

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**Université Hassiba Benbouali Chlef**  
Faculté des Sciences et des Sciences de l'Ingénieur  
Département de Génie Mécanique

## Mémoire de Magister

*Spécialité: Génie Mécanique*  
*Option: Energétique*

Présenté par:  
**BERIACHE M'hamed**

*Thème :*

***Simulation Numérique de la Conduction de Chaleur  
en 03 Dimensions par la Méthode des Différences  
Finies en Régimes Permanent et Variable***

**Soutenue le : 12 -10-2004**

*Mention: "Très bien"*

**Devant le Jury Composé de:**

|                |  |                    |
|----------------|--|--------------------|
| Bettahar A.    | Professeur UHB - Chlef                                 | Président          |
| Benarous M.    | Maître de conférences ( <i>Doyen FSSI</i> ) UHB-Chlef  | Examineur          |
| Achour D.      | Maître de conférences ( <i>Doyen FSTSA</i> ) UHB-Chlef | Examineur          |
| Loukarfi L.    | Professeur UHB - Chlef                                 | Directeur de thèse |
| Tahar Abbas M. | M.A. Chargé de cours UHB-Chlef                         | Co-directeur       |

**Année universitaire 2004/2005**

## Dédicaces

Je dédie ce mémoire,

À  
*ma mère,*  
*mon père,*  
*ma sœur,*  
*mon frère.*

## **R e m e r c i e m e n t s**

Je tiens à remercier particulièrement mon directeur de thèse, Professeur L. Loukarfi ainsi que mon co-directeur de thèse Mr. M.Tahar Abbes pour l'assistance qu'ils m'ont accordée durant ce projet de longue haleine. Quelques lignes ne suffiront évidemment pas à exprimer l'étendue de ma gratitude à leur égard.

Je remercie aussi, les autres membres du Département de Génie Mécanique qui ont chacun à leur manière fait tout ce qui était faisable pour que cette thèse voit le jour dans les meilleures conditions et plus particulièrement : Le professeur A. Bettahar, Dr. A. Zaaraoui, M. Mendas pour leur conseils, avis techniques et soutien moral de tous les instants et leur faculté d'écoute.

Je tenais à remercier aussi le chef de département de génie mécanique, M. F. Fekaoui pour avoir su me faciliter la tâche dès le premier abord.

Un grand merci à tous ceux qui ont accompagné de près ou de loin cette aventure (car c'en est une !), ainsi qu'à toutes les promotions de Magister que j'ai connues.

Je remercie les membres du jury et son président pour l'effort qu'ils auront à fournir pour lire ce mémoire et juger de sa qualité.

Enfin, mes parents, mon frère et ma sœur, à qui je dédie ce travail, thésard ou pas, pour eux rien ne changera...merci.

# S o m m a i r e

|  |    |
|--|----|
| <b>Introduction</b> .....  | 01 |
| <br><b>Chapitre I: Équations de base de transfert thermique</b>          |    |
| I-1 Définition .....   | 03 |
| I-2 Équations du transfert thermique .....                               | 04 |
| I-3 Établissement de l'équation différentielle .....                     | 08 |
| I-4 Conditions aux limites .....   | 13 |
| I-5 Concept de la résistance thermique .....                             | 15 |
| <br><b>Chapitre II : Méthodes numériques</b>                             |    |
| II-1 Méthode des différences finies .....                                | 20 |
| II-1-a- Discrétisation de l'équation différentielle de la chaleur .....  | 21 |
| II-2 Conduction de Chaleur en 2-Dimensions .....                         | 24 |
| II-2-1 Méthodes Numériques en Régime Permanent .....                     | 24 |
| II-2-1-1 Maillage Numérique .....  | 25 |
| II-2-1-2 Bilan thermique .....   | 25 |
| II-2-1-3 Concept de résistance thermique .....                           | 26 |
| II-2-2 Les Méthodes Numériques en Régime Variable .....                  | 29 |
| II-3 Conduction de Chaleur en 3-Dimensions .....                         | 32 |
| II-3-1 Maillage numérique .....  | 32 |
| II-3-2 Résistances thermiques .....                                      | 32 |
| II-3-3 Bilans thermiques .....   | 38 |
| II-4 Conduction de chaleur en coordonnées cylindriques .....             | 39 |
| II-4-1 Maillage en coordonnées cylindriques .....                        | 39 |
| II-4-2 Résistances thermiques en coordonnées cylindriques .....          | 41 |
| II-4-3 Flux thermiques en coordonnées cylindriques .....                 | 41 |
| II-5. Les méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques .. | 42 |
| II-2 Comparaison des différentes méthodes .....                          | 42 |

|   |    |
|---|----|
| II-3 Méthode de Gauss-Seidel .....  | 43 |
| II-3-1 Algorithme de Gauss-Seidel .....                                     | 44 |
| II-3-2 Conditions de convergence .....                                      | 44 |
| II-4 Méthode de relaxation .....  | 45 |
| II-4-1 Conditions de convergence .....                                      | 45 |
| II-4-2 Critères d'arrêts des itérations de Gauss-Seidel et de Relaxation .. | 46 |
| II-4 Avantages des méthodes numériques .....                                | 46 |
| II-5 Désavantages des méthodes numériques .....                             | 46 |

### **Chapitre III : Résolution numérique de l'équation de la chaleur**

|   |    |
|---|----|
| III-1 Cas bidimensionnel .....                                  | 47 |
| III-1-1 Régime permanent .....                                  | 47 |
| III-1-1-1 Équation des nœuds intérieurs et aux frontières ..... | 48 |
| III-2 Régime non-permanent .....                                | 51 |
| III-2-1 Méthode explicite (FTCS) .....                          | 52 |
| III-2-2 Méthode implicite (IFTCS) .....                         | 53 |
| III-2 Cas tri-dimensionnel .....                                | 57 |
| III-2-1 Nouvelles températures .....                            | 57 |
| III-2-1-a Régime permanent .....                                | 58 |
| III-2-1-b Régime non-permanent .....                            | 58 |

### **Chapitre IV : Applications**

|  |    |
|--|----|
| IV-1 Introduction .....                  | 62 |
| IV- 1 Cas bidimensionnels .....          | 62 |
| IV- 2 La liste des identificateurs ..... | 62 |
| IV-3 Régimes permanent .....             | 64 |
| IV-4 Régime Variable .....               | 66 |

|  |    |
|--|----|
| IV-5 Applications .....                    | 68 |
| IV-5-1 Régime permanent .....              | 68 |
| IV-5-2 Régime non-permanent .....          | 76 |
| IV- 6 Cas tri-dimensionnels .....          | 82 |
| IV- 6-1 La liste des identificateurs ..... | 82 |
| IV- 6-2 Méthode de Calcul .....            | 83 |
| IV-6-2-1 Régime permanent .....            | 83 |
| IV-6-2-2 Régime non-permanent .....        | 83 |
| IV-7 Applications .....                    | 86 |

## **Chapitre V : Présentation des résultats**

|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| V-1 Cas bi-dimensionnel .....       | 87  |
| V-1-1 Régime permanent .....        | 87  |
| V-1-2 Régime non-permanent .....    | 97  |
| V-2 Cas tri-dimensionnel .....      | 105 |
| V-2-1 Régime permanent .....        | 105 |
| V-3 Discussions des résultats ..... | 108 |

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| <b>Conclusion</b> ..... | 110 |
|-------------------------|-----|

## **Annexes**

## **Références bibliographiques**

## Liste des Figures

| <i>Figure</i> | <i>Désignation</i>   | <i>Page</i> |
|---------------|--|-------------|
| I. 1          | Schéma indiquant le sens du flux .....   | 05          |
| I. 2          | Schéma indiquant les notions pour l'établissement de l'équation différentielle de conduction en coordonnées cartésiennes ..... | 09          |
| I. 3          | Système de coordonnées cylindriques .....  | 12          |
| I. 4          | Système de coordonnées sphériques .....  | 13          |
| I. 5          | Schéma de résistance .....   | 16          |
| I. 6          | Même flux .....  | 18          |
| I. 7          | Même écart de température .....  | 19          |
| II.1. a       | Barre unidimensionnelle divisée en éléments de différences finies .....  | 21          |
| II.1. b       | Modèle de différences finies pour un système unidimensionnel .....   | 21          |
| II. 2         | Maillage de différences finies en trois dimensions .....   | 23          |
| II. 3         | Représentation 2-D d'un modèle simulé par la méthode des différences finies .....  | 26          |
| II.4          | Schéma de discrétisation avec la méthode des différences finies .....  | 26          |
| II. 5         | La conduction en un nœud .....   | 27          |
| II. 6         | L'histoire température-temps d'un point nodale .....   | 31          |
| II. 7         | Le changement en énergie interne d'un élément de volume entourant un nœud pendant un intervalle de temps $\Delta T$ .....      | 31          |
| II. 8         | Représentation 3-D d'un modèle simulé par la méthode des différences finies .....  | 33          |
| II. 9         | Volume d'élément de résistance en 3-D .....  | 34          |
| II. 10        | Résistances thermiques reliées au nœud (i, j, k) .....   | 34          |
| II. 11        | Nœud avec condition de convection en surface .....   | 36          |
| II.12         | Nœud sur une surface isolée .....  | 36          |
| II.13         | Nœud sur un coin extérieur avec condition de convection en surface .....   | 37          |
| II.14         | Nœud sur une arête externe avec condition de convection en surface .....   | 37          |
| II.15         | Nœud sur une arête interne avec condition de convection en surface .....   | 38          |
| II.16         | Nœud sur un coin interne .....   | 38          |
| II.17         | Nœud sur un coin interne avec condition de convection en surface .....   | 39          |
| II. 18        | Maillage en sens radiale .....   | 41          |
| II.19         | Maillage en coordonnées cylindriques (r, z) .....  | 41          |
| II.20         | Maillage en coordonnées cylindriques (r, $\phi$ ) .....  | 42          |
| II.21         | Résistances thermiques autour du nœud (i, j) .....   | 42          |

| <b>Figure</b> | <b>Désignation</b>  | <b>Page</b> |
|---------------|---|-------------|
| III. 1        | Résistances thermiques entourant un nœud .....  | 49          |
| III. 2        | Nœud interne .....  | 59          |
| III. 3        | Nœud avec condition de convection en surface .....  | 60          |
| III. 4        | Nœud sur une surface isolée .....   | 61          |
| III. 5        | Nœud sur un coin extérieur avec condition de convection en surface .....                              | 61          |
| III. 6        | Nœud sur une arrête externe avec condition de convection en surface .....                             | 62          |
| III. 7        | Nœud sur une arrête interne avec condition de convection en surface .....                             | 62          |
| III. 8        | Nœud sur un coin interne .....  | 63          |
| III. 9        | Nœud sur un coin interne avec condition de convection en surface .....                                | 63          |
| IV. 1         | Plaque semi infini de verre .....   | 68          |
| IV. 2         | Maillage de la plaque semi-infinie .....  | 68          |
| IV. 3         | Plaque composée de deux matériaux .....   | 69          |
| IV. 4         | Maillage de la plaque composée .....  | 70          |
| IV. 5         | Plaque de céramique .....   | 71          |
| IV. 6         | Maillage de la plaque .....   | 71          |
| IV. 7         | Four axisymétrique .....  | 72          |
| IV. 8         | Maillage du four axisymétrique .....  | 73          |
| IV. 9         | Cheminée axisymétrique .....  | 74          |
| IV.10         | Maillage de la Cheminée axisymétrique .....   | 75          |
| IV. 11        | Plaque de céramique .....   | 76          |
| IV. 12        | Maillage de la plaque de céramique .....  | 76          |
| IV. 13        | Cylindre plein en Nickel-acier .....  | 77          |
| IV. 14        | Maillage du Cylindre plein en Nickel-acier .....  | 77          |
| IV. 15        | Mur en céramique exposé au rayonnement sur les côtés .....  | 78          |
| IV. 16        | Maillage du mur en céramique exposé au rayonnement sur les côtés .....                                | 79          |
| IV. 17        | Mur plan avec sources de chaleur exposé à la convection sur deux côtés .....                          | 80          |
| IV. 18        | Maillage du Mur plan avec sources de chaleur exposé à la convection sur deux côtés .....              | 80          |
| IV. 19        | un cube ( $L_x=L_y=L_z$ ) avec $T=1$ sur une face et $T=0$ sur les autres .....                       | 82          |
| IV. 20        | Maillage du cube ( $L_x=L_y=L_z$ ) avec $T=1$ sur une face et $T=0$ sur les autres .....              | 83          |
| IV. 21        | Un cube ( $L_x=L_y=L_z$ ) avec $T=1$ sur une face et $T=0$ , les autres faces sont adiabatiques ..... | 86          |
| IV. 22        | Maillage du cube .....  | 86          |



| <b>Figure</b> | <b>Désignation</b>  | <b>Page</b> |
|---------------|---|-------------|
| V. 1          | La répartition des isothermes à travers la plaque semi-infinie . . . . .  | 88          |
| V. 2          | Le sens de propagation de la chaleur à travers la plaque semi-infinie. . . . .  | 88          |
| V. 1          | Le champ de température ( isothermes) à travers la plaque composée. . . . .   | 90          |
| V. 2          | Les sens de propagation de la chaleur à travers la plaque composée. . . . .   | 90          |
| V. 5          | Le champ de thermique à travers la plaque de céramique. . . . .   | 92          |
| V. 6          | Les sens de propagation de la chaleur à travers la plaque de céramique. . . . .   | 92          |
| V. 7          | La répartition des isothermes à travers les murs du four axisymétrique. . . . .   | 94          |
| V. 8          | Le sens de propagation de la chaleur à travers le four axisymétrique. . . . .   | 94          |
| V. 9          | La répartition des isothermes à travers les murs une cheminée axisymétrique . . . . .   | 96          |
| V. 10         | Le sens de propagation de la chaleur à travers une cheminée axisymétrique. . . . .  | 96          |
| V. 11         | La répartition des isothermes à travers la plaque de céramique. . . . .   | 98          |
| V. 12         | Le sens de propagation de la chaleur à travers la plaque. . . . .   | 98          |
| V. 13         | La distribution de température à travers le cylindre plein en fonction du temps<br>(résultats numériques). . . . .            | 100         |
| V. 14         | la distribution de température à travers le cylindre plein en fonction du temps et en régime<br>permanent (réf. [2]). . . . . | 100         |
| V. 15         | La distribution de température à travers le mur en fonction du temps<br>(résultats numériques). . . . .                       | 102         |
| V. 16         | La distribution de température à travers le mur en fonction du temps et en régime permanent<br>(Réf [2]). . . . .             | 102         |
| V. 17         | L'évolution de température pour chaque nœud du mur plan en fonction du temps (résultats<br>numériques). . . . .               | 104         |
| V. 18         | L'évolution de température pour chaque nœud du mur plan en fonction du temps<br>(résultats réf.[2]). . . . .                  | 104         |
| V. 19         | Comparaison des résultats numériques du flux thermique avec la solution analytique . . . . .                                  | 106         |
| V. 20         | Comparaison de la solution numérique du flux thermique avec celle donnée par HEAT3 . . .                                      | 106         |
| V. 21         | L'erreur relative en fonction du nombre de maille. . . . .  | 107         |

## Liste des Tableaux

| <i>Table</i> | <i>Désignation</i>   | <i>Page</i> |
|--------------|--|-------------|
| II. 1        | Résumé de formules nodales calculées par des différences finies . . . . .  | 28          |
| II. 2        | Les résistances thermiques pour nœuds internes dans différent systèmes de coordonnées . . . . .  | 34          |
| III. 1       | Résumé de formules nodales calculées par des différences finies . . . . .  | 49          |
| III. 2       | Résumé de formules nodales calculées par des différences finies implicites . . . . .   | 54          |
| IV-1         | Identificateurs et dénominations des programmes . . . . .  | 62          |
| <b>IV-2</b>  | <b>Identificateurs et dénominations des programmes . . . . .</b>   | <b>80</b>   |
| V-1-1-1      | Conductances thermiques . . . . .  | 87          |
| V-1-1-2      | Température et flux . . . . .  | 87          |
| V-1-1-3      | Conductances thermiques . . . . .  | 89          |
| V-1-1-4      | Température et flux Température et flux . . . . .  | 89          |
| V-1-1-5      | Conductances thermiques . . . . .  | 91          |
| V-1-1-6      | Températures [2] . . . . .   | 91          |
| V-1-1-7      | Températures [Code] . . . . .  | 91          |
| V-1-1-8      | Flux thermique . . . . .   | 91          |
| V-1-1-9      | Conductances thermiques . . . . .  | 93          |
| V-1-1-10     | Températures (Après 11 itérations) . . . . .   | 93          |
| V-1-1-11     | Températures (Après 12 itérations) . . . . .   | 95          |
| V-1-2-1      | Conductances et Capacités . . . . .  | 97          |
| V-1-2-2      | Températures . . . . .   | 97          |
| V-1-2-3      | Flux thermique . . . . .   | 97          |
| V-1-2-4      | Conductances et Capacités . . . . .  | 99          |
| V-1-2-5      | Températures . . . . .   | 99          |
| V-1-2-6      | Conductances et Capacités . . . . .  | 101         |
| V-1-2-7      | Températures . . . . .   | 101         |
| V-1-2-8      | Conductances et Capacités . . . . .  | 103         |
| V-1-2-9      | Températures . . . . .   | 103         |
| V-1-2-10     | Températures (suite) . . . . .   | 103         |
| V-2-1-1      | Le flux thermique et l'erreur relative calculés en fonction du nombre de nœuds du maillage comparés à la solution analytique . . . . . | 105         |

## Nomenclature

| <i>Notation</i> | <i>Désignation et unité</i>   |
|-----------------|---|
| $A$             | Aire de la section, (m <sup>2</sup> )                                 |
| $\alpha$        | Diffusivité thermique, (m <sup>2</sup> /s)                            |
| $c$             | Chaleur spécifique, (j/kg <sup>°</sup> c)                             |
| $C(i,j)$        | Capacité thermique volumétrique, (J/(m <sup>3</sup> °c))              |
| $E_{deg}$       | Énergie générée à l'intérieur du solide, (W)                          |
| $E_{ii}$        | Énergie emmagasinée, (W)  |
| $h$             | Coefficient de convection, (W/m <sup>2</sup> °c)                      |
| $k$             | Conductivité thermique, (W/m°c)                                       |
| $L$             | Longueur du cylindre, (m)   |
| $N$             | Nombre de mailles   |
| $q_c$           | Flux de chaleur par convection, (W)                                   |
| $q_r$           | Flux de chaleur par rayonnement, (W)                                  |
| $q_x$           | Flux de chaleur suivant l'axe (x), (W)                                |
| $q_y$           | Flux de chaleur suivant l'axe (y), (W)                                |
| $q_z$           | Flux de chaleur suivant l'axe (z), (W)                                |
| $q$             | Flux de chaleur généré par une source de chaleur, (w/m <sup>3</sup> ) |
| $R_i$           | Rayon, (m)  |
| $R_{cyl}$       | Résistance thermique d'un cylindre, (°c/W)                            |
| $R_{mur}$       | Résistance thermique d'un mur, (°c/W)                                 |
| $R_{sph}$       | Résistance thermique d'une sphère, (°c/W)                             |
| $R_x$           | Résistance thermique suivant l'axe (x), (°c/W)                        |
| $R_y$           | Résistance thermique suivant l'axe (y), (°c/W)                        |
| $R_z$           | Résistance thermique suivant l'axe (z), (°c/W)                        |
| $T$             | Température, (°c ou °k)   |
| $t$             | Temps, (s)  |
| $T_h$           | Température ambiante, (°c ou °k)                                      |
| $T_f$           | Température d'un fluide, (°c ou °k)                                   |
| $T_r$           | Température de rayonnement, (°c ou °k)                                |
| $T_s$           | Température de la surface, (°c ou °k)                                 |
| $V$             | Volume, (m <sup>3</sup> )   |
| $\Delta x$      | Le pas en espace suivant, (x) (m)                                     |
| $\Delta y$      | Le pas en espace suivant, (y) (m)                                     |
| $\Delta z$      | Le pas en espace suivant, (z) (m)                                     |
| $\delta$        | Épaisseur, (m)  |
| $\rho$          | Densité du corps, (kg/m <sup>3</sup> )                                |
| $\varepsilon$   | Facteur d'émission de la surface                                      |
| $\varepsilon$   | Erreur relative   |
| $\sigma$        | Constante de Stéphan-Boltzman, (kcal/hm <sup>2</sup> )                |
| $\omega$        | Coefficient de relaxation   |
| $\Delta t$      | Le pas en temps, (s)  |
| $x, y, z$       | Coordonnées spatiales   |

## **Introduction**

Pour la plupart des problèmes de transfert de chaleur, que pose la technologie actuelle, les méthodes analytiques s'avèrent inapplicables. Cependant leur résolution nécessite l'utilisation des méthodes numériques qui permettent à tels problèmes d'être résolu rapidement. En plus, l'ingénieur modélisant le problème numériquement peut facilement voir l'effet de changements des paramètres intervenant dans le problème.

Travailler dans ce sens est beaucoup plus rapide, efficace et à tendance à être meilleur marché, qu'assembler et travailler avec l'appareillage expérimental réel.

Pour résoudre les équations différentielles relatives à la conductivité thermique, la plus utilisée est la méthode des différences finies. Ses différentes versions ont été élaborées dès les années 1930, mais leur vaste expansion ne date que de l'apparition des ordinateurs. Ces dernières années le progrès extraordinaire des ordinateurs a rendu même la méthode des différences finies comparable à celle des éléments finis [17].

En résolvant numériquement les problèmes par la méthode aux différences, il est impossible d'obtenir la solution pour tous les points d'un certain domaine de l'espace. Elle ne peut être qu'approchée, et ceci encore seulement pour un ensemble fini des points (nœuds) appelé maillage [5, 15].

L'objectif premier de ce travail est de modéliser le phénomène de conduction thermique en deux et trois dimensions par l'application de la méthode des résistances thermiques et juger sa validité.

Le concept de résistance est très utile quand la solution numérique demandée doit tenir en compte les variations de propriété du problème. En outre, beaucoup de problèmes de transfert thermique avec des conditions aux limites de convection et de rayonnement imposées peuvent être résolu facilement en utilisant ce concept de résistance.

Le second objectif de ce travail est de développer des programmes informatiques en langage *Fortran* pour simuler le modèle cité précédemment.

La simulation numérique du phénomène physique repose sur la méthode robuste des différences finies. Cette dernière permet facilement la discrétisation des équations physiques ainsi que les conditions aux limites associées.

Un autre avantage de cette méthode est qu'elle fournit une bonne compréhension du problème et facilite la modification des paramètres intervenant dans le problème, telles que des sources de chaleur.

Une gamme étendue de problèmes de transfert thermique peut être analysée en utilisant cet outil. Il y a, cependant, beaucoup de choses à prendre en considération en modélisant un problème, tel que la façon de choisir le maillage numérique, les conditions aux limites appropriées, la précision numérique, la stabilité, etc...

Beaucoup de codes commerciaux visant les mêmes objectifs existent. Ces codes utilisent des modèles numériques pauvres en matière de documentation et ne sont pas adaptables.

Une limitation dans ce travail est que seulement des coordonnées cartésiennes et cylindriques sont employées. Ceci signifie que le problème considéré doit être décrit en utilisant un maillage rectangulaire.

## **I-1 Définition**

Le sens du toucher permet de classer les corps suivant leur température, mais ce simple repérage est imprécis et ne permet pas de chasser les corps très chauds ou très froids, les physiciens ont d'abord simplement appris à repérer la température avec des thermomètres faisant intervenir la variation d'une grandeur avec la température (par exemple la dilatation d'un liquide) puis grâce aux progrès de la thermodynamique, ils ont réussi à faire de la température une grandeur mesurable.

On peut élever la température d'un corps ou le faire changer d'état en lui apportant de l'énergie par travail mécanique ou en le mettant en contact avec un corps de température très élevée. On définit ainsi un deuxième mode de transfert d'énergie: le transfert thermique.

A l'échelle macroscopique, un transfert thermique s'effectue toujours du corps chaud vers le corps froid.

On distingue trois modes de transfert thermique: par conduction, par convection et par rayonnement.

### **a- Conduction thermique**

L'écoulement de la chaleur se passe à l'intérieur d'un milieu qui peut être solide, liquide ou gazeux. Les molécules du milieu transfèrent l'énergie entre eux sans déplacement important, ainsi le mode de transfert se fait à travers un support matériel fixe.

Dans les liquides, le transfert de l'énergie se fait entre une région voisine où les molécules possèdent une énergie cinématique moyenne inférieure. Dans le cas des métaux, ce transfert se fait par diffusion d'électrons.

### **b- Convection thermique**

C'est un processus complexe de transfert d'énergie entre une surface solide et un fluide, le processus combine la conduction, l'accumulation de l'énergie et le mouvement du milieu. Il existe deux types de convection: libre (naturelle) et forcée.

### **c- Rayonnement thermique**

C'est un processus dû au phénomène d'ondes électromagnétiques. Il s'effectue dans l'univers (dans la vie) entre deux corps à des températures différentes. L'énergie transférée est appelée chaleur rayonnée, elle augmente avec la température du corps extérieur.

### **d- Combinaison des différents modes de transfert**

Ci-dessus nous avons considéré séparément les trois modes de base des échanges thermiques. Dans la réalité, les différents modes sont le plus souvent intimement liés: conduction et rayonnement dans le cas de solides non opaques (verres, matières plastiques, ..... ) ou encore conduction, convection et rayonnement dans les fluides.

Compte tenu des diverses remarques ci-dessus, on conçoit aisément que la résolution des problèmes de transfert thermique passe d'abord par une bonne connaissance des processus d'échanges élémentaires.

## **I-2 Equations du transfert thermique**

Toute étude technique significative exige une réponse chiffrée. Pour réaliser une telle étude des problèmes de transmission de chaleur, on doit examiner les lois physiques et les relations régissant les différents mécanismes de l'écoulement de chaleur.

### **a- Conduction**

La relation fondamentale de la transmission de chaleur par conduction, établit que le flux de chaleur par conduction transmis dans le matériau, est égale au produit de trois quantités:

$k$ : la conductivité thermique

$A$ : l'aire de la section à travers laquelle s'écoule la chaleur par conduction, cette section étant mesurée perpendiculairement à la direction du flux thermique.

$\frac{dT}{dx}$  : le gradient de température dans la section, c'est-à-dire le rapport de la variation de température  $T$  à la distance  $x$  parcourue par le flux thermique.

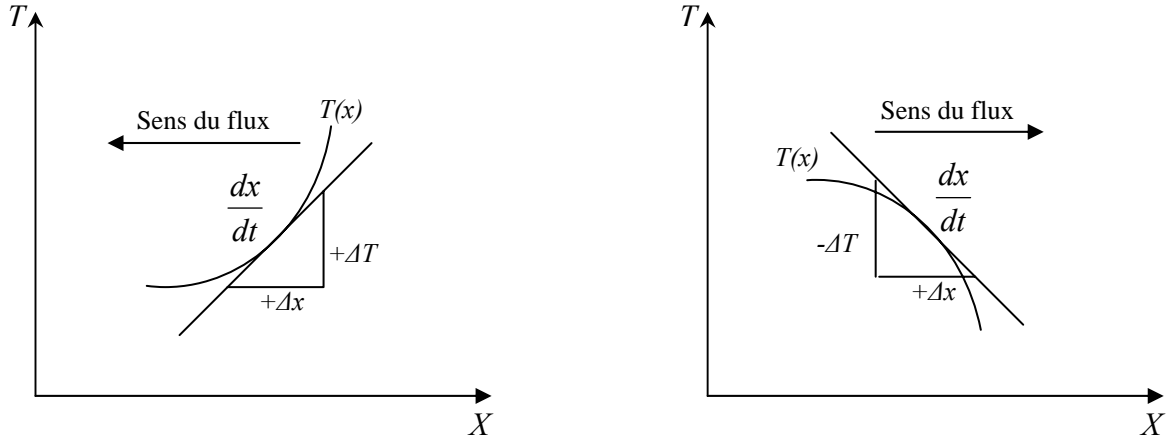


Fig.1.1. Schéma indiquant le sens du flux

Pour écrire l'équation de la conduction de chaleur sous forme mathématique, nous devons adopter un signe conventionnel. Nous considérerons que le sens des ( $x$ ) croissant serait dans le sens positif de l'écoulement de chaleur. En outre, comme le deuxième principe de la thermodynamique implique nécessairement, que la chaleur s'écoule des points les plus chauds vers les points les plus froids, le flux serait donc positif lorsque le gradient de température est négatif.

En conséquence, l'équation élémentaire de la conduction unidimensionnelle en régime stationnaire s'écrit:

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} \quad (I.1)$$

Proposée par J. B. FOURIER en 1822.

Pour l'uniformité de l'équation, le flux de chaleur,  $q_x$  est exprimé en  $kcal/h$  et l'aire  $A$  en  $m^2$ .

$\frac{dT}{dx}$ , le gradient de température est exprimé en  $^{\circ}C/m$  et  $k$ , la conductivité du matériau, indique la quantité de chaleur qui traverse une surface d'aire unité si le gradient de température est égale à l'unité. L'unité de  $k$  est  $kcal/hm^{\circ}C$ .



En général, la conductivité thermique  $k$  varie avec la température, cependant dans beaucoup de problèmes pratiques, cette variation est suffisamment faible pour qu'elle soit négligée.

## **b- Convection**

Le flux de chaleur transmise par convection entre une surface et un fluide peut être évalué par la relation:

$$q_c = h_c \cdot A \cdot \Delta T \quad (\text{I. 2})$$

Relation proposée par I. NEWTON en 1701, dans laquelle:

$q_c$ : flux de chaleur par convection.

$A$ : aire de surface de transmission de chaleur.

$\Delta T$ : différence de température entre la surface  $T_s$  et celle du fluide  $T_\infty$  loin de la surface  $S$ .

$h_c$ : unité de conductance thermique moyenne de convection superficielle de transmission de chaleur.

Il est utile de signaler que la valeur numérique de  $h_c$ , dans un système, dépend de la forme géométrique de la surface, de la vitesse et également des propriétés physiques du fluide, et souvent même de la différence de température  $\Delta T$ . En fait, ces quantités ne sont pas nécessairement constantes à la surface. Aussi le coefficient d'échange de chaleur par convection peut varier d'un point à un autre.

## **c- Rayonnement**

La quantité d'énergie quittant une surface sous forme de chaleur rayonnée dépend de la température absolue et de la nature de la surface d'un corps noir ou d'un radiateur. Elle est donnée par:

$$q_r = \sigma \cdot A \cdot T^4 \quad (\text{I. 3})$$

Cette équation a été établie expérimentalement par J. STEPHAN en 1879 et démontrée théoriquement par L. BOLTZMAN en 1884.

Avec:

$A$ : aire de surface en  $m^2$

$T$ : température absolue en degré Kelvin

$\sigma$ : constante de STEPHAN-BOLTZMANN dont la valeur avec les unités choisies, est  $4,88.10^{-8} \text{ kcal/hm}^2\text{°K}^4$ .

L'examen de cette dernière équation montre que la quantité de chaleur transmise par rayonnement à partir d'un corps noir dont la surface est portée à la température supérieure au zéro absolu est proportionnelle à la quatrième puissance de la température absolue. Alors que l'intensité de rayonnement est indépendante des conditions du milieu environnant, un transfert effectif de la chaleur rayonnée nécessite une différence de température superficielle entre deux corps qui échangent de la chaleur. Si le corps noir est entouré d'une enceinte dont la surface également noire, c'est-à-dire qu'elle absorbe toute l'énergie de rayonnement incident, la quantité de chaleur effective transmise par rayonnement est donnée par:

$$q_r = \sigma.A(T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{I. 4})$$

Où  $T_2$  est la température superficielle de l'enceinte en degrés centésimaux absolus.

Les solides réels émettent une intensité de rayonnement plus faible que celle des corps noirs. Les solides sont appelés corps gris s'ils émettent une fraction de l'intensité de rayonnement du corps noir à la même longueur d'onde et à la même température.

La quantité de chaleur effective transmise d'un corps gris à la température  $T_1$  à un corps noir à  $T_2$  entourant le premier est:

$$q_r = \sigma.\varepsilon.A(T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{I. 5})$$

Où  $\varepsilon$  est le facteur d'émission de la surface grise, égale au rapport de l'intensité rayonnée par le corps à celle émise par le corps noir à la même température.

#### **d- Energie générée à l'intérieur du solide**

A coté des énergies qui passent à travers le corps, il y a aussi l'énergie générée à l'intérieur du solide par les sources chimiques, électriques, nucléaires, et qui est transformée en énergie thermique. Cette énergie est donnée par:

$$E_{deg} = qV \quad (I. 6)$$

Où:

$E_{deg}$ : énergie dégagée

$q$ : est le flux de chaleur généré par unité de temps et de volume

$V$ : est le volume du corps.

#### **e- Energie emmagasinée**

Une partie de l'énergie qui passe à travers les solides peut être emmagasinée sous forme de variation d'énergie interne du solide. Ce phénomène est décrit par:

$$E_{ci} = \rho.c.V \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I. 7)$$

Où  $\rho$  est la densité du solide et  $e$  sa chaleur spécifique.

### **I-3 Etablissement de l'équation différentielle**

Avant d'entreprendre l'étude des problèmes particuliers, nous allons établir l'équation différentielle définissant la répartition des températures dans un corps, ensuite à l'aide de certaines hypothèses, nous transformerons cette équation après l'avoir simplifiée afin de la mettre sous des formes appropriées aux cas qui font l'objet de cette étude.

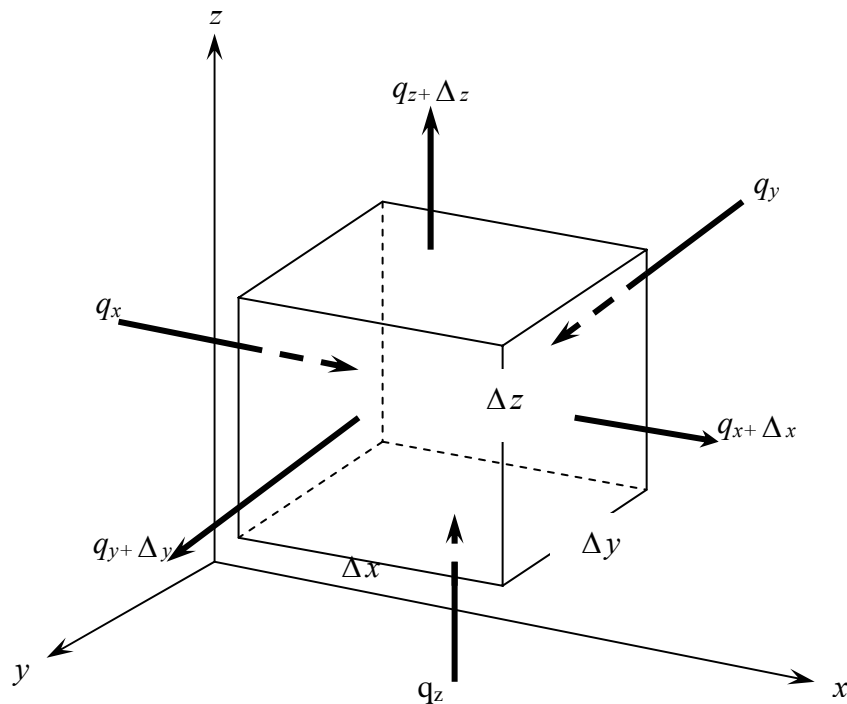


Fig. I-2 Schéma indiquant les notions pour l'établissement de l'équation différentielle de conduction en coordonnées cartésiennes [10].

Considérons un petit parallélépipède, découpé dans un corps de côté  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . L'équation définissant la répartition de température s'obtient en décrivant le principe de la conservation de l'énergie pour l'élément considéré pendant un temps  $dt$ .

Le bilan des énergies s'écrit littéralement, sous la forme:

|                         |                             |                 |                          |
|-------------------------|-----------------------------|-----------------|--------------------------|
|                         | <i>Chaleur dégagée</i>      | <i>Chaleur</i>  | <i>Chaleur due à la</i>  |
| <i>Chaleur qui</i>      | <i>dans la masse par</i>    | <i>qui sort</i> | <i>variation de</i>      |
| <i>entre pendant dt</i> | <i>des sources internes</i> | <i>pendant</i>  | <i>l'énergie interne</i> |
| +                       | =                           | +               | <i>pendant dt</i>        |
| <i>pendant dt</i>       | <i>pendant dt</i>           | <i>dt</i>       | <i>pendant dt</i>        |

$$E_{in} + E_{deg} = E_{sort} + E_{ei}$$

$$(q_x + q_y + q_z)dt + q(d_x d_y d_z)dt = (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz})dt + c \cdot \rho dT(dx dy dz) \quad (\text{I. 8})$$

Où:

$dt$ : est la variation du temps

$q_x, q_y, q_z$ : flux de chaleur qui entrent comme indiqué sur la fig. I-2

$q_{x+dx}, q_{y+dy}, q_{z+dz}$ : flux de chaleur qui sortent des faces comme indiqué sur la figure.

