

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Hassiba Benbouali de Chlef

Faculté de Génie Civil et d'Architecture

Département de Génie Civil



THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT

Domaine : Sciences et Technologie

Filière : Génie Civil

Spécialité : Structure

Par

DJILALI DJEBBOUR Kenza

Thème :

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'EFFET DE LA DISTRIBUTION DE LA MATIERE SUR LE COMPORTEMENT MECANIQUE DES POUTRES COURTES EN FGM SUR APPUIS ELASTIQUES

Soutenue le 30/01/2025 devant le jury composé de :

ADJOUDJ M'hamed	Professeur	Université de Chlef	Président
BACHIR BOUIADJRA Mohamed	Professeur	Université de Sidi Bel Abbés	Examineur
KROUR Baghdad	Professeur	Université de Sidi Bel Abbés	Examineur
OULD LARBI Latifa	MCA	Université de Chlef	Examinatrice
AIT ATMANE Hassen	Professeur	Université de Chlef	Rapporteur
NEBAB Mokhtar	MCB	Université de Boumerdes	Co- Rapporteur

Dédicace

Dédicace

Je remercie Dieu tout puissant de m'avoir donné la force et le courage de finir ce travail.

*À cet agréable moment je dédie ce modeste travail à mon cher père **Djilali Djebbour Mohammed** qui a sacrifié toute sa vie afin de me voir devenir ce que je suis et à ma chère mère **Naima** qui a été à mon côté durant toute ma vie et qui me donne la force pour continuer, à mes sœurs **Romi** et **samia**, qui m'ont soutenu moralement.*

Je dédie aussi cette thèse :

À toute ma famille

À tous mes amis particulièrement :

Boussedi abd el Hakim

Djilali DJEBBOUR Kenza

Remerciements

Remerciements

Tout d'abord, j'adresse mes sincères remerciements à mon directeur de thèse, Professeur **AIT ATMANE Hassen**, pour son soutien qu'il n'a cessé de m'apporter, sa disponibilité et ses précieux conseils qui ont permis de mener à bien ce travail, Ses qualités humaines et ses nombreuses connaissances et plus largement scientifiques m'ont permis de progresser et de prendre confiance.

Je remercie également **NEBAB Mokhtar**, Maître de conférences à l'université de Chlef, co-directeur de la thèse de m'avoir aidé, sa collaboration est également efficace tout au long de ce travail.

Je remercie également **BENNAI Riadh**, Professeur à l'université de Chlef, de m'avoir aidé et pour sa disponibilité.

M. **ADJOU DJ M'hamed**, Professeur à l'Université de Chlef, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du Jury.

M. **BACHIR BOUIADJRA Mohamed**, Professeur à l'université de Sidi Bel Abbés, qui a accepté d'examiner cette thèse et de faire partie du jury.

M. **KROUR Baghdad**, Professeur à l'université de Sidi Bel Abbés, qui a accepté d'examiner cette thèse et de faire partie du jury.

M^{me}. **OULD LARBI Latifa**, Maître de Conférences à l'Université de Chlef, qui a accepté d'examiner cette thèse et de faire partie du jury.

Je tiens également à remercier M. **BOULEKBACHE Bensaid**, Professeur retraité de l'Université de Hassiba Benbouali de Chlef et président du Comité de la Formation Doctorale (CFD) pour son soutien et pour avoir assuré notre formation doctorale.

Je remercie tous les enseignants et mes collègues qui ont contribué directement ou indirectement à ma formation de 3ème cycle, qui m'ont soutenu et aidé du premier jour de ma classe primaire jusqu'à ce jour.

Résumé

Résumé

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) ont suscité un intérêt considérable en raison de leur capacité à optimiser les propriétés matérielles en fonction des exigences spécifiques de chaque application. Les recherches se sont largement penchées sur leurs aspects mécaniques, notamment les vibrations, la flexion et le flambement des éléments structuraux tels que les poutres et les plaques.

Cette thèse porte sur l'étude microstructure d'un polymère renforcé par des nanotubes de carbone (CNT), désigné comme un matériau fonctionnellement gradué à base de nanotubes de carbone (FG-CNT). Bien que ces matériaux soient encore peu explorés, cette étude examine une poutre FG-CNT reposant sur une fondation élastique. L'analyse traite des réponses élastiques de Winkler ainsi que de l'orthotropie de la fondation (AOVEF). Des modèles micromécaniques, notamment ceux de Voigt et d'Eshelby-Mori-Tanaka, sont utilisés pour proposer des distributions matérielles modélisant les variations des fractions volumiques de CNT selon l'épaisseur de la poutre, tout en prenant en compte l'effet de la porosité. La théorie quasi tridimensionnelle des déformations par cisaillement (Quasi-3D HSDT) est adoptée pour une modélisation plus fidèle des comportements réels.

Les équations de mouvement sont dérivées du principe de minimisation de l'énergie et résolues pour une poutre FG-CNT simplement appuyée, soumise à différentes sollicitations : vibration libre, flambement et flexion transversale. L'étude inclut des modèles variés de fondations élastiques caractérisés par les paramètres de Winkler-Pasternak avec des variations longitudinales et une réponse orthotrope de la fondation.

Les résultats révèlent les effets significatifs de la porosité, de la distribution des CNT et des propriétés de la fondation sur les réponses mécaniques de la poutre. Ces impacts se traduisent par des variations des fréquences de vibration, des charges critiques de flambement et des déformations sous charges transversales statiques. Ces conclusions ouvrent de nouvelles perspectives pour la compréhension des poutres FG-CNT et établissent des bases solides pour de futures recherches, en soulignant l'importance des modèles micromécaniques dans l'étude des performances mécaniques.

Mots-clés : Fondation élastique variable orthotrope arbitraire (AOVEF), Eshelby-Mori-Tanaka, porosité, nanotubes de carbone fonctionnellement gradués (FG-CNT), déplacement, flambement, vibration.

Summary

Summary

Functionally graded materials (FGMs) have garnered significant interest due to their ability to optimize material properties according to specific application requirements. Research has extensively explored their mechanical aspects, including vibrations, bending, and buckling in structural elements such as beams and plates.

This thesis focuses on the microstructure of a polymer reinforced with carbon nanotubes (CNT), referred to as a carbon nanotube-based functionally graded material (FG-CNT). Despite limited exploration of FG-CNTs, this study examines an FG-CNT beam resting on an elastic foundation. The analysis investigates the elastic response of Winkler foundations and the orthotropy of the foundation (AOVEF). Micromechanical models, including the Voigt and Eshelby-Mori-Tanaka models, are employed to propose material distributions that model variations in CNT volume fractions across the beam's thickness, while considering the effect of porosity. The quasi-three-dimensional higher-order shear deformation theory (Quasi-3D HSDT) is adopted to provide a realistic depiction of beam behavior.

Equations of motion are derived using the energy minimization principle and solved for a simply supported FG-CNT beam under various loading conditions, including free vibration, buckling, and transverse bending. The study incorporates elastic foundation models characterized by Winkler-Pasternak parameters with longitudinal variations and orthotropic foundation responses.

The results demonstrate the significant effects of porosity, CNT distribution, and foundation properties on the mechanical responses of the beam. These include variations in vibration frequencies, critical buckling loads, and deflections under static transverse loads. The findings provide new insights into FG-CNT beam behavior and establish a foundation for future research, highlighting the importance of micromechanical models in understanding the influence of CNT distribution on beam performance.

Keywords: Arbitrary Orthotropic Variable Elastic Foundation (AOVEF), Eshelby-Mori-Tanaka, porosity, functionally graded carbon nanotubes (FG-CNT), displacement, buckling, vibration.

ملخص

ملخص

المواد ذات التدرج الوظيفي (FGM) قد جذبت اهتمامًا كبيرًا نظرًا لقدرتها على تحسين الخصائص المادية بما يتناسب مع متطلبات كل تطبيق محدد. ركزت العديد من الأبحاث على دراسة هذه المواد من جوانب ميكانيكية مختلفة، مثل الاهتزازات، والانحناء، والانبعاج في العناصر الإنشائية كالعوارض والصفائح. تركز هذه الأطروحة على دراسة البنية الدقيقة لمادة بوليمرية معززة بأنابيب الكربون النانوية (CNT)، والمعروفة باسم مادة ذات تدرج وظيفي قائمة على أنابيب الكربون النانوية (FG-CNT). رغم أن هذا النوع من المواد لم يتم استكشافه بشكل كافٍ، فإن هذه الدراسة تركز على عارضة FG-CNT مستندة إلى قاعدة مرنة. تشمل الدراسة تحليل استجابة وينكلر المرنة، وكذلك تأثير تباين خصائص القاعدة (AOVEF) تم استخدام نماذج ميكانيكية دقيقة، مثل نموذج فويغت ونموذج إيشيلي-موري-تاناكا، لاقتراح توزيعات مادية تحاكي التغير في نسب الحجم لأنابيب الكربون النانوية عبر سمك العارضة، مع الأخذ في الاعتبار تأثير المسامية. تم اعتماد نظرية التشوهات الناتجة عن القص شبه ثلاثية الأبعاد (Quasi-3D) (HSDT) للتقدم تمثيل أكثر واقعية لسلوك العارضة.

تم اشتقاق معادلات الحركة بناءً على مبدأ تقليل الطاقة، وحلت للعارضة FG-CNT المتينة ببساطة تحت حالات تحميل متعددة، مثل الاهتزاز الحر، والانبعاج، والانحناء العرضي. تضمنت الدراسة نماذج مختلفة للقواعد المرنة، التي تتسم بخصائص وينكلر-باسترنالك مع تباينات طولية واستجابة متباينة الخواص.

أظهرت النتائج تأثير المسامية وتوزيع أنابيب الكربون النانوية وخصائص القاعدة على الاستجابات الميكانيكية للعارضة. تمثلت هذه التأثيرات في تغيرات في ترددات الاهتزاز، الأحوال الحرجة للانبعاج، والانحناءات الناتجة عن الأحوال العرضية الثابتة. توفر هذه النتائج رؤى جديدة لفهم سلوك عوارض FG-CNT، وتؤسس لقاعدة قوية لدراسات مستقبلية، مع التأكيد على أهمية النماذج الميكانيكية الدقيقة في دراسة أداء هذه العوارض.

الكلمات المفتاحية: الأساس المرن المتغير متعامد الخواص (AOVEF)، إيشيلي-موري-تاناكا، المسامية، أنابيب الكربون النانوية متدرجة الوظيفة (FG-CNT)، الإزاحة، الانبعاج، الاهتزاز.

Sommaire

Sommaire

DEDICACE	III
REMERCIEMENTS	V
RESUME	VII
SUMMARY	IX
LISTE DES FIGURES	XVII
LISTE DES NOTATIONS	XXV
INTRODUCTION GENERALE	2

Chapitre I : Généralités sur le matériau d'étude : lois de mélange et modèles micromécaniques

I.1. INTRODUCTION	7
I.2. CONCEPT ET HISTORIQUE DES MATERIAUX FONCTIONNELLEMENT GRADUES (FGM)	7
I.3. PROPRIETES MATERIELLES DES MATERIAUX A FONCTIONNEMENT GRADUEL (FGM)	10
I.3.1. CLASSIFICATION DES GRADIENTS EN FONCTION DE LEUR NATURE	10
I.3.2. ANALYSE DES GRADIENTS : CLASSIFICATION PAR TYPE	11
I.4. CONCEPTS DE DISTRIBUTION DE LA MATIERE.....	11
I.5. CARACTERISTIQUES EFFECTIVES DES MATERIAUX A GRADIENTS FONCTIONNELS (FGM)	12
I.6. LOIS REGISSANT LA DISTRIBUTION MATERIELLE DANS LES MATERIAUX FGM.....	13
I.6.1. LOI DE DISTRIBUTION EN PUISSANCE	14
I.6.2. LOIS DE DISTRIBUTION SIGMOÏDE	15
I.6.3. LOI DE DISTRIBUTION EXPONENTIELLE	16
I.6.4. PLAQUES SANDWICHES	16
I.7. MATERIAUX NANO-COMPOSITES INTELLIGENTS	17
I.7.1. DIFFERENTES FORMES TRADITIONNELLES DU CARBONE	18
I.7.2. INNOVATIONS DANS LES MATERIAUX CARBONES.....	18
I.7.3. DEFECTUOSITES DES NANOTUBES DE CARBONE.....	20
I.8. UNE BREVE HISTOIRE DES NANOTUBES DE CARBONE (CNT).....	22
I.9. TAUX DE PUBLICATION ET TENDANCES DE RECHERCHE SUR LES NANOTUBES DE CARBONE.....	23
I.10. LES MOELES MICROMECHANIQUE DE TYPE FG-CNT.....	24
I.10.1. MODELE DE HALPIN-TSAI MODIFIE.....	25
I.10.2. REGLE DES MELANGES ETENDUE	27
I.10.3. APPROCHE ESHELBY–MORI–TANAKA (EMT).....	28
I.10.4. L'APPROCHE ESHELBY–MORI–TANAKA : ANALYSE DE L'EFFET D'AGGLOMERATION	31
I.11. TECHNIQUES DE FABRICATION DES NANOTUBES DE CARBONE (CNT).....	34
I.11.1. ABLATION LASER.....	35
I.11.2. ÉLECTROLYSE.....	36
I.11.3. PROCESSUS CVD (DEPOT CHIMIQUE EN PHASE VAPEUR).....	37
I.11.4. FABRICATION DE NONO-COMPOSITES BASEE SUR LA TECHNIQUE COURANTES DE DISPERSION DE DISPERSION DES CNT.....	37
I.12. COMPOSITES POREUX A GRADIENT FONCTIONNEL	38
I.13. LOIS REGISSANT LES VARIATIONS DES PROPRIETES DES MATERIAUX DANS LES FGM POREUSES	40
I.14. SYNTHESE DES TRAVAUX DE RECHERCHE SUR LES STRUCTURES FG-CNTRC	41
I.15. APPLICATION DES MATERIAUX DE TYPES CNT	43

I.16.	CONCLUSION	44
Chapitre II : Bibliographie sur les théories des poutres et des modèles de fondations		
II.1.	INTRODUCTION	46
II.2.	LES THEORIES ELASTIQUES DES POUTRES	46
II.2.1.	ANALYSE DES MODELES MONOCOUCHE EQUIVALENTS (ESL).....	47
II.2.2.	APPROCHE PAR COUCHE	54
II.2.3.	MODELES ELEMENTS FINIS DES STRUCTURES COMPOSITES	58
II.3.	MODELES ANALYTIQUES DES POUTRES SUR FONDATION	62
II.3.1.	APPROCHES DE LA MODELISATION DES FONDATIONS ELASTIQUES	63
II.3.2.	MODELES DE FONDATIONS LINEAIRES EN ÉLASTICITE ET VISCOELASTICITE	65
II.3.3.	MODELE D'UNE POUTRE SUR FONDATION WINKLER NON LINEAIRE (BNWF).....	68
II.3.4.	MODELE GENERALISEE DE LA FONDATION.....	69
II.3.5.	MODELE DE FONDATION DE VLASOV (1966).....	69
II.3.6.	MODELE DE FONDATION DE REISSNER.....	70
II.3.7.	MODELE DE FONDATION DE MAXWELL	71
II.3.8.	MODELE DE FONDATION DE ZENER.....	71
II.3.9.	FONDATION ELASTIQUE NON UNIFORME DE TYPE WINKLER A MODULE VARIABLE.....	72
II.4.	CONCLUSION	75
Chapitre III : Analyse du comportement mécanique d'une P-FGCNT poreuse sur assise de type AOVEF		
III.1.	INTRODUCTION	78
III.2.	TYPE DE STRUCTURES CHOISIES POUR L'ETUDE.....	79
III.2.1.	ANALYSE DES POUTRES RENFORCEES PAR DES NANOTUBES DE CARBONE SUR FONDATIONS VARIABLES ET ALEATOIREMENT ORTHOTROPE (AOVEF).....	79
III.2.2.	ANALYSE DES POUTRES RENFORCEES PAR DES NANOTUBES DE CARBONE SUR FONDATIONS VARIABLES ISOTROPE (VEF)	79
III.3.	PROPRIETES MATERIELLES DES POUTRES CNTRC.....	80
III.3.1.	APPROCHE DE LA REGLE DES MELANGES	80
III.3.2.	VARIATION MATERIELLE SELON LA LOI MORI-TANAKA D'UNE POUTRE RENFORCEE PAR CNT ORIENTES ALEATOIREMENT.....	82
III.4.	POUTRE FG-CNT AYANT UNE CONFIGURATION MATERIELLE IMPARFAITE.....	83
III.5.	EQUATION CONSTITUTIVE.....	84
III.6.	ÉQUATIONS GOUVERNANTES	87
III.7.	LES SOLUTIONS DE NAVIER	91
III.8.	CONCLUSION	93
Chapitre IV : Validation des résultats et étude paramétrique		
IV.1.	INTRODUCTION	95
IV.2.	ANALYSE ET VALIDATION DES VIBRATIONS	96
IV.2.1.	POUTRE FG-CNT SANS FONDATION	96
IV.2.2.	POUTRE FG-CNT SUR FONDATION A RAIDEUR VARIABLE ORTHOTROPE.....	97
IV.2.3.	ÉTUDE PARAMETRIQUE.....	101
IV.3.	ÉTUDE ET VALIDATION DU FLAMBEMENT	115
IV.3.1.	POUTRE FG-CNT SANS FONDATION ELASTIQUE.....	115
IV.3.2.	POUTRE FG-CNT SUR FONDATION A RAIDEUR VARIABLE ORTHOTROPE.....	116

IV.3.3.ÉTUDE PARAMETRIQUE.....	117
IV.4. ANALYSE DES DEPLACEMENTS TRANSVERSALES	127
IV.4.1.COMPARAISON DES MODELES DE MORI-TANAKA ET DE VOIGT POUR L'ANALYSE DE LA STABILITE D'UNE POUTRE FG-CNT.....	127
IV.4.2.ÉTUDE PARAMETRIQUE.....	128
IV.5. CONCLUSION	132
IV.6. CONCLUSION GENERALE	134

Listes des Figures

Liste des Figures

Figure I. 1- Approche de modélisation des FGM a) modèle par couche [13] b) Modèle de distribution en monocouche équivalente [14].	8
Figure I. 2- Variations de la microstructure d'un of FG SS316/ZrO ₂ distribution [15].	8
Figure I. 3 - Différentes classes application des FGM.	9
Figure I. 4- (a) Matériaux composites traditionnels, (b) Matériaux à gradation fonctionnelle [21].	10
Figure I. 5- Présente une classification de plusieurs FGM en fonction de la nature de leur gradient [15].	11
Figure I. 6- Exemple typique de trois différents types de gradient de FGM [24].	11
Figure I. 7- Représentation des FGM variait en termes de changement dimensionnel linéaire et non linéaire dans la distribution des matériaux [25].	12
Figure I. 8- Modèle analytique pour une couche d'un matériau FGM [26].	13
Figure I. 9 - (a) Linéaire, (b) étape et (c) transition sigmoïde dans les FGM [27].	13
Figure I. 10- Types de gradient de composition. (A) radial et (B) longitudinal [28].	13
Figure I. 11- Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur P-FGM.	15
Figure I. 12- Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur (S-FGM).	16
Figure I. 13- variation du module de Young dans une plaque E-FGM.	16
Figure I. 14 (a)- La variation de matériau le long de l'épaisseur de la plaque rectangulaire sandwich 3D FG : (a) âme en FGM et noyau homogène, et (b) âme homogène et noyau en FGM [29].	17
Figure I.15-(a)- Représentation de la structure hexagonale du graphite, accompagnée d'une image de la roche de graphite [35].	18
Figure I. 16 - De C ₆₀ à C ₈₀ les atomes ajoutés au C ₆₀ pour obtenir le C ₇₀ et le C ₈₀ sont indiqués en rouge [35].	19
Figure I. 17 - Illustration de la structure de type « nid d'abeille » du graphène et exemples de nanotubes en fonction des valeurs de n et m, selon C. N.	19
Figure I. 18 - À gauche : Représentation graphique d'un nanotube de carbone à parois multiples (MWNT) ; à droite : Image obtenue au microscope électronique à transmission montrant plusieurs nanotubes de carbone à parois multiples	20
Figure I. 19- Impact du type de cycle sur la courbure de la surface. [37].	20

Figure I. 20- Image au microscope électronique à transmission des extrémités de deux nanotubes multicouches. Quelques cycles non hexagonaux sont indiqués : (P) pour un pentagone et (H) pour un heptagone [36].	21
Figure I. 21 -Introduction d'une paire pentagone-heptagone provoquant une variation de diamètre et de chiralité : a) de (11,0) à (12,0) ; b) de (9,0) à (12,0) [37].	21
Figure I. 22- Défauts pentagonaux et heptagonaux entraînant la formation de jonctions [35].	21
Figure I. 23 -Image au microscope électronique à transmission d'un échantillon de nanotubes (collerette brute produite par arc électrique). En plus des nanotubes de carbone à parois simples SWNT, on peut distinguer des particules de catalyseur ainsi que deux formes de carbone amorphe [36].	22
Figure I. 24 - Tendances de recherche sur les composites en polymères renforcés de fibres (FRP) à base de CNT, 1985-2022[58].	24
Figure I. 25-Classification des CNT basée sur les applications [58].	24
Figure I. 26- Représentation atomique et continue des MWCNT [62].	26
Figure I. 27-Schémas de répartition des SWCNT dans les poutres FG-CNTRC.	28
Figure I. 28-Modèle d'inclusion d'Eshelby pour des nanotubes de carbone orientés aléatoirement[69].	32
Figure I. 29-Différentes techniques de synthèse des nanotubes de carbone (CNT)[58].	35
Figure I. 30. Images microscopiques de nanotubes à paroi unique obtenus par ablation laser.	35
Figure I. 31- Représentation schématique du dispositif d'évaporation laser utilisé à l'Université Rice (Houston, Texas, USA)[71].	36
Figure I. 32- Représentation schématique du système expérimental d'électrolyse (Brighton, Royaume-Uni)[71].	36
Figure I. 33 - Images en agglomérat CNT obtenus par (a) SEM ; (b) TEM [78].	37
Figure I. 34 - Technique de dispersion CNT dans la matrice polymère [58].	38
Figure I. 35 -Divisions typiques des composites poreux. [92].	38
Figure I. 36-Nombre d'enregistrements (Web of Science, recherche "Functionally graded; porous", au 19/05/2023) [94].	39
Figure I.37-Exemples de structures poreuses FG typiques. [95].	39
Figure I. 38- Répartition de porosité sur l'épaisseur, (a) porosité symétriques (b) porosité non symétrique.	41

Figure I. 39 - Applications des nanotubes de carbone (CNT)[58].	44
Figure II. 1- Schéma d'un élément de poutre.	47
Figure II. 2-Description du déplacement du modèle : monocouche équivalente (à gauche) et par couche (à droite). Cas linéaire et non-linéaire [112].	48
Figure II. 3-Illustrations des Déformations selon la Théorie Classique des Poutres.	48
Figure II. 4-Illustration des Déformations selon la Théorie du Premier Ordre.	50
Figure II. 5-Comparaison de la Cinématique des Poutres de Timoshenko et d'Euler-Bernoulli.	51
Figure II. 6-Illustration des Déformations selon la Théorie d'ordre Élevé.	51
Figure II. 7-Variation de la fonction de forme $f(z)$ selon différents modèles en fonction de l'épaisseur.	52
Figure II. 8- Variation de la dérivée de la fonction de forme $f(z)$ selon différents modèles en fonction de l'épaisseur.	53
Figure II. 9-Répartition des contraintes de cisaillement τ_{xz} selon trois théories [119].	54
Figure II. 10-champs des déplacements des modèles couche discrètes [123].	55
Figure II. 11- Champs des déplacements des modèles zig-zag [123].	55
Figure II. 12- Géométrie et Notations Utilisées dans les Théories en Zig-Zag.	56
Figure II. 13- Champ de déplacements des modèles zig-zig du premier ordre [124].	56
Error! Bookmark not defined.	
Figure II. 14-Champ de Déplacements dans les Modèles Zig-Zag d'Ordre Supérieur [124].	57
Figure II. 15-Elément « sinus » triangulaire 6 nœuds de [135].	59
Figure II. 16- Elément quadrilatère de type Lagrange à 9 nœuds [123].	60
Figure II. 17- Elément quadrilatère de type Lagrange à 16 nœuds [123].	60
Figure II. 18-Eléments finis 3D à 20 nœuds pour déterminer les contraintes suivant Z [123].	60
Figure II. 19 -Élément brique à 20 nœuds	61
Figure II. 20 -Elément singulier à 15 nœuds	61
Figure II. 21-études du problème de bord libre par EF 3D.	61
Figure II. 22 -Élément brique mixte à 18 nœuds.	62
Figure II. 23-Elément d'interface.	62

Figure II. 24- Structure sur fondation élastique [144].	63
Figure II. 25- Modèle de fondation de Winkler [148].	64
Figure II. 26- Modèle de fondation de Pasternak [150].	65
Figure II. 27- Modèle de fondation de Kerr [151].	65
Figure II. 28- Modèle de Fondation de Hetenyi [147].	66
Figure II. 29- Modèle de fondation de Kelvin–Voigt [157].	67
Figure II. 30-Modèle de fondation de filonenko-Borodich [147].	67
Figure II. 31-Illustration schématique d'un modèle de poutre sur Fondation de Winkler non linéaire (BNWF)[158].	69
Figure II. 32- Modèle de fondation de Vlasov [146].	70
Figure II. 33-Model de fondation de Reissner [157].	70
Figure II. 34-Modèle de fondation de Maxwell [157].	71
Figure II. 35- modèle de fondation de Zener [157].	72
Figure II. 36-Représentation du paramètre variable de Winkler a) Linéaire, b) Parabolique et c) Sinusoïdale [177].	73
Figure II. 37-Représentation du paramètre variable de Winkler a) Polynomiale, b) Cousins et c) Exponentiel [177].	74
Figure II. 38- Influence du paramètre de fondation élastique sur la déflexion [178].	75
Figure III. 1- (a) Modélisation des poutres renforcées par des nanotubes de carbone avec un plan orthotrope local (n, g) et un plan orthotrope global (x,y,z) sur une fondation de Pasternak arbitrairement orthotrope [181].	79
Figure III. 2- a), la géométrie et b) les configurations de CNT du poutre FG-CNTRC sur fondation EF.	80
Figure III. 3 - Schéma illustrant la géométrie typique d'une poutre renforcée par des nanotubes de carbone (CNT) [97].	82
Figure IV. 1– L'impact de κ_p sur les fréquences fondamentales des poutres renforcées par des CNT avec	103
Figure IV. 2- L'impact de θ sur les fréquences fondamentales des poutres renforcées par des CNT avec différents types de fondation de Winkler.	104

Figure IV. 3- L'impact du rapport L/h sur les fréquences fondamentales des poutres renforcées par des CNT avec différents types d'angles.	105
Figure IV. 4- L'effet des angles d'orthotropie sur la fréquence fondamentale pour différentes	106
Figure IV. 5 - Variation des fréquences fondamentales des poutres reposant fondation à rigidité de Winkler variable exponentiellement ($V_{cnt} = 0.17$).....	106
Figure IV. 6- Variation des fréquences naturelles sans dimension des poutres FG-CNTRC par rapport à ($V_{cnt} = 0.17, L/h=10, k_w=10, k_p=1.5$).	107
Figure IV. 7-Variation des fréquences naturelles sans dimension des poutres FG-CNTRC en fonction du nombre de modes ($V_{cnt} = 0.17, L/h=10, K_w = 10, K_p = 1.5, \psi=2$).	108
Figure IV. 8-Variation des fréquences fondamentales des poutres FG-CNTRC en fonctions du rapport longueur sur épaisseur (L/h) ($K_w = 10, K_p = 1.5, \psi=2$).	109
Figure IV. 9-Variation des fréquences naturelles sans dimension (NDFNF) des poutres FG-CNTRC en fonctions du rapport L/h. ($K_w = 10, K_p = 1.5, \psi=2$).	110
Figure IV. 10 - La variation des fréquences propres non dimensionnelles des poutres FG-CNTRC assise sur fondation variable de manière parabolique par rapport au rapport (L/h). ($K_w = 10, K_p = 1.5, \psi=2$).	110
Figure IV. 11-Comparaisons des modelés de Mori-Tanaka et de Voigt et les angles d'orthotropie sur la fréquence non-dimensionnelle des poutres FG-CNT en fonction des variations du coefficient de porosité.	113
Figure IV. 12-Variation des NDNF d'une poutre n-FGX, avec et sans EF, en fonction du nombre de modes.	114
Figure IV. 13-Influence de K_p sur le flambement pour quatre distributions de CNT à différents angles.	118
Figure IV. 14- Influence de nombre de modes sur la charge critique de flambement des poutres renforcées en CNT pour différents angles orthotropie θ	119
Figure IV. 15-l'effet du rapport L/h sur le comportement au flambement d'une poutres FG-CNT avec différents angles d'orthotropie de la fondation, et différents cas de distribution des CNT.....	120
Figure IV. 16- Effet des angles orthotropie θ sur le flambement des poutres renforcées par CNT avec différents types de variation de la rigidité de Winkler.....	121

Figure IV. 17-Variation des NDCBL des poutres FG-CNTRC en fonctions des différents types de VEF et du coefficient de VEF. ($v_{cnt} = 0.17$).....	122
Figure IV. 18- Variation des NDCBL des poutres FG-CNTRC pour les différents modes de flambement ($v_{cnt} = 0.17$).....	123
Figure IV. 19- Influence du coefficient de porosité sur la charge critique de flambage d'une poutre selon deux modèles micromécaniques $\theta = 30^\circ$	125
Figure IV. 20 -Influence de la porosité sur la charge critique de flambement des poutres FG-CNT avec une fondation variable sinusoïdal orthotrope, en utilisant les modèles EROM et M-T.....	125
Figure IV. 21-Variation des NDCBL des FG-CNTRC présentant un motif de distribution n-FGX, avec et sans EF, en fonctions du nombre de modes ($v_{cnt} = 0.17$).....	127
Figure IV. 22-Comparaisons des déplacements des poutres sous des charges sinusoïdale et uniformes, sur fondation orthotrope.....	129
Figure IV. 23-Comparaison de l'effet des variations des modèles micromécaniques et du coefficient de porosité sur les déplacements d'une poutre FG-CNT, $\theta = 60^\circ$	130
Figure IV. 24-Influence de la porosité sur les déplacements des poutres renforcées en CNT avec une fondation sinusoïdale AOP. ($\theta = 60^\circ, v_{cnt} = 0.12$).....	131

Liste des Tableaux

Tableau IV. 1-comparaison des fréquences non dimensionnelles initiales pour différents rapports (L/h) selon les différents modes.....	96
Tableau IV. 2-Comparaison des valeurs de fréquence obtenues à partir de ω la formulation de poutre pour une poutre droite sur la fondation AOP pour $\lambda = G_n / G_\xi$ et $G_\xi = 20$	97
Tableau IV. 3-Comparaisons des NDFNF d'une poutre homogène isotrope sur fondation.....	98
Tableau IV. 4-Comparaisons des fréquences propres sans dimension d'une poutre FG sur fondations élastiques.....	99
Tableau IV. 5-Comparaisons des trois premières fréquences propres non dimensionnelles (NDFNF) des poutres FG-CNTRC.....	100
Tableau IV. 6-L'effet du mode sur le paramètre de fréquence des poutres FG-CNT reposant à différents angles et sur différents types de VEF.	102
Tableau IV. 7-Le paramètre de fréquence pour trois distributions de porosité et quatre distributions distinctes de nanotubes de carbone, $\theta = 60^\circ$ $v_{cnt} = 0.12$	111
Tableau IV. 8-Comparaison des fréquences non-dimensionnelles des modèles de Mori-Tanaka et de Voigt pour des poutres poreuses sur fondation orthotrope.....	112
Tableau IV. 9-Les trois premières fréquences non-dimensionnelles des poutres n-FGX.	114
Tableau IV. 10-Comparaisons des NDCBL des poutres FG-CNTRC pour différents rapports d'élancement.....	115
Tableau IV. 11-Comparaisons des NDCBL des poutres FG-CNTRC sur fondations élastiques.....	116
Tableau IV. 12-Comparaison du flambement des poutres CNTRC avec et sans fondation élastique selon différentes théories. ($v_{cnt} = 0.12, L/h = 15$).	117
Tableau IV. 13-les trois premières charges critiques de flambement des poutres FG-CNTRC sous l'influence des angles d'orthotropie de la fondation θ	118
Tableau IV. 14-Compare les modèles EROM et M-T, en examinant les effets des changements du coefficient de porosité sur le flambement dans diverses distributions de CNT.	124
Tableau IV. 15-Premiers trois NDCBL des poutres FG-CNTRC suivant une distribution n-FGX.....	126

Tableau IV. 16-Comparaison des déplacements des poutres FG-UD sous charges uniformes et sinusoïdales modélise selon deux modèles micromécaniques sur des fondations élastiques..... 128

Tableau IV. 17-Comparaison entre les méthodes M-T et EROM avec différents coefficients de porosité λ sous chargement statique..... 130

Liste des notations

G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
E	Module de Young suivant x
E_c	Module de Young de la céramique
E_m	Module de Young du métal
ν	Coefficient de Poisson
$V(z)$	Fraction volumique
p	Paramètre du matériau
a	Longueur de la poutre
b	Largeur de la poutre
h	Hauteur de la poutre
$u_0, w_0,$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de La poutre
u, w	Les déplacements dans les directions x, y, z.
φ_z, ϕ_x	Les rotations autour des axes x, y et z
θ_i	Rotations autour de l'axe i
σ_x, σ_z	Les éléments de contraintes normales
τ_{xz}	Élément de contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_z$	Les éléments de déformations normales
γ_{xz}	Élément de déformations de cisaillement
x, z	Les coordonnées cartésiennes rectangulaires
δU	L'énergie de déformation virtuelle
δU_{ef}	L'énergie de déformation de fondation élastique
δV	Le travail virtuel externe
δK	La variation de l'énergie cinétique
q	Les charges transversales appliquées
$\delta u, \delta w, \delta \theta$	Champ virtuel de déplacement
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux

M_x, M_{xy}	Moments de flexion
S_x, S_y, S_{xy}	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
R_{xz}, R_{yz}	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
Q_{ij}	Coefficient de rigidité
P_m, P_c	Les propriétés correspondantes du métal et la céramique
$f(z)$	La fonction de forme
ρ_i	Densité matérielle de la structure FGM
$\{\dots\}$	Vecteur colonne
$[\dots]$	Matrice
$A_{ij}, A_{ij}^s, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s$	Les composantes de rigidité
U_{mn}, W_{mn}, X_{mn}	Les coefficients de déplacement maximum inconnus
ω	Fréquence naturelle
FGM	Matériau à gradient de propriétés
NDCBL	Charges critiques de flambement sans dimension
NDNF	Fréquences naturelles fondamentales non-dimensionnelles
FSDT	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre
HSDT	Théorie de déformation de cisaillement hyperbolique
TSDT	Théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre
ESDT	Théorie de déformation de cisaillement exponentielles
TRSDT	Théorie de déformation de cisaillement trigonométrique
AOVEF	Arbitrairement orthotrope variable élastique fondation
FG-CNT	Gradient fonctionnel de nanotubes de carbone
CNT	Carbone nanotube
MEF	Méthode des éléments finis
VEF	Fondation élastique Variable
UD	Distribution Uniforme
FGS	Distribution Symétrique

FGA	Distribution Asymétrique
n-FGX	Non-linéaire Gradient fonctionnel X
EROM	Lois de mélange de Voigt modifié
EF	Fondation élastique
e_m	Coefficient de porosité.
E_{LEF}	Module d'élasticité longitudinal
E_{TEF}	Module d'élasticité transversal
G_{EF}	Module de cisaillement
ν_{EF}	Coefficient de poisson de fibre équivalente
$V_r^{inclusions}$	Le volume des CNT dans les inclusions
V_{EF}	Fractions volumiques de fibre équivalente
V_M	Fractions volumiques de la matrice
K_{in}	Module de compressibilité à l'intérieur des inclusions
K_{out}	Module de compressibilité à l'extérieur des inclusions
E_{cnt}	Module de Young de CNT
V_{mw}	La fraction volumique des MWCNT
L_{mw}	La longueur des MWCNT
t_{cnt}	L'épaisseur de la paroi des CNT

Introduction Générale

Introduction Générale

Généralement, l'apparition de nouveaux matériaux résulte du besoin d'accroître l'efficacité structurelle et les performances. Par ailleurs, ces matériaux novateurs ouvrent eux-mêmes la voie à de nouvelles opportunités pour concevoir des structures et des technologies modernes, posant ainsi à la science des matériaux de nouveaux défis. Un des exemples les plus remarquables de cette interaction dans l'évolution des matériaux, des structures et des technologies se manifeste dans les composites avancés et les éléments structurels.

Les poutres renforcées par des nanotubes de carbone (CNT) ont suscité un intérêt croissant dans le domaine de l'ingénierie des matériaux en raison de leurs propriétés mécaniques exceptionnelles. L'ajout de CNT améliore non seulement la résistance et la rigidité des poutres, mais contribue également à des performances améliorées en matière de vibration et de flambement. Cependant, l'une des préoccupations majeures dans la conception et l'analyse de ces structures est l'effet de la porosité, qui peut considérablement influencer leur comportement mécanique.

Les fondations élastiques occupent une place primordiale et sont largement déployées dans le domaine de l'ingénierie, notamment dans des applications telles que les réservoirs de stockage, les radier et les structures de fondation. Un des enjeux majeurs de l'étude de ces fondations réside dans la modélisation rigoureuse de leur comportement mécanique. Cette recherche se distingue par une analyse approfondie de l'influence combinée de fondation variables de type Winkler et fondation orthotropes de Pasternak sur le comportement des poutres à gradient de matériaux (FG) en matière de flexion, de vibration et de flambement. L'objectif central est d'évaluer leur réponse sous différentes conditions de charge.

Dans le contexte actuel de la recherche sur les matériaux composites, l'utilisation des nanotubes de carbone pour renforcer les poutres a ouvert de nouvelles perspectives dans la conception de structures légères et robustes. Les fondations élastiques jouent également un rôle crucial dans le comportement dynamique des poutres, et les modèles de fondations comme la fondation de Pasternak et la fondation de Winkler sont souvent utilisés pour évaluer les réponses des structures. L'intégration de modèles orthotopiques et variables permet d'optimiser la modélisation des fondations pour mieux représenter la réalité physique des matériaux utilisés.

Malgré les avancées réalisées dans ce domaine, la compréhension approfondie des interactions entre la porosité des poutres renforcées par CNT et les caractéristiques de

flambement et de vibration reste limitée. La plupart des études antérieures n'ont pas suffisamment pris en compte ces effets, ce qui rend difficile l'évaluation précise de la performance des poutres dans des conditions réelles. Ainsi, la problématique de cette étude réside dans l'exploration des effets de la porosité sur les poutres renforcées par CNT, ainsi que dans l'évaluation de l'efficacité de nouvelles formulations de fondations orthotropiques de Pasternak et de Winkler variable pour la vibration libre, le flambement et le déplacement. Cette recherche vise à combler ces lacunes et à fournir des recommandations pour la conception et l'optimisation des structures renforcées.

Aragh, Barati [1] ont utilisé la technique d'Eshelby-Mori-Tanaka pour étudier la vibration libre de panneaux cylindriques construits à partir de matériaux à gradient continu renforcés par des nanotubes de carbone (CNTRC). Kamarian, Pourasghar [2] ont évalué les propriétés vibratoires d'une plaque rectangulaire en FG-CNTR reposant sur des fondations de type Pasternak. Çömez and Omurtag [3] ont examiné le problème de contact sans friction impliquant un poinçon rigide et une couche orthotrope FG sur une base Pasternak, ainsi qu'un poinçon rigide. Wattanasakulpong and Ungbhakorn [4] ont réalisé une étude sur la vibration et la flexion de poutres en FG-CNT basées sur une fondation élastique de type Pasternak. Duc, Cong [5] ont abordé l'instabilité thermique et mécanique linéaire des coques tronquées coniques FG-CNTRC renforcées par des fibres de CNT et reposant sur une fondation élastique dans des conditions thermiques. Fallah, Botshekanan Dehkordi [6] ont exploré la réponse dynamique non linéaire d'une poutre FG-CNTRC dotée de fils à mémoire de forme graduée. El-Ashmawy et Xu [24] ont examiné l'influence de l'orientation et de la distribution graduée des CNT sur l'analyse statique et de vibration libre des poutres FG-CNTRC. Yas, Samadi [7] ont examiné les vibrations libres et l'analyse de flambement de poutres nano-composites composées de SWCNT reposant sur une fondation élastique (EF). Lin and Xiang [8] ont développé l'équation aux valeurs propres pour la vibration libre de poutres composites alignées en CNT sur une EF, en se basant sur le principe vibrationnel ainsi que sur les théories des poutres de premier et de troisième ordre. Zhang, Wang [9] ont étudié les effets simultanés du cisaillement et de l'échelle microscopique sur le comportement vibratoire non linéaire des poutres FG-CNTRC en utilisant la théorie de déformation en cisaillement de premier ordre (FSDT) et la théorie de l'élasticité non locale. Peng, Xu [10] ont analysé l'influence de la relaxation des conditions aux limites sur les caractéristiques de vibration libre des poutres imparfaites FG-CNTRC, sur la base de la théorie de cisaillement de premier ordre. Jena, Chakraverty [11] investigated the vibration behavior of porous FG beams resting on an elastic foundation. The thermo-mechanical buckling resistances of passive

polymeric sandwich plates with faces strengthened by CNT aggregation and evenly distributed porosity across the thickness of the plate were examined by Moradi-Dastjerdi, Behdinan [12].

L'objectif principal de cette thèse est d'étudier est d'analyser l'impact des formulations précises des fondations Pasternak arbitrairement orthotropes (AOP) et des variations des fondations de type Winkler (Parabolique, Sinusoïdal, Exponentiel, Cousins) sur les caractéristiques de flambement, de déplacement et de vibration libre des poutres renforcées par des nanotubes de carbone (CNT). En utilisant la théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), l'étude explore les effets de quatre distributions distinctes de CNT (FG-X, FG-O, FG-V, et FG-U) De plus, une formule alternative de renforcement des poutres (n-FG-X), illustrant des schémas de distribution non linéaires des CNT, est également considérée ainsi que les influences de la porosité, du rapport d'élanement L/h et des paramètres des fondations élastiques sur les comportements mécaniques des poutres.

Le travail est organisé en quatre chapitres :

Le premier chapitre de ce travail présente une revue de littérature sur les matériaux hétérogènes, en particulier les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matrices polymères renforcées par nanotubes de carbone (FG-CNT), celui qui va faire l'objet de notre étude. Ce chapitre aborde, aussi, l'évolution historique des matériaux carbonés, les différentes formes traditionnelles de carbone, ainsi que les innovations dans ce domaine. Une attention particulière est accordée à l'augmentation du nombre de publications sur les CNT et à leur développement. Ensuite, les propriétés mécaniques des nanotubes de carbone sont examinées, suivies d'une discussion sur les techniques de fabrication des CNT, en mettant l'accent sur la répartition du matériau de base. Enfin, les lois régissant les variations des propriétés dans les FG-CNT poreux sont explorées, et une synthèse des études récentes sur les nanotubes de carbone et leurs applications est proposée.

Le second chapitre présente les fondements théoriques des poutres et des fondations élastiques, en commençant par des théories bien établies telles que la théorie d'Euler-Bernoulli et la théorie de Timoshenko, avant de se concentrer sur des approches plus avancées pour une meilleure compréhension des structures complexes. Le rôle central des fondations dans la conception des structures est souligné, en insistant sur leur importance pour la stabilité et la sécurité des ouvrages. Le chapitre conclut par une revue de la littérature sur les poutres soutenues par des fondations élastiques, incluant des modèles éléments finis et une approche par couches pour les structures composites.

Le troisième chapitre se concentre sur l'élaboration d'une formulation mathématique destinée à analyser l'impact de la fondation et de la porosité sur le comportement dynamique, statique et de stabilisation des poutres à matrice polymère renforcées par des nanotubes de carbone (CNT). Cette étude est basée sur une théorie d'ordre supérieur, prenant en compte l'effet double du cisaillement et de l'étirement de l'épaisseur qui s'avère plus appropriés pour le cas des poutres courtes.

Le chapitre quatre est consacré à l'analyse et l'interprétation des résultats de l'étude dynamique et statique d'une poutre poreuse renforcée par des nanotubes de carbone (CNT), reposant sur des fondations élastiques de type Winkler-Pasternak. Pour cette étude, nous avons considéré une fondation de Winkler-Pasternak avec une variation de la rigidité élastique de Winkler le long de la poutre et une couche de Pasternak orthotrope, en tenant compte de différentes distributions de porosité. La formulation mathématique élaborée dans le chapitre précédant a été explicité en trois différents programmes de fréquences vibration, de flèches de déplacement du au chargement transversal et de charges critiques de flambage afin de procéder à une validation du modèle programmer et une étude paramétrique des différents facteurs influents dans le cas de ces différents chargements mécaniques.

Nous terminerons la thèse par une conclusion générale reflétant le contenu de la thèse, ainsi que des perspectives pour de futurs chercheurs inspirées au cours de ce travail.

**Chapitre I : Généralités sur le matériau
d'étude : lois de mélange et modèles
micromécaniques**

I.1. Introduction

Ces dernières années, les matériaux composites ont été critiqués pour leurs défauts de conception, tels qu'une faible résistance mécanique et à l'impact, ainsi que des problèmes au niveau des interfaces, ce qui peut entraîner des décollements ou des ruptures sous des charges mécaniques ou thermiques [1]. Avec des exigences croissantes dans des environnements sévères, les matériaux homogènes traditionnels montrent souvent leurs limites [2]. Cela a conduit à la recherche de solutions plus performantes, telles que les matériaux à gradient fonctionnel (FGM), pour surmonter ces limitations. Les FGM, qui sont des composites macroscopiquement inhomogènes, sont devenus de plus en plus courants, notamment les composites métal/céramique [2]. En combinant les excellentes propriétés des céramiques en matière de résistance à la chaleur et à la corrosion avec la ténacité des métaux, les structures FGM offrent des avantages significatifs, notamment leur capacité à supporter de lourdes charges dans des environnements à haute température [3].

D'autre part, les nanotubes de carbone (CNT) ont suscité un intérêt considérable dans la recherche scientifique et technologique en raison de leurs propriétés exceptionnelles, telles qu'une résistance mécanique élevée, une conductivité électrique remarquable et une stabilité chimique notable. Ces structures cylindriques, formées de feuillets de graphène enroulés, peuvent être monocouches (SWNT) ou multicouches (MWNT), et se distinguent par leurs applications potentielles dans divers domaines, allant de l'électronique à la nanomédecine.

I.2. Concept et historique des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont une classe de matériaux avancés fabriqués à partir de différents composants de matériaux généralement de deux phases céramique et métallique séparées par un mélange intermédiaire constitué de ces deux phases [1] dans un indice de gradient spécifique pour posséder une lisse et continue variation des propriétés dans une certaine direction [4] dont les propriétés matérielles (telles que les propriétés mécaniques et thermiques) changent continuellement d'une surface à l'autre [5] (voir figure I.1).

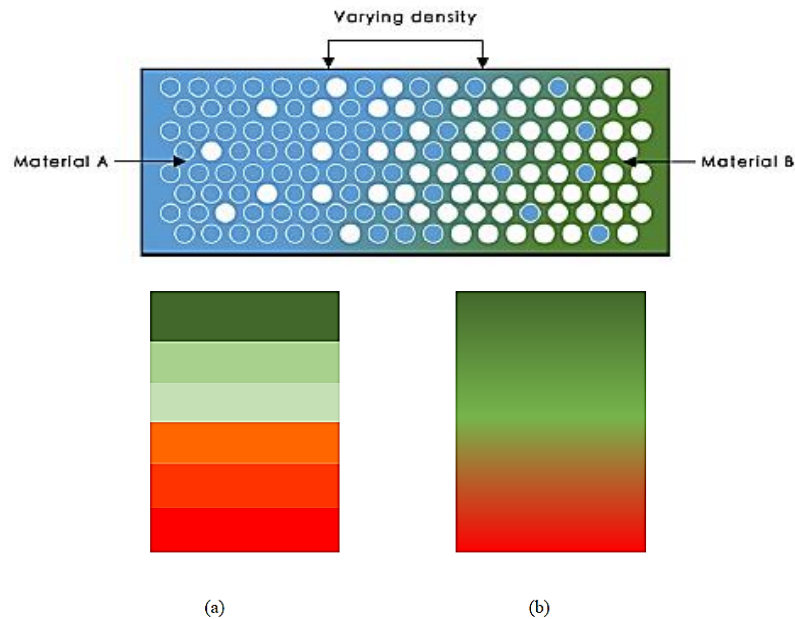


Figure I. 1- Approche de modélisation des FGM a) modèle par couche [13] b) Modèle de distribution en monocouche équivalente [14].

La Figure I.2 illustre les caractéristiques microstructurales des matériaux fonctionnellement gradés (FGM). Au début, la phase A se présente sous forme de grains isolés et dispersés dans la phase B (a). Progressivement, les particules de la phase A se regroupent en amas, dont le volume augmente en fonction de l'augmentation de la fraction volumique de la phase A (b, c, d, e, et f). Ce changement dans la microstructure a un impact significatif sur les propriétés mécaniques, thermiques et électriques du matériau [7].

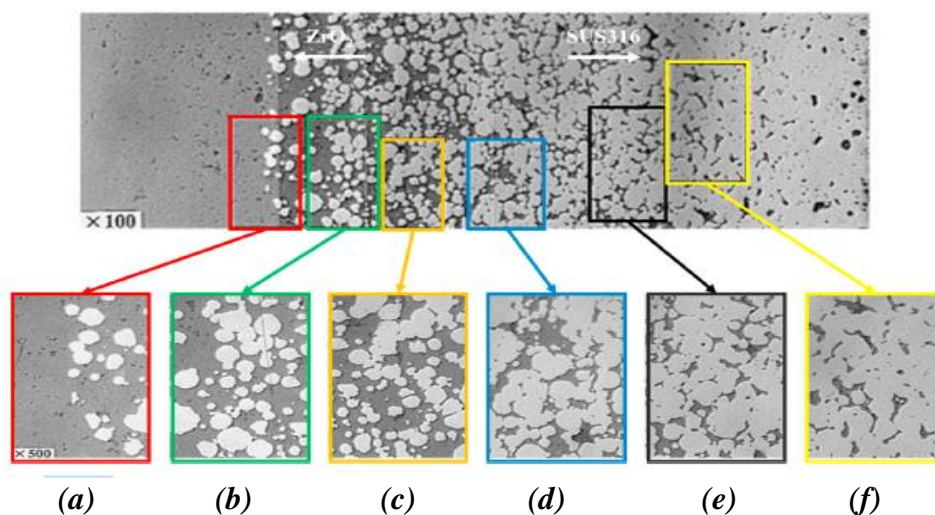


Figure I. 2- Variations de la microstructure d'un FG SS316/ZrO₂ distribution [15].

Les FGM peuvent être utilisés de différentes manières : 1) matière première en FGM, 2) couche de revêtement en FGM, 3) connexion en FGM .

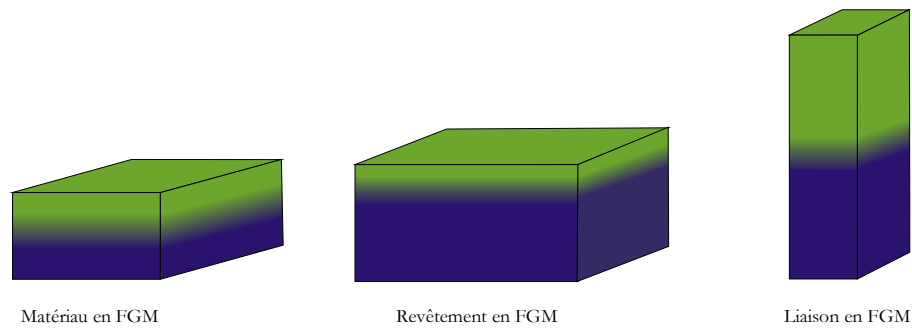


Figure I. 3 - Différentes classes application des FGM.

En 1984, des chercheurs de Sendai ont introduit le concept des matériaux à gradient fonctionnel (FGM) comme solution pour la fabrication de matériaux de barrière thermique [16]. Ces dernières décennies, les propriétés uniques des FGM ont conduit à leur adoption dans divers secteurs de l'ingénierie [17].

En 1987, le Japon a lancé un projet national visant à développer des FGM pour les applications de propulsion spatiale, en se concentrant sur des matériaux capables de résister à des conditions thermiques extrêmes. Ce projet a abouti en 1992 à la production de pièces de coque carrées de 300 mm et hémisphériques de 50 mm de diamètre en SiC-C FGM [16]. Ces matériaux promettent de résoudre les problèmes rencontrés par les matériaux conventionnels dans les nouvelles embarcations en raison de leur haute performance et de leurs propriétés multifonctionnelles [18].

En 1993, un deuxième projet national a été lancé pour explorer l'application des FGM dans la conversion d'énergie, avec pour objectif d'améliorer l'efficacité de cette conversion grâce à des structures fonctionnellement graduées [16]. La première description systématique des FGM a été publiée en 1995 par Koizumi et Niino [19]. Les FGM, avec leurs propriétés mécaniques exceptionnelles, offrent des avantages significatifs pour les matériaux exposés à des environnements extrêmes, capables de fonctionner à des températures cibles de 2100K et à des gradients thermiques de 1600K sur des sections transversales de moins de 10 mm [16]. À ce jour, aucun matériau industriel n'égale ces performances sans compromettre [18] leur intégrité structurelle. L'innovation des FGM réside dans leur composition graduée, combinant des céramiques résistantes à la chaleur avec des métaux à haute conductivité thermique, permettant ainsi une transition progressive de la céramique au métal [20].

I.3. Propriétés Matérielles des matériaux à fonctionnement graduel (FGM)

Dans la conception des matériaux fonctionnellement gradés (FGM), le choix des composants repose sur leurs propriétés physiques spécifiques. En général, les FGM combinent principalement deux types de matériaux : les céramiques et les métaux.

Les métaux sont prisés pour leurs nombreux avantages : ils sont de bons conducteurs thermiques et électriques, tout en étant solide et plastiquement malléables. De plus, certains métaux possèdent des points de fusion élevés. Les métaux couramment utilisés dans les FGM incluent le fer, le nickel, le tungstène, le titane, le magnésium et l'aluminium (figure I.4).

