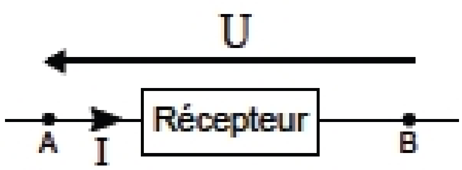


3.1.8 Puissance reçue, conventions générateur et récepteur

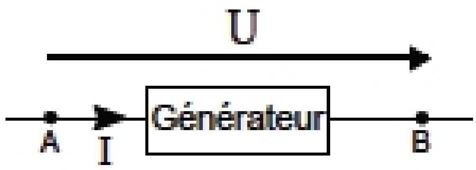
Soit un dipôle dans la configuration ci-contre. La puissance reçue par ce dipôle est définie par :
$P = U\, I$
Cette puissance est positive dans le cas d'un dipôle récepteur.



Ainsi, la configuration présentée ci-contre est appelée convention récepteur : les sens de I et U sont opposés.



Alors, si la puissance reçue est négative, c'est que le dipôle fournit de l'énergie. C'est un générateur et on utilisera la convention générateur : I et U sont dans le même sens.



3.1.9 Caractéristique d'un dipôle

Lorsque l'on souhaite tracer la caractéristique d'un dipôle, on s'intéresse à la fonction $u = f(i)$ (caractéristique tension-courant). Si cette fonction est une droite, on parle de dipôle linéaire.

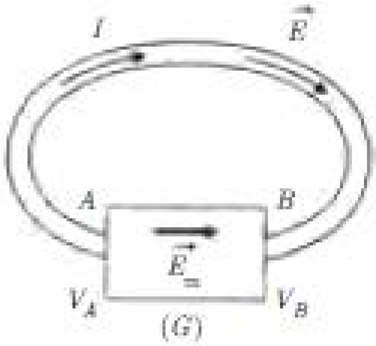
3.1.10 Dipôle actif ou passif

- Un dipôle passif est un dipôle qui convertit toute l'énergie électrique qu'il reçoit en énergie thermique (conducteur ohmique, diode,....). Sa caractéristique passera forcément par l'origine.
- Un dipôle actif fournit à l'extérieur de l'énergie thermique et une autre forme d'énergie :
  - Un générateur fournira de l'énergie thermique et de l'énergie électrique ;
  - Un récepteur comme un moteur fournit de l'énergie thermique et de l'énergie mécanique à partir d'énergie électrique.

La caractéristique de ces dipôles ne passe pas par l'origine.

3.1.11 Rôle du génrateur :Force électromotrice

Soit un générateur (G), appliquant une d.d.p. $VA-VB > 0$ aux bornes d'un conducteur AB. En régime stationnaire ou quasi stationnaire, on a $div\,\vec{j} = 0$ en tous les points du circuit, y compris dans le générateur, et les lignes de champ sont des courbes fermées.



Si le conducteur était fermé sur lui-même, on aurait :
$\oint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{0}$ puisque $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$
Soit :
$\oint \frac{\overrightarrow{j}}{\sigma}.\overrightarrow{dl} = 0$ ce qui entrainerait $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$ Par conséquent, si le générateur établit un champ $\overrightarrow{E}$ entre A et B dans le conducteur, c'est qu'il est lui-même le siège d'un champ $\overrightarrow{E}_m$ dit champ électromoteur (non électrostatique), qui transporte les charges (supposées positives pour simplifier) de V_B $\grave{a}$ $V_A > V_B$, leur faisant ainsi remonter le potentiel, alors que le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ les transporte de V_A et V_B dans le conducteur. C'est la circulation de ce champ $\overrightarrow{E}_m$ dans le générateur qui assure la d.d.p.$V_A - V_B$ Cette circulation est appelée force électromotrice e du générateur (f..m.), bien qu'elle ait les dimensions d'un potentiel. On a :

$$e = \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{E}_m.\overrightarrow{dl} = V_A - V_B$$

Le champ $\overrightarrow{E}_m$ peut avoir des origines chimiques (piles et accumulateurs) ou magnétiques (f.é.m. induite).