$c$ : chaleur spécifique du matériau

$\rho$ : densité du corps

$T$ : est la fonction de  $x, y, z$  et du temps  $t$ ;  $T=f(x, y, z, t)$

La quantité de chaleur qui entre dans la direction  $x$  est:

$$q_x = \left( -k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (\text{I. 9})$$

Celle qui sort s'écrit:

$$q_{x+dx} = \left[ -k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] dy dz \quad (\text{I. 10})$$

En retranchant le flux de chaleur qui sort de celui qui entre de l'élément de volume dans la direction  $x$ , on obtient:

$$q_x - q_{x+dx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dz \quad (\text{I. 11})$$

De même pour les directions  $y$  et  $z$ :

$$q_y - q_{y+dy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy dz \quad (\text{I. 12})$$

$$q_z - q_{z+dz} = \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (\text{I. 13})$$

En substituant ces relations dans l'équation de conservation d'énergie, et en divisant chaque terme par  $dx dy dz$ , on obtient l'équation:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q = \rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{I. 14})$$

En supposant que  $c$  et  $\rho$  sont indépendantes de la température et que  $k$  est le même dans les trois directions  $x, y, z$ .

Cette équation s'écrit:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{I. 15})$$

Cette équation est dit l'équation générale de conduction.

Où:  $a = \frac{k}{\rho \cdot c}$ , la diffusivité thermique en (m<sup>2</sup>/h) du matériau.

Si le système ne contient aucune source de chaleur, l'équation ci-dessus se réduit à l'équation de FOURIER:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{I. 16})$$

Dans le cas du régime permanent et en présence de source de chaleur, elle devient l'équation de POISSON:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{k} = 0 \quad (\text{I. 17})$$

Et pour le régime permanent en l'absence de source de chaleur, la répartition des températures doit satisfaire l'équation de LAPLACE:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{I. 18})$$

L'équation générale de conduction dans un système de coordonnées cylindriques s'écrit:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{I. 19})$$

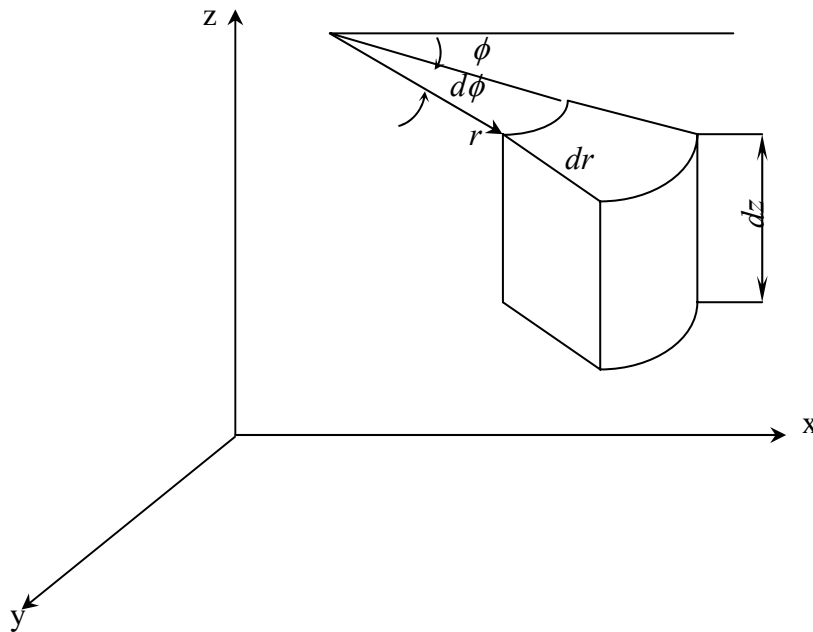


Fig. I-3 Système de coordonnées cylindriques

L'équation générale de la conduction dans un système de coordonnées sphériques s'écrit:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rT) + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \sin \psi \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{I. 20})$$

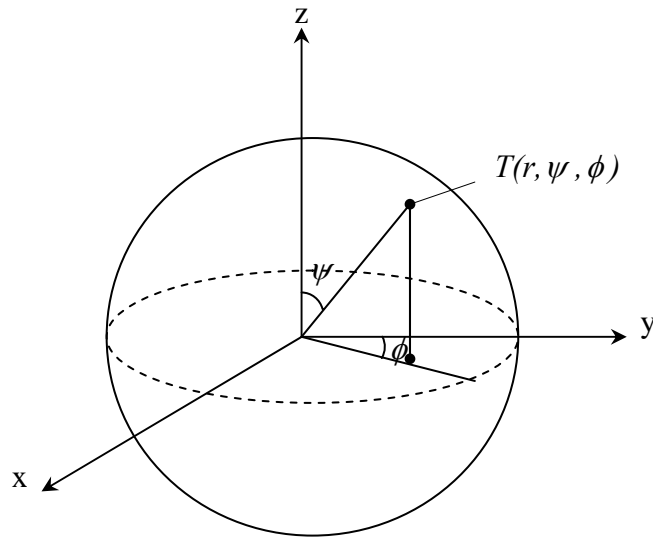


Fig. I-4 Système de coordonnées sphériques

#### I-4 Conditions aux limites

La solution analytique d'un problème de conduction en régime permanent s'exprime par une certaine fonction  $T(x, y, z, t)$  représentant la température qui devra satisfaire à l'équation différentielle propre du problème. Cette équation différentielle ne fait qu'exprimer comment les variations de température se font dans l'espace et le temps, mais pour que le phénomène soit décrit complètement, il faut que la solution trouvée satisfait aussi aux conditions aux limites (spatiales et temporelles).

##### a- Conditions initiales

Elles expriment dans les problèmes en régime non-permanent, la distribution spatiale des températures à un instant donné, le plus souvent pris comme origine de temps:

$$T(x, y, z, 0) = f(x, y, z) \quad \text{à } t=0$$



**b- Conditions aux limites spatiales**

Elles expriment comment, à partir de l'instant zéro, variant sur les frontières du corps étudié, la température ou sa dérivée, ou encore une combinaison des deux.

**b-1 Condition de Dirichlet ou du premier type**

La distribution de la température à la surface frontière considérée est donnée en fonction du temps et pour tous les points de la surface:

$$T = f_1(x, y, z, t) \quad (\text{I. 21})$$

Souvent, on aura affaire à l'un des cas particuliers, où la température en surface ne dépend que de la position du point:

$$T = f_1(x, y, z) \quad (\text{I. 22})$$

Où du temps seulement, où cette température est constante dans le temps et uniforme sur la surface, c'est-à-dire une constante dans le sens mathématique du mot.

**b-2 Condition de Neumann ou du deuxième type**

On impose la densité de flux à la surface, pour tous les points de la surface et en fonction du temps:

$$\frac{q}{A} = -k \frac{\partial T}{\partial x} = f_2(x, y, z, t) \quad (\text{I. 23})$$

**b-3 Condition de Fourier ou du troisième type**

On impose au fluide ambiant une température  $T_\infty$ , très loin et en outre un coefficient de convection  $h$  pour l'échange entre la paroi ( $x=L$  par exemple) et le fluide. La condition s'exprimera par:

$$k \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = h[T(L, t) - T_{\infty}(t)] \quad (\text{I. 24})$$

Souvent, la température  $T_s$  de la surface n'est pas connue et comme  $h$  dépend de  $T_s$ ,  $T_{\infty}$ , la vitesse,.....etc., on aura fréquemment recours aux approximations successives.

La formule la plus générale de la conduction de FOURIER sur la frontière s'écrit:

$$h(T) + k \frac{\partial T}{\partial n} = hT_{\infty} = f_3(x, y, z, t) \quad (\text{I. 25})$$

Où  $\frac{\partial T}{\partial n}$  est la dérivée effectuée le long de la normale extérieure à la surface.

### I-5 Concept de la résistance thermique

La vitesse de l'écoulement de la chaleur à travers une épaisseur de matériau sous les conditions d'un régime constant peut s'exprimer ainsi:

$$Q = A \frac{\Delta T}{R} \quad (\text{I. 26})$$

Où:

$A$ : aire de la face à travers de laquelle la chaleur s'écoule

$\Delta T$ : différence de températures entre la face chaude et la face froide du matériau

$R$ : résistance thermique

La valeur de la résistance thermique d'un morceau de matériau peut se concevoir comme étant la différence de température nécessaire pour produire à travers du morceau une unité d'écoulement de chaleur par unité de surface.

C'est analogue à la loi d'Ohm où la résistance électrique est définie comme la proportion de la baisse du voltage au courant à travers à travers une résistance.

$$\Delta V = I.R \quad \text{ou} \quad R = \frac{\Delta V}{I}$$

$$\Delta T = \frac{Q}{A}.R \quad \text{ou} \quad R = \frac{\Delta T}{Q/A}$$

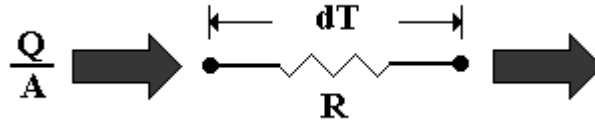


Fig. I. 5 Schéma de résistance

La résistance dépend d'un certain nombre de paramètres:

### **Géométriques**

- Aire des zones de contact
- Hauteur des aspérités
- Nombre de zones de contact par unité de surface

### **Thermiques**

- Conductivité des matériaux
- Conductivité des fluides

Qui à leur tour dépendent:

- des matériaux: leur état de surfaces (usinage, ....etc.)
- leurs propriétés mécaniques (dureté, .....
- de la pression de contact
- de la nature et de la pression du fluide interstitiel
- de la température

Chaque mode de transfert de chaleur est associé à une résistance thermique:

**a- Résistance associée à la conduction**

$$\text{Mur} \quad : \quad R_{mur} = \frac{\delta}{k.A}$$

$$\text{Cylindre:} \quad R_{cyl} = \frac{1}{2\pi.k.l} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i}$$

$$\text{Sphère} \quad : \quad R_{sph} = \frac{1}{4\pi.k \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right)}$$

Où:

$k$ : conductivité thermique du matériau

$A$ : surface traversée par le flux thermique

$\delta$ : épaisseur d'un mur

$R_i$ : rayon d'un cylindre ou d'une sphère

$l$ : longueur du cylindre

**b- Résistance associée à la convection**

Pour la convection (à la surface solide/fluide, par exemple):

$$Q = h.A |T_s - T_f| \quad (\text{I. 27})$$

Le flux  $Q$  est transféré du fluide  $T_f$  vers la surface à la température  $T_s$  ou inversement. On associe donc au processus de transfert par convection, la résistance thermique:

$$R_{cv} = \frac{|T_s - T_f|}{q} \quad \Rightarrow \quad R_{cv} = \frac{1}{h.A} \quad (\text{I. 28})$$

Avec :  $q$  la densité de flux ( $q = Q/A$ )

**c- Résistance associée au rayonnement**

$$Q = \sigma \cdot \varepsilon \cdot A (T^4 - T_r^4) = \sigma \cdot \varepsilon \cdot A (T^2 + T_r^2)(T + T_r)(T - T_r) \quad (\text{I. 28})$$

$$\text{Et de: } R_r = \frac{Q}{|T - T_r|} \Rightarrow R_r = \frac{1}{\sigma \cdot \varepsilon \cdot A (T^2 + T_r^2)(T + T_r)}$$

$\sigma$  : Constante de STEFAN-BOLTZMANN

$\varepsilon$  : émissivité

$A$  : Surface

$T_r$  : température de la source de rayonnement

Pour le rayonnement la résistance thermique ne dépend pas seulement des paramètres physiques du corps rayonné, mais aussi de la température.

**d- Association en série**

Deux systèmes de résistance thermiques  $R_1$  et  $R_2$  en série sont traversés par le même flux  $q$ .

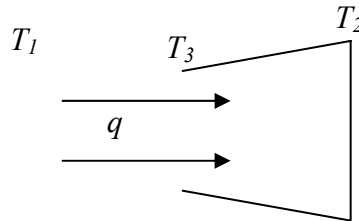


Fig. I-6 Même flux

Même flux  $\rightarrow$  additivité des températures.

$$T_1 - T_2 = (T_1 - T_3) + (T_3 - T_2) \quad (\text{I. 30})$$

$$R_e = \sum_i R_i \quad (\text{I. 31})$$

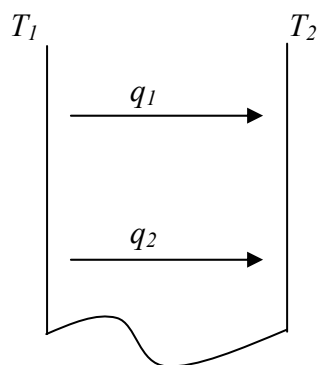
**e- Association en parallèle**

Fig. I-7 Même écart de température

Même écart de température ( $T_2 - T_1$ )  $\rightarrow$  additivité des flux  $q_1$  et  $q_2$ .

$$\frac{1}{R_e} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad (\text{I. 32})$$

Lorsque la résolution analytique d'un système d'équations différentielles devient difficile, les méthodes numériques et analogiques fournissent les réponses nécessaires.

A présent deux grandes approches numériques sont utilisées dans la résolution des équations à dérivées partiales en transfert de chaleur ; la méthode des différences finies (MDF) et la méthode des éléments finis (MEF). Chaque méthode a ces avantages qui dépendent de la nature du problème physique à résoudre. La méthode des différences finies est facile à formuler, peut être facilement étendue aux problèmes bidimensionnels et tridimensionnels. En plus avec l'arrivée de la technique du maillage automatique, la MDF est devenue comparable à la MEF [5, 17].

Dans ce chapitre on va concentrer notre attention sur la solution numérique par la méthode des différences finies, outil extrêmement utilisé en transfert thermique pour résoudre des problèmes en régimes permanent et variable dans des corps à géométrie simple ou complexe avec des conditions aux limites non simples.

On peut obtenir les équations aux différences finies par l'utilisation du concept de résistance thermique. La méthode utilisant ce concept peut présenter certains avantages, comme celui de faciliter la généralisation aux systèmes à trois dimensions spatiales, ou encore quand les propriétés thermiques sont variables [1, 2, 13].

## **II-1 Méthode des différences finies**

La méthode des différences finies est la méthode numérique la plus ancienne et fut la première utilisée pour résoudre des problèmes thermiques. Elle consiste à diviser le volume de l'espace où la solution est recherchée en un réseau de points espacés régulièrement ou irrégulièrement pour constituer ce que l'on appelle un maillage. La solution du problème est ensuite calculée en chaque point du maillage. L'approximation réside dans le remplacement de chaque dérivée de l'équation de *POISSON/LAPLACE* par une expression aux différences finies, exprimant la valeur de l'inconnue en un point en fonction de sa valeur aux points voisins (fig. II-1).

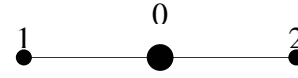
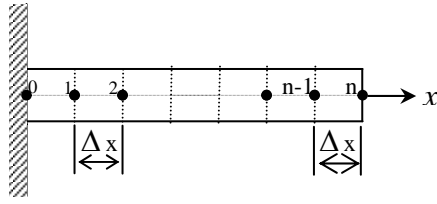


Fig. II.1.(a) Barre unidimensionnelle divisée en éléments de différences finies

Fig. II.1.(b) Modèle de différences finies pour un système unidimensionnel

L'équilibre thermique permet d'écrire en 3-D : (Fig. I-2)

$$\frac{T_{i-1,j,k} - T_{i,j,k}}{R_x(i-1,j,k)} + \frac{T_{i+1,j,k} - T_{i,j,k}}{R_x(i+1,j,k)} + \frac{T_{i,j-1,k} - T_{i,j,k}}{R_y(i,j-1,k)} + \frac{T_{i,j+1,k} - T_{i,j,k}}{R_y(i,j+1,k)} + \frac{T_{i,j,k-1} - T_{i,j,k}}{R_z(i,j,k-1)} + \frac{T_{i,j,k+1} - T_{i,j,k}}{R_z(i,j,k+1)} = 0 \quad (\text{II. 1})$$

$T_{i,j,k}$ ,  $T_{i,j-1,k}$ ,  $T_{i,j+1,k}$ ,  $T_{i-1,j,k}$ ,  $T_{i+1,j,k}$ ,  $T_{i,j,k-1}$  et  $T_{i,j,k+1}$  : sont des températures des nœuds  $(i,j,k)$ ,  $(i,j-1,k)$ ,  $(i,j+1,k)$ ,  $(i-1,j,k)$ ,  $(i+1,j,k)$ ,  $(i,j,k-1)$  et  $(i,j,k+1)$

$R_x(i-1,j,k)$  et  $R_x(i+1,j,k)$ : sont des résistances thermiques selon l'axe  $x$ .

$R_y(i,j-1,k)$  et  $R_y(i,j+1,k)$ : sont des résistances thermiques selon l'axe  $y$ .

$R_z(i,j,k-1)$  et  $R_z(i,j,k+1)$ : sont des résistances thermiques selon l'axe  $z$ .

L'équation (II. 1) représente le cas tridimensionnel, mais elle est adaptable aux géométries mono et bi-dimensionnelles.

### II-1-a- Discrétisation de l'équation différentielle de la chaleur

Considérons un solide à trois dimensions (sans source de chaleur) et dont la température  $T(x, y, z)$  satisfait l'équation de LAPLACE.

$$\frac{\partial T}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial y^2} + \frac{\partial T}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{II. 2})$$



Considérons un nœud intérieur  $P(x, y, z)$  entouré par les points 1, 2, 3, 4, 5 et 6 dont les coordonnées sont indiquées sur la figure suivante:

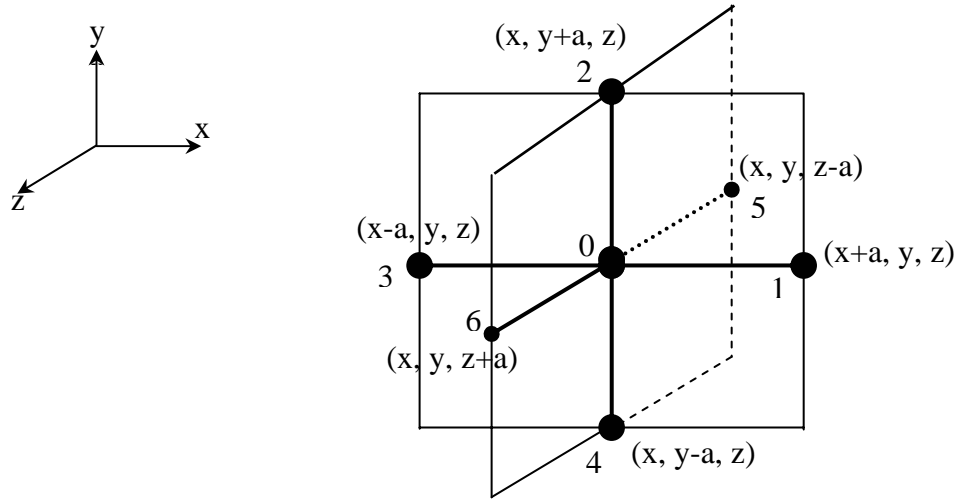


Fig. II. 2 Maillage de différences finies en trois dimensions

Exprimons au moyen de développement de Taylor les températures  $T_1$  et  $T_3$  en fonction de  $T_0$ .

$$T_1 = T_0 + a \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_p + \frac{a^2}{2} \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_p + \frac{a^3}{3} \cdot \left( \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right)_p + \dots$$

$$T_3 = T_0 + a \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_p - \frac{a^2}{2} \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_p + \frac{a^3}{3} \cdot \left( \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right)_p + \dots$$

En ajoutant membre à membre, on trouve:

$$T_1 + T_3 = 2T_0 + a^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_p + O(a^4) \quad (\text{II. 3})$$

En négligeant les termes d'ordre  $a^4$  ( $a^4$  est très petit du fait que le nombre de nœuds est suffisamment grand), on aura:

$$\left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_p = \frac{T_1 + T_3 - 2T_0}{a^2} \quad (\text{II. 4})$$

De même, on peut écrire un développement en série de Taylor pour  $T_2$  et  $T_4$ :

$$\left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_p = \frac{T_2 + T_4 - 2T_0}{a^2} \quad (\text{II. 5})$$

Et même chose pour  $T_5$  et  $T_6$ :

$$\left( \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)_p = \frac{T_5 + T_6 - 2T_0}{a^2} \quad (\text{II. 6})$$

D'après les relations ci-dessus, on peut tirer facilement l'expression de  $T_0$  en fonction des températures avoisinantes et ce selon le cas:

**Cas unidimensionnel:**

$$T_0 = \frac{T_1 + T_3}{2} \quad (\text{II. 7})$$

**Cas bi-dimensionnel:**

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{4} \quad (\text{II. 8})$$

**Cas tri-dimensionnel:**

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6}{6} \quad (\text{II. 9})$$

Ainsi l'approximation par des différences finies de l'équation (II. 2) devient:

$$\frac{T_{i+1,j,k} + T_{i-1,j,k} - 2T_{i,j,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1,k} + T_{i,j-1,k} - 2T_{i,j,k}}{(\Delta y)^2} + \frac{T_{i,j,k+1} + T_{i,j,k-1} - 2T_{i,j,k}}{(\Delta z)^2} = 0$$

Si  $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ , alors

$$T_{i+1,j,k} + T_{i-1,j,k} + T_{i,j+1,k} + T_{i,j-1,k} + T_{i,j,k+1} + T_{i,j,k-1} - 6T_{i,j,k} = 0$$

Si, on tient compte d'une source de chaleur, on ajoute le terme  $\frac{q}{k}$  dans

l'équation générale et on obtient:

$$\frac{T_{i+1,j,k} + T_{i-1,j,k} - 2T_{i,j,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1,k} + T_{i,j-1,k} - 2T_{i,j,k}}{(\Delta y)^2} + \frac{T_{i,j,k+1} + T_{i,j,k-1} - 2T_{i,j,k}}{(\Delta z)^2} + \frac{q}{k} = 0$$

Et pour  $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ ,

$$T_{i+1,j,k} + T_{i-1,j,k} + T_{i,j+1,k} + T_{i,j-1,k} + T_{i,j,k+1} + T_{i,j,k-1} + \frac{q}{k}(\Delta x)^2 - 6T_{i,j,k} = 0$$

## II-2. Conduction de Chaleur en 2-Dimensions

### II-2-1. Méthodes Numériques en Régime Permanent

Les équations qui gouvernent le phénomène de conduction bidimensionnel en régime permanent pour  $T(x, y)$  sont :

Systeme sans source de chaleur (LAPLACE):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{II. 10})$$

Systeme avec source de chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q}{k} = 0 \quad (\text{II. 11})$$

Ici  $q$  ( $\text{W/m}^3$ ) est le flux apporté par une source de chaleur.

### II-2-1-1. Maillage Numérique

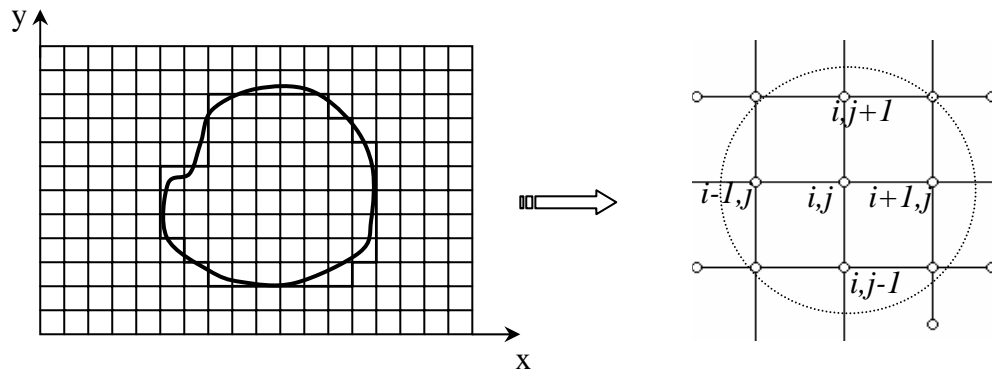


Fig. II-3 Représentation 2D d'un modèle simulé par la méthode des différences finies.

### II-2-1-2. Bilan thermique

D'après la figure ci-après en régime stationnaire sans source de chaleur, en reposant sur la loi des nœuds (KIRCHOFF): la somme des courants vers un nœud est nulle. Par analogie, et pour un système bi-dimensionnel, on écrit:

$$q_{1-0} + q_{2-0} + q_{3-0} + q_{4-0} = 0 \quad (\text{II. 12})$$

$$-k(1.\Delta y)\frac{T_0 - T_1}{\Delta x} - k(1.\Delta y)\frac{T_0 - T_3}{\Delta x} - k(1.\Delta x)\frac{T_0 - T_2}{\Delta y} - k(1.\Delta x)\frac{T_0 - T_4}{\Delta y} = 0 \quad (\text{II. 13})$$

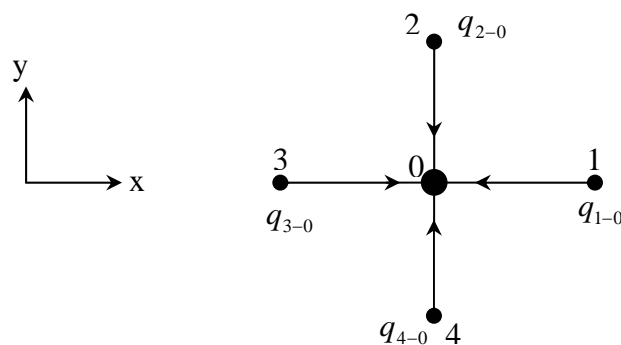


Fig. II.4. Schéma de discrétisation avec la méthode des différences finies.

### II-2-1-3. Concept de résistance thermique

Jusqu' à ce point nous avons montré comment des problèmes de conduction peuvent être résolus par des approximations de différences finies aux équations différentielles. Une équation est formulée pour chaque noeud et l'ensemble d'équations résolues pour les températures dans tout le corps. En formulant les équations nous pourrions aussi bien avoir employé un concept de résistance pour écrire le transfert thermique entre les nœuds [1]. Indiquant notre noeud d'intérêt avec ( $i$ ) souscrit et des noeuds contigus avec l'indice ( $j$ ), nous avons la situation générale d'un noeud en conduction représentée sur figure ci-après. A l'état d'équilibre la chaleur nette entrée dans le noeud ( $i$ ) doit être nulle, où [2] ;

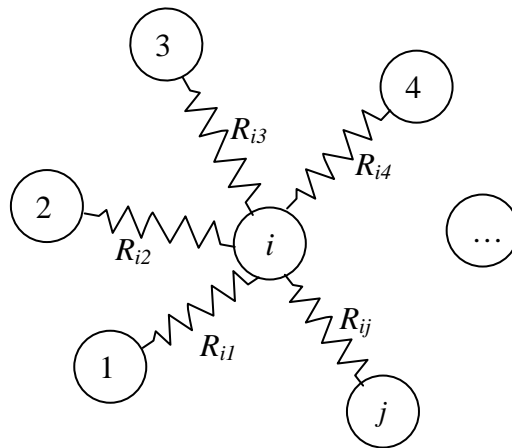


Fig. II. 5 La conduction en un nœud

$$q_i + \sum_i \frac{T_j - T_i}{R_{ij}} = 0 \quad (\text{II. 14})$$

Ce qui permet d'écrire :

$$T_i = \frac{q_i + \sum_j (T_j / R_{ij})}{\sum_j (1 / R_{ij})} \quad (\text{II. 15})$$

Où  $q_i$  représente le flux apporté à l'élément de volume en ( $i$ ) par une source de chaleur interne, ou par des mécanismes autre que la conduction et la convection (ces deux derniers étant représentés par des résistances  $R_{ij}$ ).

$R_{ij}$  représente une résistance thermique entre deux nœuds:

Soit par **conduction**  $R_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{k \cdot A_{ij}}$

Soit par **convection**  $R_{ij} = \frac{1}{h_{ij} \cdot A_{ij}}$

$\delta_{ij}$  : est la distance franchie par la conduction entre les nœuds  $i$  et  $j$

$A_{ij}$  : est la surface normale à  $\delta_{ij}$ , c'est-à-dire aux lignes de flux conductif ou convectif.

L'équation (II.14) ne fait que traduire thermiquement la loi des nœuds intérieurs:

$$\frac{T_1 - T_0}{R_x} + \frac{T_3 - T_0}{R_x} + \frac{T_2 - T_0}{R_y} + \frac{T_4 - T_0}{R_y} + q_0 = 0 \quad (\text{II. 16})$$

$$R_x = \frac{\Delta_x}{k(\Delta_y \cdot 1)} = \frac{\Delta_x}{k \cdot \Delta_y}; \quad R_y = \frac{\Delta_y}{k(\Delta_x \cdot 1)} = \frac{\Delta_y}{k \cdot \Delta_x}$$

$\Delta_x$  : distance entre deux nœuds selon l'axe x.

$\Delta_y$  : distance entre deux nœuds selon l'axe y.

Table II. 1 Résumé de formules nodales calculées par des différences finies

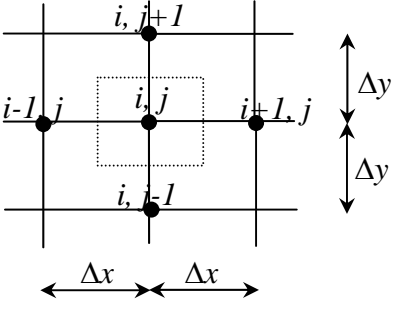
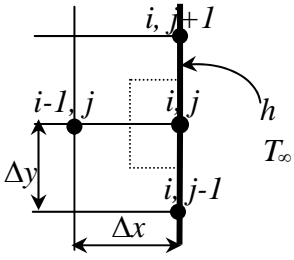
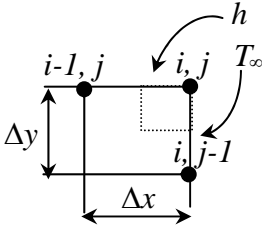
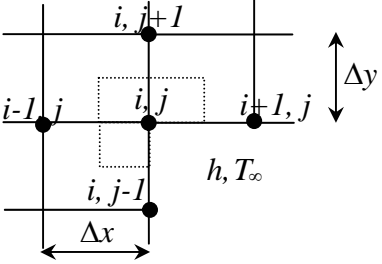
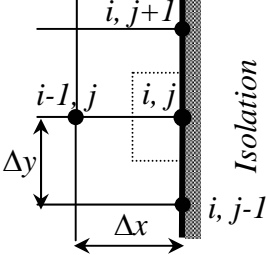
| Position du nœud  | Equation nodale & résistance thermique associée  |
|---|--|
| <p>a) Nœud Interne</p>                                   | $\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}-T_{i,j}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{R_y(i,j+1)} = 0$ <p>avec :</p> $R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k\Delta y \cdot 1} ; R_x(i+1,j) = \frac{\Delta x}{k\Delta y \cdot 1}$ $R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k\Delta x \cdot 1} ; R_y(i,j+1) = \frac{\Delta y}{k\Delta x \cdot 1}$ <p><math>\Delta z = 1</math> (l'épaisseur selon (z) égale à l'unité)</p> |
| <p>b) Nœud avec condition de convection en surface</p>  | $\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{R_y(i,j+1)} + \frac{(T_\infty - T_{i,j})}{R_x(i+1,j)} = 0$ <p>avec ;</p> $R_x(i+1,j) = \frac{1}{h\Delta y \cdot 1} ; R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k\Delta y \cdot 1}$ $R_y(i,j+1) = \frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot 1} ; R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot 1}$  |
| <p>c) Nœud sur un coin externe</p>                     | $\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_\infty - T_{i,j}}{R_y(i,j+1)} + \frac{(T_\infty - T_{i,j})}{R_x(i+1,j)} = 0$ <p>avec ;</p> $R_x(i+1,j) = \frac{2}{h \cdot \Delta y \cdot 1} ; R_y(i,j+1) = \frac{2}{h \cdot \Delta x \cdot 1}$ $R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k\frac{\Delta y}{2} \cdot 1} ; R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot 1}$  |

Table II. 1 (Suite)

|  |   |
|--|---|
| <p>d) Nœud sur un coin interne</p>            | $\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}-T_{i,j}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{R_y(i,j+1)} + h \cdot \frac{\Delta x}{2} (T_\infty - T_{i,j}) + h \cdot \frac{\Delta y}{2} (T_\infty - T_{i,j}) = 0$ <p>avec ;</p> $R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k \Delta y \cdot 1} ; R_x(i+1,j) = \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \cdot 1}$ $R_y(i,j+1) = \frac{\Delta y}{k \Delta x \cdot 1} ; R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot 1}$ |
| <p>e) Nœud sur une surface isolée (h=0)</p>  | $\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{R_y(i,j+1)} = 0$ <p>avec ;</p> $R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k \Delta y \cdot 1} ; R_x(i+1,j) = \infty$ $R_y(i,j+1) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot 1} ; R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot 1}$   |

### II-2-2. Les Méthodes Numériques en Régime Variable (Instationnaire)

Du point de vue mathématique, il s'agit des méthodes numériques appliquées aux équations aux dérivées partielles du type parabolique, où, en conduction, le temps intervient en plus les dimensions spatiales [1].

Le concept général de la méthode numérique appliquée aux problèmes instationnaires est le même que celui que nous avons rencontré précédemment pour les problèmes stationnaires : diviser la matière en régions au centre desquelles on place un nœud ; effectuer pour chacun des nœuds un bilan thermique où interviennent la température du nœud considéré, celle de ses voisins et les propriétés thermiques de la matière. En instationnaire, figurera un terme capacitif représentant l'augmentation d'énergie interne pendant un intervalle de temps.

Les équations qui gouvernent le phénomène de conduction bidimensionnel en régime variable pour  $T(x, y, t)$  sont :



Système sans source de chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II. 17})$$

Système avec source de chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II. 18})$$

Ici ;

$q$  ( $\text{W}/\text{m}^3$ ) : est le flux apporté par une source de chaleur.

$\alpha = \frac{k}{\rho c}$  ( $\text{m}^2/\text{s}$ ) est la diffusivité thermique, ( $k$ ) est le coefficient de conductivité thermique, ( $\rho$ ) est la masse volumique et ( $c$ ) est la chaleur spécifique.

La variable temporelle est, de même que les variables spatiales, discrétisée en différences finies. La figure (II. 5) montre la relation température-temps d'un nœud ( $n$ ).

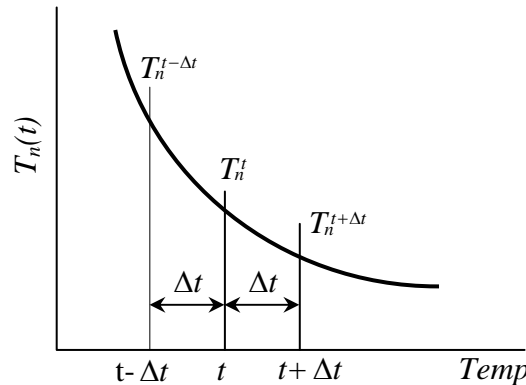


Fig. II. 6 L'histoire température-temps d'un point nodale

La dérivée première de la température par rapport au temps est discrétisée ainsi :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_n^{t+\Delta t} - T_n^t}{\Delta t} \quad (\text{II. 19})$$

La variable temps est discrétisée en des différences finies progressives.

Et par conséquent l'équation (II. 18) peut être discrétisée, ainsi :

$$\frac{T_{i+1,j,k}^t + T_{i-1,j,k}^t - 2T_{i,j,k}^t}{(\Delta x)_2} + \frac{T_{i,j+1,k}^t + T_{i,j-1,k}^t - 2T_{i,j,k}^t}{(\Delta y)_2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_{i,j,k}^{t+\Delta t} - T_{i,j,k}^t}{\Delta t} \quad (\text{II. 20})$$

Ce schéma est dit explicite (EFTCS), ou :

$$\frac{T_{i+1,j}^{t+1} + T_{i-1,j}^{t+1} - 2T_{i,j}^{t+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1}^{t+1} + T_{i,j-1}^{t+1} - 2T_{i,j}^{t+1}}{(\Delta y)^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_{i,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^t}{\Delta t} \quad (\text{II. 21})$$

Le schéma ci-dessus est dit implicite (IFTCS).