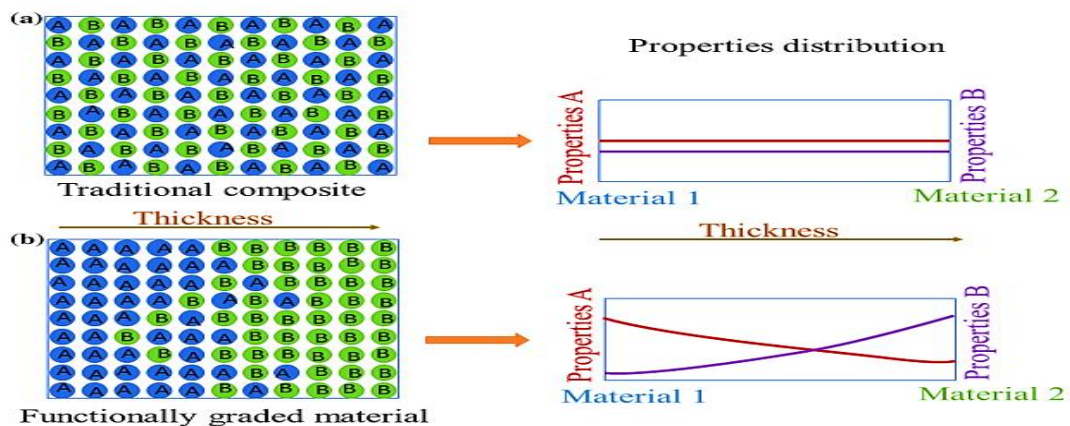


Figure I. 4- (a) Matériaux composites traditionnels, (b) Matériaux à gradation fonctionnelle [21].

I.3.1. Classification des Gradients en Fonction de leur Nature

Les pathologies d'origine physique résultent de phénomènes naturels qui affectent les propriétés du béton. Elles incluent : Certaines études [22, 23] ont classifié les matériaux à gradient fonctionnel selon leur nature en quatre types distincts (figure I.5) :

- **Gradient de fraction** : Variation de la proportion des phases constituantes le long du matériau.
- **b) Gradient de forme** : Changement dans la forme ou la géométrie des phases au sein du matériau.
- **c) Gradient d'orientation** : Modulation de l'orientation des phases ou des structures au sein du matériau.
- **d) Gradient de taille** : Variation de la taille des particules ou des structures au sein du matériau.

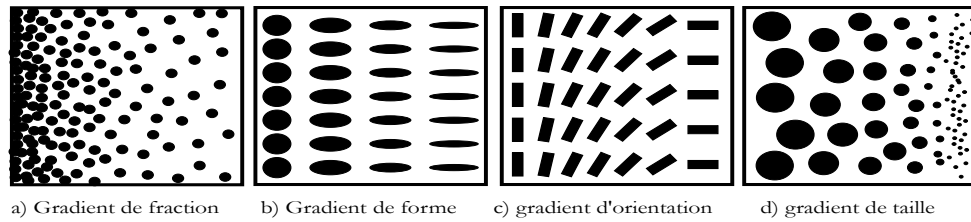


Figure I. 5- Présente une classification de plusieurs FGM en fonction de la nature de leur gradient [15].

I.3.2. Analyse des gradients : classification par type

Les matériaux fonctionnellement gradés (FGM) se divisent en trois catégories principales de gradients :

a) Gradient de composition : Varie la proportion des matériaux constitutifs (comme céramique et métal) à travers le matériau.

b) Gradient de microstructure : Modifie la structure interne ou la distribution des phases au sein du matériau.

c) Gradient de porosité : Ajuste la quantité de porosité ou d'espaces vides dans le matériau.

Ces catégories de gradients permettent de concevoir des FGM adaptés à des applications spécifiques, comme illustré dans la figure I.6.

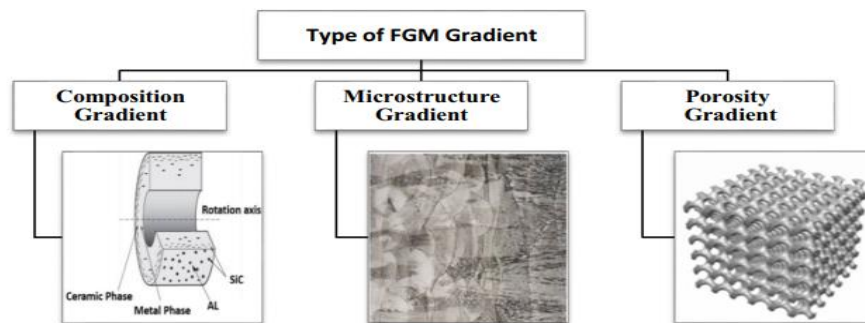


Figure I. 6- Exemple typique de trois différents types de gradient de FGM [24].

I.4. Concepts de distribution de la matière

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) permettent de concevoir des distributions de matériaux en fonction de différentes spécifications spatiales. La répartition des matériaux est définie par des fonctions qui associent la composition du matériau à sa position dans la pièce. Comme illustré à la Figure I.7, les pièces en FGM peuvent présenter des transitions de matériaux

en une, deux ou trois dimensions, en utilisant des fonctions linéaires ou non linéaires pour guider ces variations [17].

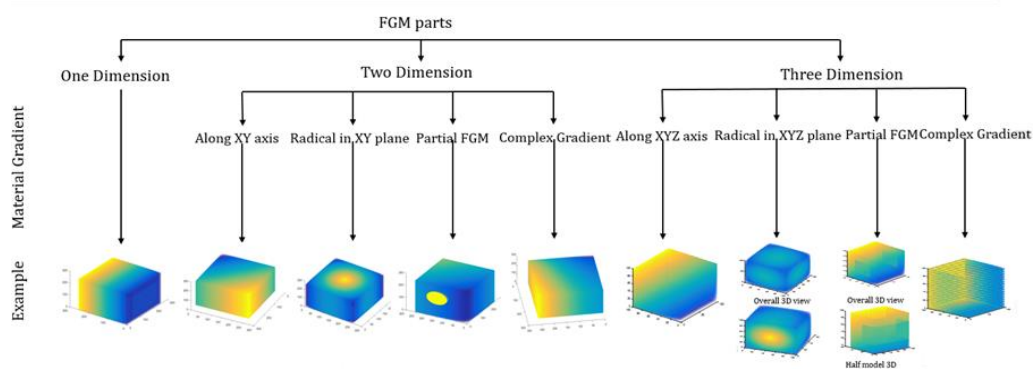


Figure I. 7- Représentation des FGM variés en termes de changement dimensionnel linéaire et non linéaire dans la distribution des matériaux [25].

La composition multi phase à travers l'épaisseur est l'un des paramètres essentiels à prendre en compte lors de la fabrication des matériaux à gradient fonctionnel. Pour une bonne modélisation de ces matériaux, il est nécessaire que les caractéristiques soient influencées à la fois par la position et la température du point en question.

I.5. Caractéristiques effectives des matériaux à gradients fonctionnels (FGM)

Les matériaux fonctionnellement gradés (FGM) sont constitués de deux phases distinctes, chacune ayant des propriétés spécifiques. La distribution de ces phases varie progressivement le long de la direction de gradation, ce qui modifie les propriétés globales du matériau. Il existe deux principales méthodes de modélisation des FGM (figure I.8) :

- **Modèle à dégradation discontinue :** La fraction volumique des phases (céramique et/ou métal) change par étapes le long de la direction de gradation. Chaque section du matériau présente une composition ou une microstructure distincte, avec des interfaces marquées entre les différentes phases.
- **Modèle à dégradation continue :** La fraction volumique des phases varie de manière continue selon une fonction de la coordonnée z . Dans ce modèle, la quantité d'un composant augmente tandis que l'autre diminue de façon continue, de manière inversement proportionnelle.

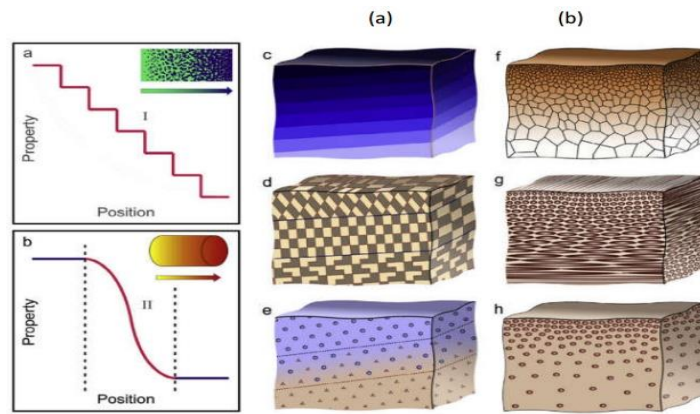


Figure I. 8-Modèle analytique pour une couche d'un matériau FGM [26].

D'autre part, la figure I.9 met en évidence que les techniques des matériaux FGM adoptent généralement un profil de forme sigmoïde pour la variation des propriétés des matériaux.

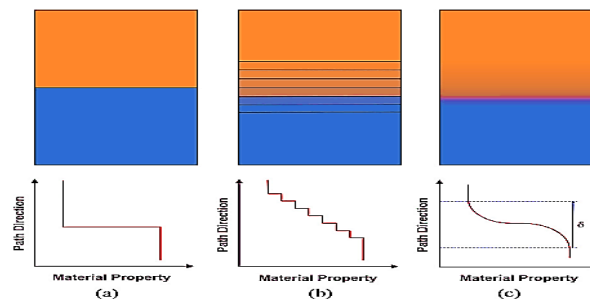


Figure I. 9 - (a) Linéaire, (b) étape et (c) transition sigmoïde dans les FGM [27].

En revanche, la figure I.10 présente différents types de gradient de composition.

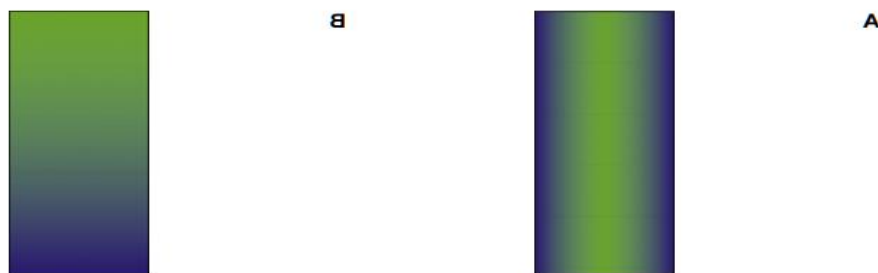


Figure I. 10- Types de gradient de composition. (A) radial et (B) longitudinal [28].

I.6. Lois régissant la distribution matérielle dans les matériaux FGM

Un matériau fonctionnellement gradé (FGM) se définit par la variation de ses fractions volumiques le long de sa structure. Pour prédire les propriétés d'un FGM avec un profil de composition spécifique, il est essentiel de choisir une fonction de distribution de composition appropriée. Il est d'abord nécessaire de connaître les caractéristiques des matériaux individuels

pour chaque composition (dans le cas des composites non-FGM). Pour évaluer les propriétés thermos-physiques efficaces des matériaux hétérogènes, plusieurs règles de mélange ont été élaborées [23-27]. Les chercheurs utilisent souvent des fonctions telles que la loi de puissance, la fonction exponentielle ou la fonction sigmoïde pour modéliser les fractions volumiques [28].

I.6.1. Loi de distribution en puissance

Les pathologies d'origine mécanique résultent de contraintes excessives, de forces externes ou de charges anormales appliquées aux structures en béton armé. Ces dégradations peuvent se manifester sous diverses formes, notamment :

Le changement des propriétés du matériau en fonction de l'épaisseur se décrit de la manière suivante :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n \quad \text{I.1}$$

La fraction volumique de P-FGM est supposée suivre une fonction de loi de puissance :

$$g(z) = \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^p \quad \text{I.2}$$

Où p est le paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction volumique locale $g(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'un P-FGM peuvent être déterminées par la règle du mélange (Bao et Wang, 1995) :

$$E(z) = g(z)E_1 + [1 - g(z)]E_2 \quad \text{I.3}$$

Où E_1 et E_2 sont les modules d'Young des surfaces inférieure ($z = h/2$) et supérieure ($z = -h/2$) du FGM plaque, respectivement. La variation du module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque P-FGM est illustrée à la Figure I.11, qui montre que le module de Young change rapidement près de la surface la plus basse pour $p > 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p < 1$.

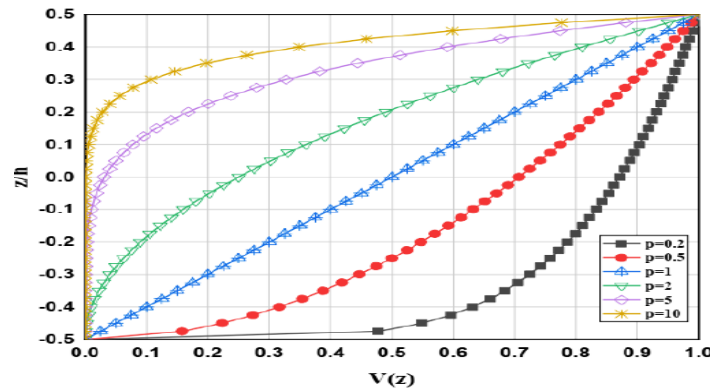


Figure I. 11- Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur P-FGM.

I.6.2. Lois de distribution sigmoïde

Dans le cas de l'incorporation d'un FGM d'une seule fonction de loi de puissance dans un composite multicouche, des concentrations de contraintes apparaissent au niveau des interfaces où le matériau reste continu mais subit des changements rapides (Lee et Erdoğan, 1995 ; Bao et Wang, 1995). Par conséquent, Chung et Chi (2001) ont introduit une définition de la fraction volumique en utilisant deux fonctions de loi de puissance afin d'assurer une répartition uniforme des contraintes entre toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{si } 0 \leq z \leq h/2$$

$$g_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{si } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0$$
I.4

En appliquant la règle de mélange, le module de Young du S-FGM peut être calculé comme suit :

$$E(z) = g_1(z)E_1 + [1 - g_1(z)]E_2 \quad \text{si } 0 \leq z \leq h/2$$

$$E(z) = g_2(z)E_1 + [1 - g_2(z)]E_2 \quad \text{si } 0 \leq z \leq h/2$$
I.5

Les équations montrent la variation du module de Young, comme indiquée dans la figure I.12. Les sections (4a) et (4b) décrivent les distributions sigmoïdes, et cette plaque de FGM est appelée plaque sigmoïde de FGM (plaques S-FGM).

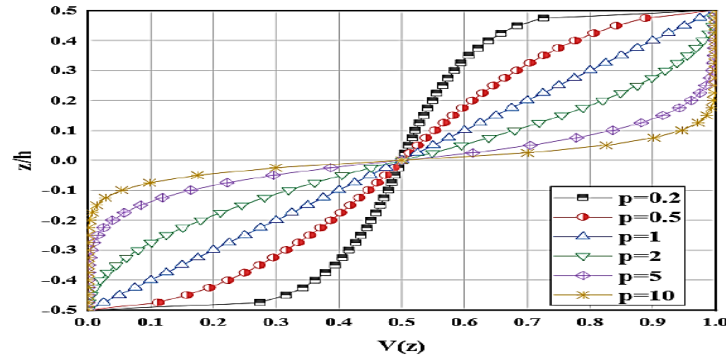


Figure I.12- Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur (S-FGM).

I.6.3. Loi de distribution exponentielle

De nombreux chercheurs ont utilisé la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des FGM comme suit :

$$E(z) = Ae^{B\left(\frac{z+h}{2}\right)} \quad \text{I.6}$$

$$A = E_2 \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$$

La distribution des matériaux dans le sens de l'épaisseur des plaques E-FGM est tracée à la Figure I.13.

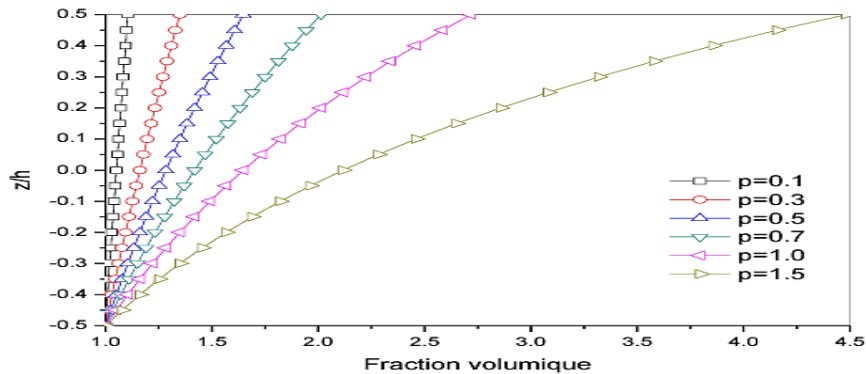


Figure I.13- variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

I.6.4. Plaques sandwiches

Deux constructions sandwich courantes sont utilisées pour décrire les caractéristiques des plaques rectangulaires tridimensionnelles prises en sandwich, comme le montre la figure I.14 (a), (b). Deux types de structures sandwich structures sont désignés comme type A et type B. La feuille de face FGM et un cœur sont représentés par le type A, tandis que le type B contient une feuille de face homogène et un noyau FGM. La fraction volumique d'un FGM est définie comme suit à la plaque sandwich rectangulaire [29] :

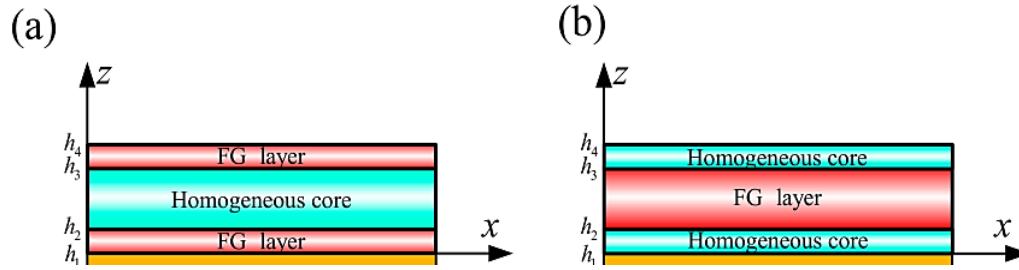


Figure I. 14 (a)- La variation de matériau le long de l'épaisseur de la plaque rectangulaire sandwich 3D FG : (a) âme en FGM et noyau homogène, et (b) âme homogène et noyau en FGM [29].

$$\text{Type A : } \left\{ \begin{array}{l} V_1^1 = \left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right)^p \quad z \in [z_1, z_2] \\ V_1^2 = 1 \quad z \in [z_2, z_3] \\ V_1^3 = \left(\frac{z - z_4}{z_3 - z_4} \right)^p \quad z \in [z_3, z_4] \end{array} \right\} \quad \text{Type B : } \left\{ \begin{array}{l} V_1^1 = 1 \quad z \in [z_1, z_2] \\ V_1^2 = \left(\frac{z - z_3}{z_2 - z_3} \right)^p \quad z \in [z_2, z_3] \\ V_1^3 = 0 \quad z \in [z_3, z_4] \end{array} \right\} \quad \text{I.7}$$

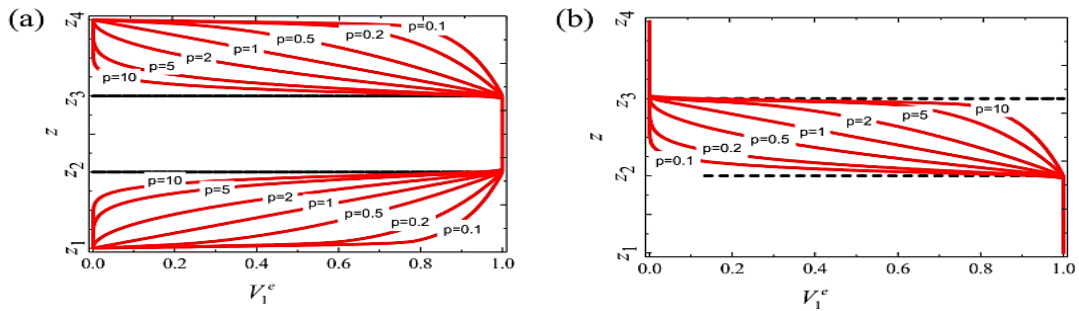


Figure I. 14 (b)- Variation of the volume fraction V_1^e through the thickness for different values of the power law exponent: (a) type A and (b) type B [29].

I.7. Matériaux nano-composites intelligents

Au cours des dernières décennies, on a observé un passage vers le développement de matériaux nano-composites intelligents légers capables d'autoguérison, d'auto-assistance et d'auto-soutien, offrant plusieurs avantages par rapport aux matériaux traditionnels tels que les polymères, les céramiques et les métaux. Les CNT (nanotubes de carbone) s'intègrent parfaitement dans ce domaine de niche, répondant aux exigences des innovations technologiques actuelles. La littérature a montré que, au cours des vingt-cinq dernières années, de nombreux composites, qu'ils soient à matrice polymère (PMC), à matrice métallique (MMC) ou à matrice céramique (CMC), ont été préparés en utilisant les nanotubes de carbone (CNT) comme agent de renforcement en raison de leurs caractéristiques exceptionnelles [30-33]. De nombreuses études approfondies ont été menées par les chercheurs pour examiner leurs caractéristiques, telles que les propriétés thermomécaniques, la résistance chimique, la transparence optique, les

caractéristiques vibratoires, la conductivité thermique, la conductivité électrique et la résistance à la traction [32-34].

I.7.1. Différentes formes traditionnelles du carbone

Le graphite est un matériau solide de couleur noire, se distinguant par une structure hexagonale, comme le montre la figure I.15(a). Ses plans, appelés graphènes, sont agencés selon un motif ABAB, avec un espacement de $3,35 \text{ \AA}$. Ces plans sont reliés par de faibles forces de Van der Waals, permettant ainsi leur mouvement relatif. À l'intérieur d'un plan, la liaison entre les atomes de carbone (C-C) mesure $1,415 \text{ \AA}$. En ce qui concerne le diamant, c'est une forme dense et métastable du carbone, qui se forme sous des conditions de température et de pression extrêmes. Sa structure cubique avec des liaisons sp^3 lui confère une rigidité exceptionnelle, en faisant le minéral naturel le plus dur (figure I.15(b)).

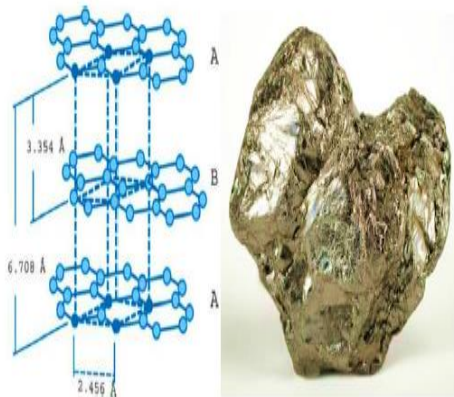


Figure I.15-(a)- Représentation de la structure hexagonale du graphite, accompagnée d'une image de la roche de graphite [35].

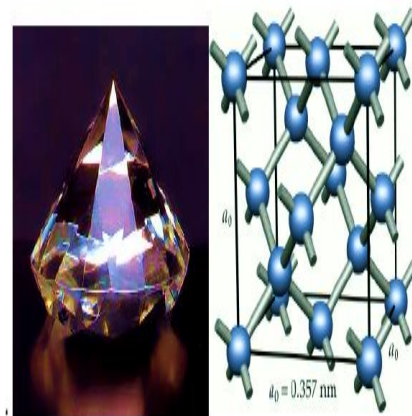


Figure I.15 -(b)-Représentation de la structure cristalline du diamant, accompagnée d'une photographie d'une pierre de diamant [35].

I.7.2. Innovations dans les matériaux carbonés

Actuellement, de nouvelles formes de carbone ont été découvertes, telles que le fullerène (C60), les nanotubes à une seule couche, les nanotubes à plusieurs couches (ou multi-parois) et les nanotubes à une seule feuille (ou mono-paroi).

I.7.2.1. Fullerènes

Le graphène, élément clé du graphite, est une feuille plane d'atomes de carbone disposés en hexagones. Lorsque le nombre d'atomes diminue, les liaisons non saturées aux bords augmentent, ce qui conduit la structure à se refermer. Pour un nombre d'atomes inférieur à

quelques centaines, des structures stables appelées fullerènes se forment, ressemblant à un ballon de football avec 60 atomes de carbone aux sommets d'un polyèdre sphérique comme la montre dans la figure I.16.

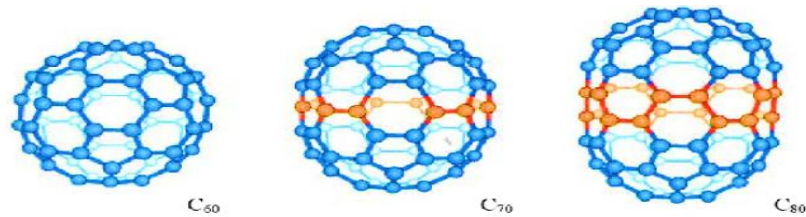


Figure I. 16 - De C60 à C80 les atomes ajoutés au C60 pour obtenir le C70 et le C80 sont indiqués en rouge [35].

I.7.2.2. Nanotubes mono feuillet (ou mono paroi)

Les nanotubes de carbone à paroi simple SWCNT (Single Walled Carbon Nanotubes) ont une structure qui peut être décrite comme un feuillet de graphène enroulé sur lui-même et fermé à ses deux extrémités par une demi-sphère (figure I.17).

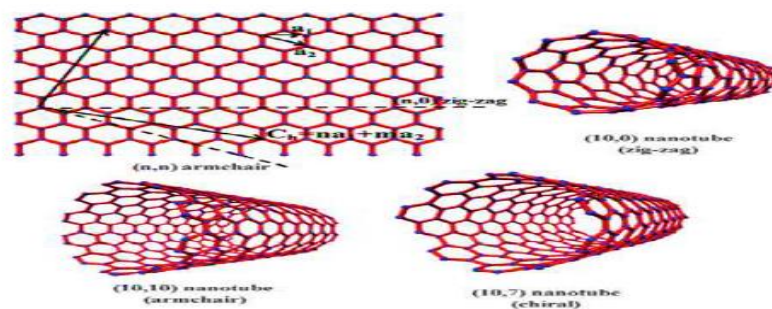


Figure I. 17 - Illustration de la structure de type « nid d'abeille » du graphène et exemples de nanotubes en fonction des valeurs de n et m, selon C. N [36].

Les atomes de carbone dans les nanotubes conservent une hybridation sp^2 . T. Belin (2005) explique que la configuration du nanotube est déterminée par le mode de roulage du feuillet de graphène, ce qui définit le paramètre d'hélicité. Selon Micah J. Green (2009), la structure en « nid d'abeille » du graphène est décrite par deux vecteurs directeurs a_1 et a_2 du réseau cristallin. Ces vecteurs définissent le vecteur de chiralité Ch , qui correspond à l'axe autour duquel le graphène se replie pour former le nanotube. Ce vecteur peut être exprimé à l'aide de deux scalaires, m et n de la manière suivante :

$$Ch = n.a_1 + m.a_2 \quad I.8$$

En fonction des valeurs de m et n, on identifie trois types de nanotubes :

- Si $m=0$, le nanotube est considéré comme ayant une structure de type zig-zag.

- Si $m=n$, le nanotube est décrit comme ayant une structure de type fauteuil ou arm chair.
- Dans tous les autres cas, le nanotube est qualifié de chiral.

I.7.2.3. Nanotubes multi-feuillets (ou multi-parois)

Ces nanotubes multicouches sont constitués de plusieurs couches de graphène disposées en cylindres concentriques (voir Figure I.18). Cette structure est appelée "poupée russe" en raison de sa ressemblance avec les poupées qui s'emboîtent les unes dans les autres. Un nanotube multicouche possède un diamètre interne d'environ deux nanomètres et un diamètre externe d'environ vingt nanomètres.

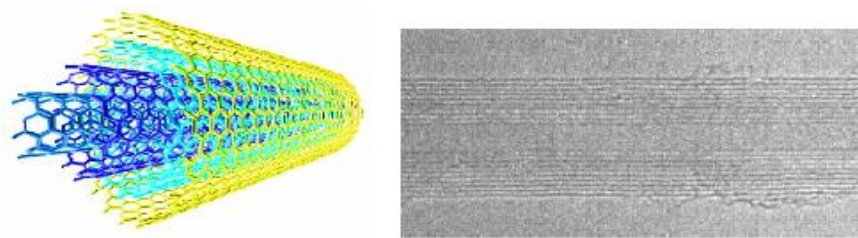


Figure I. 18 - À gauche : Représentation graphique d'un nanotube de carbone à parois multiples (MWNT) ; à droite : Image obtenue au microscope électronique à transmission montrant plusieurs nanotubes de carbone à parois multiples.

I.7.3. Défectuosités des nanotubes de carbone

Les nanotubes monocouches tendent à s'agglomérer en faisceaux, appelés fagots, en raison des interactions de van der Waals entre leurs parois. Des défauts dans le réseau de graphène, engendrés par des cycles non hexagonaux, se retrouvent à la fois dans les nanotubes à paroi simple (SWNT) et à paroi multiple (MWNT), comme le montre la figure I.19. Un pentagone crée une courbure positive, alors qu'un heptagone induit une courbure négative.

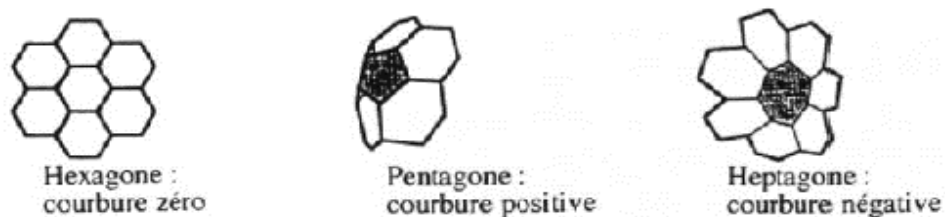


Figure I. 19- Impact du type de cycle sur la courbure de la surface [37].

Sur la figure I.20, l'influence des cycles non hexagonaux sur les feuillets de deux nanotubes multicouches est illustrée.

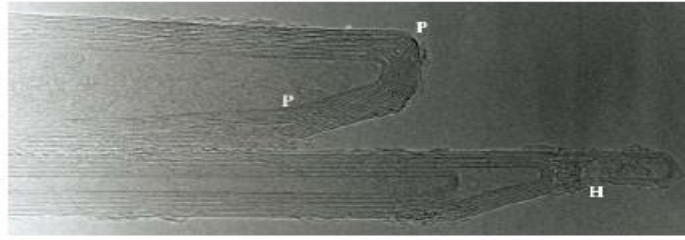


Figure I. 20- Image au microscope électronique à transmission des extrémités de deux nanotubes multicouches. Quelques cycles non hexagonaux sont indiqués : (P) pour un pentagone et (H) pour un heptagone [37].

La présence simultanée de plusieurs types de défauts sur un tube peut engendrer diverses géométries particulières. Par exemple, l'association d'un pentagone et d'un heptagone sur un nanotube, connue sous le nom de défaut de Stone-00Wales Stone and Wales [38], peut provoquer des variations du diamètre et de la chiralité le long du tube. En effet, bien que les courbures individuelles se compensent globalement, elles restent distinctes à une échelle locale, comme le montre la figure I.21.

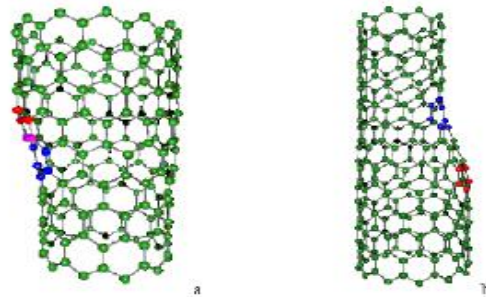


Figure I. 21 -Introduction d'une paire pentagone-heptagone provoquant une variation de diamètre et de chiralité : a) de (11,0) à (12,0) ; b) de (9,0) à (12,0) [38].

Ces combinaisons peuvent expliquer la torsion observée dans certains nanotubes multicouches, phénomène résultant de la décomposition catalytique des hydrocarbures. En augmentant le nombre de défauts dans le réseau graphitique, il est possible de concevoir diverses structures, telles que des jonctions en Y ou en T, comme illustré à la figure I.22.

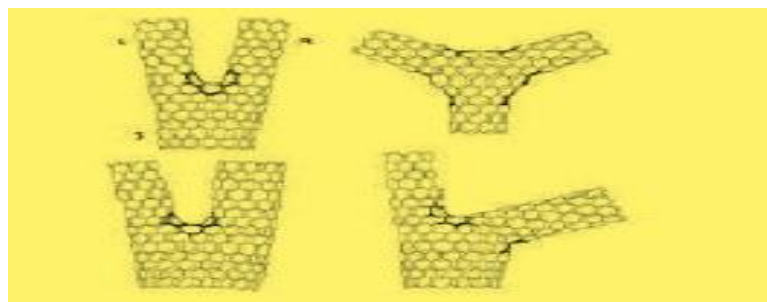


Figure I. 22- Défauts pentagonaux et heptagonaux entraînant la formation de jonctions [35].

En plus des défauts intrinsèques des nanotubes, il est essentiel de considérer les impuretés, qu'elles soient carbonées ou non, qui peuvent les accompagner.

Impuretés métalliques : Les catalyseurs métalliques utilisés lors de la synthèse peuvent se retrouver dans l'échantillon brut. Leur élimination est complexe car ces catalyseurs se présentent souvent sous forme de nanoparticules, difficiles à séparer par filtration ou centrifugation. De plus, ces particules sont souvent recouvertes de plusieurs couches de graphène, rendant leur élimination par oxydation inefficace.

Composants carbonés : Un échantillon brut peut contenir non seulement des nanotubes, mais aussi des particules de graphite, du carbone amorphe (plus ou moins structuré) et des molécules carbonées de faible masse, telles que le C60 ou des hydrocarbures polycycliques (voir figure I.23).

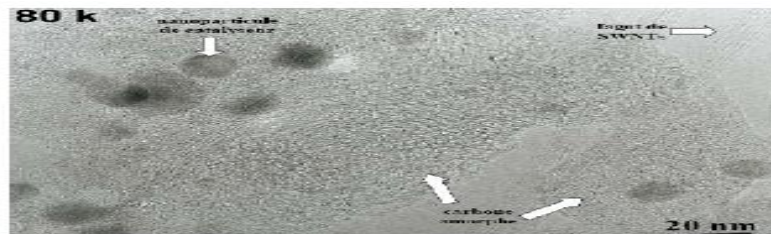


Figure I. 23 -Image au microscope électronique à transmission d'un échantillon de nanotubes (collerette brute produite par arc électrique). En plus des nanotubes de carbone à parois simples SWNT, on peut distinguer des particules de catalyseur ainsi que deux formes de carbone amorphe [37].

I.8. Une brève histoire des nanotubes de carbone (CNT)

Un grand nombre de recherches ont été menées dans le domaine des nano-composites depuis la première synthèse des nanotubes de carbone (à parois multiples et à paroi unique) réalisée par le chercheur japonais Dr Iijima, grâce à des techniques de synthèse par décharge électrique[39, 40]. Par la suite, les nanotubes de carbone (CNT) promettent de révolutionner plusieurs domaines de la science des matériaux et constituent un élément majeur de la nanotechnologie en raison de leurs propriétés remarquables et de leurs applications fascinantes. Les études expérimentales et théoriques ont démontré que les CNT possèdent des propriétés mécaniques exceptionnelles, un rapport d'aspect élevé et de bonnes caractéristiques de sinuosité[41], une légèreté [42, 43], d'excellentes propriétés thermiques, une bonne conductivité électrique, un point de fusion élevé, une grande surface spécifique, une capacité exceptionnelle de stockage de l'hydrogène [44], une résistance accrue à la corrosion [45], des propriétés optiques uniques, ainsi que des propriétés chimiques et composées supérieures par rapport aux matériaux

classiques et avancés disponibles [46]. Les CNT, absents à l'état naturel, doivent être synthétisés en laboratoire par le biais de différentes techniques qui se distinguent par leur simplicité de mise en œuvre, leur capacité à produire des CNT avec moins de défauts et une quantité réduite de carbone amorphe. Chaque méthode présente des avantages et des limites, ce qui engendre des résultats de croissance variés et permet de sélectionner la technique la plus adaptée pour obtenir les propriétés souhaitées des CNT. De nombreux articles de revue approfondis ont été publiés concernant les synthèses par décharge électrique [47, 48], ablation laser [49-51] et décomposition chimique en phase vapeur [52-54].

Les avancées dans les techniques de synthèse des nanotubes de carbone (CNT) et la diminution constante de leur coût ont rendu les composites renforcés par des CNT particulièrement intéressants. De nombreuses expériences et analyses théoriques ont été menées pour déterminer avec précision les propriétés mécaniques, les caractéristiques thermiques, les déformations électrostatiques, les résonances électromécaniques, les propriétés thermomécaniques, le flambement induit par la flexion, les comportements vibratoires, ainsi que les comportements en flambement de divers types de structures composites renforcées par des nanotubes de carbone (CNTRC).

Les résultats de ces recherches approfondies montrent que l'intégration des CNT dans différents composites améliore considérablement leurs propriétés thermiques, électriques et mécaniques [55-57]. En outre, les propriétés des nano-composites dépendent également du type de matrice, de la méthode de fabrication, du mode de répartition et de la fraction volumique des CNT (VCNT) [58].

I.9. Taux de Publication et Tendances de Recherche sur les Nanotubes de Carbone

L'utilisation des nanotubes de carbone (CNT) dans la fabrication de composites polymères renforcés de fibres connaît une croissance constante. Comme le montre le Graphique 1, cette tendance à l'augmentation est clairement visible. Avant 2010, les études de recherche sur les composites à base de CNT n'étaient pas considérées comme un sujet de recherche majeur. Les étiquettes des sommets indiquent le nombre de publications référencées dans cette analyse. Toutefois, une nette augmentation de l'utilisation des CNT à des fins de recherche et industrielles est observée après 2011, conformément aux tendances illustrées dans la Figure I.24 [59].

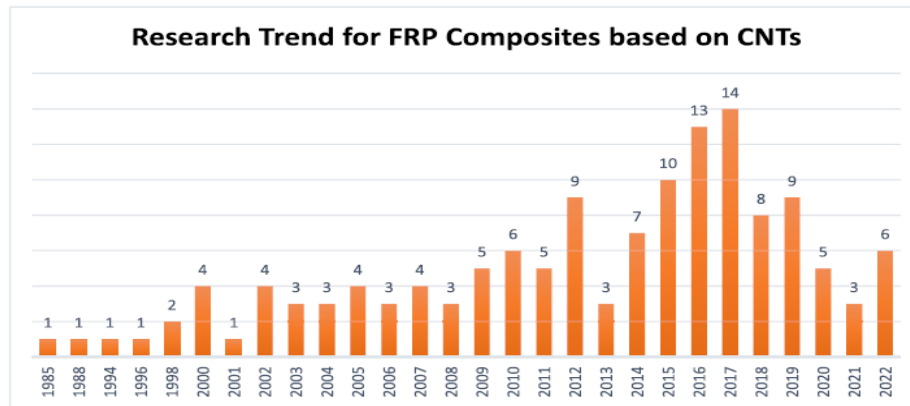


Figure I. 24 - Tendence de recherche sur les composites en polymères renforcés de fibres (FRP) à base de CNT, 1985-2022[59].

L'utilisation des CNT dans des applications industrielles est également illustrée à la Figure I.25. Leurs propriétés exceptionnellement optimistes et performantes en font des matériaux de choix pour leur intégration dans des composites polymères renforcés de fibres, spécialement conçus pour des applications industrielles.

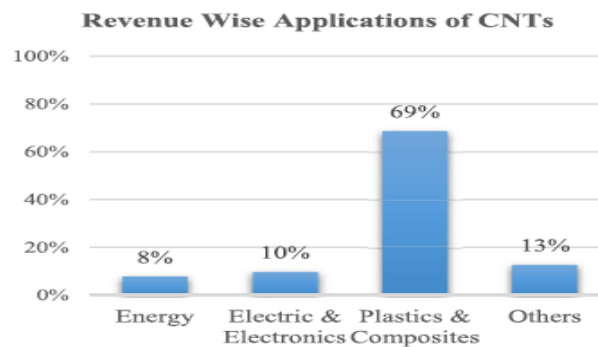


Figure I. 25-Classification des CNT basée sur les applications [59].

I.10. Les modèles micromécanique de type FG-CNT

De nombreux modèles micromécaniques, tels que le modèle Halpin-Tsai modifié, la règle des mélanges (ROM), la règle des mélanges étendue (EROM), le modèle Mori-Tanaka (MTM) avec l'effet de l'agglomération, l'approche Eshelby-Mori-Tanaka (EMT) avec des fibres orientées et droites ont été développés et appliqués dans les études antérieures pour estimer les propriétés effectives des structures FG-CNTRC. La règle des mélanges étendue (EROM) est celle qui a été le plus fréquemment utilisée par les chercheurs.

I.10.1. Modèle de Halpin-Tsai modifié

Les propriétés élastiques des deux constituants sont homogénéisées afin d'évaluer les propriétés effectives du composite à gradient fonctionnel (FG). Le modèle de Halpin-Tsai modifié est utilisé pour estimer le module de Young effectif du composite renforcé par des MWCNT. L'effet de l'orientation des CNT est également pris en compte dans l'analyse. Ainsi, une relation entre la rigidité effective et l'angle d'orientation des CNT (θ) est établie comme suit :

$$E(\theta) = \{E_T + (E_L - E_T) \cos^4 \theta\} \quad \text{I.9}$$

Le module effectif d'un composite renforcé de manière aléatoire est obtenu en effectuant la moyenne selon l'orientation, c'est-à-dire :

$$E = \frac{\int_0^{\pi/2} E(\theta) d\theta}{\int_0^{\pi/2} d\theta} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} E(\theta) d\theta \quad \text{I.10}$$

En substituant l'équation (I.9) dans l'équation (I.10) et en considérant les MWCNT comme un remplissage cylindrique solide effectif, uniformément dispersé et orienté aléatoirement dans une matrice polymère, le module de Young effectif (E_c) du composite MWCNT/polymère peut être obtenu par :

$$E_c = \left\{ \left(\frac{3}{8} \right) E_L + \left(\frac{5}{8} \right) E_T \right\} \quad \text{I.11}$$

Et

$$E_L = \left[\frac{1 + \xi_L \eta_L V_{mw}}{1 - \eta_L V_{mw}} \right] E_m, E_T = \left[\frac{1 + \xi_T \eta_T V_{mw}}{1 - \eta_T V_{mw}} \right] E_m \quad \text{I.12}$$

$$\eta_L = \left\{ \frac{(E_{mw} / E_m) - 1}{(E_{mw} / E_m) + \xi_L} \right\}, \eta_T = \left\{ \frac{(E_{mw} / E_m) - 1}{(E_{mw} / E_m) + \xi_T} \right\}$$

$$\xi_L = 2 \left(\frac{L_{mw}}{D_{mo} - D_{mi}} \right) \quad \text{I.13}$$

$$\xi_T = 2$$

Où E_{mw} indique les propriétés élastiques des MWCNT et E_L représente les propriétés élastiques de la matrice polymère. V_{mw} , L_{mw} , D_{mo} et D_{mi} désignent respectivement la fraction

volumique, la longueur, le diamètre externe et le diamètre interne des MWCNT. Ainsi, le module élastique effectif des MWCNT E_{cnt} est exprimé en fonction des paramètres structurels des CNT comme suit [60]:

$$E_{mv} = \frac{N_w t_{cnt} E_{cnt}}{(N_w - 1)h_{in} + t_{cnt}} \quad \text{I.14}$$

Où E_{cnt} , ν_{cnt} et t_{cnt} représentent respectivement le module de Young, le coefficient de Poisson et l'épaisseur de la paroi des CNT à paroi simple (SWCNT). N_w et h_{in} désignent le nombre de parois et l'espacement inter-parois des MWCNT. Il a été observé que l'espacement inter-parois des MWCNT varie de 0,27 à 0,42 nm ; dans ce travail, l'espacement inter-couches est considéré comme $1.5 * t_{cnt}$. Fondamentalement, les MWCNT sont des CNT constitués de parois concentriques également espacées (le nombre de parois peut varier entre 6 et 25 [61]) avec un diamètre interne compris approximativement entre 0,4 nm et 1 nm. En fonction de leur configuration (n, m), les diamètres externe et interne des SWCNT peuvent être calculés comme suit :

$$D_{cnt} = \frac{\sqrt{3(n^2 + m^2 + nm)}}{\pi} a_{c-c} \quad \text{I.15}$$

$$D_{so} = D_{cnt} + t_{cnt}, D_{si} = D_{cnt} - t_{cnt}$$

Où D_{cnt} , $t_{cnt}(=0.335nm)$ et $a_{c-c}(=0.141nm)$ représentent respectivement le diamètre moyen, l'épaisseur du tube et la longueur de la liaison carbone-carbone des SWCNT (voir figure I.26). Les diamètres externe et interne des MWCNT peuvent être calculés comme suit :

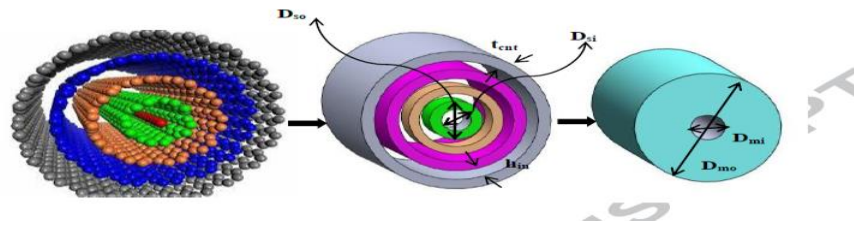


Figure I. 26- Représentation atomique et continue des MWCNT [62].

$$D_{mo} = D_{so} + 2(N_w - 1)h_{in}, D_{mi} = D_{si} \quad \text{I.16}$$

On suppose que l'ajout de parois dans la configuration des MWCNT ne modifie pas de manière significative le coefficient de Poisson ($\nu_{mv} = \nu_{cnt}$) la densité ($\rho_{mv} = \rho_{cnt}$). Ainsi, le

coefficient de Poisson et la densité de la plaque composite sont calculés à l'aide de la règle des mélanges et s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned} \nu_c &= V_{mw} \nu_{mw} + V_m \nu_m \\ \rho_c &= V_{mw} \rho_{mw} + V_m \rho_{cnt} \end{aligned} \quad \text{I.17}$$

I.10.2. Règle des mélanges étendue

Les modules de Young et de cisaillement effectifs des CNTRC avec des CNT alignés dans la direction longitudinale sont prédits à l'aide de la règle des mélanges étendue (ERM) comme suit [63] :

$$\begin{aligned} E_{11} &= \eta_1 V^{cnt} E_{11}^{cnt} + V_m E_m \\ \frac{\eta_2}{E_{22}} &= \frac{V^{cnt}}{E_{22}^{cnt}} + \frac{V_m}{E_m} \\ \frac{\eta_3}{G_{12}} &= \frac{V^{cnt}}{G_{12}^{cnt}} + \frac{V_m}{G_m} \end{aligned} \quad \text{I.18}$$

Où E_{11}^{cnt} , E_{22}^{cnt} et G_{12}^{cnt} désignent respectivement les modules de Young et le module de cisaillement des CNT. Les propriétés correspondantes de la matrice isotrope sont représentées par E_m et G_m . Les paramètres d'efficacité des CNT, notés η_i ($i=1,2,3$), caractérisent les propriétés des matériaux influencées par la taille. Ces paramètres sont déterminés en comparant les résultats des modules élastiques obtenus via des simulations de dynamique moléculaire (MD) [64] à ceux calculés à l'aide de la règle des mélanges étendue (ERM). Les fractions volumiques de la matrice V_m et des CNT V^{cnt} respectent la relation $V^{cnt} + V_m = 1$. De manière similaire, le coefficient de Poisson effectif ν_{12} et la densité massique ρ de la poutre CNTRC peuvent être déterminés comme suit :

$$\nu_{12} = V^{cnt} \nu_{12}^{cnt} + V_m \nu_m \quad \rho = V^{cnt} \rho^{cnt} + V_m \rho_m \quad \text{I.19}$$

Les schémas de distribution des CNT dans la matrice, illustrés à la Figure I.27, sont représentés sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned}
 UD \quad V^{cnt} &= V_*^{cnt} \\
 FG-V \quad V^{cnt} &= \left(1 + \frac{2z}{h}\right) V_*^{cnt} \\
 FG-X \quad V^{cnt} &= 4 \frac{|z|}{h} V_*^{cnt} \\
 FG-O \quad V^{cnt} &= \left(2 - 4 \frac{|z|}{h}\right) V_*^{cnt}
 \end{aligned} \tag{I.20}$$

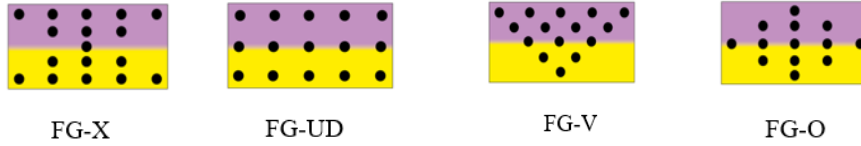


Figure I. 27-Schémas de répartition des SWCNT dans les poutres FG-CNTRC.

Où,

$$V_*^{cnt} = \left(\frac{\Lambda^{cnt}}{\Lambda^{cnt} + \left(\frac{\rho^{cnt}}{\rho_m}\right)(1 - \Lambda^{cnt})} \right) \tag{I.21}$$

Dans laquelle Λ^{cnt} est la fraction massique des CNT.

I.10.3. Approche Eshelby–Mori–Tanaka (EMT)

L'approche Eshelby-Mori-Tanaka (EMT) est une méthode largement utilisée et efficace pour déterminer les propriétés matérielles effectives des composites et nono-composites, et sa précision a incité de nombreux chercheurs à l'adopter dans leurs travaux. De plus, des études ont validé la fiabilité de cette méthode [65, 66]. Le principe fondamental de l'approche EMT, également appelée méthode de contrainte moyenne d'inclusion équivalente, repose sur le concept de contrainte moyenne dans la matrice introduit par Mori et Tanaka [67] et sur l'idée d'inclusion élastique équivalente d'Eshelby [68].

Pour évaluer les propriétés matérielles des poutres CNTRC, chaque CNT dans la matrice polymère est modélisé comme une fibre longue équivalente ayant des propriétés élastiques isotropes transverses. Par conséquent, le composite obtenu présente également une isotropie transversale. Cette approche utilisant des fibres équivalentes, couplée aux résultats numériques issus de simulations de dynamique moléculaire (MD) [64], permet de déterminer les propriétés matérielles de la fibre équivalente.

I.10.3.1. Composites renforcés avec CNT alignés-droits

On considère une poutre composite renforcée de CNT droits alignés dans la direction x . Les propriétés matérielles de la poutre CNTRC peuvent être exprimées en termes de constantes de l'ingénierie comme suit [69]:

$$E_{11} = n - \frac{l^2}{k}, E_{22} = \frac{4m(kn - l^2)}{kn - l^2 + mn}, \nu_{12} = \nu_{13} = \frac{1}{2k}, \nu_{23} = \frac{n(k - m) - l^2}{n(k + m) - l^2}, G_{12} = G_{13} = p \quad \text{I.22}$$

Où n, l, k, m , et p sont les modules élastiques de Hill du composite ; n est le module de traction uni axial dans la direction des CNT, l est le module transverse associé, k est le module de compressibilité en déformation planaire normal à la direction des CNT, et m et p sont respectivement les modules de cisaillement dans les plans normaux et parallèles à la direction des CNT.

En se basant sur l'approche EMT, les modules élastiques de Hill de la poutre composite peuvent être décrits comme suit :

$$k = \frac{E_m \left\{ E_m V_m + 2k_r (1 + \nu_m) [1 + V^{cnt} (1 - 2\nu_m)] \right\}}{2(1 + \nu_m) [E_m (1 + V^{cnt} - 2\nu_m) + 2V_m k_r (1 - \nu_m - 2\nu_m^2)]} \quad \text{I.23a}$$

$$l = \frac{E_m \left\{ V_m \nu_m [E_m + 2k_r (1 + \nu_m)] + 2V^{cnt} l_r (1 - \nu_m^2) \right\}}{(1 + \nu_m) [2V_m k_r (1 - \nu_m - 2\nu_m^2) + E_m (1 + V^{cnt} - 2\nu_m^2)]} \quad \text{I.23b}$$

$$n = \frac{E_m^2 V_m (1 + V^{cnt} - V_m \nu_m) + 2V_m V^{cnt} (k_r n_r - l_r^2) (1 + \nu_m)^2 (1 - 2\nu_m)}{(1 + \nu_m) [2V_m k_r (1 - \nu_m - 2\nu_m^2) + E_m (1 + V^{cnt} - 2\nu_m)]} + \quad \text{I.23c}$$

$$\frac{E_m [2V_m^2 k_r (1 - \nu_m) + V^{cnt} n_r (1 + 2\nu_m + V^{cnt}) - 4V_m l_r \nu_m]}{2V_m k_r (1 - \nu_m - 2\nu_m^2) + E_m (1 + V^{cnt} - 2\nu_m)}$$

$$p = \frac{E_m [E_m V_m + 2p_r (1 + V^{cnt}) (1 + \nu_m)]}{2(1 + \nu_m) [E_m (1 + V^{cnt}) + 2V_m p_r (1 + \nu_m)]} \quad \text{I.23d}$$

$$m = \frac{E_m [E_m V_m + 2m_r (1 + \nu_m) (3 + V^{cnt} - 4\nu_m)]}{2(1 + \nu_m) \{ E_m (V_m + 4V^{cnt} (1 - \nu_m)) + 2V_m m_r (3 - \nu_m - 4\nu_m^2) \}} \quad \text{I.23e}$$

Dans laquelle k_r, l_r, n_r, m_r , et p_r sont les modules élastiques de Hill équivalents de la phase de renfort, et peuvent être déterminés par l'égalité des matrices suivantes :

$$C_r = \begin{bmatrix} n_r & l_r & l_r & 0 & 0 & 0 \\ l_r & k_r + m_r & k_r - m_r & 0 & 0 & 0 \\ l_r & k_r - m_r & k_r + m_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_r \end{bmatrix} \quad \text{I.24}$$

$$C_r = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & -\frac{\nu_{ZL}}{E_Z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_{ZT}}{E_Z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LZ}}{E_L} & -\frac{\nu_{TZ}}{E_T} & \frac{1}{E_Z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{TZ}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LZ}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LZ}} \end{bmatrix}^{-1} \quad \text{I.25}$$

Les constantes de l'ingénierie dans l'équation (I.24) représentent les propriétés matérielles correspondantes de la fibre équivalente. Les indices L et (T, Z) désignent respectivement les directions parallèles et normales à la direction des fibres. De plus, C_r est le tenseur des modules élastiques de la phase de renfort.