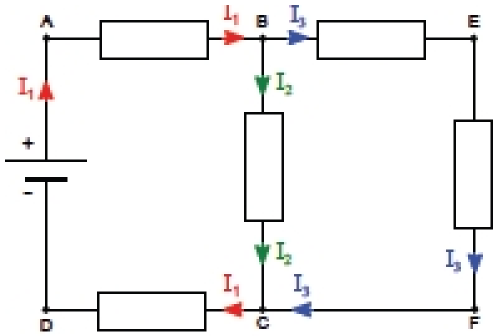
- Tronçon de circuit comportant un générateur
  $V_A - V_B = r\,I - e$

- Cas d'un récepteur
  Alors que pour un générateur, le courant sort du pôle positif et rentre par le pôle négatif, pour un récepteur, le courant suit le chemin inverse : il sort par le pôle négatif. Dans ce cas, la f.é.m. qui est toujours positive, est appelée force contre-électromotrice.
  Dans un circuit complexe, comprenant des générateurs et des récepteurs, il peut arriver que le courant d'un générateur sorte par le pôle négatif. Dans ce cas, ce générateur se comporte comme un récepteur : il se charge.

- Tronçon de circuit comportant un générateur
  $V_A - V_B = r\,I + e'$

3.1.12 Les lois de Kirchhoff

- Première loi
  En un noeud d'un circuit, la somme algébrique des courants est nulle.
  $\sum_K I_k = 0$ (loi des noeuds)



- Deuxième loi
  Pour une maille d'un circuit, la somme algébrique des f.é.m. est égale à la somme algébrique des produits RI.
  $\sum_k e_k - \sum_k R_k I_k = 0$ (loi des mailles)

- Convention adoptée :on choisit un sens positif de courant a priori. Les courants qui vont dans ce sens sont pris positifs, les autres sont pris négatifs. Les f.é.m. sont considérées comme positives lorsque le courant sort par la borne $(+)$ et négatives dans le cas contraire.

3.1.13 Théorémes de Thévenin et de Norton

3.1.13.1 Théorème de Thévenin

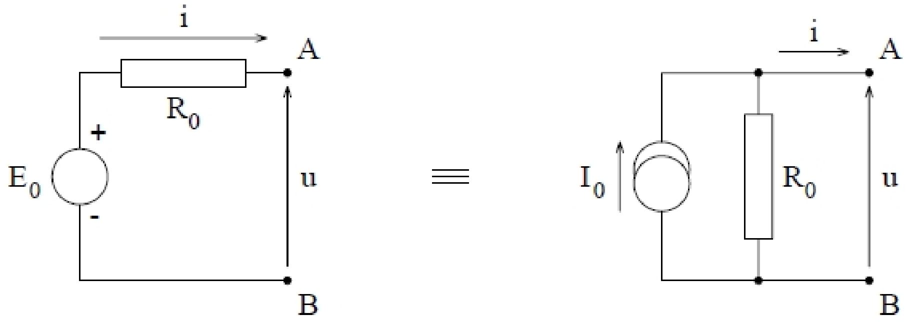
Un réseau linéaire, ne comprenant que des sources indépendantes de tension, de courant et des résistances, pris entre deux bornes se comporte comme un générateur de tension E_0 en série avec une résistance R_0.La f.e.m.E_0 du générateur équivalent est égale à la tension existant entre les deux bornes considérées lorsque le réseau est en circuit ouvert.La résistance R_0 est celle du circuit vu des deux bornes lorsque toutes les sources sont éteintes.

3.1.13.2 Théorème de Norton

De même on peut remplacer tout réseau linéaire, ne comportant pas de sources commandées, pris entre deux de ses bornes par une source de courant I_0 en parallèle avec une résistance R_0. L'intensité I_0 est égale au courant de court-circuit, les deux bornes étant reliées par un conducteur parfait. La résistance R_0 est celle du circuit vu des deux bornes lorsque toutes les sources sont éteintes.