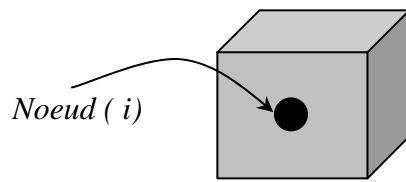
Notre but est d'écrire nos équations en utilisant le concept de résistance thermique ce qui nous mène à réécrire l'équation (II. 14) comme suit [2] :

$$q_i + \sum_j \frac{T_j^{p+1} - T_i^{p+1}}{R_{ij}} = C_i \frac{T_i^{p+1} - T_i^p}{\Delta t} \quad (\text{II. 22 a})$$

On remarque que les termes de gauche sont les mêmes que ceux de l'équation (II. 14).

Il faut noter que  $C_i$  : est la capacité thermique représentant l'augmentation d'énergie interne d'un nœud pendant un intervalle de temps  $\Delta t$  [1].

$$C_i = \rho \cdot c \cdot \Delta V_i ; \quad \Delta V_i : \text{ est l'élément de volume.}$$



$\rho =$  densité  
 $V_i =$  volume  
 $\rho V_i =$  masse  
 $c =$  chaleur spécifique  
 $\Delta T =$  changement de température

Fig. II. 7 Le changement en énergie interne d'un élément de volume entourant un nœud pendant un intervalle de temps  $\Delta T$  [24].

Le changement en énergie interne d'un élément de volume d'un nœud pendant un intervalle de temps est donné par la relation suivante :

$$\Delta U = \rho V_i c \Delta T = \rho V_i c (T_i^{t+1} - T_i^t) \quad (\text{II. 22 b})$$

Les résistances thermiques pour différentes géométries et conditions aux limites sont données au tableau (II. 1).

### II-3. Conduction de Chaleur en 3-Dimensions

Les équations qui gouvernent le phénomène de conduction tridimensionnel en régime variable pour  $T(x, y, z, t)$  sont :

Système sans source de chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II. 23})$$

Système avec source de chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II. 24})$$

Ici  $q$  ( $\text{W/m}^3$ ) est le flux apporté par une source de chaleur.  $a = \frac{k}{\rho c}$  ( $\text{m}^2/\text{s}$ ) est la capacité thermique volumétrique.

#### II-3-1. Maillage numérique

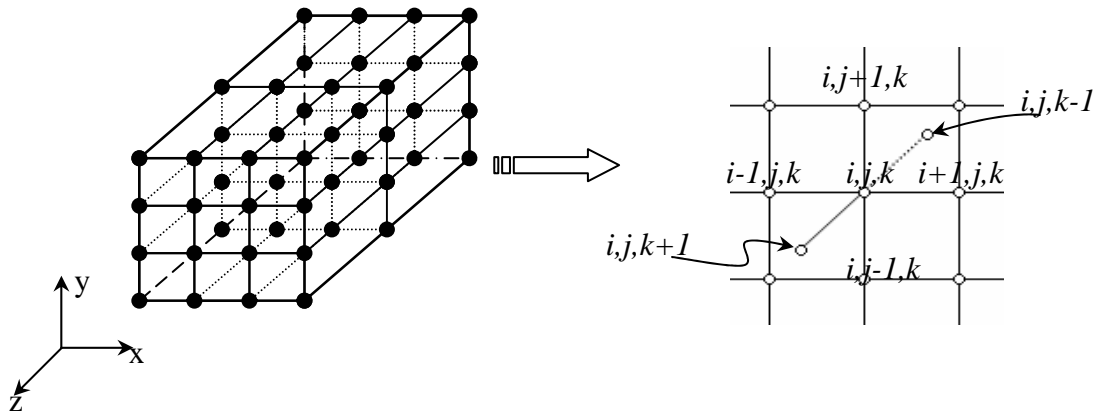


Fig. II-8 Représentation 3D d'un modèle simulé par la méthode des différences finies.

#### II-3- 2. Résistances thermiques

L'élément volumique  $(x, y, z)$  est coupé en un réseau de mailles dans l'espace, où chaque nœud a six résistances thermiques, deux selon chaque axe.

Soit  $P(i, j, k)$  le nœud d'intérêt.

$R_x(i-1, j, k)$  : est la résistance thermique selon ( $x$ ) entre les nœuds ( $i, j, k$ ) et ( $i-1, j, k$ )  
 $R_x(i+1, j, k)$  : est la résistance thermique selon ( $x$ ) entre les nœuds ( $i, j, k$ ) et ( $i+1, j, k$ )

Même chose pour les autres axes ;

$R_y(i, j-1, k)$  et  $R_y(i, j+1, k)$  sont des résistances thermiques selon l'axe  $y$ .

$R_z(i, j, k-1)$  et  $R_z(i, j, k+1)$  sont des résistances thermiques selon l'axe  $z$ .

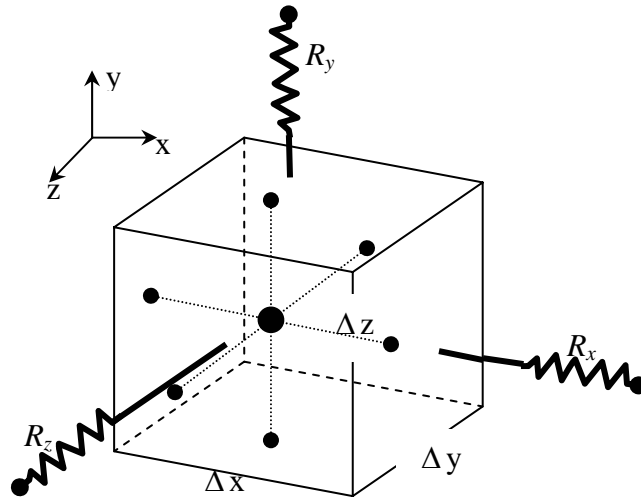


Fig. II. 9 Volume d'élément de résistance en 3-D [2].

On appelle :

$T(i, j, k)$ : température au nœud  $P(i, j, k)$

$R(i, j, k)$ : Résistance thermique du nœud  $P(i, j, k)$

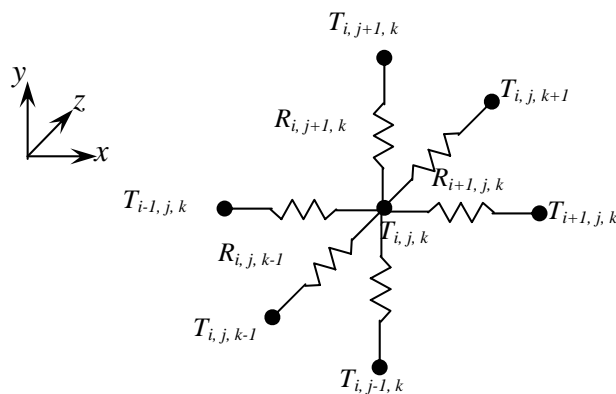


Fig. II. 10 Résistances thermiques reliées au nœud ( $i, j, k$ ).

En appliquant la loi des bilans thermiques ou l'équation des nœuds (II. 18), on peut donner l'expression de résistance thermique du nœud ( $i, j, k$ ) et les nœuds du voisinage.

**Tableau II. 2** Les résistances thermiques pour nœuds internes dans différent systèmes de coordonnées

|                              | Coordonnées<br><i>Cartésiennes</i>           | Coordonnées<br><i>Cylindriques</i>                                     | Coordonnées<br><i>Sphériques</i>  |
|------------------------------|--|--|---|
| Nomenclature                 | $x, i$                                       | $r, i$   | $r, i$  |
| Et indices                   | $y, j$<br>$z, k$                             | $\theta, j$<br>$z, k$  | $\theta, j$<br>$\phi, k$  |
| Élément de volume $\Delta V$ | $\Delta x \Delta y \Delta z$                 | $r_m \Delta r \Delta \theta \Delta z$                                  | $r_m^2 \sin \phi \Delta r \Delta \theta \Delta \phi$                                  |
| $R_x(i+1, j, k)$             | $\frac{\Delta x}{\Delta y \Delta z \cdot k}$ | $\frac{\Delta r}{(r_m + \Delta r / 2) \Delta \theta \Delta z \cdot k}$ | $\frac{\Delta r}{(r_m + \Delta r / 2)^2 \sin \phi \Delta \theta \Delta \phi \cdot k}$ |
| $R_x(i-1, j, k)$             | $\frac{\Delta x}{\Delta y \Delta z \cdot k}$ | $\frac{\Delta r}{(r_m - \Delta r / 2) \Delta \theta \Delta z \cdot k}$ | $\frac{\Delta r}{(r_m - \Delta r / 2)^2 \sin \phi \Delta \theta \Delta \phi \cdot k}$ |
| $R_y(i, j+1, k)$             | $\frac{\Delta y}{\Delta x \Delta z \cdot k}$ | $\frac{r_m \Delta \theta}{\Delta r \Delta z \cdot k}$                  | $\frac{\Delta \theta \sin \phi}{\Delta r \Delta \phi \cdot k}$                        |
| $R_y(i, j-1, k)$             | $\frac{\Delta y}{\Delta x \Delta z \cdot k}$ | $\frac{r_m \Delta \theta}{\Delta r \Delta z \cdot k}$                  | $\frac{\Delta \theta \sin \phi}{\Delta r \Delta \phi \cdot k}$                        |
| $R_z(i, j, k+1)$             | $\frac{\Delta z}{\Delta x \Delta y \cdot k}$ | $\frac{\Delta z}{r_m \Delta \theta \Delta r \cdot k}$                  | $\frac{\Delta \phi}{\sin(\phi + \Delta \phi / 2) \Delta r \Delta \theta \cdot k}$     |
| $R_z(i, j, k-1)$             | $\frac{\Delta z}{\Delta x \Delta y \cdot k}$ | $\frac{\Delta z}{r_m \Delta \theta \Delta r \cdot k}$                  | $\frac{\Delta \phi}{\sin(\phi + \Delta \phi / 2) \Delta r \Delta \theta \cdot k}$     |

Les équations données au tableau ci-dessus sont valables pour tout les **nœuds internes**. Pour les nœuds aux frontières, les équations sont modifiées selon le cas présenté. Considérons les cas les plus pratiques :

**1/ Nœud avec condition de convection en surface**

$$R_x(i+1,j,k) = \frac{1}{h\Delta y \cdot \Delta z} ; R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k\Delta y \cdot \Delta z}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta z} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y}$$

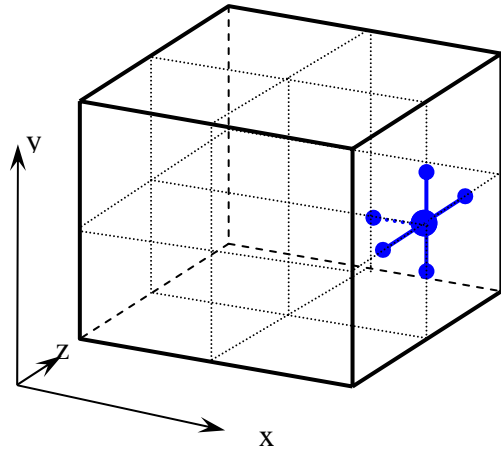


Fig. II. 11 Nœud avec condition de convection en surface

**2/ Nœud sur une surface isolée**

$$R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k\Delta y \cdot \Delta z} ; R_x(i+1,j,k) = \infty$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta z} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y}$$

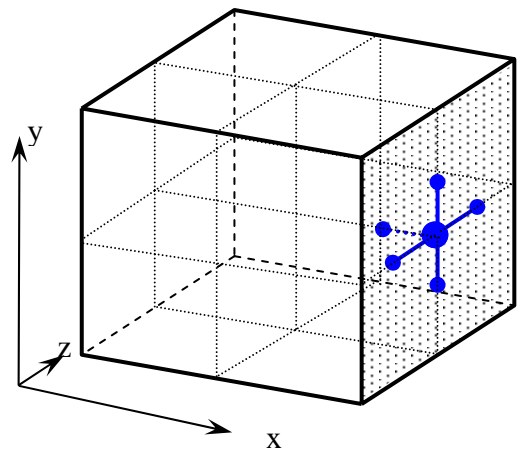


Fig. II. 12 Nœud sur une surface isolée

**3/ Nœud sur un coin extérieur avec condition de convection en surface**

$$R_x(i+1,j,k) = \frac{1}{h \frac{\Delta y}{2} \frac{\Delta z}{2}} ; R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \frac{\Delta z}{2}}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{1}{h \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta z}{2}} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta z}{2}}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2}} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{1}{h \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2}}$$

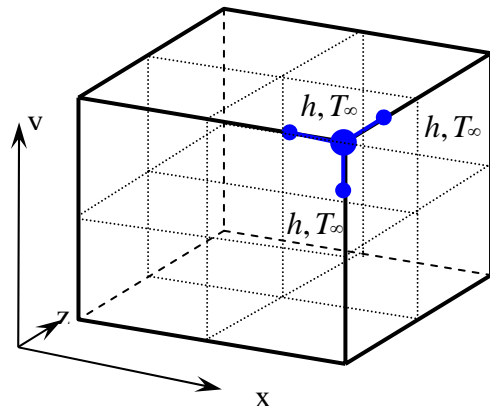


Fig. II. 13 Nœud sur un coin extérieur avec condition de convection en surface

**4/ Nœud sur une arrête externe avec condition de convection en surface**

$$R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \Delta z} ; R_x(i+1,j,k) = \frac{1}{h \frac{\Delta y}{2} \Delta z}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{1}{h \frac{\Delta x}{2} \Delta z} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2}} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2}}$$

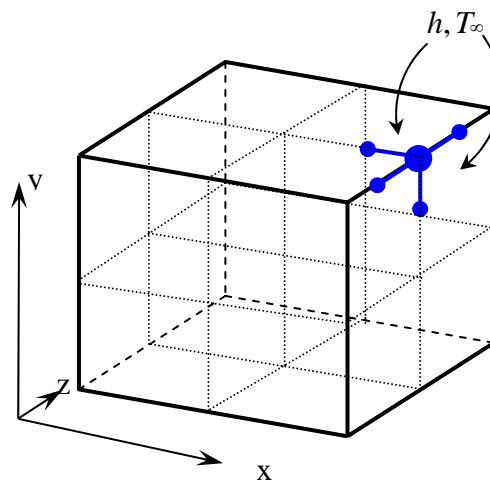


Fig. II. 14 Nœud sur une arrête externe avec condition de convection en surface

### 5/ Nœud sur une arête interne avec condition de convection en surface

$$R_x(i+1,j,k) = \frac{1}{h\Delta y \cdot \Delta z} ; R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k\Delta y \cdot \frac{\Delta z}{2}}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{4 \cdot \Delta y}{3 \cdot k\Delta x \cdot \Delta z} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{4 \cdot \Delta y}{3 \cdot k\Delta x \cdot \Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k\Delta x \cdot \Delta y}$$

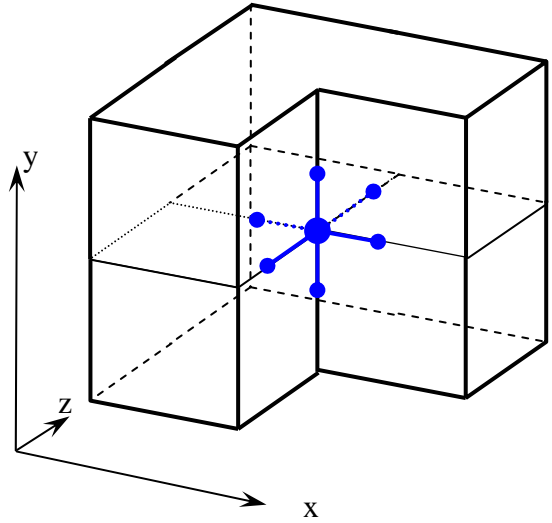


Fig. II. 15 Nœud sur une arête interne avec condition de convection en surface

### 6/ Nœud sur un coin interne

$$R_x(i+1,j,k) = \frac{\Delta x}{k\Delta y \cdot \Delta z} ; R_x(i-1,j,k) = \frac{4\Delta x}{3 \cdot k\Delta y \Delta z}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{\Delta y}{k\Delta x \cdot \Delta z} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{4 \cdot \Delta y}{3 \cdot k\Delta x \cdot \Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{4 \cdot \Delta z}{3 \cdot k\Delta x \cdot \Delta y} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k\Delta x \cdot \Delta y}$$

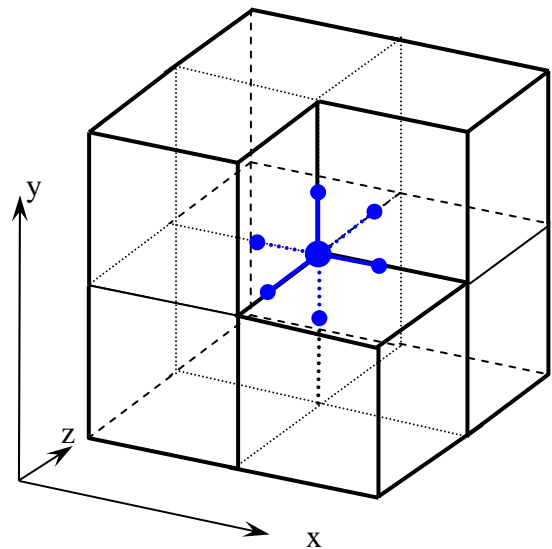


Fig. II. 16 Nœud sur un coin interne



### 7/ Nœud sur un coin interne avec condition de convection en surface

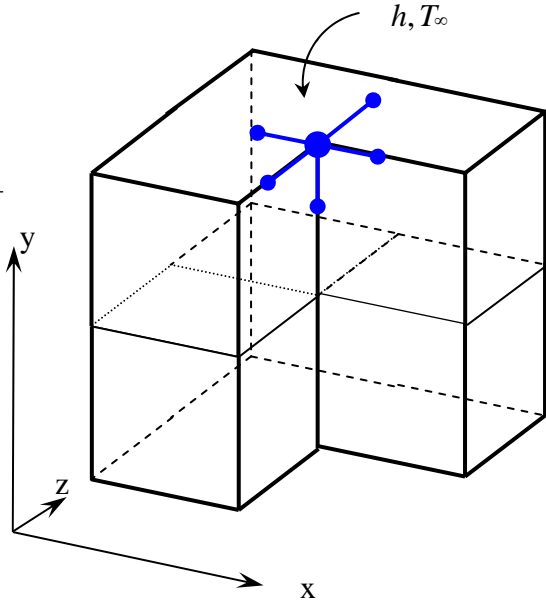
$$\begin{aligned}
 R_x(i+1,j,k) &= \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \Delta z} ; & R_x(i-1,j,k) &= \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \Delta z} \\
 R_y(i,j+1,k) &= \frac{4}{3 \cdot h \Delta x \Delta z} ; & R_y(i,j-1,k) &= \frac{4 \cdot \Delta y}{3 \cdot k \Delta x \Delta z} \\
 R_z(i,j,k+1) &= \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2}} ; & R_z(i,j,k-1) &= \frac{\Delta z}{k \Delta x \frac{\Delta y}{2}}
 \end{aligned}$$


Fig. II. 17 Nœud sur un coin interne avec condition de convection en surface

### II-3- 3. Bilans thermiques

Un équilibre thermique est calculé pour chaque nœud. Le flux thermique total au nœud  $(i, j, k)$  depuis les six nœuds du voisinage est  $Q_{i,j,k}$  (W) :

$$\begin{aligned}
 Q_{i,j,k} &= R_x(i-1,j,k) \cdot (T_{i-1,j,k} - T_{i,j,k}) + R_x(i+1,j,k) \cdot (T_{i+1,j,k} - T_{i,j,k}) + \\
 & R_y(i,j-1,k) \cdot (T_{i,j-1,k} - T_{i,j,k}) + R_y(i,j+1,k) \cdot (T_{i,j+1,k} - T_{i,j,k}) + \\
 & R_z(i,j,k-1) \cdot (T_{i,j,k-1} - T_{i,j,k}) + R_z(i,j,k+1) \cdot (T_{i,j,k+1} - T_{i,j,k}) \quad (\text{II. 25})
 \end{aligned}$$

ou :

$$Q_{i,j,k} = q_{i-1,j,k} + q_{i+1,j,k} + q_{i,j-1,k} + q_{i,j+1,k} + q_{i,j,k-1} + q_{i,j,k+1} \quad (\text{II. 26})$$

Le changement en énergie d'un nœud est du aux variations comme celles liées aux sources de chaleurs ou autres mécanismes. Ce changement est effectué par addition ou soustraction à la variable  $Q_{i,j,k}$  comme le terme  $q \cdot \Delta x \Delta y \Delta z$ .

Un autre avantage de l'introduction de  $(Q_{i,j,k})$  est que moins de données doivent être assignées dans la mémoire d'ordinateur.

## II-4. Conduction de chaleur en coordonnées cylindriques

L'équation générale de la conduction dans un système de coordonnées cylindriques est :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II. 28})$$

### II-4. 1 Maillage en coordonnées cylindriques

Dans cette étude, on va s'intéresser aux systèmes axisymétriques et par conséquent, on va considérer un processus thermique radiale et vertical, rotationnel et symétrique autour de l'axe ( $z$ ). La température au long du rayon  $r$  et a la distance verticale  $z$  en temps  $t$  est notée par  $T(r, z, t)$ .

Dans la direction radiale, le rayon  $r$  est divisé en intervalles d'épaisseur  $\Delta r$  et dans la direction verticale la distance  $z$  est divisée en intervalles d'épaisseur  $\Delta z$ .

Dans le sens radiale, on a :

$$r_1 = r_{\text{int}} + \Delta r ; \quad r_i = r_{i-1} + \Delta r ; \quad r_{\text{ext}} = r_i + n\Delta r$$

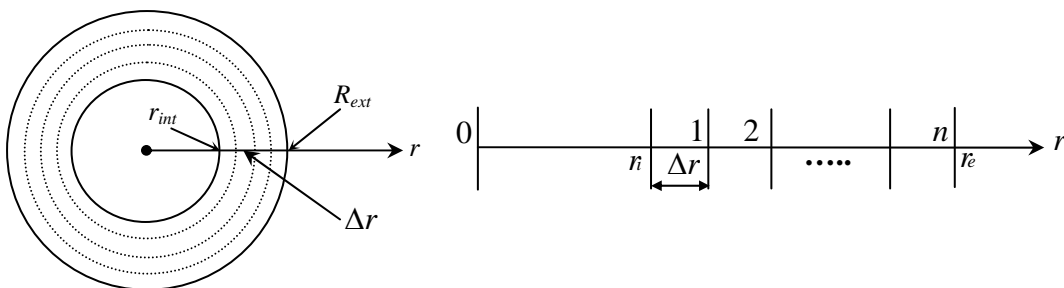


Fig. II. 18 Maillage en sens radiale

Dans la direction verticale ( $z$ ), le maillage peut être conduit comme étant en 2-D:

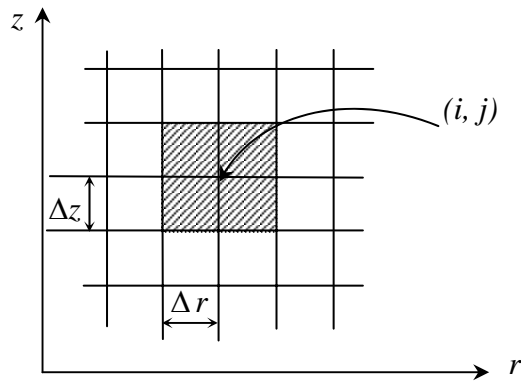


Fig. II. 19 Maillage en coordonnées cylindriques ( $r, z$ )

Pour le cas des cylindres court et pleins et si le problème admet une conversion en 2-D, le maillage le plus utilisé est celui en ( $r, \phi$ ).

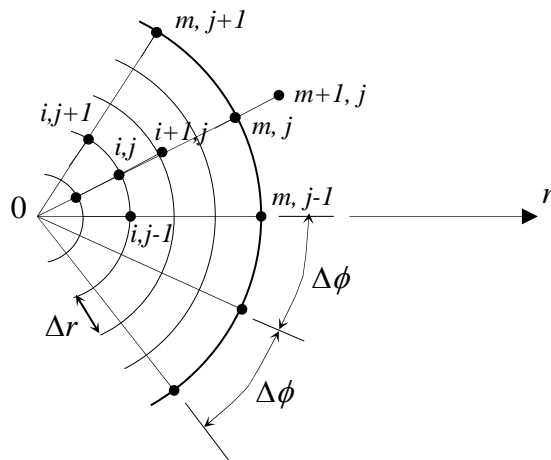


Fig. II. 20 Maillage en coordonnées cylindriques ( $r, \phi$ ) [17].

## II-4. 2. Résistances thermiques en coordonnées cylindriques

La résistance thermique selon ( $z$ ) est donnée par :

$$R_z(i, j-1) = \frac{\Delta z}{2\pi \cdot k \cdot n \cdot \Delta r} = R_z(i, j+1)$$

La résistance thermique selon ( $r$ ) est donnée par :

$$R_r(i-1, j) = \frac{1}{2\pi \cdot k \cdot \Delta z} \ln \frac{R_i}{R_{i-1}}$$

$$R_r(i+1, j) = \frac{1}{2\pi \cdot k \cdot \Delta z} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i}$$

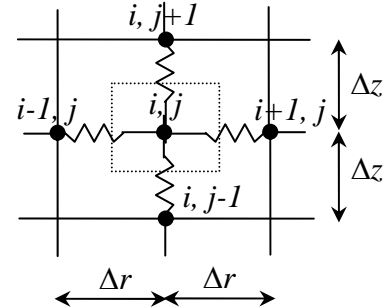


Fig. II. 21 Résistances thermiques autour du nœud ( $i, j$ )

## II-4. 3. Flux thermiques en coordonnées cylindriques

Sur la base du paragraphe précédent, on peut écrire :

$$q_{i-1, j} = \frac{\Delta T}{R_r(i-1, j)} = \frac{(T_{i-1, j} - T_{i, j})}{\frac{1}{2\pi \cdot k \cdot \Delta z} \ln \frac{R_i}{R_{i-1}}} = \frac{2\pi \cdot k \cdot \Delta z \cdot (T_{i-1, j} - T_{i, j})}{\ln \frac{R_i}{R_{i-1}}} \quad (\text{II. 29})$$

$$q_{i, j-1} = \frac{\Delta T}{R_z(i, j-1)} = \frac{(T_{i, j-1} - T_{i, j})}{\frac{\Delta z}{2\pi \cdot k \cdot n \cdot \Delta r}} = \frac{2\pi \cdot k \cdot n \cdot \Delta r \cdot (T_{i, j-1} - T_{i, j})}{\Delta z} \quad (\text{II. 30})$$

L'équation d'équilibre thermique devient pour le cas général :

$$(q_{i-1, j} + q_{i+1, j} + q_{i, j-1} + q_{i, j+1}) \Delta t = C_{i, j} \cdot 2\pi \cdot r_i \cdot \Delta r \cdot \Delta z \cdot (T_{i, j}^{t+\Delta t} - T_{i, j}^t) \quad (\text{II. 31})$$

## II-5. Les méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques

Le problème est ainsi discrétisé en un système d'équations que l'on peut résoudre numériquement. Le succès considérable de cette méthode largement répandue et qui joue toujours un rôle important dont l'analyse numérique tient en fait de sa simplicité, notamment pour la conception du maillage et la vitesse de résolution du système d'équations qui en découle. Plusieurs méthodes de résolution numérique des systèmes d'équations existent. Le choix de la procédure du système d'équation à traiter dépend de la structure de la matrice et de la taille du problème.

Il existe deux méthodes numériques:

**Méthode directe:** qui se définit sous la forme d'équation de récurrence et conduit à la solution en un nombre fini d'étapes.

**Méthode indirecte (itérative):** qui évalue la solution exacte du problème par approximations successives de celle-ci.

## II-2 Comparaison des différentes méthodes

Les deux facteurs de comparaison à considérer, quand on a le choix entre plusieurs méthodes de résolution d'un système d'équations est la quantité de mémoire occupée et le temps de calcul de l'ordinateur.

Les méthodes directes de résolution d'un système de  $N$  équations linéaires, avec une largeur de bande de la matrice de  $(2n+1)$  exigent au moins  $N(2n+1)$  emplacements de mémoire tandis que le temps de calcul est en gros égal à  $N.n^2$ .

Les méthodes indirectes (itératives) exigent en principe moins d'espace mémoire, car elles n'emmagasinent que les coefficients non nuls de la matrices. Elles sont particulièrement indiquées quand les équations sont non linéaires ou quand l'espace mémoire est fortement restreint.

En définitif, les appréciations quand à savoir qu'elle méthode est meilleure ou qu'elle famille de méthodes est la meilleure, dépendent non seulement des caractéristiques intrinsèques du problème étudié, mais aussi des possibilités de l'ordinateur utilisé. C'est pour cela que ces appréciations peuvent varier rapidement avec le temps.

Jusqu'à récemment, la position généralement acceptée était la suivante,  $N$  désigne le nombre d'équations du système:

- Les méthodes directes conviennent le mieux pour de petites valeurs de  $N$  et une matrice (celle qu'est formée par les coefficients) dense (c'est-à-dire possède peu d'éléments nuls).
- Les méthodes indirectes conviennent mieux pour de grandes valeurs de  $N$  et une matrice éparse (c'est-à-dire possède beaucoup d'éléments nuls).

On accorde la préférence aux méthodes indirectes pour les très grandes valeurs de  $N$  et aussi pour les grandes valeurs de  $N$  avec des matrices éparses mais non tri-diagonales.

Les problèmes en conduction ne correspondent normalement pas à de telles matrices (tri-diagonales).

### **II-3 Méthode de Gauss-Seidel:**

Parmi les méthodes itératives, qu'on va utiliser pour résoudre un système d'équation linéaires la méthode de **GAUSS-SEIDEL**, qui ne diffère pas beaucoup des autres méthodes, que par l'emploi immédiat de  $X^{(k)}$  qui fait de nouvelles estimations  $X^{(k+1)}$  à l'itération  $(k+1)$ .

### II-3-1 Algorithme de Gauss-Seidel

Algorithme de Gauss-Seidel pour la résolution d'un système d'équations linéaires  $AX = B$

0/ Étant données  $A, B, X^{(0)}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, K_{\max}$ .

$$1/ x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

2/ Arrêter Si  $|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon_1$

Où  $\frac{|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|}{|x_i^{(k+1)}|} < \varepsilon_2$

$K=1, \dots, K_{\max}$

### II-3-2 Conditions de convergence

On montre que pour qu'il y ait convergence de cette méthode, il faut et il suffit que la matrice soit diagonale strictement dominante.

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (i \neq j), i=1, n$$

L'algorithme de **GAUSS-SEIDEL** est comme suit:

1. Résoudre chaque équation pour l'inconnu diagonal principal.
2. Faites une estimation initiale pour tous les inconnus.
3. Les calculs commencent avec l'usage de l'estimation initiale pour calculer une première approximation pour chacun des inconnus diagonaux principaux.
4. Dans chaque calcul, les valeurs les plus récentes (avant dernière itération) sont utilisées pour déterminer les valeurs dans la dernière itération. Et le calcul itératif se poursuit de cette manière.
5. La procédure est continuée jusqu'à un critère de la convergence spécifié est satisfait pour tous les inconnus.

Le cas général de  $N$  équation, la  $(k+1)$  ième itération peut être écrite

$$T_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ d_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} T_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^N a_{ij} T_j^{(k)} \right\} \quad \text{pour } i=1, N \quad (\text{II. 32})$$

## II-4 Méthode de relaxation

Cette méthode itérative a les mêmes avantages que la méthode de Gauss-Seidel mais qui converge plus rapidement. Pour cela introduisons le paramètre  $\omega \neq 0$ .

Dans cette méthode, la procédure itérative s'écrit :

$$T_i^{(k+1)} = \omega \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{terme à droite de Gauss-Seidel} \\ \text{équation (II. 32)} \end{array} \right\} + (1-\omega) \cdot T_i^{(k)} \quad \text{pour } i=1, N \quad (\text{II. 32})$$

Ici,  $\omega$  est le paramètre de relaxation.

Il est clair que, le cas  $\omega=1$  correspond à l'itération de Gauss-Seidel. Le choix de ce paramètre influe sur la vitesse de convergence, mais la détermination de sa valeur optimale est difficile. Une expérience en numérique est nécessaire pour choisir la valeur de  $\omega$  pour un problème donné. Le choix optimal de  $\omega$  permet de réduire nettement le temps de calcul surtout dans le cas d'un grand nombre d'équations [17].

Si  $\omega < 1$ , on détermine la méthode de sous-relaxation.

Si  $\omega > 1$ , on détermine la méthode de sur-relaxation.

### II-4-1 Conditions de convergence

On cherche les limites de  $\omega$  entre lesquelles on est sûr de la convergence de la méthode. On étudiera brièvement 3 cas :

#### 1°/ Cas d'une matrice quelconque

**Théorème :** On montre que pour toute matrice  $A$  une condition nécessaire de convergence est que :  $0 < \omega < 2$ .

#### 2°/ Cas d'une matrice à diagonale dominante

**Théorème :** Une condition suffisante de convergence est que  $A$  soit à diagonale dominante avec :  $0 < \omega \leq 1$ .



**3°/ Cas d'une matrice symétrique définie positive**

**Théorème :** Pour une matrice symétrique, définie positive la méthode de relaxation est convergente si et seulement si :  $0 < \omega < 2$ .

**II-4-2 Critères d'arrêts des itérations de Gauss-Seidel et de Relaxation**

On rappelle que la méthode de Gauss-Seidel est un cas particulier de la méthode de relaxation avec  $\omega=1$ . On arrête le calcul itératif si l'une des conditions suivantes est vérifiée.

$$1^{\circ} / \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon_1$$

$$2^{\circ} / \frac{\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right|}{\left| x_i^{(k+1)} \right|} < \varepsilon_2 \quad \text{pour } i=1, n$$

**II-4 Avantages des méthodes numériques**

- 1- Faible coût
- 2- Rapidité de calcul
- 3- Information complète
- 4- En calcul numérique, les conditions réelles peuvent être simulées facilement, et on a pas besoin d'avoir recours à des prototypes à petites échelles.
- 5- Simulation des conditions idéales.

**II-5 Désavantages des méthodes numériques**

- 1- Si les résultats qu'on veut obtenir sont limités, les calculs coûteront plus chers que l'expérimentation, il est difficile d'obtenir une solution numérique pour des géométries complexes, des non linéarités, des pertes, des variations sensibles de propriétés des fluides.....
- 2- Quand un problème mathématique admet plus d'une solution, ce n'est pas facile de déterminer la valeur réelle.
- 3- L'inexistence d'équations mathématiques adéquates pour la description des phénomènes (tels que les écoulement turbulents complexes ou certains écoulements non Newtoniens, .....).

Dans le présent chapitre, on va discrétiser les équations différentielles de la chaleur et les conditions aux limites associées, vu au chapitre précédent par la méthode des différences finies en un système d'équations algébriques et ce pour faciliter leurs résolution.

### III- 1 Cas bidimensionnel

#### III-1-1 Régime permanent

On peut réécrire l'équation (II. 11) comme suit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q'''}{k} = \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} + \frac{q'''}{k} = 0 \quad (\text{III. 1})$$

Notre objectif est de déterminer la température au nœud  $P(i, j)$ .

Si, on introduit le concept de résistance la même équation devient :

$$\frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1} - T_{i,j}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{R_y(i,j+1)} + q''' = 0 \quad (\text{III. 2})$$

avec :

$$R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k \Delta y \cdot 1} ; \quad R_x(i+1,j) = \frac{\Delta x}{k \Delta y \cdot 1}$$

$$R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k \cdot \Delta x \cdot 1} ; \quad R_y(i,j+1) = \frac{\Delta y}{k \cdot \Delta x \cdot 1}$$

$\Delta z = 1$  (l'épaisseur selon (z) égale à l'unité)

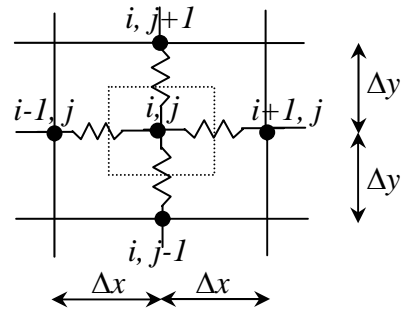


Fig. III. 1 Résistances thermiques entourant un nœud

On appelle :

$T(i, j)$  : température au nœud  $P(i, j)$

$R(i, j)$  : résistance thermique du nœud  $P(i, j)$

Avec :

$$R(i, j) = \frac{1}{\frac{1}{R_x(i-1,j)} + \frac{1}{R_x(i+1,j)} + \frac{1}{R_y(i,j-1)} + \frac{1}{R_y(i,j+1)}} \quad (\text{III. 3})$$

### III-1-1-1 Equation des nœuds intérieurs et aux frontières

#### a) Nœuds internes

Les équations aux différences finies pour les nœuds situés à l'intérieur du domaine peuvent être obtenues en écrivant la formule de la résistance thermique pour un élément de volume ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ) et d'épaisseur unité qui entoure le nœud  $P(i, j)$  (fig.III. 1).

$$\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}-T_{i,j}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{R_y(i,j+1)} + q''' = 0$$

Cette formule exprime que la somme algébrique des densités des flux traversant la frontière de cet élément et de la puissance due aux sources internes est nulle.