I.10.3.2. Composites renforcés avec des CNT droits orientés de manière aléatoire

L'orientation des renforts dans les composites renforcés de fibres influence de manière significative les propriétés matérielles effectives de ces matériaux. Dans le cas où les CNT sont complètement orientés de manière aléatoire dans la matrice, le composite résultant est isotrope. Par conséquent, le module de Young E et le coefficient de Poisson ν sont évalués comme suit [70]:

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \quad \nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \quad \text{I.26}$$

Où K et G sont respectivement le module de compressibilité et le module de cisaillement du composite, et peuvent être exprimés comme suit :

$$K = K_m + \frac{V^{cnt}(\delta_r - 3K_m\alpha_r)}{3(V_m + V^{cnt}\alpha_r)} \quad G = G_m + \frac{V^{cnt}(\eta_r - 2G_m\beta_r)}{2(V_m + V^{cnt}\beta_r)} \quad \text{I.27}$$

De plus, K_m et G_m sont respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement de la matrice isotopique, définis comme suit :

$$\alpha_r = \frac{3(K_m + G_m) + k_r - l_r}{3(G_m + k_r)} \quad \text{I.28a}$$

$$\beta_r = \frac{1}{5} \left[\frac{4G_m + 2k_r + l_r}{3(G_m + k_r)} + \frac{4G_m}{G_m + p_r} + \frac{2[G_m(3K_m + G_m) + G_m(3K_m + 7G_m)]}{G_m(3K_m + G_m) + m_r(3K_m + 7G_m)} \right] \quad \text{I.28b}$$

$$\delta_r = \frac{1}{3} \left[\eta_r + 2l_r + \frac{(2k_r + l_r)(3K_m + 2G_m - l_r)}{G_m + k_r} \right] \quad \text{I.28c}$$

$$\eta_r = \frac{1}{5} \left[\frac{2}{3}(n_r - l_r) + \frac{8G_m p_r}{G_m + p_r} + \frac{8m_r G_m (3K_m + 4G_m)}{3K_m(m_r + G_m) + G_m(7m_r + G_m)} + \frac{2(k_r - l_r)(2G_m + l_r)}{3(G_m + k_r)} \right] \quad \text{I.28d}$$

$$K_m = \frac{E_m}{3(1 - 2\nu_m)}, \quad G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)} \quad \text{I.29}$$

I.10.4. L'approche Eshelby–Mori–Tanaka : Analyse de l'effet d'agglomération

Dans les FG-CNT, les CNT ont tendance à s'agglomérer dans une matrice polymère en raison de leur rapport d'aspect élevé, de leur faible rigidité en flexion (petit diamètre et module d'élasticité plus faible dans la direction radiale) et des forces de van der Waals. [70] ont développé un modèle à deux paramètres pour décrire l'effet de l'agglomération sur les propriétés élastiques des CNT orientés aléatoirement[71].

$$E_{LEF} = \frac{E_{LC}}{V_{EF}} - \frac{E_M V_M}{V_{EF}} \quad \text{I.30a}$$

$$\frac{1}{E_{TEF}} = \frac{1}{E_{TC} V_{EF}} - \frac{V_M}{E_M V_{EF}} \quad \text{I.30b}$$

$$\frac{1}{G_{EF}} = \frac{1}{G_c V_{EF}} - \frac{V_M}{G_M V_{EF}} \quad \text{I.30c}$$

$$\nu_{EF} = \frac{\nu_c}{V_{EF}} - \frac{\nu_M V_M}{V_{EF}} \quad \text{I.30d}$$

Où E_{LEF} , E_{TEF} , G_{EF} et ν_{EF} représentent respectivement le module d'élasticité longitudinal, le module d'élasticité transversal, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson de la fibre équivalente. E_{LC} , E_{TC} , G_c et ν_c correspondent respectivement au module d'élasticité longitudinal, au module d'élasticité transversal, au module de cisaillement et au coefficient de Poisson du composite, qui ont été déterminés par des simulations multi-échelles en FEM ou en dynamique moléculaire (MD). E_M , G_M et ν_c désignent respectivement le module d'élasticité,

le module de cisaillement et le coefficient de Poisson de la matrice. Enfin, V_{EF} et V_M sont les fractions volumiques de la fibre équivalente et de la matrice, respectivement.

Le volume total de renforcement en CNT dans l'élément de volume représentatif (RVE) est désigné par V_r . Il est divisé en $V_r^{inclusion}$, qui représente le volume des CNT dans les inclusions agglomérées, et V_r^m , qui correspond au volume des CNT dispersés dans la matrice (figure I.28).

$$V_r = V_r^{inclusion} + V_r^m \quad \text{I.31}$$

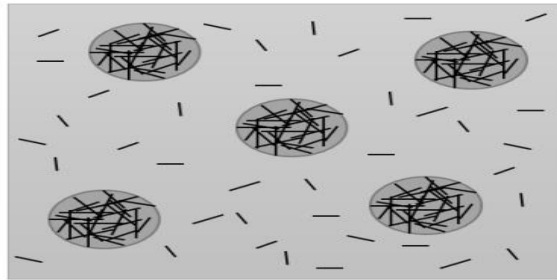


Figure I. 28-Modèle d'inclusion d'Eshelby pour des nanotubes de carbone orientés aléatoirement [71].

Les deux paramètres utilisés pour décrire l'agglomération sont μ et η représente la fraction volumique des inclusions par rapport au volume V de l'élément de volume représentatif (RVE), et η correspond au rapport volumique des CNT dispersés dans les inclusions agglomérées par rapport au volume total de CNT V_r . $V_{inclusion}$ désigne le volume total des inclusions au sein du RVE :

$$\eta = \frac{V_r^{inclusion}}{V_r} \quad \text{I.32}$$

$$\mu = \frac{V_{inclusion}}{V}$$

Lorsque $\mu = 1$, tous les CNT sont uniformément dispersés dans la matrice. À mesure que μ diminue, le degré d'agglomération devient plus prononcé. Si $\eta = 1$, tous les CNT sont localisés à l'intérieur des inclusions agglomérées. Si $\eta = \mu$, alors la fraction volumique des CNT à l'intérieur des inclusions est égale à celle des CNT à l'extérieur, ce qui signifie que les CNT sont uniformément réparties. Lorsque $\eta > \mu$ et que la valeur de η augmente, la distribution spatiale des CNT dans la matrice devient plus hétérogène.

La fraction volumique moyenne f_r des CNT dans le composite est donnée par :

$$f_r = \frac{V_r}{V} \quad \text{I.33}$$

Les modules élastiques de Hill sont utilisés pour déterminer les modules de compressibilité effectifs du composite à l'intérieur des inclusions K_{in} et à l'extérieur des inclusions K_{out} . Il en va de même pour les modules de cisaillement à l'intérieur et à l'extérieur des inclusions (G_{in} et G_{out} , respectivement).

$$\begin{aligned} K_{in} &= K_m + \frac{f_r \eta (\delta_r - 3K_m \alpha_r)}{3(\mu - f_r \eta + f_r \eta_r \alpha_r)} \\ K_{out} &= K_m + \frac{f_r (1 - \eta) (\delta - 3K_m \alpha_r)}{3[1 - \mu - f_r (1 - \eta) + f_r (1 - \eta) \alpha_r]} \\ G_{in} &= G_m + \frac{f_r \eta (\eta_r - 2G_m \beta_r)}{2(\mu - f_r \eta + f_r \eta_r \beta_r)} \\ G_{out} &= \frac{f_r (1 - \eta) (\eta_r - 2G_m \beta_r)}{2[1 - \mu - f_r (1 - \eta) + f_r (1 - \eta) \beta_r]} \end{aligned} \quad \text{I.34}$$

Et,

$$\alpha_r = \frac{3(K_m + G_m) + k_r - l_r}{3(K_m + k_r)} \quad \text{I.35a}$$

$$\beta_r = \frac{1}{5} \left\{ \frac{4G_m + 2k_r + l_r}{3(G_m + k_r)} + \frac{4G_m}{G_m + p_r} + \frac{2[G_m(3K_m + G_m) + G_m(3K_m + 7G_m)]}{G_m(3K_m + G_m) + m_r(3K_m + 7G_m)} \right\} \quad \text{I.35b}$$

$$\delta_r = \frac{1}{3} \left[n_r + 2l_r + \frac{(2k_r + l_r)(3K_m + 2G_m - l_r)}{G_m + k_r} \right]$$

$$\eta_r = \frac{1}{5} \left[\frac{2}{3} (n_r - l_r) + \frac{8G_m p_r}{G_m + p_r} + \frac{8m_r G_m (3K_m + 4G_m)}{3K_m (G_m + p_r) + G_m (7m_r + G_m)} + \frac{2(k_r - l_r)(2G_m + l_r)}{3(G_m + k_r)} \right] \quad \text{I.35c}$$

Les modules de compressibilité et de cisaillement de la matrice sont respectivement K_m et G_m . Enfin, les modules effectifs de compressibilité (K) et de cisaillement (G) du composite peuvent être déterminés à l'aide des expressions suivantes[70] :

$$\begin{aligned}
K &= K_{out} \left[1 + \frac{\mu \left(\frac{K_{in}}{K_{out}} - 1 \right)}{1 + \alpha(1 - \mu) \left(\frac{K_{in}}{K_{out}} - 1 \right)} \right] \\
G &= G_{out} \left[1 + \frac{\mu \left(\frac{G_{in}}{G_{out}} - 1 \right)}{1 + \beta(1 - \mu) \left(\frac{G_{in}}{G_{out}} - 1 \right)} \right] \\
\nu_{out} &= \frac{(3K_{out} - 2G_{out})}{2(3K_{out} + 2G_{out})} \\
\alpha &= \frac{1 + \nu_{out}}{3(1 - \nu_{out})} \\
\beta &= \frac{2(4 - 5\nu_{out})}{15(1 - \nu_{out})}
\end{aligned} \tag{I.36}$$

Où ν_{out} est le coefficient de Poisson à l'extérieur des inclusions. Enfin, le module de Young effectif E et le coefficient de Poisson ν du composite peuvent être déterminés à l'aide des expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
E &= \frac{9KG}{3K + G} \\
\nu &= \frac{3K - 2G}{6K + 2G}
\end{aligned} \tag{I.37}$$

I.11. Techniques de Fabrication des Nanotubes de Carbone (CNT)

Le type de liaison du carbone joue un rôle fondamental dans le développement de matériaux aux propriétés distinctes. Actuellement, plusieurs méthodes courantes sont utilisées pour la synthèse des nanotubes de carbone (CNT), comme l'illustre la Figure I.29 [72]. Une structure en couches, caractérisée par des liaisons faibles hors du plan, se forme par le biais de l'hybridation sp^2 du carbone. De manière similaire, un vide central est entouré de cylindres concentriques, avec un espacement périodique régulier entre les couches. Parmi les différentes approches de fabrication, certaines méthodes spécifiques ont été découvertes et sont présentées comme suit :

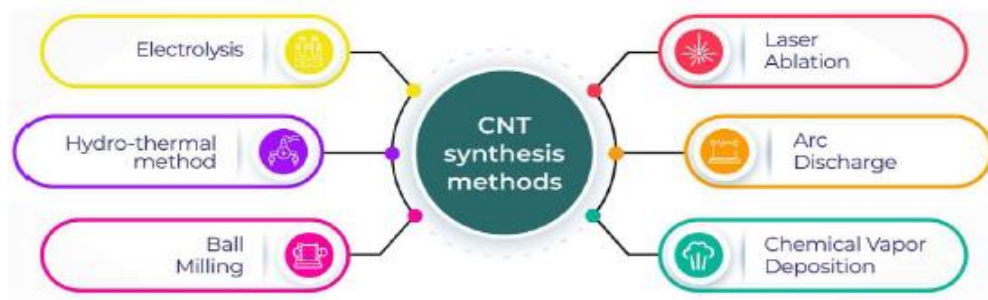


Figure I. 29-Différentes techniques de synthèse des nanotubes de carbone (CNT)[59].

I.11.1. Ablation laser

L'ablation laser est une technique efficace pour produire des nanotubes de carbone (CNT). Elle consiste à vaporiser un morceau de graphite à l'aide d'un faisceau laser focaliser dans une atmosphère inerte comme l'hélium ou l'argon. Cette méthode produit des CNT très purs, sans couche de carbone amorphe. En fonction de la température du four et des catalyseurs utilisés, cette technique peut produire des nanotubes à paroi multiple (MWNT) ou des nanotubes à paroi unique (SWNT). Lorsqu'un petit ajout de métal de transition est utilisé, des SWNT sont générés, qui s'organisent en structures cristallines de type corde avec un diamètre uniforme (voir Figure I.30a et Figure I.30b).

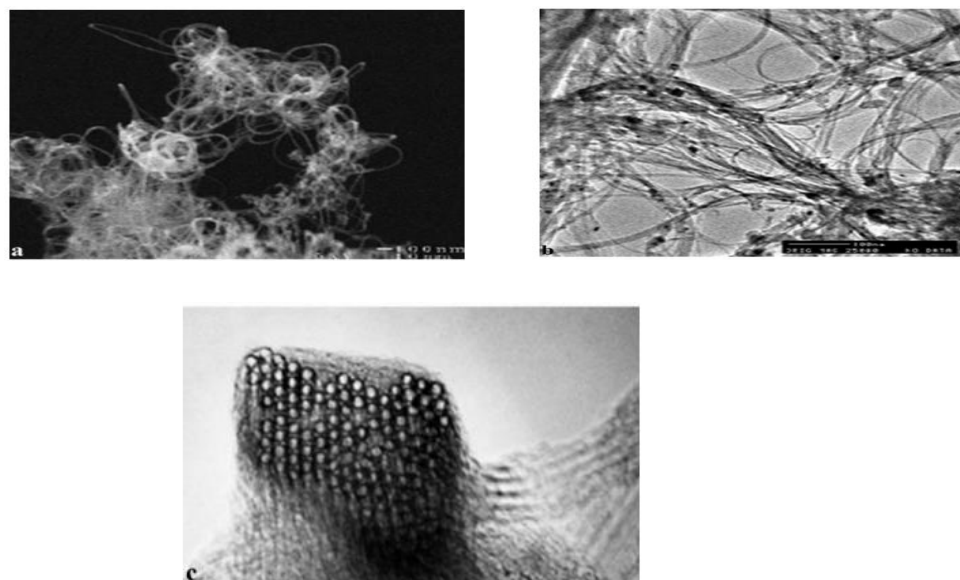


Figure I. 30. Images microscopiques de nanotubes à paroi unique obtenus par ablation laser. a. Image SEM de fibrilles de carbone entremêlées b. Image TEM de faisceaux de SWNT. c. Image HRTEM d'un faisceau de SWNT courbé de manière à être vu par le côté [73].

Le dispositif utilisé pour cette méthode est représenté dans Figure I.31, montrant un graphique placé au centre d'un tube de quartz, chauffé à 1200°C, avec un faisceau laser qui scanne la surface du graphite pour maintenir une vaporisation uniforme. Des améliorations de la méthode, comme l'utilisation de deux impulsions laser successives, permettent d'obtenir une vaporisation plus homogène et de réduire la formation de suie. La quantité et la qualité des nanotubes dépendent fortement de la température du four et des catalyseurs utilisés, tels que Ni/Co, qui produisent un rendement élevé de SWNT[74-76].

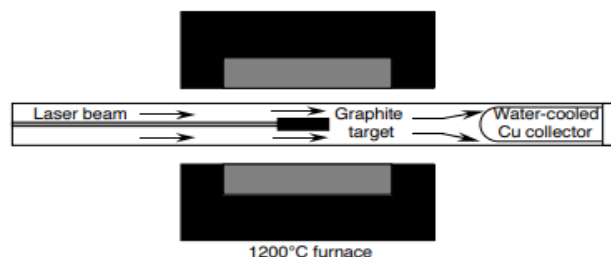


Figure I. 31- Représentation schématique du dispositif d'évaporation laser utiliser à l'Université Rice (Houston, Texas, USA) [73].

I.11.2. Électrolyse

Cette méthode consiste à produire des nanotubes de carbone en passant un courant électrique à travers un sel ionique fondu entre deux électrodes en graphite. Le courant, compris entre 1 et 30 A, est maintenu pendant au moins 1 minute, provoquant l'érosion de la cathode et la formation de divers nanomatériaux. Le processus donne des nanotubes à paroi multiple (MWNT), dont les diamètres varient entre 2 et 20 nm et qui peuvent atteindre des longueurs de jusqu'à 5 μm . Les nanotubes obtenus présentent des morphologies variées, incluant des structures spirales ou courbées. Les meilleures conditions de production sont obtenues avec des courants entre 3 et 5 A. Cette méthode produit également des structures encapsulées et des particules de carbone amorphe lorsque des courants plus élevés ou plus faibles sont utilisés (Voir la figure I.32)[77, 78].

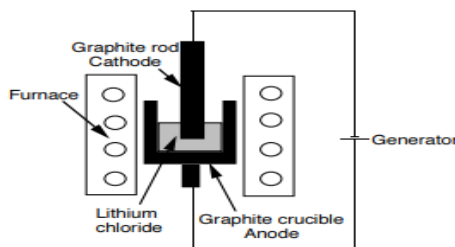


Figure I. 32- Représentation schématique du système expérimental d'électrolyse (Brighton, Royaume-Uni)[73].

I.11.3. Processus CVD (Dépôt Chimique en Phase Vapeur)

Dans le processus de décomposition chimique en phase vapeur (CVD), la croissance des nanotubes de carbone implique le chauffage d'un matériau catalyseur à des températures élevées (500–1000 °C) dans un four tubulaire, avec un gaz hydrocarboné qui traverse le réacteur pendant une période donnée [79]. Le mécanisme de base de ce processus est la dissociation des molécules d'hydrocarbures, catalysée par le métal de transition, et la saturation des atomes de carbone dans la nanoparticule métallique [79]. La précipitation du carbone à partir de la particule métallique conduit à la formation de solides carbonés tubulaires dans une structure sp^2 [79].

I.11.4. Fabrication de nano-composites basée sur la technique courantes de dispersion de dispersion des CNT

Les CNT existent sous forme d'agglomérats, ils sont donc dispersés à l'aide de différentes techniques de dispersion. La Figure I.33 montre les agglomérats de CNT. La dispersion uniforme des CNT dans une matrice polymère joue un rôle crucial dans la détermination de la résistance mécanique du composite. Le choix de la technique dépend des propriétés de la matrice polymère et des performances requises du produit final.

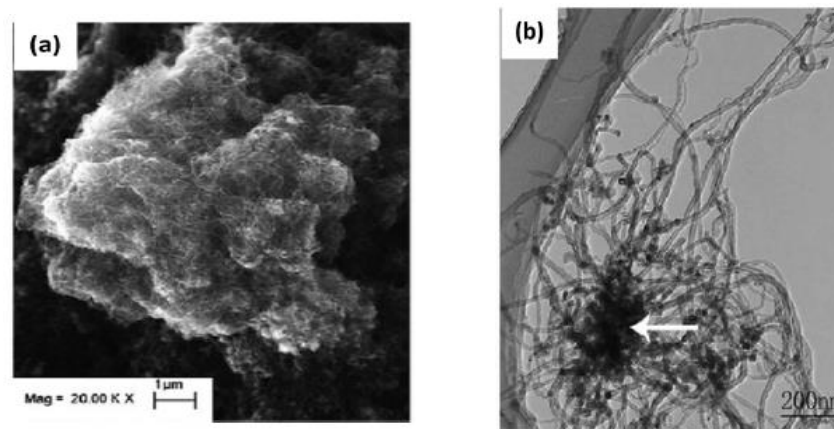


Figure I. 33 - Images en agglomérat CNT obtenus par (a) SEM ; (b) TEM [80].

Les principales techniques de dispersion des CNT sont présentées dans la Figure I.34. Des études précédentes ont mis en évidence l'efficacité des techniques de mélange et de dispersion des nanotubes dans la résine de polyester insaturé. Le principal défi des techniques de mélange est d'exfolier de grandes couches de nanotubes en couches simples tout en respectant les contraintes du processus de fabrication. Parmi les méthodes de dispersion examinées dans cette revue figurent le mélange mécanique, ultrafiltration, la pulvérisation de solvant, la fonctionnalisation chimique, le frittage par plasma à étincelles et la dispersion assistée par ADN[81-86].



Figure I. 34 - Technique de dispersion CNT dans la matrice polymère [59].

I.12. Composites poreux à gradient fonctionnel

Les composites poreux se distinguent par leurs géométries variées et intéressantes, ainsi que par la distribution spécifique de leurs matériaux de base, offrant une liberté unique dans la conception et l'optimisation des densités. La morphologie des pores internes est étroitement liée à des propriétés mécaniques, thermiques, chimiques, biologiques et électroniques inhabituelles, ce qui rend ces matériaux attrayants[87, 88]. Figure I.35 illustre deux classifications principales des composites poreux : par types de matériaux de base (métaux[89], céramiques[90], polymères[91], bétons[92], verres[93], etc.) et par caractéristiques géométriques (morphologies cellulaires régulières en 3D ou 2D et cellules ouvertes/fermées stochastiques pour les mousses)[94, 95]. Des innovations émergent, comme l'intégration des concepts de matériaux à gradient fonctionnel (FGM) dans les parois cellulaires ou la géométrie des pores, permettant des compositions graduées et des distributions de porosité spécifiques.

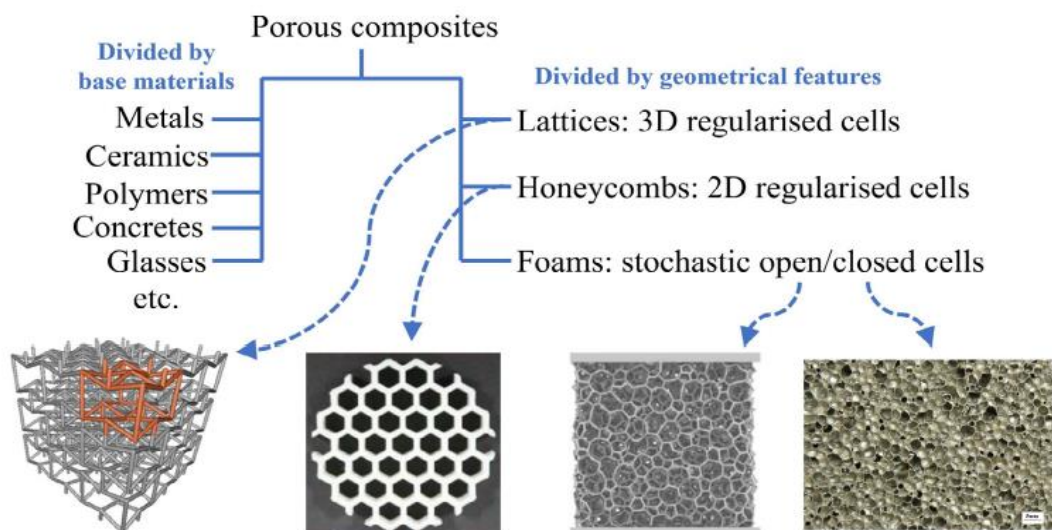


Figure I. 35 -Divisions typiques des composites poreux. [92].

La recherche sur les structures poreuses à gradient fonctionnel (FG) n'a véritablement décollé que récemment. La Figure I.36 montre l'évolution du nombre de publications sur ce sujet au cours des 29 dernières années (1994-2022). Bien que ces statistiques puissent être inexactes en raison des paramètres du moteur de recherche, elles donnent une idée générale : de 1994 à 2015, le nombre de publications sur les structures poreuses FG a fluctué, atteignant un maximum de 31 en 2014. Depuis 2015, le nombre de publications a explosé, atteignant un pic de 318 en 2022, bien que la croissance semble se ralentir ces trois dernières années, avec seulement 16 publications supplémentaires en 2022 contre 302 en 2021.

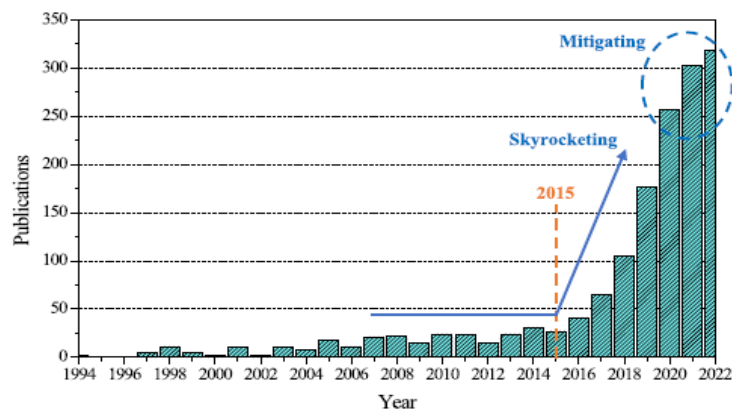


Figure I. 36-Nombre d'enregistrements (Web of Science, recherche “Functionally graded; porous”, au 19/05/2023) [96].

L'application des composites poreux à gradient fonctionnel (FG) dans diverses formes structurelles conduit au développement de structures composites FG poreuses, dont les analyses mécaniques ont suscité un intérêt croissant ces dernières années, à travers des approches théoriques, numériques, expérimentales et assistées par l'intelligence artificielle. Quelques exemples typiques de poutres, plaques, tubes, arches et coques FG poreuses sont présentés dans la Figure I.37, avec des distributions de porosité variant selon la direction de l'épaisseur, ce qui entraîne des propriétés matérielles graduées et des performances globales innovantes[96].

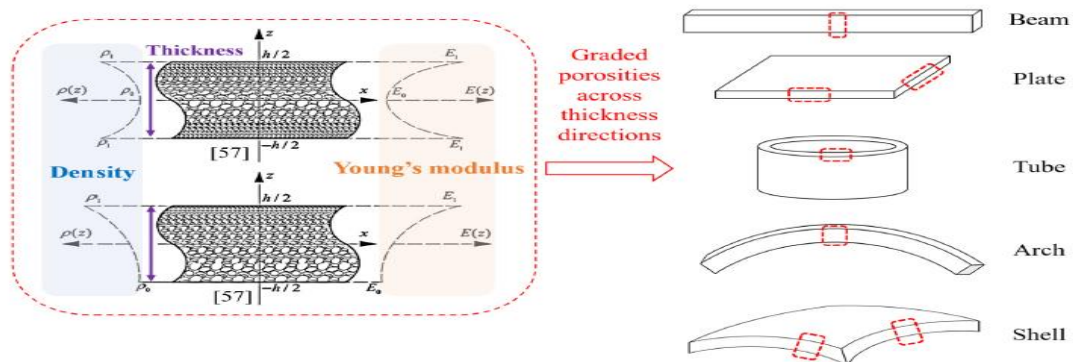


Figure I.37-Exemples de structures poreuses FG typiques. [97].

I.13. Lois Régissant les variations des propriétés des matériaux dans les FGM poreuses

La porosité influence significativement les propriétés mécaniques des matériaux fonctionnellement gradués (FGM). Pour comprendre le comportement mécanique des éléments poreux, diverses recherches ont été menées. Les modèles de simulation, souvent basés sur la règle de mélange de Voigt modifiée, permettent de prédire les propriétés des FGM en tenant compte de la porosité et des fractions volumiques des matériaux constituants.

Différents types de porosité ont été modélisés : les porosités symétriques avec une répartition homogène des micro-vides, les porosités non symétriques avec une répartition inégale, et les porosités uniformes avec une distribution régulière. La résistance mécanique et les propriétés thermiques des FGM poreux varient selon la distribution de la porosité, ce qui est crucial pour leur utilisation dans le génie civil et les travaux publics. Des études expérimentales et numériques ont été réalisées pour mieux comprendre ces propriétés et développer des modèles plus précis pour évaluer le comportement mécanique et thermique des FGM poreux.

$$\text{FGA} \quad P(z) = \left(1 - \lambda \cos \left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4} \right) \right) P_1 \quad \text{I.38}$$

$$\text{FGS} \quad P(z) = \left(1 - \lambda \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right) P_1 \quad \text{I.39}$$

$$\text{FGU} \quad P(z) = \left(\frac{2}{\pi} \sqrt{1-\lambda} - \frac{2}{\pi} + 1 \right)^2 P_1 \quad \text{I.40}$$

Dans le cas des Poutres FG, la répartition de la porosité est asymétrique mais conserve une symétrie par rapport au plan médian de la poutre, en comparaison avec deux autres types de porosité (uniforme et symétrique). Les modules d'élasticité et la masse volumique atteignent leur maximum à la surface supérieure et diminuent progressivement jusqu'à leurs valeurs minimales à la surface inférieure, comme illustré à la Figure I.38. Les propriétés effectives des matériaux avec porosité Asymétrique, Uniforme et Symétrique sont ainsi déterminées par :

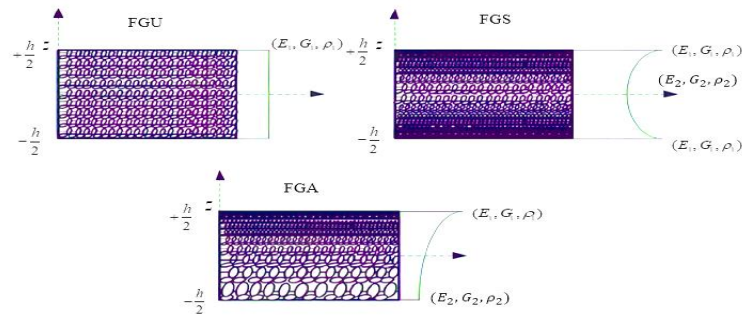


Figure I. 38- Répartition de porosité sur l'épaisseur, (a) porosité symétriques (b) porosité non symétrique.

I.14. Synthèse des Travaux de recherche sur les structures FG-CNTRC

Yas and Heshmati [98] ont étudié des propriétés vibratoires des poutres nano-composites à gradients fonctionnels renforcées par des nanotubes de carbone à paroi simple (SWCNT) orientés aléatoirement sous l'action d'une charge mobile. Ils ont conclu que les fréquences des poutres CNTRC renforcées par des CNT alignés sont supérieures à celles des poutres renforcées par des CNT orientés aléatoirement.

Djilali Djebbour, Mokhtar [99] ont étudié le comportement en vibration libre de poutres poreuses renforcées par des nanotubes de carbone (CNT). Ces poutres sont soutenues par une fondation élastique orthotrope variable arbitraire (AOVEF). Les résultats obtenus montrent qu'une augmentation du paramètre de fréquence pour les quatre distributions de nanotubes de carbone est observée à mesure que le coefficient de Pasternak (K_p) et les angles d'orientation augmentent, tandis qu'une diminution du paramètre de fréquence pour les quatre types de fondations de Winkler est observée lorsque les angles d'orientation augmentent.

Mohseni, Shakouri [100] ont examiné la vibration libre et le flambement de poutres FG-CNTRC à épaisseur variable reposant sur une fondation élastique de Pasternak ont été étudiés. Ils ont conclu que les fréquences naturelles et les charges de flambement augmentent avec le rapport d'épaisseur. De plus, le type de distribution des nanotubes de carbone (CNT), la fraction volumique des CNT et la rigidité de la fondation ont des effets remarquables sur les fréquences naturelles et la charge critique de flambement des poutres FG-CNTRC.

Setoodeh, Shojaee [101] ils ont examiné les propriétés vibratoires de poutres en non-composites à gradients fonctionnels, renforcées par des nanotubes de carbone mono-feuillets (SWCNT) orientés aléatoirement, sous l'effet de charges mobiles. Les résultats ont montré que

les fréquences des poutres en nono-composites renforcées par des CNT alignés sont plus élevées que celles des poutres renforcées par des CNT orientés aléatoirement.

Duc, Cong [5] ils ont étudié La stabilité thermique et mécanique d'une coque conique tronquée composite fonctionnellement graduée renforcée par des fibres de nanotubes de carbone et entourée de fondations élastiques est étudiée dans cet étude la charge mécanique et thermique critique dans le cas des CNT de type FG-V est supérieure à celle des FG - Λ . Les charges thermiques et mécaniques critiques des coques coniques tronquées FG CNTRC diminuent lorsque l'angle du demi-sommet α augmente.

Aragh, Barati [1] les caractéristiques des fréquences naturelles d'un panneau cylindrique renforcé par des nanotubes de carbone à gradient continu (CGCNTR) basé sur l'approche Eshelby-Mori-Tanaka sont considérées. Les fractions volumiques de CNT graduées en continu peuvent être utilisées pour la gestion du comportement vibratoire des structures de sorte que les paramètres de fréquence.

Ansari, Torabi [102] ont développé une méthode numérique pour analyser les vibrations des plaques elliptiques FG-CNTRC, en étudiant l'impact de la distribution fonctionnelle des nanotubes de carbone sur leurs propriétés. Ils ont trouvé que les plaques plus épaisses ont des fréquences naturelles plus élevées et un meilleur comportement vibratoire.

Jamal-Omidi, ShayanMehr [103] ont étudié la réponse vibratoire transversale non linéaire des éléments représentatifs de volume (ERV) des poutres nono-composites à l'échelle macroscopique. Des ERV comprenant des nanotubes de carbone (CNT) ont été utilisés avec différents rapports de longueur, représentant ainsi divers états de dispersion à l'échelle macroscopique. Les équations de vibration des éléments de volume ont ensuite été déterminées, et la réponse vibratoire (libre et forcée) des ERV a été examinée sous différentes conditions aux limites.

Garg, Saxena [104] ont étudié l'influence des différents types de chargement et de la distribution des CNT sur les caractéristiques dynamiques des plaques composites renforcées de SWCNT soumises à un environnement de charge thermique, en utilisant le logiciel ABAQUS. Ils ont constaté que le renforcement par CNT et sa distribution influencent de manière significative les propriétés mécaniques des composites renforcés de nanotubes de carbone (CNTRC) soumis à des conditions de charge thermique.

Formica, Lacarbonara [105] ont appliqué l'approche Eshelby-MT en utilisant un modèle continu équivalent pour analyser les propriétés vibratoires des composites renforcés de nanotubes de carbone (CNTRC). Ils ont montré que les fréquences naturelles les plus basses peuvent augmenter jusqu'à 500 % pour des composites en caoutchouc renforcé de CNT, et ce, sans modifier de manière significative la densité massique du matériau.

Shams, Soltani [106] ont étudié la réponse au flambement de plaques laminées en CNTRC reposant sur des fondations élastiques de Winkler-Pasternak et soumises à des charges dans le plan, en utilisant la méthode des particules à noyau reproducteur (RKPM) basée sur la théorie de la déformation de premier ordre (FSDT). En appliquant l'approche de l'énergie potentielle minimale, ils ont dérivé les équations régissant le système ainsi que les matrices de rigidité. Un modèle micro-mécanique et la règle étendue du mélange ont été utilisés pour estimer les propriétés matérielles des plaques en CNTRC.

Malekzadeh and Shojaee [107] ont analysé la réponse au flambement de plaques quadrilatérales laminées, allant de minces à modérément épaisses, composées de couches de CNTRC parfaitement liées et soumises à des charges mécaniques. Ils ont établi les équations de stabilité en utilisant les critères d'équilibre adjacent pour le flambement ainsi que la théorie des plaques à déformation de premier ordre (FSDT). Ils ont étudié des distributions unidirectionnelles (UD), à gradient fonctionnel (FG), symétriques et asymétriques de nanotubes de carbone à paroi simple (SWCNT) selon quatre profils différents à travers l'épaisseur des couches.

I.15. Application des matériaux de types CNT

Les nanotubes de carbone (CNT) sont largement acceptés à l'échelle mondiale pour un grand nombre d'applications dans divers domaines, en raison de leurs propriétés structurales physico-chimiques particulièrement attractives. Ces capacités et propriétés sont étroitement liées aux feuilles de graphène et au nombre de couches de graphène constituant les CNT. Les capteurs à base de CNT, grâce à leurs propriétés telles que leur temps de réponse rapide, leur sensibilité, leur stabilité et leurs caractéristiques luminescentes, sont envisagés pour des applications dans l'électronique intelligente et les domaines connexes.

De plus, les CNT sont également utilisées dans des applications liées au domaine de la nanotechnologie, notamment pour la fabrication de piles à combustible intelligentes, de batteries et d'électrodes destinées au stockage de l'énergie et au traitement de l'eau. Certaines des applications des CNT sont illustrées à la figure I.39 [59].

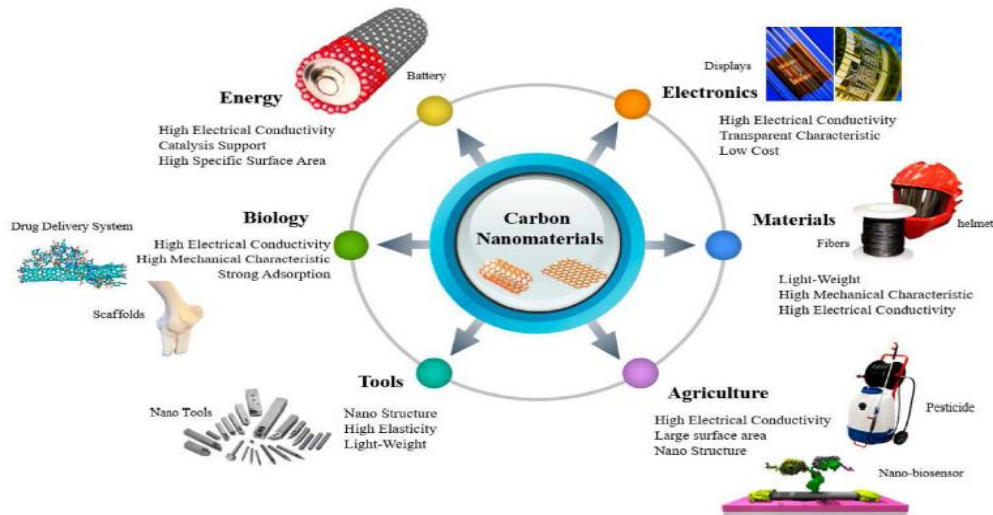


Figure I. 39 - Applications des nanotubes de carbone (CNT)[59].

I.16. Conclusion

Ce chapitre a examiné en profondeur les études portant sur les matériaux hétérogènes, avec une attention particulière portée aux composites avancés comme les FGM. Il a proposé une analyse complète de leur conception, de leur évolution, de leur origine, ainsi que des principes régissant les mélanges de matériaux à gradient de propriétés. La modification graduelle des propriétés des matériaux à travers l'espace ouvre la voie à la conception de structures novatrices dans divers secteurs. En effet, la transition progressive des matériaux en fonction de l'épaisseur de ces structures engendre des variations dans leurs performances.

Par ailleurs, nous avons exploré diverses techniques de fabrication des matériaux à gradient de propriétés et leur utilisation dans plusieurs secteurs de l'ingénierie. Pour conclure, nous avons défini les différentes formes de nanotubes de carbone ainsi que leurs défauts. Ces matériaux innovants ont suscité un grand intérêt chez les chercheurs dans de nombreux domaines, en raison de leurs propriétés uniques, absentes dans les matériaux traditionnels.

Nous présenterons également les différents types de fondation et les théories des poutres en FGM, plus particulièrement les structures épaisses basées sur les théories de gauchissement. C'est ce que nous ferons un résumé des travaux au chapitre suivant.

Chapitre II : Bibliographie sur les théories des poutres et des modèles de fondations

II.1. Introduction

Les poutres représentent des éléments structuraux essentiels dans divers domaines, notamment l'aérospatiale, le génie civil, l'énergie et l'industrie. Ces secteurs sont stratégiques et jouent un rôle crucial dans l'économie moderne. L'usage des poutres est particulièrement courant en génie civil, car elles sont intégrées dans de nombreuses constructions. Leur capacité à supporter des charges lourdes tout en maintenant la stabilité des structures en fait un choix privilégié pour les ingénieurs. De plus, l'innovation dans les matériaux et les techniques de conception continue d'élargir les applications des poutres.

Ce chapitre propose un large éventail concernant les différentes approches modélisant le comportement mécanique des poutres et aussi les différents comportements des assises élastiques. Nous commencerons par examiner les concepts les plus établis, tels que la théorie d'Euler-Bernoulli (CBT), la théorie de Timoshenko (FSDT), et les théories d'ordre supérieur (HSDBT). Par la suite, nous nous plongerons dans des méthodes plus sophistiquées qui approfondissent notre compréhension des comportements structuraux. Enfin, nous explorerons différents types de fondations pour mieux saisir leurs applications et implications dans l'ingénierie.

Les fondations jouent un rôle fondamental dans la conception des constructions, son choix est primordial pour assurer la pérennité et la sécurité des ouvrages. Dans le contexte de la recherche, plusieurs approches ont modélisé la réaction des assises en fonction d'homogénéité ou d'hétérogénéité de leur réponse. A cet effet, il est important de présenter, aussi, un aperçu des divers types de fondations qui ont établi les bases de notre compréhension fondamentale.

Ensuite, nous présenterons une synthèse de diverses études portant sur les poutres soutenues par des fondations élastiques, tirées de la littérature existante.

II.2. Les théories élastiques des poutres

En ingénierie et en construction, une poutre est un élément structural horizontal ou incliné conçu pour supporter des charges et transférer des forces entre les différents points de support. Elle est généralement utilisée pour soutenir des charges verticales, telles que des planchers ou des toits, en répartissant ces charges de manière uniforme vers les supports adjacents (colonnes, murs, etc.).

Les poutres peuvent être fabriquées à partir de divers matériaux tels que le bois, l'acier, le béton ou des composites (figure II.1), et elles peuvent varier en forme (rectangulaire, en I, en T, etc.) en fonction des exigences structurelles et des charges à supporter.

La modélisation des poutres en matériaux avancés avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de Young dans les deux directions longitudinale et transversale) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans [108-111] les revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle de quelques éléments de structures.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles ont été développés pour la modélisation des structures anisotropes tenant compte des cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente
- Approche par couche
- Approche développement asymptotique

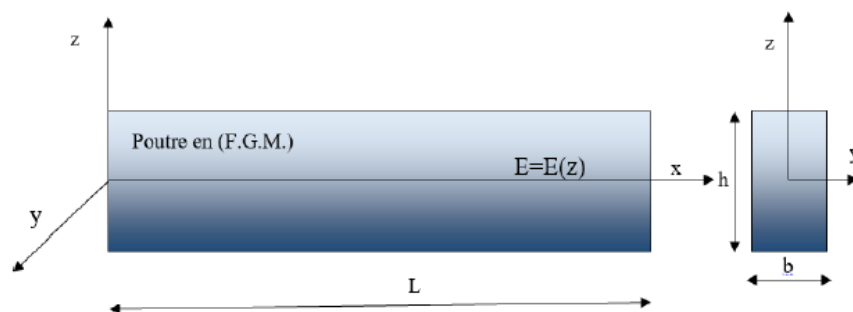


Figure II. 1- Schéma d'un élément de poutre.

II.2.1. Analyse des modèles monocouches équivalents (ESL)

Dans les modèles monocouches équivalents, une approche largement adoptée par les chercheurs, une poutre multicouche hétérogène est traitée comme une seule couche homogène équivalente représentant le comportement global de toutes les couches. Les théories des modèles ESL fournissent une description suffisamment précise des réponses, telles que la flèche transversale, la fréquence fondamentale de vibration, la charge critique de flambement et le moment résultant, comme indiqué par [112]. Les variables de cette approche sont définies pour l'ensemble de la plaque, ce qui conduit à un nombre de degrés de liberté indépendant du nombre de couches (figure II.2). Le principal avantage de la méthode ESL réside dans son faible coût de calcul et sa simplicité. Les variables sont introduites pour l'ensemble de la poutre, ce qui permet de maintenir un nombre de degrés de liberté constant, quel que soit le nombre de couches [113].

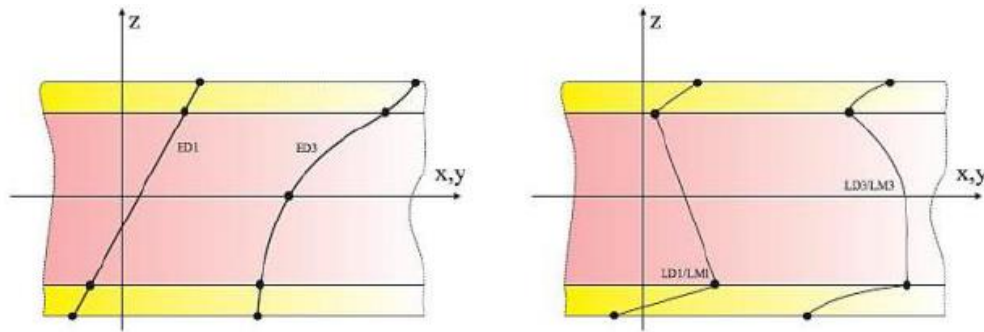


Figure II. 2-Description du déplacement du modèle : monocouche équivalente (à gauche) et par couche (à droite). Cas linéaire et non-linéaire [114].

II.2.1.1. Théorie d'Euler-Bernoulli (CBT)

Le modèle d'Euler-Bernoulli, également connu sous le nom de théorie classique des poutres (CBT), constitue une approche essentielle pour l'analyse des poutres. Il repose sur l'idée que les déformations transversales sont négligeables par rapport aux déformations longitudinales, comme le montre la figure II.3. Cette hypothèse le rend particulièrement adapté aux poutres minces et aux déformations modérées. Grâce à cette théorie, il est possible de dériver les équations fondamentales pour la flexion et la torsion des poutres, permettant ainsi de calculer les déformations, les contraintes, les moments et les forces internes. On suppose que, suite à la déformation, les sections droites restent perpendiculaires à l'axe central, que les sections planes continuent de demeurer planes, et que les sections ne subissent pas de déformation le long de l'axe longitudinal (axe z).

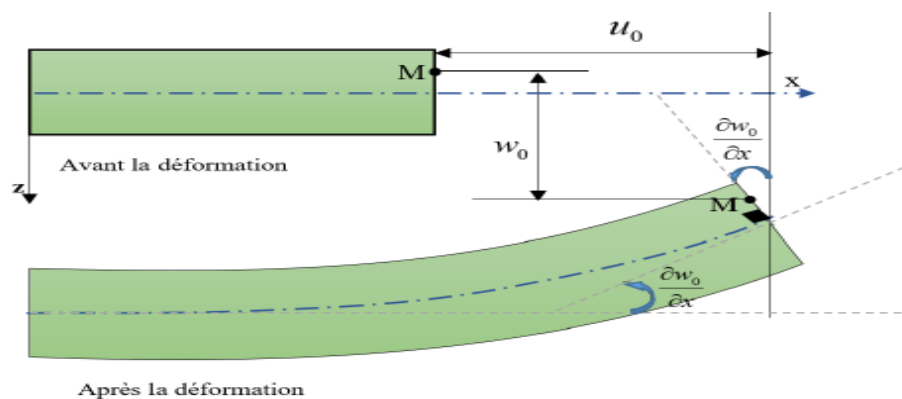


Figure II. 3-Illustrations des Déformations selon la Théorie Classique des Poutres.

Le champ des déplacements d'un point de coordonnées (x, y, z) à l'instant (t) peut être exprimé comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ w(x, z, t) &= w_0(x, t) \end{aligned} \quad \text{II.1}$$

u , w : Les déplacements selon les directions x et z , respectivement.

u_0 , w_0 : Ce sont les déplacements de la fibre moyenne dans les directions x et z , respectivement.

Ainsi, selon les hypothèses de cette théorie, le cisaillement est considéré comme négligeable. En ne prenant pas en compte l'effet du cisaillement transversal, ce modèle produit des résultats imprécis pour les poutres courtes.

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{II.2}$$

II.2.1.2. Théorie de Timochenko (FSDT)

La deuxième théorie des poutres est la théorie des poutres à déformation de cisaillement transversal du premier ordre (FSDBT, First Shear Deformation Beam Theory), également connue sous le nom de théorie des poutres de Timoshenko (TBT, Timoshenko Beam Theory). Ce modèle est plus complet et général que la théorie élémentaire des poutres, grâce à l'introduction d'une fonction supplémentaire. Cette approche permet de raffiner les solutions analytiques obtenues avec la théorie classique.

Elle s'applique aux poutres courtes et repose sur le principe selon lequel, après déformation, la section plane reste plane mais perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (voir figure II.4). Ce phénomène, dû au cisaillement transversal, a été découvert par Timoshenko en 1921. Cette théorie est analogue à la théorie de Reissner-Mindlin dans le cas des plaques épaisses. [115]

Quand l'élanement est faible, l'effet du cisaillement devient plus marqué sur la déformation. Dans ce contexte, la fonction $f(z)$ est linéaire, c'est-à-dire $f(z) = z$. Le cisaillement est uniforme et les déformations causées par le cisaillement transversal ne sont pas ignorées. Cette approche correspond à la théorie du premier ordre (FSDBT).

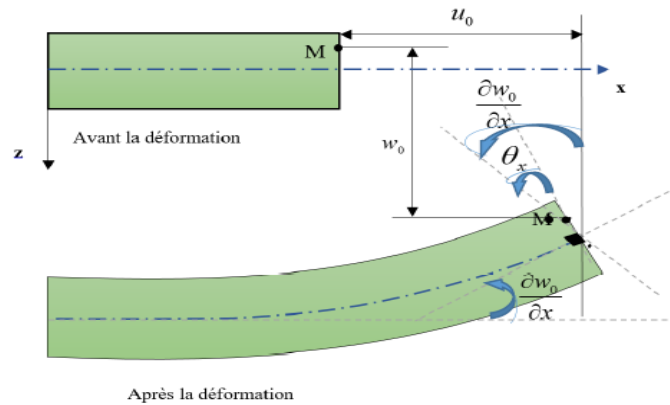


Figure II. 4-Illustration des Déformations selon la Théorie du Premier Ordre.

Lorsque l'élanement est faible, l'influence du cisaillement devient prépondérante sur la déformation. Dans cette situation, la fonction peut être exprimée de la manière suivante :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0 - w_0, x_{(x)} + z\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad \text{II.3}$$

Dans cette théorie de premier ordre (FSDBT), où un cisaillement uniforme est présent et les déformations résultant du cisaillement transversal ne sont pas négligées, le champ de déplacements selon Timoshenko est formulé comme suit :

Avec :

γ_{xz}^0 , Il s'agit de la distorsion ou de la déformation angulaire mesurée le long de la ligne médiane de la poutre, comme illustré par l'équation suivante :

$$\gamma_{xz}^0 = w_x^0(x) - \varphi^0(x) \quad \text{II.4}$$

$\varphi^0(x)$, Cela représente la rotation totale de la section, mesurée le long de la ligne médiane de la poutre. La contrainte de cisaillement peut être exprimée par :

$$\tau_{xz} = G_{xz}\gamma_{xz} = G_{xz}\gamma_{xz}^0 \quad \text{II.5}$$

G_{xz} : Il s'agit du module de cisaillement transversal, considéré comme constant.

Ainsi, cette théorie corrige le défaut de la théorie classique en prenant en compte l'effet de cisaillement transverse. Pour ce faire, les chercheurs ont introduit des coefficients correcteurs pour résoudre ce problème, notés " K_s ", qui représentent le facteur de correction des contraintes

de cisaillement. Ce facteur correspond au rapport entre l'énergie de déformation de cisaillement de la distribution parabolique et celle uniforme :

$$K_s = \frac{\int \tau_{xz\text{réel}} \gamma_{xz} dv}{\tau_{xz} \gamma_{xz} dv} \quad \text{II.6}$$

Ces coefficients sont déterminés en fonction de la géométrie spécifique de la poutre étudiée :

$K_s = 5/6$: Pour une section rectangulaire.

$K_s = 2/3$: Pour une section circulaire.

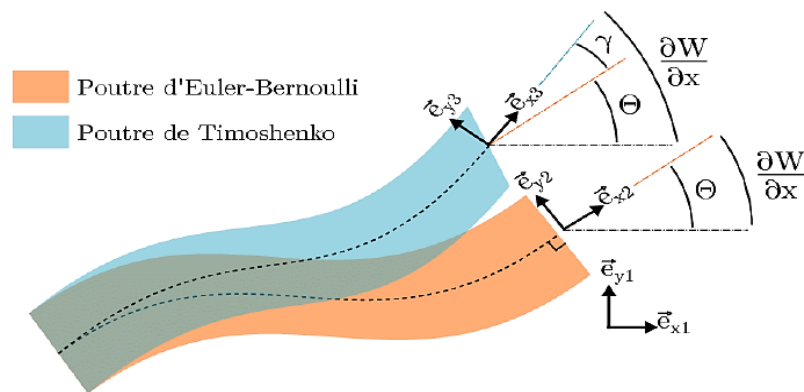


Figure II. 5-Comparaison de la Cinématique des Poutres de Timoshenko et d'Euler-Bernoulli.

II.2.1.3. Théorie d'ordre élevé (HSDBT)

Une théorie des poutres de troisième ordre prenant en compte la déformation par cisaillement, où la contrainte de cisaillement transverse présente une distribution parabolique à travers l'épaisseur de la poutre (voir figure II.6), sans nécessiter de facteur de correction ont élaboré par [116].

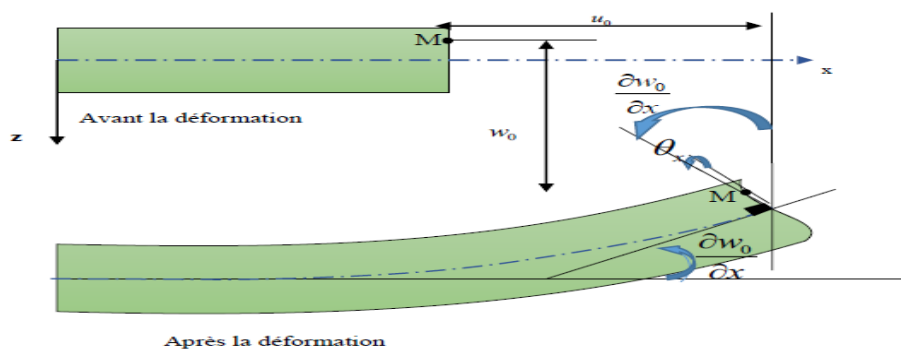


Figure II. 6-Illustration des Déformations selon la Théorie d'ordre Élevé.

Les effets de la déformation transversale par cisaillement et/ou de la déformation normale transversale sont pris en compte. Cette approche est plus précise que la théorie du premier ordre, car elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de "gauchissement" (voir Figure II.6). Par définition, le gauchissement apparaît lorsque la section transversale du matériau perd sa planéité [117].

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\theta_x \quad \text{II.7}$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t)$$

$f(z)$ Est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les différentes théories. Les déplacements selon la théorie classique des poutres (C.B.T.) sont obtenus en prenant $f(z) = 0$, tandis que la théorie de premier ordre (FSDT.) est obtenue avec $f(z) = z$.

De nombreux auteurs ont proposé plusieurs modèles de fonctions de cisaillement $f(z)$ qui respectent la condition de nullité des contraintes tangentielles aux extrémités de la poutre. Ces fonctions peuvent prendre des formes paraboliques, sinusoïdales, ou hyperboliques (voir Figure II.7 et II.8). La fonction $f(z)$ représente le gauchissement, tandis que sa dérivée $g(z)$ décrit la distribution du cisaillement transverse.

$$g(z) = f'(z) \quad \text{II.8}$$

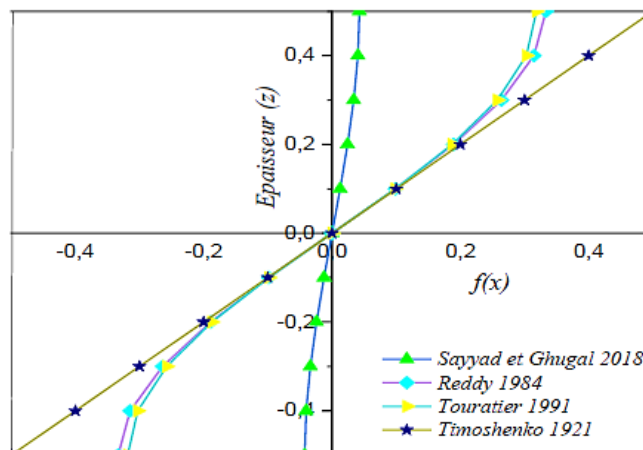


Figure II. 7-Variation de la fonction de forme $f(z)$ selon différents modèles en fonction de l'épaisseur.