3.1.13.3 Equivalence entre représentations de Thévenin et Norton

L'application respective des théorèmes de Thévenin et Norton permet de montrer l'équivalence de deux circuits suivants :



avec :$E_0 = R_0 I_0$

3.1.14 Exercices corrigés

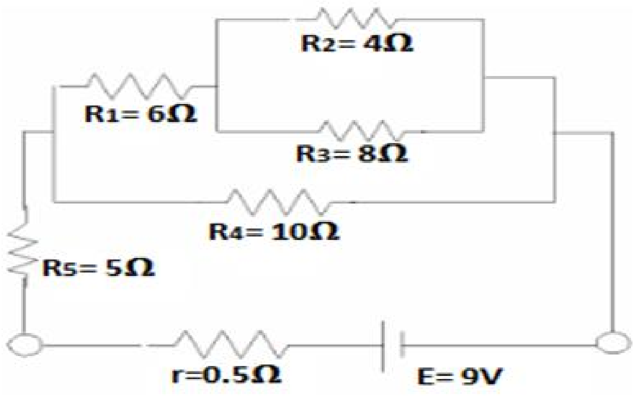
- **Exercice 01** :
  Soit un fil de cuivre de diamètre ($d = 1.2mm$) parcouru par une quantité de charge ($\Delta Q = 1800C$) pendant une heure.

  1. Calculer l'intensité du courant électrique $j(r)$.
  2. Déduire la vitesse de déplacement des électrons à l'intérieur du cuivre (sachant que le nombre d'électrons libres par m^3 et égal à $n = 1.2 * 10^{29} e/m^3$.
  3. Calculer la mobilité électronique (sachant que la résistivité électrique $\rho = 1.6 * 10^{-8} \Omega.m$ tel que $v = \mu.E$)
  4. Déduire l'intensité du champ électrique.

- **Solution** :

1. L'ntensité du courant électrique $j(r)$
   On a $r = \frac{d}{2}$ (Le Rayon)
   $s = \pi r^2$ (La Section)
   $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$
2. Ia vitesse de déplacement desélectrons
   $i = nqv \Rightarrow v = \frac{j}{nq}$
3. La mobilité électronique
   $\mu = \frac{1}{nq\rho}$
4. Le champ électrique
   $v = \mu E \Rightarrow E = \frac{v}{\mu}$

- **Exercice 02** :
  La figure suivante montre un circuit mixte composé de résistances branchées à une source de tension U
  Calculer :



1. La valeur de la résistance équivalente.
2. Le courant fourni par la source.
3. Le courant et la chute de tension dans chacune des résistances.

4. La puissance de chacune des résistances.

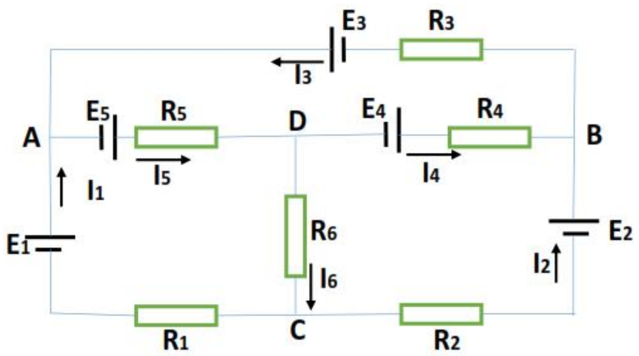
- **Solution** :

1. La résistance équivalente
   $frac1R_x = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R_x = 2.7\Omega$
   $R_y = R_1 + R_x = 8.7\Omega$
   $\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R_y} + \frac{1}{R_4} \Rightarrow R_z = 4.8\Omega$
   $R_{eq} = R_z + R_5 + r = 10.3\Omega$
2. Le courant fourni par la source
   $I = \frac{E}{R_{eq}} = 0.87A$
3. Le courant et la tension dans chacune des résistances
   Les courants
   $I = \frac{E}{R_{eq}} = 0.87A$
   $I = I_1 + I_2$
   On
   $V_y = V_4$ (R_y et R_4 En parallèle)
   $V_y = V_4 \Rightarrow R_yI = R_4I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{R_y}{R_4}I_1$
   $I = I_1 + \frac{R_4}{R_4}I_1 \Rightarrow I_1 = 0.46A$
   $I_2 = I - I_1 \Rightarrow I_2 = 0.41A$
   $I_1 = I_3 + I_4$
   On
   $V_2 = V_3$ (R_2 et R_3 En paralléle)
   $V_2 = V_3 \Rightarrow R_2I_3 = R_3I_4 \Rightarrow I_4 = \frac{R_2}{R_3}I_3$
   $I_1 = I_3(1 + \frac{R_2}{R_3}) \Rightarrow I_3 = 0.306A$
   $I_4 = I_1 - I_3 \Rightarrow I_4 = 0.154A.$
   Les tensions
   Résistance r :$V_r = rl = 0.437V$
   Résistance R_5 :$V_5 = R_5l = 4.35V$
   RésistanceR_1 :$V_1 = R_1l = 2.7V$

Résistance R_4 :$V_4 = R_4 l = 4.1V$
Résistance R_2 :$V_2 = R_2 l = 1.22V$
Résistance R_3 :$V_3 = R_3 l = 1.23V$

4. La puissance de chacune des résistances
$P = RI^2 = VI$

- **Exercice 03** :
A partir des lois de Kirchhoff, calculer le courant électrique pour chaque branche. A.N : $R1 = R2 = R3 = R5 = 2\Omega$, $R4 = 4\Omega$, $R6 = 10\Omega$, $E1 = 6V$, $E2 = 30V$, $E3 = E4 = 10V$, $E5 = 36V$



- **Solution** :
Le courant électrique pour chaque branche a partir des de Kirchoff
$1^{er} loi$ **:**
Noeud A

$$\mathbf{I_5 = I_1 + I_3} \tag{3.1}$$

Noeud B

$$\mathbf{I_3 = I_4 + I_2 \Rightarrow I_4 = I_3 - I_2} \tag{3.2}$$

Noeud C

$$\mathbf{I_6 = I_1 + I_2} \tag{3.3}$$

2^{emme}**loi**

Maille 1

$$\mathbf{R_1I_1 + R_5I_5 + R_6I_6 = E_1 + E_5}, \tag{3.4}$$

Maille 2

$$\mathbf{-R_2I_2 - R_6I_6 + R_4I_4 = E_4 - E_2}, \tag{3.5}$$

Maille 3

$$\mathbf{-R_3I_3 - R_4I_4 - R_5I_5 = -E_3 - E_4 - E_5}, \tag{3.6}$$

En remplace les Eqs (3.1) ,(3.2) et (3.3) dans les Eqs. (3.4) ,(3.5) et (3.6)
$(1) \Rightarrow 14I_1 + 4I_2 + 2I_3 = 42$
$(2) \Rightarrow -10I_1 - 16I_2 + 4I_3 = -20$
$(3) \Rightarrow -2I_1 + 4I_2 - 8I_3 = -56$
$(4) \Rightarrow (R_1 + R_5 + R_6)I_1 + R_6I_2 + R_5I_3 = E_1 + E_5$
$(5) \Rightarrow -R_6I_1 - (R_2 + R_6 + R_4)I_2 + R_4I_3 = E_4 - E_2$
$(6) \Rightarrow -R_5I_1 + R_4I_2 - (R_3 + R_4 + R_5)I_3 = -E_3 - E_4 - E_5$ On calculant le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 14 & 10 & 2 \\ -10 & -16 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \end{vmatrix}, \tag{3.7}$$

Calcule des courants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 42 & 10 & 2 \\ -20 & -16 & 4 \\ -56 & 4 & -8 \end{vmatrix}, \tag{3.8}$$

$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -2A$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 14 & 42 & 2 \\ -10 & -20 & 4 \\ -2 & -56 & -8 \end{vmatrix}, \tag{3.9}$$

$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 5A$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 14 & 4 & 42 \\ -10 & -16 & -20 \\ -2 & 4 & -56 \end{vmatrix}, \tag{3.10}$$

$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 10A$
$I_5 = I_3 + I_1 = 8A$
$I_4 = I_3 - I_2 = 5A$
$I_6 = I_1 + I_2 = 3A$

4

Magnétostatique

4.1 Magnétostatique

La magnétostatique est l'étude des champs magnétiques stationnaires. C'est le deuxième phénomène de base de lélectromagnétisme. Autrefois, on pensait que l'électricité et le magnétisme étaient deux phénomènes indépendants. Cependant, on sait maintenant qu'ils sont reliés. On peut résumer les cas oùsont produits les champs électriques et magnétiques :

- **Charge stationnaire :**une charge stationnaire ne produit qu'un champ électrique. Donc, $\overrightarrow{u} = 0, \overrightarrow{E} \neq 0$ et $\overrightarrow{B} = 0$
- **Charge en mouvement** :Une charge en mouvement produit un champ éléctrique , un champ magnétique.Dans ce cas-ci, $\overrightarrow{u} \neq 0, \overrightarrow{E} \neq 0$, $\overrightarrow{B} \neq 0$. La vitesse de mouvement est constante.
- **Charge en accélération** :Une charge en mouvement produit un champ éléctrique, un champ magnétique, et un champ électromagnétique radiant.Dans ce cas ci,$\overrightarrow{u} \neq 0, \overrightarrow{E} \neq 0$, $\overrightarrow{B} \neq 0$.

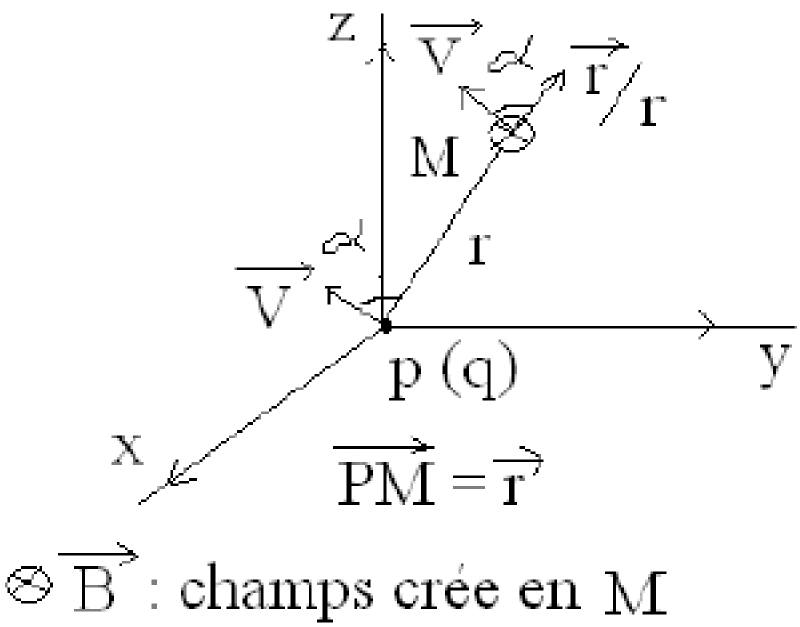
4.1.1 Champ magnétique crée par une charge électrique ponctuelle en mouvement

L'expérience montre qu'une charge q animée d'une vitesse $\overrightarrow{V}$ crée en tout point $M(r)$ de l'espace un champ magnétique :

$$\overrightarrow{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{r}}{r^3}$$

- où $\mu_0 = 1.2610^{-6} H/m$
  $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} (S.I)$
- Le module de $\overrightarrow{B}$ est $\|\overrightarrow{B}\| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qV \sin\alpha}{r^2}$ avec $\alpha = (\overrightarrow{V}, \overrightarrow{r})$

- L'unité de B en (S.I) est **Tesla (T)**.Dans le système CGS c'est le Gauss(G) $1G = 10^{-4}T$
- son sens est tel que $(\overrightarrow{B}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{r})$ forment un trièdre direct :



4.1.2 Action d'un champs magnétique sur une charge en mouvement :

4.1.2.1 Loi de laplace

Une charge ponctuelle q en mouvement avec une vitesse $\overrightarrow{V}$ dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ est soumise entre autre $\grave{a}$ une force magnétique :

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B}$$

4.1.2.2 Force électromagnétique entre deux charges ponctuelles en mouvement (Force de Lorentz)

Une charge électrique q_1 en mouvement crée en tout point de l'espace un champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}_1, \overrightarrow{B}_1)$:

$$\overrightarrow{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$$

$$\overrightarrow{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 \frac{\overrightarrow{V}_1 \wedge \overrightarrow{r}}{r^3}$$

Elle exerce alors sur une autre charge q_2 en mouvement avec une vitesse $\overrightarrow{V}_2$:

- Une force électrostatique ($q_2 suppose fixe$)

$$\overrightarrow{F}_{12E} = q_2 \overrightarrow{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 \overrightarrow{r_{12}}}{r_{12}^2}$$

- Une force magnétique(de Laplace,q_2 est en mouvement dans $\overrightarrow{B}_1$)

$$\overrightarrow{F}_{12M} = q_2 \overrightarrow{V}_2 \wedge \overrightarrow{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} q_2 \overrightarrow{V}_2 \wedge \frac{q_1 \overrightarrow{V}_1 \wedge \overrightarrow{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

Cette force est nulle si :

- q_2 est fixe alors $V_2 = 0$
- q_1 est fixe alors $V_1 = 0 \Rightarrow B_1 = 0$.
- $\overrightarrow{V}_2 // \overrightarrow{B}_1 \Rightarrow \overrightarrow{V}_2 \wedge \overrightarrow{B}_1$

D'aprés le principe de superposition,la force globale que q_1 exerce sur q_2 (**Force de Lorentz**)est :

$$\overrightarrow{F}_{12} = q_2(\overrightarrow{E}_1 + \overrightarrow{V}_2 \wedge \overrightarrow{B}_1)$$

Comme remarque :

- les forces magnétiques n'obéissent pas au principe de l'action et réaction, sauf dans le cas ou $\overrightarrow{V}_1 = \overrightarrow{V}_2$
- De manière générale, si une particule q de vitesse $\overrightarrow{V}$ est soumise $\grave{a}$ un champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}_1, \overrightarrow{B}_1)$, quelque soit sa source, alors cette particule est soumise $\grave{a}$ **la force de Lorentz**

$$\overrightarrow{F} = q[\overrightarrow{E} + \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B}].$$

4.1.3 Loi de Biot et Savart

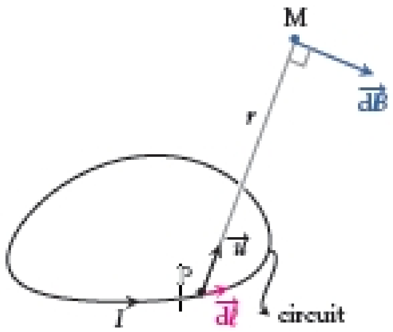
L'étude quantitative des interactions entre aimants et courants fut réalisée par les physiciens Biot et Savart (1820). Ils mesurèrent la durée des oscillations d'une aiguille aimantée en fonction de sa distance à un courant rectiligne. Ils trouvèrent que la force agissant sur un pôle est dirigée perpendiculairement à la direction reliant ce pôle au conducteur et qu'elle varie en raison inverse de la distance. De ces expériences, Laplace déduisit ce qu'on appelle aujourd'hui la loi de Biot et Savart. Le champ magnétique que produit une distribution filiforme de courant peut s'obtenir en décomposant la distribution en petits éléments de courant. On considère que chaque élément de courant de longueur $\overrightarrow{dl}$ traversé par un courant d'intensité I produit un champ magnetique élementaire en M :

$$\overrightarrow{dB}(M) = k\frac{I\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{u}}{r^2}$$

oùk est une constante, $\overrightarrow{u}$ le vecteur unitaire joignant lélément de courant à M, et r, la distance entre M et la portion de circuit.Il faut voir $\overrightarrow{dB}$ comme un intermédiare de calcul,seule la somme de toutes les contributions a un sens physique.Le champ magnétique résultant s'obtient donc en intégrant l'expression précdente, le point P parcourant tout le circuit :

$$\overrightarrow{B}(M) = \oint \overrightarrow{dB} = k \oint_{circuit} k\frac{I\overrightarrow{dl}\wedge\overrightarrow{u}}{r^2}$$

le symbole $\oint$ signifiant que l'intégration s'effectue le long du circuit fermé. *Notations utilisées dans la loi de Biot et Savart*



Dans le Système international d'unités, on pose
$k = \frac{\mu_0}{4\pi}$ avec $\mu_0 \simeq 4\pi.10^{-7}$ SI.
μ_0 est appelé perméabilité magnétique du vide.

4.1.4 Application de la loi de Biot et Savard

4.1.4.1 le fil rectiligne infini

Considerons un fil infini d'axe Oz, parcouru par un courant constant d'intensitéI et cherchons le champ magnétique produit a la distance r du fil. A l'aide de la formule de Biot et Savart, on peut exprimer le champ magnétique $\overrightarrow{dB}$ produit par la portion de longueur dl :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\cos\varphi}{PM^2}$$

avec φ l'angle que fait la droite (PM) avec le plan médiateur passant par M.Choisissons la variable φ comme variable d'intégration.Sachant que $PM = \frac{r}{\cos\varphi}$ et $l = r\tan\varphi$ (d'où l'on tire $dl = r\frac{d\varphi}{\cos\varphi^2}$) on obtient

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos\varphi}{r} d\varphi$$

Vu que tous les champs élémentaires sont colinéaires et dirigés suivant le vecteur orthoradial $\overrightarrow{u_\theta}$, on peut ajouter les intensités des champs pour avoir le champ magnétique total

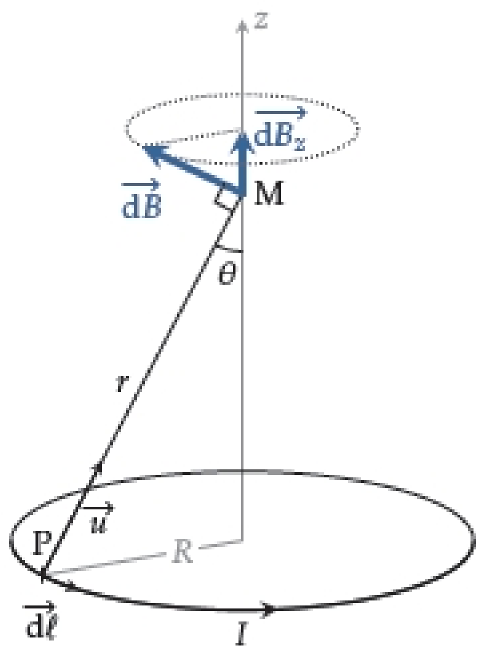
$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Finalement, il règne dans l'espace un champ magnétique

$$\overrightarrow{B}(r, \theta, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \overrightarrow{u}_\theta$$

4.1.4.2 Champ d'induction magnétique produit par un courant circulaire

dans cette exemple on veut étudier l'evolution du champ magnetique le long de l'axe Oz de la spire.



Tout d'abord, appelons θ le demi-angle au sommet du cone forme par la spire et un point M de l'axe. D'après la loi de Biot et Savart

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{u}}{r^2}$$

En raison de la symétrie du problème, toutes les composantes perpendiculaire a l'axe s'éliminent, et les composantes suivant Oz

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IdI}{r^2} \sin\theta$$

Le champ résultant est portépar l'axe de spire s'ecrit :

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^2} I \int_0^{2\pi R} dl$$

avec $B = \frac{\mu_0}{2} \frac{\sin\theta}{r^2} IR$

R étant le rayon de la spire et sachant que $\sin\theta = \frac{R}{r}$
$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2}{r^3} I$ donc $B = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2}{2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} I$
Au centre de la spire, le champ a pour valeur $B = \frac{\mu_0}{2R} I$

Bibliographie

- Cours d'électromagnétisme Jimmy Roussel, professeur agrégé à l'école Nationale Supérieure de Chimie de Rennes.
- Cours et TD d'éléctricité II Pr.L.ELARROUM département de physique Laboratoire de Physique de la matière Condensée (L.PM.C.)Maroc.
- Cours d'électrostatique-Electrocinétique,Jonathan Ferreira université Joseph Fourier DEUG SMa.
- Cours d'électrocinétique EC1-Lois en régime quasi-stationnaire.
- ELecrtonique de base rappels d'électrocinétique,Sylvain TISSERANT Université de la Méditerranée
-Thabet-Khireddine ; Conducteurs En Equilibre Electrostatique ; Ecole Nationale Polytechnique De Constantine (Enpc) ; 2016-2017
- Cours et exercices corrigés électrostatique etélectrocinétique, ÉMILE AMZALLAG - JOSEPH CIPRIANI - JOCELYNE BEN AÏM - NORBERT PICCIOLI Maîtres de conférences à l'université Pierre et Marie Curie (Paris 6).