De l'équation précédente, on tire :

$$T_{i,j} = \frac{q'''(i,j) + \frac{T_{i-1,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}}{R_y(i,j+1)}}{\frac{1}{R_x(i-1,j)} + \frac{1}{R_x(i+1,j)} + \frac{1}{R_y(i,j-1)} + \frac{1}{R_y(i,j+1)}} \quad (\text{III. 4})$$

Où :  $q'''(i,j)$  ( $\text{W/m}^3$ ) est le flux apporté par une source de chaleur.

On obtient ainsi autant d'équations que de nœuds internes. Le système doit être complété par les expressions traduisant les conditions aux limites.

#### b- Conditions aux limites

Le tableau suivant regroupe les différentes équations d'un nœud soumis à des conditions aux limites diverses.

##### b-1 Température imposée

Cette condition n'introduit pas d'équations supplémentaires, il suffit de reporter dans le système des équations relatives aux nœuds internes, les valeurs des températures imposées aux nœuds appartenant à la frontière.

**b-2 Conditions aux limites diverses**

**Table III. 1** Résumé de formules nodales calculées par des différences finies

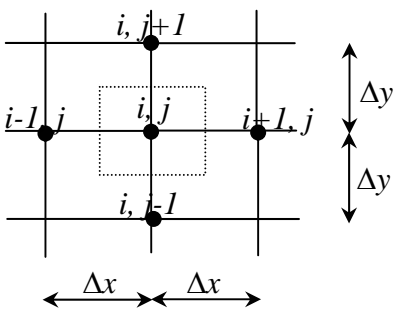
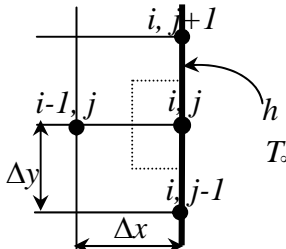
| Position du nœud  | Equation nodale & résistance thermique associée  |
|---|--|
| <p><b>a) Nœud Interne</b></p>                                    | $\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}-T_{i,j}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{R_y(i,j+1)} = 0$ <p>avec :</p> $R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k\Delta y \cdot 1} ; R_x(i+1,j) = \frac{\Delta x}{k\Delta y \cdot 1}$ $R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k\Delta x \cdot 1} ; R_y(i,j+1) = \frac{\Delta y}{k\Delta x \cdot 1}$ <p><math>\Delta z = 1</math> (l'épaisseur selon (z) égale à l'unité)</p> |
| <p>Température recherchée</p>   | $T_{i,j} = \frac{q''(i,j) + \frac{T_{i-1,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}}{R_y(i,j+1)}}{\frac{1}{R_x(i-1,j)} + \frac{1}{R_x(i+1,j)} + \frac{1}{R_y(i,j-1)} + \frac{1}{R_y(i,j+1)}}$   |
| <p><b>b) Nœud avec condition de convection en surface</b></p>  | $\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{R_y(i,j+1)} + \frac{(T_\infty - T_{i,j})}{R_x(i+1,j)} = 0$ <p>avec ;</p> $R_x(i+1,j) = \frac{1}{h\Delta y \cdot 1} ; R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k\Delta y \cdot 1}$ $R_y(i,j+1) = \frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot 1} ; R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot 1}$  |
| <p>Température recherchée</p>   | $T_{i,j} = \frac{q''(i,j) + \frac{T_{i-1,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_\infty}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}}{R_y(i,j+1)}}{\frac{1}{R_x(i-1,j)} + \frac{1}{R_x(i+1,j)} + \frac{1}{R_y(i,j-1)} + \frac{1}{R_y(i,j+1)}}$  |

Table III. 1 (Suite)

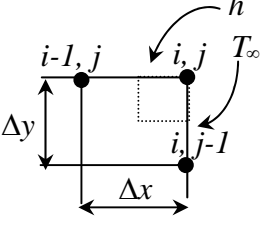
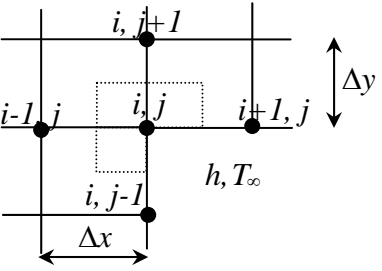
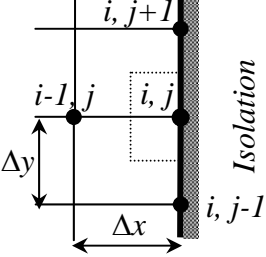
|  |   |
|--|---|
| <p><b>c) Nœud sur un coin externe</b></p>   | $\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_\infty-T_{i,j}}{R_y(i,j+1)} + \frac{(T_\infty-T_{i,j})}{R_x(i+1,j)}=0$ <p>avec ;</p> $R_x(i+1,j)=\frac{2}{h.\Delta y.1} ; R_y(i,j+1)=\frac{2}{h.\Delta x.1}$ $R_x(i-1,j)=\frac{\Delta x}{k\frac{\Delta y}{2}.1} ; R_y(i,j-1)=\frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2}.1}$   |
| <p>Température recherchée</p>  | $T_{i,j}=\frac{q'''(i,j)+\frac{T_{i-1,j}}{R_x(i-1,j)}+\frac{T_\infty}{R_x(i+1,j)}+\frac{T_{i,j-1}}{R_y(i,j-1)}+\frac{T_\infty}{R_y(i,j+1)}}{\frac{1}{R_x(i-1,j)}+\frac{1}{R_x(i+1,j)}+\frac{1}{R_y(i,j-1)}+\frac{1}{R_y(i,j+1)}}$   |
| <p><b>d) Nœud sur un coin interne</b></p>  | $\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}-T_{i,j}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{R_y(i,j+1)} + h.\frac{\Delta x}{2}(T_\infty-T_{i,j})+h.\frac{\Delta y}{2}(T_\infty-T_{i,j})=0$ <p>avec ;</p> $R_x(i-1,j)=\frac{\Delta x}{k\Delta y.1} ; R_x(i+1,j)=\frac{\Delta x}{k\frac{\Delta y}{2}.1} ; R_c(i)=\frac{1}{h\frac{\Delta y}{2}}$ $R_y(i,j+1)=\frac{\Delta y}{k.\Delta x.1} ; R_y(i,j-1)=\frac{\Delta y}{k.\frac{\Delta x}{2}.1} ; R_c(j)=\frac{1}{h\frac{\Delta x}{2}}$ |
| <p>Température recherchée</p>  | $T_{i,j}=\frac{q'''(i,j)+\frac{T_{i-1,j}}{R_x(i-1,j)}+\frac{T_{i+1,j}}{R_x(i+1,j)}+\frac{T_{i,j-1}}{R_y(i,j-1)}+\frac{T_{i,j+1}}{R_y(i,j+1)}+h\left(\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta y}{2}\right)T_\infty}{\frac{1}{R_x(i-1,j)}+\frac{1}{R_x(i+1,j)}+\frac{1}{R_y(i,j-1)}+\frac{1}{R_y(i,j+1)}+\frac{h.\Delta x}{2}+\frac{h.\Delta y}{2}}$   |

Table III. 1 (Suite)

|  |   |
|--|---|
| <p>e) Nœud sur une surface isolée<br/>(<math>h=0</math>)</p>  | $\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{R_y(i,j+1)} = 0$ <p>avec ;</p> $R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k \Delta y \cdot 1} ; R_x(i+1,j) = \infty$ $R_y(i,j+1) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot 1} ; R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot 1}$ |
| <p>Température<br/>recherchée</p>  | $T_{i,j} = \frac{q''(i,j) + \frac{T_{i-1,j}}{R_x(i-1,j)} + 0 + \frac{T_{i,j-1}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}}{R_y(i,j+1)}}{\frac{1}{R_x(i-1,j)} + 0 + \frac{1}{R_y(i,j-1)} + \frac{1}{R_y(i,j+1)}}$  |

### III-2 Régime non-permanent

L'équation générale de la de la chaleur en régime variable s'écrit:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q''}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Le calcul de la température au temps  $(t + \Delta t)$ , noté  $T^{t+\Delta t}$  peut être conduit de différentes façons où l'on approxime le Laplacien à partir des valeurs connues  $T^t$  de la température au temps  $(t)$  (méthode explicite) ou bien à partir des valeurs inconnues  $T^{t+\Delta t}$  de la température au temps  $(t + \Delta t)$  (méthode implicite) voir équations (II. 19) et (II.20).

### III-2-1 Méthode explicite (FTCS)

En terme de résistances thermiques l'équation et (II.19), s'écrit :

$$q''(i,j) + \frac{T_{i-1,j}^t - T_{i,j}^t}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}^t - T_{i,j}^t}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}^t - T_{i,j}^t}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}^t - T_{i,j}^t}{R_y(i,j+1)} = C(i,j) \frac{T_{i,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^t}{\Delta t} \quad (\text{III. 5})$$

avec :

$C(i,j)$ : capacité thermique ( $J/m^3 K$ ).

La capacité thermique du nœud  $(i,j)$  est égale à :  $C_{i,j} \Delta x \Delta y$  par unité de longueur perpendiculaire au plan  $(x, y)$ .

De l'équation (III. 5), on peut tirer l'expression finale de la nouvelle température d'un nœud  $(i, j)$  en temps  $(t + \Delta t)$ .

$$T_{i,j}^{new} = T_{i,j} + \frac{\Delta t}{C(i,j)} (q_{i-1,j} + q_{i+1,j} + q_{i,j-1} + q_{i,j+1} + q''(i,j)) \quad (\text{III. 6})$$

En terme de résistances thermiques, s'écrit ;

$$T_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{\Delta t}{C(i,j)} \left[ q''(i,j) + \frac{T_{i-1,j}^t - T_{i,j}^t}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}^t - T_{i,j}^t}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}^t - T_{i,j}^t}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}^t - T_{i,j}^t}{R_y(i,j+1)} \right] + \frac{C(i,j)}{\Delta t} T_{i,j}^t$$

Où :

$$T_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{\Delta t}{C(i,j)} \left[ q''(i,j) + \frac{T_{i-1,j}^t}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}^t}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}^t}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}^t}{R_y(i,j+1)} \right] + \left[ 1 - \frac{\Delta t}{C(i,j)} \left( \frac{1}{R_x(i-1,j)} + \frac{1}{R_x(i+1,j)} + \frac{1}{R_y(i,j-1)} + \frac{1}{R_y(i,j+1)} \right) \right] T_{i,j}^t \quad (\text{III. 7})$$

L'avantage de cette technique est que chaque équation ne contient qu'une seule inconnue, par contre n'importe quelle valeur du paramètre  $M$  ;

$$M = \frac{\Delta t}{C(i,j)} \left( \frac{1}{R_x(i-1,j)} + \frac{1}{R_x(i+1,j)} + \frac{1}{R_y(i,j-1)} + \frac{1}{R_y(i,j+1)} \right) \quad (\text{III. 8})$$

reliant les incréments d'espace et de temps, ne serait convenir.

En effet, le coefficient  $(1-M)$  ne peut être négatif, car d'après l'équation (III. 5) cela imposerait que la valeur de la température au temps  $(t+\Delta t)$  soit d'autant plus faible que sa valeur au temps  $(t)$  est grande.

Cette situation fait apparaître une instabilité de calcul, qui se traduit par des oscillations des valeurs de la température, qui vont s'amplifier.

Le problème de stabilité se pose aussi pour les nœuds situés à la frontière, dans le cas assez fréquent d'une condition mixte [06].

### III-2-2 Méthode implicite (IFTCS)

En terme de résistances thermiques l'équation (II.20), s'écrit :

$$q'''(i,j) + \frac{T_{i-1,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j+1)} = C(i,j) \frac{T_{i,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^t}{\Delta t} \quad (\text{III. 9})$$

et par conséquent la nouvelle température au temps  $(t+\Delta t)$  est donnée par :

$$T_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{q'''(i,j) + \frac{T_{i-1,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j+1)} + \frac{C(i,j)}{\Delta t} \cdot T_{i,j}^t}{\frac{1}{R_x(i-1,j)} + \frac{1}{R_x(i+1,j)} + \frac{1}{R_y(i,j-1)} + \frac{1}{R_y(i,j+1)} + \frac{C(i,j)}{\Delta t}} \quad (\text{III. 10})$$

Comme le montre cette équation, la méthode implicite est stable pour toute valeur du paramètre  $M$ .

On peut donc choisir les incréments d'espace et de temps  $(t)$  à partir des valeurs au temps  $(t+\Delta t)$ . D'une façon générale, il est également possible d'exprimer la formule de



résistance thermique par une combinaison de deux termes, l'un est calculé à partir des valeurs au temps  $(t)$ , l'autre à partir des valeurs au temps  $(t+\Delta t)$ .

La méthode implicite est « inconditionnellement stable » et conduit à des résultats plus précis que ceux obtenus par la méthode explicite, par contre pour chaque incrémentation du temps, il faut résoudre un système de N équations à N inconnues alors que dans la méthode explicite, il n'y a qu'une inconnue par équation.

Il faut noter que l'expression (III. 10) est valable pour tout les nœuds internes du maillage. Pour les nœuds aux frontières et avec des conditions aux limites diverses, le principe est simple et basé sur la formulation de l'équation du bilan thermique entourant le nœud en question avec l'introduction des conditions imposées ensuite faire apparaître les termes de résistances et finalement déduire l'expression de la température recherchée. Le tableau suivant récapitule ces dires.

**Table III. 2 Résumé de formules nodales calculées par des différences finies implicites**

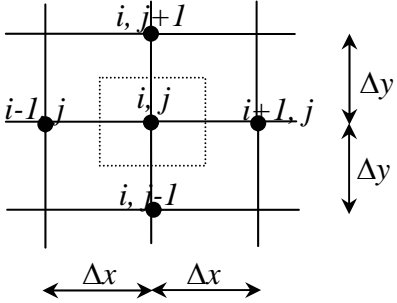
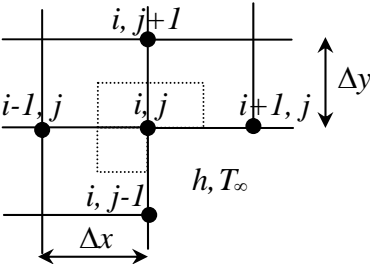
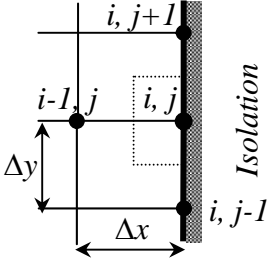
| Position du nœud  | Equation nodale & résistance thermique associée  |
|---|--|
| <p><b>a) Nœud Interne</b></p>  | $\frac{T_{i-1,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j+1)} = C(i,j) \frac{T_{i,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^t}{\Delta t}$ <p>avec :</p> $C(i,j) = \rho \cdot c \cdot \Delta V = \rho \cdot c \cdot \Delta x \Delta y \Delta z$ $R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k \Delta y \cdot 1} ; R_x(i+1,j) = \frac{\Delta x}{k \Delta y \cdot 1}$ $R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k \cdot \Delta x \cdot 1} ; R_y(i,j+1) = \frac{\Delta y}{k \cdot \Delta x \cdot 1}$ <p><math>\Delta z = 1</math> (l'épaisseur selon (z) égale à l'unité)</p> |
| <p>Température recherchée</p>   | $T_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{\frac{T_{i-1,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j+1)} + \frac{C(i,j)}{\Delta t} \cdot T_{i,j}^t}{\frac{1}{R_x(i-1,j)} + \frac{1}{R_x(i+1,j)} + \frac{1}{R_y(i,j-1)} + \frac{1}{R_y(i,j+1)} + \frac{C(i,j)}{\Delta t}}$   |

Table III. 2 (suite)

|   |  |
|---|--|
| <p><b>b) Nœud avec condition de convection en surface</b></p> | $\frac{T_{i-1,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_\infty - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j+1)} = C(i,j) \frac{T_{i,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^t}{\Delta t}$ <p>avec ;</p> $R_x(i+1,j) = \frac{1}{h\Delta y \cdot 1} ; \quad R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k\Delta y \cdot 1}$ $R_y(i,j+1) = \frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot 1} ; \quad R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot 1} ; \quad C(i,j) = \rho \cdot c \cdot \frac{\Delta x}{2} \Delta y \cdot 1$    |
| <p>Température recherchée</p>                                 | $T_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{\frac{T_{i-1,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_\infty}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j+1)} + \frac{C(i,j)}{\Delta t} \cdot T_{i,j}^t}{\frac{1}{R_x(i-1,j)} + \frac{1}{R_x(i+1,j)} + \frac{1}{R_y(i,j-1)} + \frac{1}{R_y(i,j+1)} + \frac{C(i,j)}{\Delta t}}$   |
| <p><b>c) Nœud sur un coin externe</b></p>                     | $\frac{T_{i-1,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_\infty - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_\infty - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j+1)} = C(i,j) \frac{T_{i,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^t}{\Delta t}$ <p>avec ;</p> $R_x(i+1,j) = \frac{2}{h \cdot \Delta y \cdot 1} ; \quad R_y(i,j+1) = \frac{2}{h \cdot \Delta x \cdot 1}$ $R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k\frac{\Delta y}{2} \cdot 1} ; \quad R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot 1} ; \quad C(i,j) = \rho \cdot c \cdot \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} \cdot 1$ |
| <p>Température recherchée</p>                                 | $T_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{\frac{T_{i-1,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_\infty}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_\infty}{R_y(i,j+1)} + \frac{C(i,j)}{\Delta t} \cdot T_{i,j}^t}{\frac{1}{R_x(i-1,j)} + \frac{1}{R_x(i+1,j)} + \frac{1}{R_y(i,j-1)} + \frac{1}{R_y(i,j+1)} + \frac{C(i,j)}{\Delta t}}$   |

Table III. 2 (Suite)

|  |   |
|--|---|
| <p><b>d) Nœud sur un coin interne</b></p>             | $\frac{T_{i-1,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j+1)} + h \frac{\Delta x}{2} (T_\infty - T_{i,j}^{t+\Delta t}) + h \frac{\Delta y}{2} (T_\infty - T_{i,j}^{t+\Delta t}) = C(i,j) \frac{T_{i,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^t}{\Delta t}$ <p>avec ;</p> $C(i,j) = \rho.c. \frac{3}{4} \Delta x \Delta y . 1$ $R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k \Delta y . 1} ; \quad R_x(i+1,j) = \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} . 1} ; \quad R_c(i) = \frac{1}{h \frac{\Delta y}{2}}$ $R_y(i,j+1) = \frac{\Delta y}{k . \Delta x . 1} ; \quad R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k . \frac{\Delta x}{2} . 1} ; \quad R_c(j) = \frac{1}{h \frac{\Delta x}{2}}$ |
| <p>Température recherchée</p>  | $T_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{\frac{T_{i-1,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j+1)} + h \left( \frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta y}{2} \right) T_\infty + \frac{C(i,j)}{\Delta t} . T_{i,j}^t}{\frac{1}{R_x(i-1,j)} + \frac{1}{R_x(i+1,j)} + \frac{1}{R_y(i,j-1)} + \frac{1}{R_y(i,j+1)} + \frac{h . \Delta x}{2} + \frac{h . \Delta y}{2} + \frac{C(i,j)}{\Delta t}}$  |
| <p><b>e) Nœud sur une surface isolée (h=0)</b></p>  | $\frac{T_{i-1,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i,j-1}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j+1)} = C(i,j) \frac{T_{i,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^t}{\Delta t}$ <p>avec ;</p> $R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k \Delta y . 1} ; \quad R_x(i+1,j) = \infty ; \quad C(i,j) = \rho.c. \frac{\Delta x}{2} \Delta y . 1$ $R_y(i,j+1) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} . 1} ; \quad R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} . 1}$   |
| <p>Température recherchée</p>  | $T_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{\frac{T_{i-1,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i-1,j)} + 0 + \frac{T_{i,j-1}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j+1)} + \frac{C(i,j)}{\Delta t} . T_{i,j}^t}{\frac{1}{R_x(i-1,j)} + 0 + \frac{1}{R_y(i,j-1)} + \frac{1}{R_y(i,j+1)} + \frac{C(i,j)}{\Delta t}}$   |

## III- 2 Cas tri-dimensionnel

### III- 2-1 Nouvelles températures

#### 1/ Nœuds internes

A partir de la relation (III. 9) qui gère l'équilibre thermique de n'importe quel nœud ( $i$ ) calculé en terme de température en temps  $t+\Delta t$ . On remarque que cette formulation peut être généralisée facilement à un problème multidimensionnel.

$$q_i^m + \sum_j \frac{T_j^{t+\Delta t} - T_i^{t+\Delta t}}{R_{ij}} = C_i \frac{T_i^{t+\Delta t} - T_i^t}{\Delta t} \quad (\text{III. 11})$$

On peut donc déduire l'expression donnant la température d'un nœud sous plusieurs conditions aux limites.

$$T_i^{t+\Delta t} = \frac{q_i^m + \sum_j (T_j^{t+\Delta t} / R_{ij}) + (C_i / \Delta t) T_i^t}{\sum_j (1/R_{ij}) + C_i / \Delta t} ; \quad \text{en régime transitoire} \quad (\text{III. 12})$$

Il est très intéressant de remarquer qu'en régime permanent  $\Delta t$  tend vers ( $\infty$ ), ce qui rend cette équation identique à l'équation (II. 15).

Les résistances thermiques entourant un nœud internes sont tirées du table (II. 2) ;

$$R_{x(i+1,j,k)} = \frac{\Delta x}{k \Delta y \cdot \Delta z} ; \quad R_{x(i-1,j,k)} = \frac{\Delta x}{k \Delta y \cdot \Delta z}$$

$$R_{y(i,j+1,k)} = \frac{\Delta y}{k \Delta x \cdot \Delta z} ; \quad R_{y(i,j-1,k)} = \frac{\Delta y}{k \Delta x \cdot \Delta z}$$

$$R_{z(i,j,k+1)} = \frac{\Delta z}{k \Delta x \cdot \Delta y} ; \quad R_{z(i,j,k-1)} = \frac{\Delta z}{k \Delta x \cdot \Delta y}$$

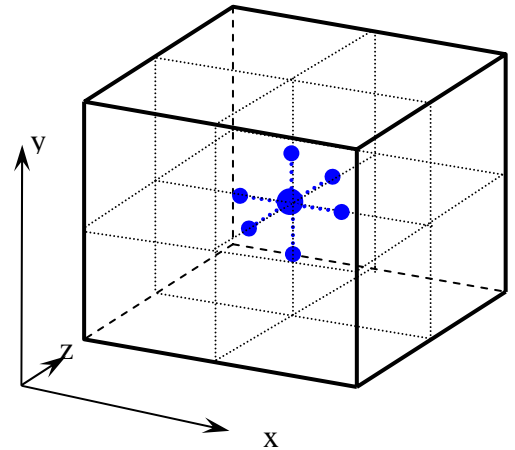


Fig. III. 2 Nœud interne

### III- 2-1 Nouvelles températures

#### III- 2- 1- a. Régime permanent

D'après l'équation (II. 15), la température recherchée d'un nœud interne est généralement donnée par :

$$T_{i,j,k} = \frac{q'''(i,j,k) + \frac{T_{i-1,j,k}}{R_x(i-1,j,k)} + \frac{T_{i+1,j,k}}{R_x(i+1,j,k)} + \frac{T_{i,j-1,k}}{R_y(i,j-1,k)} + \frac{T_{i,j+1,k}}{R_y(i,j+1,k)} + \frac{T_{i,j,k-1}}{R_z(i,j,k-1)} + \frac{T_{i,j,k+1}}{R_z(i,j,k+1)}}{\frac{1}{R_x(i-1,j,k)} + \frac{1}{R_x(i+1,j,k)} + \frac{1}{R_y(i,j-1,k)} + \frac{1}{R_y(i,j+1,k)} + \frac{1}{R_z(i,j,k-1)} + \frac{1}{R_z(i,j,k+1)}} \quad (III. 13)$$

#### III- 2- 1- b. Régime non-permanent

La nouvelle température recherchée en régime non-permanent pour un nœud interne est déduite de l'équation générale (III. 11) ;

$$T_{i,j,k}^{t+\Delta t} = \frac{q'''(i,j,k) + \frac{T_{i-1,j,k}^{t+\Delta t}}{R_x(i-1,j,k)} + \frac{T_{i+1,j,k}^{t+\Delta t}}{R_x(i+1,j,k)} + \frac{T_{i,j-1,k}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j-1,k)} + \frac{T_{i,j+1,k}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j+1,k)} + \frac{T_{i,j,k-1}^{t+\Delta t}}{R_z(i,j,k-1)} + \frac{T_{i,j,k+1}^{t+\Delta t}}{R_z(i,j,k+1)} + \frac{C(i,j,k)}{\Delta t} \cdot T_{i,j,k}^t}{\frac{1}{R_x(i-1,j,k)} + \frac{1}{R_x(i+1,j,k)} + \frac{1}{R_y(i,j-1,k)} + \frac{1}{R_y(i,j+1,k)} + \frac{1}{R_z(i,j,k-1)} + \frac{1}{R_z(i,j,k+1)} + \frac{C(i,j,k)}{\Delta t}} \quad (III. 14)$$

#### 1/ Nœud avec condition de convection en surface

$$R_x(i+1,j,k) = \frac{1}{h\Delta y.\Delta z} ; \quad R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k\Delta y.\Delta z}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2}.\Delta z} ; \quad R_y(i,j-1,k) = \frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2}.\Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k\frac{\Delta x}{2}.\Delta y} ; \quad R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k\frac{\Delta x}{2}.\Delta y}$$

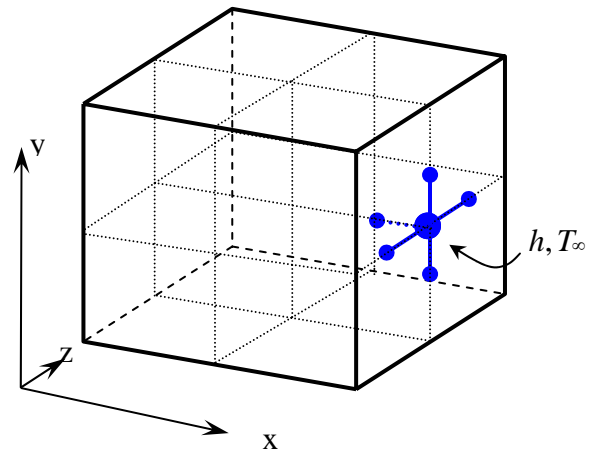


Fig. III. 3 Nœud avec condition de convection en surface

## 2/ Nœud sur une surface isolée

$$R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k \Delta y \cdot \Delta z} ; R_x(i+1,j,k) = \infty$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta z} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y}$$

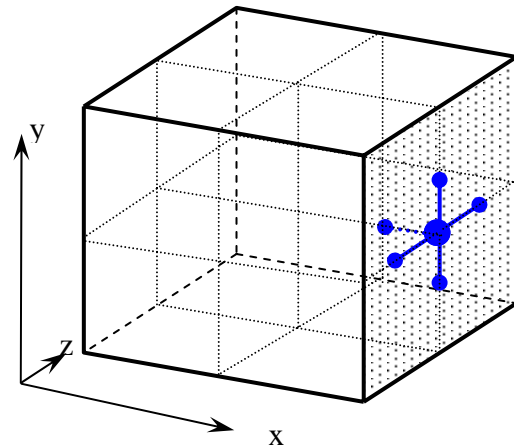


Fig. III. 4 Nœud sur une surface isolée

## 3/ Nœud sur un coin extérieur avec condition de convection en surface

$$R_x(i+1,j,k) = \frac{1}{h \frac{\Delta y}{2} \cdot \frac{\Delta z}{2}} ; R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \cdot \frac{\Delta z}{2}}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{1}{h \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta z}{2}} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta z}{2}}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta y}{2}} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{1}{h \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta y}{2}}$$

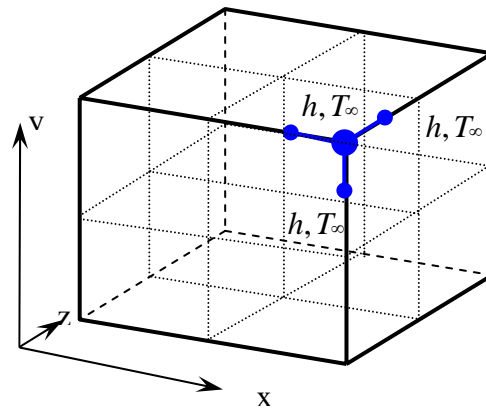


Fig. III. 5 Nœud sur un coin extérieur avec condition de convection en surface

**4/ Nœud sur une arête externe avec condition de convection en surface**

$$R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \cdot \Delta z} ; R_x(i+1,j,k) = \frac{1}{h \frac{\Delta y}{2} \Delta z}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{1}{h \frac{\Delta x}{2} \Delta z} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta y}{2}} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta y}{2}}$$

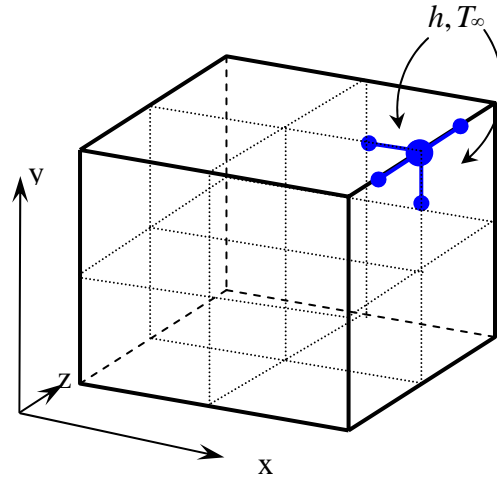


Fig. III. 6 Nœud sur une arête externe avec condition de convection en surface

**5/ Nœud sur une arête interne avec condition de convection en surface**

$$R_x(i+1,j,k) = \frac{1}{h \Delta y \cdot \Delta z} ; R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k \Delta y \cdot \frac{\Delta z}{2}}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{4 \cdot \Delta y}{3 \cdot k \Delta x \cdot \Delta z} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{4 \cdot \Delta y}{3 \cdot k \Delta x \cdot \Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k \Delta x \cdot \Delta y}$$

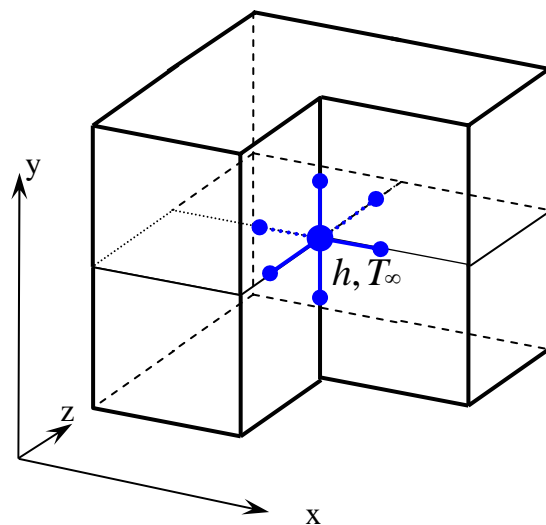


Fig. III. 7 Nœud sur une arête interne avec condition de convection en surface

**6/ Nœud sur un coin interne**

$$R_x(i+1,j,k) = \frac{\Delta x}{k\Delta y\Delta z} ; R_x(i-1,j,k) = \frac{4\Delta x}{3.k\Delta y\Delta z}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{\Delta y}{k\Delta x\Delta z} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{4.\Delta y}{3.k\Delta x\Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{4.\Delta z}{3.k\Delta x.\Delta y} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k\Delta x.\Delta y}$$

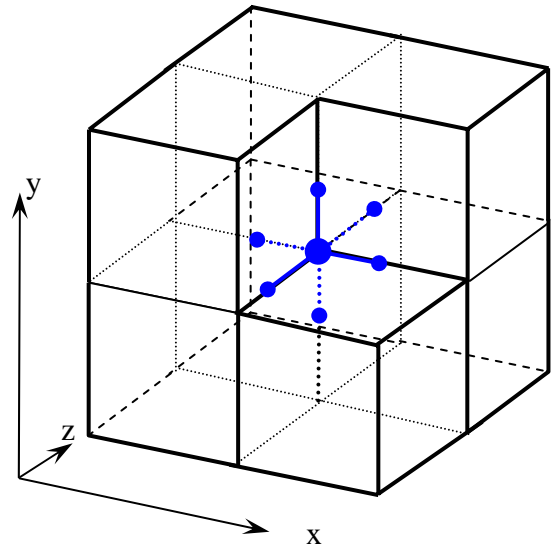


Fig. III. 8 Nœud sur un coin interne

**7/ Nœud sur un coin interne avec condition de convection en surface**

$$R_x(i+1,j,k) = \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \Delta z} ; R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \Delta z}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{4}{3.h\Delta x.\Delta z} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{4.\Delta y}{3.k\Delta x.\Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta y}{2}} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k\Delta x \cdot \frac{\Delta y}{2}}$$

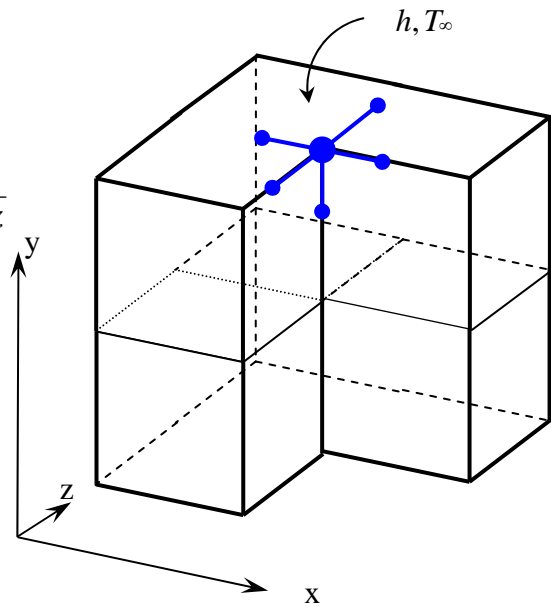


Fig. III. 9 Nœud sur un coin interne avec condition de convection en surface



## IV- Introduction

Après avoir établi la formulation des températures par la méthode des résistances thermiques en régime permanent et variable en des systèmes d'équations algébriques, on a développé des programmes informatiques sur la base de ce qui est dit, afin de nous faciliter la résolution des problèmes posés ainsi la manipulation des différents paramètres influant sur le phénomène de conduction de chaleur en différents régimes et avec plusieurs conditions aux limites.

Comme ce n'est pas évident de faire un seul programme qui traite les problèmes de conduction très variés, on a opté pour le développement de quatre programmes pour les cas 2-D et deux autres pour le cas 3-D. Ces programmes sont conçus sur la base de problèmes typiques et peuvent être facilement adaptés ou étendus à d'autres cas différents.

Dans le présent chapitre, on va traiter un ensemble de problèmes en 2-D et en 3-D et ce en régimes permanent et variable.