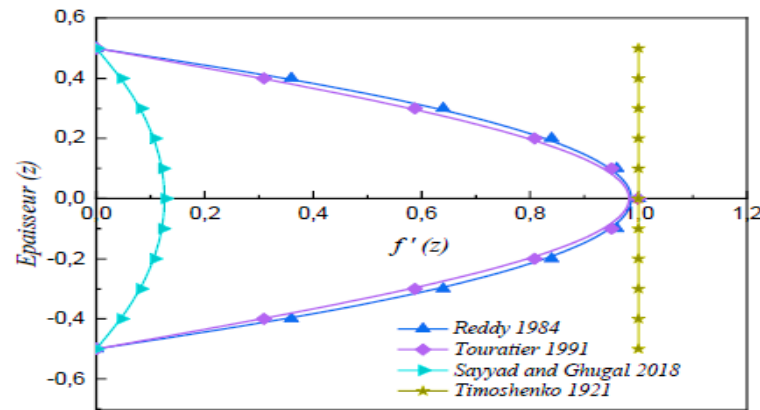


Figure II. 8- Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ selon différents modèles en fonction de l'épaisseur.

II.2.1.4. Théorie raffinée (RHSDT)

La théorie raffinée de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (RHSDT) dans le modèle de poutre décompose le déplacement transversal en deux composantes distinctes, associées à la flexion et au cisaillement (figure II.9). Initiée par [118] pour l'étude des plaques isotropes, cette théorie vise à réduire le nombre de variables par rapport aux approches existantes. Contrairement à d'autres théories, la RHSDT ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement et propose une distribution parabolique du cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre. Elle présente également des similitudes avec la théorie des poutres classique (CBT). Des études, menées par des chercheurs tels que [119, 120] ont validé l'efficacité de cette théorie dans divers contextes, de la flexion à la vibration libre et au flambage des poutres FGM. Ces recherches soulignent la RHSDT comme une approche précise et performante pour modéliser des structures de poutres aux propriétés variées.

En se fondant sur cette théorie, le champ de déplacement peut être formulé de la manière suivante :

$$u(x, z, t) = u^0(x, t) - z \frac{dw_b(x, t)}{dx} + f(z) \frac{dw_s(x, t)}{dx} \quad \text{II.9}$$

$$w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t)$$

$u^0(x, t)$: Ces inconnues représentent les déplacements axiaux le long de l'axe neutre de la poutre.

$w_b(x, t)$, $w_s(x, t)$: Ces inconnues représentent les déplacements transversaux, résultant à la fois de la flexion et du cisaillement.

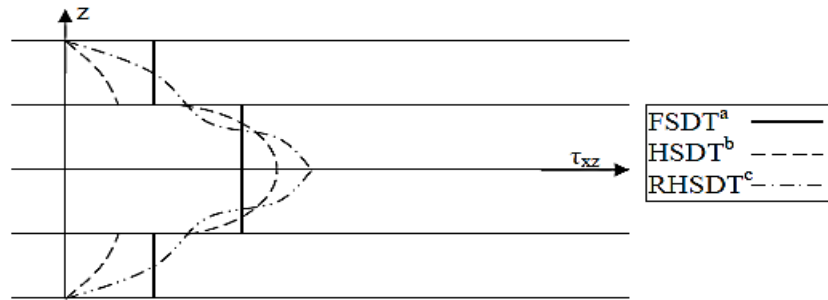


Figure II. 9-Répartition des contraintes de cisaillement τ_{xz} selon trois théories [121].

a : FSDT (l'effet de cisaillement d'ordre un).

b : HSDT (l'effet de cisaillement d'ordre élevé).

c : RHSDT (l'effet de cisaillement d'ordre élevé par raffinement).

II.2.2. Approche par couche

Les approches décrites ont pour objectif d'améliorer la compréhension des effets d'interface dans les matériaux composites traditionnels. Pour ce faire, plusieurs modèles basés sur l'approche par couche ont été développés, comme ceux proposés par [111, 122-124]. Le modèle multicouche divise la structure en sous-structures, chacune correspondant à une ou plusieurs couches. Chaque sous-structure est alors analysée à l'aide d'une théorie du premier ordre ou d'un modèle d'ordre supérieur, garantissant la continuité du champ de déplacement aux interfaces entre les différentes couches. Bien que ces modèles soient relativement coûteux en termes de calcul (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couches), ils offrent une précision accrue, en particulier pour le calcul des contraintes hors plan.

En général, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être divisés en deux catégories :

- **Les modèles à couches discrètes** : Chaque couche est traitée comme une plaque distincte, avec des conditions de continuité imposées pour les déplacements ou les contraintes aux interfaces.

- **Les modèles zig-zag** : Ces modèles satisfont intrinsèquement les conditions de contact, indépendamment du nombre de couches, comme illustré dans les Figures II.10 et II.11.

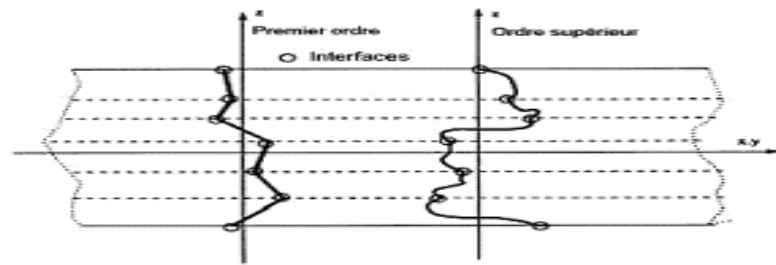


Figure II. 10-champs des déplacements des modèles couche discrètes [125].

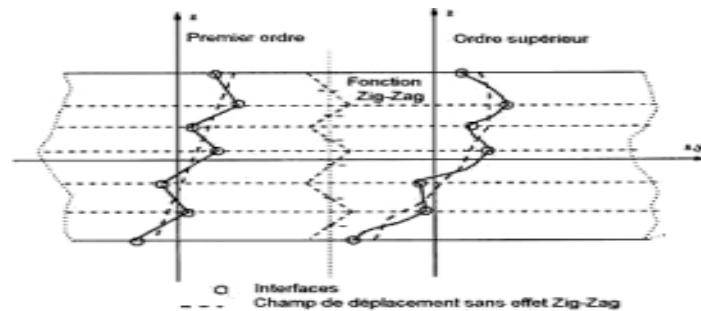


Figure II. 11- Champs des déplacements des modèles zig-zag [125].

II.2.2.1. Modèles zig-zig

Pour résoudre le problème des temps de calcul élevés dans les théories des plaques multicouches discrètes, des chercheurs tels que Di Sciuva, Murakami, Lu et Liu ont développé des modèles Zig-Zag raffinés. Ces modèles se caractérisent par des déplacements qui varient linéairement (voir Figures II.12, II.13) ou selon un ordre supérieur (voir Figure II.14) à travers l'épaisseur du matériau.

Un des principaux avantages de ces modèles est qu'ils permettent d'introduire des perturbations à l'interface sans compliquer les équations de base des théories des couches équivalentes. Ils respectent souvent les conditions de continuité des déplacements et des contraintes de cisaillement transversal aux interfaces, telles que celles entre les peaux et l'âme.

Une caractéristique essentielle des théories Zig-Zag est que le nombre de variables cinématiques reste constant, indépendamment du nombre de couches, tout comme dans l'approche ESL. L'approche Zig-Zag consiste à définir un modèle de déplacement (ou de contraintes) pour chaque couche et à appliquer les conditions de compatibilité et d'équilibre aux interfaces, ce qui permet de réduire le nombre de variables inconnues [114].

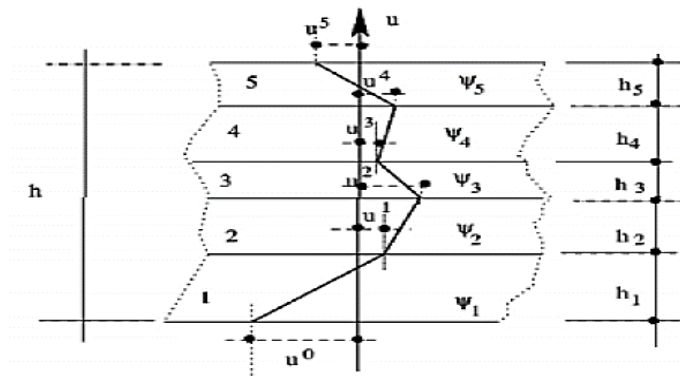


Figure II. 12- Géométrie et Notations Utilisées dans les Théories en Zig-Zag.

En 2003, Carrera a proposé une analyse détaillée des théories Zig-Zag pour l'étude des plaques et des coques en matériaux multicouches. Cette analyse met en lumière trois théories principales :

La théorie multicouche de Lekhnitskii (LMT) : Intègre l'effet Zig-Zag en incluant des conditions de continuité des contraintes de cisaillement transverse dans les équations constitutives et les relations déformation-déplacement de chaque couche.

La théorie multicouche d'Ambartsumian (AMT) : Adopte également l'effet Zig-Zag en traitant les conditions de continuité des contraintes de cisaillement transverse de manière similaire à la LMT.

La théorie multicouche de Reissner (RMT) : Utilise une approche distincte avec des équations indépendantes, sans intégrer directement l'effet Zig-Zag.

Ces théories offrent différentes perspectives sur la modélisation des matériaux multicouches en prenant en compte ou en écartant l'effet Zig-Zag.

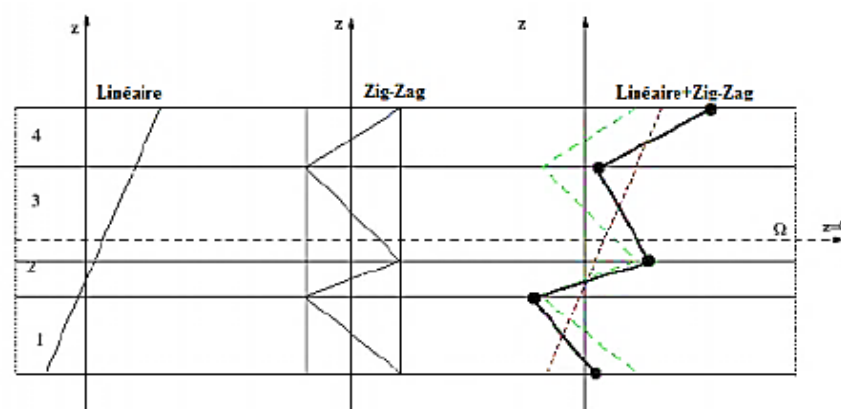


Figure II. 13- Champ de déplacements des modèles zig-zig du premier ordre [126].

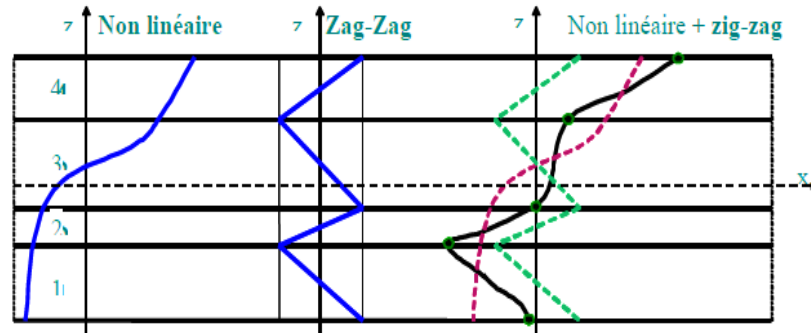


Figure II. 14-Champ de Déplacements dans les Modèles Zig-Zag d'Ordre Supérieur [126].

II.2.2.2. Les modèles en couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale. En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couples par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

Dans les travaux de Tahani, Nosier [127], [128, 129] on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.

D'une manière alternative, les travaux de [130-132] utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou un mixte contrainte cinématique. Ainsi Ren and technology [131] utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces. Dans [132], le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Dans Wan-Lee and structures [130], les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inters laminaires. Elles sont approximées de façons polynomiales dans l'épaisseur.

Nous passons à présent à une famille de modèles couches discrètes particulières, les modèles multi particuliers. Le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle

local dans [133]. Le modèle local a été construit à partir de la formulation vibrationnelle d'Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche.

Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubique pour les contraintes normales.

La formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouches à $7n$ champs en $(x ; y)$, n étant le nombre de couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair.

La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevé de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC dont l'objectif est de proposer une série de simplifications permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité [125].

II.2.3. Modèles éléments finis des structures composites

Les solutions analytiques fournies par les approches décrites précédemment ne concernent que des cas de géométrie, chargement et empilement simples. Pour les cas complexes plusieurs méthodes numériques ont été développées. On ne s'intéresse ici qu'aux méthodes des éléments finis, outil d'ingénierie dominant pour l'analyse des structures. Les éléments finis sont généralement classés suivant le type de description géométrique (2D, 3D), la méthode de construction et le choix du type d'inconnues principales du modèle (déplacements, contraintes, mixtes, hybrides). Ci-dessous, nous passons en revue différentes contributions éléments finis relatives à des modèles mécaniques décrits précédemment.

II.2.3.1. Modèles éléments finis 2D

Les premiers éléments finis multicouches sont construits en se basant sur les théories du premier ordre, notamment les modèles Reissner-Mindlin avec facteurs de correction [134, 135]. Ces éléments finis possèdent 5 degrés de liberté par nœud. L'intégration numérique réduite est souvent utilisée pour éviter le phénomène de blocage en cisaillement transverse. Grace à leurs avantages numériques (formulation simple, continuité C_0 , les degrés de liberté et les conditions limites physiquement facile à interpréter, convergence rapide) et leurs précisions en estimant des

champs globaux, les éléments finis Reissner-Mindlin restent les plus utilisés et sont présents dans tous les codes de calcul commerciaux. Un des inconvénients majeurs de ce type d'élément réside dans l'estimation des facteurs de correction. On trouve dans [125] une procédure en deux phases pour l'estimation correcte de ces facteurs correctifs. Les contraintes de cisaillement transverse calculées par les équations constitutives sont moins précises et discontinues aux interfaces. On intègre donc l'équation d'équilibre 3D pour mieux les estimer [125].

Un large volume consacré au développement des éléments finis multicouches concerne des éléments finis d'ordre supérieur. Comme déjà discuté ci-dessus, les théories d'ordre supérieur impliquent souvent la dérivée seconde des déplacements transversaux. Cela demande une continuité pour des fonctions de déplacement des éléments finis correspondants. Non seulement les déplacements transversaux w mais encore leurs dérivées normales $\partial w / \partial n$ doivent être continus à travers des frontières inter éléments. Dans Ren and technology [131], un élément de continuité $C1$ basé sur le modèle cubique de [Reddy 1984] est proposé. Cet élément contient 7 degrés de liberté par nœud. Les contraintes de cisaillement transverse sont paraboliques dans l'épaisseur et l'élément est libre du blocage de cisaillement transverse. En se basant sur le modèle "sinus" de Touratier [136], différents éléments finis quadrilatère et triangulaire de continuité $C1$ sont développés [125, 137]. L'élément triangulaire développé par Polit et al. Est capable d'étudier divers problèmes linéaires et non linéaires. L'élément possède 6 nœuds. La continuité des champs aux interfaces et les conditions limites aux surfaces supérieures et inférieures sont assurés. La géométrie de l'élément est présentée sur la Figure II.15.

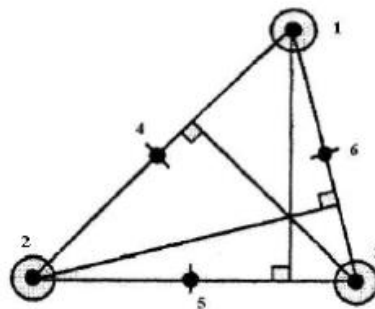


Figure II. 15-Elément « sinus » triangulaire 6 nœuds de [137].

Les travaux de Khare [Khare 2004], ont pour objectif de développer une famille d'éléments d'ordre supérieur. Plusieurs éléments quadrilatères de type Lagrange à 9 et 16 nœuds sont proposés (Figures. II.16 et II.17). Ils diffèrent par l'ordre du développement en série de Taylor adopté pour le champ de déplacement :

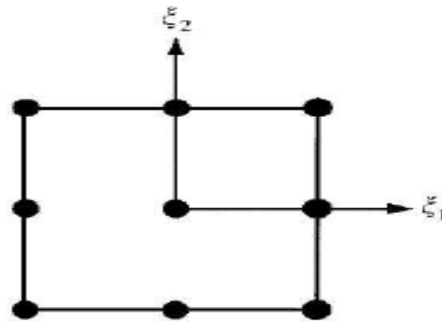


Figure II. 16- Elément quadrilatère de type Lagrange à 9 nœuds [125].

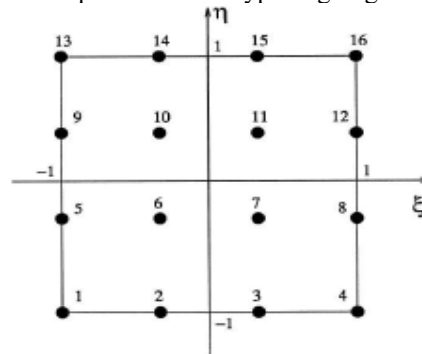


Figure II. 17- Elément quadrilatère de type Lagrange à 16 nœuds [125].

II.2.3.2. II.2.3.2. Modèles éléments finis 3D

Les analyses 3D conduisent à un large système d'équations. Cela nécessite donc un grand espace de stockage qui réserve la modélisation 3D pour l'étude locale des champs dans les zones critiques. Les éléments brique iso paramétrique 20 nœuds de Raju, Crews Jr [138] sont couramment utilisés pour étudier les champs près des bords libres. Un maillage typique pour l'analyse des contraintes d'interface est présenté sur la Figure. II.18.

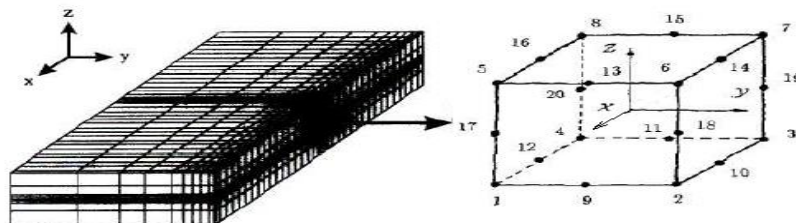


Figure II. 18-Eléments finis 3D à 20 nœuds pour déterminer les contraintes suivant Z [125].

Icardi, Bertetto [139] étudient la singularité des contraintes au bord libre en utilisant un élément brique 20 nœuds (Figure II.19) et un élément singulier 15 nœuds (Figure II.20) généré à partir d'un élément de brique 20 nœuds. Une procédure de calcul à deux phases "prédicteur-correcteur" est utilisée pour assurer les conditions de contact aux interfaces. Le maillage utilisé est présenté sur la Figure II.21.

[140] développe un élément fini brique zig-zag à 8 nœuds. Suivant l'épaisseur, chaque couche est modélisée par un élément qui adopte une cinématique de type zig-zag du premier ordre. Dans Desai, Ramtekkar [141] un élément mixte à 18 nœuds est proposé (Figure II.22). Les variables nodales sont les 3 déplacements et les trois contraintes hors plan. Chaque élément est à l'épaisseur d'une couche et les contraintes déterminées aux nœuds sont les contraintes inters laminaires.

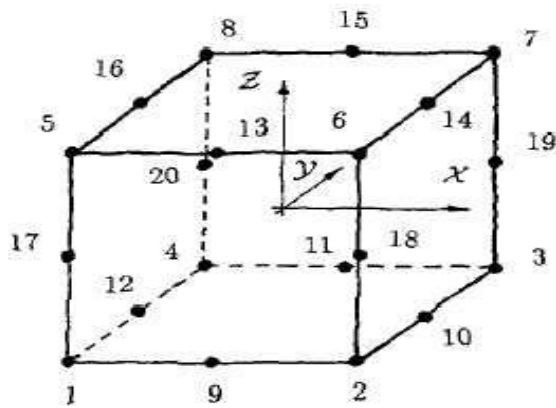


Figure II. 19 -Élément brique à 20 nœuds

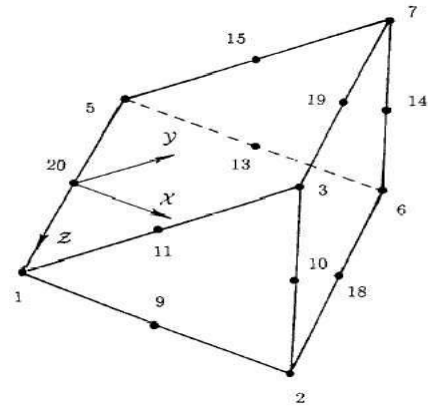


Figure II. 20 -Elément singulier à 15 nœuds

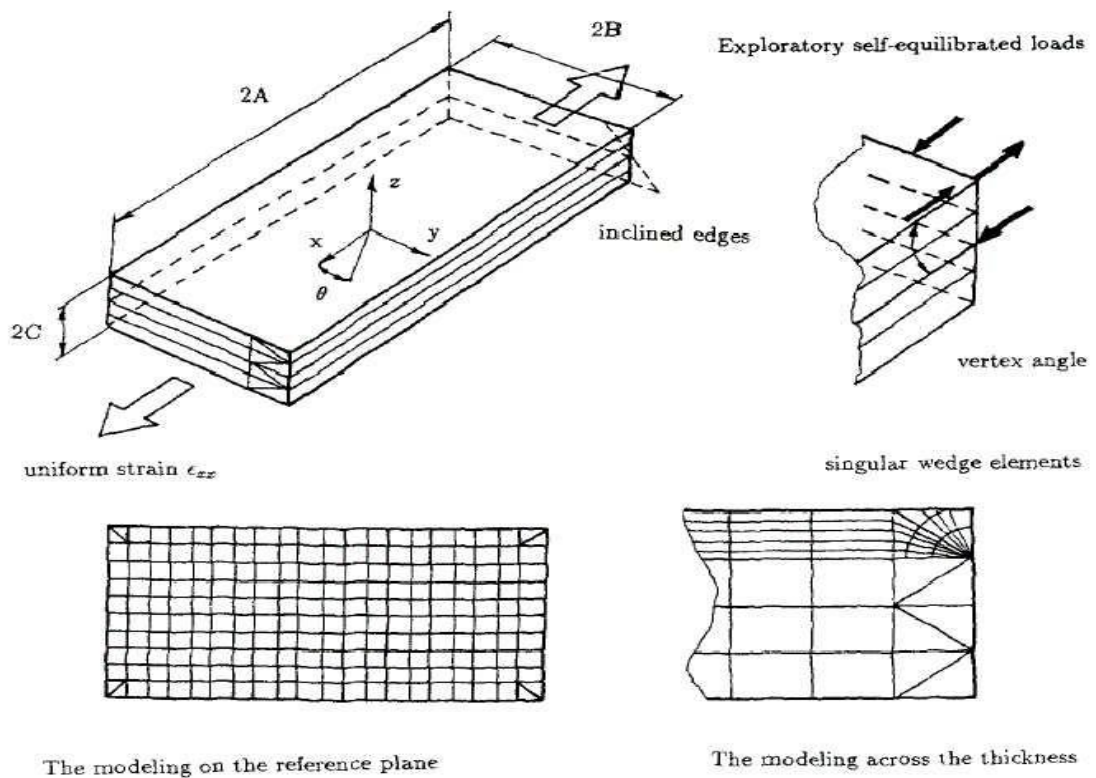


Figure II. 21-études du problème de bord libre par EF 3D.

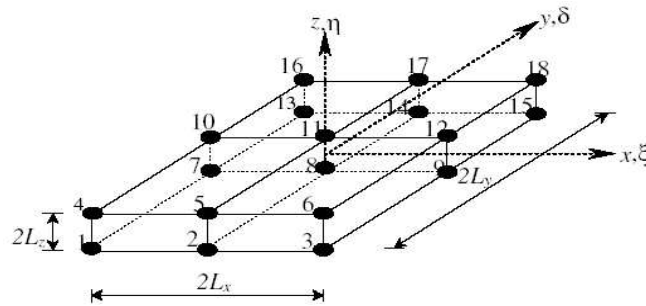


Figure II. 22 -Élément brique mixte à 18 nœuds.

Dans Bui, Marechal [142] les interfaces sont modélisées par un élément typique à l'épaisseur zéro. Cet élément d'interface est formulé en dégénérant continuellement vers zéro l'épaisseur d'un élément de plaque mince (voir Figure II.23). Les couches sont modélisées par des éléments finis volumiques ordinaires.

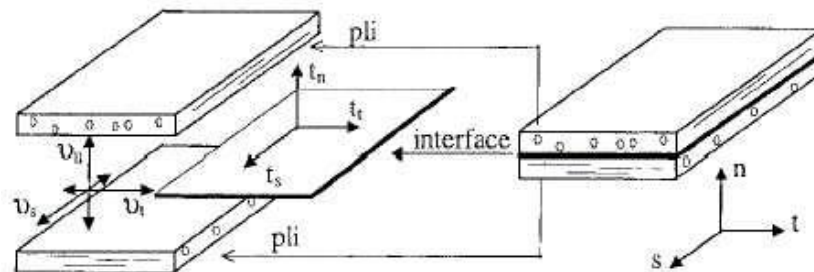


Figure II. 23-Élément d'interface.

Cette méthode évite un écueil classique des approches 3D. Compte tenu du fait que les contraintes sont calculées dans l'élément et non sur sa frontière, l'estimation des contraintes d'interface par les l'élément finis 3D nécessite souvent un travail de post-processeur pour relocaliser et calculer les valeurs précises aux interfaces. En plus, les contraintes obtenues aux voisinages des bords libres sont singulières et dépendent du raffinement du maillage.

II.3. Modèles analytiques des poutres sur fondation

Historiquement, la manière traditionnelle de surmonter la déficience du modèle Winkler est d'introduire une certaine interaction entre les ressorts indépendants en visualisant différents types d'interconnexions tels que les éléments de flexion (poutres en une dimension (1-D), plaques en 2-D), cisaillement-seulement des couches et des membranes déformées et préensionnées (Kerr, 1964). Le modèle de base proposé par [143, 144] acquiert la continuité entre les différents éléments de ressort du modèle Winkler en les reliant à une fine membrane élastique sous une tension constante. Dans le modèle proposé par [144, 145], l'interaction entre

les éléments de ressort indépendants s'accomplit en incorporant une plaque élastique dans les problèmes tridimensionnels, ou une poutre élastique dans les problèmes bidimensionnels, qui ne peut se déformer qu'en flexion. Un autre modèle de fondation, proposé par [146] acquiert une interaction de cisaillement entre les ressorts en reliant les extrémités des ressorts à un couche constituée d'éléments verticaux incompressibles qui ne se déforment que par cisaillement transversal [144, 147]. Cette classe de modèles mathématiques ont un autre paramètre constant qui caractérise l'interaction implicite entre les ressorts et sont donc appelés modèles à deux paramètres ou, plus simplement, des modèles mécaniques [148] (Voir la figure II.24).

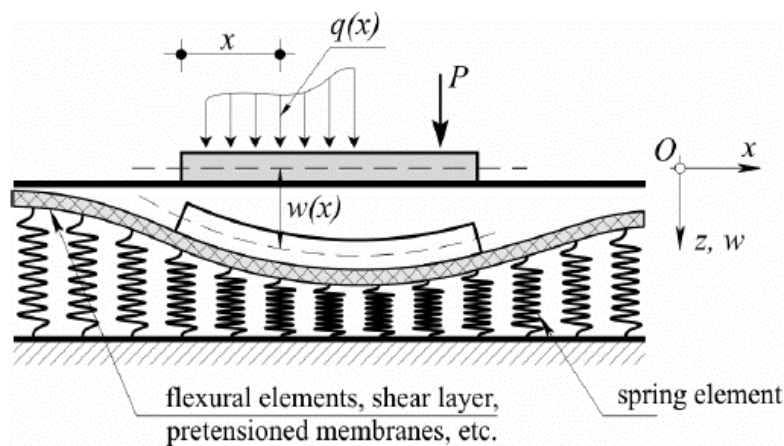


Figure II. 24- Structure sur fondation élastique [146].

II.3.1. Approches de la Modélisation des fondations élastiques

II.3.1.1. Modèle de Winkler (1867)

D'abord, Winkler a représenté un faisceau d'Euler-Bernoulli sur une fondation élastique en tant que voie ferrée [149]. Ce modèle de base repose sur l'idée que chaque réaction du point est proportionnelle au déplacement du point, et que les ressorts sont linéaires et indépendants, comme indiqué dans l'équation. (II.10). La réaction de la fondation est [149]:

$$p(x, t) = kw(x, t) \quad \text{II.10}$$

Où $w(x, t)$ correspond au mouvement vertical et k correspond à la rigidité des ressorts linéaires. Par conséquent, cette théorie entraîne la même réaction en ce qui concerne les compressions et les tensions. Il est connu sous le nom de comportement mécanique bilatéral (fondation bilatérale) (Figure II.25).

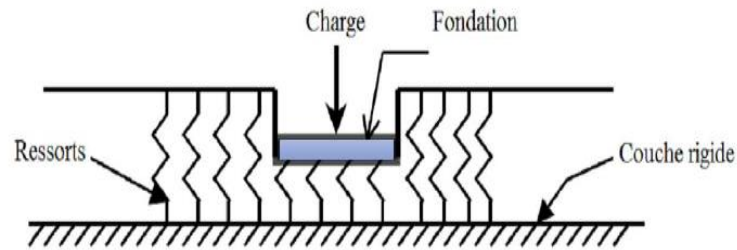


Figure II. 25- Modèle de fondation de Winkler [150].

En mathématiques, la description de la mécanique d'une fondation repose sur l'idéalisation de son comportement. Le modèle de Winkler est le plus simple, mais en raison des différentes caractéristiques des matériaux et des sols (granulaires, argileux, humides, sous pression, etc.), il est nécessaire d'inclure davantage de paramètres pour représenter le comportement des matériaux utilisés comme fondation. Les modèles qui suivent, exposés dans les parties suivantes, sont élaborés à partir du modèle Winkler. En réalité, les scientifiques ont débuté En utilisant la théorie de Winkler, j'ai ajouté davantage de paramètres et d'éléments dans le modèle Winkler pour permettre une réaction plus précise pour une structure fondamentale.

II.3.1.2.Fondation du modèle Winkler modifié (Pasternak, 1954)

L'interaction de cisaillement entre les éléments de ressort est supposée dans ce modèle, ce qui est réalisé en reliant les extrémités des ressorts à une poutre ou à une plaque qui ne subit qu'une déformation de cisaillement transversale (figure II.26). La tension-déformation On obtient cette relation en prenant en compte l'équilibre vertical d'une couche de cisaillement. La relation entre la pression et la déformation est exprimée par :

$$p = kw - G\nabla^2 w \quad \text{II.11}$$

La valeur de G correspond au module de cisaillement de la couche de cisaillement. Dans ce modèle, la continuité est donc marquée par l'intégration de la couche de cisaillement. En comparant ce modèle à celui de Filonenko-Boroditch, on constate leur équivalence physique (« T » a été incorporé par « G »). Une description approfondie et les fondements du développement du modèle ont été abordés ailleurs [146]. On a trouvé des solutions analytiques pour les plaques de type Pasternak fondations, accompagnées d'une brève description de la dérivation du modèle, dans la littérature[144, 151].

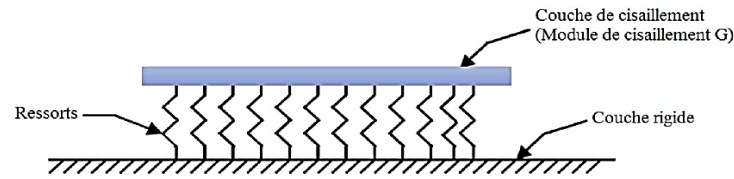


Figure II. 26- Modèle de fondation de Pasternak [152].

II.3.2. Modèles de fondations Linéaires en Élasticité et Viscoélasticité

II.3.2.1. Fondation de Kerr (à trois paramètres)

Kerr a développé un modèle à trois paramètres, également appelé fondation de type Kerr, comme une extension du modèle Pasternak [153]. Dans ce modèle, la fondation est représentée par une poutre encastrée dans un support élastique, comme illustré sur la figure II.27. Il en résulte trois paramètres indépendants, notés c (kN/m³), k (kN/m³), et G (kN/m), qui caractérisent la force de rappel de la fondation. En utilisant ces paramètres, une large gamme de matériaux viscoélastiques peut être mathématiquement modélisée. La réponse à la flèche de la fondation peut être obtenue en résolvant l'équation suivante [153] :

$$\left(1 + \frac{k}{c}\right) p(x,t) - \frac{G}{c} \nabla^2 p(x,t) = k \omega(x,t) - G \nabla^2 \omega(x,t) \quad \text{II.12}$$

c and k represent the elastic spring constants, while G denotes the flexural rigidity, and $\omega(x,t)$ signifies the surface displacement of the foundation. Primarily, the foundation was utilized to model the behavior of a flexible soil and to depict the boundary conditions between a structure and the soil.

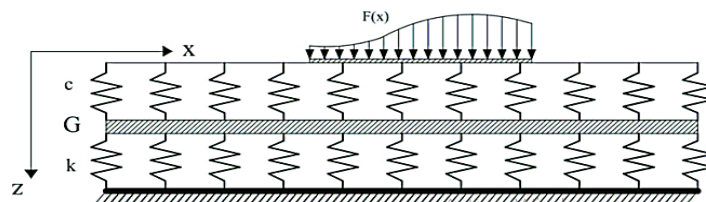


Figure II. 27- Modèle de fondation de Kerr [153].

II.3.2.2. Fondation de Kerr simplifiée

Le modèle Kerr est un modèle élastique à trois paramètres comprenant une couche de cisaillement K_s , une couche élastique supérieure et une couche élastique inférieure K_l . Dans ce modèle, une couche de cisaillement est incorporée K_u dans la fondation de type Winkler, avec

l'hypothèse que les constantes de ressort situées au-dessus et au-dessous de cette couche sont différentes. La densité de réaction de cette fondation est donnée par [154] :

$$q_{\text{kerr}} = \left(\frac{K_l K_u}{K_l + K_u} \right) w - \left(\frac{K_s K_u}{K_l + K_u} \right) \nabla^2 w \quad \text{II.13}$$

Où : K_s est le module de cisaillement, K_u est le module élastique de la couche supérieure et K_l le module élastique de la couche inférieure.

II.3.2.3. Fondation de Hetenyi

Dans ce modèle, la réaction des ressorts n'est pas autonome. La connexion entre les ressorts du Modèle Winkler est assurée par un faisceau d'Euler-Bernoulli (dans les problèmes unidimensionnels) ou une plaque mince (dans les problèmes bidimensionnels). La figure II.28 illustre la poutre ou la plaque, qui est considérée comme étant sans masse et ne présente que la réaction de flexion. La corrélation entre la puissance et le mouvement à travers cette fondation est [145] :

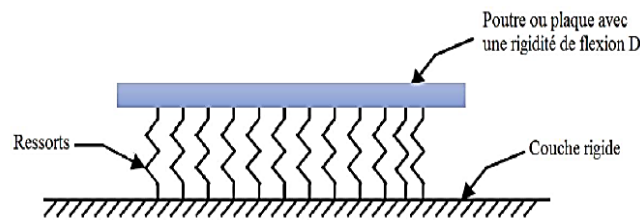


Figure II. 28- Modèle de Fondation de Hetenyi [149].

Et

$$p(x,t) = kw(x,t) + k_1 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{II.14}$$

où $k_1 = EI$, la rigidité en flexion de la poutre, ou $k_1 = D$ est la rigidité en flexion de la plaque [145].

II.3.2.4. Modèle de Kelvin–Voigt

Le modèle de Winkler présente une faiblesse en raison de son manque d'éléments viscoélastiques. Dans le modèle Kelvin – Voigt, le comportement viscoélastique est intégré et le support est équipé d'une série de ressorts discrets parallèles à amortisseurs (Figure II.29). En d'autres mots, Kelvin-Voigt présente les propriétés de viscoélasticité dans le modèle Winkler de

l'élastique. Le lien entre la restauration, la force et le déplacement est établi en se basant sur le rapport suivant [155]:

$$p(x,t) = kw(x,t) + c\dot{w}(x,t) \quad \text{II.15}$$

L'amortissement des éléments visqueux est représenté par c . Plusieurs recherches ont employé le modèle Kelvin-Voigt, notamment pour analyser la fréquence non linéaire du faisceau sur la fondation Kelvin-Voigt, formuler un faisceau infini par éléments finis sur la fondation Kelvin-Voigt et étudier la propagation d'un faisceau infini sur la fondation [156-158].

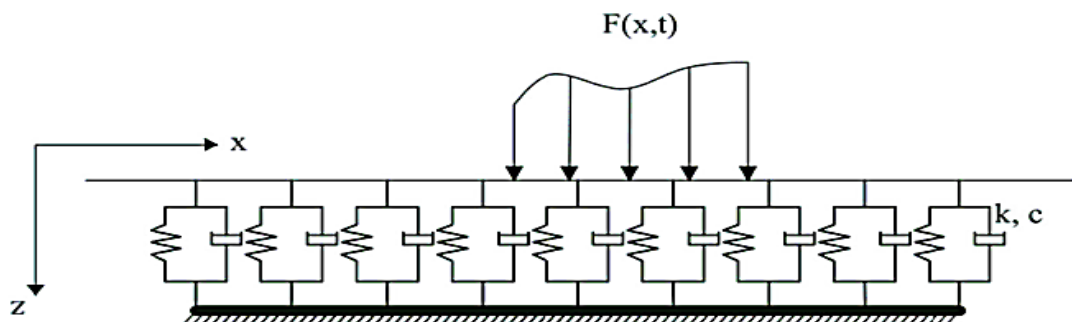


Figure II. 29- Modèle de fondation de Kelvin–Voigt [159].

II.3.2.5. Modèle de Filonenko–Borodich

Le modèle de fondation Filonenko – Borodich est représenté physiquement dans la figure II.30 [143]. D'après cette approche, la connectivité des ressorts Winkler individuels est obtenue en utilisant une membrane élastique fine soumise à une tension constante T . On attache cette membrane aux extrémités supérieures des ressorts.

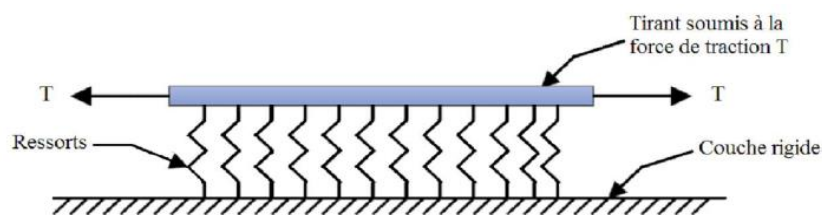


Figure II. 30-Modèle de fondation de filonenko-Borodich [149].

Donc on peut représenter mathématiquement la réponse du modèle de la manière suivante :

$$p = kw - T\nabla^2 w \quad , \text{ Ou fondation rectangulaire ou circulaire}$$

$$p = kw - T \frac{d^2 w}{dx^2} \quad , \text{ Pour fondation en bande} \quad \text{II.16}$$

$$\text{Ou } \nabla^2 \equiv \text{opérateur laplace} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad T = \text{Traction forcer}.$$

Ainsi, l'interaction entre les éléments à ressort est définie par l'intensité de la tension T présente dans la membrane. La littérature suggère également un modèle de fondation similaire, avec un liquide lourd avec une tension superficielle [152].

II.3.3. Modèle d'une poutre sur fondation Winkler non linéaire (BNWF)

Un autre modèle simplifié de type ressort, le modèle Poutre sur fondation Winkler non linéaire (BNWF), permet d'évaluer les effets ISS et de prendre en considération la non-linéarité du milieu du sol. Ce modèle illustre parfaitement le domaine du sol en utilisant un ensemble de ressorts non linéaires unidimensionnels répartis à l'interface entre le sol et la fondation [160]. Le sol sous la fondation est très sujet à une déformation plastique lors de séismes violents, en raison de l'augmentation de la pression sous la fondation due aux mouvements de bascule et de glissement de la fondation [161].

Ainsi, une telle diminution du contact entre la base et le sol conduit à une diminution graduelle de la rigidité du système. Afin de prendre en compte cette situation, le modèle BNWF propose un ensemble de ressorts non linéaires verticaux et horizontaux afin de mesurer les déformations plastiques et la dissipation d'énergie dans le domaine du sol.

La figure II.31 montre que les ressorts disposés verticalement sur toute la longueur de la semelle (éléments q-z) captent le basculement, le soulèvement et le tassement. Alors que l'on positionne les ressorts horizontaux (t-x et p-x) afin de capter la résistance de glissement et la résistance passive du sol. Au bout de la semelle, les ressorts sont renforcés pour prendre en compte les ressorts de rotation de manière adéquate [162].

Selon Raychowdhury, Hutchinson [163], l'utilisation de BNWF dans OpenSees est exposée dans le cadre d'une étude structurelle bidimensionnelle. Selon les sources Winkler, la fondation est représentée par des éléments poutre-colonne élastiques, tandis que l'interface est définie par plusieurs longueurs nulles indépendantes.

Les courbes de base non linéaires représentent la relation constitutive des éléments (q-z, t-x et p-x), initialement développées par [164] et calibrées par [160, 165] Le BNWF convient à toutes sortes de surfaces et de fondations encastrées. On pourrait aussi l'utiliser pour les dépôts de sols argileux et sablonneux, peu importe le modèle structurel. Ainsi, le modèle peut être utilisé pour une variété de problèmes ISS en ingénierie des structures [166].

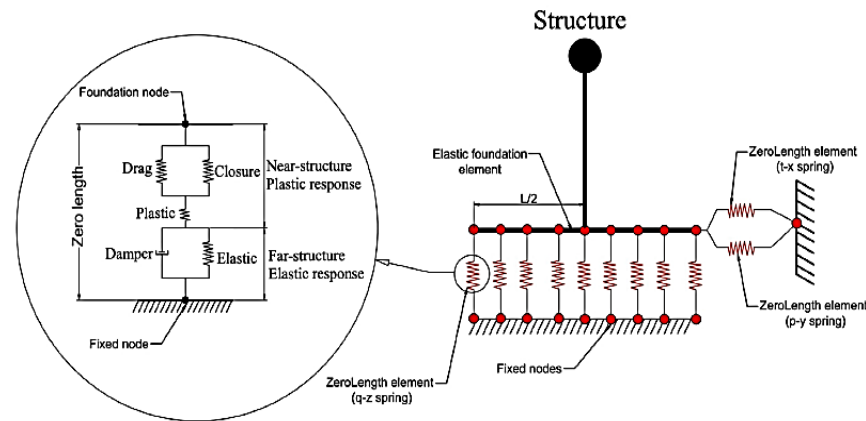


Figure II. 31-Illustration schématique d'un modèle de poutre sur Fondation de Winkler non linéaire (BNWF)[160].

II.3.4. Modèle Généralisée de la Fondation

Ainsi, dans ce modèle de base, outre l'hypothèse de Winkler, où la pression p est proportionnelle à la flèche w en chaque point, le moment est également proportionnel à l'angle de rotation. En termes d'analyse, cela est défini par [144, 167, 168]

$$\begin{aligned} p &= kw \\ m_n &= k_1 \frac{dw}{dn} \end{aligned} \quad \text{II.17}$$

Où :

n : Direction quelconque en un point du plan de la surface de la fondation ;

k_1 Et k_2 : Facteurs de proportionnalité correspondants.

Cette supposition supplémentaire est plutôt subjective. Il sera démontré dans une dernière partie que le modèle de fondation Pasternak est un modèle mécanique envisageable pour la fondation généralisée, ce qui confère au modèle de fondation généralisée une dimension physique.

Les versions améliorées du modèle généralisé sont :

A. Fondation Vlasov

B. Fondation Reissner

II.3.5. Modèle de Fondation de Vlasov (1966)

V. Z. Vlasov a examiné le sujet à partir d'un point de vue « continuum ». Il a exposé son problème en utilisant une méthode variationnelle (Voir figure II.32). Après avoir établi certaines

limites à l'éventualité de déformations d'une couche élastique, il a obtenu une relation charge-déformation pour un ensemble d'hypothèses.

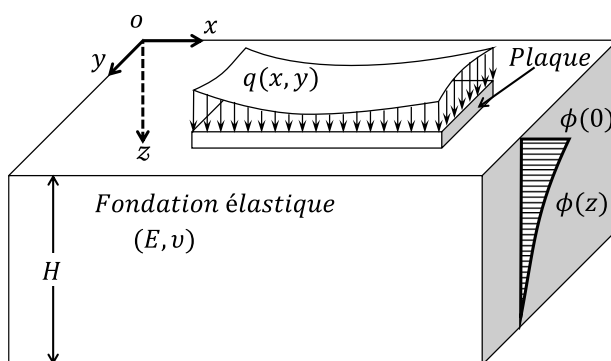


Figure II. 32- Modèle de fondation de Vlasov [148].

II.3.6. Modèle de fondation de Reissner

Le modèle de Reissner est une simplification du modèle halfspace, conçu pour le rendre moins complexe. Il repose sur l'idée que toutes les contraintes dans le plan z d'une couche de sol d'épaisseur H (comme illustré dans la figure II.33) sont nulles.

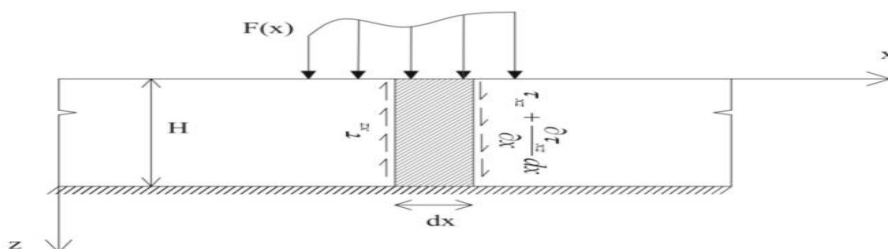


Figure II. 33-Model de fondation de Reissner [159].

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad \text{II.18}$$

De plus, les contraintes relatives aux déplacements des surfaces de contact et à la base inférieure de la fondation sont prises en compte.

$$u|_{z=0} = 0; u|_{z=H} = \omega|_{z=H} = 0 \quad \text{II.19}$$

En se basant sur l'hypothèse d'élasticité et d'isotropie du matériau, la relation suivante est dérivée à partir des équations qui régissent un milieu continu :

$$c_1 \omega(x, y, t) - c_2 \nabla^2 \omega(x, y, t) = p(x, y, t) - \frac{c_2}{4c_1} \nabla^2 p(x, y, t) \quad \text{II.20}$$

Dans laquelle $c_1 = \frac{E}{H}$, $c_2 = \frac{HG}{3}$ et E , G et H le module d'Young, le module de cisaillement et l'épaisseur de fondation sont respectivement le module d'Young, le module de

cisaillement et l'épaisseur de la fondation. Zhang a démontré l'efficacité de l'utilisation du modèle de Reissner par rapport au modèle de Winkler en étudiant les contacts entre une poutre et une fondation [169]. Nobili a adopté le modèle de fondation Reissner comme modèle mathématique des milieux de sol [170].

II.3.7. Modèle de fondation de Maxwell

Ce modèle implique l'installation d'une série de ressorts et d'amortisseurs, La force de réaction de la fondation peut être calculée à partir de l'équation suivante [171] :

$$\begin{aligned} p(x, t) &= k\Delta_1(x, t) = c\dot{\Delta}_2(x, t) \\ w(x, t) &= \Delta_{tot}(x, t) = \Delta_1(x, t) + \Delta_2(x, t) \\ \Rightarrow \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} &= \frac{1}{k} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{c} p(x, t) \end{aligned} \quad \text{II.21}$$

La réaction de la fondation, $p(x, t)$ les variations de déplacement des éléments de ressort, $\Delta_1(x, t)$ et des éléments amortisseurs, $\Delta_2(x, t)$ sont présentées dans la figure II.34 [172] ont modélisé l'assemblage de contreventements et d'amortisseurs visqueux, utilisés dans les immeubles de grande hauteur, selon le modèle de Maxwell. Dans leur analyse, le modèle de Maxwell a été choisi en raison de la disposition des contreventements et des amortisseurs. [173] ont utilisé le modèle de Maxwell pour décrire le comportement viscoélastique des plaques, puis ils ont effectué une analyse de contrainte pour une plaque mince.

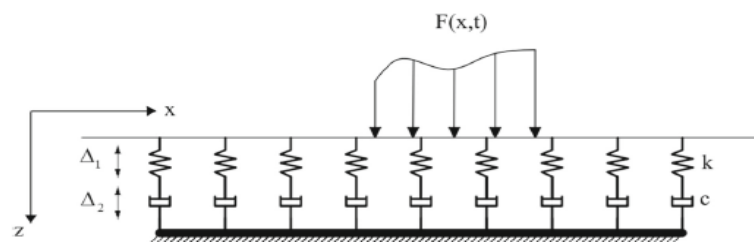


Figure II. 34-Modèle de fondation de Maxwell [159].

II.3.8. Modèle de fondation de Zener

Le modèle de Zener, également connu sous le nom de modèle standard solide linéaire (SLS), est composé des modèles de Winkler et de Maxwell en parallèle (Figure II.35), avec la relation force déplacement suivante [171] :

$$\begin{aligned}
 p(x,t) &= k_2 \Delta_2(x,t) + k_1 \Delta_{s1}(x,t) = k_2 \Delta_2(x,t) + c_1 \dot{\Delta}_{d1}(x,t) \\
 w(x,t) &= \Delta_{tot}(x,t) = \Delta_{s1}(x,t) + \Delta_{d1}(x,t) = \Delta_2(x,t) \\
 \Rightarrow \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} &= \frac{\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \frac{k_1}{c_1} p(x,t) - k_1 k_2 w(x,t)}{k_1 + k_2}
 \end{aligned}
 \tag{II.22}$$

Muscolino, Palmeri [174] ont utilisé le modèle SLS en combinaison avec une formulation à espace d'état pour décrire les vibrations d'une poutre reposant sur une fondation ; Hörmann, Konjik [175] ont présenté la réponse d'une poutre sur une fondation en considérant le modèle généralisé de Zener.

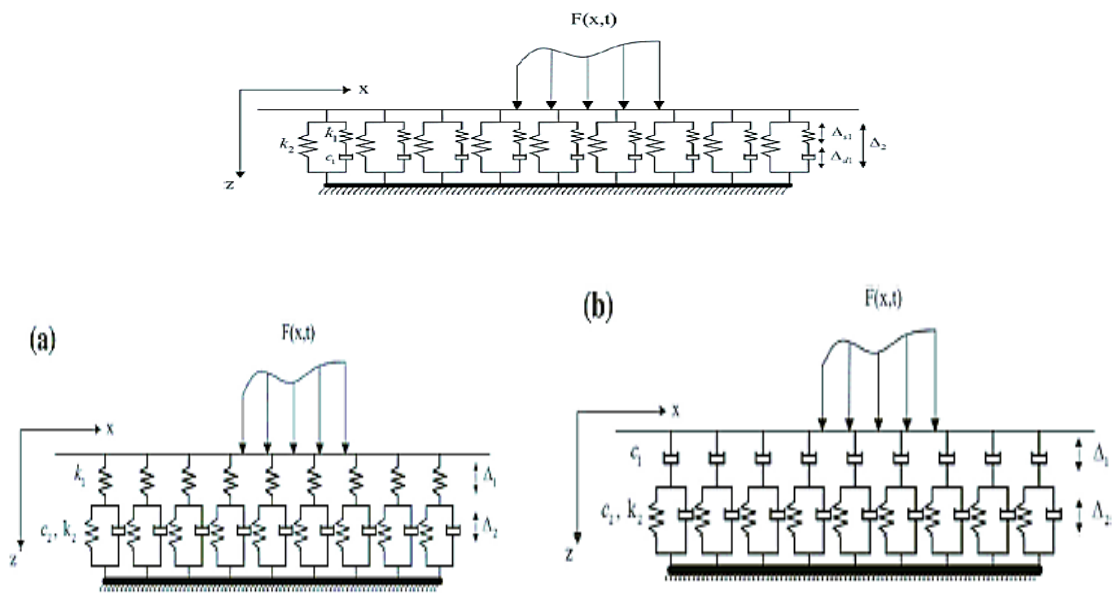


Figure II. 35- modèle de fondation de Zener [159].

II.3.9. Fondation élastique non uniforme de type Winkler à module variable

La distribution des couches de sol varie d'un endroit à l'autre. Par conséquent, les modules des fondations élastiques, qu'il s'agisse du modèle de Winkler ou de celui de Pasternak, sont variables et ne sont pas constants sur toute la longueur d'une structure en plaque ou en poutre.

La variation de la fondation élastique de Winkler a été classée en trois modèles selon la formulation notée et publiée par des chercheurs comme suit :

- **Model 1**

La répartition des couches de sol varie d'un point à un autre, ce qui implique une variation du module de Winkler qui n'est pas constant le long de la structure, que ce soit sous forme de

plaque ou de poutre. La réaction de cette fondation peut être représentée de manière linéaire, parabolique ou sinusoidale, selon différentes études [176-178].

$$R_f(x) = K_w(x)w + K_p \nabla^2 w \quad \text{II.23}$$

Où : R_f représente la densité de la force de réaction de la fondation élastique et K_w est le paramètre Winkler dépendant uniquement de x . Ce dernier peut être exprimé de manière linéaire, parabolique ou sinusoidale [176-178].

$$K_w(x) = \frac{J_1 h^3}{a^4} \begin{cases} 1 + \zeta \frac{x}{a} \\ 1 + \zeta \left(\frac{x}{a}\right)^2 \\ 1 + \zeta \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) \end{cases} \quad \text{II.24}$$

Pour une meilleure compréhension, une illustration qualitative des diverses distributions des coefficients de la fondation élastique à deux paramètres le long de la plaque est présentée à la Figure II.36.



Figure II. 36-Représentation du paramètre variable de Winkler a) Linéaire, b) Parabolique et c) Sinusoïdale [179].

J_1 est une constante et ζ est un paramètre variable. K_p représente la rigidité de la couche de cisaillement, ∇^2 est l'opérateur Laplacien en x , y , et w est la déflexion de la plaque. Il convient de noter que si le paramètre variable $\zeta = 0$, la fondation élastique devient celle de Pasternak, tandis que si la rigidité de la couche de cisaillement est négligée, la fondation Pasternak se réduit à la fondation Winkler [180].

- **Model 2**

Le modèle de fondation élastique de Winkler à variation non uniforme est proposé par [179] sous forme de trois types de variation : polynomiale, cosinus et exponentielle.

$$K_w(x) = \frac{D_t h^3}{a^4} \begin{cases} 1 + \zeta \sum_{i=0}^j c_i \left(\frac{x}{a}\right)^i & \text{Polynomiale} \\ 1 + \zeta \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) & \text{cousins} \\ 1 + \zeta \left(\exp\left(\frac{x}{a}\right) - \exp\left(\left(\frac{x}{a}\right)^\eta\right) \right) & \text{Exponentiel} \end{cases} \quad \text{II.25}$$

Si ζ est nul, la fondation de Pasternak devient uniforme, et si la rigidité de la couche de cisaillement est négligée, la fondation de Pasternak devient la fondation de Winkler. $\eta > 1$ est un nombre réel supérieur à l'unité, et c_i est le paramètre de coefficient du polynôme. Pour une meilleure compréhension, une représentation qualitative des différentes distributions des coefficients de la fondation élastique à deux paramètres le long de la plaque est illustrée à la Figure II.37 [180].