### IV- 1 Cas bidimensionnels

### IV- 2 La liste des identificateurs

Les principaux identificateurs choisis sont les suivants :

**Table IV-1 Identificateurs et dénominations des programmes**

| <b>Identificateurs</b>            | <b>Dénominations et unité de mesure</b>  |
|-----------------------------------|--|
| T(1,1), T(1,m),<br>T(n,1), T(n,m) | sont des températures prises comme des conditions d'entrée en régime permanent, leurs valeurs n'influent pas sur les calculs, ( $^{\circ}C$ ou $^{\circ}K$ )   |
| K(1,1), K(1,m),<br>K(n,1), K(n,m) | sont des températures prises comme des conditions d'entrée en régime non-permanent, leurs valeurs n'influent pas sur les calculs, ( $^{\circ}C$ ou $^{\circ}K$ )   |
| L(i)                              | température utilisée lorsqu'il y a un rayonnement ou variation du coefficient de convection en fonction de la température pour faciliter le calcul de résistances thermiques qui varient, ( $^{\circ}C$ ou $^{\circ}K$ ) |
| Q(i,j)                            | source thermique pour chaque nœud, ( $W$ )   |
| C(i,j)                            | Capacité thermique dans un nœud de coordonnées (i,j)   |
| F(i)                              | Flux thermique entre deux nœuds sur le même plan (i)   |

**Suite (Table IV-1 Identificateurs et dénominations)**

|                                    |  |
|------------------------------------|--|
| Flux                               | Flux thermique à traversant un plan                            |
| Tk                                 | température initiale, ( $^{\circ}c$ ou $^{\circ}k$ )           |
| $\Delta x, \Delta x_1, \Delta x_2$ | distance entre deux nœuds successifs suivant l'axe X, ( $m$ )  |
| $\Delta y$                         | distance entre deux nœuds successives suivant l'axe Y, ( $m$ ) |
| Lx                                 | Longueur suivant X, ( $m$ )                                    |
| Ly                                 | Longueur suivant Y, ( $m$ )                                    |
| xk, xk1, xk2                       | Coefficients de conduction thermique, ( $W/m^{\circ}c$ )       |
| h                                  | Coefficient de convection, ( $W/m^2^{\circ}C$ )                |
| S                                  | Chaleur spécifique, ( $J/kg^{\circ}C$ )                        |
| W                                  | Constante de Stephan-Boltzman, ( $kcal/hm^2^{\circ}k^4$ )      |
| Z                                  | Emissivité   |
| R                                  | Masse volumique, ( $kg/m^3$ )                                  |
| $1/R_x(i,j), 1/R_y(i,j)$           | conductances thermiques selon l'axe x ou y pour un nœud (i,j)  |
| condx, condy                       | Résistances thermiques selon l'axe x ou y                      |
| d                                  | Diamètre, ( $m$ )  |
| $\Delta t$                         | Le pas du temps (incrément), ( $s$ )                           |
| $K_{max}$                          | Nombre d'itération (régime permanent)                          |
| $V_{max}$                          | Nombre d'incrément en temps (régime variable)                  |
| Ax                                 | Surface d'un cylindre ( $A_x=3.14*d^2/4$ ), ( $m^2$ )          |
| e                                  | Constante du choix de la géométrie (plaque, cylindre, mur,...) |
| $\epsilon$                         | Erreur d'approximation   |

Dans ce qui suit, on propose un nombre de problèmes applications sélectionnés pour tester la validité de nos programmes pour les deux régimes.

### IV-3 Régime permanent

#### a- Méthode de calcul

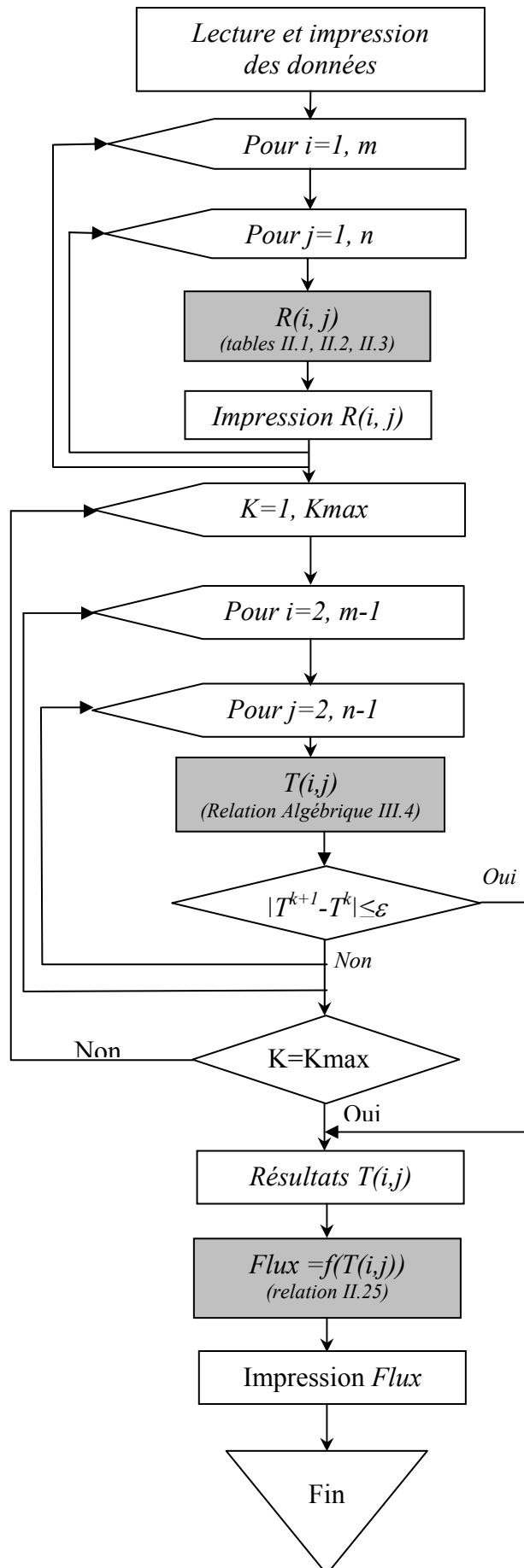
- Entrée des données du problème.
- Entrée des températures de frontières et les sources de chaleur.
- Entrée des conditions d'entrée.
- Calcul des résistances thermiques pour chaque nœud.
- Calcul du champ de température.
- Calcul de flux.

#### b- Conditions d'entrée

La mise en place des conditions d'entée dans le programme de calcul est faite pour que ce dernier puisse résoudre des problèmes avec des conditions aux limites diverses tel que des problèmes avec ou sans isolation. Ces conditions d'entrée sont choisies de tel manière à ne pas influencer les résultats et d'éviter toute confusion avec les autres températures données du problème.

|                  |  |
|------------------|--|
| $T(n,1) = -1000$ | Isolation sur la frontière inférieure                                    |
| $T(n,1) = -2000$ | Pas d'isolation sur la frontière inférieure                              |
| $T(1,1) = -3000$ | Problème d'une plaque semi-infinie                                       |
| $T(1,1) = -4000$ | Problème d'une plaque finie  |
| $T(1,m) = -5000$ | Calcul de flux thermique dans le cas d'une plaque semi-infinie           |
| $T(1,m) = -6000$ | Calcul de flux thermique dans le cas d'une plaque finie sans rayonnement |
| $T(1,m) = -7000$ | Calcul de flux thermique dans le cas d'une plaque finie avec rayonnement |

## Organigramme du programme (régime stationnaire)



## IV-4 Régime variable

### a- Méthode de calcul

- Entrée des données du problème.
- Entrée des températures de frontières, et les sources thermiques.
- Entrée des conditions d'entrées.
- Calcul des résistances thermiques.
- Calcul des capacités thermiques.
- Calcul des températures.
- Calcul de flux thermique.

### b- Conditions d'entrée

$$K(1,1)=\begin{cases} -1000 & \text{Si pour } p(2,2) ; R_x(i,j-1) \rightarrow \text{conduction} \\ -2000 & \text{Si pour } p(2,2) ; R_x(i,j-1) \rightarrow R_{ay} + \text{Conv (h : variable)} \\ -3000 & \text{Si pour } p(2,2) ; R_x(i,j-1) \rightarrow \text{Convection (h : constant)} \end{cases}$$

$$K(1,m)= -1000 \text{ pour } p(2,2) ; R_y(i-1,j) \rightarrow \text{convection (h : constant ou variable)}$$

$$K(n,1)= -1000 \text{ pour } p(2,m-1) ; R_y(i+1,j) \rightarrow \text{conduction}$$

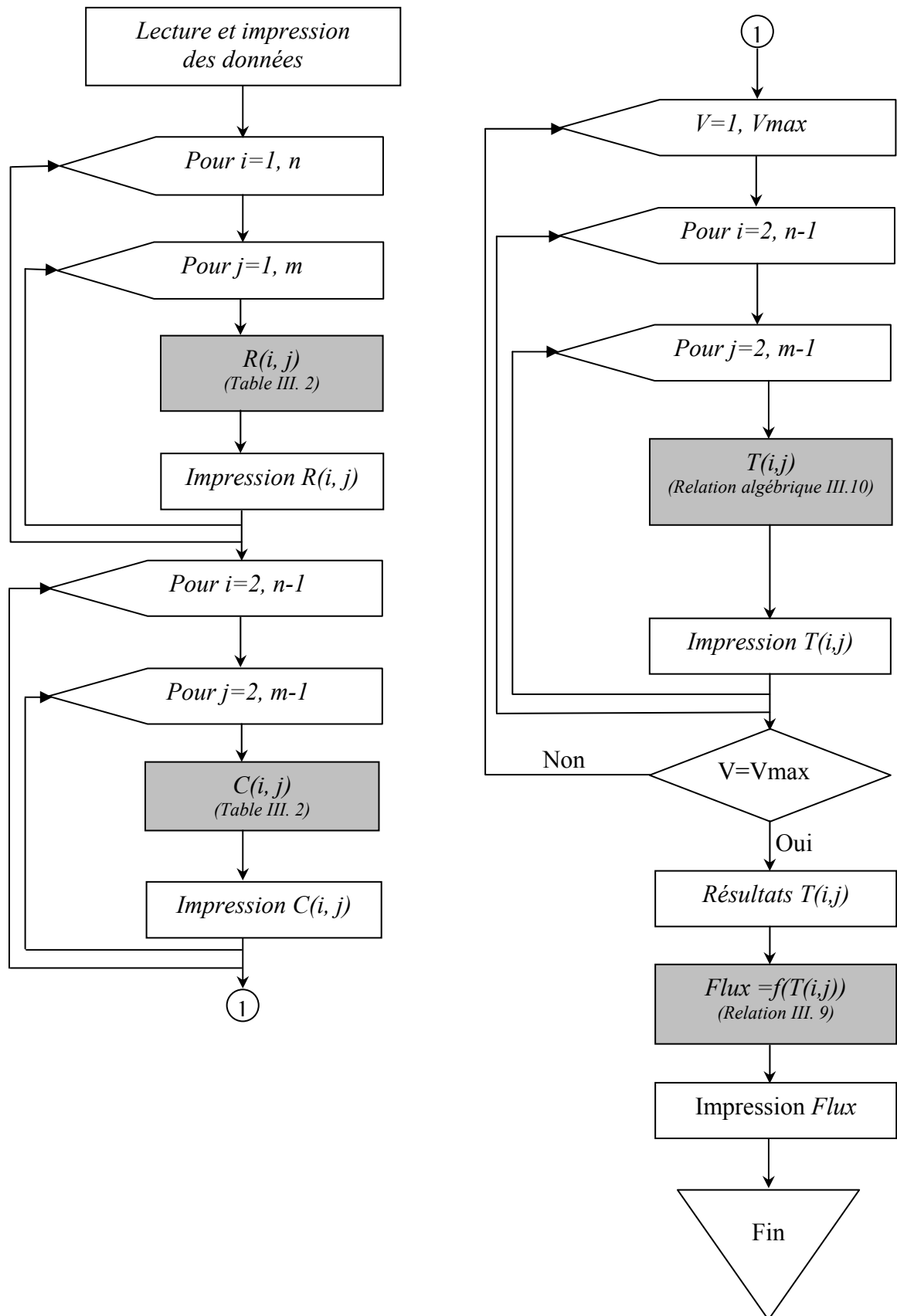
$$K(n,m)=\begin{cases} -2000 & \text{Si pour } p(2,m-1) ; R_x(i,j+1) \rightarrow \text{Conv (h : variable)} \\ -3000 & \text{Si pour } p(2,m-1) ; R_x(i,j+1) \rightarrow \text{Rayonnement} \end{cases}$$

e=1 cas d'une plaque

e=2 cas d'un cylindre

e=3 cas d'un mur

**Organigramme du programme (régime instationnaire)**



**IV-5 Applications**

**IV-5-1 Régime permanent**

**Problème 1 : [2]**

**Plaque semi-infinie de verre**

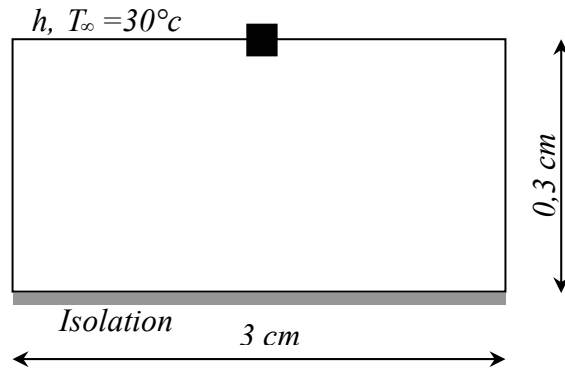


Fig. IV. 1 Plaque semi infini de verre

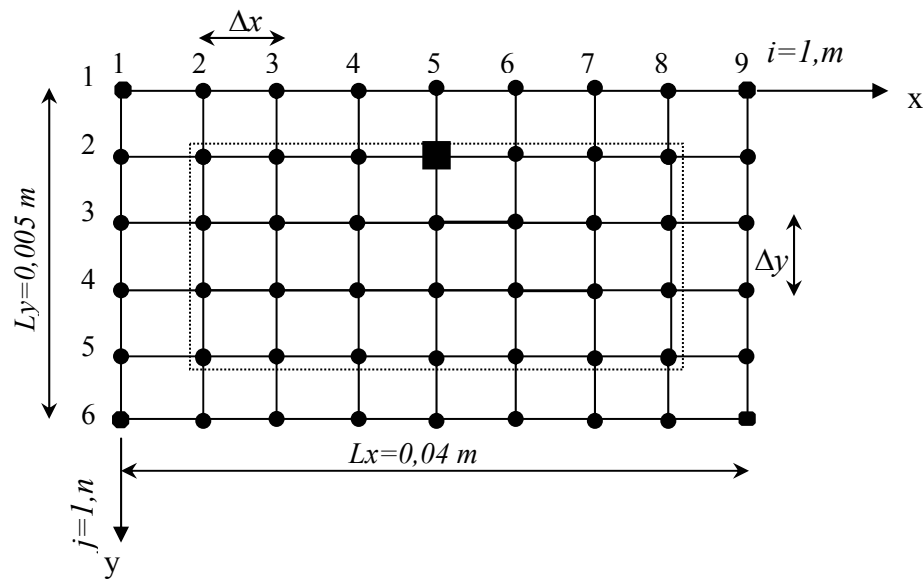


Fig. IV. 2 Maillage de la plaque semi-infinie

**Données du problème :**

| Matériau   | Géométrie   | Charges(conditions aux limites)   |
|--|---|---|
| $\lambda k = \lambda k_1 = \lambda k_2 = 0.8 \text{ W/m} \cdot \text{°C}$<br>$h = 100 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°C}, w = 0, z = 0$ | $L_x = 0.04 \text{ m}, L_y = 0.005 \text{ m}$<br>$\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = 0.005 \text{ m}$<br>$\Delta y = 0.001 \text{ m}$ | $T(1,2) = \dots = T(1,8) = 30 \text{°C}$<br>$L(j) = 0 \text{°C}, q(2,5) = 20 \text{ W/m}$<br>$Q(i,j) = 0$ |

**Conditions d'entrée**

$$T(1,1) = -1000^{\circ}\text{C}$$

$$K_{\text{max}} = 1000 \text{ itérations}$$

$$T(1,m) = -3000^{\circ}\text{C}$$

$$T(n,1) = -5000^{\circ}\text{C}$$

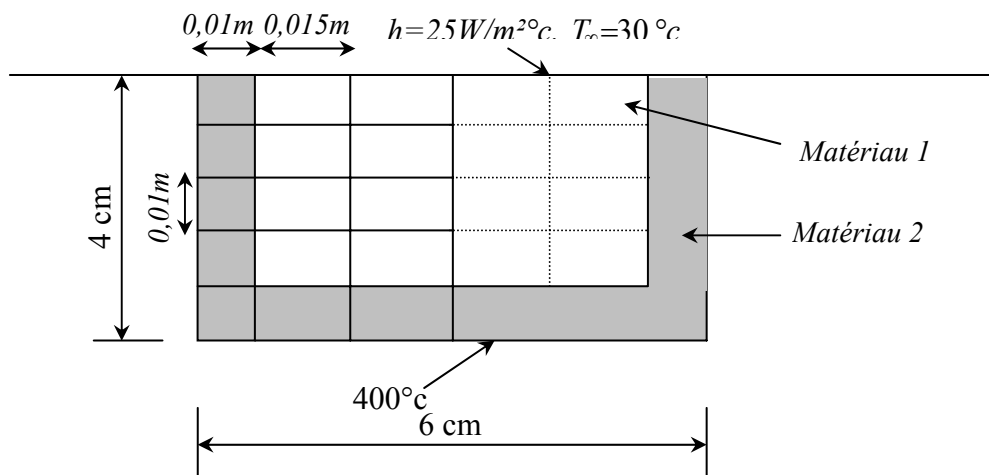
**Problème 2 : [2]****Plaque composée de deux matériaux**

Fig. IV. 3 Plaque composée de deux matériaux



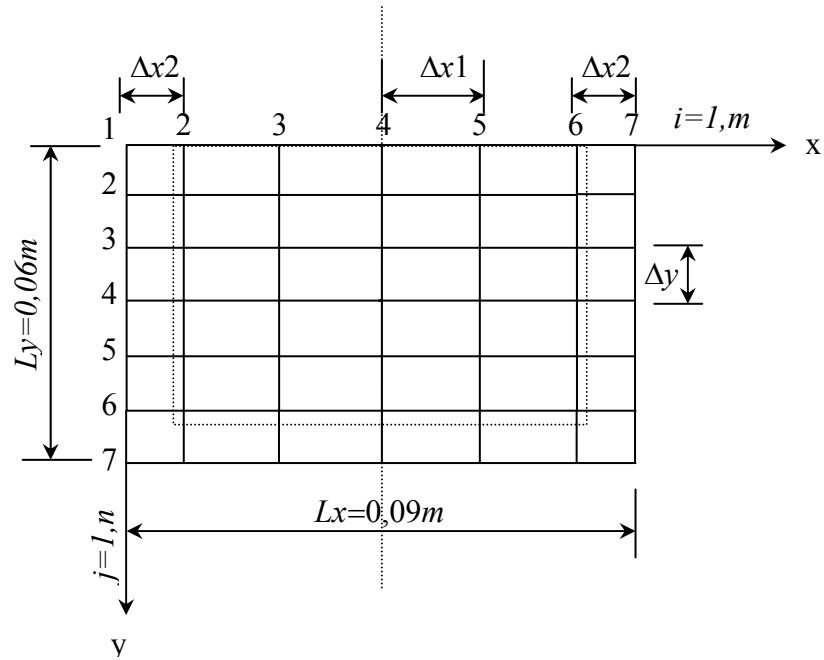


Fig. IV. 4 Maillage de la plaque composée

**Données du problème :**

| Matériaux   | Géométrie   | Charges(conditions aux limites)   |
|---|---|---|
| $xk1=2 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ ,<br>$xk2=0.3 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$<br>$h=25 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ , $w=0$ , $z=0$ | $Lx=0.09 \text{ m}$ , $Ly=0.06 \text{ m}$<br>$\Delta x1=0.015 \text{ m}$ ,<br>$\Delta x2=0.01 \text{ m}$<br>$\Delta y=0.01 \text{ m}$ | $T(1,2)=\dots=T(1,6)=30^\circ\text{C}$<br>$T(2,1)=\dots=T(6,1)=400^\circ\text{C}$<br>$T(7,2)=\dots=T(7,6)=400^\circ\text{C}$<br>$T(2,7)=\dots=T(6,7)400^\circ\text{C}$<br>$L(j)=0^\circ\text{C}$ , $Q(i,j)=0$ |

**Conditions d'entrée**

$T(1,1)=-4000^\circ\text{C}$

$K_{max}=1000 \text{ itérations}$

$T(1,m)=-6000^\circ\text{C}$

$T(n,1)=-2000^\circ\text{C}$

**Problème 3 : [2]**

**Plaque de céramique**

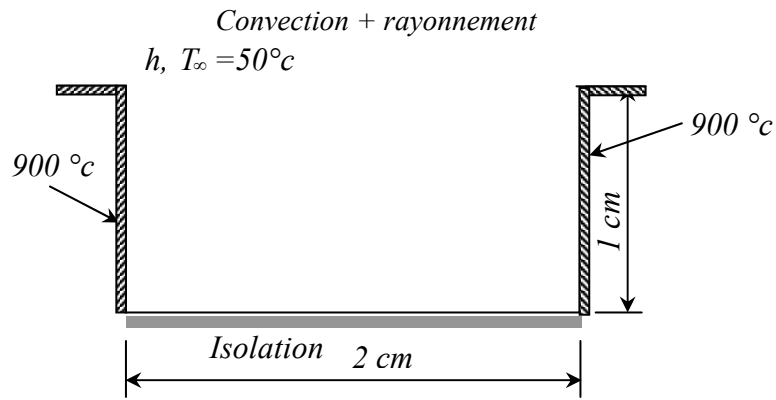


Fig. IV. 5 Plaque de céramique

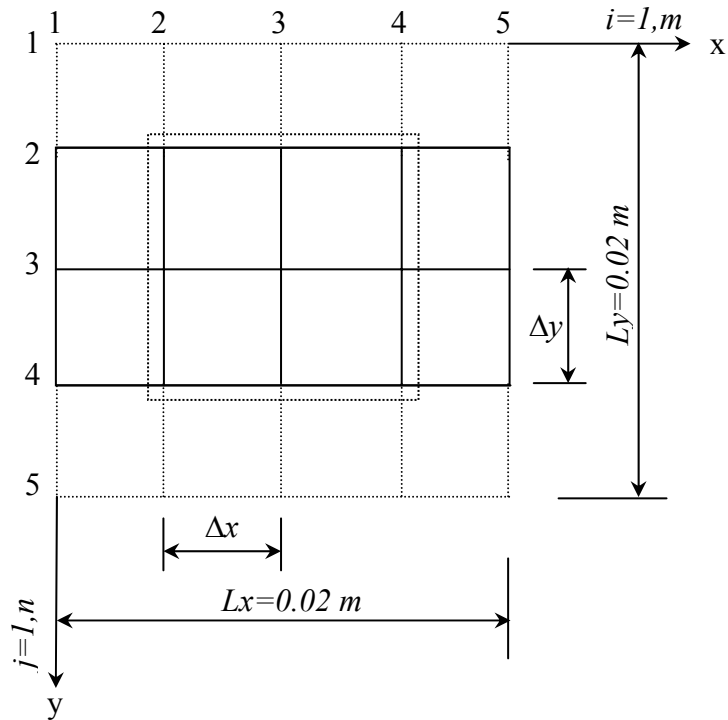


Fig. IV. 6 Maillage de la plaque

**Données du problème :**

| <b>Matériau</b>   | <b>Géométrie</b>  | <b>Charges(conditions aux limites)</b>  |
|---|---|---|
| $Xk=xk1=xk2=3 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$<br>$h=50 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ ,<br>$w=5,669 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{k}^4$ ,<br>$z=0.7$ | $Lx=0.02 \text{ m}$ , $Ly=0.02 \text{ m}$<br>$\Delta x=\Delta x1=\Delta x2=0.005 \text{ m}$<br>$\Delta y=0.005 \text{ m}$ | $T(1,2)=\dots=T(1,4)=323^\circ\text{k}$<br>$T(2,1)=\dots=T(4,1)=1173^\circ\text{k}$<br>$T(2,5)=\dots=T(4,5)=1173^\circ\text{k}$<br>$L(j)=1173^\circ\text{k}$ , $Q(i,j)=0$ |

**Conditions d'entrée**

$$T(1,1)=-4000^\circ\text{C}$$

$$K_{\max}=1000 \text{ itérations}$$

$$T(1,m)=-7000^\circ\text{C}$$

$$T(n,1)=-1000^\circ\text{C}$$

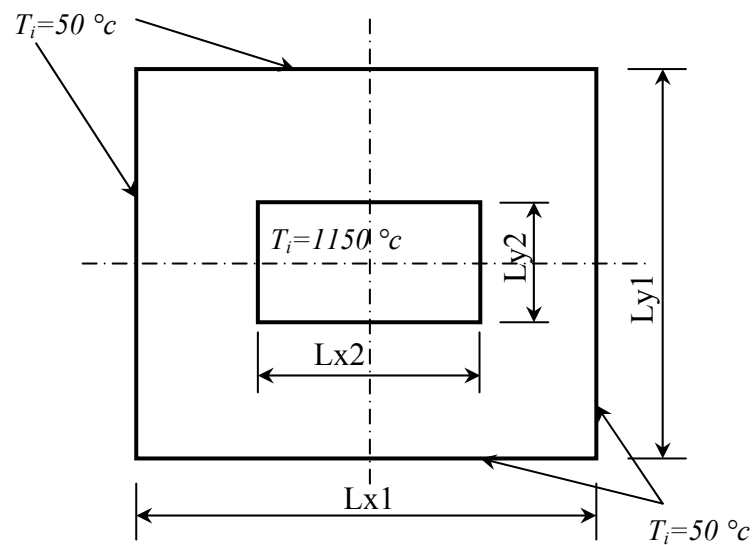
**Problème 4 : [16]****Four axisymétrique**

Fig. IV. 7 Four axisymétrique

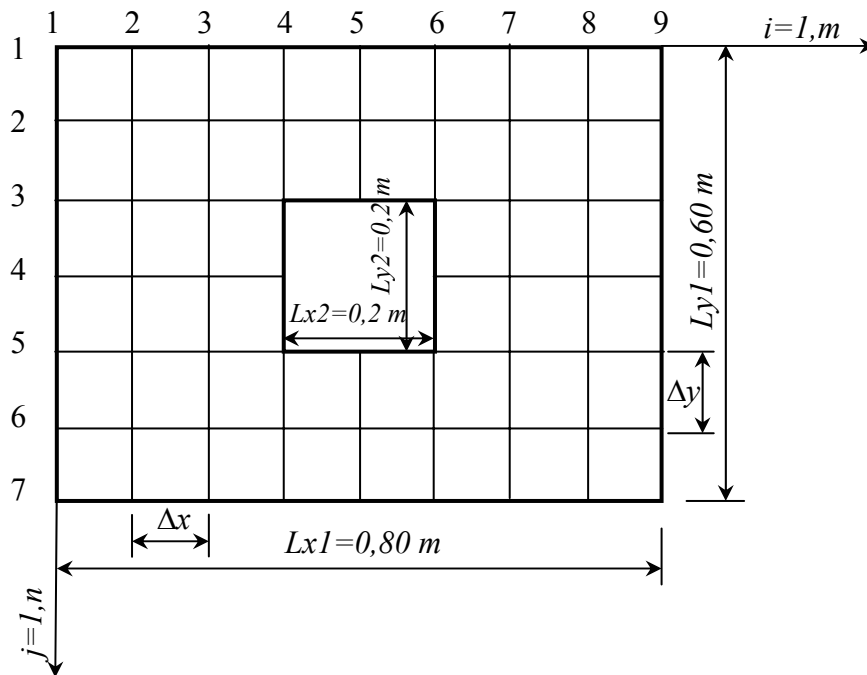


Fig. IV. 8 Maillage du four axisymétrique

**Données du problème :**

| Matériau  | Géométrie                                     | Charges (conditions aux limites)               |
|---|---|--|
| $Xk=xk1=xk2=1 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$                               | $Lx1=0.8 \text{ m}, Ly1=0.6 \text{ m}$        | $T(i,j)_{interne}=1150 \text{ }^\circ\text{C}$ |
| $h=0 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}, w=0 \text{ W/m}^2 \cdot \text{k}^4,$ | $\Delta x=\Delta x1=\Delta x2=0.05 \text{ m}$ | $T(i,j)_{externe}=50 \text{ }^\circ\text{C}$   |
| $z=0$   | $\Delta y=0.05 \text{ m}$                     | $L(j)=0 \text{ }^\circ\text{C}, Q(i,j)=0$      |

**Conditions d'entrée**

$T(i, j)_{initiale}=100^\circ\text{C}$

$K_{max}=50 \text{ itérations}$

**Problème 5 : [4, 28]**

*Cheminée axisymétrique*

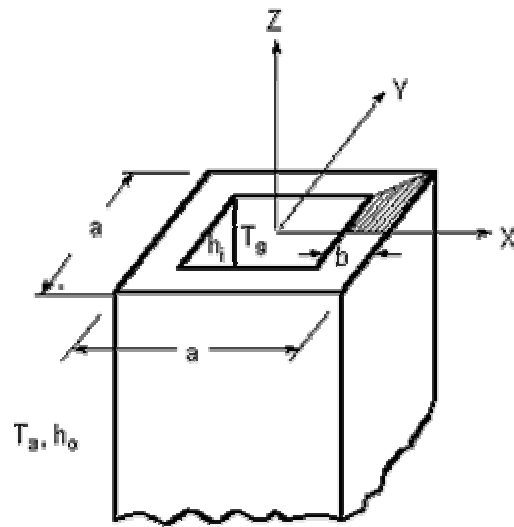


Fig. IV. 9 Cheminée axisymétrique

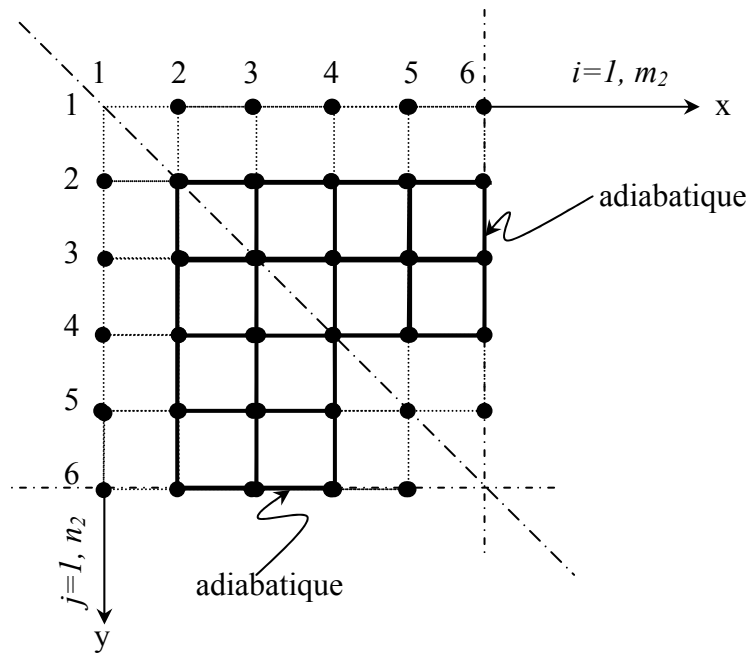


Fig. IV. 10 Maillage de la Cheminée axisymétrique

**Données du problème :**

| <b>Matériau</b>   | <b>Géométrie</b>                                  | <b>Charges (conditions aux limites)</b>       |
|---|---|---|
| $Xk=1 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$   | $Lx= Ly=4 \text{ m},$                             | $T(i,j)_{interne}=100 \text{ }^\circ\text{C}$ |
| $h_i=12 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}, h_o=3 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ | $\Delta x =0.5 \text{ m}, \Delta y=0.5 \text{ m}$ | $T(i,j)_{externe}=0 \text{ }^\circ\text{C}$   |

**Conditions d'entrée**

$$T(i, j)_{initiale}=100^\circ\text{C}$$

$$K_{max}=100 \text{ itérations}$$

## IV-5-2 Régime non-permanent (variable)

## Problème 1 : [2]

## Plaque de céramique

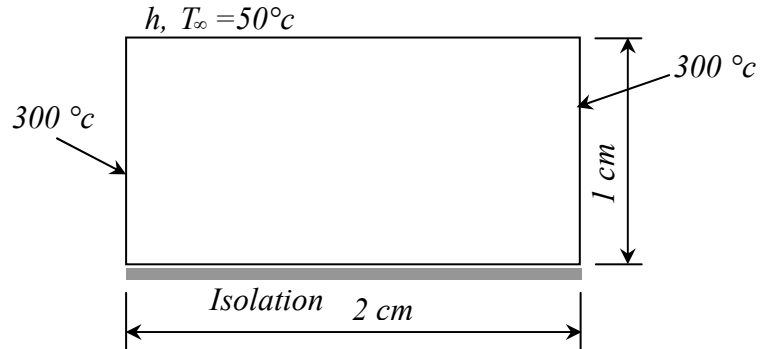


Fig. IV. 11 Plaque de céramique

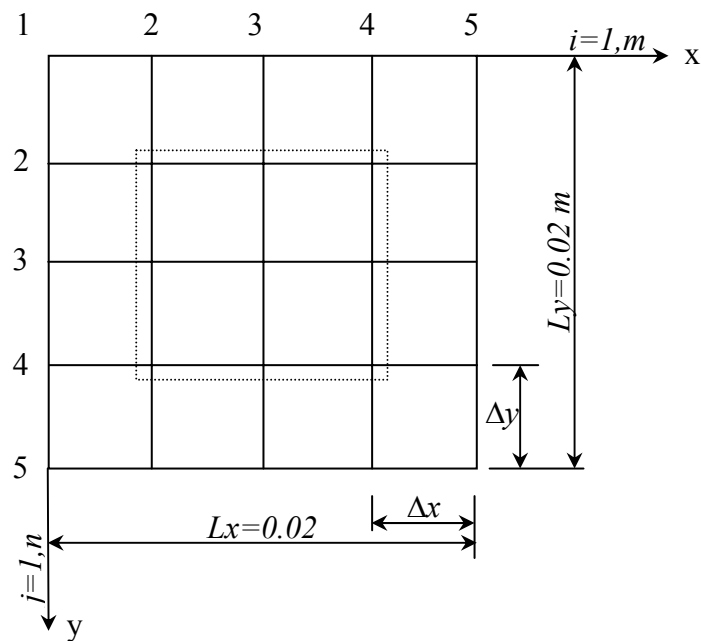


Fig. IV. 12 Maillage de la plaque de céramique

**Données du problème :**

| Matériau                                   |   | Géométrie                  |                    | Conditions aux limites                           |
|--|---|----------------------------|--------------------|--|
| $xk=3 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$    | $r=1600 \text{ kg/m}^3$                   | $Ay=0.005 \text{ m}^2$     | $d=0.02 \text{ m}$ | $K(1,2)=\dots=K(1,4)=50 \text{ }^\circ\text{C}$  |
| $h=200 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ | $s=800 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$ | $Lx=0.02 \text{ m}$        | $e=1$              | $K(2,1)=\dots=K(4,1)=300 \text{ }^\circ\text{C}$ |
| $h_a=0 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ | $z=0$                                     | $Ly=0.02 \text{ m}$        |                    | $Q(I,j)=0, L(j)=0$                               |
| $h_b=0 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ | $w=0$                                     | $\Delta x=0.005 \text{ m}$ |                    | <b>Température initiale</b>                      |
| $V_{max}=6$                                |   | $\Delta y=0.005 \text{ m}$ |                    | $T_k=300 \text{ }^\circ\text{C}$                 |
|  |   | $Ax=0.0025 \text{ m}^2$    |                    | $\Delta t = 2.0 \text{ s}$                       |

**Conditions d'entrée**

$K(1, 1)=-1000 \text{ }^\circ\text{C}$

$K(1, m)=-1000 \text{ }^\circ\text{C}$

$K(n, 1)=-1000 \text{ }^\circ\text{C}$

$L(j)>K(1, j)$

**Problème 2 : [2]**

**Cylindre plein en Nickel-acier**

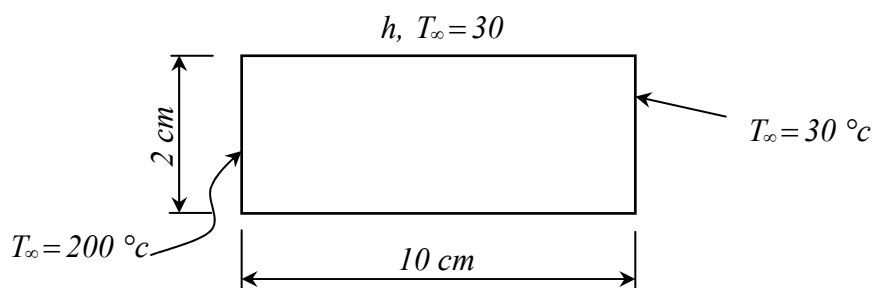


Fig. IV. 13 Cylindre plein en Nickel-acier

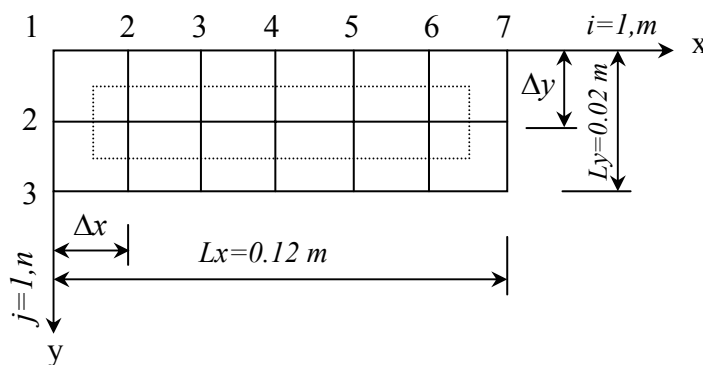


Fig. IV. 14 Maillage du Cylindre plein en Nickel-acier



**Données du problème :**

| Matériau   |                       | Géométrie                  |            | Conditions aux limites                    |
|--|-----------------------|----------------------------|------------|---|
| $xk=12W/m \cdot ^\circ c$                        | $r=7800$              | $Ax = \frac{\pi d^2}{4}$   | $d=0.02 m$ | $K(1,2)=\dots=K(1,6)=30 \text{ }^\circ c$ |
| $h=9 \cdot \Delta T^{0.15} W/m^2 \cdot ^\circ c$ | $kg/m^3$              | $=3.1416993 \cdot 10^{-4}$ | $e=2$      | $K(2,1)=200 \text{ }^\circ c,$            |
| $h_a=0 W/m^2 \cdot ^\circ c$                     | $s=480$               | $m^2$                      |            | $K(2,7)=30 \text{ }^\circ c$              |
| $h_b=0 W/m^2 \cdot ^\circ c$                     | $J/kg \cdot ^\circ c$ | $Ay=0 m^2$                 |            | $K(3,2)=\dots=K(3,6)=0 \text{ }^\circ c$  |
| $V_{max}=25$                                     | $z=0$                 | $Lx=0.12 m$                |            | $Q(i,j)=0, L(j)=200 \text{ }^\circ c$     |
|  | $w=0$                 | $Ly=0.02 m$                |            | <b>Température initiale</b>               |
|  |                       | $\Delta x=0.02m$           |            | $T_k=200 \text{ }^\circ c$                |
|  |                       | $\Delta y=0.01m$           |            | $\Delta t = 50 s$                         |

**Conditions d'entrée**

$K(1, 1)=-1000 \text{ }^\circ c$

$K(1, m)=-1000 \text{ }^\circ c$

$K(n, m)=-3000 \text{ }^\circ c$

**Problème 3 : [2]**

**Mur en céramique exposé au rayonnement sur les côtés**

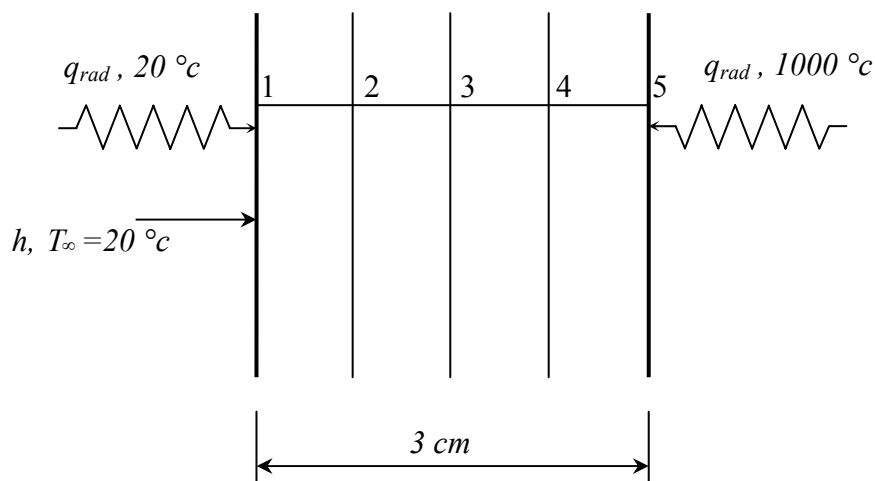


Fig. IV. 15 Mur en céramique exposé au rayonnement sur les côtés

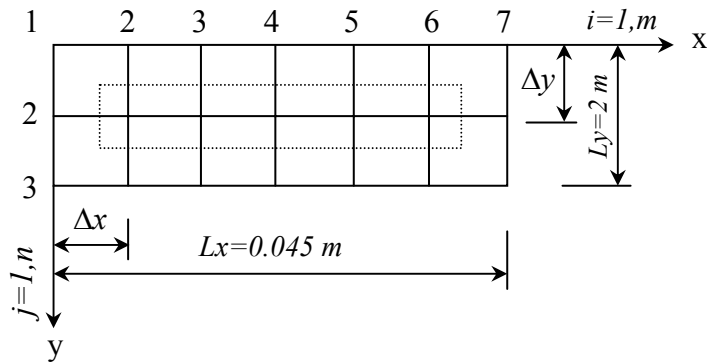


Fig. IV. 16 Maillage du mur en céramique exposé au rayonnement sur les côtés

**Données du problème :**

| Matériau   |  | Géométrie                     |                   | Conditions aux limites                   |
|--|--|-------------------------------|-------------------|--|
| $\lambda k = 3 \text{ W/m} \cdot \text{°C}$                    | $r = 1600$                             | $A_x = 1 \text{ m}^2$         | $d = 0 \text{ m}$ | $K(1,2) = \dots = K(1,6) = 0 \text{ °K}$ |
| $h = 1,92 \cdot \Delta t^{0.25} \text{ W/m}^2 \cdot \text{°C}$ | $\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$           | $A_y = 0 \text{ m}^2$         | $e = 3$           | $K(2,1) = 293 \text{ °K}$ ,              |
| $h_a = 0 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°C}$                        | $s = 800 \text{ J/kg} \cdot \text{°C}$ | $L_x = 0.045 \text{ m}$       |                   | $K(2,7) = 1273 \text{ °K}$               |
| $h_b = 0 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°C}$                        | $z = 0.8$                              | $L_y = 2 \text{ m}$           |                   | $K(3,6) = 0 \text{ °K}$                  |
| $V_{max} = 50$   | $w = 5,669 \cdot 10^{-8}$              | $\Delta x = 0.0075 \text{ m}$ |                   | $Q(1,j) = 0, L(j) = 293 \text{ °K}$      |
|  |  | $\Delta y = 1 \text{ m}$      |                   | <b>Température initiale</b>              |
|  |  |                               |                   | $T_k = 293 \text{ °K}$                   |
|  |  |                               |                   | $\Delta t = 3 \text{ s}$                 |

**Conditions d'entrée**

$K(1, 1) = -2000 \text{ °K}$

$K(n, m) = -2000 \text{ °K}$

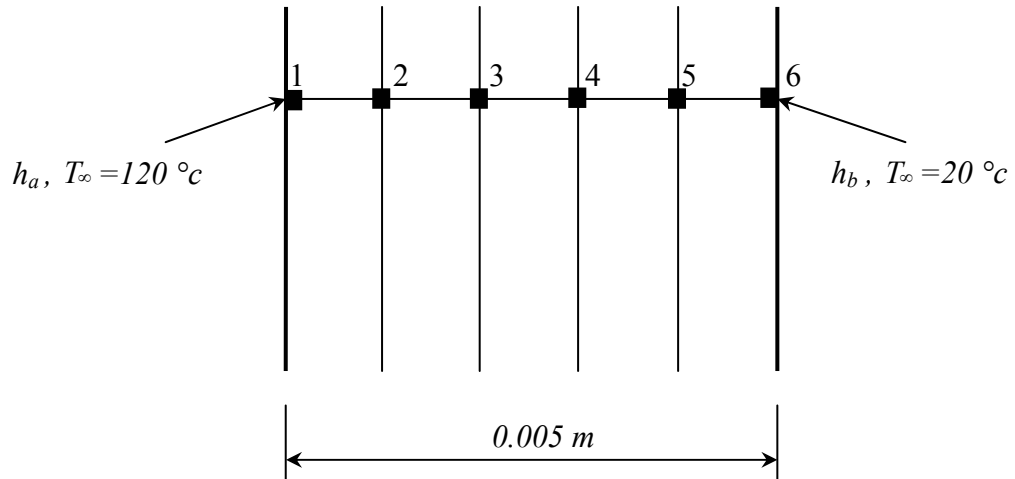
**Problème 4 : [2]****Mur plan avec sources de chaleur exposé à la convection sur deux côtés**

Fig. IV. 17 Mur plan avec sources de chaleur exposé à la convection sur deux côtés

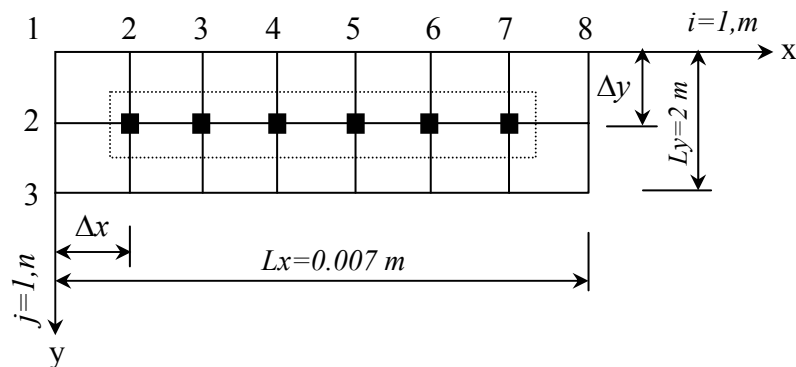


Fig. IV. 18 Maillage du Mur plan avec sources de chaleur exposé à la convection sur deux côtés

**Données du problème :**

| <b>Matériau</b>                              |                                    | <b>Géométrie</b>           |                 | <b>Conditions aux limites</b>                  |
|--|------------------------------------|----------------------------|-----------------|--|
| $xk=19 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$     | $r=7800$                           | $Ax=3 \text{ m}^2$         | $d=0 \text{ m}$ | $K(1,2)=\dots=K(1,7)=0 \text{ }^\circ\text{C}$ |
| $h=0 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$     | $\text{kg/m}^3$                    | $Ay=0 \text{ m}^2$         | $e=3$           | $K(2,1)=120 \text{ }^\circ\text{C},$           |
| $h_a=400 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ | $s=460$                            | $Lx=0.007 \text{ m}$       |                 | $K(2,8)=20 \text{ }^\circ\text{C}$             |
| $h_b=500 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ | $J/\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}$ | $Ly=2 \text{ m}$           |                 | $K(3,2)=\dots=K(3,7)=0 \text{ }^\circ\text{C}$ |
| $V_{max}=3000$                               | $z=0$                              | $\Delta x=0.001 \text{ m}$ |                 | $Q(2,2)=25 \cdot 10^3 \text{ W},$              |
|  | $w=0$                              | $\Delta y=1 \text{ m}$     |                 | $Q(2,3)=\dots=Q(2,6)=50 \cdot 10^3 \text{ W}$  |
|  |                                    |                            |                 | $Q(2,7)=25 \cdot 10^3 \text{ W},$              |
|  |                                    |                            |                 | $L(j)=293 \text{ }^\circ\text{C}$              |
|  |                                    |                            |                 | <b>Température initiale</b>                    |
|  |                                    |                            |                 | $Tk=100 \text{ }^\circ\text{C}$                |
|  |                                    |                            |                 | $\Delta t=0.09 \text{ s}$                      |

**Conditions d'entrée**

$$K(1, 1)=-3000 \text{ }^\circ\text{C}$$

## IV- 6 Cas tri-dimensionnels

### IV- 6-1 La liste des identificateurs

**Table IV-2 Identificateurs et dénominations des programmes**

| <i>Identificateurs</i>                     | <i>Dénominations et unité de mesure</i>  |
|--|--|
| Tup, Tdn, Tlt,<br>Trt, Tsth, Tnth          | sont des températures prises comme des conditions aux limites en régimes permanent et variable, ( $^{\circ}C$ ou $^{\circ}K$ )   |
| L(i,j,k)                                   | température utilisée lorsqu'il y a un rayonnement ou variation du coefficient de convection en fonction de la température pour faciliter le calcul de résistances thermiques qui varient, ( $^{\circ}C$ ou $^{\circ}K$ ) |
| Q(i,j,k)                                   | source thermique pour chaque nœud, ( $W$ )   |
| C(i,j)                                     | Capacité thermique dans un nœud de coordonnées (i,j)   |
| F(i,j,k)                                   | Flux thermique partiel   |
| Flux                                       | Flux thermique à traversant un plan  |
| $\Delta x$                                 | Le pas en espace suivant l'axe X, ( $m$ )  |
| $\Delta y$                                 | Le pas en espace suivant l'axe Y, ( $m$ )  |
| $\Delta z$                                 | Le pas en espace suivant l'axe Z, ( $m$ )  |
| Lx   | Longueur suivant X, ( $m$ )  |
| Ly   | Longueur suivant Y, ( $m$ )  |
| Lz   | Longueur suivant Z, ( $m$ )  |
| Xk   | Coefficient de conduction thermique, ( $W/m^{\circ}C$ )  |
| h  | Coefficient de convection, ( $W/m^2^{\circ}C$ )  |
| S  | Chaleur spécifique, ( $J/kg^{\circ}C$ )  |
| R  | Masse volumique, ( $kg/m^3$ )  |
| 1/Rx(i,j,k),<br>1/Ry(i,j,k)<br>1/Rz(i,j,k) | conductances thermiques selon l'axe x, y ou z pour un nœud (i, j, k)   |
| condx, condy,<br>condz                     | Résistances thermiques selon l'axe x, y ou z   |
| $\Delta t$                                 | Le pas du temps (incrément), ( $s$ )   |
| K <sub>max</sub>                           | Nombre d'itération (régime permanent)  |
| V <sub>max</sub>                           | Nombre d'incrément en temps (régime variable)  |

## **IV-6-2 Méthode de calcul**

La méthode de calcul élaborée pour le cas tridimensionnel suit le même algorithme que celui décrit dans le cas bi-dimensionnel.

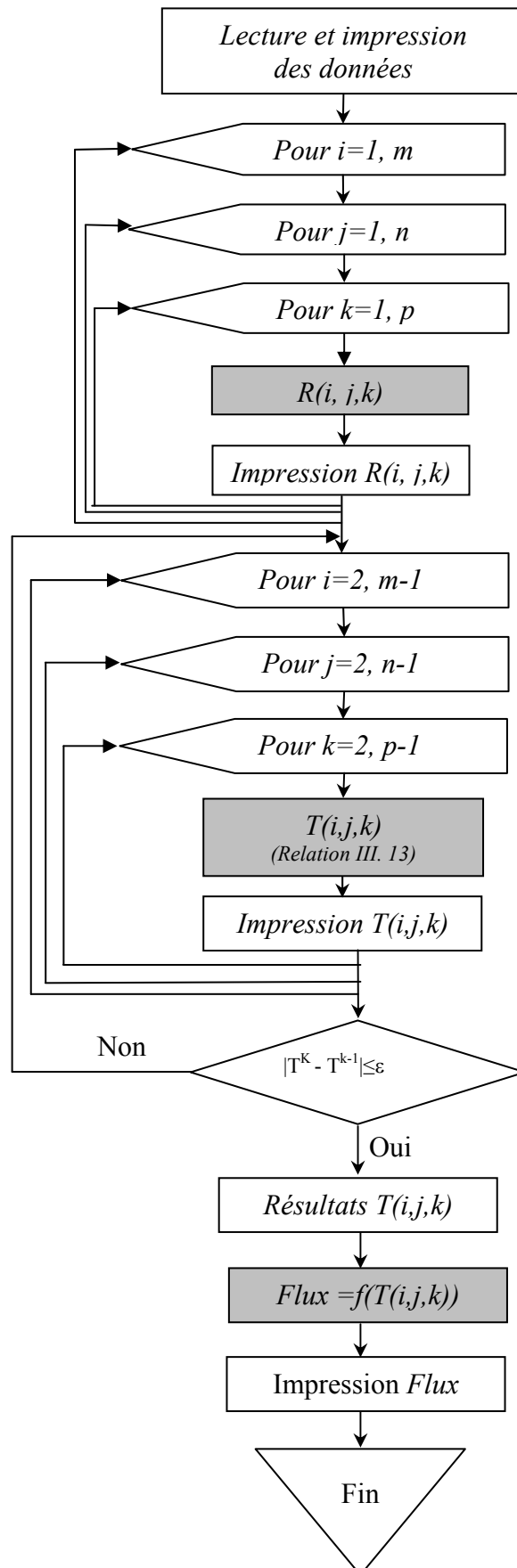
### **IV-6-2-1 Régime permanent**

- Entrée des données du problème.
- Entrée des conditions initiales.
- Entrée des températures de frontières et les sources de chaleur.
- Calcul des résistances thermiques pour chaque nœud.
- Calcul du champ de température.
- Calcul de flux.

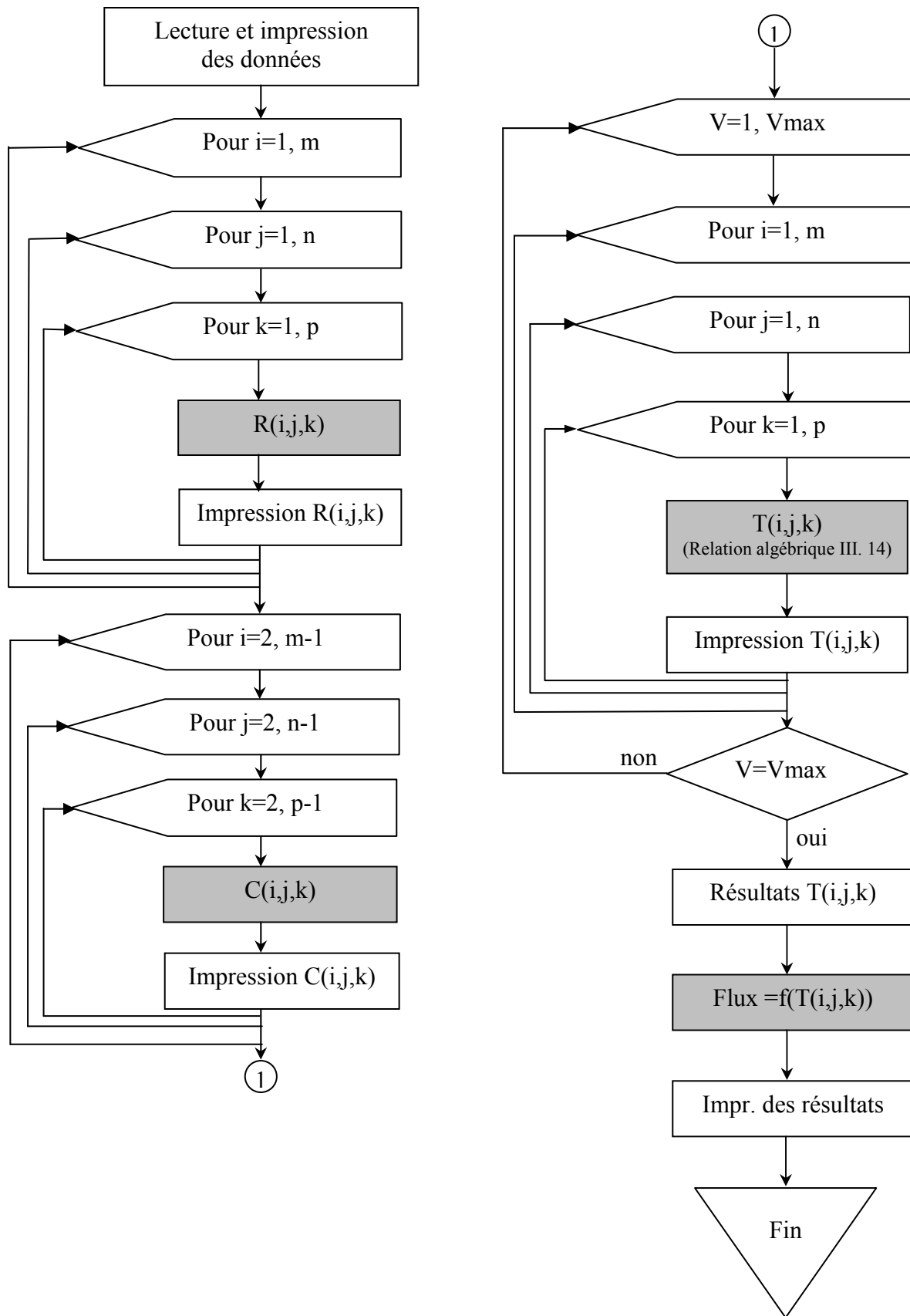
### **IV-6-2-2 Régime non-permanent**

- Entrée des données du problème.
- Entrée des conditions initiales.
- Entrée des températures de frontières et les sources de chaleur.
- Calcul des résistances thermiques pour chaque nœud.
- Calcul des capacités thermiques des nœuds.
- Calcul du champ de température.
- Calcul de flux.

## Organigramme du programme de calcul (régime permanent)



**Organigramme du programme de calcul (régime non-permanent)**





**IV-7 Applications****Problème 1 [ 16] :**

*Flux thermique à travers un cube*

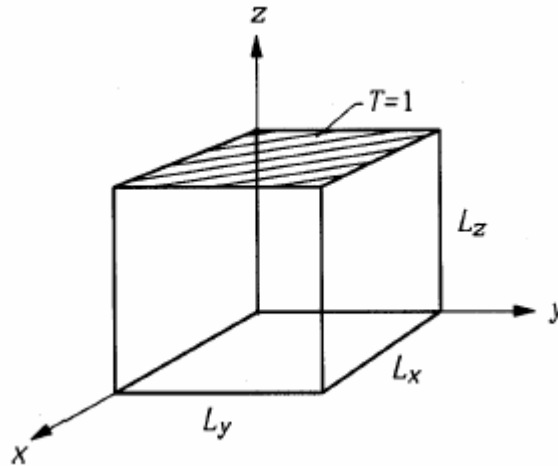


Fig. IV. 19 un cube ( $L_x=L_y=L_z$ ) avec  $T=1$  sur une face et  $T=0$  sur les autres

**Données du problème**

La température sur la surface  $z=L_z$  est égale à 1, et zéro degré sur les autres cotés.

Le coefficient de conductivité thermique  $k=1.0$  et les dimensions du cubes sont :  $L_x=1$ ,  $L_y=1$  et  $L_z=1$ .

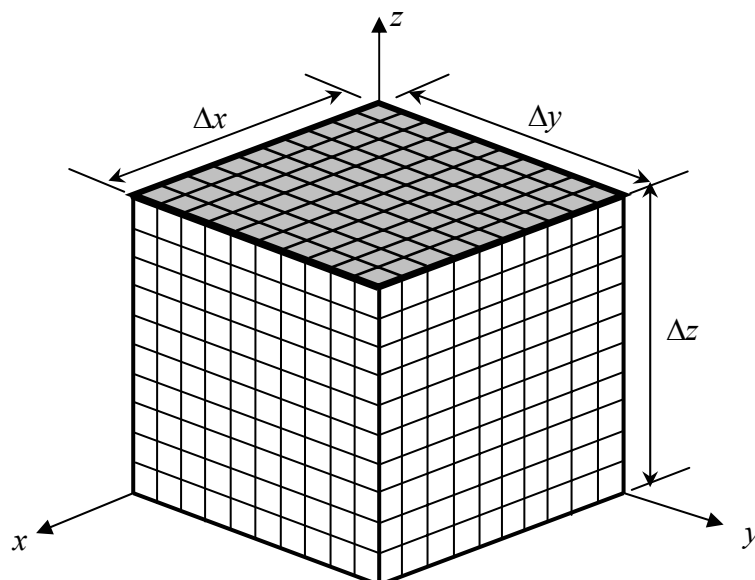


Fig. IV. 20 Maillage du cube

Dans ce chapitre, on va conclure notre travail par la présentation des résultats numériques obtenus par les programmes développés comparés à ceux de la littérature.

## V-1 Cas bi-dimensionnel

### V-1-1 Régime permanent

#### Problème 1 [2] :

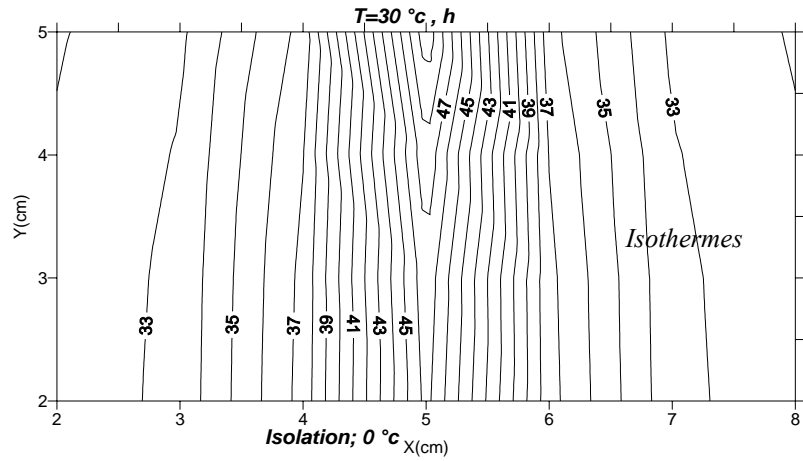
Table V-1-1-1 Conductances thermiques

| Nœud | $1/R_{i-1,j}$ |      | Taux | $1/R_{i+1,j}$ |      | Taux | $1/R_{i,j-1}$ |      | Taux | $1/R_{i,j+1}$ |      | Taux |
|------|---------------|------|------|---------------|------|------|---------------|------|------|---------------|------|------|
|      | Réf[2]        | Code |      | Réf[2]        | Code |      | Réf[2]        | Code |      | Réf[2]        | Code |      |
| 1    | 0.08          | 0.08 | 1    | 0.08          | 0.08 | 1    | 0.5           | 0.5  | 1    | 4             | 4    | 1    |
| 2    | 0.08          | 0.08 | 1    | 0.08          | 0.08 | 1    | 0.5           | 0.5  | 1    | 4             | 4    | 1    |
| 3    | 0.08          | 0.08 | 1    | 0.08          | 0.08 | 1    | 0.5           | 0.5  | 1    | 4             | 4    | 1    |
| 4    | 0.08          | 0.08 | 1    | 0.08          | 0.08 | 1    | 0.5           | 0.5  | 1    | 4             | 4    | 1    |
| 8    | 0.16          | 0.16 | 1    | 0.16          | 0.16 | 1    | 4             | 4    | 1    | 4             | 4    | 1    |
| 9    | 0.16          | 0.16 | 1    | 0.16          | 0.16 | 1    | 4             | 4    | 1    | 4             | 4    | 1    |
| 10   | 0.16          | 0.16 | 1    | 0.16          | 0.16 | 1    | 4             | 4    | 1    | 4             | 4    | 1    |
| 11   | 0.16          | 0.16 | 1    | 0.16          | 0.16 | 1    | 4             | 4    | 1    | 4             | 4    | 1    |
| 15   | 0.16          | 0.16 | 1    | 0.16          | 0.16 | 1    | 4             | 4    | 1    | 4             | 4    | 1    |
| 16   | 0.16          | 0.16 | 1    | 0.16          | 0.16 | 1    | 4             | 4    | 1    | 4             | 4    | 1    |
| 17   | 0.16          | 0.16 | 1    | 0.16          | 0.16 | 1    | 4             | 4    | 1    | 4             | 4    | 1    |
| 18   | 0.16          | 0.16 | 1    | 0.16          | 0.16 | 1    | 4             | 4    | 1    | 4             | 4    | 1    |
| 22   | 0.08          | 0.08 | 1    | 0.08          | 0.08 | 1    | 4             | 4    | 1    | 0             | 0    | 1    |
| 23   | 0.08          | 0.08 | 1    | 0.08          | 0.08 | 1    | 4             | 4    | 1    | 0             | 0    | 1    |
| 24   | 0.08          | 0.08 | 1    | 0.08          | 0.08 | 1    | 4             | 4    | 1    | 0             | 0    | 1    |
| 25   | 0.08          | 0.08 | 1    | 0.08          | 0.08 | 1    | 4             | 4    | 1    | 0             | 0    | 1    |

Table V-1-1-2 Température et flux

| Nœud    |       | T(°c)    |          |        |
|---------|-------|----------|----------|--------|
| Réf [2] | Code  | Réf [2]  | Code     | Taux   |
| 1       | (2,2) | 31.90309 | 31.90306 | 1.0000 |
| 2       | (2,3) | 32.78716 | 32.78714 | 1.0000 |
| 3       | (2,4) | 36.35496 | 36.35494 | 1.0000 |
| 4       | (2,5) | 49.81266 | 49.81263 | 1.0000 |
| 8       | (3,2) | 32.10561 | 32.10555 | 1.0000 |
| 9       | (3,3) | 33.08189 | 33.08186 | 1.0000 |
| 10      | (3,4) | 36.95154 | 36.95151 | 1.0000 |
| 11      | (3,5) | 47.82755 | 47.82752 | 1.0000 |
| 15      | (4,2) | 32.23003 | 32.23000 | 1.0000 |
| 16      | (4,3) | 33.26087 | 33.26085 | 1.0000 |
| 17      | (4,4) | 37.26785 | 37.26787 | 1.0000 |
| 18      | (4,5) | 46.71252 | 46.71249 | 1.0000 |
| 22      | (5,2) | 32.27198 | 32.27196 | 1.0000 |
| 23      | (5,3) | 33.32081 | 33.32079 | 1.0000 |
| 24      | (5,4) | 37.36667 | 37.36664 | 1.0000 |
| 25      | (5,5) | 46.35306 | 46.35304 | 1.0000 |

| Flux (W/m) |          |
|------------|----------|
| Réf [2]    | Code     |
| 19.999995  | 19.99993 |



**Problème 2 [2] :**

Table V-1-1-3 Conductances thermiques

| Nœud | $1/R_{i-1,i}$ |          | Taux | $1/R_{i+1,i}$ |          | Taux | $1/R_{i,j-1}$ |        | Taux | $1/R_{i,j+1}$ |       | Taux |
|------|---------------|----------|------|---------------|----------|------|---------------|--------|------|---------------|-------|------|
|      | Réf[2]        | Code     |      | Réf[2]        | Code     |      | Réf[2]        | Code   |      | Réf[2]        | Code  |      |
| 1    | 0.15          | 0.15     | 1    | 0.667         | 0.66667  | 1    | 0.3125        | 0.3125 | 1    | 1.65          | 1.65  | 1    |
| 2    | 0.667         | 0.66667  | 1    | 0.667         | 0.66667  | 1    | 0.375         | 0.375  | 1    | 3             | 3     | 1    |
| 3    | 0.667         | 0.66667  | 1    | 0.667         | 0.66667  | 1    | 0.375         | 0.375  | 1    | 3             | 3     | 1    |
| 4    | 0.3           | 0.3      | 1    | 1.3333        | 1.33333  | 1    | 1.65          | 1.65   | 1    | 1.65          | 1.65  | 1    |
| 5    | 1.3333        | 1.33333  | 1    | 1.3333        | 1.33333  | 1    | 3             | 3      | 1    | 3             | 3     | 1    |
| 6    | 1.3333        | 1.33333  | 1    | 1.3333        | 1.33333  | 1    | 3             | 3      | 1    | 3             | 3     | 1    |
| 7    | 0.3           | 0.3      | 1    | 1.3333        | 1.33333  | 1    | 1.65          | 1.65   | 1    | 1.65          | 1.65  | 1    |
| 8    | 1.3333        | 1.33333  | 1    | 1.3333        | 1.33333  | 1    | 3             | 3      | 1    | 3             | 3     | 1    |
| 9    | 1.3333        | 1.33333  | 1    | 1.3333        | 1.33333  | 1    | 3             | 3      | 1    | 3             | 3     | 1    |
| 10   | 0.3           | 0.3      | 1    | 1.3333        | 1.33333  | 1    | 1.65          | 1.65   | 1    | 1.65          | 1.65  | 1    |
| 11   | 1.3333        | 1.33333  | 1    | 1.3333        | 1.33333  | 1    | 3             | 3      | 1    | 3             | 3     | 1    |
| 12   | 1.3333        | 1.33333  | 1    | 1.3333        | 1.33333  | 1    | 3             | 3      | 1    | 3             | 3     | 1    |
| 13   | 0.3           | 0.3      | 1    | 0.76667       | 0.766667 | 1    | 1.65          | 1.65   | 1    | 0.375         | 0.375 | 1    |
| 14   | 0.76667       | 0.766667 | 1    | 0.76667       | 0.766667 | 1    | 3             | 3      | 1    | 0.45          | 0.45  | 1    |
| 15   | 0.76667       | 0.766667 | 1    | 0.76667       | 0.766667 | 1    | 3             | 3      | 1    | 0.45          | 0.45  | 1    |

Table V-1-1-4 Température et flux

| Nœud    |       | T(°c)   |          |        |
|---------|-------|---------|----------|--------|
| Réf [2] | Code  | Réf [2] | Code     | Taux   |
| 1       | (2,2) | 254.956 | 254.951  | 1.0000 |
| 2       | (2,3) | 247.637 | 247.6408 | 1.0000 |
| 3       | (2,4) | 244.454 | 244.457  | 1.0000 |
| 4       | (3,2) | 287.334 | 287.3398 | 1.0000 |
| 5       | (3,3) | 273.921 | 273.9267 | 1.0000 |
| 6       | (3,4) | 269.844 | 269.8491 | 1.0000 |
| 7       | (4,2) | 310.067 | 310.0735 | 1.0000 |
| 8       | (4,3) | 296.057 | 296.0634 | 1.0000 |
| 9       | (4,4) | 291.610 | 291.6167 | 1.0000 |
| 10      | (5,2) | 327.77  | 327.7784 | 1.0000 |
| 11      | (5,3) | 313.941 | 313.9499 | 1.0000 |
| 12      | (5,4) | 309.423 | 309.4317 | 1.0000 |
| 13      | (6,2) | 343.516 | 343.5266 | 1.0000 |
| 14      | (6,3) | 327.688 | 327.6983 | 1.0000 |
| 15      | (6,4) | 323.220 | 323.2306 | 1.0000 |

| Flux (W/m) |          |
|------------|----------|
| Réf [2]    | Code     |
| 384.29     | 384.2527 |

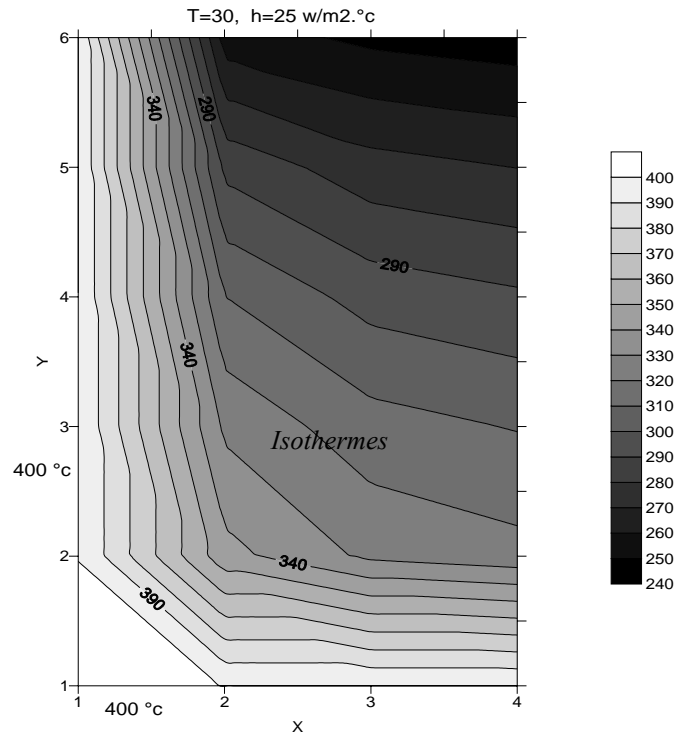


Fig. V. 1 Le champ de température ( isothermes) à travers la plaque composée.

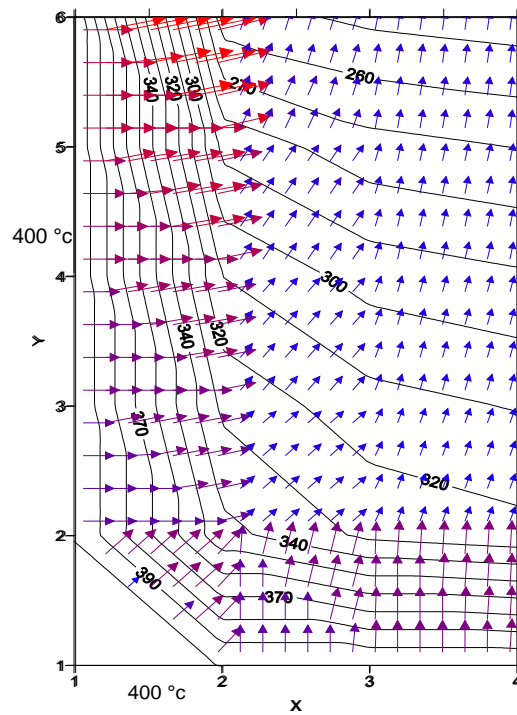


Fig. V. 2 Les sens de propagation de la chaleur à travers la plaque composée.