Figure II. 37-Représentation du paramètre variable de Winkler a) Polynomiale, b) Cousins et c) Exponentiel [179].

- **Model 3**

Jena, Chakraverty [181] ont utilisé la méthode de la quadrature différentielle pour étudier la vibration d'une nano-poutre reposant sur des fondations élastiques de Winkler avec différentes formes fonctionnelles. Daikh, Houari [182] ont mené une étude sur la déflexion et la distribution des contraintes de nano-plaques sandwich reposant sur une base élastique variable de Winkler, en utilisant une nouvelle théorie du cisaillement hyperbolique quasi 3D en conjonction avec la théorie du gradient de déformation non local. Ils ont proposé pour la première fois un modèle de fondation élastique de Winkler variable pour inclure la variable environnementale élastique sous la nano-plaque S-FGM, vérifié avec des travaux antérieurs et des études paramétriques illustrant les influences des différents modèles de fondation élastiques.

La force exercée par la fondation élastique variable, notée f_e , peut être calculée par :

$$f_e = k_w w \quad \text{II.26}$$

Dans cette équation, k_w représente le module de réaction du sol de fondation (le coefficient élastique de la fondation de Winkler). Le modèle de fondation de Winkler actuel repose sur deux paramètres, k et ξ , définis comme suit [179]:

$$k_w = \begin{cases} k + \xi \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) & \text{Sinusoidal} \\ k + \xi \left(1 - \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\right) & \text{Inverse Sinusoidal} \\ k + \xi \left(\frac{x}{a}\right)^2 & \text{Parabolique} \\ k + \xi \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) & \text{Inverse Parabolique} \\ k + \xi \left(\frac{x}{a}\right) & \text{Linéaire} \end{cases} \quad \text{II.27}$$

La Figure II.38 illustre l'impact des différents types de fondations élastiques variables de Winkler sur la déflexion en fonction du rapport géométrique.

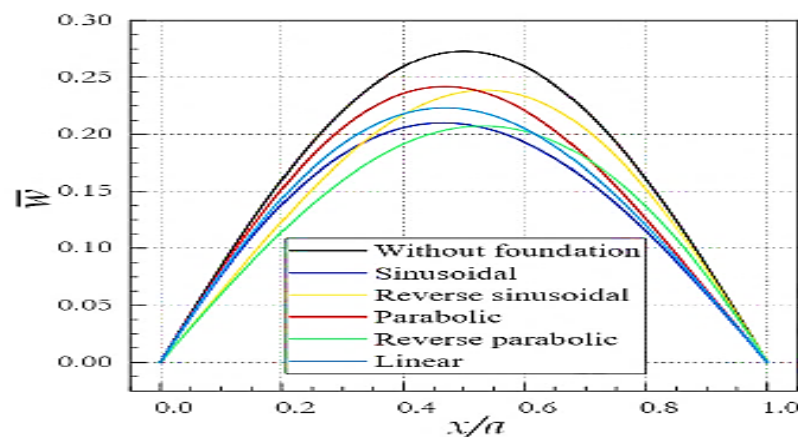


Figure II. 38- Influence du paramètre de fondation élastique sur la déflexion [180].

Dans ce contexte, les termes "paramètres de fondation" font référence à : $k_w = \frac{a^4}{D_c} K_w$ avec

$$D_c = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)}$$

II.4. Conclusion

Ce chapitre se concentre sur la recherche bibliographique relative à la modélisation des structures soutenues par des fondations élastiques. Nous y présentons différentes théories, notamment les approches monocouches, l'approche par couches et la théorie du zig-zag.

Dans cette section de la thèse, nous avons examiné divers modèles de poutres, y compris la théorie d'Euler-Bernoulli (CBT), la théorie du cisaillement de premier ordre (FSDBT), et les théories d'ordre supérieur (HSDBT). Nous avons conclu que le modèle monocouche équivalent s'avère être le plus adapté aux matériaux fonctionnellement gradés (FGM), car il n'induit pas de variations abruptes dans les propriétés mécaniques, contrairement aux composites conventionnels, où le délaminage représente un défi significatif.

De plus, nous avons exploré différents modèles de fondations élastiques, en mettant en lumière leur importance dans l'analyse structurale.

**Chapitre III : Analyse du
comportement mécanique d'une P-
FGCNT poreuse sur assise de type
AOVEF**

III.1. Introduction

L'analyse des poutres poreuses renforcées par des nanotubes de carbone (CNT) représente un domaine de recherche en pleine expansion, conjuguant les avancées de la nanotechnologie avec les besoins croissants d'optimisation structurelle. Ces poutres, dotées d'une microstructure poreuse, offrent des avantages significatifs en termes de légèreté et de résistance, rendant leur utilisation particulièrement pertinente dans des applications industrielles variées. Cependant, leur comportement dynamique et mécanique sous des conditions réelles d'utilisation, notamment en interaction avec des fondations orthotropiques variables, nécessite une investigation approfondie.

Les fondations orthotropiques, caractérisées par des propriétés anisotropes, influencent de manière significative le comportement des poutres, notamment en ce qui concerne la transmission des charges et la réponse dynamique. L'étude de l'interaction entre ces poutres renforcées et des fondations aux propriétés variables ouvre de nouvelles perspectives pour améliorer la performance structurelle et la durabilité des systèmes.

En outre, les effets de la vibration et du flambement et de la flèche sous l'effet des chargements statiques sont des phénomènes critiques à considérer dans la conception et l'analyse de ces structures. Les vibrations peuvent induire des résonances dangereuses et contribuer à des défaillances structurales, tandis que le flambement représente une limite majeure à la charge que peut supporter une poutre, et la flèche est une entité à caractère esthétique et de résistance limitée par les règlements. Par conséquent, une évaluation rigoureuse de la stabilité, des déplacements et des réponses dynamiques de ces poutres en fonction des conditions de fondation est essentielle pour garantir leur intégrité et leur fonctionnalité.

Cette étude vise à développer une approche mathématique robuste pour analyser le comportement mécanique des poutres poreuses renforcées par des CNT, en mettant l'accent sur leur interaction avec des fondations orthotropiques variables. En intégrant des considérations sur les effets de vibration, de flambement et de déplacement, nous cherchons à établir un cadre théorique qui puisse servir de base pour des applications pratiques dans le domaine de l'ingénierie structurelle.

III.2. Type de structures choisies pour l'étude

III.2.1. Analyse des poutres renforcées par des nanotubes de carbone sur fondations variables et aléatoirement orthotrope (AOVEF)

Prenons une poutre simplement appuyée en matériau composite renforcé de nanotubes de carbone (CNTRC) posée sur une fondation élastique à raideur variable orthotrope, comme illustré à la Figure III.1. Les dimensions de la poutre sont définies par sa longueur (L), sa hauteur (h), et sa largeur (b). La poutre composite peut être configurée de quatre façons différentes en ce qui concerne la répartition des CNT : uniformément dispersés (UD), en type O, en type V, et en type X. Le graphique présente un modèle mécanique d'une poutre droite reposant sur une fondation orthotrope de Pasternak. Lors de l'interaction avec cette fondation, un angle indique la direction des coordonnées locales du matériau orthotrope [183].

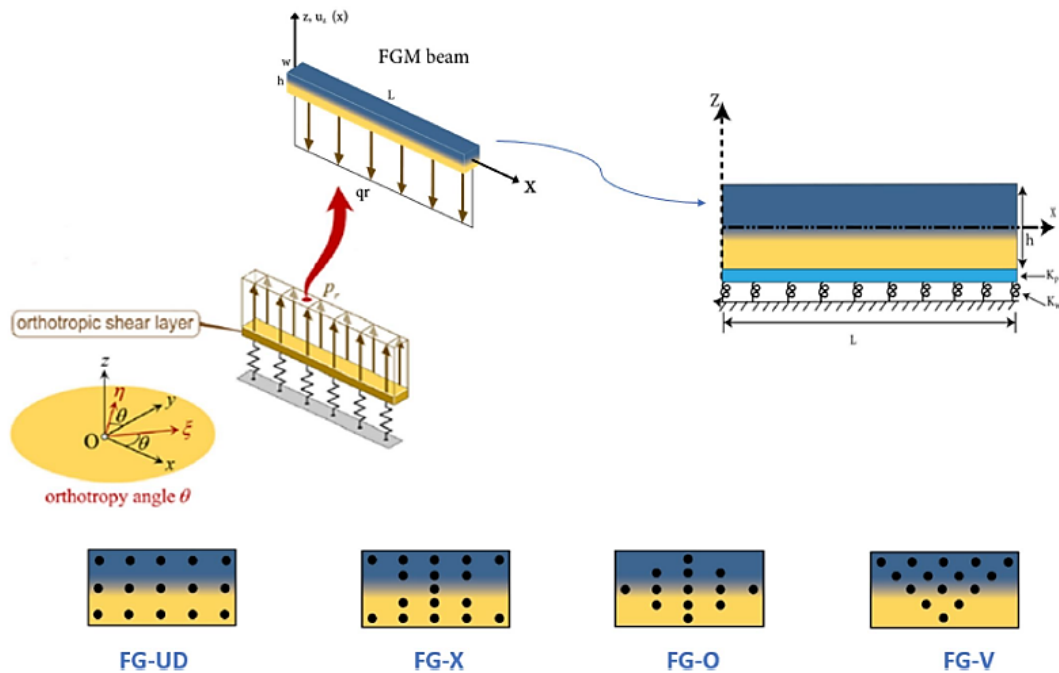


Figure III. 1- (a) Modélisation des poutres renforcées par des nanotubes de carbone avec un plan orthotrope local (n, g) et un plan orthotrope global (x, y, z) sur une fondation de Pasternak arbitrairement orthotrope [183].

III.2.2. Analyse des poutres renforcées par des nanotubes de carbone sur fondations variables isotrope (VEF)

On se contente, dans ce cas, d'utiliser des fondations variables sans tenir compte de l'effet d'orthotropie. La Figure III.2 illustre les cinq types de poutres FG-CNTRC sur les forces externes (EF), à savoir les configurations uniformes (UD) et les différentes répartitions à travers l'épaisseur de la poutre, désignées FG-V, FG-O, FG-X et n-FG-X, avec une longueur (L), une

largeur (b) et une épaisseur (h). La fraction volumique (V_{cnt}) reste constante pour toutes les combinaisons. Dans la configuration UD, la poutre FG-CNTRC est uniformément enrichie en CNT; dans la configuration FG-V, la surface supérieure de la poutre est enrichie en CNT tandis que la surface inférieure en est dépourvue; dans le design FG-O, les surfaces supérieure et inférieure sont exemptes de CNT, tandis que dans la configuration FG-X, elles sont enrichies en CNT [184].

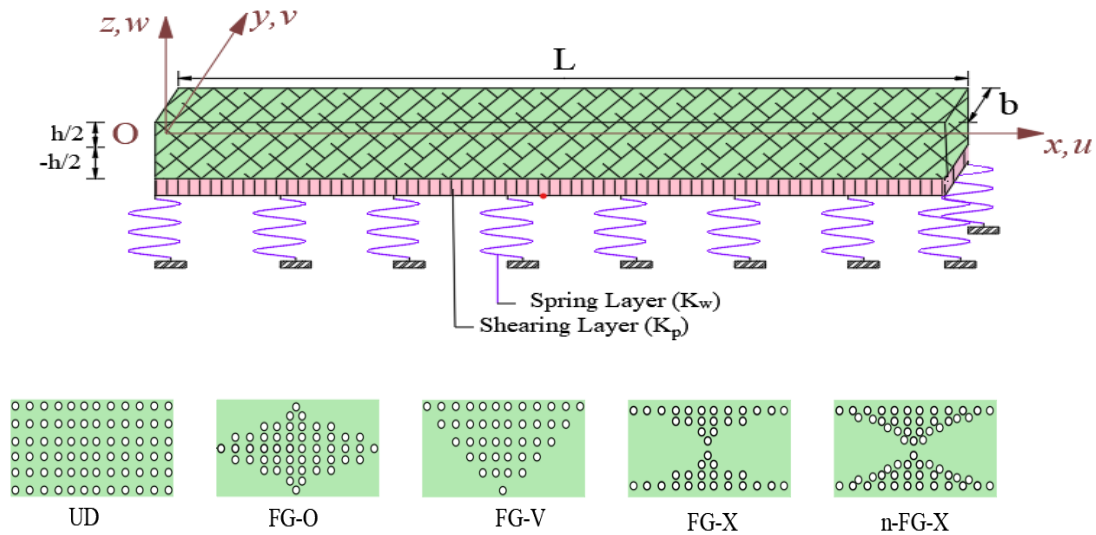


Figure III. 2- a), la géométrie et b) les configurations de CNT du poutre FG-CNTRC sur fondation EF.

III.3. Propriétés matérielles des poutres CNTRC

III.3.1. Approche de la règle des mélanges

La poutre CNTRC est constituée d'un mélange de nanotubes de carbone (CNT) répartis de manière progressive en termes d'épaisseur. Cette étude vise principalement à déterminer les propriétés matérielles des composites renforcés par des nanotubes de carbone (CNTRC). Pour ce faire, l'approche de Mori-Tanaka [185, 186] ou la règle de mélange [187] peuvent être utilisées pour estimer ces propriétés dans un cadre micromécanique. Les modèles micromécaniques de Voigt peuvent être utilisés pour estimer ces propriétés dans un cadre micromécanique. Bien que la méthode de Mori-Tanaka soit souvent appliquée aux systèmes contenant des nanoparticules, la règle étendue des mélanges offre une solution simple et directe pour prédire les propriétés globales des matériaux ainsi que leurs comportements structurels. Des tests approfondis ont montré que la règle étendue des mélanges et le schéma de Mori-Tanaka se complètent de manière significative dans le cas de poutres céramique-métal à gradient fonctionnel [188]. Ainsi, les

modules de Young et de cisaillement effectifs peuvent être déterminés en utilisant la règle de mélange.

$$E_{11} = \eta_1 V_{cnt} E_{11}^{cnt} + V_m E^m \quad \text{III.1}$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_m}{E^m} + \frac{V_{cnt}}{E_{22}^{cnt}} \quad \text{III.2}$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_m}{G^m} + \frac{V_{cnt}}{G_{12}^{cnt}} \quad \text{III.3}$$

Les équations ci-dessus montrent les caractéristiques d'efficacité des nanotubes de carbone (CNT), représentées par les variables η_1 , η_2 et η_3 . E_{11}^{cnt} , E_{22}^{cnt} , G_{12}^{cnt} et ν^{cnt} . Ces variables correspondent respectivement au module d'élasticité, au module de cisaillement et au coefficient de Poisson des CNT. Par ailleurs, les propriétés de la matrice sont désignées par E^m , G^m , et ν^m . Les masses de la matrice et des CNT sont notées par les lettres ρ^{cnt} et ρ^m respectivement. Enfin, la fraction volumique de la matrice ($V_m + V_{cnt} = 1$) est équivalente à celle des CNT.

$$\begin{aligned} \nu &= V_{cnt} \nu^{cnt} + V_m \nu^m \\ \rho &= V_m \rho^m + V_{cnt} \rho^{cnt} \end{aligned} \quad \text{III.4a}$$

La distribution des CNT est décrite quantitativement comme suit [189, 190] :

FG-UD: $V_{cnt} = V_{cnt}^*$

FG-V: $V_{cnt} = (1 + \frac{2z}{h}) V_{cnt}^*$ III.4b

FG-X: $V_{cnt} = 4 \frac{|z|}{h} V_{cnt}^*$

FG-O : $V_{cnt} = 2 - 4 \frac{|z|}{h} V_{cnt}^*$

Par ailleurs, pour les poutres renforcées par des nanotubes de carbone (CNT) sur des fondations variables, une autre formulation est utilisée afin de caractériser la variation des schémas de distribution des CNT à travers l'épaisseur de la poutre. Cette approche intègre un schéma de distribution non linéaire des CNT sur l'ensemble de la section transversale de la poutre, avec un paramètre d'indice (noté 'n') permettant de capturer la non-linéarité inhérente aux CNT [191].

$$n\text{-FG-X:} \quad V_{cnt} = (n + 1) \left(2 \times \frac{|z|}{h} \right)^n V_{cnt}^* \quad \text{III.5}$$

La fraction volumique des CNT, notée V_{cnt}^* , est définie par :

$$V_{cnt}^* = \frac{W_{CNT}}{W_{CNT} + \frac{\rho_{CNT}}{\rho_m} - \frac{\rho_{CNT}}{\rho_m} W_{CNT}} \quad \text{III.6}$$

Dans ce cas, ρ_{cnt} et ρ_m représentent respectivement les densités massiques de la matrice et des CNT, tandis que W_{cnt} indique le pourcentage massique des CNT. Comme illustré dans la Figure III.3, les fractions massiques totales des CNT dans les poutres de types FG-X, FG-O, FG-V, et FG-UD sont exactement les mêmes.

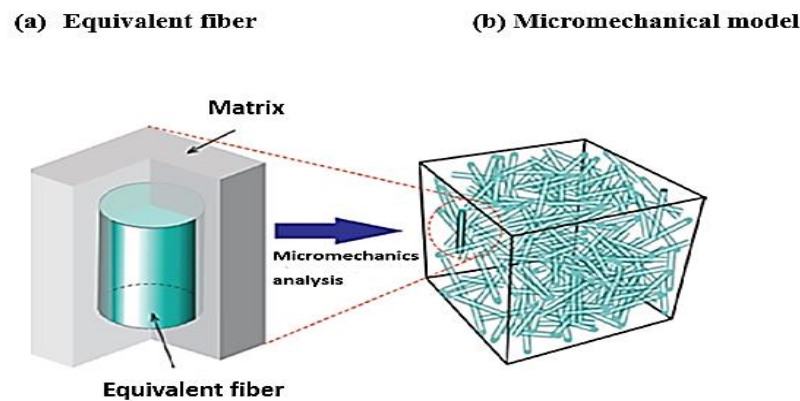


Figure III. 3 - Schéma illustrant la géométrie typique d'une poutre renforcée par des nanotubes de carbone (CNT) [99].

III.3.2. Variation matérielle selon la loi Mori-Tanaka d'une poutre renforcée par CNT orientés aléatoirement

La règle étendue des mélanges permet de prédire les propriétés des composites en se basant sur celles des matériaux constituants. En parallèle, le modèle Eshelby-Mori-Tanaka (EMT) offre une estimation du comportement mécanique des composites en prenant en compte les interactions élastiques entre les nanotubes de carbone (CNT) et la matrice. Ce modèle utilise le tenseur d'Eshelby et la méthode de Mori-Tanaka pour déterminer les champs de déformation et de contrainte autour des CNT, fournissant ainsi des informations essentielles pour la conception de matériaux dans des applications d'ingénierie. La disposition des renforts dans les composites renforcés par des fibres a une influence majeure sur les propriétés matérielles globales. Dans le

cas où les CNT sont dispersées de manière aléatoire dans la matrice, le composite devient isotrope. Le module d'Young effectif (E) et le coefficient de Poisson (ν) du composite peuvent alors être déterminés par les équations suivantes :

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \quad \text{III.7}$$

K et G représentent respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement effectifs du composite CNT/polymère, et peuvent être déterminés en utilisant les relations suivantes :

$$K = K_m + \frac{V_r(\delta_r - 3K_m\alpha_r)}{3(V_m + V_r\alpha_r)}, \quad G = G_m + \frac{V_r(\eta_r - 2G_m\beta_r)}{2(V_m + V_r\beta_r)} \quad \text{III.8}$$

$$K_m = \frac{E_m}{3(1 - 2\nu_m)} \quad \text{et} \quad G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)} \quad \text{III.9}$$

Les autres paramètres des équations mentionnées ci-dessus sont définis comme suit :

$$\alpha_r = \frac{3(K_m + G_m) + k_r - l_r}{3(G_m + k_r)} \quad \text{III.10}$$

$$\beta_r = \frac{1}{5} \left[\frac{4G_m + 2k_r + l_r}{3(G_m + k_r)} + \frac{4G_m}{G_m + p_r} + \frac{2[G_m(3K_m + G_m) + G_m(3K_m + 7G_m)]}{G_m(3K_m + G_m) + m_r(3K_m + 7G_m)} \right] \quad \text{III.11}$$

$$\delta_r = \frac{1}{3} \left[\eta_r + 2l_r + \frac{(2k_r + l_r)(3K_m + 2G_m - l_r)}{G_m + k_r} \right] \quad \text{III.12}$$

$$\eta_r = \frac{1}{5} \left[\frac{2}{3}(n_r - l_r) + \frac{8G_m p_r}{G_m + p_r} + \frac{8m_r G_m (3K_m + 4G_m)}{3K_m(m_r + G_m) + G_m(7m_r + G_m)} + \frac{2(k_r - l_r)(2G_m + l_r)}{3(G_m + k_r)} \right] \quad \text{III.13}$$

III.4. Poutre FG-CNT ayant une configuration matérielle imparfaite

Les distributions uniformes (UD), symétriques (FGS) et asymétriques (FGA) sont couramment utilisées pour analyser l'impact de la dispersion de la porosité sur les vibrations, ainsi que son influence sur les propriétés mécaniques des poutres [12]. Des études antérieures ont démontré que la hauteur z joue un rôle déterminant sur la densité et le module d'élasticité de la couche centrale [192, 193]. La densité ρ^c et le module d'élasticité E^c des poutres varient en fonction de la hauteur z , selon la distribution de la porosité considérée.

$$\text{UD} \quad E^c = \left(\frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \alpha} - \frac{2}{\pi} + 1 \right)^2 E \quad \text{et} \quad \rho^c = \left(\frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \alpha} - \frac{2}{\pi} + 1 \right) \rho \quad \text{III.14}$$

$$\text{FGS} \quad E^c = \left(1 - \alpha \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right) E \quad \text{et} \quad \rho^c = \left(1 - \alpha_m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right) \rho \quad \text{III.15}$$

$$\text{FGA} \quad E^c = \left(1 - \alpha \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right)\right) E \quad \text{et} \quad \rho^c = \left(1 - \alpha_m \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \rho \quad \text{III.16}$$

Où $e_m = 1 - \sqrt{1 - e}$ est le paramètre de porosité, qui indique le volume de porosité dans les poutres, une poutre sans défaut, c'est-à-dire sans vides, est représentée par $e = 0$. le coefficient de Poisson ν^c de la poutre poreuse est également évalué comme suit [12] :

$$\nu^c = 0.221\beta + \nu(0.342\beta^2 - 1.21\beta + 1) \quad \text{III.17}$$

Et

$$\beta = 1 - \frac{\rho^c}{\rho} \quad \text{III.18}$$

III.5. Equation constitutive

Les poutres composites complexes ont été conçues pour reposer sur une base élastique à double couche. Cette base est composée d'une première couche de ressorts de Winkler, avec une couche supplémentaire de Pasternak intercalée entre eux pour offrir un soutien en cisaillement renforcé. Ainsi, la poutre reposera sur une fondation élastique à deux paramètres, avec des rigidités spécifiques K_w et K_p pour les couches de cisaillement de Winkler et Pasternak, respectivement. La configuration générale des fondations élastiques variables de Pasternak-Winkler est décrite comme suit [194-196] :

$$R_e = K_w w - K_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \text{III.19}$$

La réaction d'une fondation élastique est déterminée par R_e , où K_p représente la constante de la couche de cisaillement. Si on néglige la couche de cisaillement, la fondation élastique devient une fondation de Winkler, avec K_w désignant le paramètre de Winkler. Voici les quelques formes de variation de la rigidité de Winkler K_w [179, 197] :

$$K_w(x) = \frac{K_w D_i}{a^4} \begin{cases} 1 + \Psi\left(\frac{x}{a}\right) & \text{linear} \\ 1 + \Psi\left(\frac{x}{a}\right)^2 & \text{Parabolic} \\ 1 + \Psi\left(\sin\left(\pi \frac{x}{a}\right)\right) & \text{sinusoidal} \\ 1 + \Psi\left(\exp\left(\frac{x}{a}\right) - \exp\left(\frac{x}{a}\right)^n\right) & \text{Exponential} \end{cases} \quad \text{III.20}$$

Où Ψ est un coefficient polynomial. Concernant la fondation de Pasternak arbitrairement orthotrope, nous la formulons comme suit [183]:

$$K_p = G_\xi \frac{\lambda}{\sin^2 \theta + \lambda \cos^2 \theta} \quad \text{III.21}$$

Les paramètres de cisaillement G_ξ de la fondation dans une direction donnée ξ sont étudiés. Selon la théorie des poutres avec déformation de cisaillement, les déplacements le long des axes x et z de tous les points de la poutre sont définis par les fonctions notées respectivement $u(x, z, t)$ et $w(x, z, t)$ [196, 198-200] :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx, \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + g(z) \varphi_z(x, y, t) \end{aligned} \quad \text{III.22}$$

Dans ce contexte, les symboles u_0 et w_0 représentent les déplacements le long du plan médian, tandis que θ et φ_z désignent les rotations perpendiculaires à ce plan pour la poutre. Il est important de noter que les intégrales ne sont pas soumises à des restrictions particulières le développement d'une nouvelle fonction de forme pour la déformation de cisaillement, notée $f(z)$, comme précisé dans l'équation (III.23). La théorie proposée est la suivante :

$$f(z) = \frac{2}{3\pi} \left(z \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - h \sinh\left(\frac{z\pi}{h}\right) \right), \quad g(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \quad \text{III.23}$$

Les déformations liées aux déplacements dans l'équation (23) sont :

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_x\} &= \{\varepsilon_x^0\} + z \{k_x^b\} + \psi \{k_x^s\} \\ \{\gamma_{xz}\} &= \varphi(z) \{\gamma_{xz}^0\} \quad \text{et} \quad \varepsilon_z = \varphi'(z) \varepsilon_z^0 \end{aligned} \quad \text{III.24}$$

Et

$$\begin{aligned} (\varepsilon_x^0) &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right), \quad (k_x^b) = \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \right), \quad (k_x^s) = (k_1 \theta), \\ \{\gamma_{xz}^0\} &= \left\{ k_1 \int \theta dx + \frac{\partial \phi_z}{\partial x} \right\}, \\ \varepsilon_z^0 &= \varphi_z \quad \text{et} \quad g'(z) = \frac{\partial g(z)}{\partial z} \end{aligned} \quad \text{III.25}$$

En utilisant les techniques de Navier pour dériver la forme, on peut simplifier et réécrire l'intégrale indéfinie obtenue dans la relation des déformations comme suit :

$$\int \theta dx = A \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{III.26}$$

Lorsque la technique de solution nécessite l'utilisation de coefficients A' , les méthodes de Navier sont alors employées comme méthode technique. Par conséquent, les expressions de k_1 et A' sont rédigées de la manière suivante :

$$A' = -\frac{1}{\alpha_1^2}, \quad k_1 = \alpha_1^2 \quad \text{III.27}$$

Dans les directions x et z , les variations sont respectivement indiquées par α_1 . Selon la loi de Hooke, les relations entre contrainte et déformation des poutres avec des gradients fonctionnels sont les suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{13} & 0 \\ Q_{13} & Q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad \text{III.28}$$

Dans laquelle $(\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{xz})$ sont respectivement les composantes des contraintes et des déformations. Les coefficients de rigidité pour la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur en 2D (2D-HSDT) et la théorie quasi-3D peuvent être exprimés comme suit :

2D-HSDT :

$$Q_{11} = E(z), Q_{33} = 0, \quad Q_{44} = G_{12}, \quad Q_{13} = Q_{31} = 0 \quad \text{III.29}$$

QUASI-3D HSDT :

$$Q_{11} = Q_{33} = \frac{E(z)}{(1-\nu^2)}, \quad Q_{44} = G_{12}, \quad Q_{13} = Q_{31} = \frac{\nu E(z)}{(1-\nu^2)} \quad \text{III.30}$$

Le module d'élasticité E , G et les coefficients élastiques Q_{ij} varient à travers l'épaisseur.

III.6. Équations gouvernantes

Dans cette étude, nous utilisons le principe de Hamilton, qui est la version dynamique du concept des travaux virtuels, pour établir les équations du mouvement en accord avec le champ de déplacements et les équations constitutives [201, 202]. Ce principe peut être représenté analytiquement de la manière suivante :

$$\int_0^t (\delta U + \delta U_{ef} + U_{ext} - \delta K) dt = 0 \quad \text{III.31}$$

La variation δ dans l'équation se décrit par trois éléments principaux : d'abord, le changement d'énergie de déformation δU , ensuite le changement d'énergie potentielle de la fondation élastique δU_{ef} , l'énergie des charge extérieur U_{ext} et enfin le changement d'énergie cinétique δK . En d'autres termes, la fluctuation de l'énergie de déformation des poutres est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV \\ &= \int_A \left(N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + M_x^b \delta k_x^b \right. \\ &\quad \left. + M_x^s \delta k_x^s + R_{xz}^s \delta R_{xz}^s \right) dA \end{aligned} \quad \text{III.32}$$

Où N_i^i , M_i^i et R_i^i sont les résultats suivants pour définir les effets du stress :

$$\begin{aligned} (N_x, M_x^b, M_x^s) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \tau_{xy})(1, z, f(z)) dz, \quad N_z = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_z) g'(z) dz \\ (R_{xz}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}) g(z) dz \end{aligned} \quad \text{III.33}$$

L'équation suivante permet de décrire comment l'énergie cinétique varie selon la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur :

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V \rho(z) (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}) dV \\ &= \int_A \left\{ \begin{aligned} &I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) \\ &+ J_1 \left((k_1 A') \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) \right) + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) \\ &+ K_2 \left((k_1 A')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) \right) - J_2 \left((k_1 A') \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \right) \right) \\ &+ J_0 (\dot{\phi}_z \delta \dot{w}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{\phi}_z) + K_3 (\dot{\phi}_z \delta \dot{\phi}_z) \end{aligned} \right\} dA \end{aligned} \quad \text{III.34}$$

Les termes d'inertie sont définis par les équations suivantes :

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad \text{III.35}$$

$$(J_0, J_1, J_2, K_2, K_3) = \int_{-h/2}^{h/2} (g, f(z), z f(z), f(z)^2, g(z)^2) \rho(z) dz$$

La variation du travail virtuel effectué par ces charges externes peut être exprimée sous la forme :

$$\delta V = - \int_A q \delta w_0 dx \quad \text{III.36}$$

Le changement d'énergie potentielle d'un fondement élastique, tel que décrit par :

$$\delta U_{ef} = \int_A f_e \delta W_0 dA \quad \text{III.37}$$

La variable f_e représente la densité de la force de réaction appliquée à la fondation. Concernant le modèle de fondation de Pasternak, les variations de l'énergie de déformation pour des fondations élastiques aux propriétés variables sont présentées comme suit :

$$f_e = \int_A (K_w(x) w_0 - K_s \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{d^2 w_0}{dy^2} \right)) \quad \text{III.38}$$

Pour obtenir les coefficients de rigidité de Winkler et de cisaillement de la fondation élastique, notons respectivement K_w et K_s ces valeurs.

Nous obtenons les équations du mouvement pour la poutre FG en remplaçant les expressions pour δU , δU_{ef} et δK provenant des équations (III.31) et (III.44) dans l'équation (III.39), puis en réalisant une intégration par parties. Nous regroupons également les coefficients de δu_0 , δw_0 , $\delta \theta$, et $\delta \phi_z$ au cours de ce processus.

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + J_1 k_1 A \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \quad \text{III.39a}$$

$$\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + K_w w_0 - K_s \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) = J_0 \ddot{\phi} - I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left(k_1 A \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \right) \quad \text{III.39b}$$

$$\delta \theta : -k_1 M_x^s + k_1 A \frac{\partial R_{xz}^s}{\partial x} = -J_1 \left(k_1 A \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \right) - K_2 \left(\left(k_1 A \right)^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \right) + J_2 \left(k_1 A \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} \right) \quad \text{III.39c}$$

$$\delta \phi_z : \frac{\partial R_{xz}^s}{\partial x} - N_z = J_0 \ddot{w}_0 + K_3 \ddot{\phi} \quad \text{III.39d}$$

Dans le cas du flambement sous charge critique, les équations se présentent comme suit :

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} = 0 \quad \text{III.40a}$$

$$\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + K_w w_0 - K_s \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) + N_x^0 \frac{\delta^2 w_0}{\delta x^2} = 0 \quad \text{III.40b}$$

$$\delta \theta : -k_1 M_x^s + k_1 A \frac{\partial R_{xz}^s}{\partial x} = 0 \quad \text{III.40c}$$

$$\delta \phi_z : \frac{\partial R_{xz}^s}{\partial x} - R_z + N_x^0 g \frac{\delta^2 \phi_z}{\delta x^2} = 0 \quad \text{III.40d}$$

Pour le cas d'un problème en déplacement les termes d'inertie deviennent nuls et rajouter la charge externe les équations (III.39) deviennent :

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} = 0 \quad \text{III.41a}$$

$$\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + K_w w_0 - K_s \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) + q w_0 = 0 \quad \text{III.41b}$$

$$\delta \theta : -k_1 M_x^s + k_1 A \frac{\partial R_{xz}^s}{\partial x} = 0 \quad \text{III.41c}$$

$$\delta \phi_z : \frac{\partial R_{xz}^s}{\partial x} - N_z = 0 \quad \text{III.41d}$$

En divisant l'épaisseur des poutres FG, qui reposent sur un fondement élastique, par le produit donné dans l'équation (III.38) et les résultats associés, nous pouvons exprimer les contraintes obtenues comme suit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ M_x^b \\ M_x^s \\ N_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & B_{11}^s & X_{13} \\ B_{11} & D_{11} & D_{11}^s & Y_{13} \\ B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s & Y_{13}^s \\ X_{13} & Y_{13} & Y_{13}^s & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\delta u_0}{\delta x} \\ \frac{\delta^2 \omega_0}{\delta x^2} \\ k\theta \\ \phi_z \end{bmatrix} \quad \text{III.42}$$

$$\{R_{xz}^s\} = [A_{55}^s] \left\{ k_1 A \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_z}{\partial x} \right\} \quad \text{III.43}$$

Et les composants de rigidité sont donnés par :

$$(A_{ii}, B_{ii}, D_{ii}, B_{ii}^s, D_{ii}^s, H_{ii}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z))dz, (i=1) \quad \text{III.44a}$$

$$(X_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}^s, Z_{ii}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, f(z), g'(z))g'(z)dz, (i, j=1,3) \quad \text{III.44b}$$

$$A_{ij}^s = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{44}[g(z)]^2 dz, (i, j=4) \quad \text{III.44c}$$

En substituant les équations dans les équations du mouvement de la théorie quasi-3D proposée pour les poutres FG-CNT, on peut exprimer ces équations en termes de déplacements $(\delta u_0, \delta w_0, \delta \theta, \delta \varphi)$ de la manière suivante :

$$A_{11}d_{11}u_0 - B_{11}d_{111}w_0 + (B_{11}^s k_1) d_1 \theta - X_{13}d_1 \phi_z = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_1 \ddot{w}_0 + J_2 A' k_1 d_1 \ddot{\theta} \quad \text{III.45a}$$

$$B_{11} d_{111}u_0 - D_{11}d_{1111}w_0 + (D_{11}^s k_1) d_{11} \theta + k_w(x)w_0 - k_s \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) + Y_{13}d_{11} \phi_w = I_0 \ddot{w}_0 + J_0 \ddot{\phi}_z + I_1 (d_1 \ddot{u}_0) - I_2 (d_{11} \ddot{w}_0) + J_2 k_1 A' d_{11} \ddot{\theta} \quad \text{III.45b}$$

$$-(B_{11}^s k_1) d_1 u_0 + (D_{11}^s k_1) d_{11} w_0 - H_{11}^s k_1^2 \theta + A_{55}^s (k_1 A')^2 d_{11} \theta - k_1 Y_{13}^s \phi_z + A_{55}^s (k_1 A')^2 d_{11} \phi_z = -J_1 (k_1 A' d_1 \ddot{u}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{w}_0) \quad \text{III.45c}$$

$$-X_{13}d_1 u_0 + (Y_{13}d_{11})w_0 + (A_{44}^s k_1 A' d_{11} - Y_{13}^s k_1) \theta + (A_{44}^s d_{11} - Z_{33}) \phi_z = J_0 \ddot{w}_0 + K_3 + \ddot{\phi}_z \quad \text{III.45d}$$

Pour le cas d'un problème en flambement les équations expriment comme suivante :

$$A_{11}d_{11}u_0 - B_{11}d_{111}w_0 + (B_{11}^s k_1) d_1 \theta - X_{13}d_1 \phi_z = 0 \quad \text{III.46a}$$

$$B_{11} d_{111}u_0 - D_{11}d_{1111}w_0 + (D_{11}^s k_1) d_{11} \theta + k_w(x)w_0 - k_s \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) + Y_{13}d_{11} \phi_w + N_x^0 g_0 d_{11} \phi_z = 0 \quad \text{III.46b}$$

$$-(B_{11}^s k_1) d_1 u_0 + (D_{11}^s k_1) d_{11} w_0 - H_{11}^s k_1^2 \theta + A_{55}^s (k_1 A')^2 d_{11} \theta - k_1 Y_{13}^s \phi_z + A_{55}^s (k_1 A')^2 d_{11} \phi_z = 0 \quad \text{III.46c}$$

$$-X_{13}d_1 u_0 + (Y_{13}d_{11})w_0 + (A_{44}^s k_1 A' d_{11} - Y_{13}^s k_1) \theta + (A_{44}^s d_{11} - Z_{33}) \phi_z + N_x^0 g \frac{\delta^2 \phi_z}{\delta x^2} = 0 \quad \text{III.46d}$$

Pour le cas d'un problème en déplacement les termes d'inertie deviennent nuls et rajouter la charge externe les équations (III.45) deviennent :

$$A_{11}d_{11}u_0 - B_{11}d_{111}w_0 + (B_{11}^s k_1) d_1 \theta - X_{13}d_1 \phi_z = 0 \quad \text{III.47a}$$

$$B_{11} d_{111} u_0 - D_{11} d_{1111} w_0 + (D_{11}^s k_1) d_{11} \theta + k_w(x) w_0 - k_s \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) + Y_{13} d_{11} \phi_w + q w_0 = 0 \quad \text{III.47b}$$

$$-(B_{11}^s k_1) d_{11} u_0 + (D_{11}^s k_1) d_{11} w_0 - H_{11}^s k_1^2 \theta + A_{55}^s (k_1 A')^2 d_{11} \theta - k_1 Y_{13}^s \phi_z + A_{55}^s (k_1 A')^2 d_{11} \phi_z = 0 \quad \text{III.47c}$$

$$-X_{13} d_{11} u_0 + (Y_{13} d_{11}) w_0 + (A_{44}^s k_1 A' d_{11} - Y_{13}^s k_1) \theta + (A_{44}^s d_{11} - Z_{33}) \phi_z = 0 \quad \text{III.47d}$$

Où d_{ij} , d_{ijl} , d_{ijlm} se composent des opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, (i, j, l, m = 1, 2). \quad \text{III.48}$$

III.7. Les solutions de Navier

Dans ce contexte, on utilise l'approche de Navier pour trouver des solutions analytiques à l'équation (III.49). Cela permet de supposer des variables de déplacement qui respectent les conditions aux limites en employant des séries de Fourier doubles :

$$\begin{cases} u_0(x, t) \\ w_0(x, t) \\ \theta_0(x, t) \\ \dot{\phi}_z(x, t) \end{cases} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{cases} U_m \cos(\alpha x) e^{i\omega_m t} \\ W_m \sin(\alpha x) e^{i\omega_m t} \\ X_m \sin(\alpha x) e^{i\omega_m t} \\ Y_m \sin(\alpha x) e^{i\omega_m t} \end{cases} \quad \text{III.49}$$

On doit déterminer les variables non identifiées, représentées par (U_m, W_m, X_m, Y_m) dans l'équation suivante et $\alpha = m\pi/L$, qui est utilisée pour décrire la vibration. De plus, la charge transversale q est exprimée sous forme de série de Fourier :

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m \sin(\alpha x) \quad \text{III.50}$$

Les coefficients Q_m pour certaines charges typiques sont fournis ci-dessous. Pour une charge distribuée de manière sinusoïdale, nous avons :

$$m=1 \quad \text{Et} \quad Q_1 = q_0 \quad \text{III.51}$$

Et dans le cas d'une charge répartie de manière uniforme, on obtient :

$$Q_m = \frac{4q_0}{m\pi} \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \quad \text{III.52}$$

En remplaçant les équations (III.30) et (III.31) dans l'équation (III.28), nous obtenons les solutions analytiques en déterminant les équations caractéristiques associées aux valeurs propres pour une valeur fixe de m , dans le cadre du problème de vibrations libres.

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\Delta\} = \{0\} \quad \text{III.53}$$

Cette équation suivante est dérivée pour la vibration des poutres FG reposant sur des OVEF

Pour les problèmes de flambage et l'équation de flambage se reformule alors en un problème de valeurs propres comme suit :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ W_0 \\ \theta \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{III.54}$$

$$([K] - \Lambda[N])\{\Delta\} = \{0\} \quad \text{III.55}$$

Et

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \quad \text{III.56}$$

De surcroît, l'équation suivante est obtenue pour le flambement des poutres FG reposant sur des OVEF :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} - \Lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ W_0 \\ \theta \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{III.57}$$

Pour des problèmes statiques, nous obtenons l'équation opératoire suivante :

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad \text{III.58}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_m \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} U_0 \\ W_0 \\ \theta \\ \varphi_z \end{Bmatrix} \quad \text{III.59}$$

De plus, l'équation suivante est obtenue pour le déplacement des poutres FG reposant sur des OVEF :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ W_0 \\ \theta \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_m \\ Q_m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{III.60}$$

Et

$$S_{11} = -(A_{11}\alpha_1^2)$$

$$S_{12} = S_{21} = \alpha_1 B_{11} \alpha_1^2 \quad \text{III.61}$$

$$S_{13} = S_{31} = \alpha_1 B_{11}^s k_1$$

$$S_{14} = S_{41} = \alpha_1 X_{13}$$

$$S_{22} = -D_{11}\alpha_1^2 - K_p \alpha_1^2 - K_w$$

$$S_{23} = -k_1 D_{11}^s \alpha_1^2$$

$$S_{24} = -(-\alpha_1^2 Y_{13})$$

$$S_{33} = (-k_1 H_{11}^s k_1 - (k_1 A')^2 A_{44}^s \alpha_1^2), \quad \text{III.62}$$

$$S_{44} = (-\alpha_1^2 A_{44}^s - Z_{33})$$

$$S_{43} = (-k_1 Y_{13}^s - \alpha_1^2 k_1 A' A_{44}^s)$$

$$T = N_x^0 \alpha_1^2$$

Et

$$m_{11} = -I_0, m_{12} = m_{21} = \alpha_1 I_1, m_{13} = m_{31} = -J_1 k_1 A' \alpha_1, m_{14} = m_{41} = 0,$$

$$m_{22} = (-I_0 - I_2 \alpha_1^2), m_{23} = (-J_2 k_1 A' \alpha_1^2), m_{24} = J_0 \quad \text{III.63}$$

$$m_{33} = (-K_2 (k_1 A')^2 \alpha_1^2, m_{34} = m_{43} = 0, m_{44} = -K_3$$

III.8. Conclusion

L'analyse mathématique réalisée vise à étudier le comportement vibratoire, le flambement et les déplacements d'une poutre en polymère renforcée par des nanotubes de carbone (FGCNT) reposant sur une fondation élastique. Les effets d'étirement dans le sens de la hauteur de la poutre sont considérés selon la théorie des poutres en déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), ce qui amène à une analyse proche du cas 3-D.

Une nouvelle méthode de modélisation des fondations élastiques, appelée Fondation à élasticité variable arbitrairement orthotrope (AOP-VE), a été développée. Elle repose sur le principe de la fondation de type Winkler, tout en intégrant une réponse variable le long de la fondation supportant la poutre. Contrairement au modèle Winkler-Pasternak, l'approche AOP-VE permet un contrôle accru des propriétés directionnelles de la fondation Pasternak.

Chapitre IV : Validation des résultats et étude paramétrique

IV.1. Introduction

Dans cette étude nous considérons les effets de la vibration libre, du flambement et de la flexion des poutres à matrice polymère renforcées par des nanotubes de carbone et soutenues par différents types d'assises, à savoir, la fondation à paramètre de Winkler variable et une autre à raideur variable orthotrope. En fonction du procédé de fabrication plusieurs formes de porosités ont été prises en compte dans ce travail. Dans le champ cinématique choisi, nous avons tenu compte de l'effet de la déformation normale suivant la direction de la hauteur de la poutre, ce qui rend cette théorie quasi-3D. La fonction de gauchissement $f(z)$ utilisée permet d'une part de prendre en compte le cisaillement transverse, et d'autre part d'en approcher la forme de distribution suivant l'épaisseur.

Combinons les modèles micromécaniques avec la porosité à travers une analyse comparative pour des poutres renforcée en CNT.

Les valeurs effectives du coefficient $\eta_i (i = 1,3)$ employées dans l'Équation. (III.1) pour diverses fractions volumiques de nanotubes de carbone (NTC) sont les suivantes :

$$\eta_1 = 1.2833, \eta_2 = 1.0556, \eta_3 = \eta_2 \text{ dans le cas de } V_{cnt}^* = 0.12(12\%),$$

$$\eta_1 = 1.3414, \eta_2 = 1.7101, \eta_3 = \eta_2 \text{ dans le cas de } V_{cnt}^* = 0.17(17\%),$$

$$\eta_1 = 1.3238, \eta_2 = 1.7380, \eta_3 = \eta_2 \text{ dans le cas de } V_{cnt}^* = 0.28(28\%).$$

Les propriétés matérielles suivantes des poutres à matrice polymère renforcées par des CNT poreux sont utilisées [203] :

$$v^m = 0.3 \quad \rho^m = 1190 \text{Kg/m}^3 \quad E^m = 2.5 \text{GPa} \quad v^{cnt} = 0.19 \quad \rho_{cnt} = 1400 \text{Kg/m}^3$$

$$E_{11}^{cnt} = 600 \text{GPa} \quad E_{22}^{cnt} = 10 \text{GPa} \quad G_{12}^{cnt} = 17.2 \text{GPa}$$

En outre, dans ce travail on utilise une expression non-dimensionnelle de la vibration libre :

$$\varpi = \omega L \sqrt{\frac{I_{10}}{A_{110}}} \quad \text{IV.1}$$

Pour un problème de flambage, la charge critique non-dimensionnelle est donnée comme suit :

$$\bar{N} = \frac{N_x^0}{A_{110}} \quad \text{IV.2}$$

Pour un problème en flexion, la flèche non-dimensionnelle est donnée comme suit :

$$\bar{w} = 100 \frac{E_p h^3}{q_0 L^4} w \left(\frac{L}{2} \right) \quad \text{IV.3}$$

D'un point de vue distribution de la matière on a pris en compte les deux approches ; à savoir, celui de Voigt et l'autre de Mori Tanaka. Les formulations de ces approches sont déjà données dans les équations (III.4) et (III.7).

IV.2. Analyse et validation des vibrations

Dans cette étude, nous avons analysé les vibrations libres d'une poutre renforcée par des nanotubes de carbone (CNT) reposant sur un support élastique et simplement appuyé. Une comparaison a été effectuée entre les résultats de cette thèse avec ceux de la littérature existante, validant ainsi l'efficacité de la théorie présentée ; et une étude paramétrique a été effectuée afin de voir l'influence des paramètres d'étude sur les fréquences de vibration.

IV.2.1. Poutre FG-CNT sans fondation

Dans le tableau IV.1, nous avons présenté une comparaison entre la théorie quasi-3D et les résultats obtenus à partir d'autres théories des poutres [17]. Nous avons observé que le rapport d'épaisseur (L/h) possède des effets variés sur les trois premières fréquences non-dimensionnelles des poutres UD, USFG et SFG-CNTRC.

Tableau IV. 1-comparaison des fréquences non dimensionnelles initiales pour différents rapports (L/h) selon les différents modes.

Distribution de matériaux	Mode	Euler–Bernoulli [98]			Timoshenko [98]			Présente		
		L/h			L/h			L/h		
		20	40	60	20	40	60	20	40	60
UD	1	5.4647	5.4673	5.4678	5.098585	5.359074	5.415073	5.0533	6.8433	8.3062
	2	9.0571	9.0733	9.0763	7.93386	8.699762	8.889041	7.9898	9.9670	11.8077
	3	12.6469	12.6952	12.7043	10.42527	11.86138	12.27116	11.0158	12.9466	14.9107
USFG	1	5.3708	5.3735	5.374	5.031699	5.273655	5.325208	5.0442	6.8396	8.3041
	2	8.9005	8.9174	8.9206	7.85222	8.571802	8.747006	7.9543	9.9480	11.7962
	3	12.4262	12.4767	12.4861	10.3392	11.70245	12.08399	10.9516	12.9034	14.8820
SFG	1	5.7495	5.7523	5.7528	5.294657	5.615709	5.68668	5.0937	6.8600	8.3156
	2	9.5291	9.5463	9.5495	8.167861	9.079606	9.315667	8.1400	10.0513	11.8594
	3	13.3056	13.3569	13.3665	10.66974	12.32744	12.82927	11.2713	13.1341	15.0383

Dans le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli, qui suppose l'absence de l'impact du cisaillement, il est devenu évident que le rapport d'épaisseur (L/h) n'a qu'une influence négligeable sur les fréquences. En revanche, en examinant la théorie des poutres de Timoshenko, nous avons noté que ce rapport affectait effectivement le paramètre de fréquence. Quant à la théorie quasi-3D, un impact significatif du rapport d'épaisseur (L/h) est observé. Il est montré,

aussi, qu'à mesure que ce rapport augmente, les fréquences des poutres UD, USFG et SFG-CNTRC augmentent également.

IV.2.2. Poutre FG-CNT sur fondation à raideur variable orthotrope

Dans le tableau IV.2, nous avons examiné les trois premières fréquences naturelles pour diverses orientations de la fondation ($\theta=0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$, et 90°) ainsi que pour les paramètres de fondation de Winkler ($K_w = 100$ et 1000) en tenant compte de coefficient d'orthotropie $\lambda = G_n / G_\xi = 10$, et $\bar{G}_\xi = 20$. Dans le cas où l'orientation de la poutre est orthogonale à celle d'orientation de la fondation, la fondation orthotrope de Pasternak arbitraire devient isotrope avec un paramètre de fondation en cisaillement dans la direction de l'axe de la poutre lorsque les angles d'orthotropie sont $\theta = 0^\circ$, et 90° . Ainsi, les résultats obtenus pour notre cas présentent une compatibilité avec ceux de la référence [183] pour les deux cas des poutre et poutre†, qui sont identiques. Pour les cas où $K_w = 100$ et $\theta = 60^\circ$, les écarts de pourcentage les plus significatifs entre poutre† et poutre sont maximales avec des valeurs allant jusques 46.52%.

Tableau IV. 2- Comparaison des valeurs de fréquence obtenues à partir de ω la formulation de poutre pour une poutre droite sur la fondation AOP pour $\lambda = G_n / G_\xi$ et $G_\xi = 20$

		$k_w = 100$				$k_w = 1000$			
		Emirs, Kutlu [183]		Présente		Emirs, Kutlu [183]		Présente	
		Poutre	Poutre †	Poutre	Poutre†	Poutre	Poutre†	Poutre	Poutre†
θ	M.N	ω	ω	ω	ω	ω	ω	ω	ω
0°	1	19,85	19,85	19,84	19,84	35,95	35,95	35,94	35,94
	2	49,1	49,1	49,08	49,08	57,5	57,5	57,46	57,46
	3	96,87	96,87	96,8	96,8	101,36	101,36	101,26	101,26
30°	1	21,24	28,94	21,23	28,92	36,74	41,67	36,72	41,65
	2	51,37	64,65	51,34	64,58	59,45	71,24	59,4	71,15
	3	99,47	115,5	99,38	115,29	103,85	119,29	103,73	119,05
60°	1	28,34	41,53	28,33	41,51	41,26	51,22	41,24	51,19
	2	63,58	87,84	63,52	87,71	70,27	92,79	70,19	92,65
	3	114,17	145,78	113,97	145,36	118,01	148,81	117,78	148,37
90°	1	46,56	46,56	46,54	46,54	55,38	55,38	55,35	55,35
	2	97,38	97,38	97,23	97,23	101,88	101,88	101,71	101,71
	3	158,77	158,77	158,27	158,27	161,55	161,55	161,03	161,03

Le Tableau IV.3 présente les résultats concernant les fréquences naturelles fondamentales non-dimensionnelles (NDFNF) ($\bar{\omega} = \sqrt{(\rho_c h L^4 \omega^2 / EI)}$) des poutres isotropes homogènes en utilisant la théorie quasi-3D HSST. Ces résultats sont comparés à ceux obtenus par Chen, Lü [204], Ying,

Lü [205] et Ait Atmane, Tounsi [206] basée sur des étude résolus par la MEF; dans ce cas on a considéré différentes théories de poutre et divers rapports (L/h) ainsi que des paramètres de fondation, K_w et K_p .

En conséquence, il apparaît que les résultats actuels sont en bonne concordance avec ceux publiés précédemment, même pour le cas des poutres courtes ou $L/h = 5$, on remarque que les résultats de la présente théorie base sur le quasi-3D sont presque identique que ceux de la MEF.

Tableau IV. 3-Comparaisons des NDFNF d'une poutre homogène isotrope sur fondation.

		L/h=120			
K_w	K_p	Ref. [205]	Ref. [204]	Ref. [206]	Présente
0	0	3.14145	3.14143	3.14214	3.14213
	1	3.73587	3.73588	3.73629	3.73628
	2.5	4.29689	4.29687	4.29716	4.29715
10^2	0	3.74823	3.74823	3.74864	3.74864
	1	4.14357	4.14356	4.14388	4.14387
	2.5	4.58227	4.58227	4.58249	4.58249
10^4	0	10.02403	10.02403	10.02405	10.02405
	1	10.04812	10.04813	10.04814	10.04814
	2.5	10.08393	10.08394	10.08395	10.08395
		L/h=15			
K_w	K_p	Ref. [45]	Ref. [44]	Ref. [46]	Présente
0	0	3.13227	3.13025	3.13093	3.13081
	1	3.72775	3.72657	3.727	3.72686
	2.5	4.28886	4.28809	4.28845	4.28829
10^2	0	3.74012	3.73895	3.73937	3.73923
	1	4.13558	4.13472	4.13508	4.13493
	2.5	4.5741	4.57347	4.57383	4.57366
10^4	0	9.99583	9.99582	10.00663	10.00636
	1	10.01971	10.0197	10.03065	10.03038
	2.5	10.0552	10.05519	10.06635	10.06608
		L/h=5			
K_w	K_p	[207]	[204]	[206]	Présente
0	0	3.06373	3.04799	3.04842	3.0404
	1	3.66645	3.65802	3.65989	3.65047
	2.5	4.22319	4.21834	4.22492	4.21442
10^2	0	3.67882	3.6705	3.67243	3.66299
	1	4.072	4.06636	4.07127	4.06104
	2.5	4.50278	4.49914	4.50972	4.49878
10^4	0	7.34081	7.34081	7.55257	7.55257
	1	7.34095	7.34095	7.55257	7.55257
	2.5	7.34116	7.34116	7.55257	7.55257

Le tableau IV.4 sert à valider notre travail pour le cas des matériaux FGM au lieu de FG-CNT, il représente les fréquences naturelles fondamentales non-dimensionnelles (NDFNF) ($\varpi = \sqrt{(\rho_c h L^4 \omega^2 / EI)}$) des poutres comparées à ceux de la référence de travaux de Mellal et al

2023. [208] basée sur une théorie de déformation HSDT, en fonction de différents rapports de longueur / épaisseur (L/h) et de VEF. Cette comparaison vise à valider l'efficacité de l'approche adoptée. Les caractéristiques du matériau P-FGM sont intégrées dans le programme en substituant les propriétés FG-CNTRC par celles d'un matériau hybride AL/AL_2O_3 dans la section de déclaration du matériau; les propriétés matérielles ce matériau fonctionnel proviennent de l'étude réalisée par Mellal, Bennai [197].

Tableau IV. 4-Comparaisons des fréquences propres sans dimension d'une poutre FG sur fondations élastiques

L/h	P	Type de fondation									
		Linear		Parabolique		Sin		Expo		Cos	
		Ref. [197]	Présente	Ref. [197]	Présente	Ref. [197]	Présente	Ref. [197]	Présente	Ref. [197]	Présente
5	0	5.0753	5.0380	4.1008	4.0777	5.3725	5.3303	4.9044	4.8697	5.2342	5.1943
	1	5.2067	5.1704	4.1079	4.0875	5.5295	5.4879	5.0191	4.9858	5.3798	5.3407
	2	5.2638	5.2297	4.1290	4.1090	5.5918	5.5546	5.0719	5.0400	5.4401	5.4041
	5	5.3338	5.2987	4.1728	4.1477	5.6522	5.6283	5.1403	5.1053	5.5082	5.4761
	8	5.3603	5.3232	4.1909	4.1622	5.6508	5.6524	5.1675	5.1287	5.5287	5.5010
	10	5.3702	5.3321	4.1971	4.1669	5.6327	5.6600	5.1779	5.1371	5.5330	5.5100
20	0	5.1231	5.1219	4.1561	4.1556	5.4199	5.4186	4.9527	4.9516	5.2817	5.2804
	1	5.2528	5.2530	4.1517	4.1539	5.5782	5.5780	5.0641	5.0646	5.4271	5.4271
	2	5.3164	5.3169	4.1741	4.1769	5.6507	5.6509	5.1220	5.1228	5.4956	5.4960
	5	5.3968	5.3969	4.2209	4.2229	5.7391	5.7389	5.1975	5.1979	5.5804	5.5803
	8	5.4257	5.4254	4.2381	4.2393	5.7708	5.7702	5.2247	5.2246	5.6108	5.6103
	10	5.4358	5.4352	4.2432	4.2440	5.7821	5.7812	5.2341	5.2337	5.6216	5.6208

On remarque bien dans ce tableau que les résultats des fréquences pour le cas des poutre élancées ($L/h=20$) les résultats sont en parfait accord, tandis que pour les cas les poutres courtes ($L/h=5$) les fréquence de vibration sont sous-estimées dans le cas de notre étude par rapport à celle de Mellal, Bennai [197] qui ne tiens pas compte de la déformation normale dans le sens de la hauteur de la poutre, ceci dit que l'effet de stretching est signifiant dans le cas de poutres courtes en vibration.

Le tableau IV.5 présente les effets des coefficients de l'assise élastique et des différentes valeurs de la fraction volumique de nanotubes de carbone ($V_{cnt} = 0,12 ; 0,17 ; 0,28$) sur les trois premiers modes de vibration non-dimensionnels (NDNF) d'une poutre FG-CNTRC. Dans ce cas nous avons pris une poutre modérément élancée avec $L/h = 15$. Les résultats obtenus sont également comparés à ceux de Yas, Samadi [7] basé sur la théorie de Timochenko. Il convient de noter que $(K_w, K_p) = (0,1, 0)$ indique le cas d'une fondation de Winkler, et $(K_w, K_p) = (0,1, 0,02)$ indique le cas Pasternak, tandis que $(K_w, K_p) = (0, 0)$ indique le cas sans fondation. On observe que les valeurs des fréquences augmentent en fonction des coefficients élastiques de

Winkler et de Pasternak, respectivement. Il est également évident que les fréquences augmentent avec l'accroissement de la fraction volumique de nanotubes de carbone (V_{cnt}). Les fréquences les plus faibles sont observés dans la configuration FG-O, qui apparaît authentique en raison de la plus faible densité de CNT dans ce schéma de distribution. De manière significative, FG-X donne systématiquement les fréquences les plus élevés, indépendamment de la fraction volumique de CNT. Cette tendance se maintient à travers tous les modes de vibration.

Tableau IV. 5-Comparaisons des trois premières fréquences propres non dimensionnelles (NDF) des poutres FG-CNTRC.

(K_w, K_p)	V_{cnt}	Modèle	ω_{11}		ω_{22}		ω_{33}	
			Ref.[7]	Présente	Ref.[7]	Présente	Ref.[7]	Présente
(0, 0)	0.12	UD	0.9753	0.9847	2.8728	2.8873	4.8704	4.8011
		FG-V	0.9453	0.8528	2.6424	2.6582	4.6675	4.5820
		FG-O	0.7527	0.7527	2.4562	2.4136	4.4320	4.2317
		FG-X	1.115	1.1295	3.0814	3.1048	5.0695	5.0100
	0.17	UD	1.1999	1.2119	3.6276	3.6424	6.2363	6.1346
		FG-V	1.1609	1.0413	3.3084	3.325	5.9498	5.8207
		FG-O	0.9155	0.9184	3.0577	3.0227	5.6139	5.4018
		FG-X	1.383	1.396	3.9293	3.9219	6.5447	6.3836
	0.28	UD	1.4401	1.457	4.1362	4.1508	6.9245	6.8099
		FG-V	1.4027	1.2651	3.8639	3.8583	6.7618	6.5672
		FG-O	1.1202	1.1289	3.6056	3.5951	6.4434	6.2742
		FG-X	1.6493	1.6429	4.4752	4.3462	7.3068	6.9165
(0.1, 0)	0.12	UD	1.0241	1.0329	2.8898	2.9036	4.8804	4.8103
		FG-V	0.9957	0.9081	2.6607	2.67602	4.6780	4.5918
		FG-O	0.815	0.8148	2.4760	2.4332	4.4430	4.2423
		FG-X	1.1581	1.1717	3.0972	3.1199	5.0791	5.0188
	0.17	UD	1.2396	1.2511	3.6409	3.6553	6.2441	6.1418
		FG-V	1.2019	1.0867	3.3229	3.3391	5.9579	5.8283
		FG-O	0.967	0.9696	3.0734	3.0382	5.6225	5.4101
		FG-X	1.4176	1.4302	3.9416	3.9338	6.5521	6.3904
	0.28	UD	1.4728	1.4892	4.1477	4.3567	6.9314	6.8162
		FG-V	1.4362	1.302	3.8762	3.8702	6.7688	6.5738
		FG-O	1.1619	1.1702	3.6187	3.6080	6.4508	6.2812
		FG-X	1.6779	1.6714	4.4858	4.3567	7.3133	6.9226
(0.1, 0.02)	0.12	UD	1.1144	1.1221	3.0203	3.0292	5.0552	4.9714
		FG-V	1.0883	1.0083	2.8013	2.8122	4.8596	4.7614
		FG-O	0.9258	0.9253	2.6268	2.5829	4.6338	4.4271
		FG-X	1.2386	1.251	3.2194	3.2365	5.2474	5.1719
	0.17	UD	1.3145	1.3251	3.7444	3.7551	6.3804	6.2680
		FG-V	1.279	1.171	3.4354	3.4484	6.1002	5.9622
		FG-O	1.0612	1.0634	3.1951	3.1586	5.7731	5.5556
		FG-X	1.4836	1.4952	4.0375	4.0262	6.6822	6.5105
	0.28	UD	1.5352	1.5506	4.2372	4.2479	7.0523	6.9274
		FG-V	1.5002	1.3719	3.9714	3.9630	6.8923	6.6899
		FG-O	1.24	1.2476	3.7208	3.7078	6.5802	6.4041
		FG-X	1.733	1.7264	4.5688	4.4385	7.4280	7.0310

IV.2.3. Étude paramétrique

Dans cette section, une analyse approfondie a été menée pour évaluer l'influence de divers paramètres sur le comportement des structures étudiées. En particulier, l'étude s'est concentrée sur les effets des coefficients élastiques des fondations K_w et K_p et des différentes configurations des fondations Winkler variables suivant la longueur de la poutre. L'impact du rapport (L/h) , des angles d'orientation de la fondation et des modes de vibration a également été examiné pour quatre types de distributions des nanotubes de carbone (CNT) et plusieurs fractions volumiques, en tenant compte de l'effet de la porosité. Par ailleurs, une comparaison a été effectuée entre différents modèles micromécaniques, notamment ceux de Mori-Tanaka et de Voigt, afin d'approfondir la compréhension des phénomènes mécaniques sous-jacents.

IV.2.3.1. Effet de la fondation variable et orthotrope

Tableau IV.6 illustre l'impact de diverses distributions de nanotubes de carbone (CNT) sur le comportement vibratoire d'une poutre FG-CNT soutenue par une fondation élastique variable (VEF). La variation du paramètre de Winkler de la poutre est choisi variable selon un modèle linéaire, exponentiel ou sinusoïdal comme donné dans Yas, Samadi [7]. En prenant en compte différents angles d'orthotropie θ et des fractions volumiques des CNT ($V_{cnt} = 0,17, 0,28$). Il est observé qu'à mesure que V_{cnt} augmente, la fréquence fondamentale diminue ; ceci est expliqué par le gain de rigidité de la poutre lors de l'augmentation de renfort ce qui réduit sa fréquence.

On remarque, aussi, que la variation du coefficient de Winkler a un effet sur les fréquences de vibration, puisque, la variation sinusoïdale donne les fréquences les plus grandes, tandis que la variation exponentielle donne les valeurs les plus petites, ceci peut être expliqué par le taux de rigidité globale qui est plus important dans le cas d'une fondation à réponse sinusoïdale et plus faible dans le cas d'une fondation à réponse exponentielle. L'influence de l'angle d'orthotropie sur les fréquences est discutée dans la Figure IV.1.

Figure IV.1 illustre l'impact de la variation du paramètre de Pasternak sur le paramètre de fréquence à différents angles (θ) pour la distribution des CNT (FG-X, FG-U, FG-V, et FG-O) avec une fraction volumique de $V_{cnt} = 0,28$.

Il est évident que, malgré l'augmentation du coefficient de Pasternak, la fréquence diminue à mesure que l'angle θ augmente ; mais cette augmentation soit presque négligeable lorsque θ dépasse 60° .

Tableau IV. 6-L'effet du mode sur le paramètre de fréquence des poutres FG-CNT reposant à différents angles et sur différents types de VEF.

$K_w = 100, K_p = 20, L/h=10$													
V_{cnt}^*	M	FG-X			FG-O			FG-U			FG-V		
		ω	ω	ω	ω	ω	ω	ω	ω	ω	ω	ω	
		$\theta = 30^\circ$	$\theta = 60^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 30^\circ$	$\theta = 60^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 30^\circ$	$\theta = 60^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 30^\circ$	$\theta = 60^\circ$	$\theta = 90^\circ$
Fondation linéaire													
0,17	1	19.3669	23.1057	23.1057	19.3075	23.1057	23.1057	19.3614	23.1055	23.1055	19.3623	20.7620	20.7628
	2	31.4025	44.6438	46.2114	31.0732	41.1396	44.7913	31.3325	43.6251	46.2110	30.8781	35.1421	35.5025
	3	41.8396	59.3373	69.3171	40.7481	52.7018	58.7376	41.5677	57.3089	69.3165	40.3782	47.8517	49.4553
0,28	1	19.2154	26.2595	29.0679	19.2023	26.2058	29.0679	19.2237	26.2599	29.0676	19.2254	25.2573	25.3336
	2	31.3138	45.3416	58.1358	31.3211	44.0093	53.4472	31.3461	44.9725	58.1352	31.2342	41.4147	43.2563
	3	41.9676	61.0358	87.2037	41.7370	57.6191	70.7042	41.9610	60.0963	82.9428	41.5020	55.3315	60.6691
Fondation exponentielle													
0,17	1	19.0279	23.1057	23.1057	18.9711	23.1057	23.1057	19.0226	23.1055	23.1055	19.0233	20.7619	20.7628
	2	31.1769	44.5198	46.2114	30.8640	41.0781	44.7895	31.1117	43.5213	46.2110	30.6914	35.1356	35.5023
	3	41.6950	59.2631	69.3171	40.6253	52.6660	58.7355	41.4295	57.2482	69.3165	40.2677	47.8398	49.4548
0,28	1	18.8785	26.0195	29.0679	18.8658	25.9684	29.0679	18.8867	26.0207	29.0676	18.8878	25.2360	25.3336
	2	31.0846	45.2004	58.1358	31.0988	43.8971	53.4425	31.1190	44.8398	58.1352	31.0150	41.3703	43.2557
	3	41.8179	60.9487	87.2037	41.5984	57.5575	70.6993	41.8144	60.0169	82.9306	41.3656	55.2919	60.6678
Fondation sinusoïdal													
0,17	1	20.0256	23.1057	23.1057	19.9606	23.1057	23.1057	20.0192	23.1055	23.1055	20.0185	20.7621	20.7628
	2	31.5825	44.7428	46.2114	31.2395	41.1883	44.7927	31.5083	43.7076	46.2110	31.0248	35.1472	35.5026
	3	41.9347	59.3861	69.3171	40.8288	52.7253	58.7389	41.6586	57.3488	69.3165	40.4505	47.8595	49.4556
0,28	1	19.8702	26.7314	29.0679	19.8559	26.6721	29.0679	19.8788	26.7299	29.0676	19.8814	25.2816	25.3337
	2	31.4967	45.4545	58.1358	31.4982	44.0987	53.4509	31.5272	45.0785	58.1352	31.4088	41.4493	43.2569
	3	42.0662	61.0932	87.2037	41.8282	57.6596	70.7074	42.0575	60.1486	82.9509	41.5916	55.3575	60.6699
M: mode													

Les écarts des fréquences en fonction les angles d'orthotropie devient conséquente lorsque K_p augmente, par contre ; lorsque K_p soit petit la Figure IV.1 montre un rapprochement des fréquences des différents cas d'orthotropie.

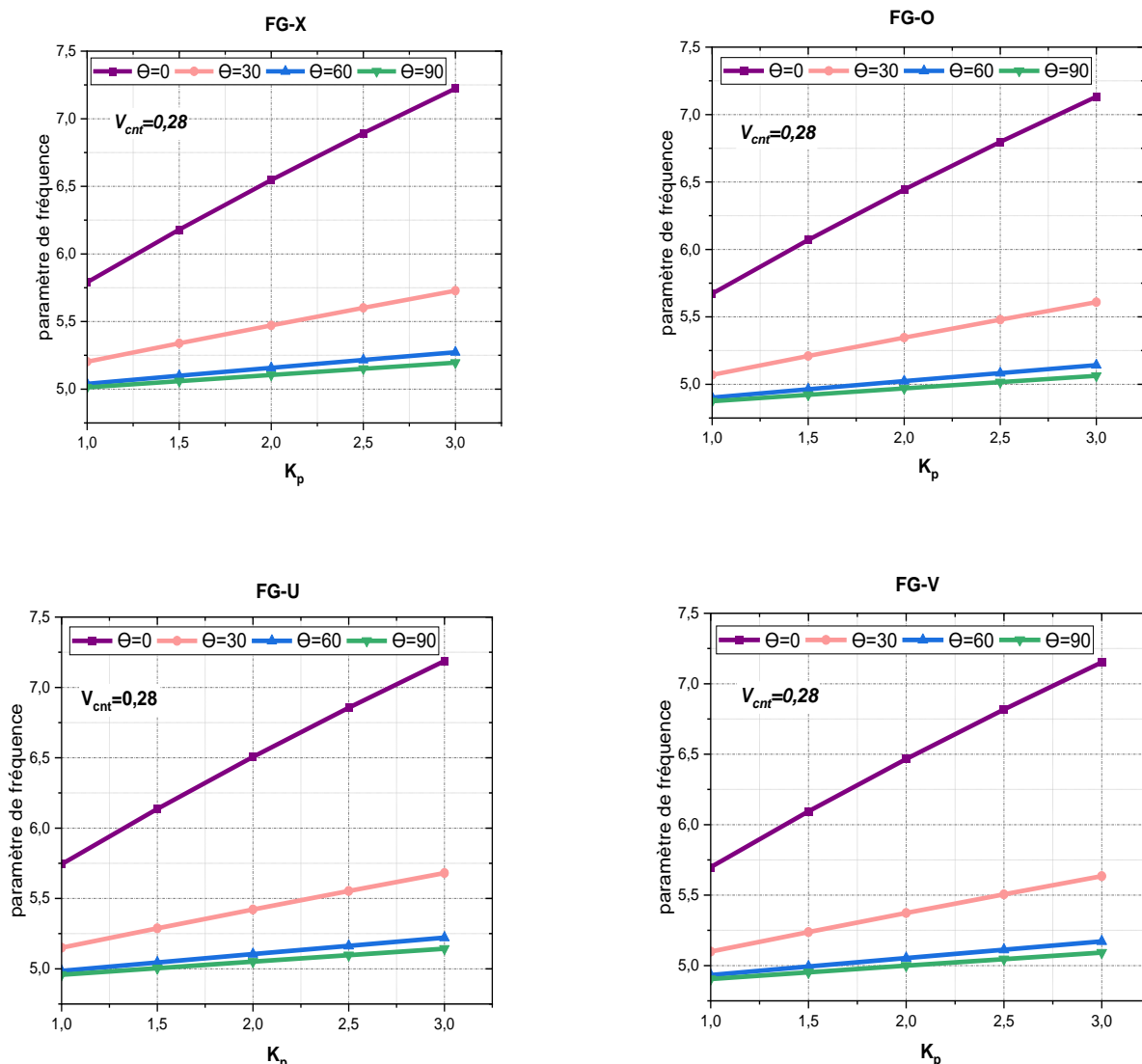


Figure IV. 1– L’impact de K_p sur les fréquences fondamentales des poutres renforcées par des CNT avec différent angles θ .

Figure IV.2 illustre l’impact de la variation de l’angle d’orthotropie de la fondation sur les fréquences des poutres renforcées par des nanotubes de carbone (FG-CNT) selon les distributions FG-X, FG-O, FG-U, et FG-V, et différents types d’assises (EF) (linéaire, parabolique, sinusoidale et exponentielle). Il est à noter l’étendu de l’angle d’orthotropie varie jusqu’à 90° ; au-delà de cette valeur on assiste à un retour vers l’isotropie ; ceci dit que $\theta = 120^\circ$ est équivalent à $\theta = 60^\circ$

Il est observé que la fréquence est plus élevée dans l’intervalle ($\theta = 0^\circ, 60^\circ$) pour toutes les type de variation d’assises, avant de diminuer progressivement entre ($\theta = 30^\circ, 60^\circ$), suivie d’une stabilisation lorsque θ soit supérieur de 60° . Il est à noter que la variation sinusoidale de

du coefficient de Winkler présente les valeurs de fréquence les plus élevées, tandis que les autres formes de variation montrent une baisse de fréquence.

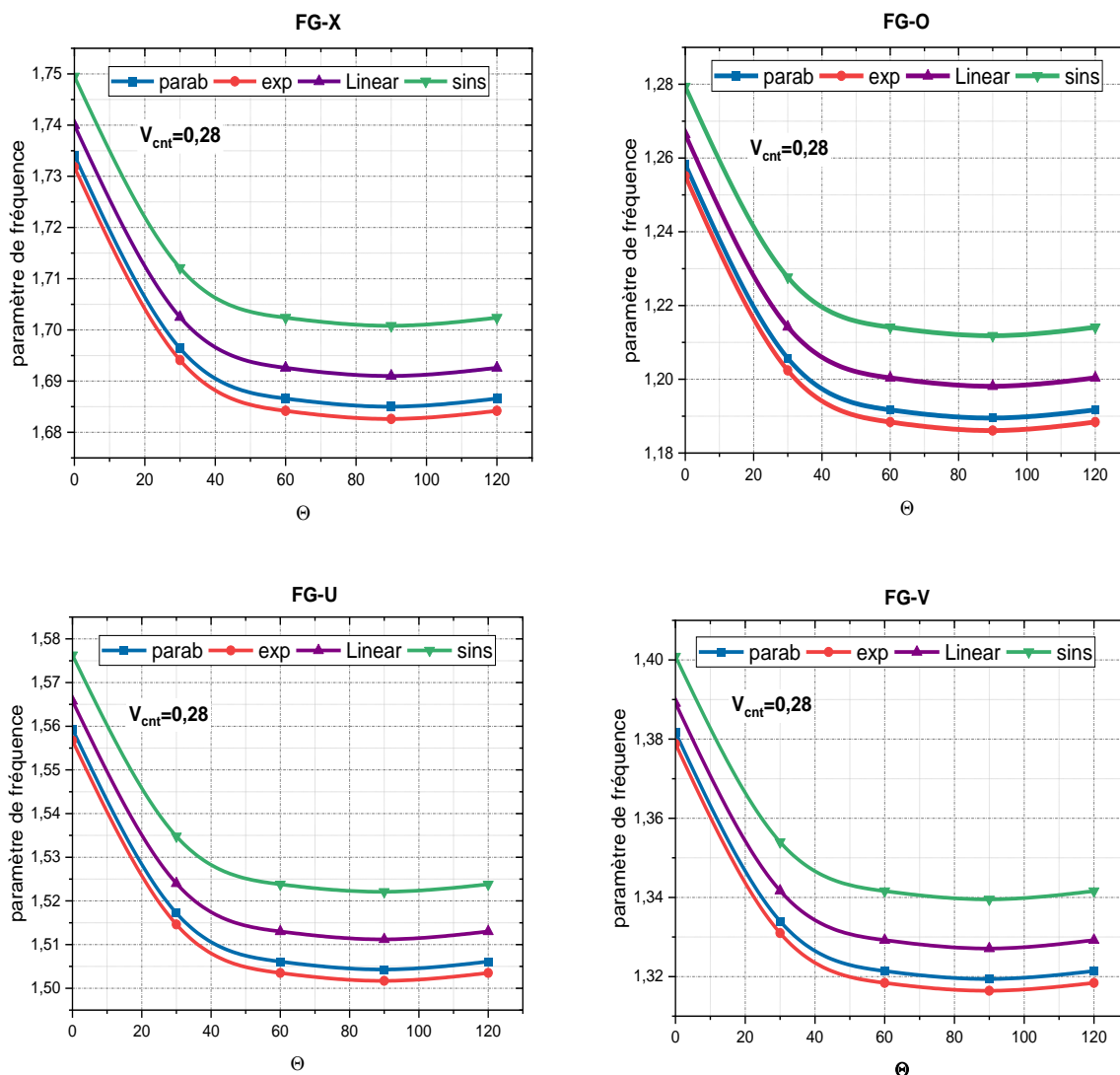


Figure IV. 2- L'impact de θ sur les fréquences fondamentales des poutres renforcées par des CNT avec différents types de fondation de Winkler.

La Figure IV.3, représente le comportement de variation du paramètre de fréquence par rapport au facteur (L/h) ; en prenant une fraction volumique des distributions de CNT de $v_{cnt} = 0,17$, et différentes valeurs d'angles d'orthotropie θ . Il est constaté que lorsque $L/h = 10$, la fréquence atteint un maximum, puis commence à diminuer à mesure que le rapport (L/h) augmente. Ceci confirme que l'élanement de la poutre réduit la fréquence de vibration. Pour l'orthotropie de la réponse de la fondation, on note aussi que cela dépend de l'orientation de son

angle ; puisque, d'autant plus que cette orthotropie augmente les fréquences diminuent. Ces remarques sont valables pour tous les cas de distributions des CNT.

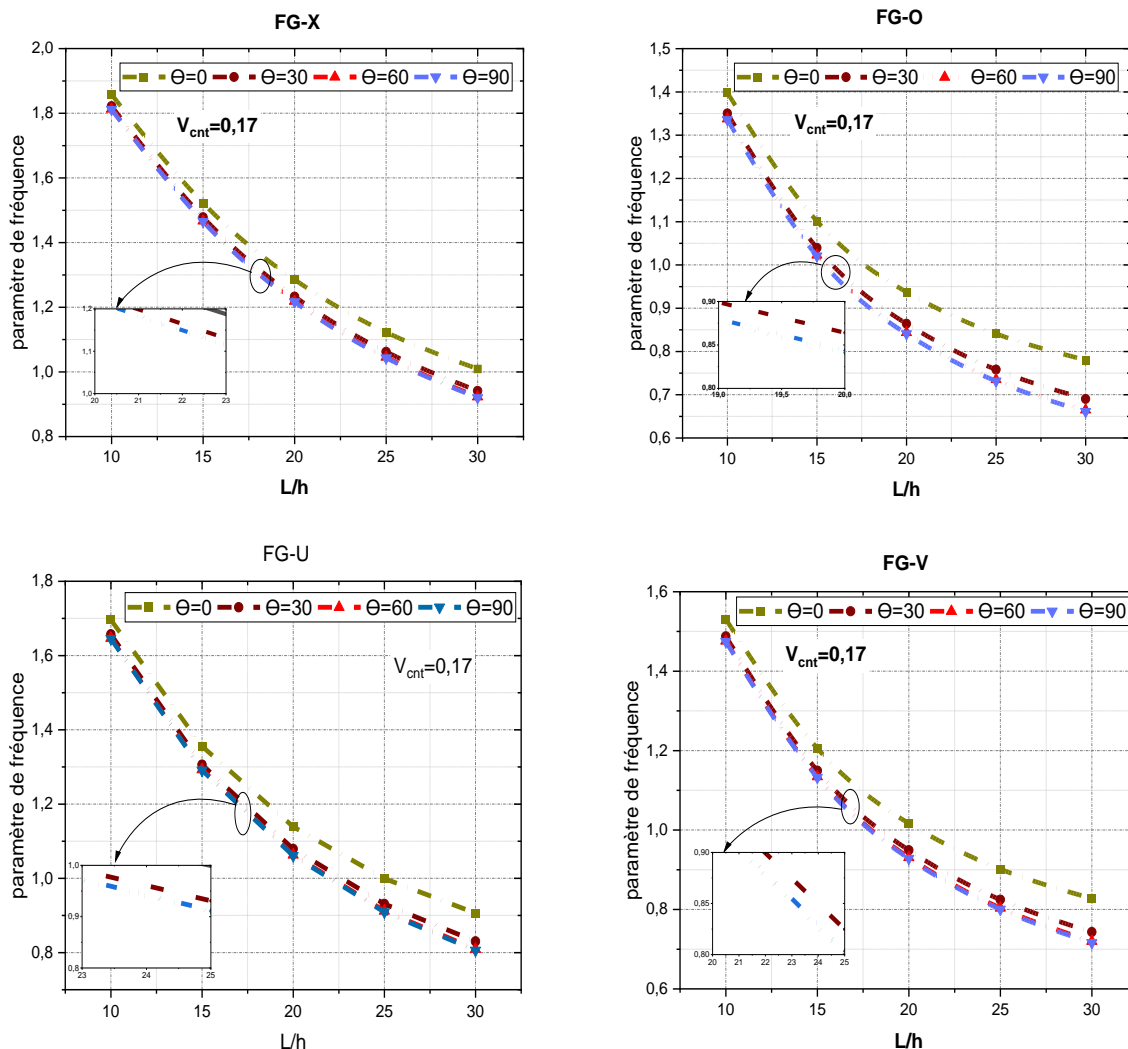


Figure IV. 3- L'impact du rapport L/h sur les fréquences fondamentales des poutres renforcées par des CNT avec différents types d'angles.

Figure IV.4 illustre l'impact de la variation de l'angle d'orthotropie sur le paramètre de fréquence en fonction des différentes distributions de nanotubes de carbone (FG-X, FG-U, FG-O et FG-V) avec une fraction volumique de 0,17. Il est à noter que la distribution FG-X présente la valeur de fréquence maximale, car, ressemblant à une géométrie en I, elle dispose d'un moment d'inertie plus élevé que les autres géométries. Par ailleurs, la distribution FG-O donne les fréquences les plus basses. Nous avons également analysé l'effet du rapport longueur/épaisseur (L/h) sur le paramètre de fréquence, comme illustré dans la Figure IV.5, en utilisant une fondation de type Winkler- Pasternak ou la rigidité de Winkler varie de manière exponentielle et avec un

angle d'orthotropie $\theta = 30^\circ$. Nous constatons que la distribution FG-X enregistre la valeur de fréquence maximale et on confirme, aussi, que le paramètre de fréquence diminue lorsque le rapport (L/h) augmente.

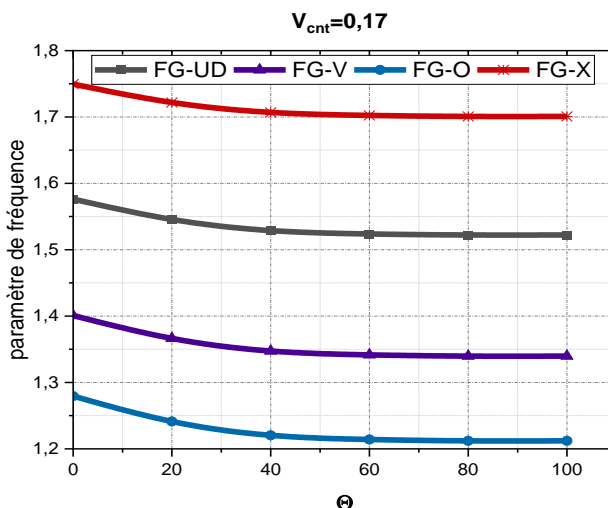


Figure IV. 4- L'effet des angles d'orthotropie sur la fréquence fondamentale pour différentes distributions de CNT ($V_{cnt} = 0.17$).

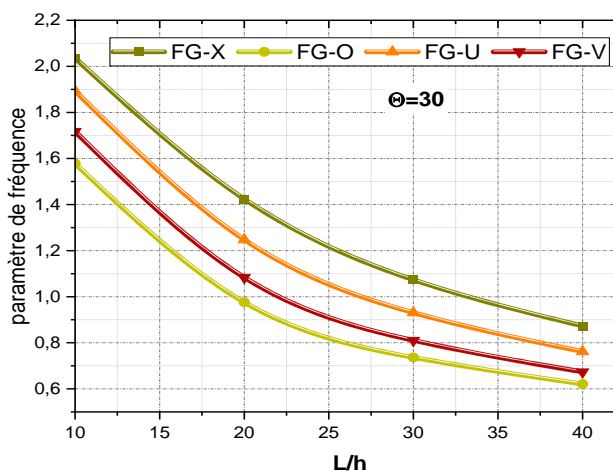


Figure IV. 5 - Variation des fréquences fondamentales des poutres reposant fondation à rigidité de Winkler variable exponentiellement ($V_{cnt} = 0.17$).

La Figure IV.6 représente la variation des NDFNF en fonction du coefficient polynomiale décrivant la rigidité de Winkler ψ . Il est à noter que l'augmentation de ce coefficient implique l'augmentation du coefficient K_w ; ce qui explique son influence significative sur les fréquences fondamentales. On remarque aussi, dans cette figure que la variation sinusoïdale du coefficient de Winkler génère la fréquence maximale, tandis que les autres variations de VEF conduisent à

des fréquences inférieures et ceci est expliqué par la densité de réponse ou grandeur de la surface de réponse dans la figure II.37.

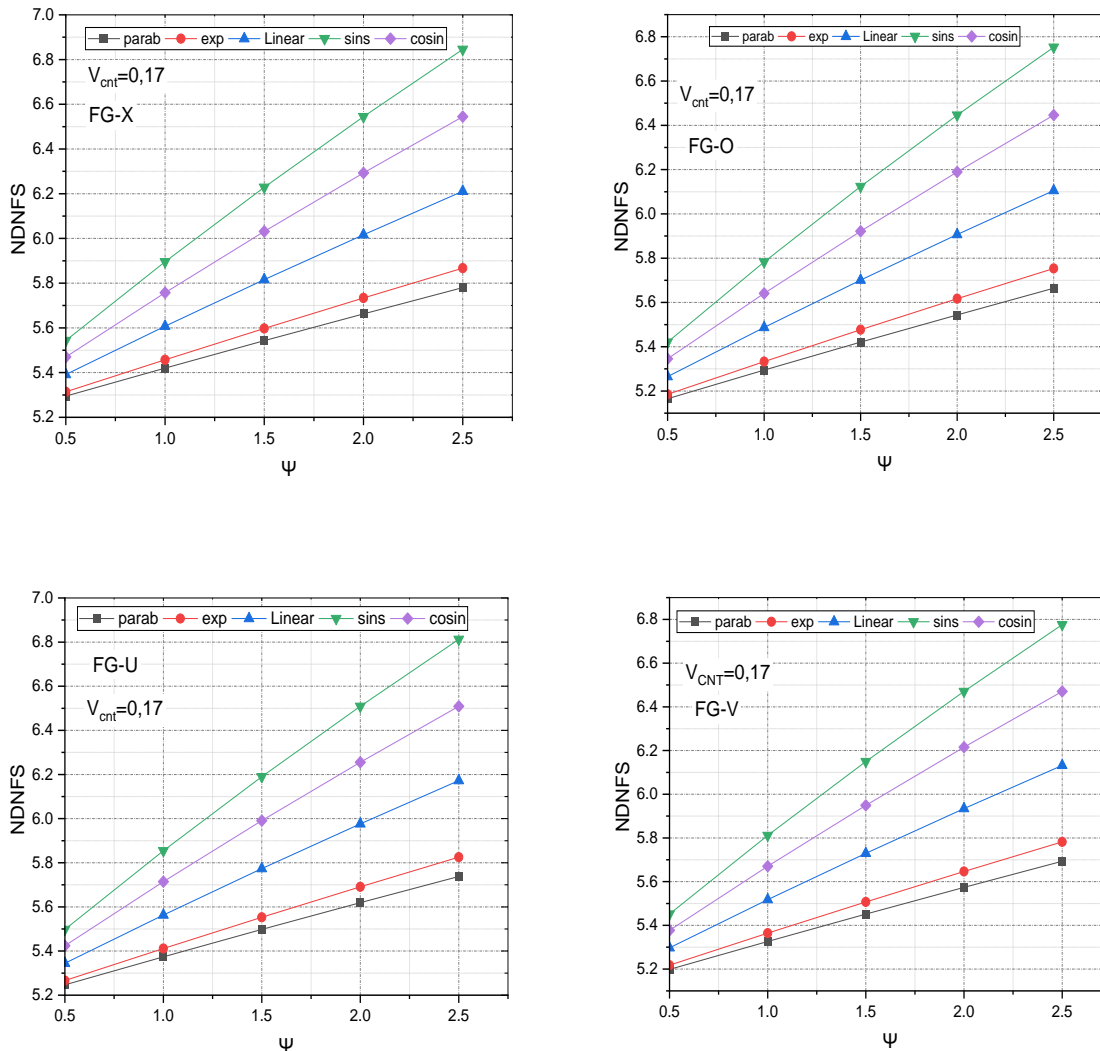


Figure IV. 6- Variation des fréquences naturelles sans dimension des poutres FG-CNTRC par rapport à ($V_{cnt} =0.17, L/h=10, k_w =10, k_p =1.5$).

Les NDFNF sont représentés en fonction des différentes formes de modes et, aussi, par rapport aux schémas de distribution des CNT dans la Figure IV.7. On observe que les NDFNF sont plus élevés en raison de l'effet d'amplification du mode, quelle que soit la nature de la fondation. Il est à noter, aussi, que les NDFNF ne sont pas influencés par les variations de VEF.

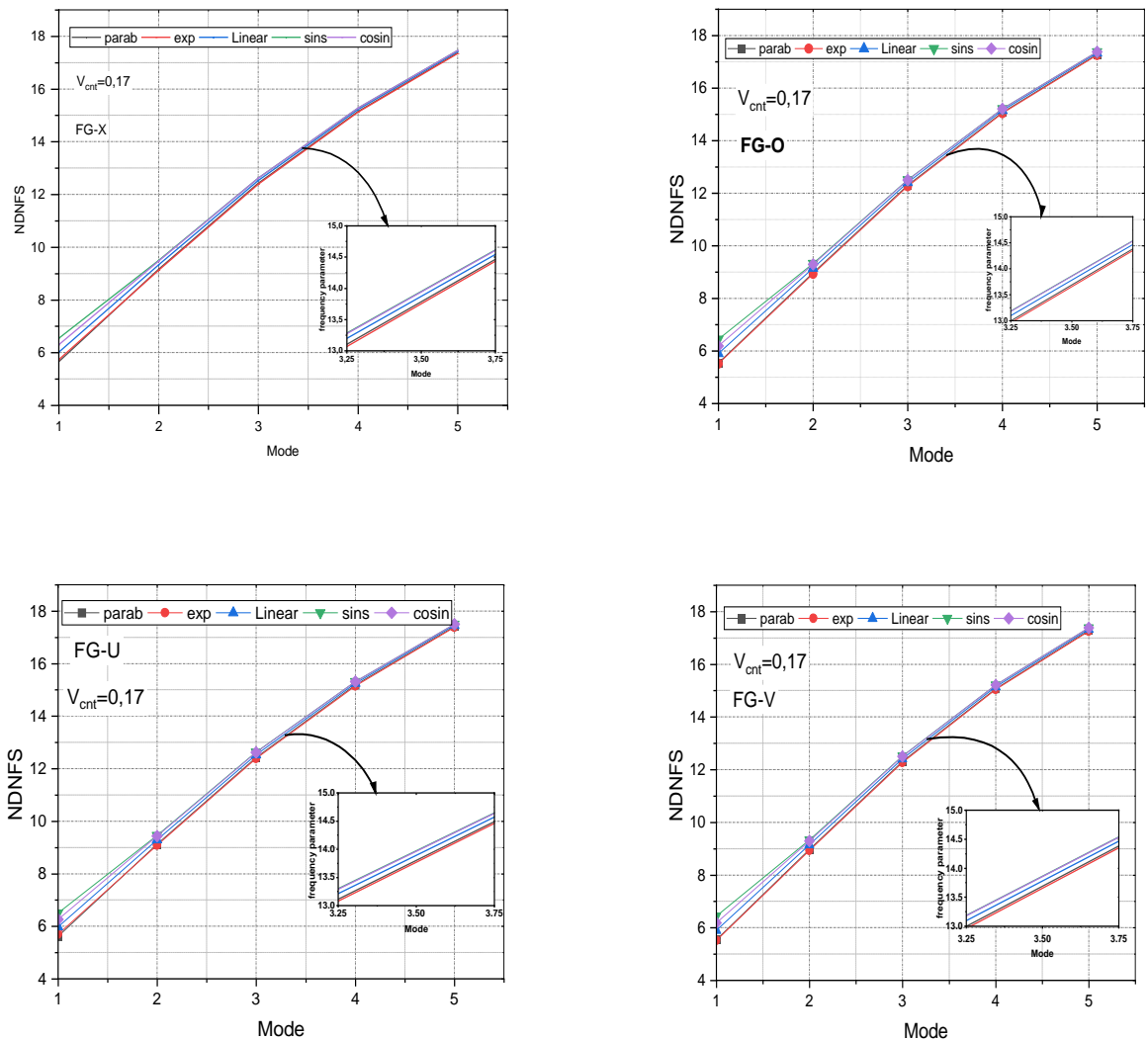


Figure IV. 7-Variation des fréquences naturelles sans dimension des poutres FG-CNTRC en fonction du nombre de modes ($V_{cnt} = 0.17, L/h=10, K_w = 10, K_p = 1.5, \psi=2$).

En se consultant la Figure IV.8, où les NDFNF sont représentés par rapport au rapport L/h , aux différentes formes de réaction de la fondation de Winkler et aux différentes formes de distribution des CNT, il est clair que les NDFNF diminuent avec l'augmentation du rapport longueur/épaisseur (L/h) ; cette diminution sera atténuée d'autant plus que la poutre soit élancée. Fait remarquable, la variation sinusoidale du modèle de Winkler produit les valeurs de NDFNF les plus élevées, tandis que toutes les autres variations de VEF entraînent une diminution de NDFNF.

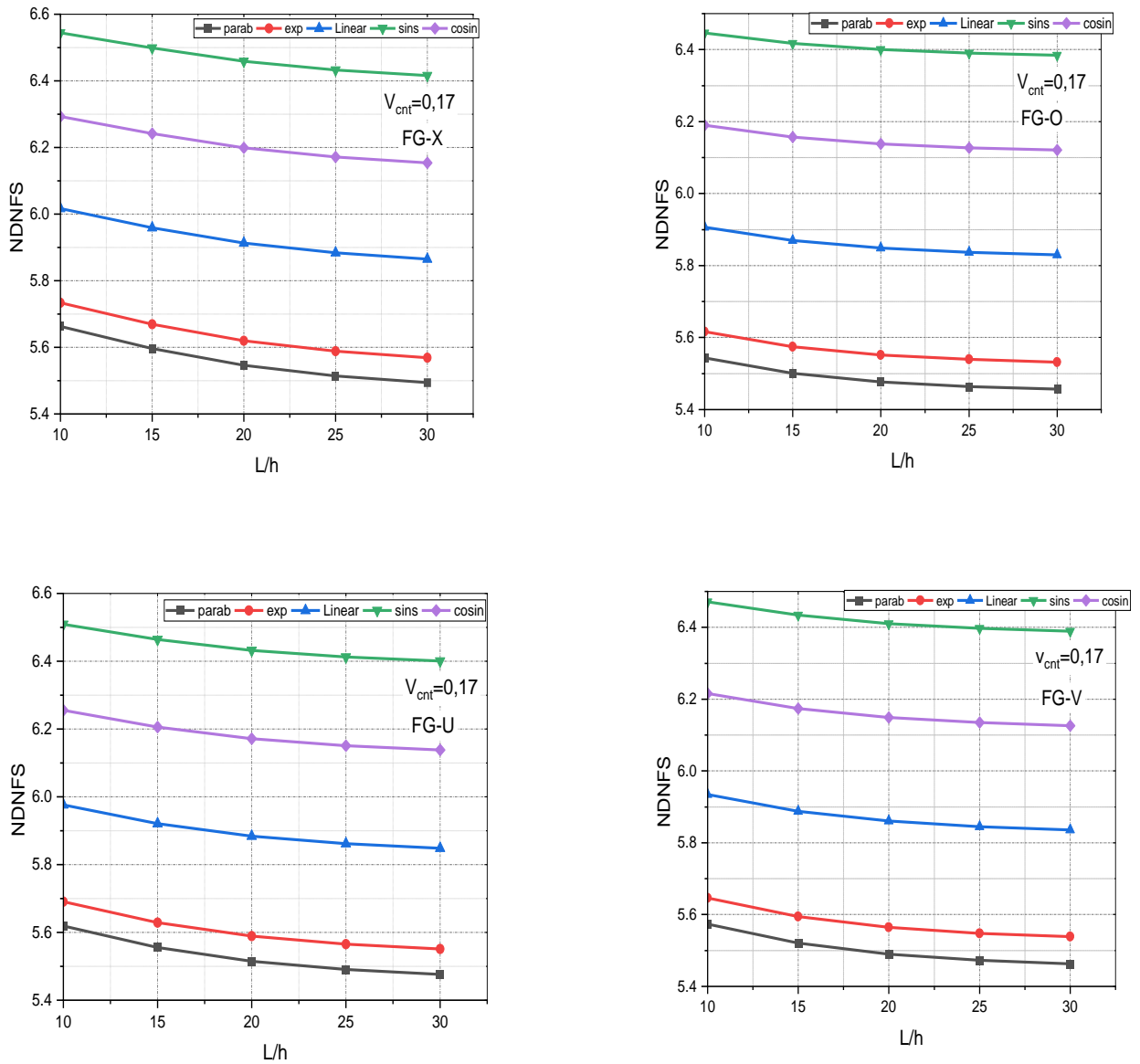


Figure IV. 8- Variation des fréquences fondamentales des poutres FG-CNTRC en fonctions du rapport longueur sur épaisseur (L/h) ($K_w = 10$, $K_p = 1.5$, $\psi = 2$).

IV.2.3.2. Effet des différentes distributions de CNT

Figure IV.9 présente l'impact du rapport L/h , sur les fréquences fondamentales (NDFNF) des poutres en FG-CNTRC. Il est manifeste qu'avec l'augmentation du rapport L/h , les NDFNF diminuent, indiquant une baisse de la rigidité de la poutre en FG-CNTRC. Il est également intéressant de noter que le motif de distribution FG-X révèle des concentrations plus élevées de nanotubes de carbone (CNT) sur les surfaces supérieure et inférieure, ce qui accroît les NDFNF et améliore la résistance à la flexion en augmentant la rigidité dans ces zones, tout en la réduisant

près du plan médian. En revanche, le comportement du motif FG-O souligne les NDFNF les plus faibles, suggérant que les distributions uniformes et asymétriques des CNT sont moins efficaces pour augmenter ou diminuer la fréquence par rapport aux motifs de distribution symétriques.

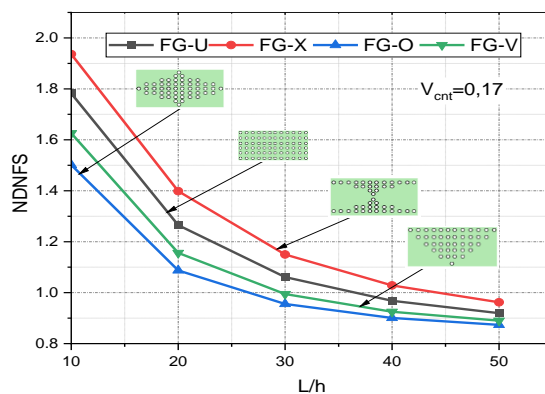


Figure IV. 9-Variation des fréquences naturelles sans dimension (NDFNF) des poutres FG-CNTRC en fonctions du rapport L/h . ($K_w = 10$, $K_p = 1.5$, $\psi = 2$).

Figure IV.10 montre La variation des fréquences propres non dimensionnelles des poutres FG-CNTRC en fonction du type parabolique de la variation de la rigidité Winkler et par rapport au rapport (L/h) ; on remarque lorsque le rapport L/h augmente, les NDFNF des poutres en FG-CNTRC sur les EF diminuent. Le motif de distribution FG-X présente les valeurs de NDFNF les plus élevées. De plus, les NDFNF maximales sont associées à l'EF de Winkler sous sa forme parabolique, selon le type de variation. Il est à noter qu'avec tous les autres motifs de distribution des CNT, la fréquence est réduite.

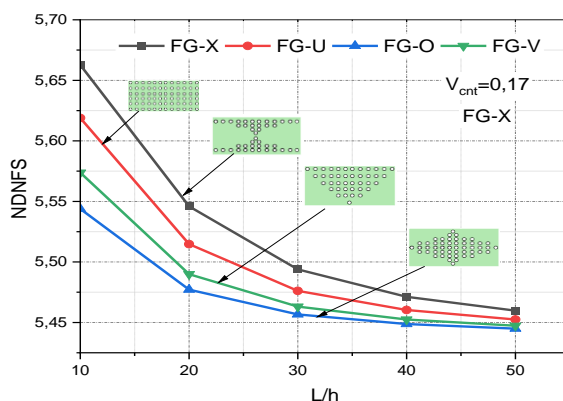


Figure IV. 10 - La variation des fréquences propres non dimensionnelles des poutres FG-CNTRC assise sur fondation variable de manière parabolique par rapport au rapport (L/h). ($K_w = 10$, $K_p = 1.5$, $\psi = 2$).

IV.2.3.3. L'impact de la porosité sur les poutres FG-CNT

Le tableau IV.7 ci-dessous montre la fréquence fondamentale à travers diverses distributions de porosité pour les quatre distributions de CNT avec $V_{cnt} = 0.12$ et une fondation à rigidité de Winkler variable de type parabolique. Nous notons qu'à mesure que le coefficient de porosité augmente, la fréquence diminue ; ceci s'avère vrai puisque la porosité rabaisse la rigidité de la poutre. Compte tenu de la remarque sur la distribution des CNT elle reste toujours valable avec des fréquences fortes pour la distribution en X et faibles pour la distribution en O. la distribution d'une porosité de forme U implique des fréquences plus petites que celles des autres distributions, tandis que la distribution en FGS donne les distributions les plus grandes ; ceci est expliqué par la densité de pores qui sont plus important dans le cas de la distribution uniforme.

Tableau IV. 7-Le paramètre de fréquence pour trois distributions de porosité et quatre distributions distinctes de nanotubes de carbone, $\theta = 60^\circ$ $V_{cnt} = 0.12$.

Distributions Porosité	ω				
	e_m	FG-X	FG-O	FG-U	FG-V
UD	0	1.9384	1.7473	1.8584	1.7920
	0,3	1.7852	1.6731	1.7378	1.6988
	0,5	1.6892	1.6282	1.6633	1.6419
FGS	0	1.9384	1.7473	1.8584	1.7920
	0,3	1.8893	1.7180	1.8195	1.7572
	0,5	1.8521	1.6978	1.7909	1.7318
FGA	0	1.9384	1.7473	1.8584	1.7920
	0,3	1.8748	1.7157	1.8085	1.7541
	0,5	1.8260	1.6930	1.7712	1.7262

IV.2.3.4. Comparaison des fréquences des modèles Mori-Tanaka et ceux de Voigt pour des poutres FG-CNT imparfaites

Tableau IV.8 présente le comportement vibratoire des modèles de poutre en matériau FG-CNT pour deux différents modèles micromécaniques celui de Mori-Tanaka et l'autre de Voigt ; ces éléments sont adossés à une fondation orthotrope avec trois angles d'orthotropie 30° , 60° et 90° . La poutre prise dans ce cas est modérément élancée avec $L/h=20$. Nous avons utilisé trois valeurs de coefficient de porosité $e_m = 20\%$, 40% et 60% , nous avons comparé, aussi, la dispersion des nanotubes de carbone. Nous avons constaté qu'en augmentant la valeur des angles θ , les modules de Mori-Tanaka et de Voigt ont enregistré une augmentation de fréquences, et ceci est

valable pour toutes les formes de distributions des CNT. Pour tous les cas de figure, les valeurs des fréquences trouvées par l'approche de Voigt sont plus grandes que celles trouvées par le modèle Mori-Tanaka, comme en remarque aussi que chaque fois que la valeur de e_m augmente, nous observons simultanément une augmentation de la fréquence de vibration.

Ce tableau peut aussi nous informer sur la compensation qu'elle peut y avoir entre les renforts et la porosité ; puisqu'une poutre à 40% de porosité avec une distribution de CNT en forme de U avec une fondation orthotrope à 60° peut avoir une fréquence presque similaire à une poutre à 20% de porosité avec une distribution de CNT en forme de X.

Tableau IV. 8- Comparaison des fréquences non-dimensionnelles des modèles de Mori-Tanaka et de Voigt pour des poutres poreuses sur fondation orthotrope.

L/h	e_m	θ	ω							
			FG-X		FG-O		FG-U		FG-V	
			Voigt	M-T	Voigt	M-T	Voigt	M-T	Voigt	M-T
20	0,2	30	9.2531	7.4212	8.0670	6.9649	8.7677	7.1841	8.3464	7.0795
		60	9.8188	8.4076	8.8737	8.1055	9.4200	8.2476	9.0865	8.1790
		90	11.4026	10.5959	10.8416	10.4495	11.1556	10.5172	10.9597	10.4842
	0,4	30	9.0851	7.6192	8.1519	7.3022	8.6937	7.4522	8.3638	7.3781
		60	9.8331	8.7664	9.1319	8.5638	9.5303	8.6583	9.2842	8.6112
		90	11.7678	11.1995	11.3829	11.1038	11.5960	11.1480	11.4618	11.1258
	0,6	30	9.1267	8.1603	8.5611	7.9969	8.8805	8.0728	8.6823	8.0341
		60	10.1977	9.5477	9.8071	9.4468	10.0241	9.4934	9.8879	9.4695
		90	12.6779	12.3584	12.4826	12.3112	12.5896	12.3332	12.5211	12.3219

Concernant la Figure IV.11(a), (b), (c) nous avons étudié l'impact de l'angle d'orthotropie θ sur la fréquence d'une poutre renforcée par CNT réparties suivant les deux modules micromécaniques (Voigt et Mori-Tanaka) en utilisant le modèle linéaire de Winkler. Nous observons ainsi que l'augmentation de la fréquence atteint sa valeur maximale pour un angle d'orthotropie $\theta = 90^\circ$; à partir de cette valeur, une diminution est constatée pour les quatre distributions de CNT. En superposant les courbes des deux modèles micromécaniques en remarque que les valeurs des fréquences données par Voigt sont plus grandes ; Cette comparaison paraît subjective puisque les deux approches n'ont pas le raisonnement de distribution.

Nous pouvons constater que la variation authentique des direction d'orthotropie soit comprise entre 0° et 90° , au-delà de cette valeur nous assistons à un retour vers le 0° ; comme indique dans le tableau les fréquences d'une poutre sur fondation orthotrope à 120° sont similaires à celles d'une poutre sur fondation orthotrope à 60° . Il est également à noter que la

fréquence naturelle augmente simultanément avec l'augmentation de e_m et que plusieurs valeurs de fréquence pour différentes distributions se rapprochent les unes des autres.

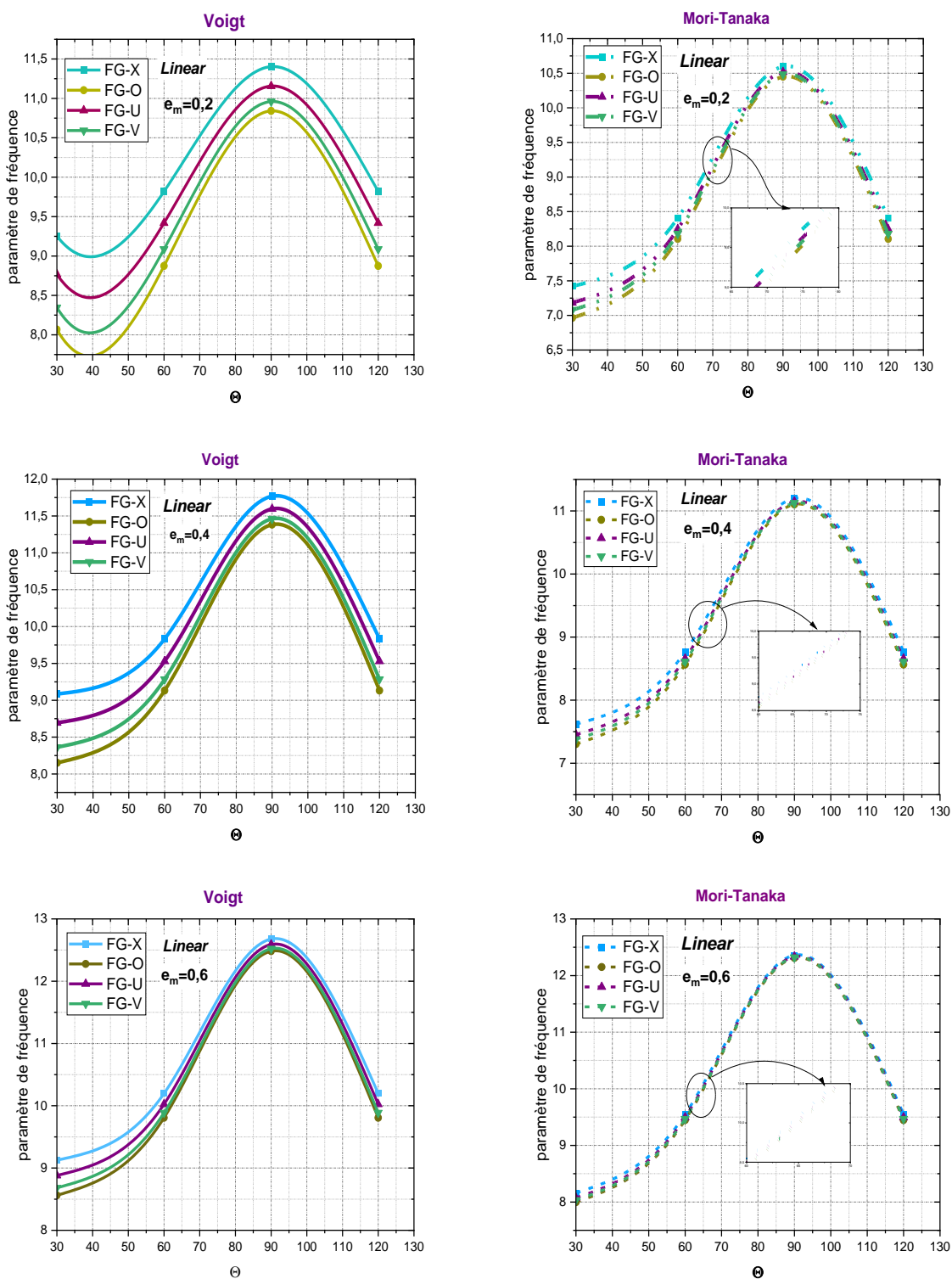


Figure IV. 11- Comparisons des modelés de Mori-Tanaka et de Voigt et les angles d'orthotropie sur la fréquence non-dimensionnelle des poutres FG-CNT en fonction des variations du coefficient de porosité.

IV.2.3.5. Effets de la distribution Non-Linéaires des CNT sur les fréquences de vibration

Le tableau IV.9 montre la variation des 3 modes de fréquences de vibration d’une poutre FG-CNTRC en fonction du schéma de distribution des n-FGX, pour différents exposants de la fraction volumique des CNT (n) et une fraction volumique V_{cnt} , avec et sans champs fondation, Pour un rapport d’élancement $L/h = 15$. On remarque que les fréquences de trois modes augmentent avec l’augmentation du facteur de non-linéarité n.

Tableau IV. 9-Les trois premières fréquences non-dimensionnelles des poutres n-FGX.

(K_w, K_p)	V_{cnt}	n	ω_{11}	ω_{22}	ω_{33}
(0, 0)	0.17	1	1.3960	3.9219	6.3836
		2	1.4823	4.0427	6.4909
		3	1.5339	4.1153	6.5568
		4	1.5691	4.1665	6.6047
		5	1.5950	4.2064	6.6436
(0.1, 0.02)		1	1.5109	4.0310	6.5132
		2	1.5909	4.1483	6.6178
		3	1.6391	4.2190	6.6820
		4	1.6720	4.2688	6.7286
		5	1.6963	4.3076	6.7667

Figure IV.12 illustre la variation des NDNF des n-FGX, avec et sans fondation, en fonction du nombre de modes pour $V_{cnt} = 0,17$. En raison de l'effet d'amplification des modes, les NDNF sont plus élevés, quel que soit le coefficient de non-linéarité n. On peut conclure que les NDNF augmentent avec l'accroissement du nombre de modes.

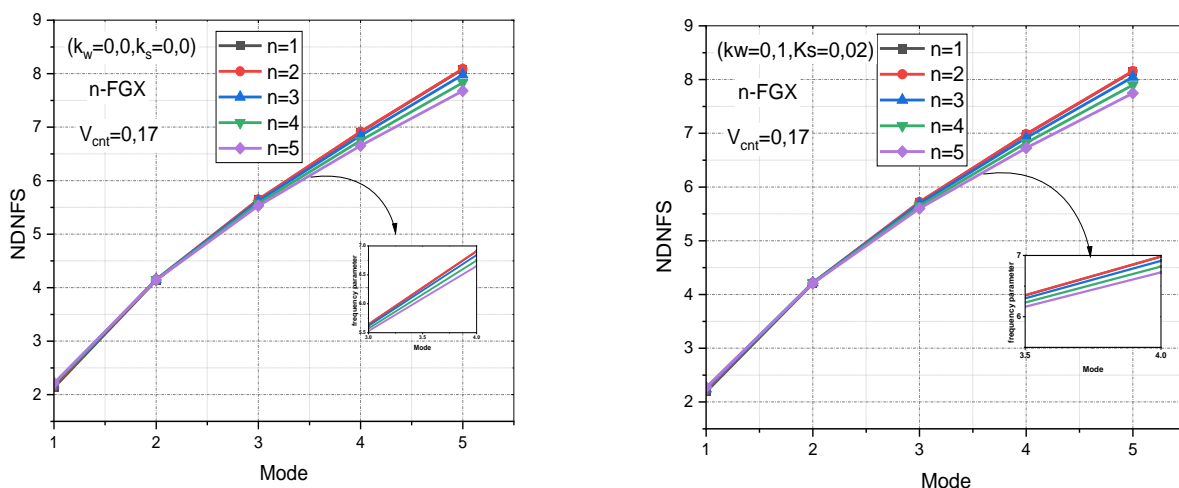


Figure IV. 12-Variation des NDNF d’une poutre n-FGX, avec et sans EF, en fonction du nombre de modes.

IV.3. Étude et validation du flambement

Dans la deuxième partie, nous avons étudié le flambement de poutres simplement appuyées, renforcées par CNT et soutenues par une fondation élastique. Une comparaison avec les travaux existants a été réalisée. ; et une étude paramétrique couvrant l'influence de tous les paramètres matériels et géométriques des poutres sur les charges critiques du flambement.

IV.3.1. Poutre FG-CNT sans fondation élastique

Dans le tableau IV.10, les résultats présents concernant les charges critiques de flambement non dimensionnelles (NDCBL) des poutres FG-CNTRC utilisant la théorie des poutres quasi-3D (QUASI-3D HSDT) sont comparés à ceux de Belarbi, Salami [208], qui emploient la méthode des éléments finis (FE-HSDT), ainsi qu'à ceux de Yas and Samadi [209] utilisant la méthode des différences Quadratiques (DQM-TBT), en fonction des différentes configurations de CNT et du rapport Longueur/épaisseur L/h .

Tableau IV. 10-Comparaisons des NDCBL des poutres FG-CNTRC pour différents rapports d'élancement.

L/h	V_{cnt}	Reference	Modèle		
			FG-UD	FG-X	FG-O
10	0.12	Belarbi et al [208]	0.1655	0.2082	0.1049
		Présente	0.1698	0.2078	0.1089
	0.17	Belarbi et al [208]	0.2593	0.3260	0.1620
		Présente	0.2664	0.3284	0.1679
	0.28	Belarbi et al [208]	0.3584	0.4270	0.2414
		Présente	0.3699	0.4319	0.2500
15	0.12	Belarbi et al [208]	0.0988	0.1314	0.0574
		Présente	0.1009	0.1329	0.0589
	0.17	Yas and Samadi [7]	0.0986	0.1288	0.0588
		Belarbi et al [208]	0.1506	0.2011	0.0862
	Présente		0.1541	0.2047	0.0884
		Yas and Samadi [7]	0.1505	0.1999	0.0877
	0.28	Belarbi et al [208]	0.2206	0.2811	0.1324
		Présente	0.2271	0.2891	0.1361
	Yas and Samadi [7]	0.2209	0.2896	0.1337	
20	0.12	Belarbi et al [208]	0.0630	0.0630	0.0351
		Présente	0.0644	0.0884	0.0358
	0.17	Belarbi et al [208]	0.0946	0.0946	0.0521
		Présente	0.0970	0.1342	0.0532
	0.28	Belarbi et al [208]	0.1430	0.1430	0.0812
		Présente	0.1476	0.1981	0.0831
50	0.12	Belarbi et al [208]	0.0119	0.0119	0.0062
		Présente	0.0120	0.0136	0.0062
	0.17	Belarbi et al [208]	0.0174	0.0174	0.0091
		Présente	0.0178	0.0181	0.0092
	0.28	Belarbi et al [208]	0.0276	0.0276	0.0144
		Présente	0.0284	0.0285	0.0146

On remarque que les résultats de la présente étude corroborent avec ceux des méthodes dites exacte, et ce quel que soit le rapport d'élanement L/h , celui laisse dire que la prise en compte de la déformation normale suivant Z rapproche d'avantage le modèle vers l'approche 3D; il est d'ailleurs, appelé modèle quasi-3D. on remarque aussi, que la distribution X-CNT résiste à des charges critiques plus importantes et la distribution O-CNT résiste à des charges critiques plus basse; ce qui laisse dire que la distribution X présente un moment d'inertie plus important en vue de résister à ces cas d'instabilité.

IV.3.2. Poutre FG-CNT sur fondation à raideur variable orthotrope

Tableau IV.11 présente les résultats relatifs aux charges critiques de flambement non-dimensionnelles (NDCBL) des poutres FG-CNTRC, en utilisant la théorie de déformation normale suivant l'axe Z , appelée, quasi-3D (HSST), comparés à différentes valeurs de V_{cnt} , K_w et K_p , ainsi qu'aux résultats de Yas, Samadi [7], obtenus à l'aide de la méthode des différences Quadratiques en utilisant la théorie des poutres de Timoshenko (DQM-TBT) pour un rapport $L/h=15$. On remarque que les charges critique de flambage sont plus importantes d'autant plus qu'on intègre une réponse d'assise; puisque les résultats des réponses d'une poutre sur fondation (Tableau IV. 10) sont plus petits que ceux ou la fondation de Winkler est présente; et les résultats des réponses d'une poutre sur fondation de Winkler sont plus petits que ceux ou la fondation de Pasternak est présente.

Tableau IV. 11-Comparaisons des NDCBL des poutres FG-CNTRC sur fondations élastiques

(K_w, K_p)	V_{cnt}	Reference	Modèle		
			FG-UD	FG-X	FG-O
(0.1, 0)	0.12	Yas and Samadi [7]	0.108729	0.138965	0.068902
		Présente	0.126061	0.168177	0.075192
	0.17	Yas and Samadi [7]	0.160697	0.210077	0.097836
		Présente	0.164291	0.214886	0.098589
	0.28	Yas and Samadi [7]	0.231036	0.299774	0.143887
		Présente	0.237288	0.299312	0.146326
(0.1, 0.02)	0.12	Yas and Samadi [7]	0.128729	0.158965	0.088903
		Présente	0.131059	0.163051	0.089047
	0.17	Yas and Samadi [7]	0.180692	0.230077	0.117836
		Présente	0.184291	0.234886	0.118589
	0.28	Yas and Samadi [7]	0.251036	0.319774	0.163887
		Présente	0.257288	0.319312	0.166326

Tableau IV.12 présente une étude comparative des différentes théories concernant les distributions de poutres renforcées par CNT, avec et sans fondations. Selon l'analyse de flambement, la poutre FG-X démontre la résistance la plus élevée parmi les poutres significatives, suivie de la poutre UD et de la poutre FG-O, avec la charge de flambement la plus importante, comme montré dans l'exemple précédent. Il est montré que même pour les poutres moyennement élancées ($L/h = 15$) l'effet du gauchissement reste toujours effectif, ceci est expliqué par les écarts des charges critiques existantes entre la théorie FSDT, qui ne tient pas compte de l'effet du gauchissement, et les autres théories d'ordre supérieur. On remarque, aussi que la présence de la fondation augmente la résistance de la poutre vis-à-vis du flambement.

Tableau IV. 12- Comparaison du flambement des poutres CNTRC avec et sans fondation élastique selon différentes théories. ($v_{cnt} = 0.12, L/h = 15$).

Source	$K_w = 0, K_p = 0$			$K_w = 0.1, K_p = 0.02$		
	UD	O	X	UD	O	X
Ref(a) FSDT	0.1032	0.0604	0.1367	0.1333	0.0905	0.1668
Ref(a) TSDT	0.0984	0.0576	0.1289	0.1286	0.0878	0.1590
Ref(a) ESDT	0.0987	0.0574	0.1295	0.1288	0.0875	0.1596
Ref(a) HSDT	0.0984	0.0576	0.1288	0.1286	0.0878	0.1590
Ref(a) TRSDT	0.0985	0.0575	0.1291	0.1287	0.0876	0.1592
Ref(b)	0.0986	0.0588	0.1288	0.1287	0.0889	0.1590
Présente	0.1009	0.0588	0.1330	0.1311	0.0890	0.1631
Ref(a): Wattanasakulpong and Ungbhakorn [4]						
Ref(b): Yas, Samadi [7]						

IV.3.3. Étude paramétrique

Cette section porte sur le paramétrage prenant en compte l'effet de la raideur variable et orthotrope, les différents modes, le rapport d'élancement (L/h), et l'influence de la non-linéarité de distribution des CNT, en intégrant la porosité. Une comparaison des deux modèles mécaniques, celui de Mori-Tanaka et l'autre de Voigt, a également été effectuée.

IV.3.3.1. Poutre FG-CNT sur fondation a raideur variable orthotropes

Le tableau IV.13 montre influence des angles d'orthotropie de la fondation sur la réponse au flambement pour différentes distributions de CNT (FG-X, FG-O, FG-V et UD). Une analyse comparative a été réalisée entre les types de fondations Winkler paraboliques et sinusoïdales. Les résultats montrent que la charge de flambement la plus élevée a été obtenue avec une fondation sinusoïdale et la distribution de CNT FG-X.

De plus, il a été constaté que la charge de flambement diminue systématiquement pour toutes les distributions de CNT avec l'augmentation du mode de vibration, tant pour les cas de fondations

sinusoïdales que paraboliques. On note aussi que l'augmentation de l'angle d'orthotropie diminue la charge critique de flambement.

Tableau IV. 13-les trois premières charges critiques de flambement des poutres FG-CNTRC sous l'influence des angles d'orthotropie de la fondation θ .

θ	Mode	AOP Parabolique-VE				AOP sinusoïdale-VE			
		FG-X	FG-O	FG-V	FG-UD	FG-X	FG-O	FG-V	FG-UD
30°	1	32.5976	32.5112	32.5280	32.5579	38.3339	38.2475	38.2643	38.2942
	2	23.1636	22.9878	23.0311	23.0966	24.0715	23.8956	23.9389	24.0044
	3	21.4578	21.2727	21.3291	21.4003	21.8261	21.6409	21.6973	21.7686
60°	1	31.5997	31.5133	31.5300	31.5600	37.3360	37.2496	37.2664	37.2963
	2	22.1657	21.9899	22.0332	22.0987	23.0735	22.8977	22.9410	23.0065
	3	20.4599	20.2748	20.3311	20.4024	20.8282	20.6430	20.6994	20.7707
90°	1	31.1381	31.0517	31.0685	31.0984	36.8745	36.7881	36.8048	36.8348
	2	21.7042	21.5283	21.5717	21.6371	22.6120	22.4361	22.4795	22.5450
	3	19.998	19.8132	19.8696	19.9409	20.3666	20.1815	20.2379	20.3091

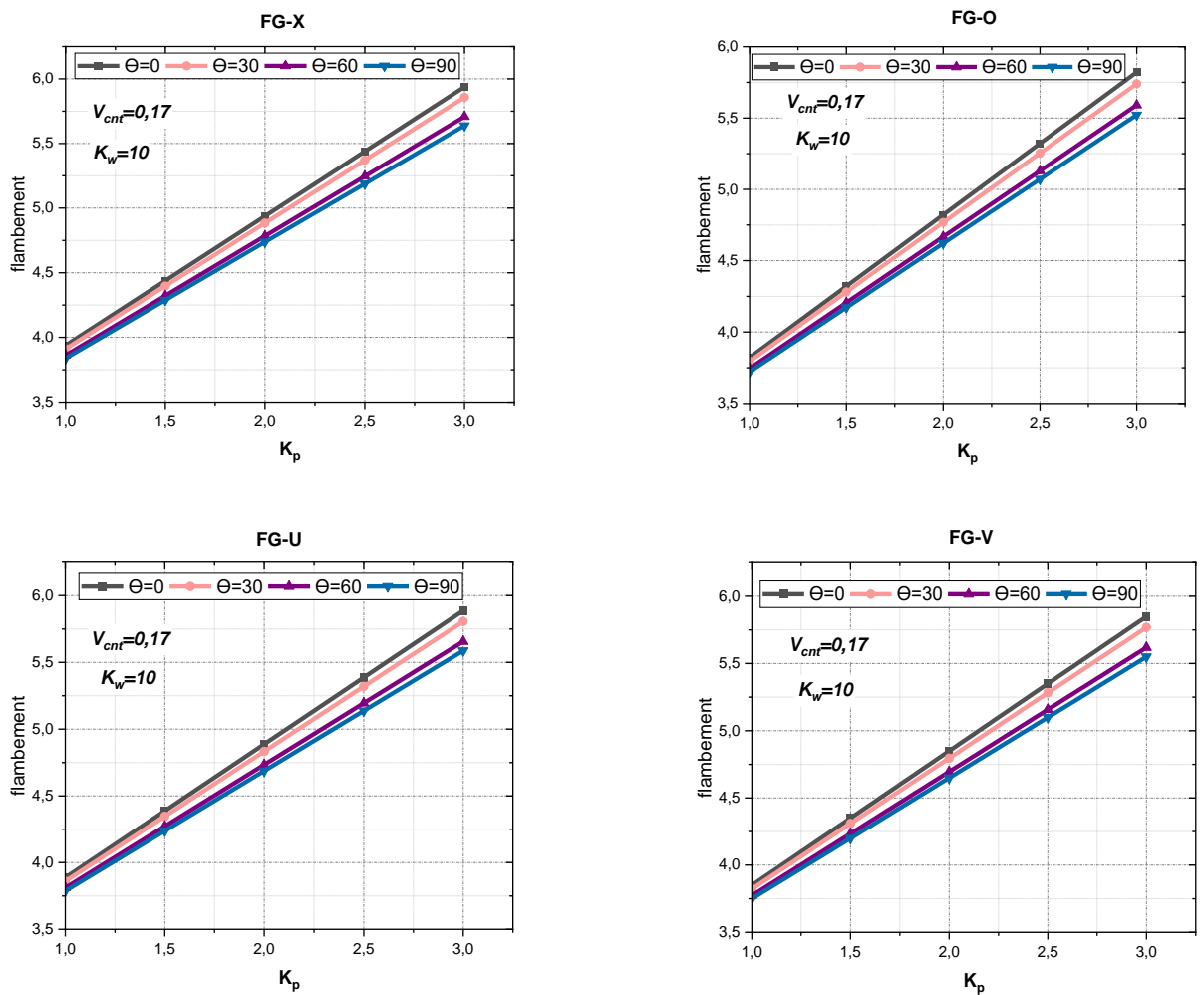


Figure IV. 13-Influence de K_p sur le flambement pour quatre distributions de CNT à différents angles.

Les Figures IV.13, IV.14 et IV.15 analysent l'influence de divers paramètres sur le comportement au flambement des poutres FG-CNT avec différentes distributions de CNT (FG-X, FG-O, FG-V et UD). La Figure IV.13 examine l'effet du coefficient de rigidité de Pasternak (K_p) sur le flambement, avec un paramètre Winkler constant ($K_w = 10$). Il est intéressant de noter que la charge de flambement augmente de manière linéaire avec l'augmentation du coefficient de Pasternak pour toutes les distributions, bien qu'une légère diminution du flambement soit également observée avec l'augmentation des angles d'orthotropie (θ).

La Figure IV.14, montre l'impact des différents modes de vibration sur la charge critique de flambement à différents angles orthotropie de la fondation et avec une fraction volumique de la distribution des CNT ($V_{cnt} = 0,17$). Les résultats montrent que la charge critique de flambement diminue sévèrement entre les modes 1 et 2 ; au-delà du 2^{ème} mode on remarque une stabilisation sensible de la charge critique, quel que soit le degré d'orthotropie de la fondation ; ceci est valable pour toutes les distributions de CNT.

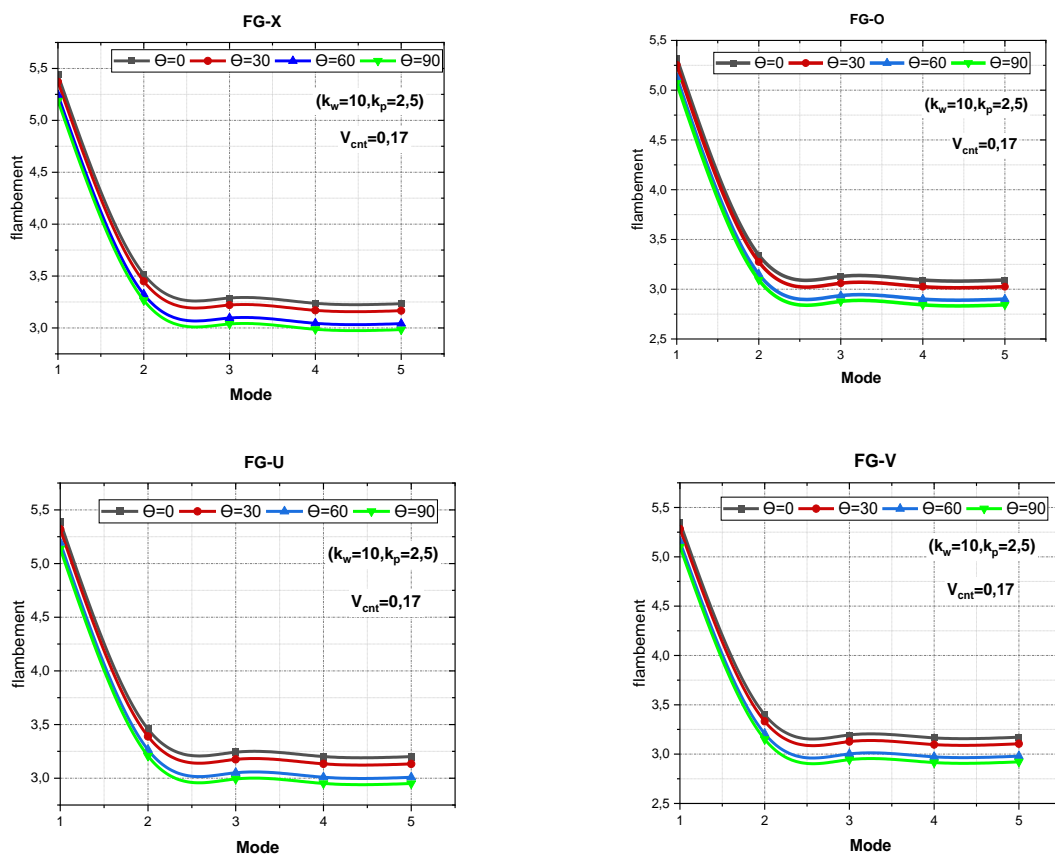


Figure IV. 14- Influence de nombre de modes sur la charge critique de flambement des poutres renforcées en CNT pour différents angles orthotropie θ .

L'effet du rapport d'élancement sur les charges critiques de flambement a été présenté dans la Figure IV.15 et cela pour différents angles d'orthotropie de la fondation et pour différentes variantes de distribution des fibres CNT. Il est évident que la charge de flambement diminue à mesure que le rapport L/h augmente pour toutes les distributions ; cette diminution soit réduite d'autant plus que la poutre soit élancée. De plus, la figure révèle que plus d'orthotropie implique une diminution de la charge critique de flambement

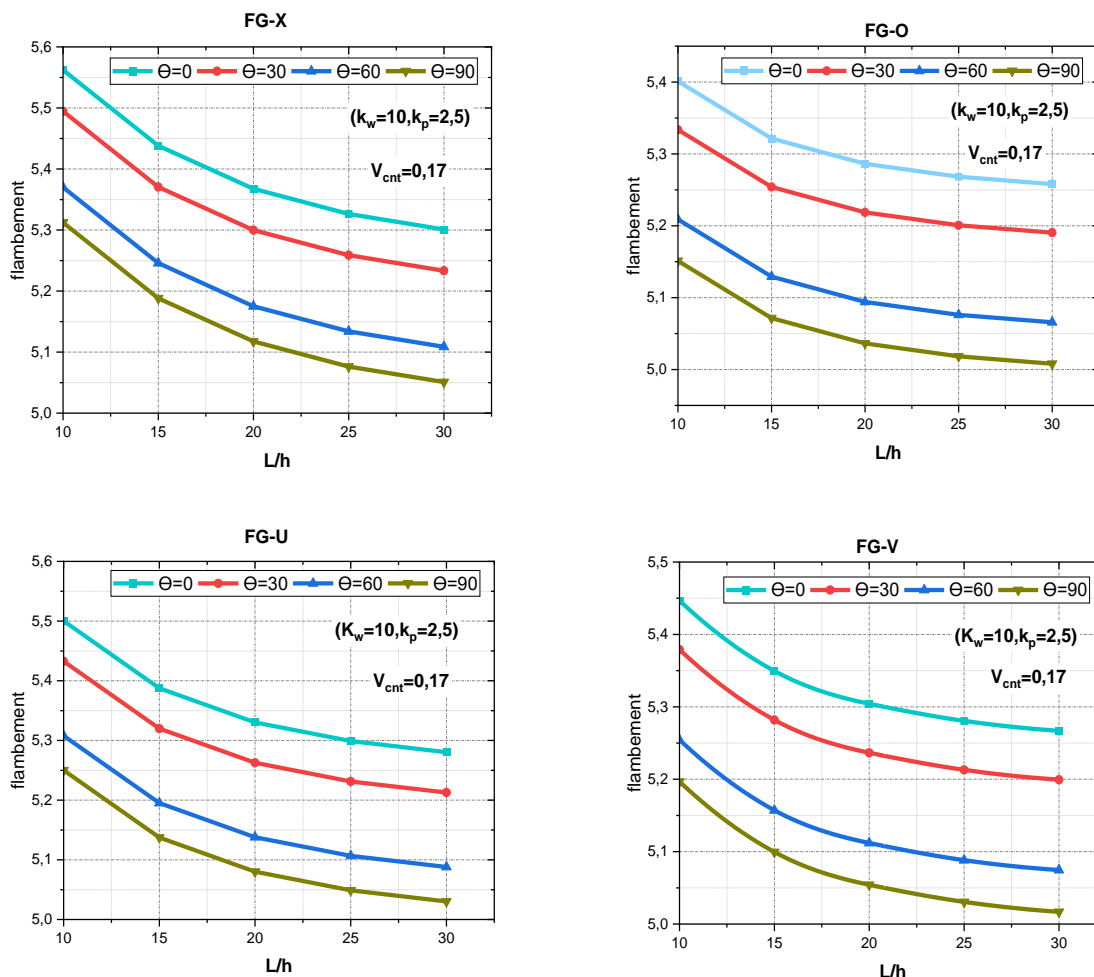


Figure IV. 15-l'effet du rapport L/h sur le comportement au flambement d'une poutres FG-CNT avec différents angles d'orthotropie de la fondation, et différents cas de distribution des CNT.

La Figure IV.16 illustre l'influence des différents angles d'orthotropie sur la réponse au flambement en fonction des distributions de nanotubes de carbone (CNT) et des types de fondations élastiques (EF). La figure met en évidence une tendance cohérente : la charge de flambement diminue pour toutes les distributions de CNT (FG-X, FG-O, FG-V et UD) à mesure que les angles orthotropie (θ) augmentent jusqu'à un angle de 90° ; au-delà de cette valeur on

assiste à une diminution de l'orthotropie pour dire que les charges critiques trouvée pour $\theta = 120^\circ$ sont les mêmes que celle trouvées pour $\theta = 60^\circ$. Il convient de noter que le type de fondation de Winkler sinusoïdale présente la charge de flambement la plus élevée, tandis que le type de fondation exponentielle affiche la charge la plus basse. Toutes les remarques faites sont valables pour tous les types distributions de CNT.

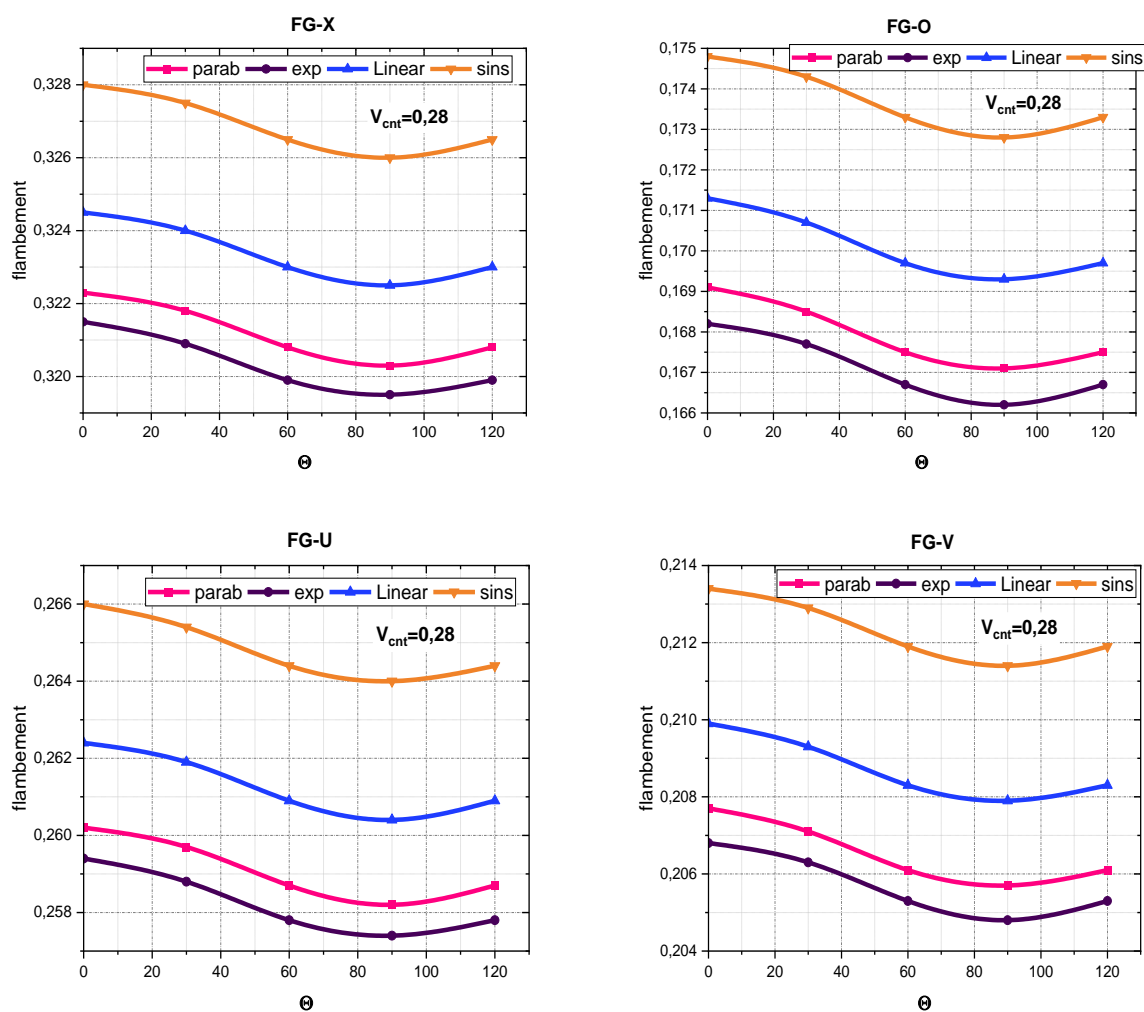


Figure IV. 16- Effet des angles orthotropie θ sur le flambement des poutres renforcées par CNT avec différents types de variation de la rigidité de Winkler.

La Figure IV.17 illustre que les NDCBL des poutres FG-CNTRC augmentent linéairement avec une élévation du polynôme VEF (ψ), en prenant en compte quatre schémas de distribution des CNT (FG-X, FG-O, FG-V, FG-U) et une fraction volumique de 0,17. Il est à noter que la plus grande de NDCBL est générée par la variation sinusoïdale de la rigidité de Winkler. En revanche, d'autres variations du EF entraînent une diminution de la NDCBL.

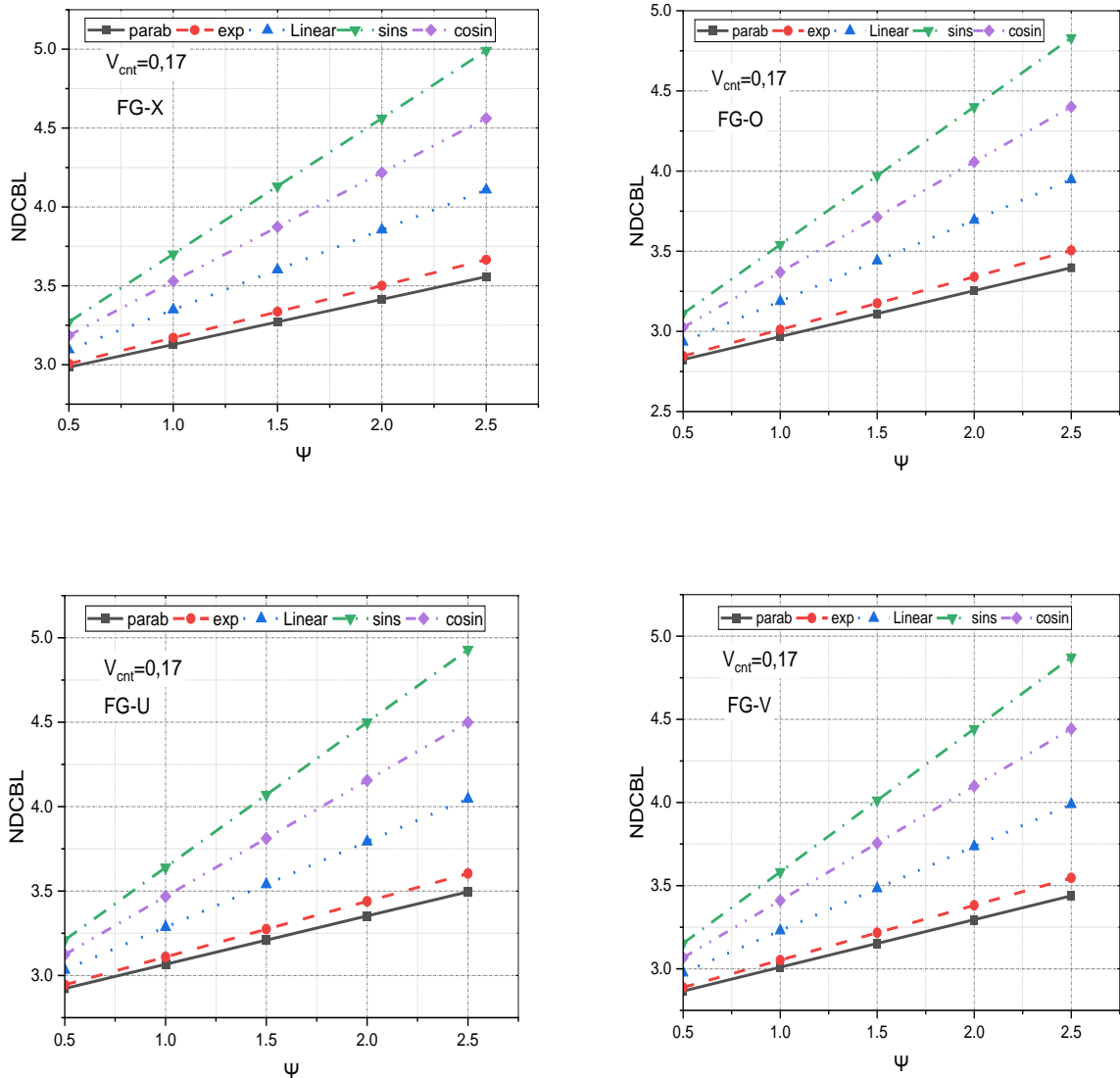


Figure IV. 17-Variation des NDCBL des poutres FG-CNTRC en fonctions des différents types de VEF et du coefficient de VEF. ($V_{cnt} = 0.17$).

La Figure IV.18 montre que la NDCBL diminue à mesure que le nombre de modes augmentent ; mais cette fois cette remarque est faite pour tous les cas de variation de la rigidité de Winkler, ou la variation sinusoidale du de ce coefficient présente les valeurs de NDCBL les plus élevées. Il convient de noter que la diminution de la charge critique cesse au-delà du 3^{ème} mode pour devenir sensiblement constante. On peut noter, aussi, que pour les modes supérieurs l'effet de la variation de la rigidité de Winkler soit atténué

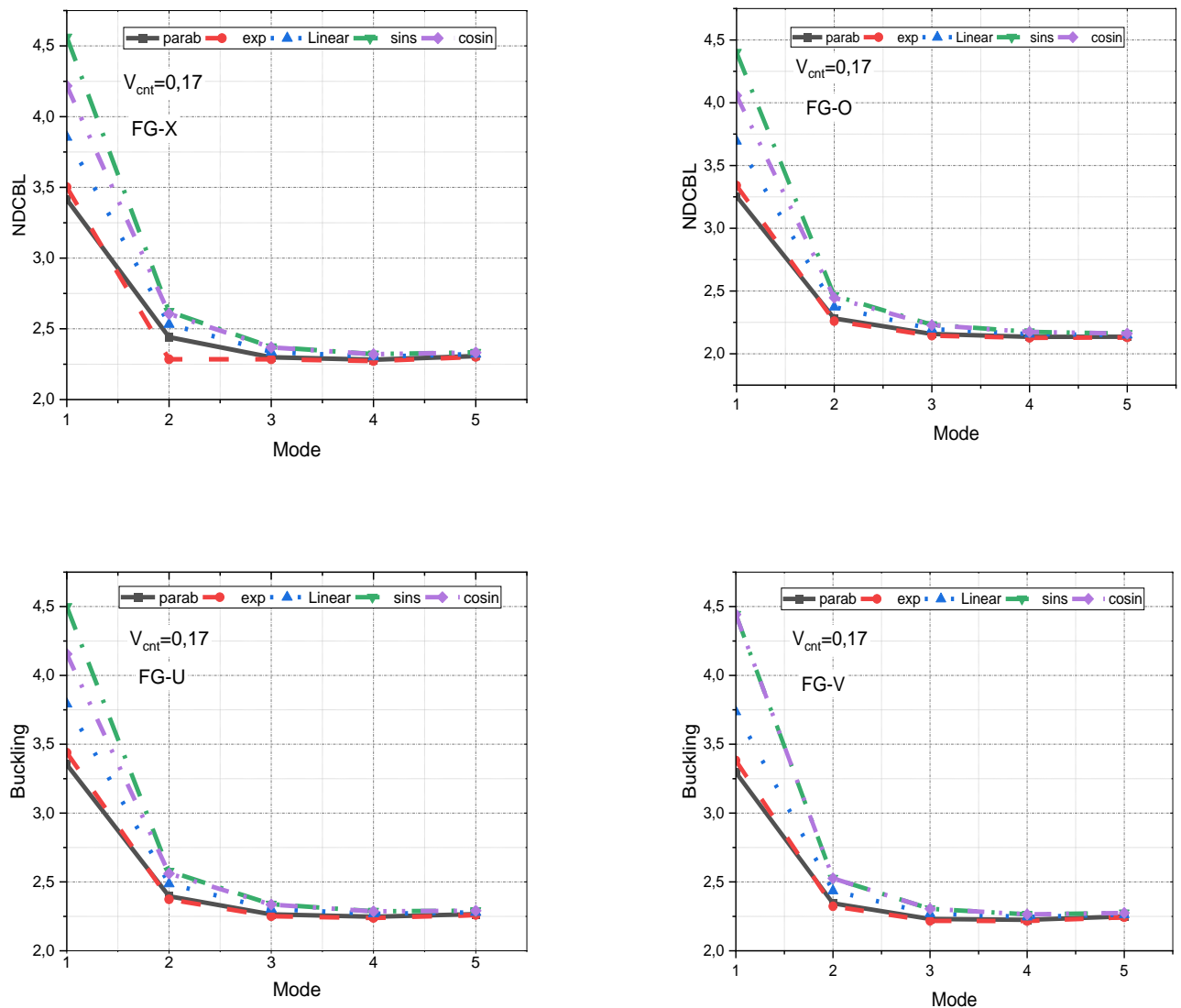


Figure IV. 18- Variation des NDCBL des poutres FG-CNTRC pour les différents modes de flambement ($V_{cnt} = 0,17$).

IV.3.3.2. Étude comparative entre les méthodes Mori-Tanaka et EROM pour une poutre FGCNT imparfaite

Le tableau IV.14 ci-dessous compare plusieurs distributions de CNT pour différentes valeurs de porosité (e_m) et un rapport à une poutre modérément courte ($L/h=10$) entre les modèles de Mori-Tanaka et de Voigt. La distribution (FG-X) présente la valeur la plus élevée. Lorsque la porosité (e_m) augmente, le flambement diminue, ceci est expliqué par la diminution de rigidité ; pratiquement e_m est un coefficient qui ne peut dépasser les 40 %, mais pour bien illustré le comportement de la porosité on est allé jusques 80 % de porosité.

Les figures IV.19 et IV.20 explorent la relation entre les modèles micromécaniques, la porosité, les paramètres de fondation et le comportement au flambement.

La figure IV.19 compare les modèles Mori-Tanaka et EROM pour diverses distributions de nanotubes de carbone (FG-X, FG-O, FG-V et UD) en utilisant une fondation exponentielle de Winkler avec une orthotropie fixée à ($\theta = 30^\circ$). La poutre prise dans ce cas est modérément courte avec ($L/h=10$). Les résultats révèlent que la distribution FG-X présente la charge de flambement la plus élevée, mais l'impact de la porosité sur le flambement varie selon les distributions. Il est à noter que la charge de flambement approche de zéro pour presque toutes les distributions lorsque le coefficient de porosité atteint 0,8 ce qui signifie une très faible rigidité de la poutre. On note aussi que l'augmentation de la porosité atténue la différence entre les charges critiques de flambement pour les différents modèles de répartition des CNT.

Tableau IV. 14- Compare les modèles EROM et M-T, en examinant les effets des changements du coefficient de porosité sur le flambement dans diverses distributions de CNT.

L/h	V_{cnt}	e_m	FG-X		FG-O		FG-U		FG-V	
			EROM	M-T	EROM	M-T	EROM	M-T	EROM	M-T
10	0,28	0	0.4721	0.2269	0.2832	0.0949	0.4065	0.1519	0.3350	0.1250
		0,3	0.2750	0.1395	0.1702	0.0665	0.2383	0.0980	0.1988	0.0825
		0,5	0.1600	0.0885	0.1042	0.0500	0.1401	0.0666	0.1193	0.0582
		0,6	0.1093	0.0665	0.0757	0.0429	0.0977	0.0530	0.0849	0.0479
		0,8	0.0382	0.0349	0.0349	0.0327	0.0371	0.0336	0.0358	0.0331

La figure IV.20 se concentre sur la distribution de CNT FG-U et analyse l'influence du coefficient de la fondation de Pasternak (K_p) et des angles d'orthotropie (θ) sur le flambement, en utilisant à la fois les modèles Mori-Tanaka et EROM tout en tenant compte des effets de la porosité. Pour le modèle de Voigt, l'analyse des trois modes de flambement montre que le coefficient de Pasternak et une valeur spécifique de porosité ($\theta = 0,6$) contribuent à une légère augmentation de la charge de flambement ; ceci est valable pour les deux modèles micromécaniques.

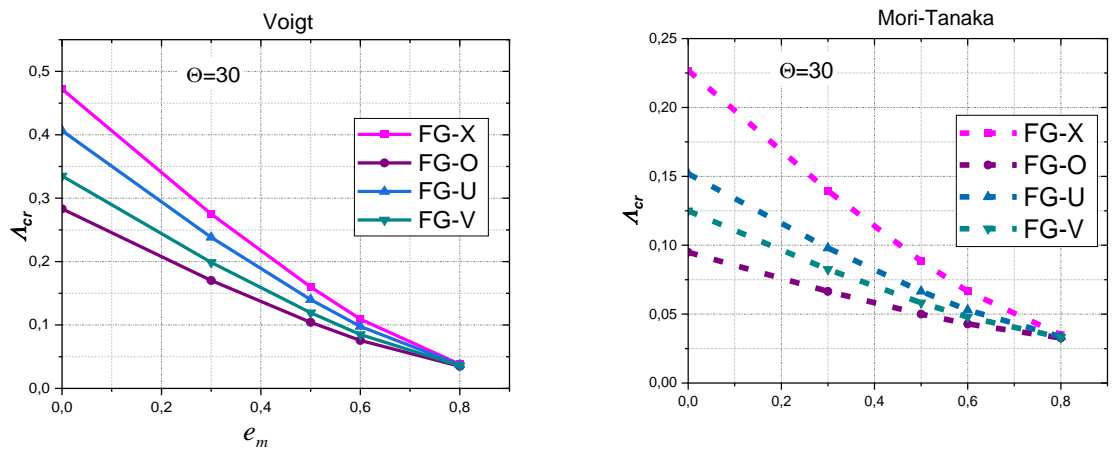
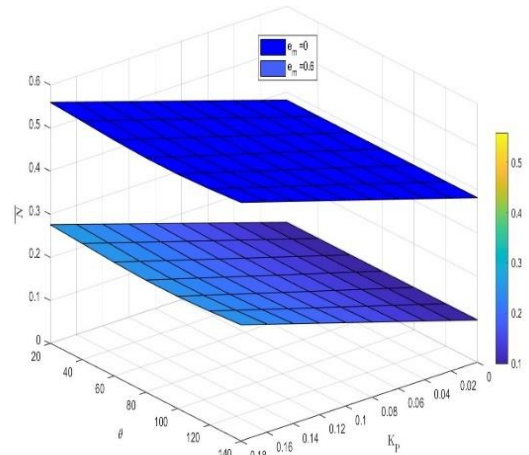
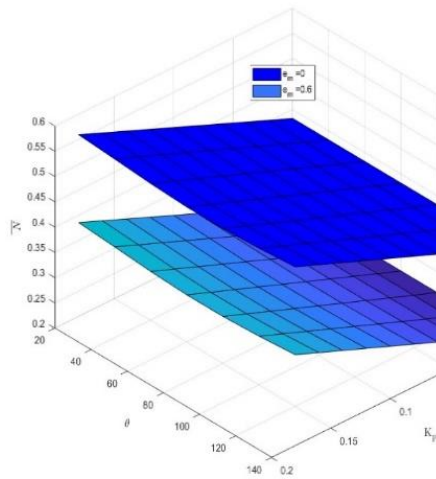


Figure IV. 19- Influence du coefficient de porosité sur la charge critique de flambage d'une poutre selon deux modèles micromécaniques ; $\theta = 30^\circ$.

EROM



M-T

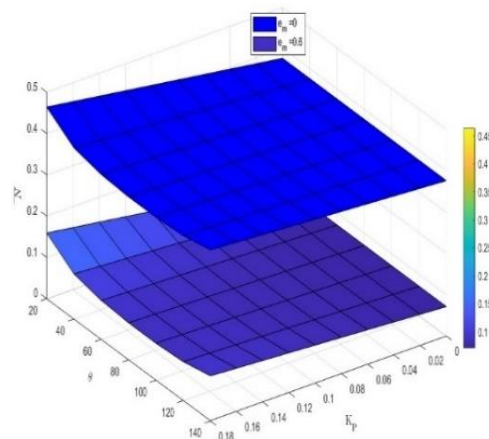
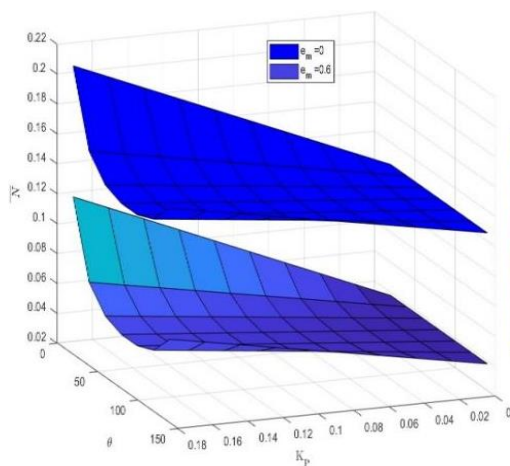


Figure IV. 20- Influence de la porosité sur la charge critique de flambement des poutres FG-CNT avec une fondation variable sinusoïdal orthotrope, en utilisant les modèles EROM et M-T.

IV.3.3.3. Effets de la distribution Non-Linéaires des CNT sur le flambement

Le Tableau IV.15 présente les variations des NDCBL de la poutre FG-CNTRC en fonction du schéma de distribution n-FGX, pour différents exposants de la fraction volumique non linéaire des CNT (n) et une fraction volumique $V_{cnt} = 0.17$, avec et sans fondation, Pour un rapport d'élanement $L/h = 15$. On note que l'existence de la fondation augmente les NDCBL d'une poutre, ce qui signifie, plus de rigidité veut dire augmentation de la fréquence.

On note, aussi que l'augmentation du coefficient de non-linéarité n de la distribution des CNT induit à l'augmentation des charges critiques de flambement pour une poutre avec ou sans fondation.

Tableau IV. 15-Premiers trois NDCBL des poutres FG-CNTRC suivant une distribution n-FGX.

V_{cnt}	(K_w, K_p)	n	Λ_{cr11}	Λ_{cr22}	Λ_{cr33}
0.17	(0, 0)	1	0.2047	0.4180	0.5254
		2	0.2309	0.4454	0.5462
		3	0.2474	0.4624	0.5593
		4	0.2589	0.4745	0.5689
		5	0.2676	0.4841	0.5768
	(0.1, 0.02)	1	0.2398	0.4416	0.5470
		2	0.2660	0.4690	0.5678
		3	0.2824	0.4859	0.5809
		4	0.2940	0.4981	0.5905
		5	0.3026	0.5077	0.5983

La figure IV.21 illustre la variation des NDCBL des FG-CNTRC présentant un motif de distribution n-FGX, avec et sans EF, en fonction du nombre de modes. Il est évident qu'à mesure que le nombre de modes augmente, les NDCBL augmentent également. De plus, le cinquième mode génère le NDCBL le plus significatif, en contraste avec les autres valeurs de n . selon le rapprochement des courbes, on remarque que pour les premières valeurs de n l'écart d'augmentation des NDCBL est significatif ; mais lorsque la non-linéarité augmente l'écart d'augmentation des NDCBL soit très petit, jusque imaginer des valeurs de NDCBL sensiblement constantes pour des valeurs de n trop grandes.

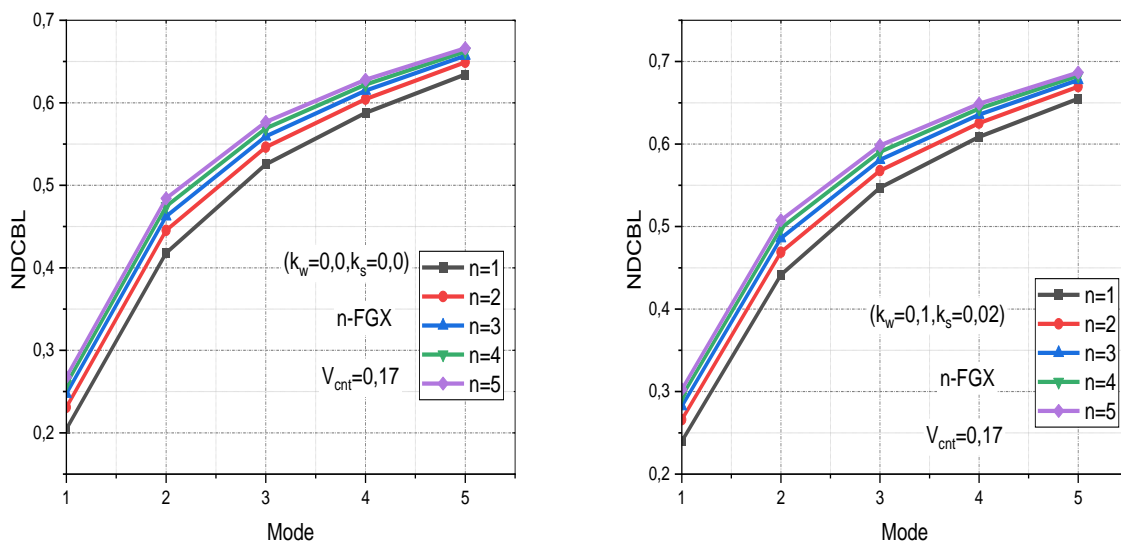


Figure IV. 21-Variation des NDCBL des FG-CNTRC présentant un motif de distribution n-FGX, avec et sans EF, en fonctions du nombre de modes ($V_{cri} = 0.17$).

IV.4. Analyse des déplacements transversales

Dans cette dernière section, nous avons étudié le comportement en flexion statique (transversale) d'une poutre FG-CNT, avec et sans porosité. Nous avons analysé l'influence de charges uniformes et sinusoïdales appliquées à une poutre avec et sans fondation.

IV.4.1. Comparaison des modèles de Mori-Tanaka et de Voigt pour l'analyse de la stabilité d'une poutre FG-CNT

Le tableau IV.16 présente une comparaison entre les deux modèles matériels micromécaniques des poutres FG-CNT en déplacements transverse sous deux types de chargements statiques ; les renforts incrustés sont de type FG-UD, comme nous avons opté pour la théorie quasi-3D qui tiens compte de l'effet du stretching comparée à ceux de la référence [4] qui tient compte de la théorie TSDT. L'étude porte sur des poutres, avec et sans fondations élastiques, soumises à des charges sinusoïdales et uniformément réparties, en faisant varier les rapports d'élancement (L/h) et en utilisant trois fractions volumétriques différentes de CNT. Il est évident que les poutres reposant sur des bases élastiques affichent des déplacements inférieurs à ceux des poutres sans fondation élastique, indépendamment du rapport L/h . De plus, l'augmentation de ce rapport entraîne une réduction du déplacement en flexion donné par la formule non-dimensionnelle donnée dans l'équation IV-3 ; ce qui impose un produit de la flèche dimensionnelle par h^3 et une division par L^4 , ce qui donne un déplacement réduit pour des poutre

élançées. On remarque aussi qu'avec l'augmentation du pourcentage V_{cnt}^* il y'a une diminution de la flèche, ce qui laisse dire que l'augmentation de la fraction du CNT augmente la rigidité de la poutre, ceci est valable quel que soit le type de chargement. On note aussi que les résultats de Wattanasakulpong and Ungbhakorn [4] sont en excellent accord avec le model de Voigt modifié ; tandis que la distribution de MT donne des flèches plus grandes dues à l'effet de l'orientation des nanotubes present dans ce modèle.

Tableau IV. 16- Comparaison des déplacements des poutres FG-UD sous charges uniformes et sinusoïdales modélise selon deux modèles micromécaniques sur des fondations élastiques.

Charge uniforme							
V_{cn}^*	L/h	$K_w = 0, K_p = 0$			$K_w = 0.1, K_p = 0.02$		
		Ref.(a)	EROM	M-T	Ref.(a)	EROM	M-T
0,12	10	0.704	0.704	2.396	0.594	0.589	2.396
	15	0.524	0.531	2.371	0.4	0.3994	2.371
	20	0.461	0.47	2.362	0.311	0.3097	2.362
0,17	10	0.449	0.449	1.722	0.403	0.3997	1.722
	15	0.344	0.348	1.703	0.286	0.2864	1.703
	20	0.307	0.312	1.697	0.232	0.2326	0.896
0,28	10	0.325	0.322	1.016	0.299	0.2961	0.896
	15	0.235	0.235	1.005	0.206	0.2055	0.775
	20	0.203	0.205	1.001	0.167	0.1672	0.656
Charge sinusoïdale							
0,12	10	0.562	0.559	1.888	0.475	0.468	1.14
	15	0.416	0.42	1.867	0.319	0.316	0.759
	20	0.365	0.371	1.86	0.247	0.245	0.519
0,17	10	0.358	0.356	1.356	0.321	0.317	0.922
	15	0.273	0.275	1.341	0.227	0.226	0.655
	20	0.243	0.247	1.336	0.184	0.184	0.468
0,28	10	0.26	0.256	0.8	0.239	0.235	0.626
	15	0.187	0.186	0.792	0.164	0.162	0.489
	20	0.161	0.162	0.788	0.133	0.132	0.376

Ref.(a) : Wattanasakulpong and Ungbhakorn [4]

IV.4.2. Étude paramétrique

Dans cette section, nous avons concentré notre analyse sur l'influence des différentes charges sur le déplacement, en considérant à la fois la présence et l'absence de fondation. Nous avons comparé les résultats obtenus à partir de deux modèles micromécaniques, ceux de Mori-Tanaka et de Voigt modifié, pour toutes les distributions de CNT, en tenant compte de l'effet de la porosité et autres paramètres géométriques et matérielles

IV.4.2.1. Déplacements des poutres sous différents types de charges

La Figure IV.22 présente les déplacements transversaux sans dimension des poutres FG-X sous l'effet de charges uniformes et sinusoïdales. Nous avons effectué une comparaison entre ces deux scénarios en utilisant deux fractions volumique, à savoir, 0.12 et 0.28 et en faisant

varier l'angle d'orthotropie de la fondation, en nous basant sur la théorie quasi-3D. Il est évident que les poutres se déforment davantage lorsqu'une charge uniforme est appliquée. On note que l'augmentation du degré d'orthotropie implique l'augmentation de la flèche statique

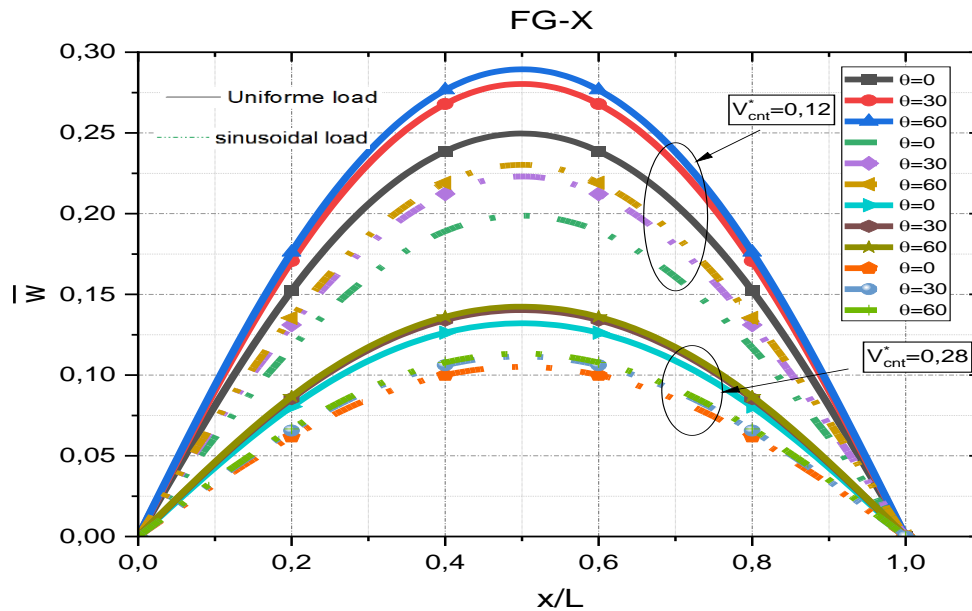


Figure IV. 22-Comparaisons des déplacements des poutres sous des charges sinusoïdale et uniformes, sur fondation orthotrope.

Le tableau IV.17 illustre l'impact de la porosité sur la flèche statique pour deux types de chargement : charges uniformes et sinusoïdales ; dans ce cas on a pris une poutre modérément élancée ($L/h = 15$). Quel que soit le type de distribution des CNT, il est clair qu'une augmentation du coefficient de porosité (e_m) entraîne également une augmentation du déplacement statique. En comparant la charge uniforme à la charge sinusoïdale, nous observons une augmentation significative du déplacement dans le cas du chargement uniforme.

La Figure IV.23 montre le déplacement en fonction de la variation de e_m . Nous avons comparé deux modèles micromécaniques, Mori-Tanaka et Voigt modifié, pour quatre distributions de CNT à un angle d'orthotropie de la fondation donnée, et une rigidité Winkler variable le long de la poutre de manière parabolique. Nous avons constaté que pour les charges uniformes et sinusoïdales, une augmentation du coefficient de porosité conduit à un accroissement du déplacement, avec une valeur maximale de déplacement enregistrée pour la distribution FG-O dans les deux cas de chargement.

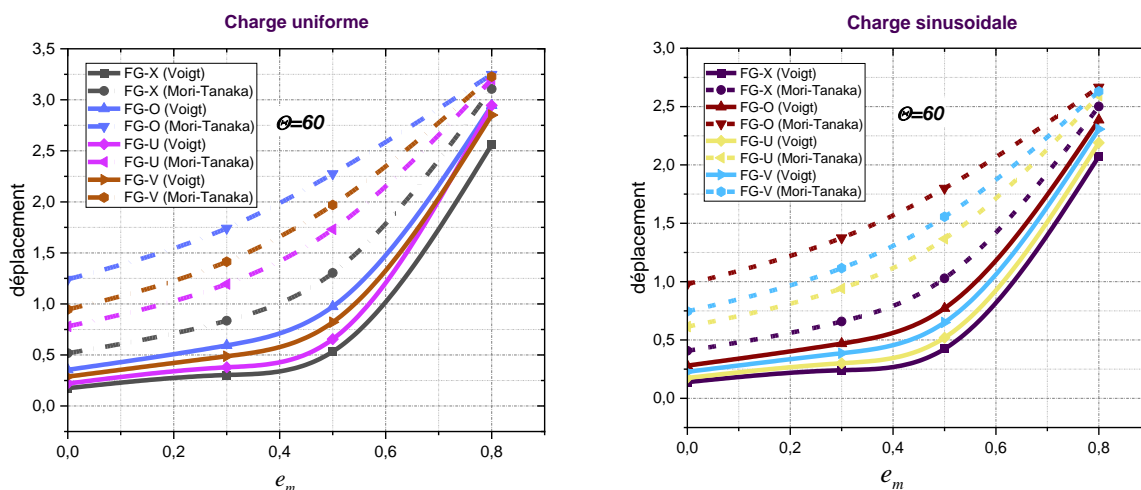


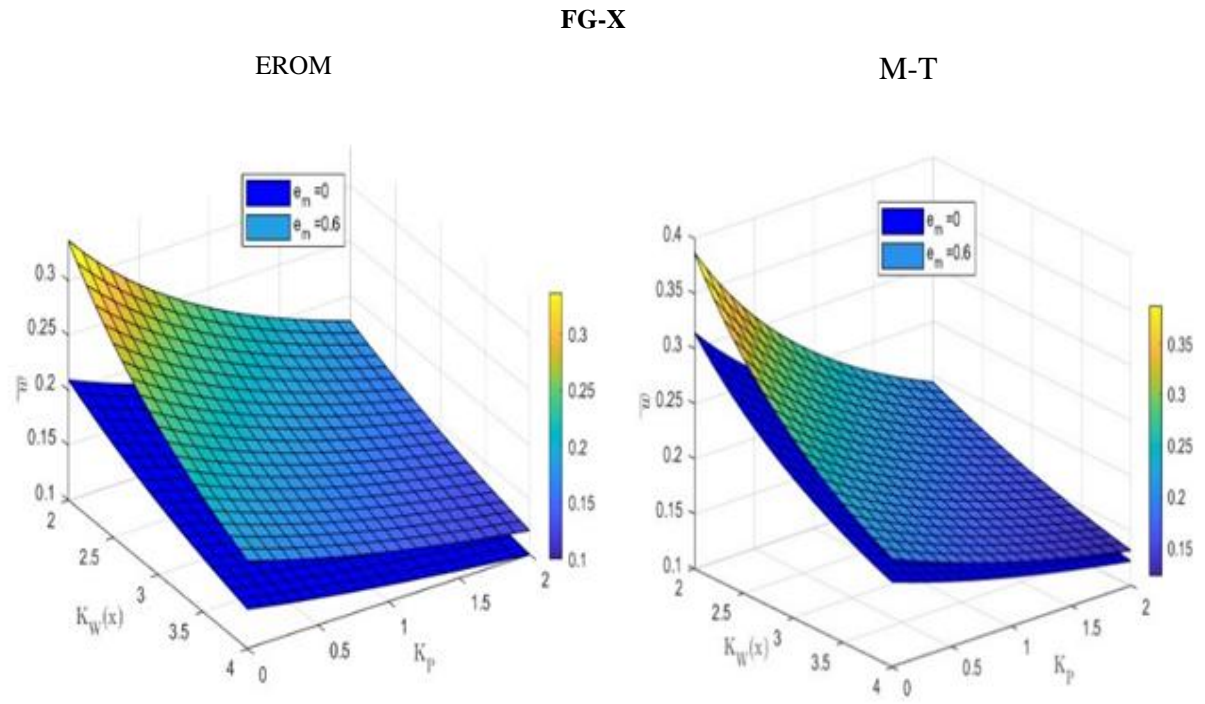
Figure IV. 23-Comparaison de l’effet des variations des modèles micromécaniques et du coefficient de porosité sur les déplacements d’une poutre FG-CNT, $\theta = 60^\circ$.

Tableau IV. 17-Comparaison entre les méthodes M-T et EROM avec différents coefficients de porosité λ sous chargement statique.

L/h	Charge uniform								
	e_m	FG-X		FG-O		FG-U		FG-V	
		EROM	E-M-T	EROM	E-M-T	EROM	E-M-T	EROM	E-M-T
0	0	0.1748	0.5171	0.3551	1.2410	0.2206	0.7802	0.2878	0.9458
	0,3	0.3038	0.8354	0.5934	1.7417	0.3795	1.1948	0.4880	1.4143
	0,5	0.5336	1.3030	0.9750	2.2759	0.6549	1.7312	0.8212	1.9695
	0,8	2.5612	3.1063	2.9451	3.2482	2.9451	3.1993	2.8509	3.2275
15	Charge sinusoïdal								
	0	0.1387	0.4076	0.2807	0.9785	0.1748	0.6148	0.2277	0.7455
	0,3	0.2412	0.6587	0.4693	1.3747	0.3008	0.9422	0.3862	1.1156
	0,5	0.4240	1.0282	0.7719	1.8001	0.5195	1.3668	0.6505	1.5559
0,8	2.0731	2.5005	2.3858	2.6658	2.1901	2.5934	2.3067	2.6301	

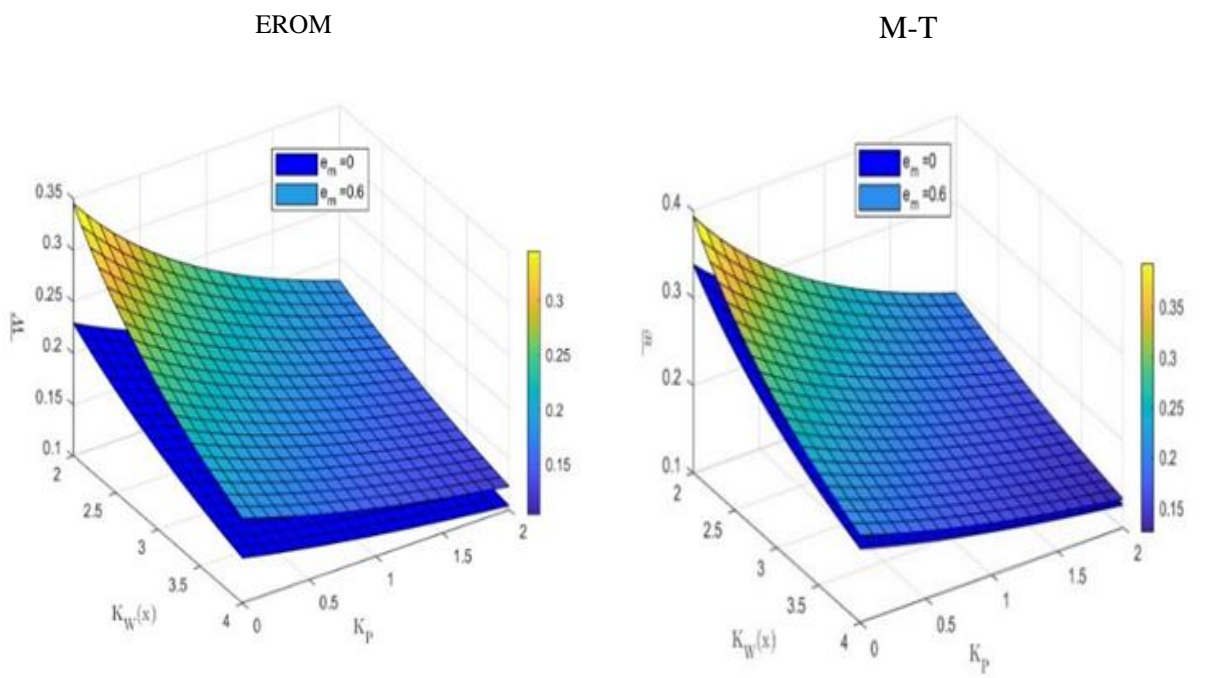
La figure IV.24 illustre l'influence des paramètres de fondation de Winkler à rigidité variable de type sinus et de Pasternak orthotrope sur les flèches des poutres FG-CNT à distributions FG-X et FG-UD. L'impact de la porosité a également été pris en compte, avec des valeurs e_m de 0 et 0.6, et une analyse comparative a été réalisée entre le modèle de Mori-Tanaka et celui de Voigt modifié.

Pour le paramètre K_w son augmentation conduit à une réduction de la flèche ; de même pour le paramètre de Pasternak. Il y'a lieu de dire que plus de porosité induit à des flèches plus grandes ; ceci est vrai dans la mesure où la porosité réduit la rigidité de la poutre.



(a)

FG-UD



(b)

Figure IV. 24-Influence de la porosité sur les déplacements des poutres renforcées en CNT avec une fondation sinusoïdale AOP. ($\theta = 60^\circ, V_{cnt} = 0.12$).

IV.5. Conclusion

Ce chapitre a exploré en profondeur les caractéristiques de vibration naturelle, du flambement et du déplacement flexionnel des poutres FG-CNT sur des fondations élastiques, en utilisant la théorie de déformation en cisaillement quasi-3D. Les résultats mettent en lumière l'impact significatif de la porosité, de l'orthotropie de la fondation et de ces types sur le comportement dynamique et statique des poutres.

Les modèles micromécaniques, notamment ceux d'Eshelby-Mori-Tanaka et celle de Voigt modifiée, ont montré des résultats comparables, mais des variations ont été notées selon les conditions. L'étude a également révélé que la fondation de Winkler sinusoïdale offre la meilleure résistance au flambement et aux vibrations. Cependant, sous une charge uniforme, elle présente le déplacement le plus élevé, soulignant l'importance du choix de fondation dans la conception des poutres FG-CNT. En conclusion, la théorie proposée s'est avérée efficace et précise pour prédire le comportement en flexion, flambement et vibration des poutres FG-CNT, et a validé la nouvelle formule de fondation orthotrope Pasternak ainsi que la fondation variable de Winkler.

Conclusion

Générale

IV.6. Conclusion Générale

Cette thèse s'est attachée à l'analyse détaillée des comportements dynamiques, statiques et de flambement des poutres fonctionnellement graduées renforcées par des nanotubes de carbone (FG-CNTRC), reposant sur des fondations élastiques variables, y compris les couches orthotropes de Pasternak. En adoptant la théorie quasi-3D de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), les effets de la porosité, des schémas de distribution des CNT et des propriétés des fondations ont été intégrés pour une compréhension approfondie des interactions mécaniques. Les résultats obtenus éclairent les mécanismes sous-jacents qui influencent les performances des structures composites renforcées, tout en offrant des perspectives pour leur optimisation dans des applications techniques.

Les conclusions principales sont présentées suivant trois axes :

L'étude du comportement dynamique met en évidence l'influence des distributions de CNT, des fondations et de la porosité sur les fréquences naturelles

Les fréquences naturelles de vibration (NDF) sont significativement affectées par les schémas de distribution des CNT, les fondations élastiques et la porosité. La distribution FG-X, qui concentre les CNT aux surfaces externes, génère les fréquences les plus élevées grâce à une rigidité accrue, tandis que la distribution FG-O montre des performances plus faibles. L'augmentation du rapport L/h entraîne une diminution des NDF, traduisant une perte de rigidité dynamique pour les poutres élancées.

Les fondations élastiques variables, en particulier celles de Winkler et Pasternak orthotropes avec une variation sinusoïdale, arguement significativement les fréquences naturelles. Une porosité accrue réduit les fréquences naturelles.

Le comportement statique révèle une augmentation des déplacements sous charge en fonction de la porosité et des paramètres des fondations

Les déplacements sous des charges uniformes ou sinusoïdales augmentent avec le taux de porosité, quelle que soit la distribution des CNT. Parmi ces distributions, FG-V montre les déplacements les plus élevés, tandis que FG-X offre une meilleure résistance aux déformations grâce à une rigidité concentrée sur les surfaces externes.

Les fondations à rigidité variable, comprenant une couche de Pasternak orthotrope, en particulier avec une variation sinusoïdale, réduisent de manière significative les déplacements.

Cette réduction est accentuée par des coefficients de rigidité élevés, garantissant une meilleure stabilité sous charge.

Les charges critiques de flambement (NDCBL) diminuent avec l'augmentation du rapport L/h , indiquant une perte de stabilité des poutres plus élancées. La distribution FG-X, grâce à sa rigidité accrue aux surfaces externes, permet d'obtenir les charges critiques les plus élevées, tandis que FG-O présente les performances les plus faibles.

Les fondations élastiques de Pasternak orthotropes avec variation sinusoïdale augmentent considérablement les charges critiques de flambement. Ce type de fondation offre un soutien optimal, en répartissant uniformément les efforts le long de la poutre. Enfin, bien que la porosité réduise légèrement les charges critiques, cet effet reste limité par rapport à son impact sur les fréquences de vibration.

Cette étude offre un cadre théorique et pratique solide, mais de nombreuses pistes peuvent être explorées pour prolonger ces travaux :

- Intégrer les effets des variations thermiques et des défauts matériels pour des simulations plus réalistes.
- Explorer de nouveaux nanomatériaux, tels que le graphène, afin de diversifier les solutions de renforcement et d'améliorer les performances mécaniques.
- Étendre la modélisation aux structures tridimensionnelles, en intégrant des chargements dynamiques et des conditions environnementales complexes.

En conclusion, cette thèse constitue une contribution significative à l'analyse et à l'optimisation des poutres fonctionnellement graduées renforcées par des nanotubes de carbone. Les méthodologies développées et les résultats obtenus constituent une base pour la conception de structures composites avancées, adaptées à des secteurs tels que le génie civil, l'aéronautique et l'ingénierie mécanique.

Perspectives pour des travaux futurs

Les résultats obtenus fournissent une base solide pour des études futures. Parmi les pistes à explorer, on peut citer l'analyse de poutres renforcées en utilisant des distributions non-linéaires de CNT, l'impact de fondation arbitrairement orthotrope et variable ainsi que l'étude des effets de la température et des défauts matériels sur les caractéristiques mécaniques. De plus, des

matériaux nano-fillers alternatifs, tels que le graphène, pourraient être étudiés pour renforcer différentes structures.

Ces résultats offrent une compréhension détaillée et avancée des comportements vibratoires, flambement et déplacement des poutres FG-CNT, en tenant compte de la complexité des interactions entre porosité, angles d'orientation, et types de fondations élastiques.

Pour les recherches futures, il sera crucial d'explorer les effets de facteurs additionnels, tels que les variations de température ou les défauts de matériau, sur les caractéristiques mécaniques des poutres FG-CNTRC. L'intégration de matériaux de nano-revêtement alternatifs, comme le graphène, pourrait également ouvrir de nouvelles perspectives pour renforcer des structures variées. Ce travail ouvre ainsi la voie à des investigations plus poussées, visant à optimiser la performance des poutres nano-revêtues dans diverses applications techniques.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

1. Aragh, B.S., A.N. Barati, and H.J.C.P.B.E. Hedayati, *Eshelby–Mori–Tanaka approach for vibrational behavior of continuously graded carbon nanotube-reinforced cylindrical panels*. 2012. **43**(4): p. 1943-1954.
2. Kamarian, S., et al., *Eshelby-Mori-Tanaka approach for vibrational behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced plate resting on elastic foundation*. 2013. **27**: p. 3395-3401.
3. Çömez, İ. and M.H.J.A.o.A.M. Omurtag, *Contact problem between a rigid punch and a functionally graded orthotropic layer resting on a Pasternak foundation*. 2021. **91**(9): p. 3937-3958.
4. Wattanasakulpong, N. and V.J.C.M.S. Ungbhakorn, *Analytical solutions for bending, buckling and vibration responses of carbon nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundation*. 2013. **71**: p. 201-208.
5. Duc, N.D., et al., *Thermal and mechanical stability of functionally graded carbon nanotubes (FG CNT)-reinforced composite truncated conical shells surrounded by the elastic foundations*. 2017. **115**: p. 300-310.
6. Fallah, A., et al., *Semi-exact solution for nonlinear dynamic analysis of graded carbon nanotube-reinforced beam with graded shape memory wires*. 2021. **28**(6): p. 568-582.
7. Yas, M., N.J.I.J.o.P.V. Samadi, and Piping, *Free vibrations and buckling analysis of carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beams on elastic foundation*. 2012. **98**: p. 119-128.
8. Lin, F. and Y.J.A.M.M. Xiang, *Vibration of carbon nanotube reinforced composite beams based on the first and third order beam theories*. 2014. **38**(15-16): p. 3741-3754.
9. Zhang, Y.Y., et al., *On snap-buckling of FG-CNTR curved nanobeams considering surface effects*. 2021. **38**(3): p. 293-304.
10. Peng, X., et al., *Influence of the boundary relaxation on free vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams with geometric imperfections*. 2022. **233**(10): p. 4161-4177.
11. Jena, S.K., S. Chakraverty, and M.J.E.w.C. Malikan, *Application of shifted Chebyshev polynomial-based Rayleigh–Ritz method and Navier’s technique for vibration analysis of a functionally graded porous beam embedded in Kerr foundation*. 2021. **37**: p. 3569-3589.
12. Moradi-Dastjerdi, R., et al., *Buckling behavior of porous CNT-reinforced plates integrated between active piezoelectric layers*. 2020. **222**: p. 111141.
13. Loh, G.H., et al., *An overview of functionally graded additive manufacturing*. 2018. **23**: p. 34-44.
14. Koutoati, K., *Modélisation numérique du comportement statique et vibratoire des poutres sandwich viscoélastiques à gradient de propriétés*. 2020, Université de Lorraine.
15. Yeo, J.-G., Y.-G. Jung, and S.-C.J.M.L. Choi, *Design and microstructure of ZrO₂/SUS316 functionally graded materials by tape casting*. 1998. **37**(6): p. 304-311.
16. Koizumi, M.J.C.p.b.e., *FGM activities in Japan*. 1997. **28**(1-2): p. 1-4.
17. Belabed, Z., et al., *An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates*. 2014. **60**: p. 274-283.
18. Njim, E.K., M. Al-Waily, and S.H. Bakhy. *A critical review of recent research of free vibration and stability of functionally graded materials of sandwich plate*. in *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2021. IOP Publishing.
19. Koizumi, M. and M.J.M.B. Niino, *Overview of FGM research in Japan*. 1995. **20**(1): p. 19-21.
20. Swaminathan, K. and D.J.C.S. Sangeetha, *Thermal analysis of FGM plates—A critical review of various modeling techniques and solution methods*. 2017. **160**: p. 43-60.
21. Kumar, A., et al., *A numerical study on anomalous behavior of piezoelectric response in functionally graded materials*. 2018. **53**(4): p. 2413-2423.
22. Neubrand, A.J.E.o.M.S. and Technology, *Functionally graded materials*. 2001: p. 3407-3413.
23. El-Wazery, M., A.J.J.o.M. El-Desouky, and E. Science, *A review on functionally graded ceramic-metal materials*. 2015. **6**(5): p. 1369-1376.
24. Mahmoud, D., M.A.J.J.o.M. Elbestawi, and m. Processing, *Lattice structures and functionally graded materials applications in additive manufacturing of orthopedic implants: a review*. 2017. **1**(2): p. 13.
25. Xiao, X., S.J.J.o.M.S. Joshi, and Engineering, *Automatic toolpath generation for heterogeneous objects manufactured by directed energy deposition additive manufacturing process*. 2018. **140**(7): p. 071005.
26. Zhang, C., et al., *Additive manufacturing of functionally graded materials: A review*. 2019. **764**: p. 138209.
27. Sait, F., N. Saeidi, and T.J.J.o.t.M.B.o.B.M. Korkmaz, *Finite element analysis of FGM dental crowns using phase-field approach*. 2023. **138**: p. 105629.
28. Loh, H.H., *4D printing of shape-changing thermo-responsive textiles*. 2021, Brunel University London.
29. Cui, J., et al., *Three-dimensional vibration analysis of a functionally graded sandwich rectangular plate resting on an elastic foundation using a semi-analytical method*. 2019. **12**(20): p. 3401.

30. Radhamani, A., et al., *CNT-reinforced metal and steel nanocomposites: A comprehensive assessment of progress and future directions*. 2018. **114**: p. 170-187.
31. Soni, S.K., B. Thomas, and V.R.J.M.T.C. Kar, *A comprehensive review on CNTs and CNT-reinforced composites: syntheses, characteristics and applications*. 2020. **25**: p. 101546.
32. Yengejeh, S.I., S.A. Kazemi, and A.J.C.m.s. Öchsner, *Carbon nanotubes as reinforcement in composites: a review of the analytical, numerical and experimental approaches*. 2017. **136**: p. 85-101.
33. Spitalsky, Z., et al., *Carbon nanotube–polymer composites: chemistry, processing, mechanical and electrical properties*. 2010. **35**(3): p. 357-401.
34. Martone, A., et al., *The effect of the aspect ratio of carbon nanotubes on their effective reinforcement modulus in an epoxy matrix*. 2011. **71**(8): p. 1117-1123.
35. MEDANI, M., *Etude Statique et Dynamique des Structures en Polymère à Base de Nanotubes de Carbone*. 2022.
36. Rao, R.J.H., *Endotoxemia and gut barrier dysfunction in alcoholic liver disease*. 2009. **50**(2): p. 638-644.
37. ZIDOUR, M., *Etude du comportement mécanique des nanotubes en carbone entourés par une matrice polymère*. 2012.
38. Stone, A. and D.J.C.P.L. Wales, *Theoretical studies of icosahedral C60 and some related species*. 1986. **128**(5-6): p. 501-503.
39. Iijima, S.J.n., *Helical microtubules of graphitic carbon*. 1991. **354**(6348): p. 56-58.
40. Iijima, S. and T.J.n. Ichihashi, *Single-shell carbon nanotubes of 1-nm diameter*. 1993. **363**(6430): p. 603-605.
41. Fisher, F., R. Bradshaw, and L.J.A.P.L. Brinson, *Effects of nanotube waviness on the modulus of nanotube-reinforced polymers*. 2002. **80**(24): p. 4647-4649.
42. Xie, S., et al., *Mechanical and physical properties on carbon nanotube*. 2000. **61**(7): p. 1153-1158.
43. Ruoff, R.S. and D.C.J.c. Lorents, *Mechanical and thermal properties of carbon nanotubes*. 1995. **33**(7): p. 925-930.
44. !!! INVALID CITATION !!! [43-45].
45. Kumar, P.S.R., D.R. Smart, and S.J.J.J.o.A.C.S. Alexis, *Corrosion behaviour of aluminium metal matrix reinforced with multi-wall carbon nanotube*. 2017. **5**(1): p. 71-75.
46. Shah, K.A. and B.A.J.M.S.i.S.P. Tali, *Synthesis of carbon nanotubes by catalytic chemical vapour deposition: A review on carbon sources, catalysts and substrates*. 2016. **41**: p. 67-82.
47. Arora, N., N.J.D. Sharma, and r. materials, *Arc discharge synthesis of carbon nanotubes: Comprehensive review*. 2014. **50**: p. 135-150.
48. Su, Y. and Y.J.C. Zhang, *Carbon nanomaterials synthesized by arc discharge hot plasma*. 2015. **83**: p. 90-99.
49. Harris, P.J.J.C., *Solid state growth mechanisms for carbon nanotubes*. 2007. **45**(2): p. 229-239.
50. Kingston, C.T., B.J.J.o.n. Simard, and nanotechnology, *Recent advances in laser synthesis of single-walled carbon nanotubes*. 2006. **6**(5): p. 1225-1232.
51. Arepalli, S.J.J.o.n. and nanotechnology, *Laser ablation process for single-walled carbon nanotube production*. 2004. **4**(4): p. 317-325.
52. Mubarak, N., et al., *An overview on methods for the production of carbon nanotubes*. 2014. **20**(4): p. 1186-1197.
53. Jourdain, V. and C.J.C. Bichara, *Current understanding of the growth of carbon nanotubes in catalytic chemical vapour deposition*. 2013. **58**: p. 2-39.
54. Yahya, N., et al., *Synthesis of carbon nanostructures by CVD method*. 2011: p. 23-49.
55. Fidelus, J., et al., *Thermo-mechanical properties of randomly oriented carbon/epoxy nanocomposites*. 2005. **36**(11): p. 1555-1561.
56. Velasco-Santos, C., et al., *Dynamical–mechanical and thermal analysis of carbon nanotube–methyl-ethyl methacrylate nanocomposites*. 2003. **36**(12): p. 1423.
57. Poncharal, P., et al., *Electrostatic deflections and electromechanical resonances of carbon nanotubes*. 1999. **283**(5407): p. 1513-1516.
58. Soni, S.K. and B.J.M.R.E. Thomas, *Influence of TiO₂ and MWCNT nanoparticles dispersion on microstructure and mechanical properties of Al6061 matrix hybrid nanocomposites*. 2020. **6**(12): p. 1265f3.
59. Ali, A., et al., *Carbon nanotube characteristics and enhancement effects on the mechanical features of polymer-based materials and structures—A review*. 2023. **24**: p. 6495-6521.
60. Tu, Z.-c. and Z.-c.J.P.R.B. Ou-Yang, *Single-walled and multiwalled carbon nanotubes viewed as elastic tubes with the effective Young's moduli dependent on layer number*. 2002. **65**(23): p. 233407.
61. Machiels, J., *In Situ Measurement of Percolation Threshold of Conductive Fillers and Integration into a Self-Healing Elastomer*. 2017.

62. Kumar, P. and J.J.C.s. Srinivas, *Vibration, buckling and bending behavior of functionally graded multi-walled carbon nanotube reinforced polymer composite plates using the layer-wise formulation*. 2017. **177**: p. 158-170.
63. Shen, H.-S., C.-L.J.M. Zhang, and Design, *Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates*. 2010. **31**(7): p. 3403-3411.
64. Han, Y. and J.J.C.m.s. Elliott, *Molecular dynamics simulations of the elastic properties of polymer/carbon nanotube composites*. 2007. **39**(2): p. 315-323.
65. Chen, C.-H., C.-H.J.I.j.o.s. Cheng, and structures, *Effective elastic moduli of misoriented short-fiber composites*. 1996. **33**(17): p. 2519-2539.
66. Odegard, G., et al., *Constitutive modeling of nanotube-reinforced polymer composites*. 2003. **63**(11): p. 1671-1687.
67. Mori, T. and K.J.A.m. Tanaka, *Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions*. 1973. **21**(5): p. 571-574.
68. Eshelby, J.D.J.P.o.t.r.s.o.L.S.A.M. and p. sciences, *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems*. 1957. **241**(1226): p. 376-396.
69. García-Macías, E., et al., *Buckling analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced curved panels under axial compression and shear*. 2017. **108**: p. 243-256.
70. Shi, D.-L., et al., *The effect of nanotube waviness and agglomeration on the elastic property of carbon nanotube-reinforced composites*. 2004. **126**(3): p. 250-257.
71. Craveiro, D. and M.J.C. Loja, *A study on the effect of carbon nanotubes' distribution and agglomeration in the free vibration of nanocomposite plates*. 2020. **6**(4): p. 79.
72. Schulz, M., et al., *Nanotube superfiber materials: science, manufacturing, commercialization*. 2019: William Andrew.
73. Journet, C., P.J.A.p.A.M.s. Bernier, and processing, *Production of carbon nanotubes*. 1998. **67**(1).
74. Kroto, H.W., et al., *C60: Buckminsterfullerene*. 1985. **318**(6042): p. 162-163.
75. Guo, T., et al., *Self-assembly of tubular fullerenes*. 1995. **99**(27): p. 10694-10697.
76. Nikolaev, P., et al., *Diameter doubling of single-wall nanotubes*. 1997. **266**(5-6): p. 422-426.
77. Hsu, W., J. Hare, and M. Terrones, *Condensed-phase nanotubes*. 1995.
78. Hsu, W., et al., *Electrolytic formation of carbon nanostructures*. 1996. **262**(1-2): p. 161-166.
79. Dai, H.J.S.s., *Carbon nanotubes: opportunities and challenges*. 2002. **500**(1-3): p. 218-241.
80. Tarfaoui, M., K. Lafdi, and A.J.C.P.B.E. El Moumen, *Mechanical properties of carbon nanotubes based polymer composites*. 2016. **103**: p. 113-121.
81. Nikfar, B. and J. Njuguna. *Compression-after-impact (CAI) performance of epoxy-carbon fibre-reinforced nanocomposites using nanosilica and rubber particle enhancement*. in *IOP conference series: materials science and engineering*. 2014. IOP Publishing.
82. Rodríguez-González, J., et al., *Influence of the hybrid combination of multiwalled carbon nanotubes and graphene oxide on interlaminar mechanical properties of carbon fiber/epoxy laminates*. 2018. **25**: p. 1115-1131.
83. Inam, F., et al., *Multiscale hybrid micro-nanocomposites based on carbon nanotubes and carbon fibers*. 2010. **2010**(1): p. 453420.
84. Silva, H., et al., *Mixed mode interlayer fracture of glass fiber/nano-enhanced epoxy composites*. 2014. **64**: p. 211-222.
85. Borowski, E., et al., *Interlaminar fracture toughness of CFRP laminates incorporating multi-walled carbon nanotubes*. 2015. **7**(6): p. 1020-1045.
86. Ma, P.-C., et al., *Dispersion and functionalization of carbon nanotubes for polymer-based nanocomposites: A review*. 2010. **41**(10): p. 1345-1367.
87. Liu, Y., et al., *Thermal-mechanical coupling buckling analysis of porous functionally graded sandwich beams based on physical neutral plane*. 2019. **168**: p. 236-242.
88. Zghal, S., et al., *Static bending analysis of beams made of functionally graded porous materials*. 2022. **50**(3): p. 1012-1029.
89. Ashby, M., *Metal Foams: a design guide*. 2000: Butterworth-Heinemann College.
90. Mei, H., et al., *Structure design influencing the mechanical performance of 3D printing porous ceramics*. 2021. **47**(6): p. 8389-8397.
91. Antunes, M. and J.I.J.P.i.P.S. Velasco, *Multifunctional polymer foams with carbon nanoparticles*. 2014. **39**(3): p. 486-509.
92. Lian, C., et al., *The relationship between porosity and strength for porous concrete*. 2011. **25**(11): p. 4294-4298.
93. Fu, Q., E. Saiz, and A.P.J.A.f.m. Tomsia, *Bioinspired strong and highly porous glass scaffolds*. 2011. **21**(6): p. 1058-1063.

94. Veloso, F., et al., *Overview of methods and software for the design of functionally graded lattice structures*. 2022. **24**(11): p. 2200483.
95. Nian, Y., et al., *How does bio-inspired graded honeycomb filler affect energy absorption characteristics?* 2019. **144**: p. 106269.
96. Chen, D., et al., *Functionally graded porous structures: analyses, performances, and applications—a review*. 2023. **191**: p. 111046.
97. Chen, D., J. Yang, and S.J.C.S. Kitipornchai, *Elastic buckling and static bending of shear deformable functionally graded porous beam*. 2015. **133**: p. 54-61.
98. Yas, M. and M.J.A.M.M. Heshmati, *Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite beams reinforced by randomly oriented carbon nanotube under the action of moving load*. 2012. **36**(4): p. 1371-1394.
99. Djlali Djebbour, K., et al., *An enhanced quasi-3D HSDT for free vibration analysis of porous FG-CNT beams on a new concept of orthotropic VE-foundations*. 2024: p. 1-17.
100. Mohseni, A., M.J.P.o.t.I.o.M.E. Shakouri, Part L: Journal of Materials: Design, and Applications, *Vibration and stability analysis of functionally graded CNT-reinforced composite beams with variable thickness on elastic foundation*. 2019. **233**(12): p. 2478-2489.
101. Setoodeh, A., M. Shojaee, and P.J.C.P.B.E. Malekzadeh, *Vibrational behavior of doubly curved smart sandwich shells with FG-CNTRC face sheets and FG porous core*. 2019. **165**: p. 798-822.
102. Ansari, R., et al., *Vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite elliptical plates using a numerical strategy*. 2017. **60**: p. 152-161.
103. Jamal-Omidi, M., et al., *A study on nonlinear vibration behavior of CNT-based representative volume element*. 2016. **55**: p. 272-281.
104. Garg, V., et al. *Influence of CNTs grading and reinforcement on dynamic characteristics of composite Plates in thermal environment*. in *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2021. IOP Publishing.
105. Formica, G., et al., *Vibrations of carbon nanotube-reinforced composites*. 2010. **329**(10): p. 1875-1889.
106. Shams, S., B.J.A.J.f.S. Soltani, and Engineering, *Buckling of laminated carbon nanotube-reinforced composite plates on elastic foundations using a meshfree method*. 2016. **41**: p. 1981-1993.
107. Malekzadeh, P. and M.J.T.-W.S. Shojaee, *Buckling analysis of quadrilateral laminated plates with carbon nanotubes reinforced composite layers*. 2013. **71**: p. 108-118.
108. Noor, A.K. and W.S. Burton, *Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates*. 1989.
109. Kapania, R.K. and S.J.A.j. Raciti, *Recent advances in analysis of laminated beams and plates. Part I-Sheareffects and buckling*. 1989. **27**(7): p. 923-935.
110. Kant, T. and K.J.C.s. Swaminathan, *Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites—a selective review and survey of current developments*. 2000. **49**(1): p. 65-75.
111. Carrera, E.J.C.s., *An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates*. 2000. **50**(2): p. 183-198.
112. Reddy, J.J.C.s., *An evaluation of equivalent-single-layer and layerwise theories of composite laminates*. 1993. **25**(1-4): p. 21-35.
113. BELARBI, M.O., *Éléments finis pour l'analyse des structures sandwichs*. 2015.
114. BEKHOUCHE, D. and S. BEGHADALI, *Comportement mécanique des plaques FGM sandwich avec un coeur en nid d'abeille reposant sur une fondation élastique*. 2023, Université Ibn Khaldoun.
115. Timoshenko, S.P.J.T.L., Edinburgh,, D.P. Magazine, and J.o. Science, *LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*. 1921. **41**(245): p. 744-746.
116. Heyliger, P., J.J.J.o.s. Reddy, and vibration, *A higher order beam finite element for bending and vibration problems*. 1988. **126**(2): p. 309-326.
117. KHEROUBI, B., *L'étude de l'effet multi-échelle de nouveaux matériaux et application technologiques*. 2017.
118. Shimpi, R.P.J.A.j., *Refined plate theory and its variants*. 2002. **40**(1): p. 137-146.
119. Nguyen, T.-K., B.-D.J.J.o.S.S. Nguyen, and Materials, *A new higher-order shear deformation theory for static, buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich beams*. 2015. **17**(6): p. 613-631.
120. Thai, H.-T. and D.-H.J.A.M.M. Choi, *An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates*. 2012. **36**(3): p. 1008-1022.
121. Tafla, A., *Éléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches*. 2007, Reims.
122. Chabot, A., *Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches (M4)*. 1997, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
123. Reddy, J.N., *A simple higher-order theory for laminated composite plates*. 1984.

124. Afaq, K., M. Karama, and S.J.C.-r.d. Mistou, *Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches*. 2003. **13**: p. 289-292.
125. Nguyen, V.T., *Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque*. 2004, Ecole des Ponts ParisTech.
126. Carrera, E.J.C. and Structures, *On the use of the Murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and shells*. 2004. **82**(7-8): p. 541-554.
127. Tahani, M., A.J.M. Nosier, and design, *Edge effects of uniformly loaded cross-ply composite laminates*. 2003. **24**(8): p. 647-658.
128. Reddy, J.J.C.i.a.n.m., *A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates*. 1987. **3**(3): p. 173-180.
129. Suganyadevi, S. and B.J.A.J. Singh, *Assessment of composite and sandwich laminates using a new shear deformation theory*. 2016. **54**(2): p. 789-792.
130. Wan-Lee, Y.J.I.j.o.s. and structures, *Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminar/layer model*. 1994. **31**(11): p. 1549-1564.
131. Ren, J.J.C.s. and technology, *Bending theory of laminated plate*. 1986. **27**(3): p. 225-248.
132. Kassapoglou, C. and P.A.J.J.o.C.m. Lagace, *Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates*. 1987. **21**(4): p. 292-308.
133. Pagano, N.J.I.J.o.S. and Structures, *Stress fields in composite laminates*. 1978. **14**(5): p. 385-400.
134. Reddy, J., *A penalty plate-bending element for the analysis of laminated anisotropic composite plates*. 1979.
135. Ganapathi, M., M.J.F.e.i.A. Touratier, and Design, *A study on thermal postbuckling behaviour of laminated composite plates using a shear-flexible finite element*. 1997. **28**(2): p. 115-135.
136. Touratier, M.J.I.j.o.e.s., *An efficient standard plate theory*. 1991. **29**(8): p. 901-916.
137. Polit, O. and M.J.C.S. Touratier, *A multilayered/sandwich triangular finite element applied to linear and non-linear analyses*. 2002. **58**(1): p. 121-128.
138. Raju, I., J.H.J.C. Crews Jr, and Structures, *Interlaminar stress singularities at a straight free edge in composite laminates*. 1981. **14**(1-2): p. 21-28.
139. Icardi, U., A.M.J.C. Bertetto, and structures, *An evaluation of the influence of geometry and of material properties at free edges and at corners of composite laminates*. 1995. **57**(4): p. 555-571.
140. Cho, Y. and R.J.C.s. Averill, *First-order zig-zag sublaminar plate theory and finite element model for laminated composite and sandwich panels*. 2000. **50**(1): p. 1-15.
141. Desai, Y., G. Ramtekkar, and A.J.C.s. Shah, *Dynamic analysis of laminated composite plates using a layer-wise mixed finite element model*. 2003. **59**(2): p. 237-249.
142. Bui, V., et al., *Imperfect interlaminar interfaces in laminated composites: interlaminar stresses and strain-energy release rates*. 2000. **60**(1): p. 131-143.
143. Filonenko-Borodich, M.J.U.Z.M.G.U.M., *Some approximate theories of elastic foundation*. 1940. **46**: p. 3.
144. Kerr, A.D., *Elastic and viscoelastic foundation models*. 1964.
145. Hetényi, M.J., *Beams on elastic foundation: theory with applications in the fields of civil and mechanical engineering*. 1964.
146. Pasternak, P.J.G.I.L.p.S.i.A., *On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants*. 1954.
147. Pronk, A. *The pasternak foundation: an attractive alternative for the winkler foundation*. in *Fifth International Conference on Concrete Pavement Design and Rehabilitation* Purdue University, School of Civil Engineering; Federal Highway Administration; Portland Cement Association; Transportation Research Board; Indiana Department of Transportation; Federal Aviation Administration; and American Concrete Pavement Association. 1993.
148. Teodoru, I.-B. and V.J.E. Muşat, *The modified Vlasov foundation model: An attractive approach for beams resting on elastic supports*. 2010. **15**: p. 1-13.
149. Winkler, E., *Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit: mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik, für polytechnische Schulen, Bauakademien, Ingenieure, Maschinenbauer, Architekten, etc.* 1867: H. Dominicus.
150. Seguini, M., D.J.E.J.o.E. Nedjar, and C. Engineering, *Modelling of soil–structure interaction behaviour: geometric nonlinearity of buried structures combined to spatial variability of soil*. 2017. **21**(10): p. 1217-1236.
151. Wang, C.M., Y. Xiang, and Q.J.J.o.e.m. Wang, *Axisymmetric buckling of Reddy circular plates on Pasternak foundation*. 2001. **127**(3): p. 254-259.
152. Bouillon, J., *A redescription of Paragotoea bathybia Kramp 1942 (Hydroidomedusae: Corymorphidae) with a new diagnosis for the genus Paragotoea*. 1997.
153. Kerr, A.D.J.A.M., *A study of a new foundation model*. 1965. **1**(2): p. 135-147.

154. Daikh, A.A.J.M.R.E., *Temperature dependent vibration analysis of functionally graded sandwich plates resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation*. 2019. **6**(6): p. 065702.
155. Findley, W.N. and F.A. Davis, *Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials*. 2013: Courier corporation.
156. Ansari, M., et al., *Frequency analysis of finite beams on nonlinear Kelvin–Voight foundation under moving loads*. 2011. **330**(7): p. 1455-1471.
157. Andersen, L., et al., *Finite element modelling of infinite Euler beams on Kelvin foundations exposed to moving loads in convected co-ordinates*. 2001. **241**(4): p. 587-604.
158. Hardy, M.J.J.o.s. and vibration, *The generation of waves in infinite structures by moving harmonic loads*. 1995. **180**(4): p. 637-644.
159. Younesian, D., et al., *Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications*. 2019. **97**(1): p. 853-895.
160. Raychowdhury, P., *Nonlinear Winkler-based shallow foundation model for performance assessment of seismically loaded structures*. 2008: University of California, San Diego.
161. Lu, Y., *Seismic soil-structure interaction in performance-based design*. 2016, University of Nottingham.
162. Bapir, B., et al., *Soil-structure interaction: A state-of-the-art review of modeling techniques and studies on seismic response of building structures*. 2023. **9**: p. 1120351.
163. Raychowdhury, P., T.C.J.E.E. Hutchinson, and S. Dynamics, *Performance evaluation of a nonlinear winkler-based shallow foundation model using centrifuge test results*. 2009. **38**(5): p. 679-698.
164. Boulanger, R.W., et al., *Seismic soil-pile-structure interaction experiments and analyses*. 1999. **125**(9): p. 750-759.
165. Harden, C.W., *Numerical modeling of the nonlinear cyclic response of shallow foundations*. 2005: Pacific Earthquake Engineering Research Center.
166. Bapir, B., et al., *Soil-structure interaction: A state-of-the-art review of modeling techniques and studies on seismic response of building structures*. 2023.
167. Pasternak, P.J.N.-I.s.K.M., *Theory of beams on a continuous elastically rotating and elastically settling foundation*. 1937.
168. Kovalskii, B.J.I.S., Academy of Science USSR, *Stress analysis of heat exchange apparatus*. 1950: p. 6.
169. Zhang, Y.J.I.J.o.M.S., *Tensionless contact of a finite beam resting on Reissner foundation*. 2008. **50**(6): p. 1035-1041.
170. Nobili, A., *Variational approach to beams resting on two-parameter tensionless elastic foundations*. 2012.
171. Luo, W., S. Jazouli, and T.J.e.-P. Vu-Khanh, *Modeling of nonlinear viscoelastic creep of polycarbonate*. 2007. **7**(1): p. 017.
172. Hatada, T., et al., *Dynamic analysis of structures with Maxwell model*. 2000. **29**(2): p. 159-176.
173. Soukup, J. and J. Volek, *A thin rectangular viscoelastic orthotropic plate under transverse impuls loading*. 2007.
174. Muscolino, G., A.J.I.J.o.S. Palmeri, and structures, *Response of beams resting on viscoelastically damped foundation to moving oscillators*. 2007. **44**(5): p. 1317-1336.
175. Hörmann, G., et al., *Generalized solutions for the Euler–Bernoulli model with Zener viscoelastic foundations and distributional forces*. 2013. **11**(02): p. 1350017.
176. Sobhy, M.J.I.J.o.A.M., *Thermoelastic response of FGM plates with temperature-dependent properties resting on variable elastic foundations*. 2015. **7**(06): p. 1550082.
177. Attia, A., et al., *A refined four variable plate theory for thermoelastic analysis of FGM plates resting on variable elastic foundations*. 2018. **65**(4): p. 453-464.
178. Pradhan, S., T.J.J.o.S. Murmu, and Vibration, *Thermo-mechanical vibration of FGM sandwich beam under variable elastic foundations using differential quadrature method*. 2009. **321**(1-2): p. 342-362.
179. Nebab, M., et al., *Effect of variable elastic foundations on static behavior of functionally graded plates using sinusoidal shear deformation*. 2019. **12**(24): p. 809.
180. HIMEUR, N. and B. BOUCHOUICHA, *Etude de l'effet des fondations élastiques sur le comportement mécanique des structures épaisses*. 2022.
181. Jena, S.K., S. Chakraverty, and F.J.M.R.E. Tornabene, *Dynamical behavior of nanobeam embedded in constant, linear, parabolic, and sinusoidal types of Winkler elastic foundation using first-order nonlocal strain gradient model*. 2019. **6**(8): p. 0850f2.
182. Daikh, A.A., M.S.A. Houari, and M.A.J.C.S. Eltaher, *A novel nonlocal strain gradient Quasi-3D bending analysis of sigmoid functionally graded sandwich nanoplates*. 2021. **262**: p. 113347.
183. Ermis, M., et al., *Free vibration of axially FG curved beam on orthotropic Pasternak foundation via mixed FEM*. 2022. **44**(12): p. 597.

184. Golmakani, M., V.J.M.o.A.M. Zeighami, and Structures, *Nonlinear thermo-elastic bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates resting on elastic foundations by dynamic relaxation method*. 2018. **25**(10): p. 868-880.
185. Seidel, G.D. and D.C.J.M.o.m. Lagoudas, *Micromechanical analysis of the effective elastic properties of carbon nanotube reinforced composites*. 2006. **38**(8-10): p. 884-907.
186. Li, X., et al., *Reinforcing mechanisms of single-walled carbon nanotube-reinforced polymer composites*. 2007. **7**(7): p. 2309-2317.
187. Huckler, M., et al., *Investigation into the behaviour of hollow glass fibre bundles under compressive loading*. 2003. **34**(11): p. 1045-1052.
188. Librescu, L., S.-Y. Oh, and O.J.J.o.T.S. Song, *Thin-walled beams made of functionally graded materials and operating in a high temperature environment: vibration and stability*. 2005. **28**(6-7): p. 649-712.
189. Shen, H.-S. and Z.J.E.J.o.M.-A.S. Zhu, *Postbuckling of sandwich plates with nanotube-reinforced composite face sheets resting on elastic foundations*. 2012. **35**: p. 10-21.
190. Shen, H.-S.J.C.S., *Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments*. 2009. **91**(1): p. 9-19.
191. Avcar, M., L. Hadji, and O.J.A.i.n.r. Civalek, *The influence of non-linear carbon nanotube reinforcement on the natural frequencies of composite beams*. 2023. **14**(5): p. 421-433.
192. Mohammadi, M., et al., *Electro-elastic response of cylindrical sandwich pressure vessels with porous core and piezoelectric face-sheets*. 2019. **225**: p. 111119.
193. Nguyen, L.B., et al., *An isogeometric Bézier finite element analysis for piezoelectric FG porous plates reinforced by graphene platelets*. 2019. **214**: p. 227-245.
194. Hacıyev, V., et al., *On the free vibration of orthotropic and inhomogeneous with spatial coordinates plates resting on the inhomogeneous viscoelastic foundation*. 2019. **26**(10): p. 886-897.
195. Jain, R., et al., *Bending analysis of functionally graded plates resting on elastic foundation: a Rayleigh-Ritz approach and ANN method*. 2024: p. 1-19.
196. Latroch, N., et al., *Inclined crack identification in bidirectional FG beams on an elastic foundation using the h-version of the finite element method*. 2023: p. 1-7.
197. Mellal, F., et al., *On the vibration and buckling behaviors of porous FG beams resting on variable elastic foundation utilizing higher-order shear deformation theory*. 2023. **234**(9): p. 3955-3977.
198. Nebab, M., et al., *Fundamental frequencies of cracked FGM beams with influence of porosity and Winkler/Pasternak/Kerr foundation support using a new quasi-3D HSDT*. 2023: p. 1-13.
199. Frahlia, H., et al., *Assessing effects of parameters of viscoelastic foundation on the dynamic response of functionally graded plates using a novel HSDT theory*. 2023. **30**(13): p. 2765-2779.
200. Kehli, A., et al., *Dynamic characteristics analysis of functionally graded cracked beams resting on viscoelastic medium using a new quasi-3D HSDT*. 2024: p. 1-14.
201. Guerroudj, H.Z., et al., *Eigenfrequencies of advanced composite plates using an efficient hybrid quasi-3D shear deformation theory*. 2018. **22**(1): p. 121-132.
202. Hadji, L., et al., *Multi-directional functionally graded sandwich plates: buckling and free vibration analysis with refined plate models under various boundary conditions*. 2024. **12**(4): p. 65.
203. Eghbali, M., et al., *Mantari's higher-order shear deformation theory of sandwich beam with cntrc face layers with porous core under thermal loading*. 2022. **22**(16): p. 2250181.
204. Chen, W., C. Lü, and Z.J.A.m.m. Bian, *A mixed method for bending and free vibration of beams resting on a Pasternak elastic foundation*. 2004. **28**(10): p. 877-890.
205. Ying, J., C. Lü, and W.J.C.S. Chen, *Two-dimensional elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic foundations*. 2008. **84**(3): p. 209-219.
206. Ait Atmane, H., et al., *Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations*. 2017. **13**: p. 71-84.
207. Ying, J., C.F. Lü, and W.Q. Chen, *Two-dimensional elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic foundations*. Composite Structures, 2008. **84**(3): p. 209-219.
208. Belarbi, M.-O., et al., *Mechanical behavior analysis of FG-CNT-reinforced polymer composite beams via a hyperbolic shear deformation theory*. 2023. **35**(2): p. 497-520.
209. Yas, M. and N. Samadi, *Free vibrations and buckling analysis of carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beams on elastic foundation*. International Journal of Pressure Vessels/Piping, 2012. **98**: p. 119-128.