**Problème 3 [2] :**

Table V-1-1-5 Conductances thermiques

| Nœud | $1/R_{i-1,j}$ |      | Taux | $1/R_{i+1,j}$ |      | Taux | $1/R_{i,j-1}$ |          | Taux | $1/R_{i,j+1}$ |          | Taux |
|------|---------------|------|------|---------------|------|------|---------------|----------|------|---------------|----------|------|
|      | Réf[2]        | Code |      | Réf[2]        | Code |      | Réf[2]        | Code     |      | Réf[2]        | Code     |      |
|      | 1             | 1.5  |      | 1.5           | 1    |      | 1.5           | 1.5      |      | 1             | 0.689383 |      |
| 2    | 1.5           | 1.5  | 1    | 1.5           | 1.5  | 1    | 0.689383      | 0.689383 | 1    | 3             | 3        | 1    |
| 4    | 3             | 3    | 1    | 3             | 3    | 1    | 3             | 3        | 1    | 3             | 3        | 1    |
| 5    | 3             | 3    | 1    | 3             | 3    | 1    | 3             | 3        | 1    | 3             | 3        | 1    |
| 7    | 1.5           | 1.5  | 1    | 1.5           | 1.5  | 1    | 3             | 3        | 1    | 0             | 0        | 1    |
| 8    | 1.5           | 1.5  | 1    | 1.5           | 1.5  | 1    | 3             | 3        | 1    | 0             | 0        | 1    |

Table V-1-1-6 Températures [2]

|           |   | T (°k)   |         |          |          |          |          |
|-----------|---|----------|---------|----------|----------|----------|----------|
| Nœud      |   | 1        | 2       | 4        | 5        | 7        | 8        |
| Itération | 1 | 990.84   | 944.929 | 1076.181 | 1041.934 | 1098.951 | 1070.442 |
|           | 2 | 1026.263 | 991.446 | 1095.279 | 1068.233 | 1113.622 | 1090.927 |
|           | 3 | 1019.879 | 982.979 | 1095.827 | 1063.462 | 1110.967 | 1087.215 |
|           | 4 | 1021.056 | 984.548 | 1092.464 | 1064.344 | 1111.457 | 1087.901 |
|           | 5 | 1020.84  | 984.260 | 1092.347 | 1064.182 | 1111.367 | 1087.775 |
|           | 6 | 1020.879 | 984.313 | 1092.369 | 1064.212 | 1111.384 | 1087.798 |

Table V-1-1-7 Températures [Code]

|           |   | T (°k)    |           |           |           |           |           |
|-----------|---|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Nœud      |   | 1 → (2,2) | 2 → (2,3) | 4 → (2,4) | 5 → (3,2) | 7 → (3,3) | 8 → (3,4) |
| Itération | 1 | 990.8397  | 944.9285  | 1076.181  | 1041.933  | 1098.951  | 1070.442  |
|           | 2 | 1026.263  | 991.4466  | 1095.279  | 1068.233  | 1113.621  | 1090.927  |
|           | 3 | 1019.879  | 982.9792  | 1095.827  | 1063.462  | 1110.967  | 1087.214  |
|           | 4 | 1021.056  | 984.5484  | 1092.464  | 1064.344  | 1111.457  | 1087.901  |
|           | 5 | 1020.84   | 984.2592  | 1092.347  | 1064.182  | 1111.367  | 1087.774  |
|           | 6 | 1020.879  | 984.3126  | 1092.369  | 1064.212  | 1111.384  | 1087.798  |

Table V-1-1-8 Flux thermique

| Flux (W/m) |          | Taux   |
|------------|----------|--------|
| Réf [2]    | Code     |        |
| 1125.07    | 1125.067 | 1.0000 |

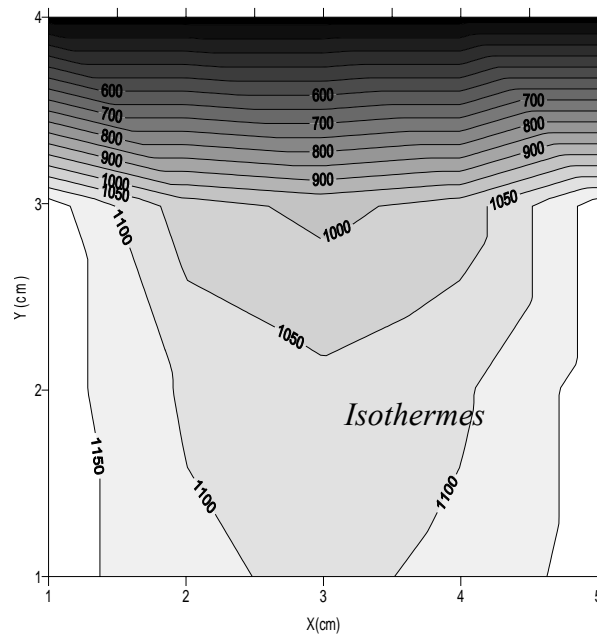


Fig. V. 5 Le champ de thermique à travers la plaque de céramique.

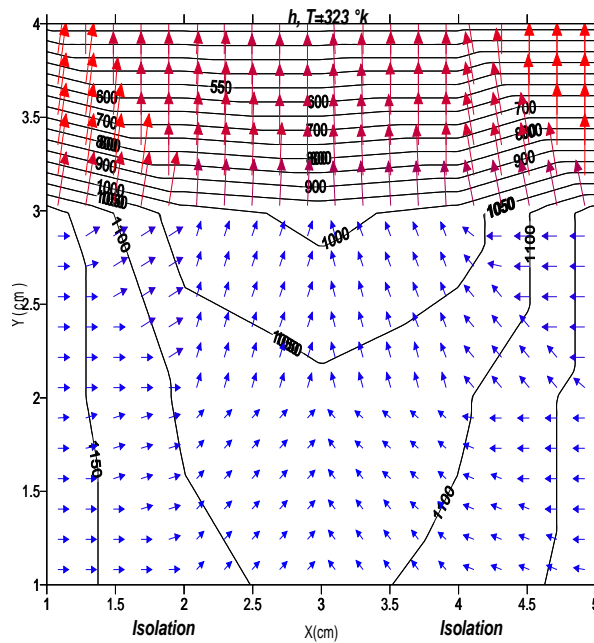


Fig. V. 6 Les sens de propagation de la chaleur à travers la plaque de céramique.

**Problème 4 [16] :***Table V-1-1-9 Conductances thermiques calculées*

| Nœud  | $1/R_{i-1,j}$ | $1/R_{i+1,j}$ | $1/R_{i,j-1}$ | $1/R_{i,j+1}$ | Nœud  | $1/R_{i-1,j}$ | $1/R_{i+1,j}$ | $1/R_{i,j-1}$ | $1/R_{i,j+1}$ |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| (2,2) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           | (4,8) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           |
| (2,3) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           | (5,2) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           |
| (2,4) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           | (5,3) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           |
| (2,5) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           | (5,7) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           |
| (2,6) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           | (5,8) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           |
| (3,2) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           | (6,2) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           |
| (3,3) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           | (6,3) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           |
| (3,7) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           | (6,4) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           |
| (3,8) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           | (6,5) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           |
| (4,2) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           | (6,6) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           |
| (4,3) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           | (6,7) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           |
| (4,7) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           | (6,8) | 0.2           | 0.2           | 0.2           | 0.2           |

*Table V-1-1-10 Températures (Après 11 itérations)*

| Nœud            | T(°c)    |        |        |
|-----------------|----------|--------|--------|
|                 | Réf [16] | Code   | Taux   |
| <i>externes</i> | 50.0     | 50.0   | 1.0000 |
| (2,2)           | 185.0    | 185.0  | 1.0000 |
| (2,3)           | 295.0    | 295.0  | 1.0000 |
| (2,4)           | 330.0    | 330.0  | 1.0000 |
| (2,5)           | 295.0    | 295.0  | 1.0000 |
| (2,6)           | 185.0    | 185.0  | 1.0000 |
| (3,2)           | 345.0    | 345.0  | 1.0000 |
| (3,3)           | 617.0    | 617.0  | 1.0000 |
| (3,4)           | 678.0    | 678.0  | 1.0000 |
| (3,5)           | 617.0    | 617.0  | 1.0000 |
| (3,6)           | 345.0    | 345.0  | 1.0000 |
| (4,2)           | 527.0    | 527.0  | 1.0000 |
| (4,6)           | 527.0    | 527.0  | 1.0000 |
| (5,2)           | 563.0    | 563.0  | 1.0000 |
| (5,6)           | 564.0    | 564.0  | 1.0000 |
| <i>internes</i> | 1150.0   | 1150.0 | 1.0000 |

Dans ce problème, la comparaison des conductances thermiques calculés avec les résultats de la référence [4] n'est pas possible, sachant que la solution en [4] est basée sur la méthode classique.



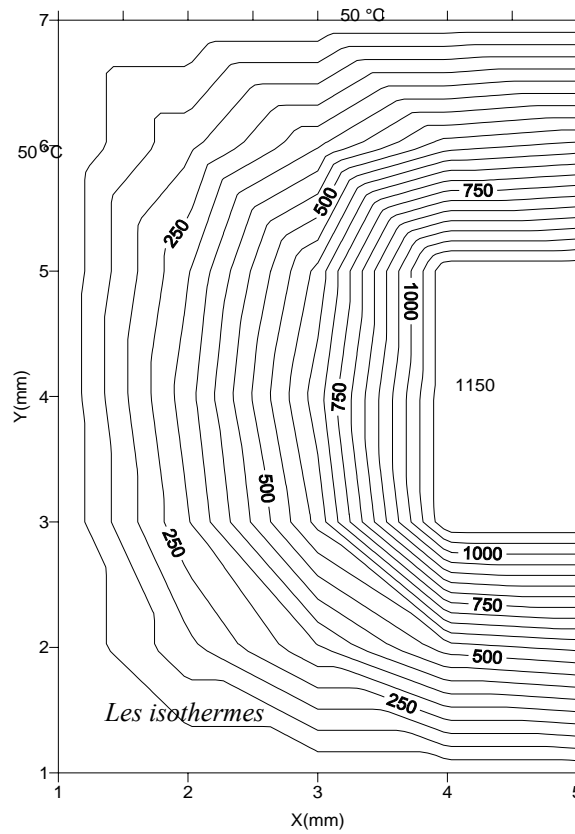


Fig. V. 7 La répartition des isothermes à travers les murs du four axisymétrique.

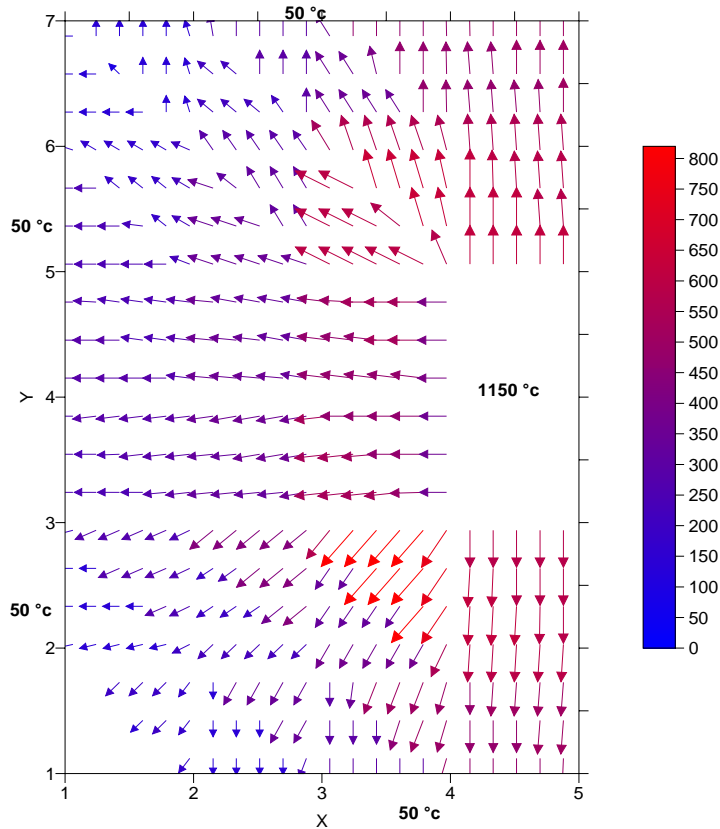


Fig. V. 8 Le sens de propagation de la chaleur à travers le four axisymétrique.

**Problème 5 : [4, 28]****Cheminée axisymétrique**

Pour ce problème, la solution de référence [4] est basée sur la méthode de relaxation. En référence [28] la solution est basée sur la méthode des éléments finis. La méthode des résistances n'est pas utilisée ni en [4] ni en [12], donc, on se limite à la comparaison des champs de température.

Les résultats numériques du problèmes sont calculées cette fois avec la méthode de relaxation ainsi que la méthode de Gauss-Seidel, ceci permet leurs validation avec ceux en [4] et montre l'effet du coefficient de relaxation sur la convergence de la solution par rapport à la méthode de Gauss-Seidel. Le programme traitant cette application dispose d'un mailleur automatique, l'utilisateur peut changer facilement le maillage.

Table V-1-1-11 *Températures (Après 12 itérations)*

| Nœud            | T(°c)   |          |       | Taux/[4] |
|-----------------|---------|----------|-------|----------|
|                 | Réf [4] | Réf [28] | Code  |          |
| <i>externes</i> | 0       | 0        | 0     | 1.00     |
| (2,2)           | 4.7     | 5.0      | 4.7   | 1.00     |
| (2,3)           | 11.7    | 12.5     | 11.7  | 1.00     |
| (2,4)           | 18.3    | 17.3     | 18.3  | 1.00     |
| (2,5)           | 21.4    | 21.1     | 21.4  | 1.00     |
| (2,6)           | 22.2    | 22.1     | 22.2  | 1.00     |
| (3,3)           | 29.6    | 27.6     | 29.6  | 1.00     |
| (3,4)           | 47.5    | 47.7     | 47.5  | 1.00     |
| (3,5)           | 54.6    | 54.9     | 54.6  | 1.00     |
| (3,6)           | 56.3    | 56.8     | 56.3  | 1.00     |
| (4,4)           | 87.6    | 87.8     | 87.6  | 1.00     |
| (4,5)           | 93.2    | 93.2     | 93.2  | 1.00     |
| (4,6)           | 93.7    | 93.6     | 93.7  | 1.00     |
| <i>internes</i> | 100.0   | 100.0    | 100.0 | 1.00     |

**Remarques :**

- la méthode de Gauss-Seidel converge en 17 itérations.
- la méthode de relaxation converge en 12 itérations avec un  $\omega=1.2$  non optimal.

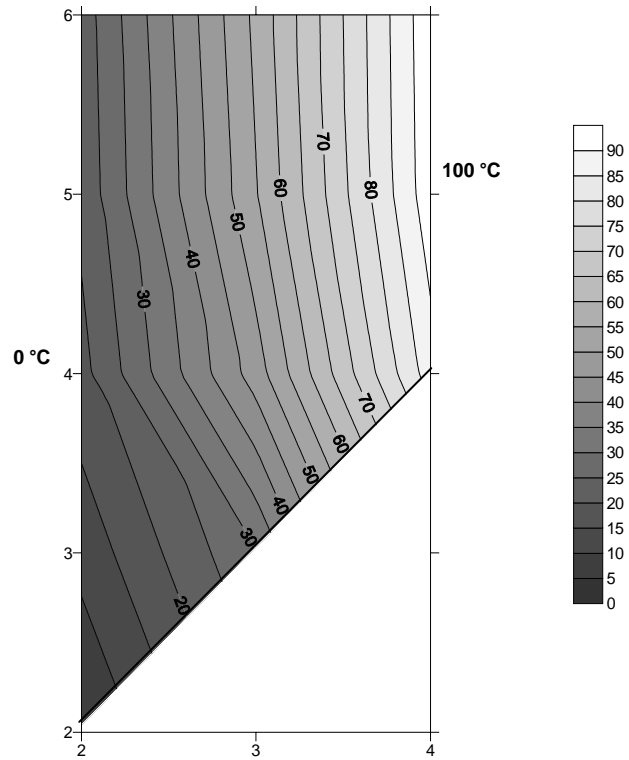


Fig. V. 9 La répartition des isothermes à travers les parois de la cheminée axisymétrique (1/8 de la section est utilisé).

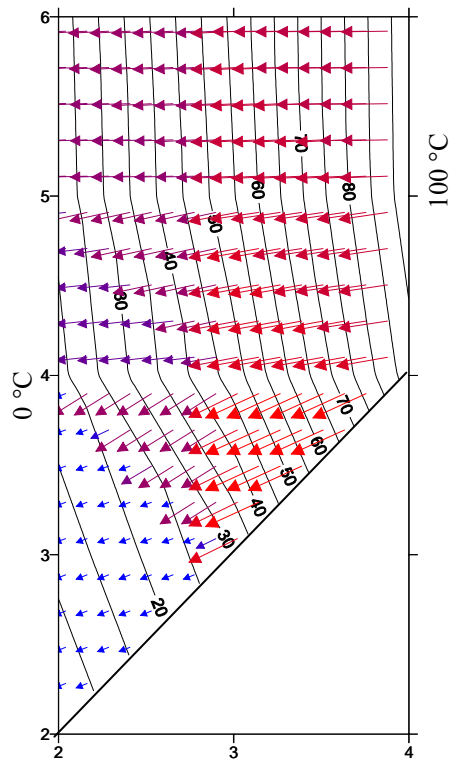


Fig. V. 10 Le sens de propagation de la chaleur à travers 1/8 de la cheminée.

## V-1-2 Régime Non-permanent

### Problème 1 [2] :

Table V-1-2-1 Conductances et Capacités

| Nœud   |       | $1/R_{i-1,j}$ |        | $1/R_{i+1,j}$ |        | $1/R_{i,j-1}$ |        | $1/R_{i,j+1}$ |           | Cap    |      | $\frac{Cap}{\sum(1/R)}$ |          |
|--------|-------|---------------|--------|---------------|--------|---------------|--------|---------------|-----------|--------|------|-------------------------|----------|
| Réf[2] | Code  | Réf[2]        | Code   | Réf[2]        | Code   | Réf[2]        | Code   | Réf[2]        | Code      | Réf[2] | Code | Réf[2]                  | Code     |
| 1      | (2,2) | 0.6667        | 0.6667 | 0.6667        | 0.6667 | 1             | 1      | 0.3333        | 0.3333    | 16     | 16   | 2.286                   | 2.285714 |
| 2      | (2,3) | 0.6667        | 0.6667 | 0.6667        | 0.6667 | 1             | 1      | 0.3333        | 0.3333    | 16     | 16   | 2.286                   | 2.285714 |
| 4      | (3,2) | 0.3333        | 0.3333 | 0.3333        | 0.3333 | 0.3333        | 0.3333 | 0.3333        | 0.3333    | 32     | 32   | 2.667                   | 2.666667 |
| 5      | (3,3) | 0.3333        | 0.3333 | 0.3333        | 0.3333 | 0.3333        | 0.3333 | 0.3333        | 0.3333    | 32     | 32   | 2.667                   | 2.666667 |
| 7      | (4,2) | 0.6667        | 0.6667 | 0.6667        | 0.6667 | 0.3333        | 0.3333 | $10^{13}$     | $10^{13}$ | 16     | 16   | 2.667                   | 2.666667 |
| 8      | (4,3) | 0.6667        | 0.6667 | 0.6667        | 0.6667 | 0.3333        | 0.3333 | $10^{13}$     | $10^{13}$ | 16     | 16   | 2.667                   | 2.666667 |

Table V-1-2-2 Températures

| Nœud                     |   | T (°k) |          |        |          |        |          |        |          |        |          |        |          |
|--------------------------|---|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|----------|
|                          |   | 1      |          | 2      |          | 4      |          | 5      |          | 7      |          | 8      |          |
|                          |   | Réf[2] | Code     | Réf[2] | Code     | Réf[2] | Code     | Réf[2] | Code     | Réf[2] | Code     | Réf[2] | Code     |
| Temps $\Delta t = 2.0$ s | 0 | 300    | 300      | 300    | 300      | 300    | 300      | 300    | 300      | 300    | 300      | 300    | 300      |
|                          | 1 | 268.75 | 268.75   | 268.7  | 268.7    | 300    | 300      | 300    | 300      | 300    | 300      | 300    | 300      |
|                          | 2 | 258.98 | 258.9844 | 253.13 | 253.125  | 294.14 | 294.1406 | 294.14 | 294.1406 | 300    | 300      | 300    | 300      |
|                          | 3 | 252.64 | 252.6367 | 245.31 | 245.3125 | 289.75 | 289.7461 | 287.55 | 287.5588 | 27.80  | 27.8027  | 297.8  | 297.8027 |
|                          | 4 | 248.73 | 248.7305 | 239.48 | 239.4836 | 285.81 | 285.8093 | 282.38 | 282.3763 | 295.19 | 295.1935 | 293.96 | 293.9575 |
|                          | 5 | 246.67 | 246.673  | 235.35 | 235.3504 | 282.63 | 282.6336 | 277.79 | 277.7927 | 292.34 | 292.3439 | 290.08 | 290.078  |
|                          | 6 | 243.32 | 243.3249 | 231.97 | 231.9684 | 279.87 | 279.8727 | 273.95 | 273.9536 | 289.71 | 289.7132 | 286.32 | 286.3207 |

Table V-1-2-3 Flux thermique

| Flux thermique               |                               | Taux   |
|------------------------------|-------------------------------|--------|
| Réf [2]                      | Code                          |        |
| $q=5572.3$ J/m               | $q=5571.785$ J/m              | 0.9999 |
| $\frac{q}{\Delta t}=464.4$ W | $\frac{q}{\Delta t}=464.31$ W | 0.9998 |

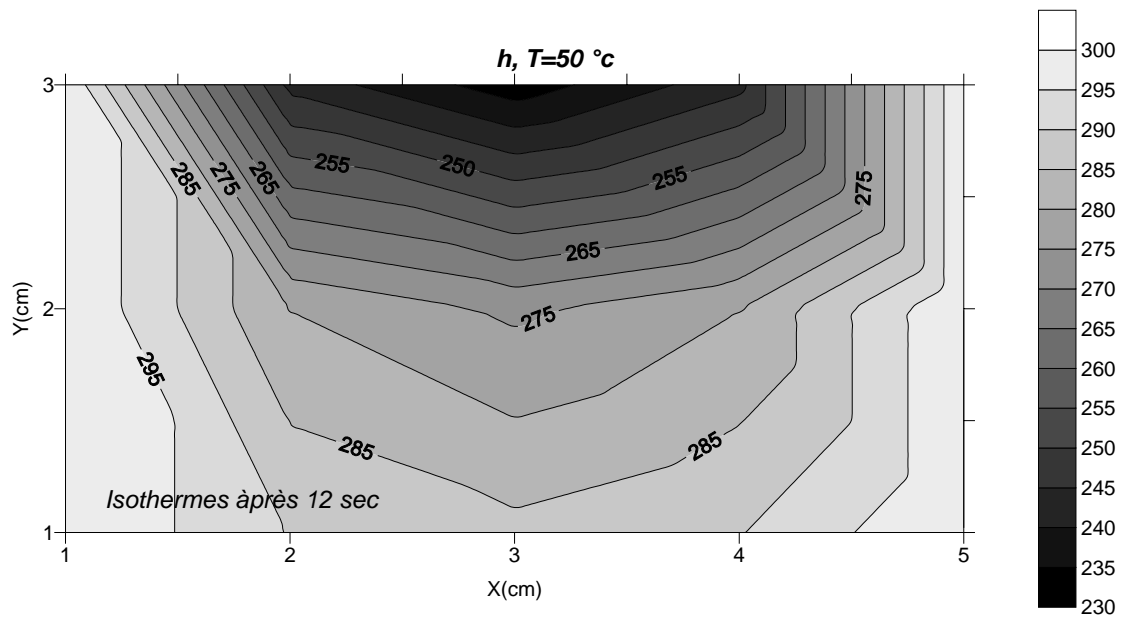


Fig. V. 11 La répartition des isothermes à travers la plaque de céramique.

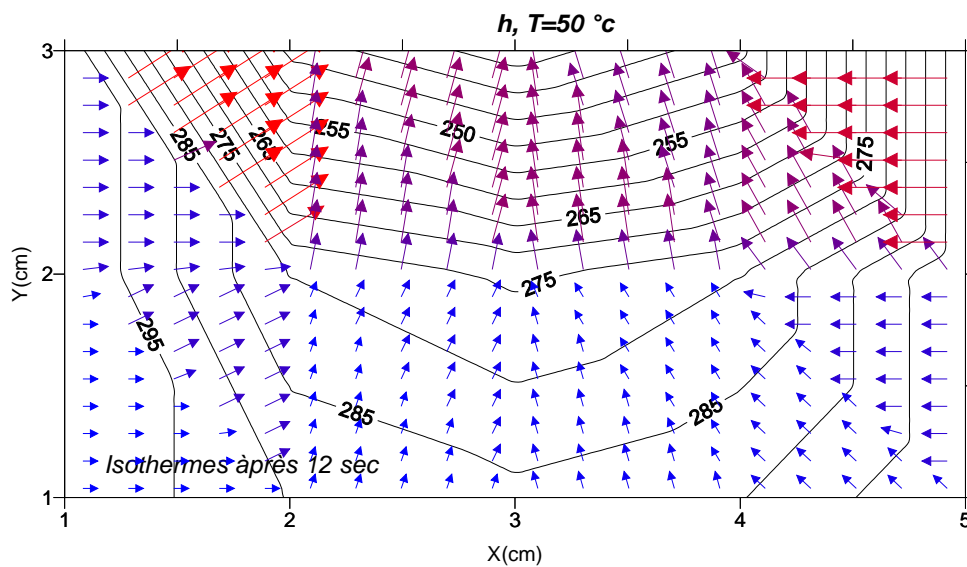


Fig. V. 12 Le sens de propagation de la chaleur à travers la plaque.

**Problème 2 [2] :**

Table V-1-2-4 Conductances et Capacités

| Nœud    |       | $1/R_{i-1,j}$ |          | $1/R_{i+1,j}$ |          | $1/R_{i,j-1}$ |          | Cap     |          | $\frac{Cap}{\sum(1/R)}$ |          |
|---------|-------|---------------|----------|---------------|----------|---------------|----------|---------|----------|-------------------------|----------|
| Réff[2] | Code  | Réff[2]       | Code     | Réff[2]       | Code     | Réff[2]       | Code     | Réff[2] | Code     | Réff[2]                 | Code     |
| 1       | (2,2) | 0.1884956     | 0.188496 | 0.1884956     | 0.188496 | 0.027769      | 0.027769 | 23.524  | 23.5243  | 58.11                   | 58.11898 |
| 2       | (2,3) | 0.1884956     | 0.188496 | 0.1884956     | 0.188496 | 0.027769      | 0.027769 | 23.524  | 23.5243  | 58.11                   | 58.11898 |
| 3       | (2,4) | 0.1884956     | 0.188496 | 0.1884956     | 0.188496 | 0.027769      | 0.027769 | 23.524  | 23.5243  | 58.11                   | 58.11898 |
| 4       | (2,5) | 0.1884956     | 0.188496 | 0.1884956     | 0.188496 | 0.027769      | 0.027769 | 23.524  | 23.5243  | 58.11                   | 58.11898 |
| 5       | (2,6) | 0.1884956     | 0.188496 | 0.00694471    | 0.006945 | 0.0138845     | 0.013884 | 11.762  | 11.76215 | 56.197                  | 56.19705 |

Table V-1-2-5 Températures

| Nœud                    |          | T (°k)     |          |      |            |          |            |          |            |          |            |           |
|-------------------------|----------|------------|----------|------|------------|----------|------------|----------|------------|----------|------------|-----------|
|                         |          | 1<br>(2,2) |          | Taux | 2<br>(2,3) |          | 3<br>(2,4) |          | 4<br>(2,5) |          | 5<br>(2,6) |           |
|                         |          | Réff[2]    | Code     |      | Réff[2]    | Code     | Réff[2]    | Code     | Réff[2]    | Code     | Réff[2]    | Code      |
| Temps $\Delta t = 50$ s | t=0 s    | 200        | 200      | 1.00 | 200        | 200      | 200        | 200      | 200        | 200      | 200        | 200       |
|                         | t=250 s  | 173        | 173.7278 | 1.00 | 161        | 161.6988 | 156        | 156.1752 | 153        | 153.0187 | 149        | 149.21106 |
|                         | t=500 s  | 163        | 163.7289 | 1.00 | 142        | 142.9605 | 131        | 131.3369 | 124        | 124.6901 | 120        | 120.7626  |
|                         | t=750 s  | 158        | 158.3041 | 1.00 | 132        | 132.7153 | 117        | 117.3998 | 108        | 108.6671 | 104        | 104.4225  |
|                         | t=1000 s | 155        | 155.2513 | 1.00 | 126        | 126.9205 | 109        | 109.4914 | 99         | 99.52588 | 95         | 95.09326  |
|                         | t=1250 s | 153        | 153.5095 | 1.00 | 123        | 123.6098 | 104        | 104.9628 | 94         | 94.28298 | 89         | 89.7349   |
|                         | t=1500 s | 151        | 151.1418 | 1.00 | 119        | 119.1025 | 98         | 98.78661 | 87         | 87.1203  | 82         | 82.40678  |

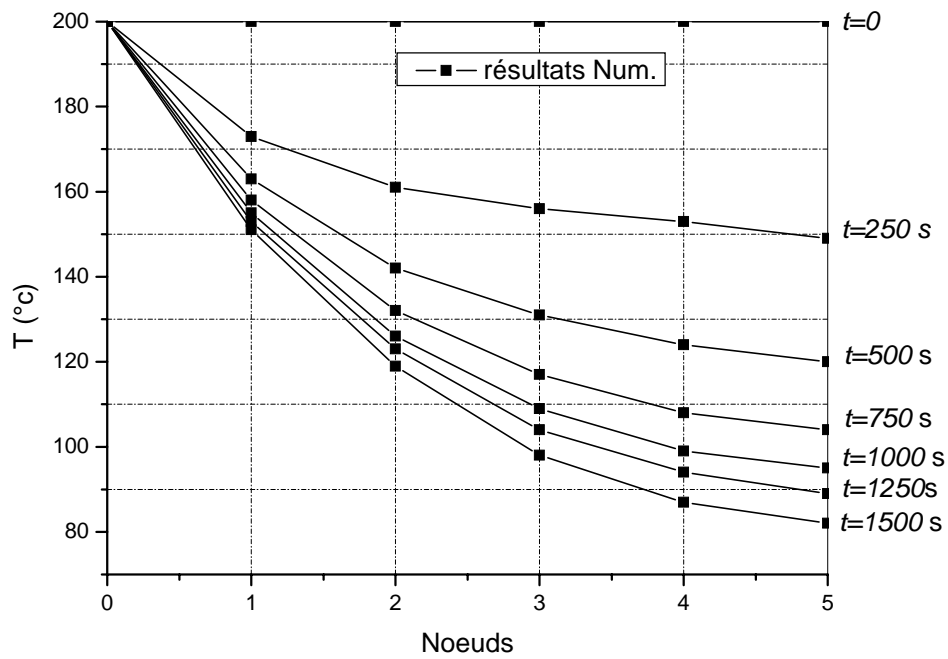


Fig. V. 13 La distribution de température à travers le cylindre plein en fonction du temps(résultats numériques).

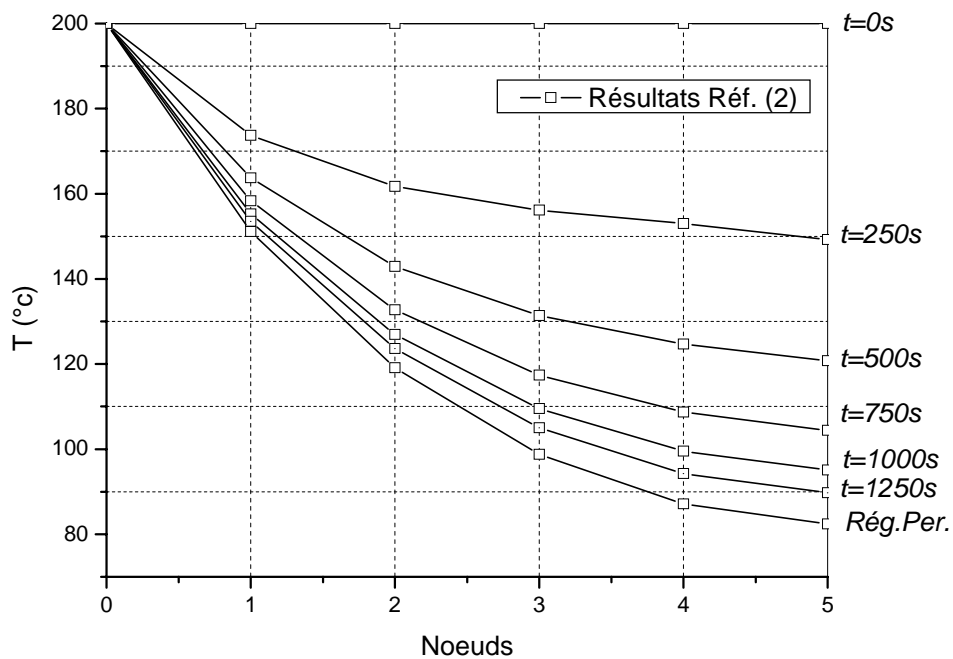


Fig. V. 14 La distribution de température à travers le cylindre plein en fonction du temps et en régime permanent (réf. [2]).

**Problème 3 [2] :**

Table V-1-2-6 Conductances et Capacités

| Nœud    |       | $1/R_{i-1,j}$ |          | $1/R_{i+1,j}$ |          | Cap     |      | $\frac{Cap}{\sum(1/R)}$ |          |
|---------|-------|---------------|----------|---------------|----------|---------|------|-------------------------|----------|
| Réff[2] | Code  | Réff[2]       | Code     | Réff[2]       | Code     | Réff[2] | Code | Réff[2]                 | Code     |
| 1       | (2,2) | 4.564         | 4.563093 | 400           | 400      | 4800    | 4800 | 11.86                   | 11.86465 |
| 2       | (2,3) | 400           | 400      | 400           | 400      | 9600    | 9600 | 12                      | 12       |
| 3       | (2,4) | 400           | 400      | 400           | 400      | 9600    | 9600 | 12                      | 12       |
| 4       | (2,5) | 400           | 400      | 400           | 400      | 9600    | 9600 | 12                      | 12       |
| 5       | (2,6) | 400           | 400      | 121.189       | 121.1891 | 4800    | 4800 | 9.43                    | 9.209709 |

Table V-1-2-7 Températures

| Nœud  | T (°k)     |      |          |            |      |            |      |            |      |            |      |          |
|-------|------------|------|----------|------------|------|------------|------|------------|------|------------|------|----------|
|       | 1<br>(2,2) |      | Taux     | 2<br>(2,3) |      | 3<br>(2,4) |      | 4<br>(2,5) |      | 5<br>(2,6) |      |          |
|       | Réff[2]    | Code |          | Réff[2]    | Code | Réff[2]    | Code | Réff[2]    | Code | Réff[2]    | Code |          |
| Temps | t=0 s      | 293  | 293      | 1.00       | 293  | 293        | 293  | 293        | 293  | 293        | 293  | 293      |
|       | t=15 s     | 293  | 293      | 1.00       | 293  | 293.145    | 300  | 300.7346   | 348  | 348.9133   | 531  | 531.9343 |
|       | t=30 s     | 296  | 296.0707 | 1.00       | 302  | 302.3627   | 333  | 333.7298   | 429  | 429.1659   | 640  | 640.7257 |
|       | t=45 s     | 307  | 307.783  | 1.00       | 321  | 321.8719   | 375  | 375.2301   | 496  | 496.6692   | 714  | 714.9544 |
|       | t=60 s     | 328  | 328.4518 | 1.00       | 348  | 348.8934   | 417  | 417.6275   | 553  | 553.3784   | 771  | 771.5734 |
|       | t=90 s     | 387  | 387.2181 | 1.00       | 414  | 414.8312   | 498  | 498.7696   | 644  | 644.8505   | 854  | 854.744  |
|       | t=120 s    | 456  | 456.1331 | 1.00       | 486  | 486.2242   | 573  | 573.556    | 717  | 717.9302   | 915  | 915.1797 |
|       | t=150 s    | 526  | 526.3872 | 1.00       | 556  | 556.7331   | 642  | 642.1096   | 779  | 779.6895   | 962  | 962.8892 |
|       | t=375 s    | 870  | 870.1238 | 1.00       | 892  | 892.9614   | 947  | 947.3126   | 1029 | 1029.504   | 1133 | 1133.40  |



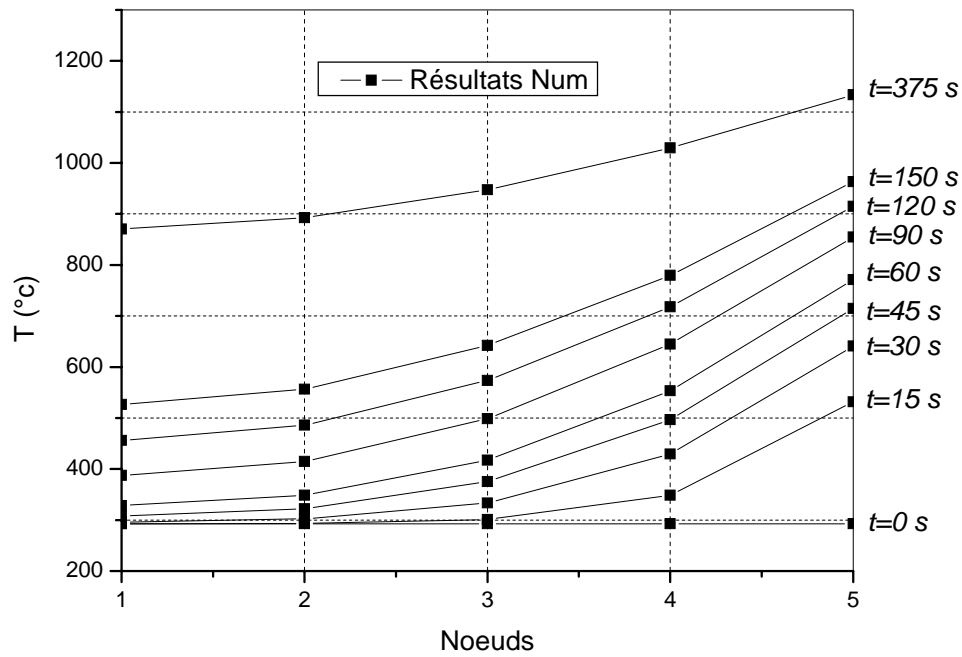


Fig. V. 15 La distribution de température à travers le mur en fonction du temps (résultats numériques).

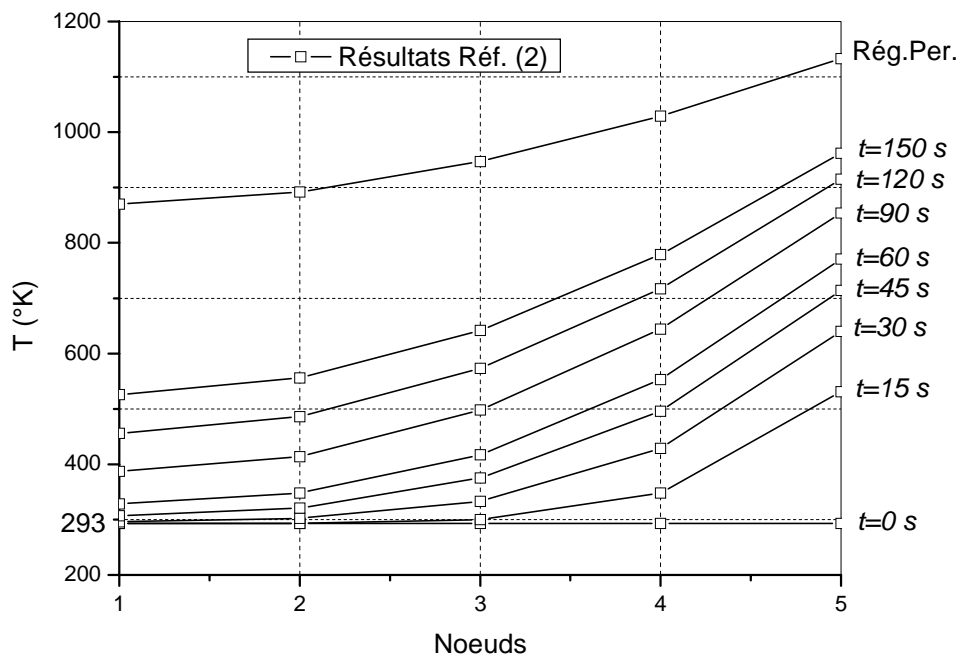


Fig. V. 16 La distribution de température à travers le mur en fonction du temps et en régime permanent (Réf [2]).

**Problème 4 [2] :**

Table V-1-2-8 Conductances et Capacités

| Nœud    |       | $1/R_{i-1,j}$ |           | $1/R_{i+1,j}$ |           | Cap     |      | $\frac{Cap}{\sum(1/R)}$ |          |
|---------|-------|---------------|-----------|---------------|-----------|---------|------|-------------------------|----------|
| Réff[2] | Code  | Réff[2]       | Code      | Réff[2]       | Code      | Réff[2] | Code | Réff[2]                 | Code     |
| 1       | (2,2) | 400           | 400       | $19.10^3$     | $19.10^3$ | 1794    | 1794 | 0.092                   | 0.092474 |
| 2       | (2,3) | $19.10^3$     | $19.10^3$ | $19.10^3$     | $19.10^3$ | 3588    | 3588 | 0.094                   | 0.094451 |
| 3       | (2,4) | $19.10^3$     | $19.10^3$ | $19.10^3$     | $19.10^3$ | 3588    | 3588 | 0.094                   | 0.094451 |
| 4       | (2,5) | $19.10^3$     | $19.10^3$ | $19.10^3$     | $19.10^3$ | 3588    | 3588 | 0.094                   | 0.094451 |
| 5       | (2,6) | $19.10^3$     | $19.10^3$ | $19.10^3$     | $19.10^3$ | 3588    | 3588 | 0.094                   | 0.094451 |
| 6       | (2,7) | $19.10^3$     | $19.10^3$ | 500           | 500       | 1794    | 1794 | 0.092                   | 0.092000 |

Table V-1-2-9 Températures

| Nœud  | T (°k)     |          |          |            |          |            |          |          |
|-------|------------|----------|----------|------------|----------|------------|----------|----------|
|       | 1<br>(2,2) |          | Taux     | 2<br>(2,3) |          | 3<br>(2,4) |          | Taux     |
|       | Réff[2]    | Code     |          | Réff[2]    | Code     | Réff[2]    | Code     |          |
| Temps | t=5 s      | 106.8826 | 106.8826 | 1.00       | 106.478  | 106.478    | 106.1888 | 106.1888 |
|       | t=20 s     | 123.0504 | 123.0504 | 1.00       | 122.8867 | 122.8866   | 122.1404 | 122.1404 |
|       | t=100 s    | 190.0725 | 190.0725 | 1.00       | 190.9618 | 190.9618   | 190.7033 | 190.7033 |
|       | t=200 s    | 246.3855 | 246.3855 | 1.00       | 248.1988 | 248.1988   | 248.3325 | 248.3326 |
|       | t=500 s    | 320.5766 | 320.5766 | 1.00       | 323.6071 | 323.6072   | 324.2577 | 324.2577 |
|       | t=800 s    | 346.0174 | 346.0175 | 1.00       | 343.5267 | 343.5267   | 344.3113 | 344.3137 |
|       | t=1200 s   | 346.0174 | 346.0175 | 1.00       | 349.4654 | 349.4655   | 350.2931 | 350.2932 |
|       | t=3000 s   | 347.2085 | 347.2083 | 1.00       | 350.676  | 350.6759   | 351.512  | 351.5119 |

Table V-1-2-10 Températures (suite)

| Nœud  | T (°k)     |          |          |            |          |          |            |          |          |      |
|-------|------------|----------|----------|------------|----------|----------|------------|----------|----------|------|
|       | 4<br>(2,5) |          | Taux     | 5<br>(2,6) |          | Taux     | 6<br>(2,7) |          | Taux     |      |
|       | Réf [2]    | Code     |          | Réf [2]    | Code     |          | Réf [2]    | Code     |          |      |
| Temps | t=5 s      | 105.3772 | 105.3772 | 1.00       | 104.4622 | 104.4622 | 1.00       | 102.4416 | 102.4416 | 1.00 |
|       | t=20 s     | 120.9763 | 120.9763 | 1.00       | 119.2217 | 119.2217 | 1.00       | 117.0056 | 117.0056 | 1.00 |
|       | t=100 s    | 189.3072 | 189.3072 | 1.00       | 186.7698 | 186.7698 | 1.00       | 183.0735 | 183.0735 | 1.00 |
|       | t=200 s    | 246.7933 | 246.7933 | 1.00       | 243.5786 | 243.5786 | 1.00       | 238.6773 | 238.6773 | 1.00 |
|       | t=500 s    | 322.5298 | 322.5298 | 1.00       | 318.4229 | 318.4229 | 1.00       | 311.9341 | 311.9341 | 1.00 |
|       | t=800 s    | 342.536  | 342.536  | 1.00       | 338.1934 | 338.1935 | 1.00       | 331.2853 | 331.2853 | 1.00 |
|       | t=1200 s   | 348.5006 | 348.5006 | 1.00       | 344.0877 | 344.0878 | 1.00       | 337.0546 | 337.0546 | 1.00 |
|       | t=3000 s   | 349.7165 | 349.7163 | 1.00       | 345.2893 | 345.2892 | 1.00       | 338.2305 | 338.2305 | 1.00 |

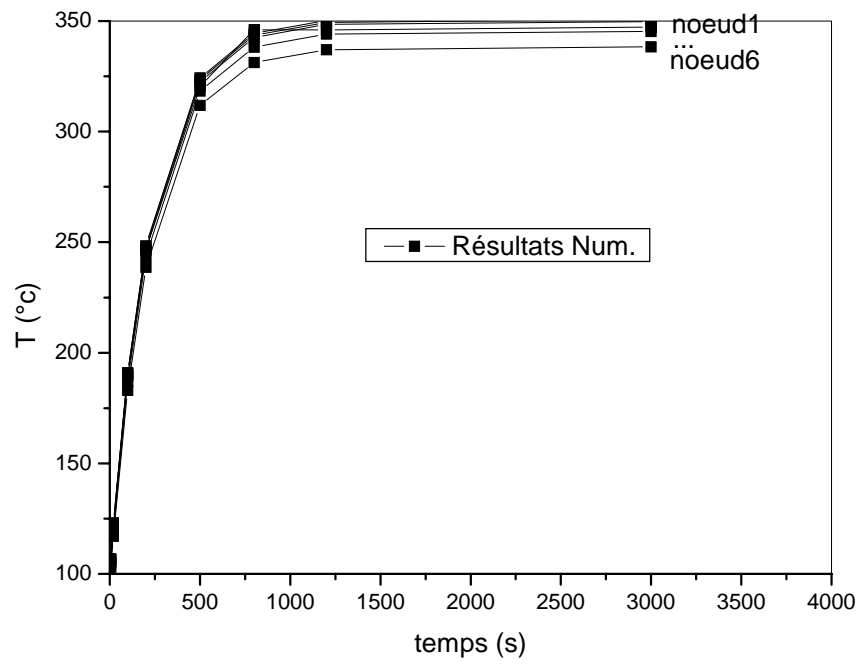


Fig. V. 17 L'évolution de température pour chaque nœud du mur plan en fonction du temps (résultats numériques).

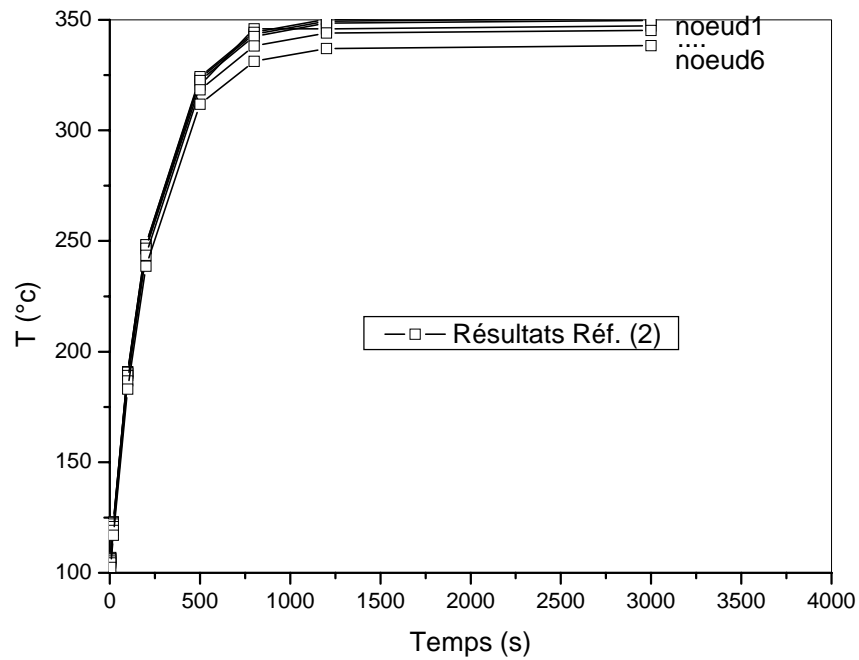


Fig. V. 18 L'évolution de température pour chaque nœud du mur plan en fonction du temps (résultats réf.[2]).

## V-2 Cas tri-dimensionnel

### V-2-1 Régime permanent

#### Problème 1 [16] :

Dans cet exemple, l'objectif est de calculer le flux thermique à travers la face inférieure. Une première validation des résultats obtenus est fait par comparaison à la solution analytique (voir annexe A, équation (A.3)) du problème, le flux thermique traversant la face inférieure est donné par :

$$Q_{exact} = \frac{64}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{\sqrt{(2m+1)^2 + (2n+1)^2}}{\sinh(\pi \sqrt{(2m+1)^2 + (2n+1)^2})} \quad (V. 1)$$

Cette double sommation peut être facilement calculée et sa donne pour les dix (10) premiers termes de  $m$  et  $n$  :

$$Q_{exact} = 0.0688189 \text{ W}$$

Une deuxième validation des résultats obtenus est fait sur la base des résultats numérique d'un code commercial spécialisé ( voir annexe B )

L'erreur relative ( $\varepsilon$ ) est calculée en comparant les solutions numériques et analytique.

| N   | N=N <sup>3</sup> | Q (W)      |          | ε (%)      |       |
|-----|------------------|------------|----------|------------|-------|
|     |                  | Heat3 [21] | Code     | Heat3 [21] | Code  |
| 1   | 1                | 0.333333   | 1.000000 | 384        | 1553  |
| 2   | 8                | 0.166666   | 0.083333 | 142        | 21.09 |
| 10  | 1000             | 0.071889   | 0.071749 | 4.5        | 4.2   |
| 20  | 8000             | 0.069576   | 0.069566 | 1.1        | 1.08  |
| 30  | 27000            | 0.069154   | 0.069083 | 0.49       | 0.38  |
| 40  | 64000            | 0.069007   | 0.069006 | 0.27       | 0.27  |
| 50  | 125000           | 0.068939   | 0.068938 | 0.17       | 0.17  |
| 60  | 216000           | 0.068903   | 0.068874 | 0.12       | 0.08  |
| 70  | 343000           | 0.068880   | 0.068876 | 0.09       | 0.08  |
| 80  | 512000           | 0.068866   | 0.068860 | 0.07       | 0.06  |
| 90  | 729000           | 0.068856   | 0.068853 | 0.05       | 0.05  |
| 100 | 1000000          | 0.068849   | 0.068834 | 0.04       | 0.02  |

Table V-2-1-1 Le flux thermique et l'erreur relative calculés en fonction du nombre de nœuds du maillage comparés à la solution analytique.

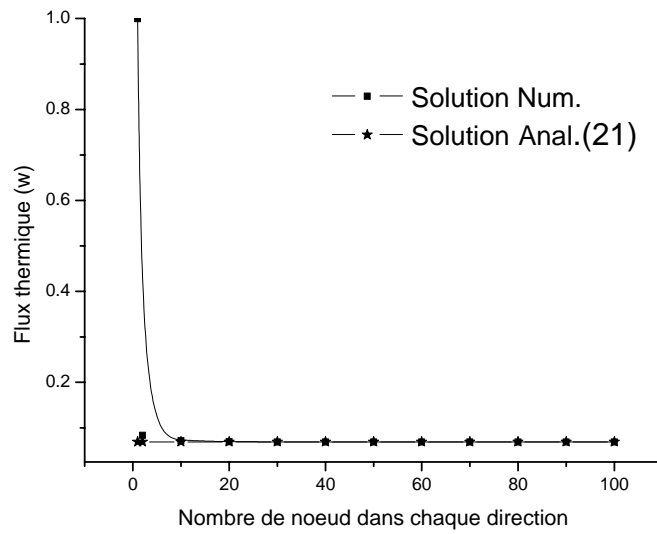


Fig. V. 19 Comparaison des résultats numériques du flux thermique avec la solution analytique.

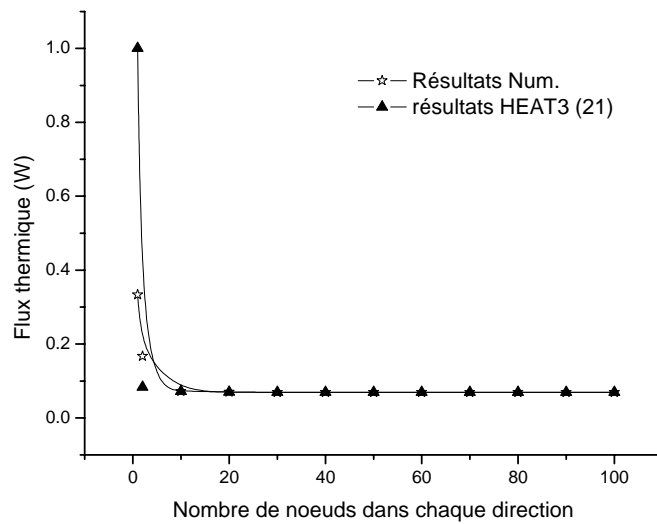


Fig. V. 20 Comparaison de la solution numérique du flux thermique avec celle donnée par HEAT3 [21].

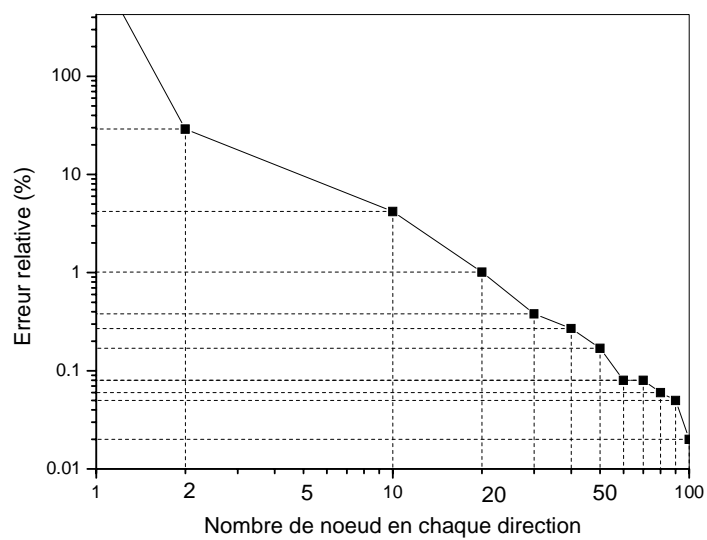


Fig. V. 21 L'erreur relative en fonction du nombre de maille.

### V-3 Discussion des résultats

En 2-D, les résultats concernant les résistances thermiques coïncident en général à ceux de la littérature avec une erreur relative inférieure à  $10^{-3}$ , il en est de même pour les champs de températures. L'erreur relative sur le flux thermique calculé pour les problèmes traités ne dépasse pas  $10^{-2}$ .

Le temps machine pour une simulation ne dépasse pas quelques secondes en général sur un Pentium4/1,7Ghz. L'application de la méthode de relaxation dans la résolution du problème 05 en régime permanent conjointement avec celle de Gauss-Seidel à un effet réducteur sur le nombre d'itérations, en revanche sa accélère la convergence et par conséquent, le temps de calcul sera nettement réduit. Hélas, cet avantage ne change rien en terme de précision par rapport aux résultats issues de la méthode de Gauss-Seidel, ceci s'explique par l'algorithme commun des deux méthodes avec la spécificité bien sure de la méthode de relaxation par l'introduction du coefficient accélérateur  $\omega$ .

En 3-D, un exemple de validation est utilisé. On se référant à une solution analytique, on a lancé plusieurs simulations allant de 1000 nœuds jusqu'à 1000000 de nœuds pour calculé le flux thermique et la distribution de température, les résultats obtenus montrent que l'erreur relative décroît en diminuant le pas en espace, cette erreur passe de 4,2% pour une simulation de 1000 nœuds en quelques secondes de temps CPU à 0,02% pour une simulation de 1000000 de nœuds (voir fig. V.21), qui atteint cinq heures et demi de temps CPU sur un Pentium4/1,7Ghz. Pour le même exemple, les résultats numériques sont comparés à d'autres résultats d'un code commercial (HEAT3) et la précision est très satisfaisante (voir table V-2-1-1 et fig. V.20).

Pour un maillage régulier (équidistant), l'approximation de  $\partial^2 T / \partial x^2$  par différences finies a une erreur de troncature (discrétisation) de magnitude  $\Delta x^2$  ou  $1/N$ . Cela est montré dans fig.V.19 qui indique le  $\ln(\epsilon)$  comme une fonction de  $\ln(N)$ , cette fonction est linéaire avec un très bon accord pour  $N \geq 10$ .

La fig.V.17 montre que, les résultats numériques et la solution analytique deviennent indiscernables avec la réduction du pas en espace en chaque direction, ceci démontre ce qui a été a propos de l'erreur de troncature.

Il est clair que les résultats numériques que soit en 2 ou en 3 dimensions s'approchent si étroitement de ceux donnés par la littérature.



## Conclusion

La simulation de la conduction de chaleur par la méthode des différences finies avec l'application de la méthode des résistances thermiques permet de déterminer la distribution de température et le flux à travers un corps donné. Elle fournit une bonne compréhension du problème et facilite la modification des paramètres intervenant dans le problème, telles que des sources de chaleur et les conditions aux limites et conduit rapidement aux résultats.

Plusieurs programmes sont développés sur la base du modèle déjà présenté et peuvent être utiles pour traiter un nombre important d'applications. Le maillage est pour la plupart de ces programmes manuel, un seul programme où le maillage est automatique mais il peut être facilement changé.

Les résultats obtenus ont permis aussi de donner une idée générale sur la force de des différences finies à traiter les problèmes de conduction thermique complexes tel que les problèmes avec des conditions aux limites diverses avec une grande facilité en un temps très réduit en comparaison avec d'autres approches.

L'application de la méthode des résistances thermiques pour décrire les phénomènes de transfert entre les nœuds qui découlent de la discrétisation, a donné des résultats très satisfaisantes, ce qui permet de conclure que cette méthode est un outil très adéquat, surtout par sa simplicité à s'adapter et s'étendre aux cas tridimensionnel comme le notre. Elle est donc applicable est valide et multidimensionnelles, seule sa programmation sur machine est difficile surtout au niveau des conditions aux limites.

Ce qui nous permet de dire que, la méthode des résistances thermiques constitue une alternative précieuse aux méthodes classiques.

Comme perspective, la méthode pourrait très bien faire l'étude du cas non linéaire et dans des milieux anisotropes.

# Annexes

## Annexe A

### *La solution analytique de l'équation différentielle de conduction pour un Cube [16]*

La solution analytique du problème cité dans la *section IV-8-1* est présentée ci-dessous. La *Fig. IV. 17* montre un parallélépipède homogène avec un coefficient de conductivité thermique égale à  $1,0$ . La température à la surface  $z=L_z$  est  $1$ . Sur les autres côtés la température est nulle. Le domaine  $V$  du parallélépipède est limité par :

$$0 \leq x \leq L_x, \quad 0 \leq y \leq L_y, \quad 0 \leq z \leq L_z$$

Pour la cas du régime permanent, le Laplacien est nul

$$\nabla^2 T = 0 \text{ à l'intérieur du domaine } V \quad 0 \leq x \leq L_x, \quad 0 \leq y \leq L_y, \quad 0 \leq z \leq L_z$$

**Les conditions aux limites sont :**

$T=0$  sur toutes les frontières sauf  $z=L_z$

La solution est présentée pour la condition au limite différente sur la surface  $z=L_z$

$$T(x, y, L_z) = 1 \quad 0 < x < L_x, \quad 0 < y < L_y$$

**Solution :**

La solution générale qui satisfait l'équation de Laplace et les cinq conditions aux limites de température égale à zéro degré sur les cinq côtés est :

$$T(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)} \pi z\right)$$

Les coefficients  $a_{mn}$  sont déterminés par la condition aux limites:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)} \pi z\right) = 1$$

Les coefficients  $a_{mn}$  sont déterminés comme suit :

Il est bien connu qu'un développement mono-dimensionnel de Fourier de  $1$  dans l'intervalle  $0 < x < L_x$  est (Stroud, 1986) :

$$\frac{4}{\pi} \left[ \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi x}{L_x}\right) + \dots \right] = 1 \quad 0 < x < L_x$$

Où

$$\frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{L_x}\right) = 1 \quad 0 < x < L_x$$

Par analogie, et selon la direction ( y ) :

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi y}{L_y}\right) = 1 \quad 0 < y < L_y$$

Le produit des deux séries est :

$$\frac{16}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)(2n+1)} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi y}{L_y}\right) = 1.1 \quad (\text{A.1})$$

Détermination des termes donnant les coefficients triviales :

$$\frac{16}{\pi^2} \frac{1}{(2m+1)(2n+1)} = a_{2m+1,2n+1} \sinh\left(\pi L_z \sqrt{\frac{(2m+1)^2}{L_x^2} + \frac{(2n+1)^2}{L_y^2}}\right)$$

Les coefficients  $a_{2m,2n}$  sont nuls. La solution est :

$$T(x,y,z) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi y}{L_y}\right) \sinh\left[\frac{\pi z \sqrt{\frac{(2m+1)^2}{L_x^2} + \frac{(2n+1)^2}{L_y^2}}}{\sinh\left[\pi L_z \sqrt{\frac{(2m+1)^2}{L_x^2} + \frac{(2n+1)^2}{L_y^2}}\right]}\right]}{(2m+1)(2n+1)}$$

Le flux thermique à travers le côté inférieur  $z=0$  est :

$$Q_0 = \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{(x,y,0)} \quad (\text{A.2})$$

La dérivée devient :

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{(x,y,0)} = \frac{16}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi y}{L_y}\right)}{2m+1} \frac{\pi \sqrt{\frac{(2m+1)^2}{L_x^2} + \frac{(2n+1)^2}{L_y^2}} \cdot 1}{\sinh\left(\pi L_c \sqrt{\frac{(2m+1)^2}{L_x^2} + \frac{(2n+1)^2}{L_y^2}}\right)}$$

L'intégral en  $x$  est :

$$\int_0^{L_x} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{L_x}\right) dx = \left[ -\frac{L_x}{(2m+1)\pi} \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{L_x}\right) \right]_{x=0}^{x=L_x} = \frac{L_x}{\pi(2m+1)} \left( 1 - \underbrace{\cos((2m+1)\pi)}_{-1} \right) = \frac{2L_x}{\pi(2m+1)}$$

Selon la direction  $y$ , on a une expression similaire. Le flux thermique total  $Q_0$  est donc :

$$Q_0 = \frac{64}{\pi^3} L_x L_y \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2 (2n+1)^2} \frac{1}{\sinh\left(\pi L_c \sqrt{\frac{(2m+1)^2}{L_x^2} + \frac{(2n+1)^2}{L_y^2}}\right)} \quad (\text{A.3})$$

## Annexe B

### Liste de codes commerciaux de conduction thermique

La liste suivante présente une sélection de programmes informatique, qu'on peut utiliser pour résoudre numériquement des problèmes de conduction thermique. La présente liste est loin d'être complète, seulement, elle présente les codes de calcul les plus connus. Ces informations sont tirées d'Internet.

| Nom      | 2-D | 3-D | Coordonnées<br>Cylindriques | Régime<br>Permanent | Régime<br>Variable | Différences<br>finies | Éléments<br>finis |
|----------|-----|-----|-----------------------------|---------------------|--------------------|-----------------------|-------------------|
| ABACUS   | x   | x   | x                           | x                   | x                  |                       | FEM               |
| ALGOR    | x   | x   |                             | x                   | x                  |                       | FEM               |
| ANSYS    | x   | x   | x                           | x                   | x                  |                       | FEM               |
| CALFEM   | x   | x   |                             | x                   | x                  |                       | FEM               |
| FIDAP    | x   | x   | x                           | x                   | x                  |                       | FEM               |
| FLOTRAN  | x   | x   | x                           | x                   | x                  |                       | FEM               |
| FLUENT   | x   | x   | x                           | x                   | x                  |                       | FEM               |
| FRAME    | x   |     |                             | x                   |                    | FDM                   |                   |
| GF2DIM   | x   |     |                             | x                   |                    | FDM                   |                   |
| HCONP    | x   |     |                             | x                   |                    | FDM                   |                   |
| HEAT2    | x   |     |                             | x                   | x                  | FDM                   |                   |
| HEAT2R   |     | x   |                             | x                   | x                  | FDM                   |                   |
| HEAT3    |     | x   |                             | x                   | x                  | FDM                   |                   |
| I-DEAS   | x   | x   | x                           | x                   | x                  |                       | FEM               |
| ISOTHERM | x   |     |                             | x                   |                    |                       | FEM               |
| ISO-2    | x   |     |                             | x                   |                    | FDM                   |                   |
| KOBRU86  | x   |     |                             | x                   |                    | FDM                   |                   |
| MARC     | x   | x   | x                           | x                   | x                  |                       | FEM               |
| MATLAB   | x   | x   | x                           | x                   | x                  |                       | FEM               |
| NACHOS2  | x   |     | x                           | x                   | x                  |                       | FEM               |
| NASTRAN  | x   | x   | x                           | x                   | x                  |                       | FEM               |
| PLAN     | x   | x   |                             | x                   |                    | FDM                   |                   |
| PLAN3D   | x   | x   |                             | x                   |                    | FDM                   |                   |
| PC3D     | x   | x   |                             | x                   | x                  | FDM                   |                   |
| RAMPANT  | x   | x   | x                           | x                   | x                  |                       | FEM               |
| SECTRA   | x   |     |                             |                     | x                  | FDM                   |                   |
| THAFEM   | x   |     | x                           | x                   | x                  |                       | FEM               |
| TOPAZ    | x   |     | x                           | x                   | x                  |                       | FEM               |
| TRISCO   |     | x   |                             | x                   |                    | FDM                   |                   |
| VOLTRA   |     | x   |                             |                     | x                  | FDM                   |                   |
| WAEBRU   | x   | x   |                             | x                   | x                  | FDM                   |                   |

Table B.1 Une sélection sommaire des codes de calcul commerciaux de conduction thermique.

## Références bibliographiques

- [1] **DeVriendt A. B.** "La transmission de chaleur: Volume I, Tomes 1 et 2", Gaëtan Morin, 1982.
- [2] **Holman J. P.** "heat transfer", McGraw-Hill Book Co., 8<sup>ème</sup> édition, 1997.
- [3] **Kreith F.** "Transmission de la chaleur et thermodynamique", Masson, Paris, 1967.
- [4] **Kreith F. Bohn M-S.** "Principles of Heat Transfer" 4<sup>th</sup> Edition, Harper & Row, Publisher, USA, 1986.
- [5] **Léontiev A.** "Théorie des échanges de chaleur et de masse", éditions MIR, Moscou, 1979.
- [6] **Sacadura J. F.** "Initiation aux transferts thermiques", Tec. et Doc., Lavoisier, 1982.
- [7] **McAdams W. H.** " Transmission de la chaleur ", Dunod, Paris, 1961.
- [8] **Patankar S. V.** "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere Publishing, 1980.
- [9] **Rohsenow W. M., Choi H. Y** "Heat, Mass and Momentum Transfer", Prentice-Hall, Inc., 1963.
- [10]. **El-Wakil M. M** "Nuclear Heat Transport", International Textbook Company, 1971.
- [11] **Schneider P. J.** "Conduction Heat Transfer", Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1957.
- [12] **Chapman A. J.** "Heat Transfer", The Macmillan Co., 1960.
- [13] **Incropera F. P., DeWitt D. P.** "Fundamentals of Heat Transfer", John Wiley & Sons, 1985.
- [14] **Kays W. M., Crawford M. E** "Convective Heat and Mass Transfer", McGraw-Hill Book Co., Inc., 1993.

- [15] **Godunov , Ryabenski** "Schémas aux différences", édition Mir, Moscou, 1984.
- [16] **Gourdin A. Boumahrat M.** "Méthodes Numériques Appliquées", OPU Alger, 1991.
- [17] **Özişik M. N.** "Heat Conduction" 2<sup>nd</sup> Edition, John Wiley & Sons, 1993.
- [18] **Carslaw H. S. & Jaeger J. C.** "Heat Conduction in Solids", Clarendon Press, London, 1957.
- [19] **Pitts D. R., Sissom L. E.** "1000 Solved Problems in Heat Transfer", McGraw-Hill, 1991.
- [20] **Paul L. DeVries** "A First Course in COMPUTATIONAL PHYSICS", John Wiley & Sons, Inc., 1994.
- [21] **Blomberg, T.** "HEAT3 – A three-dimensional heat transfer computer program". Manual for HEAT3 (Version 4.0), 2001.
- [22] **Blomberg, T.** "HEAT2 – A heat transfer PC-program in two dimensions". Manual for Version 6.0, 2003.
- [23] **Loukarfi, L.** " Exercices résolus de conduction thermique ", Dar El-Oumma Alger, 2002
- [24] **Çengel Y. A.** " Heat transfer " A practical approach, WCB/McGraw-Hill, 2002
- [25] **Taibi N. & S.** " Pratique du FORTRAN77 ", éditions Berti, 1992.
- [26] **Delannoy C.** " Programmer en Fortran 90 Guide complet ", Editions Eyrolles, 2001.
- [27] **Hirsch, C.** " Numerical computation of internal and external flows ", John Wiley & Sons Ltd. (1992),
- [28] **ANSYS 5.6** Swanson Analysis System Inc. Johnson road, P.O. Box 65, Houston, USA.
- [29] **M. BENAROUS** "Méthodes Numériques Avancées", Cours, Exercices et Programmes Fortran, (Polycopié) C.U. de Chlef, 1995.



**Résumé :** L'objectif premier de ce travail est focalisé sur l'application de la méthode des résistances thermiques, sous exploitée en thermique en la modélisation de la conduction de chaleur à plusieurs dimensions (2-D et 3-D). Ce mémoire présente une étude détaillée sur le concept de résistance thermique peu connu en calcul conductif à plusieurs dimensions. Le modèle établi pour le 3-D est formulé par superposition à partir des modèles mono et bi-dimensionnel. La méthode numérique choisie pour la discrétisation des EDP est celle des différences finies. Le système d'équations algébriques qui en découlent est résolu ensuite par la méthode de Gauss-Seidel et de relaxation.

Le second objectif de ce travail est d'établir un ensemble de programmes de calcul numérique simulant le phénomène et servant à déterminer la distribution de température et le flux thermique pour des corps à géométrie multidimensionnelle (2-D et 3-D) soumises à des conditions aux limites diverses et ce en régimes permanent et variable.

**Mots clés :** conduction thermique tridimensionnelle, résistance thermique, simulation, différences finies, maillage, Gauss-Seidel, flux thermique, température

**Abstract :** The first goal of this work is focused on the application of the thermal resistances method, under exploited in heat transfer in the modeling of the heat conduction in several dimensions (2D and 3D). This memory presents a study detailed on the concept of thermal resistance little known in conductive calculation to several dimensions. The model established for the 3-D is formulated by superposition starting from the one and two-dimensional models. The selected numerical method for the discretization of the PDE is the finite differences method. The algebraic equations system which result from this, is solved then by the Gauss-Seidel and SOR methods.

The second goal of this work is to establish a computer program based on the model mentioned above in aim to simulate the phenomenon and being used to determine the distribution of temperature and the heat flux for bodies with multidimensional bodies (2-D and 3-D) submitted to various boundary conditions and this in steady and unsteady states.

**Keywords:** 3-D heat conduction, thermal resistance, simulation, finite differences, mesh, Gauss-Seidel, heat flux, temperature.

**ملخص:**

.( 3 2)

(discrétisation)

Gauss-Seidel

.(MDF)

Relaxation de Gauss

( )

( )

( )

Gauss-Seidel

: