



THESE

Présenté par

Mr. Riadh BENNAI

Magister en Génie Civil

Pour l'obtention du diplôme de
Doctorat En Sciences

Option : **Construction**

Sous le thème

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA VIBRATION ET LA STABILITE DES STRUCTURES FONCTIONNELLEMENT GRADUEES

Soutenu Le Dimanche 05/06/2016 devant les membres de jury

Pr. BOUGARA Abdelkader	Professeur, Université de Chlef	Président
Pr. BRANCI Taieb	Professeur, Université de Chlef	Examinateur
Pr. SEREIER Zouaoui	Professeur, USTMB Oran	Examinateur
Pr. MEFTAH Sid Ahmed	Professeur, Université de Sidi Bel Abbas	Examinateur
Dr. AMEUR Mohamed	Maître de Conférences (A), ENP Oran	Examinateur
Dr. AIT ATMANE Hassen	Maître de Conférences (A), Université de Chlef	Directeur de thèse
Pr. TOUNSI Abdelouahed	Professeur, Université de Sidi Bel Abbas	Invité

Année universitaire 2015-2016

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents, qui sans leur soutien et encouragement ce travail n'a pu avoir lieu.

*A ma femme, bien aimée
Pour l'amour, l'attention, l'aide et le soutien
qu'elle m'a apporté*

*A mes frères, mes
enfants Djawad, Maram et Youssouf.*

REMERCIEMENTS

Je remercie en premier et en dernier lieu, DIEU tout, puissant de m'avoir gardé en bonne santé et m'accordé le courage et la bonne volonté pour réaliser ce modeste travail.

Je remercie chaleureusement mon encadreur Mr. Hassen AIT ATMANE, qui a été attentif à l'évolution de mes recherches et a apporté toute sa contribution pour mener à bien ce travail. Ses qualités humaines et scientifiques, Ses conseils ainsi que son enthousiasme m'ont été très bénéfiques durant ces années de thèse.

Je tiens aussi à rendre hommage au Monsieur Abdelouahed TOUNSI, Professeur à l'UDL de Sidi Bel Abbes pour son intérêt à mon travail.

Je tiens également à remercier Professeur BOUGARA Abdelkader d'avoir accepté de présider le jury de ma soutenance ainsi que les membres de jury qui ont accepté d'examiner mon travail.

Enfin, mes sincères remerciements, sont réservés au corps enseignant du département de Génie Civil de l'Université de Chlef et aux invités, qui vont m'honorer de leurs présence et encouragements.

ABSTRACT

In this thesis, a new analytical approach using a refined theory of hyperbolic shear deformation of a beam was developed to study the free vibration and buckling of graduated sandwiches beams under different boundary conditions. The effects of transverse shear strains and the transverse normal deformation are considered.

The constituent materials of the beam are supposed gradually variable depending the height direction based on a simple power distribution law in terms of the volume fractions of the constituents; the two materials with which we worked are metals and ceramics. The core layer is taken homogeneous and made of an isotropic material; while the banks layers consist of FGM materials with a homogeneous fraction compared to the middle layer.

Movement equations are obtained by the energy minimization principle. Analytical solutions of free vibration and buckling are obtained for sandwich beams under different support conditions; these conditions taken into account by incorporating new form functions.

At the end, illustrative examples are presented to show the effects of changes in different parameters such as (material graduation, the stretching effect of the thickness, boundary conditions and thickness ratio - length) on the vibration free and buckling of an FGM sandwich beams.

Keywords: Functionally graded sandwich beam; refined shear deformation theory; Stretching effect; free vibration; Buckling; Bending; boundary conditions.

RESUME

Dans cette thèse, une nouvelle démarche analytique utilisant une théorie raffinée de déformation de cisaillement hyperbolique d'une poutre, a été développée, afin d'étudier la vibration libre et le flambement des poutres sandwiches graduées sous différentes conditions aux limites. Les effets des déformations de cisaillement transversales ainsi que la déformation normale transverse sont pris en considération.

Les matériaux constituant la poutre sont supposés graduellement variables suivant le sens de la hauteur selon une distribution simple de loi de puissance en termes des fractions de volume des constituants ; les deux matériaux avec lesquels on a travaillé sont les métaux et les céramiques. La couche de noyau est prise homogène et constituée d'un matériau isotrope ; tandis que les couches de rives sont constituées de matériaux FGM avec une fraction homogène par rapport à la couche médiane.

Des équations du mouvement sont dérivées par le principe de minimisation des énergies. Des solutions analytiques de la vibration libre et du flambage sont obtenus pour des poutres sandwiches sous différentes conditions d'appuis ; ces conditions pris en considération en intégrant de nouvelles fonctions de forme.

A la fin, des exemples illustratifs sont donnés pour montrer les effets de la variation des divers paramètres tel que (la graduation matérielle, l'effet d'étirement de l'épaisseur, conditions aux limites et le rapport épaisseur – longueur) sur la vibration libre et le flambage des poutres sandwiches FGM.

Mots clés : Poutre sandwich fonctionnellement graduée ; La théorie de déformation de cisaillement raffinée ; Effet d'étirement ; Vibration libre ; le flambage ; conditions aux limites.

ملخص

تم في هذه الاطروحة تطوير نظرية جديدة لتشوه القص , من اجل دراسة الاهتزازات الحرة والالتواء الخاص بروافد ثلاثية الطبقات المتدرجة وظيفيا تحت ظروف الحدود المختلفة. يتم اخذ الاثار المترتبة عن اجهاد القص العرضي و كذلك اجهاد القص العادي بعين الاعتبار.

من اجل ذلك, يفترض ان تكون خصائص المواد متدرجة في اتجاه سمك رافدة ثلاثية الطبقات من السطح وفقا لقانون توزيع القوة من ناحية حجم انكسار المكونات. المادتان التي تم استعمالها في هذا العمل هي المعادن والخزف. تكون الطبقة الوسطى (القلب) متجانسة و مصنوعة من مادة موحدة الخصائص, في حين تكون الطبقات الخارجية مصنوعة من مادة متدرجة وظيفيا مع جزء متجانس بدءا من الطبقة الوسطى. يتم حساب معادلات الحركة وفقا لمبدأ التقليل من الطاقة . ويتم الحصول على الحلول التحليلية للاهتزاز الحر والتواء رافدة ثلاثية الطبقات تحت شروط الدعم المختلفة. هذه الشروط تؤخذ بعين الاعتبار من خلال دمج وظائف جديدة من حيث الشكل.

يتم الحصول على الحلول التحليلية للاهتزاز الحر و الالتواء لروافد ثلاثية الطبقات دعمت بكل بساطة. في الاخير, يتم وضع امثلة تطبيقية لإظهار اثار كل من التدرجات المختلفة, سمك التمدد , شروط الحدود و معدل السماكة و الطول على الاهتزاز الحر و الالتواء لرافدة ثلاثية الطبقات متدرجة وظيفيا.

الكلمات المفتاحية: رافدة ثلاثية الطبقات متدرجة وظيفيا، نظرية تشوه القص المكرر، تأثير التمدد، المسامية الاهتزازات الحرة، الالتواء، الانحناء.

Sommaire

Liste des figures	v
Liste des tableaux	vii
Liste des notations	x
Introduction générale et objectifs de la thèse	1

CHAPITRE I

Revue Générale Sur Les Matériaux D'étude

I.1.	Introduction.....	7
I.2.	Présentation générale des Matériaux Composites.....	8
I.3.	Définition d'un matériau composite.....	8
I.4.	Conception des matériaux composites.....	12
I.5.	Mise en œuvre des matériaux composites.....	12
I.6.	Propriétés mécaniques des composites.....	14
I.7.	Architecture des matériaux composites	
	I.7.1. Monocouches	15
	I.7.2. Stratifiés.....	15
	I.7.3. Sandwiches	16
I.8.	Avantages et inconvénient des matériaux composites	
	I.8.1. Avantages	16
	I.8.2. Inconvénients.....	17
I.9.	Applications des matériaux composites au génie civil	17
I.10.	Matériaux composites intelligents (FGM).....	18
I.11.	Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une poutre FGM	
	I.11.1. Propriétés matérielles de la poutre P-FGM	20
	I.11.2. Propriétés matérielles de la poutre S-FGM	21
	I.11.3 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM	22
I.12.	Loi de mélange.....	23
I.13.	Loi de comportement.....	26
	I.13.1. Matériau anisotrope.....	27

I.13.2.	Matériau monoclinique	27
I.13.3.	Matériau orthotropique	27
I.13.4.	Matériau transversalement isotrope.....	28
I.13.5.	Matériau isotrope.....	28
I.11.	Conclusion.....	29

CHAPITRE II
La Cinématique Des Solides

II.1.	Introduction.....	31
II.2.	Principe général d'équilibre - équations d'équilibre.....	31
II.3.	Relations contraintes-efforts.....	32
II.4.	Le potentiel interne et ses applications.....	33
II.4.1.	Travail des forces extérieures et énergie de déformation	
II.4.1.1	Notions de travail et de travail complémentaire.....	34
II.4.1.2.	Énergie et énergie complémentaire de déformation.....	35
II.4.2.	Travail et énergie dans le domaine élastique linéaire	
a)	Travail d'une force.....	36
b)	Généralisation.....	37
c)	Travail des réactions.....	37
d)	Énergie potentielle de déformation.....	37
II.4.3.	Principe de la conservation de l'énergie.....	38
II.4.4.	Travail de déformation des sollicitations simples dans le cas des poutres	
a)	Effort normal.....	39
b)	Moment fléchissant.....	40
c)	Effort tranchant.....	41
d)	Moment de torsion.....	41
II.4.5.	Expression générale de l'énergie potentielle de déformation.....	42
II.4.6.	Travail Virtuel.....	44
II.5.	Les poutres composites.....	45

II.5.1. Historique des théories des poutres.....	45
II.5.2 .Le comportement des poutres composites.....	45
II.5.3 .Les différents types de poutres	46
II.6. Les différentes théories des poutres.....	46
II.6.1 Modèle d'Euler Bernoulli (<i>Classical Beam Theory- CBT</i>).....	47
II.6.2 Modèle de Timoshenko (FSDBT).....	48
II.6.3 Théorie d'Ordre Elevé	50
II.7. Introduction du l'effet de déformation normale.....	52
II.6. Conclusion.....	52

CHAPITRE III

Etude Analytique D'une Poutre Sandwichée Sous Différentes Sollicitations

III.1. Introduction.....	54
III.2. La théorie de la poutre raffinée pour les poutres sandwichées fonctionnellement graduées.....	
III.2.1. Formulation du problème.....	54
III.2.2. Propriétés des matériaux.....	56
III.2.3. Hypothèses de base.....	57
III.2.4. Les équations constitutives.....	59
III.2.5. Équations de mouvement.....	59
III.3. Solution analytique.....	62
III.4. Conclusion.....	66

CHAPITRE IV

Validation Des Résultats et Étude Paramétrique

IV.1. Introduction.....	68
IV.2. Les résultats numériques et discussion.....	68
IV.2. 1. Analyse des résultats d' de vibration libre	69

IV.2.2. Analyse des résultats de flambage.....	81
IV.3. Conclusion	91
Conclusions Générales et Perspectives	93
Références Bibliographiques.....	97

Liste des Figures

Figure I.3.1.	Structure d'un matériau composite.....	9
Figure I.3.1.	Organigramme illustrant les principaux matériaux de renfort.....	10
Figure I.3.2.	Organigramme illustrant les différentes familles de matrice.....	11
Figure 1.5.1.	Différents étapes de formage par moulage d'un matériau composite.....	13
Figure 1.7.1.	Pli à Renforcement unidirectionnel.....	15
Figure 1.7.2.	Constitution d'un stratifié.....	16
Figure 1.7.3.	Constitution d'un sandwich.....	16
Figure I.11.1.	Les dimensions d'une poutre FGM.....	20
Figure I.11.2.	La variation du module de Young dans une poutre P-FGM.....	21
Figure I.11.2.	La variation du module de Young dans une poutre S-FGM.....	22
Figure I.11.3.	La variation du module de Young de la poutre E-FGM.....	22
Figure. I.12.1.	Exemples de FGM: (a) un FGM continue et (b) un FGM discontinue....	23
Figure. I.12.2.	Variations de la fraction volumique de la céramique avec différents modèles basés sur la distribution de loi de puissance.....	25
Figure. I.12.3	Trois couches de céramique et de métal FGM composite.....	25
Figure I.12.4.	La variation du module de Young dans une poutre S-FGM.....	26
Figure II.1.	Efforts agissant dans le plan.....	32
Figure II.2.	Moments agissant sur un élément.....	33
Figure II.3.	Efforts tranchants dans un élément.....	33
Figure II.4.	Diagramme F d'une barre prismatique.....	34
Figure II.5.	Energie de déformation d'un corps.....	35
Figure.II.6.	Relation linéaire de contrainte-déformation ($\sigma_{ij}-\epsilon_{ij}$).....	38
Figure .II.7.	Relation des contraintes-effort normal.....	39
Figure.II.8.	Relation de moment de flexion.....	40
Figure.II.9.	Relation de moment de torsion.....	42
Figure II.10.	Relation d'énergie potentielle de déformation.....	42
Figure II.11.	Système élastique force-déplacement F- δ	44

Figure. II.6.1	Cinématique d'Euler Bernoulli.....	47
Figure.II.6.2.	Cinématique de Timoshenko.....	49
FigureII.6.3.	Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.....	50
Figure III.1.	Coordonner et la géométrie d'une poutre FG sandwich dans les coordonnées cartésiennes rectangulaires.....	56
Figure. IV.1.	Variation de la fréquence fondamentale ω par rapport au paramètre de matériau k , d'une poutre sandwich (1-1-1) simplement appuyées avec un noyau lourd homogène.....	78
Figure. IV.2.	Variation de la fréquence fondamentale ω par rapport au paramètre de matériau k , d'une poutre sandwich (1-1-1) simplement appuyées avec un noyau léger homogène.....	78
Figure. IV.3.	Variation de la fréquence fondamentale ω par rapport au paramètre de matériau k , d'une poutre sandwich(1-1-1) encasté –encasté avec un noyau lourd homogène.....	79
Figure. IV.4.	Variation de la fréquence fondamentale ω par rapport au paramètre de matériau k , d'une poutre sandwich (1-1-1) encasté –encasté avec un noyau léger homogène.....	80
Figure. IV.5.	Variation de la fréquence fondamentale ω par rapport au paramètre de matériau k des différentes poutres sandwich simplement appuyées avec un noyau lourd homogène.....	81
Figure. IV.6.	Variation des charges critiques de flambement P_{cr} par rapport au paramètre de matériau k , d'une poutre sandwich (1-1-1) simplement appuyées avec un noyau lourd homogène.....	88
Figure. IV.7.	Variation des charges critiques de flambement P_{cr} par rapport au paramètre de matériau k , d'une poutre sandwich (1-1-1) simplement appuyées avec un noyau léger homogène.....	88
Figure. IV.8.	Variation des charges critiques de flambement P_{cr} par rapport au paramètre de matériau k , d'une poutre sandwich(1-1-1) encasté –encasté avec un noyau lourd homogène.....	89
Figure. IV.9.	Effet de la déformation normale sur les charges critiques de flambement P_{cr} , d'une poutre sandwich (1-1-1) encasté –encasté avec un noyau lourd homogène.....	89
Figure. IV.10.	Variation des charges critiques P_{cr} par rapport au paramètre de matériau k des différents poutres sandwich simplement appuyées avec un noyau lourd homogène.....	90

Liste des Tableaux

Tableau I.3.1.	Propriétés des fibres.....	11
Tableau I.3.2.	Caractéristiques mécaniques des résines époxy.....	12
Tableau I.2.3.	Propriétés mécaniques des résines polyesters.....	12
Tableau I.6.1.	Propriétés mécaniques typiques des composites.....	14
Tableau III.1.	Les fonctions $X_m(x)$	62
Tableau .IV.1.	Les fréquences naturelles non dimensionnelles ω d'une poutre sandwich simplement appuyées avec un noyau lourd homogène ($L/h = 5$).....	70
Tableau .IV.2.	Les fréquences naturelles non dimensionnelles ω d'une poutre sandwich simplement appuyées avec un noyau lourd homogène ($L/h = 20$).....	71
Tableau .IV.3.	Les fréquences naturelles non dimensionnelles ω d'une poutre FG Sandwich simplement appuyées avec un noyau léger homogène ($L/h = 5$).....	72
Tableau .IV.4.	Les fréquences naturelles non dimensionnelles ω d'une poutre sandwich simplement appuyées avec noyau léger homogène ($L/h = 20$).....	73
Tableau .IV.5.	Les fréquences naturelles non dimensionnelles ω d'une poutre sandwich encasté –encasté avec noyau lourd homogène ($L/h = 5$).	74
Tableau .IV.6.	Les fréquences naturelles non dimensionnelles ω d'une poutre sandwich encasté –encasté avec noyau lourd homogène ($L/h = 20$)	75
Tableau .IV.7.	Les fréquences naturelles non dimensionnelles ω d'une poutre sandwich encasté –encasté avec noyau léger homogène ($L/h = 5$)	76
Tableau .IV.8.	Les fréquences naturelles non dimensionnelles ω d'une poutre sandwich encasté –encasté avec noyau léger homogène ($L/h = 20$).	77
Tableau .IV.9.	Les charges critiques de flambement P_{cr} d'une poutre sandwich simplement appuyées avec noyau lourd homogène ($L/h = 5$).....	82
Tableau.IV.10	Les charges critiques de flambement des poutres FG sandwiches simplement appuyées avec noyau lourd homogène ($L/h = 20$).....	83
Tableau .IV.11	Les charges critiques de flambement P_{cr} d'une poutre sandwich simplement appuyées avec noyau léger homogène ($L/h = 5$).....	84
Tableau.IV.12	Les charges critiques de flambement des poutres FG sandwiches simplement appuyées avec noyau léger homogène ($L/h = 20$).....	85

Tableau .IV.13. Les charges critiques de flambement P_{cr} d'une poutre sandwich encasté –encasté avec noyau lourd homogène ($L/h = 5$).....	86
Tableau .IV.14. Les charges critiques de flambement P_{cr} d'une poutre sandwich encasté –encasté avec noyau lourd homogène ($L/h = 20$).....	87

Liste des notations

FGM :	Les matériaux à gradient de propriétés où bien fonctionnellement gradués.
E :	Le module de Young.
$E(z)$:	Module de Young en fonction de « z ».
E_c :	Module de Young de la céramique.
E_m :	Module de Young du métal.
G :	Le module de cisaillement.
ν :	Le coefficient de Poisson.
$\nu(z)$:	Coefficient de Poisson en fonction de « z ».
V :	La fraction volumique.
ρ :	La masse volumique.
P :	Les propriétés matérielles de la plaque.
P_c et P_m	sont les propriétés correspondantes de la céramique et du métal, respectivement.
k :	Paramètre du matériau (l'exposant de la fraction volumique qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro).
L :	Longueur de la poutre suivant la direction de x.
b :	Largeur de la poutre suivant la direction de y.
h :	l'épaisseur de la poutre suivant la direction de z.
L/h :	L'élancement de la poutre.
u_0, w_0 :	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la poutre.
u, w :	Les déplacements dans les directions x,z.
$f(z)$:	La fonction de gauchissement.
n :	Le nombre de couches de la poutre.
∂ :	Dérivée partielle.
i et j	Sont des nombres naturels.
σ_x, σ_z :	Les contraintes normales.
γ_{xz} :	La déformation de cisaillement.
τ_{xz} :	la contrainte de cisaillement.

$q(x)$:	Une charge mécanique sinusoïdalement distribuée.
Q_{xz} :	Effort de cisaillement
N_x, N_z :	Efforts normaux
M_x, M_z :	Moments de flexion
D :	Termes de rigidité de la matrice
F_{ij} :	Termes de rigidité de la matrice
A_{ij} :	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij} :	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij} :	Termes de rigidité de la matrice
H_{ij} :	Termes de rigidité de la matrice
$\{\Delta\}$:	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{F\}$:	Le vecteur des efforts généralisés
$\{ \}$:	Vecteur colonne
$[]$:	Matrice

INTRODUCTION GENERALE ET OBJECTIFS DE LA THESE

I.1. Introduction

Dans le monde industriel, l'évolution se fait de façon continue afin d'avoir une meilleure optimisation sur la qualité et le prix des concepts technologiques. Et c'est la raison pour laquelle le laboratoire de recherche doit impérativement être lié au secteur de l'industrie puisque la recherche scientifique permet l'avancée des techniques de l'industrie en permettant de concevoir des procédés nouveaux pour le développement de l'industrie.

L'étude du matériau est primordiale pour mieux maîtriser la bonne tenue de la pièce constituée par tel ou tel matière ; c'est le chemin d'une recherche qui amène au terminus d'une révolution technologique prometteuse ; puisque la recherche dans cette discipline technologique tente à améliorer le statut du chercheur d'une part, et développer un effort pour améliorer le comportement du matériau vis-à-vis différentes sollicitations, en fonction du problème posé ; c'est-à-dire en dépendance du besoin technologique spécifique.

Du fait que les matériaux métalliques conventionnels ont commencé à montrer leurs limites face à une conception de pièces et de machines, puisque leur tenue aux contraintes thermique est très limitée ; donc, le soucis des chercheurs est orientés vers la recherche de matériaux avec un rapport résistance/poids assez élevé ; donc des matériaux, composé de plus d'une matière, ont été utilisés avec succès dans l'industrie aéronautique et dans d'autres applications technologiques avant d'être appliquées dans le domaine du génie civil. Ces matériaux sont appelés matériaux composites qui sont venus apporter quelques solutions à ces limites.

Ce type de matériau est généralement constitué de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes et disposée sous forme de stratifié dont l'association aboutit à un assemblage avec des performances supérieures à celles des composants pris séparément.

Cependant, l'interface de ces couches pose un problème majeur qui est la discontinuité des propriétés et des contraintes à ce niveau. Cette discontinuité provoque de fortes concentrations de contraintes, un décollement entre les couches dus à un passage brusque dans la composante matérielle. Une technique a été élaborée par un groupe de chercheurs japonais pour surmonter ces effets nuisibles ; il consiste à utiliser un matériau à gradient évalué, sa signification original est FGM : *F*unctionnaly *G*raded *M*aterial.

L'idée de ce matériau ainsi que son procédé d'industrialisation sont assez nouveaux dans le domaine de la science des matériaux. Ce sont des matériaux composites particuliers ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant, donnant des changements des propriétés insensible d'un point à un autre, éliminant les problèmes d'interfaces

tandis que les caractéristiques des matériaux constitutants restent intactes. A travers son épaisseur un changement s'opère en fraction matérielle pour avoir un matériau avec deux facettes, une métallique est une deuxième céramique ; le changement s'effectue entre ces deux facette par une loi décrivant le procédé de fabrication du matériau. Et c'est ainsi soit combiné la dureté et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur et à l'oxydation de la céramique.

Les matériaux sandwichs ont été imposés pour assouvir au gain de poids. Cependant, il existe d'autres raisons tel que prix de revient, bonne stabilité, bonne résilience, durée de vie, dégradation, isolation acoustique, isolation thermique et facilité de réparation.....

Le prix du matériau sandwich en lui-même est un peu plus élevé que l'acier, mais sur certains types et exigences de structures, le prix de la construction peut être très compétitif surtout si l'on considère les économies engendrées à long terme [Hadji, 2013].

Les poutres sandwich représentent une forme épaisse en tri couches qui se composent de deux couches minces et rigide formés de métal ou de matériaux composites laminés (peau) et une couche relativement épaisse de matériau de faible résistance ou de mousse polymère s'appelle le cœur ou noyau. Le tri couche et relié par un adhésif par collage pour assurer la continuation des contraintes entre les trois couches.

Les structures sandwichs sont appliquées dans le domaine de l'ingénierie depuis le milieu du 20^{ème} siècle. Il offre un grand potentiel pour les grands projets d'infrastructure civile, tels que les bâtiments industriels et les ponts routiers. Au cours des dernières années, les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) ont été pris en compte dans les industries des structures sandwichs.

I.2. Quelques travaux antérieurs

Les structures sandwichs existent généralement en deux types: deux revêtements en FGM couvrent un noyau homogène ou bien deux revêtements en homogène couvrent un noyau FGM. Pour le cas d'un noyau homogène, il est généralement employé en raison de la légèreté et la rigidité à la flexion dans la conception structurelle ; pour le type noyau lourd, il est également utilisé dans d'autres domaines tels que barrière dans les environnements thermiques. L'utilisation des structures sandwichs en tant qu'élément structural nous incite à la compréhension des phénomènes tels que vibration ou flambage des structures sandwichs.

Pour les matériaux FGM, de grands progrès ont été réalisés dans la théorie de l'élasticité des plaques et des poutres. Cependant, pour les structures sandwichs (plaques et poutres), de telles études relatives sont assez limitées.

Etemadi et al. [Etemadi, 2009] ont étudié le comportement au choc à faible vitesse de panneaux sandwich avec une âme en FGM en utilisant une simulation par éléments finis à trois dimensions.

Bhangale et Ganesan [Bhangale, 2006] ont analysé la vibration et le flambage d'une poutre sandwich comportant une couche viscoélastique en FGM en tenant compte des contraintes thermiques et en utilisant la formulation des éléments finis. Amirani et al. [Amirani, 2009] ont utilisé la méthode de Galerkin afin d'analyser la vibration naturelle d'une poutre sandwich avec un noyau en FGM. Bui et al. [Bui, 2013] ont étudié les réponses transitoires et les fréquences naturelles d'une poutre sandwich avec un noyau de FGM en utilisant une méthode d'interpolation des points radiaux. Natarajan et Manickam [Natarajan, 2012] ont étudié la réponse de la vibration libre de la flexion de deux types de plaques sandwich. Bourada et al. [Bourada, 2012] ont étudié la réponse à la sollicitation du flambement thermique des plaques sandwich en FGM., Yaghoobi et al. [Yaghoobi, 2013] ont étudié le comportement au flambage des plaques sandwich avec des facettes en FGM et reposant sur fondations élastiques ; Yaghoobi a utilisé une théorie Basé sur la déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT). Kettaf et al. [Kettaf, 2013] ont proposé un nouveau modèle de déplacement en cisaillement hyperbolique afin d'analyser le comportement de flambement thermique de plaques sandwich FGM. Tounsi et al., [Tounsi, 2013] a étudié analytiquement le problème de flexion thermo-élastique de plaques en sandwich FGM basé sur la théorie trigonométrique raffiné de déformation de cisaillement. Bessaim et al. [Bessaim, 2013] a présenté une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur pour étudier les réponses de vibration libre et la flexion des plaques sandwich avec des facettes en FGM. Houari et al. [Houari, 2013] ont étudié le comportement thermoélastique en flexion des plaques FGM sandwich via une nouvelle théorie de cisaillement d'ordre supérieur et en tenant compte de la déformation normale. Xiang et al. [Xiang, 2013] ont analysé la réponse de vibration libre de plaques FGM sandwich en utilisant une théorie de déformation de cisaillement d'ordre n et une méthode de maillage, tandis que Ait Amar Meziane et al. [Ait Amar Meziane, 2014] ont étudié le flambement et la vibration des plaques sandwich en FGM en utilisant une théorie de déformation de cisaillement simple et raffinée.

Khalifi et al. [Khalifi, 2014] ont proposé une théorie de déformation de cisaillement simple et raffinée pour étudier le flambement thermique de plaques solaires en FGM reposant sur fondation élastique. Attia et al. [Attia, 2015] a analysé la vibration libre des plaques FGM avec des propriétés dépendantes de la température, en utilisant diverses théories à quatre variables des plaques raffinés. Al Bassiouni et al [Al Bassiouni, 2015] a proposé une nouvelle formulation unifié d'une théorie de poutre soumise à un couple du contraintes ; cette étude tient compte d'un paramètre d'échelle de variable longueur en conjonction avec le concept de l'axe neutre pour étudier flexion la vibration 'une nano poutre en FGM. Récemment, l'effet d'étirement de l'épaisseur sur la réponse mécanique des structures FGM est montrée par Bousahla et al [Bousahla, 2014], Fekrar et al [Fekrar, 2014], Belabed et al [Belabed, 2014], Hebali et al [Hebali, 2014], Houari et al [Houari, 2013] , Bessaim et

al [Bessaim, 2013] , Saidi et al [Saidi, 2013], Hamidi et al. [Hamidi, 2015], Bourada et al. [Bourada, 2015], Larbi Chaht et al. [Larbi Chaht, 2015] . Des théories de déformation de cisaillement hyperbolique ont été appliqués pour plusieurs problèmes dans la littérature telles que la flexion et de vibration des poutres [Ghugal et Sharma, 2009; Li et al, 2013;. Sayyad et Ghugal, 2011; Berrabah et al, 2013;. Ould Larbi et al ., 2013]; ou bien la flexion, la vibration et le flambage des plaques [Ghugal et Pawar, 2011; Ghugal, 2011]); sinon la flexion, vibrations et flambage de plaques composites stratifiées [Nedri et al, 2014;. Grover et al, 2013; Akavci et Tanrikulu, 2008; et Akavci, 2010] et à la flexion, vibrations et flambage des plaques en FGM [Akavci, 2014ab; Hebali et al, 2014;. Mahi et al, 2015; Belkorissat et al, 2015; El Meiche et al, 2011].

I.3.Objectifs Principaux

Il est à noter que les théories de déformation de cisaillement hyperboliques ont été utilisées dans l'analyse de la vibration et du flambement des poutres et des plaques; et aussi en s'inspirant de la théorie exacte à trois dimensions pour étudier les solutions élastiques des plaques.

Les fonctions hyperboliques sont utilisées dans le présent travail, pour décrire la variation de déplacement à travers l'épaisseur de la poutre.

Notre objectif dans ce travail est de développer un nouvelle modèle de déformation de cisaillement hyperbolique en tenant compte l'effet d'étirement de l'épaisseur est afin d'étudier la vibration et le flambement d'une poutre sandwich FGM sous différentes conditions d'appuis.

I.4.Demarche de l'étude et contenu de la thèse

Le présent travail de thèse s'articule autour de deux parties essentielles, une première présente une étude bibliographique et une deuxième contient le volet analytique du travail.

La partie étude bibliographique comprend deux chapitres :

Dans le premier chapitre : nous avons présenté des généralités sur les matériaux sandwiches, les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles ainsi que leurs domaines d'utilisation.

Puis, le deuxième chapitre a été consacré à la présentation de la cinématique générale des solides (principe d'équilibre, relation contrainte-déformation, et le potentiel interne) ainsi que les différentes théories des poutres (théorie CBT, FSDBT,...).

La partie Analytique en son rôle est scindée en deux chapitres :

Au troisième chapitre, une analyse de la vibration libre et du flambement des poutres sandwiches fonctionnellement graduée en tenir compte l'effet d'étirement d'épaisseur et sous de différentes conditions aux limites a été présenté. Deux types communs des poutres sandwiches en FGM sont

considérés, un premier type avec un cœur homogène léger et un autre sandwich avec cœur homogène lourd.

Dans le dernier chapitre, nous avons présenté la validation des résultats du présent model avec ceux de la littérature ; une étude paramétrique a été aussi faite pour comprendre au mieux le matériau et sa composition.

A la fin de ce travail, nous avons terminé par une conclusion générale où on souligne l'efficacité de cette théorie dans la résolution du comportement de vibration libre et de flambement des poutres sandwiches en FGM et l'effet d'étirement d'épaisseur, l'ainsi par des perspectives envisagées pour des travaux futurs.

I-REVUE GENERALE SUR LES MATERIAUX D'ETUDE

I.1. Introduction

Les matériaux composites légers dont les rapports de résistance/poids et épaisseur/poids sont très grands, ont été utilisés avec succès dans l'industrie aéronautique et dans d'autres applications technologiques avant d'être appliquées dans le domaine du génie civil. Cependant, les matériaux composites traditionnels sont inutilisables sous un environnement à hautes températures. Les métaux ont été généralement utilisés dans le domaine de la technologie pendant plusieurs années grâce à leur excellente résistance mécanique et dureté. Mais dans des conditions de hautes températures, la résistance mécanique du métal devient faible comme pour les matériaux composites traditionnels. Les matériaux en céramique ont d'excellentes caractéristiques en résistance thermique. Cependant, les applications de la céramique sont habituellement limitées du fait de leur faible dureté.

L'amélioration des performances des pièces structurales peut conduire à chercher au sein d'un même matériau, des propriétés différentes, souvent antagonistes, mais localement optimisées. Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un même matériau tenace pose le problème de l'interface, par exemple une couche d'un matériau céramique peut être collée à la surface d'une structure métallique pour former un revêtement barrière thermique dans les applications à haute température. La transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peut entraîner une grande contrainte inter-laminaire ou une forte concentration de contraintes conduisant à la déformation plastique ou de fissuration. Une technique pour surmonter ces effets nuisibles et d'utiliser un matériau à gradient évalué (de l'anglicisme FUNCTIONALY GRADED MATERIALS (FGM)).

Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites connue sous le nom de matériau fonctionnellement gradués (FGM), ou matériaux à gradient de propriétés, a attiré une attention particulière.

I.2. Présentation générale des Matériaux Composites conventionnels

Contrairement aux matières premières classiques dont on connaît à l'avance les caractéristiques mécaniques, celles des composites ne sont réellement connues qu'après fabrication, car on réalise, en même temps, le matériau et le produit.

Actuellement, les composites à matrice organique représentent la majorité des matériaux composites; toutefois, il existe également des composites à matrice inorganique (métallique ou céramique) dont la diffusion reste encore marginale.

L'analyse du comportement des matériaux composites et la prévision de leurs propriétés vont faire intervenir les caractéristiques de la matrice, celles des fibres, des problèmes d'interface et des conditions de fabrication. En effet, les propriétés mécaniques des composites sont très dépendantes des fibres employées : nature, répartition, taux, longueurs, diamètres, ensimages... Toutefois, les propriétés mécaniques, électriques, chimiques, photochimiques, thermiques sont largement affectées par celles de la matrice (en particulier par les températures de transition et de fusion pour les thermoplastiques) et cela d'autant plus que la fibre est plus courte et en plus faible proportion. Une bonne connaissance des plastiques renforcés doit donc être fondée sur celle des renforts et des matrices.

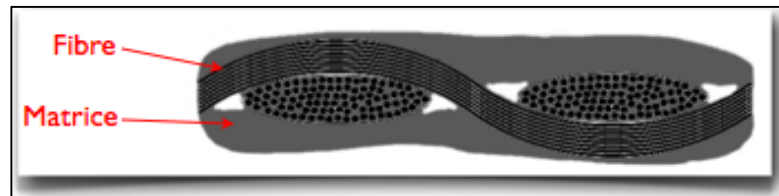
I.3. Définition d'un matériau composite

Un matériau composite est tout alliage ou matière première comportant un renfort sous forme filamentaire. Il nécessite l'association intime d'au moins deux composants : le renfort (la fibre) et la matrice (Figure I.3.1), qui doivent être compatibles entre eux et se solidariser, ce qui introduit la notion d'un agent de liaison, l'interface.

Un matériau composite peut être défini d'une manière générale comme l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux, l'assemblage final ayant des propriétés supérieures aux propriétés de chacun des matériaux constitutifs. On appelle maintenant de façon courante "matériaux composites" des arrangements de fibres, les renforts qui sont noyés dans une matrice dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible. La matrice assure la cohésion et l'orientation des fibres, elle permet également de transmettre les sollicitations auxquelles sont soumises les pièces. Les matériaux ainsi obtenus sont très hétérogènes et anisotropes [Saidi, 2015].

Il faut différencier charges et renforts. Les charges, sous forme d'éléments fragmentaires, de poudres ou liquide, modifient une propriété de la matière à laquelle on l'ajoute (par exemple la tenue aux chocs, la résistance au ultraviolet, le comportement au feu...). Les renforts, sous forme de fibres, contribuent uniquement à améliorer la résistance mécanique et la rigidité de la pièce dans laquelle ils sont incorporés.

Actuellement, les composites à matrice organique représentent plus de 99% des matériaux composites ; toutefois, il existe également des composites à matrice inorganique (métallique ou céramique) dont la diffusion reste encore marginale [Ould Larbi, 2015].



FigureI.3.1. Structure d'un matériau composite

❖ Les fibres:

Les fibres (renforts) contribuent à améliorer la résistance mécanique et la rigidité des matériaux composites et se présentent sous forme filamentaire, allant de la particule de forme allongée à la fibre continue qui donne au matériau un effet directif [Berreur, 2002]. Les propriétés des composites sont principalement influencées par le choix des fibres [Carolin, 2003].

Parmi les fibres les plus connues en génie civil, on peut citer : le carbone (haut module élastique et résistances mécaniques importantes à la fatigue), le verre (résistances moyennes, très utilisé pour renforcer les bétons) et l'aramide (de haute résistance à la traction, utilisée en câbles de hautes performances).

- **Carbone** : Les fibres de carbone ont un haut module d'élasticité, de 200 à 800 GPa. L'allongement ultime est de 0,3 à 2,5 %. Les fibres de carbone n'absorbent pas l'eau et elles résistent à plusieurs solutions chimiques. Elles présentent une résistance excellente à la fatigue, et une faible relaxation comparée à celle des aciers extensibles précontraints. La fibre de carbone est un conducteur électrique et, par conséquent, peut donner la corrosion galvanique si elle est en contact direct avec l'acier. Il faut signaler également le mauvais comportement au choc et à l'abrasion des stratifiés renforcés par des fibres de carbone. Les fibres de carbone se différencient par le taux de carbone plus ou moins élevé qui modifie les allongements et les contraintes à la rupture et les modules d'élasticité. On trouvera des fibres dites « A Haute Résistance » HR et des fibres « à haut module » HM ou même « à très haut module » THM, et des fibres intermédiaires [Chatain, 2001].

- **Verre** : Les fibres de verre sont moins chères que les fibres de carbone et les fibres d'aramide. Par conséquent, les composites en fibres de verre sont devenu la solution la plus utilisée dans plusieurs

applications, tel que le génie civil, l'industrie des bateaux et d'automobiles. Les modules d'élasticité des fibres sont de 70 à 85 GPa avec un allongement ultime de 2 à 5 % selon la qualité. Par contre les fibres de verre peuvent avoir des problèmes de relaxation. Elles sont aussi sensibles à l'humidité, mais avec le choix correct de matrice les fibres sont protégées.

-Céramique :

Les matériaux composites de type céramiques sont souvent constitués de renforts et de matrice en céramique. Les fibres sont élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Ces fibres sont rencontrées dans des applications où la température est très élevée entre 500°C et 2 000°C. Ces matériaux sont utilisés notamment dans les parties chaudes des moteurs d'avions. Quelques exemples de fibres céramiques :

- fibres de Carbure de Silicium
- fibres de Bore
- fibres de Bore carbure de silicium

- **Aramide** : Appelés aussi polyamide aromatique, une marque bien connue des fibres d'aramide est « kevlar » mais il existe d'autres marques aussi tel que « Twaron », « Technora », et « SVM ». Les modules d'élasticité de ces fibres sont de 70 à 200 GPa avec une haute énergie de fracture et un allongement ultime de 1,5 à 5 % selon la qualité. Les fibres d'aramide sont sensibles aux températures élevées, à l'humidité et aux radiations « ultra-violet » et par conséquent, ne sont pas largement utilisées dans les applications de génie civil. Plus loin, les fibres d'aramide ont des problèmes avec la relaxation et la corrosion, mais avec une bonne résistance au choc et à la fatigue. Berreur et al. (2002) ont présenté les principaux matériaux de renfort comme suit (Figure I.3.1):

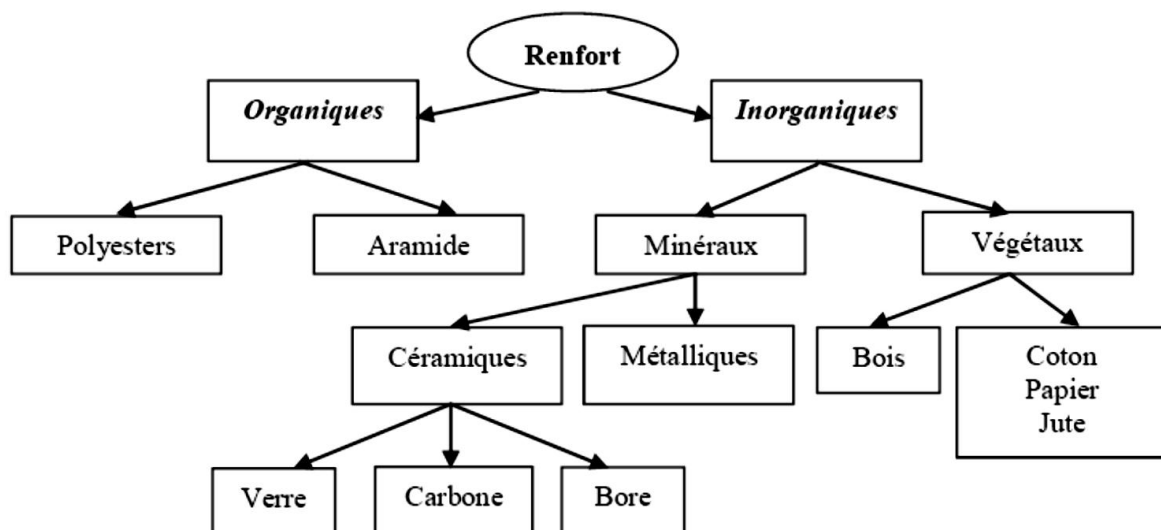


Figure.I.3.1. Organigramme illustrant les principaux matériaux de renfort [Berreur, 2002]

❖ La matrice :

C'est la phase continue. Elle constitue le corps du matériau, en assurant la cohérence du matériau, et en lui fournissant une cohérence au repos. Bien souvent, ce rôle est assuré par une résine ou un polymère. Dans le cas de ce matériau, la matrice est polymérique (Epoxyde).

Les différentes familles de matrice sont résumées dans le schéma de la Figure I.3.2 :

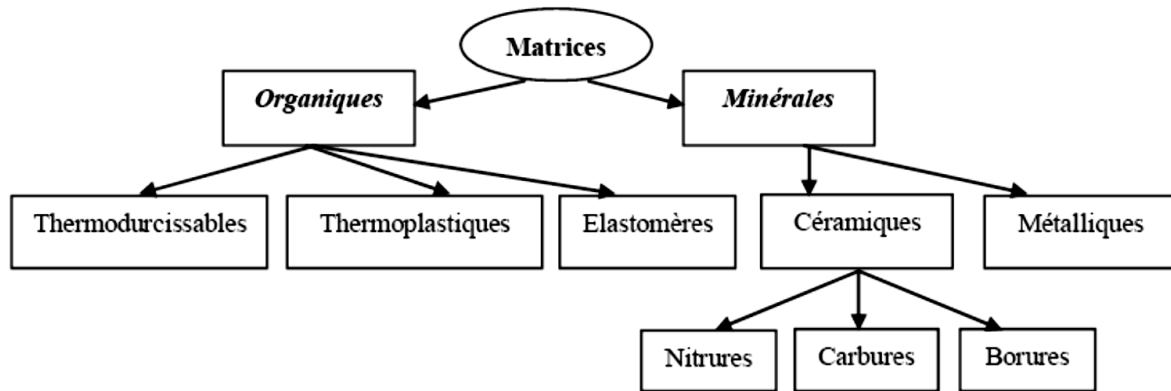


Figure I.3.2. Organigramme illustrant les différentes familles de matrice

En génie civil, les résines thermodurcissables (thermosets) sont utilisées presque exclusivement, telles que les matrices vinylesters, polyesters et époxys [Carolin, 2003]. Les Tableaux I.3.1, I.3.2 et I.2.3 donnent un ordre de grandeur des caractéristiques des fibres et matrices usuellement employées dans la fabrication des matériaux composites.

Tableau I.3.1. Propriétés des fibres [Phalippou, 2001].

Filament	Diamètre (µm)	Densité	Résistance à la traction (MPa)	Module de traction (MPa)	Allongement à la rupture (%)	Température de fusion (°C)
Verre E	3 à 30	2,54	3 400	73 000	4,5	850
Verre D	3 à 30	2,14	2 500	55 000	4,5	–
Verre R	3 à 30	2,48	4 400	86 000	5,2	990
Carbone HR	8	1,78	3 500	200 000	1	2 500
Carbone HM	8	1,8	2 200	400 000	0,5	2 500
Aramide HR	12	1,45	3 100	70 000	4	480
Aramide HM	12	1,45	3 100	130 000	2	480

HR : haute résistance ; HM : haut module.

Tableau I.3.2. Caractéristiques mécaniques des résines époxy [Bardonnnet, 1992]

Résistance à la traction (MPa)	50 à 80
Module de traction (GPa)	3 à 10
Allongement à la rupture (%)	1 à 1,5
Résistance à la compression (MPa)	140 à 150
Énergie de rupture au choc (kJ/m ²)	7 à 10

Tableau I.2.3. Propriétés mécaniques des résines polyesters [Schneider, 1993]

Masse volumique (kg/m ³)	1 200
Module d'élasticité en traction (GPa)	2,8 à 3,5
Contrainte à la rupture en traction (MPa)	50 à 80
Allongement à la rupture en traction (%)	2 à 5
Résistance au cisaillement (MPa)	10 à 20

I.4. Conception des matériaux composites

On conçoit un composite en fonction du type d'application, de chargement ; ce qui est différent des matériaux classiques où on adapte la conception d'une structure en fonction du matériau constitutif.

Pour un composite, on construit sa structure à la demande :

- la nature, la texture, la forme du renfort et son orientation ;
- le taux de renforcement ;
- la nature de la résine et des charges ou additifs ;
- la qualité de l'interface renfort-matrice ;
- la géométrie de la pièce à réaliser ;
- le procédé de mise en œuvre utilisé.

I.5. Mise en œuvre des matériaux composites

Les méthodes de mise en œuvre spécifiques aux matières plastiques renforcées ont contribué à l'évolution des termes utilisés pour désigner ces matériaux depuis leur origine, c'est-à-dire depuis une cinquantaine d'années.

Des techniques originales ont été élaborées pour la mise en œuvre de composites à fibres longues. La description de ces méthodes spécifiques occupe évidemment une place importante dans la rubrique « Composites ».

Trois opérations sont indispensables (Figure I.5.1) :

- 1- Imprégnation du renfort par le système résineux.
- 2- Mise en forme à la géométrie de la pièce.
- 3- Durcissement du système.

Soit par polycondensation et réticulation (ou polymérisation) pour les matrices thermodurcissables, Soit par simple refroidissement pour les matières thermoplastiques. Il existe différentes techniques mais la plus utilisée est par moulage :

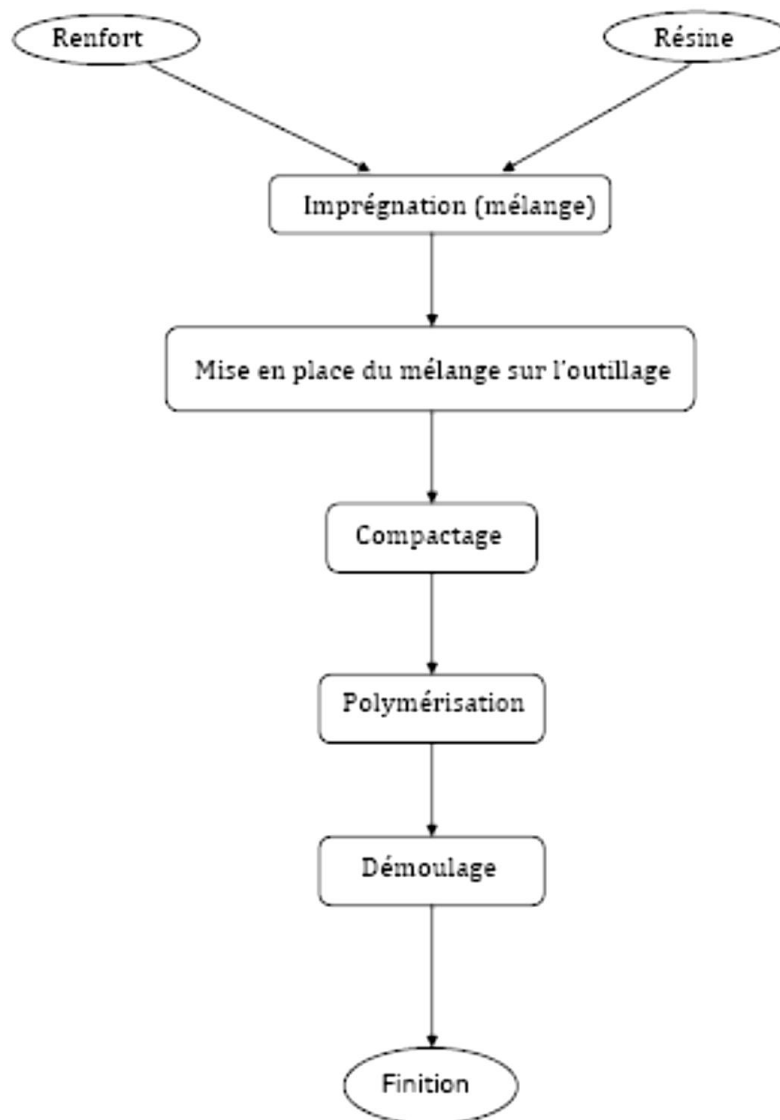


Figure 1.5.1. Les différents étapes de formage par moulage d'un matériau composite.

I.6. Propriétés mécaniques des composites

Les propriétés mécaniques des matériaux composites varient considérablement. Ces propriétés dépendent des fibres contenues dans le composite (type, quantité et direction), de la matrice utilisée, et du rapport volume-fibre, c'est à dire le ratio du volume des fibres par rapport au volume total du composite. Elles sont aussi affectées par le volume ou la dimension du composite lui-même [Carolin 2003]. En général, les composites de fibres de carbone sont plus solides et plus rigides que les composites de fibres de verre [Foo, 2001]. Le Tableau I.6.1 résume les propriétés mécaniques principales des matériaux composites couramment utilisés dans le domaine génie civil.

Tableau I.6.1. Propriétés mécaniques typiques des composites [Teng, 2002].

Matériaux composites Unidirectionnel	Contenu en fibres (% par poids)	Densité (kg / m ³)	Module d'élasticité longitudinale (GPa)	Résistance à la traction (MPa)
Fibres de verre / polyester (GFRP laminé)	50-80	1600-2000	20-55	400-1800
Carbone / époxy (CFRP laminé)	65-75	1600-1900	120-250	1200-2250
Aramide / époxy (FRP laminé)	60-70	1050-1250	40-125	1000-1800

Le Tableau (I.6.1) de Teng et al. (2002) [Teng, 2002] pour les composites «PRF» avec des fibres unidirectionnelles montre une large variété de résistances et de rigidités de ces matériaux. Reste à noter que les valeurs données dans ce dernier sont à titre indicatives, et il peut exister quelques produits particuliers qui ont des propriétés différentes que ceux indiquées dans ce tableau. Concernant le module d'élasticité ou la résistance à la traction d'un composite «PRF» formé par le processus de stratification directe, on remarque que l'épaisseur du composite est généralement difficile à contrôler ou à définir avec précision ; on est amené à utiliser l'épaisseur du voile de fibre (et Van Gemert 1999) [Ahmed, 2002]. ou bien une épaisseur nominale généralement recommandée par le fabricant [Teng, 2002]. Par conséquent, les modules d'élasticité et les résistances à la traction dépendent de la définition de l'épaisseur et peut être donc loin des valeurs indiquées dans le Tableau I.6.1 avec une grande marge. Sans se soucier du type de fibres utilisé ou de la méthode de mise en œuvre du composite, les trois types des matériaux composites «PRF» ont le même comportement linéaire-élastique avec une rupture fragile en traction. C'est une propriété très importante en termes d'utilisation structurale des composites «PRF». La Figure I.2.3 montre des courbes (contraintes-déformations) typiques pour des composites «PRFV», «PRFC», et des aciers doux [Char et al. ,1994 ;Ehsani et Saadatmanesh ,1996 ;Teng et al. , 2002 ; Abdalla ,2002 ; Rizkalla et al. ,2003 ; Carolin ,2003].

I.7. Architecture des matériaux composites

I.7.1. Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

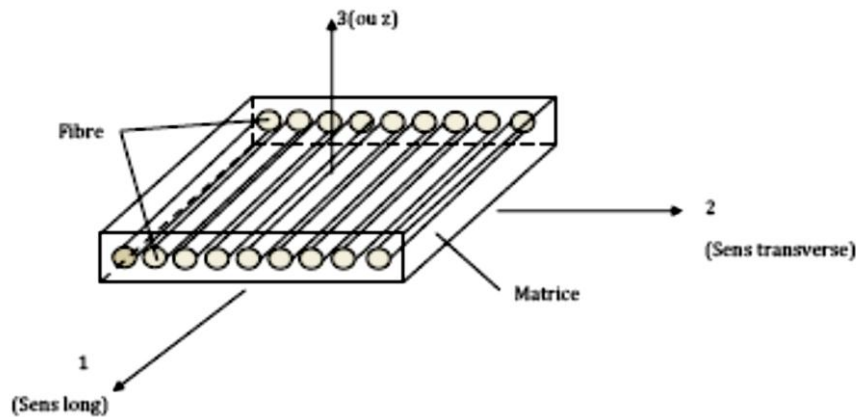


Figure 1.7.1. Pli à Renforcement unidirectionnel.

I.7.2. Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacune une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches, et désigné comme le référentiel du stratifié (Figure 1.7.2).

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques. On pourra avoir des stratifiés du type :

1. Equilibré : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ que de couches orientées suivant la direction $-\theta$.
2. Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
3. Antisymétrique : stratifié comportant des couches disposées non symétriquement par rapport à un plan moyen.
4. Croisé : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90° .
5. Hybride : les couches successives comportent des fibres de natures différentes, il s'agit d'un stratifié hybride.

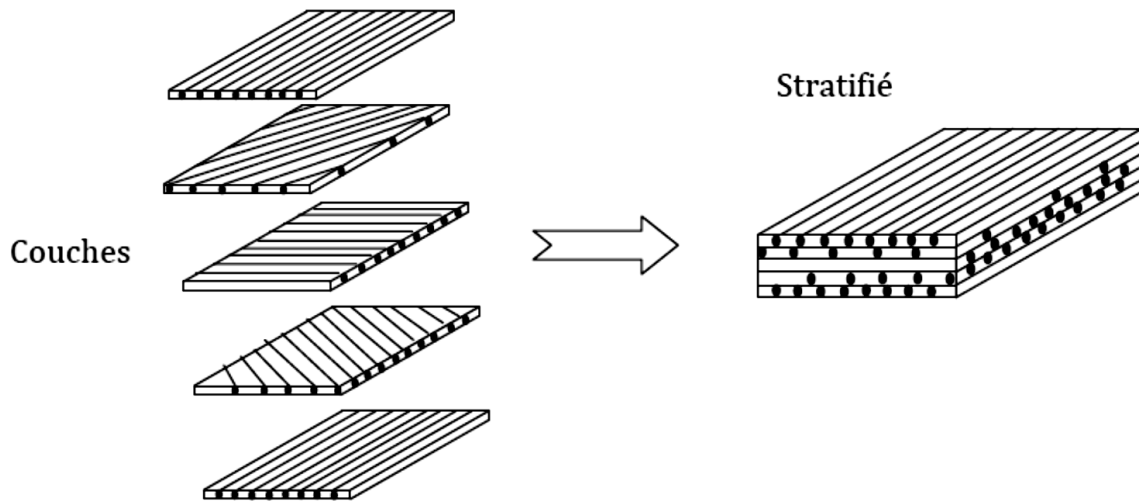


Figure 1.7.2. Constitution d'un stratifié.

I.7.3. Sandwich

Les matériaux sandwichs résultent généralement de l'association de deux semelles ou peaux de faible épaisseur, constituées de matériaux à haute résistance et haut module et d'une âme beaucoup plus épaisse et de faible densité (Figure I.7.3). Ils ont pour avantages: une grande rigidité, une résistance à la rupture élevée associées à un faible poids par unité de surface. Malgré une activité de recherche et de développement sur ces matériaux, le comportement au cours de l'endommagement reste peu connu. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion et c'est un excellent isolant thermique.

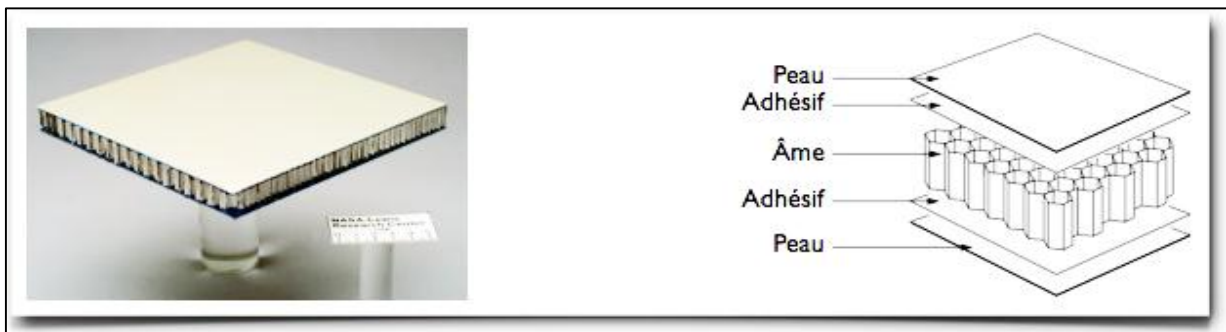


Figure 1.7.3. Constitution d'un sandwiche.

I.8. Avantages et inconvénient des matériaux composites

I.8.1. Avantages

- Gain de masse ;
- Mise en forme de pièces complexes (principe du moulage) et réduction du nombre d'interface (boulonnage, rivetage et soudure sur structures métalliques) ;
- Grande résistance à la fatigue ;

- Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf en cas de contact entre l'aluminium et des fibres de carbone) ;
- Insensibles aux produits chimiques « mécaniques » comme la graisse, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole...etc. [Ait athmane, 2011]

I.8.2. Inconvénients

- Vieillissement sous l'action de l'eau et de la température;
- Attention aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes;
- Tenue à l'impact moyenne par rapport aux métalliques;
- Coût parfois prohibitifs (temps, coût, étude et mise en œuvre) ;
- Grande concentration de contraintes dans les composites stratifiés et les sandwiches [Ait athmane, 2011].

I.9. Applications des matériaux composites au génie civil

En raison de leurs hautes propriétés mécaniques et de tous les avantages déjà exposés précédemment par rapport aux matériaux traditionnels, les matériaux composites sont de plus en plus utilisés dans le génie civil. Ces nouveaux matériaux de hautes performances, font aussi bien leur apparition dans la réhabilitation que dans la conception et la réalisation de nouvelles structures. Parmi les multiples applications des matériaux composites dans l'ingénierie civile, nous pouvons citer :

- Construction d'édifices et d'ouvrage d'art léger ;
- Renforcement structurel d'édifices existants, afin de respecter de nouvelle norme ou en prévision d'utilisation nouvelle d'un bâtiment (ajout d'étage, changement du type d'exploitation). Utilisation principalement dans ce cas de la fibre de carbone pour le renforcement de poutres, poteaux et dalles sous flexion et cisaillement ;
- Réalisation de formes complexes de grande portée ;
- Utilisation de produits dérivés du béton avec ajouts de fibre, béton armé avec renfort en fibre de verre ou de carbone ;
- Elaboration de matériaux hybrides avec des matériaux traditionnels ;
- Transmission et distribution d'électricité temporaire et durable, pylônes électriques modulables et déplaçables ;
- Structures destinées aux réservations d'eau ;
- Panneaux pour murs et planchers ;
- Produits dérivés du bois : bois aggloméré, lamellé collé, panneaux OSB,etc;

- Géotextiles : pour les opérations de drainage, stabilisation de sol, construction de barrages.

Dans le domaine du génie civil, les matériaux composites sont utilisés pour le renforcement et la réhabilitation d'éléments structuraux en béton armé, tels que les poutres, les dalles, les colonnes et les murs. Les premières recherches sur l'application de ce nouveau matériau destinées aux ouvrages de génie civil datent de 1980, bien que ce soit plutôt vers 1990 que le matériau est utilisé, d'abord sur une base expérimentale, puis progressivement sur une base commerciale.

I.10. Matériaux composites intelligents (FGM)

Les matériaux à gradient fonctionnel (*Functionally Graded Materials*) ou les matériaux fonctionnellement gradués sont une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière. A chaque interface, le matériau est choisi selon les applications spécifiques et les charges environnementales. Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales (Miyamoto et al. 1999, Suresh et Mortensen 1998) ou encore l'amélioration du transfert de chaleur (Öchsner et al. 2008). Ce nouveau concept marque le commencement d'une révolution dans les domaines de la science et de la mécanique des matériaux. L'intérêt particulier et grandissant envers les matériaux à gradient fonctionnel, pensés et conçus pour la première fois au Japon, est mis en évidence par les innombrables conférences et publications de qualité dédiées à l'analyse, la conception et la fabrication de ces matériaux.

Une question s'impose : Comment ce concept a-t-il germé, et comment l'étude des FGM a-t-elle été lancée ?

Au environ de 1984-1985, dans une université Japonaise, deux chercheurs l'un dans le domaine de l'aéronautique et l'autre dans le domaine des sciences des matériaux rêvent de concevoir un engin spatial dont le revêtement pourrait résister à un environnement thermique très sévère. Il n'existe alors pas de matériau métallique ni de matériau composite capable de répondre à la fois aux exigences environnementales telles que décrites tout en gardant d'excellentes propriétés mécaniques. Ils échangent alors l'idée du concept FGM, autrement dit d'un matériau avec une

gradation continue dans la direction de l'épaisseur, passant d'une face totalement métallique vers une face totalement céramique.

En 1987, le programme national de recherche et de développement sur les FGM a vu le jour au Japon. Beaucoup de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer un nouveau type de matériau, principalement pour permettre de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale commerciale. Le problème principal à résoudre étant le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air lors de la période de rentrée de la navette dans l'atmosphère terrestre et en même temps, de protéger l'intérieur contre un surchauffement. Certes, un revêtement céramique aurait pu protéger le fuselage contre les températures qui se développent à la surface, mais on a dû craindre l'action des très grandes contraintes thermoélastiques aux interfaces entre fuselage métallique et sa protection céramique, se rendant compte des différences entre les modules de Young et les conductivités thermiques des deux matériaux.

L'idée fût alors de produire une transition douce, donc graduelle entre métal pur et céramique pure appelée matériau à gradient fonctionnel.

En 1990 a eu lieu la première conférence internationale sur les FGM à Sendai-city au Japon.

En 1992, les matériaux à gradient fonctionnel ont été sélectionnés parmi les dix premières technologies de pointe au Japon et actuellement dans le monde entier. La réussite dans le domaine des matériaux intelligents ne sera possible que par une forte synergie entre les différents secteurs industriels et scientifiques. Certes, le concept FGM a été proposé à l'origine pour répondre aux exigences du domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial mais ces matériaux sont utilisés dans la fabrication des outils industriels qui exigent une grande rigidité, une grande dureté et une résistance thermique importante. Ils ont également des applications en optoélectronique, particulièrement dans la fabrication des fibres optiques capables de transmettre l'information à de très grandes vitesses. Leur application dans les systèmes de conversion de l'énergie solaire en énergie électrique sera probablement effective dans un futur proche dans notre pays qui a un potentiel énorme dans ce domaine.

Les FGM sont également les biomatériaux idéaux pour réparer ou combler les déficiences osseuses éventuelles de notre squelette. Cette technologie est aussi applicable dans les centrales nucléaires où la température peut atteindre des valeurs considérables.

Actuellement, des lanceurs en FGM sont testés et les résultats sont prometteurs. Outre les applications citées précédemment, les FGM trouvent aussi leurs applications dans les semi-conducteurs et en génie civil.

I.11. Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une poutre FGM

I.11.1. Propriétés matérielles de la poutre P-FGM

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme [Ait Atmane, 2010]:

$$g(z) = \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^p \quad (I-1)$$

Où p est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la poutre. Une fois que la fraction de volume local $g(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = g(z).E_1 + [1 - g(z)].E_2 \quad (I-2)$$

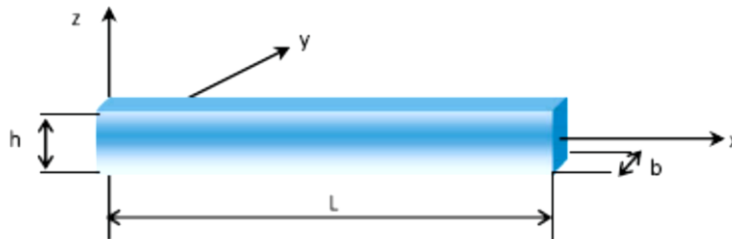


Figure I.11.1. Les dimensions d'une poutre FGM [Ouled Larbi, 2014]

Où E_1 et E_2 et sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la poutre FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la (figure I.11.1), il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour $p > 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p < 1$. Pour une résolution numérique, par éléments finis par exemples, Les propriétés matérielles effectives E de la couche de FGM, comme le module de Young E , et la densité et le coefficient de poisson ν peut alors être exprimé comme suit :

$$E = \sum_{j=1} E_j g_j \quad (I-3)$$

Là où le E_j et le g_j sont les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche jj (Figure I.11.2.), et la somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait l'unité :

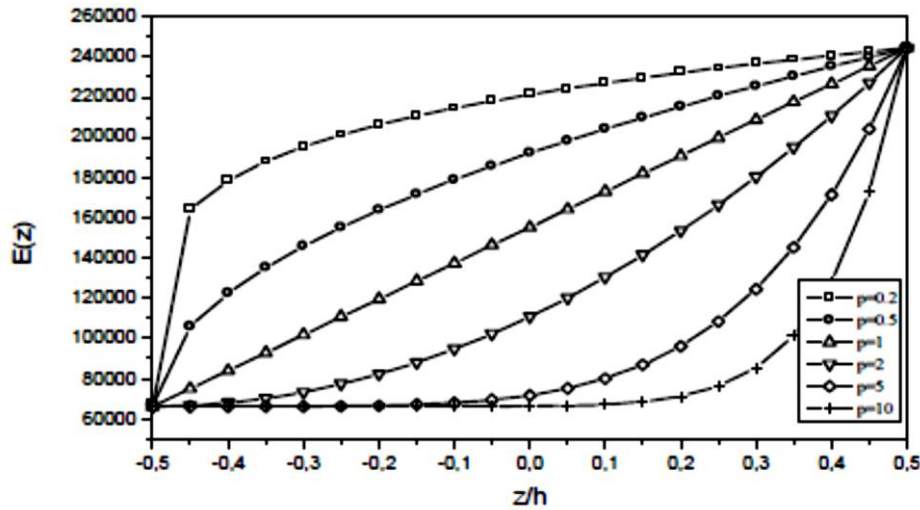


Figure I.11.2. La variation du module de Young dans une poutre P-FGM.

I.11.2. Propriétés matérielles de la poutre S-FGM

Si l'on rajoute une poutre P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une poutre composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface des deux matériaux. Par conséquent, Chung et Chi ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \tag{I-4}$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \tag{I-5}$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété E de la poutre S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = g_1(z).E_1 + [1 - g_1(z)].E_2 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \tag{I-6}$$

$$E(z) = g_2(z).E_1 + [1 - g_2(z)].E_2 \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \tag{I-7}$$

La figure I.11.2 montre que la variation du module de Young selon les équations avec des distributions sigmoïdes, donc la poutre FGM est ainsi appelée (poutre S-FGM).

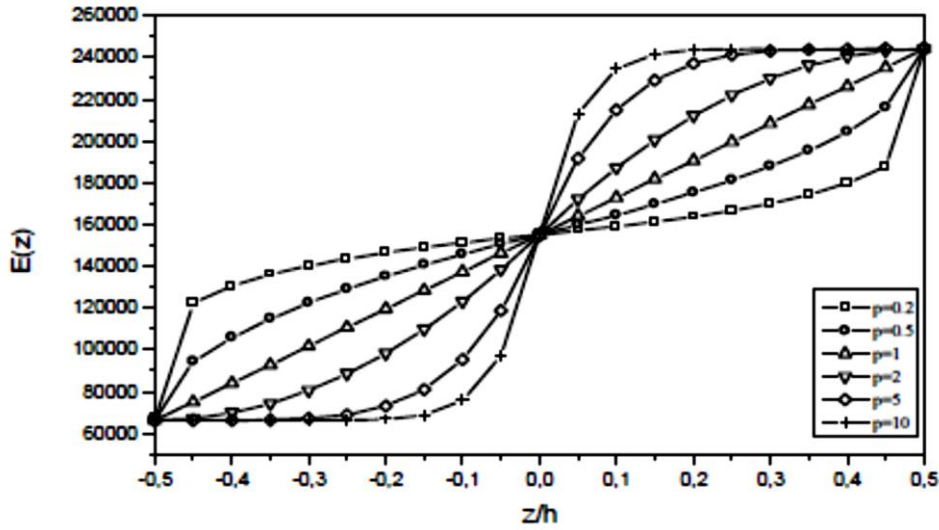


Figure I.11.2. La variation du module de Young dans une poutre S-FGM.

I.11.3 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par :

$$E(z) = Ae^{\beta(z+\frac{h}{2})} \quad \text{Avec } A = E_2 \text{ et } \beta = \frac{1}{h} \ln \frac{E_1}{E_2} \quad (I-8)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la poutre E-FGM est représentée dans la figure I.11.3.

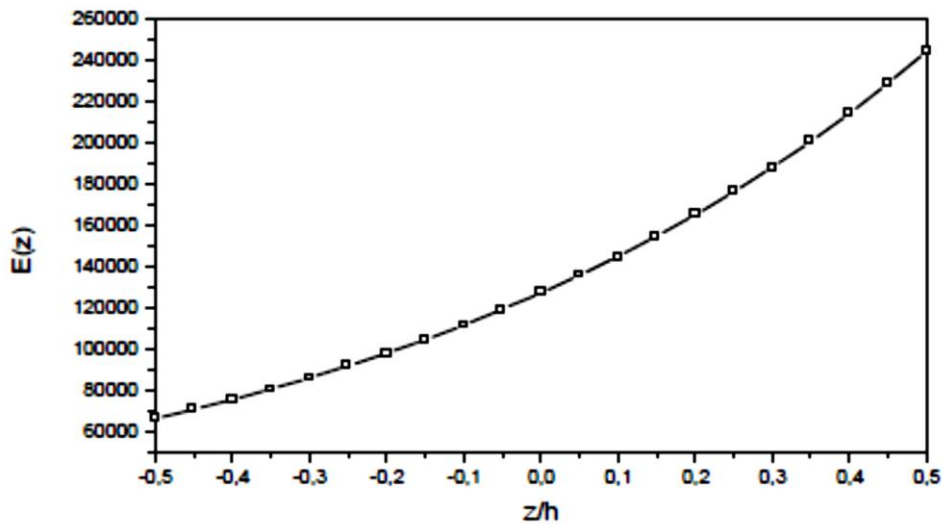


Figure I.11.3. La variation du module de Young de la poutre E-FGM.

I.12. Loi de mélange

Il existe de nombreuses approches utilisées pour décrire la variation matérielle du FGM qui sont fabriqués à partir de deux phases de matériaux. En général, la plupart des approches sont basées sur la distribution de la fraction volumique plutôt que développé à partir de microstructures classées réelles [Bao et Wang, 1995 ; Shen, 2009]. Deux types de FGM, qui représentent une variation continue de compositions de matériaux à gradient, à travers la direction représentée sur la figure.I,12 (a) et de la variation de la couche à goutte de compositions de matière de la figure. I.12.1 (b), ont été trouvés dans la littérature. En considérant les FGM en deux matériaux distincts comme le montre la figure. I.12.1, on suppose que les compositions matérielles des FGM sont variées de la surface supérieure de la matière A riches à la surface inférieure de matériau B-riches. On voit que, pour le cas FGM continues, les compositions matérielles sont modifiées avec une répartition régulière dans la direction graduelle. Toutefois, pour un autre cas qui peut être défini en tant que couche de matériau quasi-homogène, les compositions sont présentées sous la forme d'une répartition en couches.

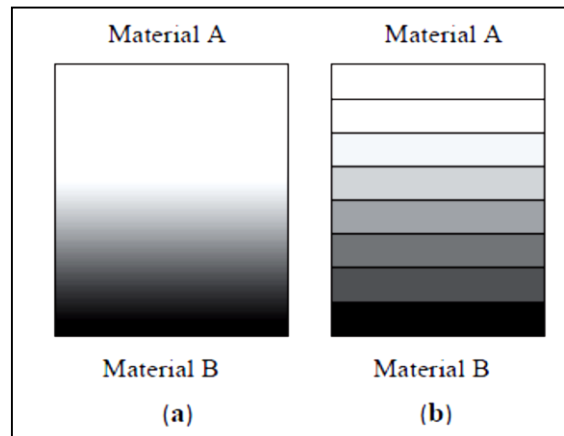


Figure. I.12.1. Exemples de FGM: (a) un FGM continue et (b) un FGM discontinue
[Ait Yahia, 2015]

Les valeurs des propriétés matérielles des FGM continues peuvent être prédites à l'aide divers modèle mathématique. Comme indiqué précédemment, les FGM sont microscope matériaux composites spatiales non homogènes, par conséquent, les propriétés du matériau FGM dépendent de la position. Une fonction exponentielle utilisée pour définir les propriétés des matériaux a été appliqué dans de nombreuses études afin d'étudier la propagation des fissures, mécanique de la rupture, de flexion, flambage et les vibrations [Erdogan, 1995 ; Sankar, 2001 ; Yang et Chen, 2008]. Le module de cisaillement G , le module de Young E et de la densité massique ρ varie le long de la direction de l'épaisseur z peut être défini comme la distribution exponentielle ci-dessous:

$$G(z) = G_0 e^{\beta z}, E(z) = E_0 e^{\beta z}, \rho(z) = \rho_0 e^{\beta z} \quad (I.9)$$

Où G_0, E_0 et ρ_0 sont les valeurs du module de cisaillement, respectivement module de Young et la densité de masse au plan médian ($z = 0$). Il est à noter que β est un paramètre constant pour définir

la propriété variation matériau le long de la direction d'épaisseur, et FGM peut spécialiser en matériaux isotropes homogènes en prend $\beta = 0$.

Sur la base de la règle de mélange, les propriétés des matériaux efficaces P , peuvent être écrites comme :

$$P = P_m V_m + P_c V_c \quad (\text{I.10})$$

Où P_m, P_c, V_m, V_c sont les propriétés des matériaux et la fraction volumique du métal et céramique, respectivement.

$$V_m + V_c = 1 \quad (\text{I.11})$$

Une autre forme de modèle mathématique, appelle une distribution de loi de puissance a été largement utilisé dans un certain nombre d'études de recherche, en particulier pour le domaine du génie mécanique [Cheng, 2000 ; Yang, 2003a ; Navazi., 2006 ; Ganapathi, 2007 ; Sun, 2011]. La distribution de loi de puissance en fonction de la règle de mélange a été introduite par Wakashima et al. Afin de définir les propriétés des matériaux efficaces de FGM [Wakashima, 1990]. La fraction volumique de céramique V_c peut écrire comme suit:

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \quad (\text{I.12})$$

Où le nombre positif n ($0 \leq n < \infty$) est la loi de puissance ou l'indice de fraction volumique. z est un paramètre de distance le long de la direction gradient, tandis que h est la longueur totale de la direction. Pour connaître les résultats des propriétés des matériaux en fonction de la distribution de loi de puissance, cela peut être réalisé en substituant les équations de fractions de volume de matériau en équations I.11 et I.12 dans l'équation I.10.

Dans l'étude de Sofiyev [Sofiyev, 2009], plusieurs types de la distribution de loi de puissance introduisent par Pitakthapanaphong et Busso [Pitakthapanaphong et Busso, 2002] ont été utilisés pour définir les propriétés des matériaux FGM pour étudier le comportement vibratoire et de stabilité des FGM coquilles coniques soumis à une pression externe. Les équations du matériau de la fraction volumique utilisée pour le calcul de céramique V_c correspondant à différents types de la distribution en loi de puissance sont exprimés en tant que:

$$\begin{aligned} \text{Type Linéaire : } & V_c = z + 0.5 \\ \text{Type Quadratique : } & V_c = (z + 0.5)^2 \\ \text{Type Quadratique inversé : } & V_c = 1 - (0.5 - z)^2 \\ \text{Type Cubique : } & V_c = 3(z + 0.5)^2 - 2(z + 0.5)^3 \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

Pour bien comprendre sur les modèles mathématiques présentés dans l'équation I.5, les fractions volumiques de céramique V_c par rapport aux modèles tracés en fonction du rapport de l'épaisseur z/h sont illustrées à la Figure.I.12.2.

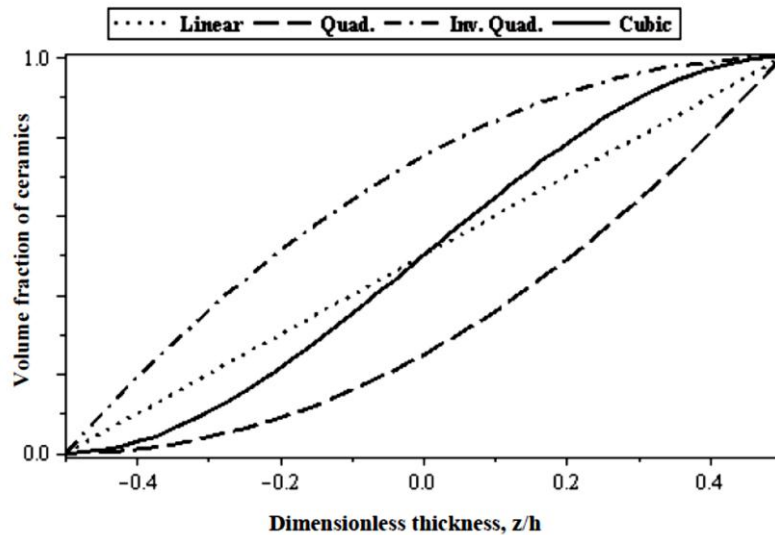


Figure. I.12.2. Variations de la fraction volumique de la céramique avec différents modèles basés sur la distribution de loi de puissance.

Cho et Ha [Cho, 2002] ont présenté le modèle mathématique pour prédire la fraction volumique de matériau FGM composé de trois couches distinctes. Les couches supérieure et inférieure sont respectivement faites par la céramique et le métal homogène alors que la couche intermédiaire a été donnée pour la région à gradient comme le montre la Figure.I.12.3. sur cette figure, les fractions volumiques importantes ont été modifiées dans l'axe des y qui sont exprimées comme suit:

$$V_m(y) = \begin{cases} 1 & -d \leq y \leq -d_L \\ C_m & -d_L \leq y \leq -d_U \\ 0 & -d_U \leq y \leq -d \end{cases} \tag{I.14}$$

$$V_c(y) = 1 - V_m(y) \tag{I.15}$$

Où $C_m(y)$ est une fonction continue qui peut satisfaire les conditions de continuité aux interfaces de la couche inférieure et supérieure.

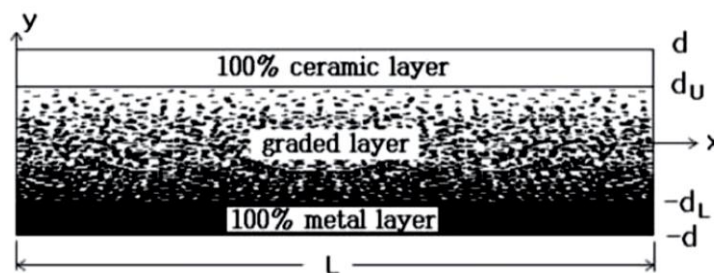


Figure. I.12.3 : Trois couches de céramique et de métal FGM composite [Cho, 2002]

Si l'on rajoute une poutre P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une poutre composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface des deux matériaux. Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux

fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces [Ait Atmane, 2010]. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par:

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.16.a})$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.16.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété S de la poutre S-FGM peut calculer par:

$$S(z) = g_1(z).S_1 + [1 - g_1(z)].S_2 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.17.a})$$

$$S(z) = g_2(z).S_1 + [1 - g_2(z)].S_2 \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.17.b})$$

La figure I.12.4 montre que la variation du module de Young selon les équations I.17.a et I.17.b avec des distributions sigmoïdes, donc la poutre FGM est ainsi appelée **Poutre S-FGM**.

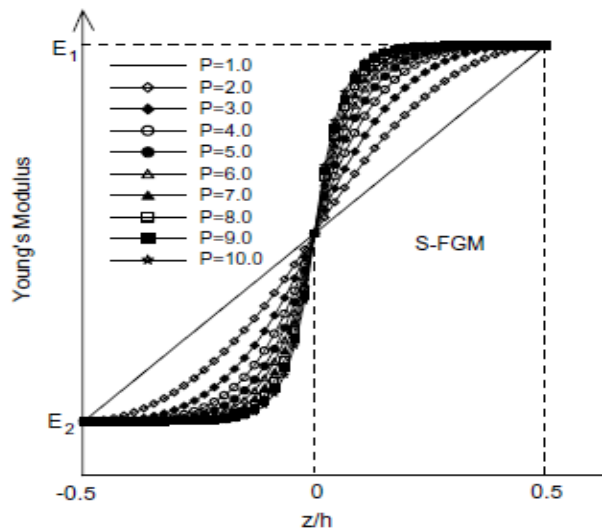


Figure I.12.4 . La variation du module de Young dans une poutre S-FGM.

I.13. Loi de comportement

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés. La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme condensée [Berthelot, 2005]:

$$\sigma = C\varepsilon \quad (\text{I.18})$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (\text{I.19})$$

Cette loi, généralement appelée loi de HOOKE généralisée, introduit la matrice de rigidité \mathbf{C} , symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général à l'aide de 21 coefficients indépendants, ici les 21 constantes de rigidité C_{ij} .

I.13.1. Matériau anisotrope

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique.

I.13.2. Matériau monoclinique

Ce matériau possède un plan de symétrie. L'expression de la matrice de passage ne change pas pour tout changement de repère symétrique par rapport à ce plan [Berthelot, 2005]. Supposons le plan (e1, e2) plan de symétrie du matériau, la loi de Hooke se résume à l'expression suivante:

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{I.20})$$

La matrice de souplesse à la même forme, le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduite à 13.

I.13.3. Matériau orthotropique

Le matériau orthotrope est un matériau à 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère [Berthelot, 2005]. La même démarche que précédemment conduite aux expressions dans un repère défini par les axes d'orthotropie :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (I.21)$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 9.

I.13.4. Matériau transversalement isotrope

Le matériau unidirectionnel est un matériau possédant un axe de symétrie, par exemple l'axe e1. C'est le cas pour un ensemble de fibres unidirectionnelles dans un substrat. Par géométrie le matériau unidirectionnel est orthotrope, Il est souvent appelé orthotrope de révolution. Dans le repère d'orthotrope, la matrice s'écrit :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (I.22)$$

La matrice de rigidité d'un matériau transversalement isotrope à 5 constantes.

I.13.5. Matériau isotrope

Si le matériau possède un nombre infini de plan de symétrie, on dit qu'il est isotrope. Dans ce cas le nombre de constantes indépendantes vaut seulement deux (02) :

$$C_{11} = C_{22}, C_{12} = C_{23}, C_{66} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2} = \frac{C_{11} - C_{22}}{2} \quad (I.23)$$

La matrice de rigidité d'un tel matériau est donnée par :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (I.24)$$

I.11. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux composites, leurs propriétés, leurs domaines d'application, leurs l'histoire et de leur développement.

La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

Enfin nous avons terminé par l'étude des différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau suivant l'épaisseur de la poutre, ces lois pouvaient être puissantielles, exponentielles ou même sigmoïdes.

II- LA CINEMATIQUE DES SOLIDES

II.1. Introduction

Ce chapitre expose les principales méthodes qui permettent d'obtenir les équations générales d'équilibre d'une structure ainsi que les différentes théories des poutres.

Dans toute étude de structure, outre le calcul des réactions, des éléments de réduction et des contraintes, on fait également des calculs de déplacements. Généralement, on fixe pour les déplacements des sections des limites admissibles à ne pas dépasser, tout comme pour les contraintes. Il n'est pas rare même que les conditions de déformabilité soient plus sévères que les conditions de résistance.

La limitation des déplacements vise avant tout à préserver la fonctionnalité de la construction. A titre d'exemple, une trop grande déformabilité des poutres peut provoquer la fissuration des cloisons légères et engendrer des désordres très gênants.

D'autre part, lorsque les déplacements sont importants ils peuvent modifier significativement l'action des charges appliquées (ils engendrent d'autres efforts, dits effets du second ordre), et dans ce cas il est nécessaire d'en tenir compte.

Par ailleurs, la résolution des problèmes hyperstatiques, qui constituent l'essentiel des structures habituelles, fait appel aux calculs de déplacements.

Le déplacement de la section d'une poutre peut être :

- une translation
- une rotation

Dans le cas d'une poutre horizontale fléchie dans le plan xy , l'axe des x étant confondu avec l'axe longitudinal de la pièce, les déplacements verticaux des centres de gravité des sections droites, mesurés à partir de l'axe x , sont appelés flèches. Les rotations se font autour de l'axe z (axe neutre) et représentent les angles, mesurés en radians, dont tournent les sections droites de la poutre.

II.2. Principe général d'équilibre - équations d'équilibre

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système soit en équilibre sont :

a) les sommes des projections de toutes les forces sur 3 axes passant par un point quelconque et non situés dans un même plan doivent être nulles,

b) les sommes des moments par rapport à chacun des trois axes doivent être nulles.

Pour une construction (structure), la vérification de ces conditions signifie qu'elle ne peut se déplacer comme un tout (corps rigide), autrement dit elle est en équilibre.

Soient $oxyz$ un repère trirectangle et F_x , F_y et F_z les projections sur les axes ox , oy et oz d'une force quelconque. Les conditions d'équilibre (a) et (b) s'écrivent (cas général) :

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0 & \quad \sum M / x = 0 \\
 \sum F_y = 0 & \quad \sum M / y = 0 \\
 \sum F_z = 0 & \quad \sum M / z = 0
 \end{aligned}
 \tag{II.1}$$

Les équations (II.1) sont appelées équations d'équilibre de la statique ou six équations universelles d'équilibre.

Dans le cas d'un système plan, xy par exemple, le système d'équations (II.1) se réduit à :

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M / \Delta = 0
 \tag{II.2}$$

où Δ est un axe quelconque perpendiculaire au plan xy.

Notons que les équations d'équilibre de la statique sont écrites en travaillant sur la configuration initiale du système, c'est-à-dire non déformée ; autrement dit les déformations sont négligées.

II.3. Relations contraintes-efforts

Les efforts résultants et les moments agissant sur un élément de plaque (Figure II.3.1, II.3.2 et II . 3.3) [Ait yahia, 2015].

$$\{N\} \equiv \{N_i\} = \begin{Bmatrix} N_x(x, y) \\ N_y(x, y) \\ N_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x(x, y, t) \\ \sigma_y(x, y, t) \\ \tau_{xy}(x, y, t) \end{Bmatrix} dz
 \tag{II.3}$$

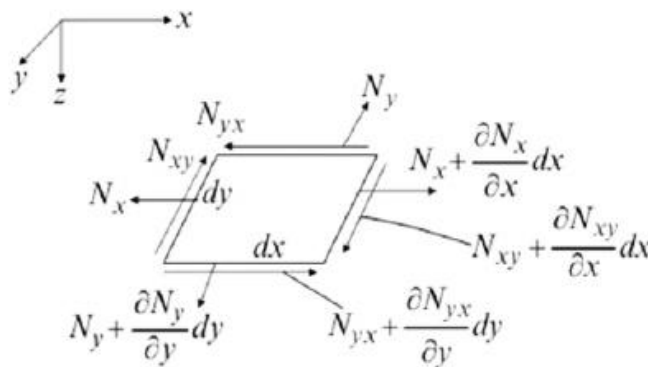


Figure II.3.1. Efforts agissant dans le plan.

$$\{M\} \equiv \{M_i\} = \begin{Bmatrix} M_x(x, y) \\ M_y(x, y) \\ M_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x(x, y, t) \\ \sigma_y(x, y, t) \\ \tau_{xy}(x, y, t) \end{Bmatrix} z dz \quad (II.4)$$

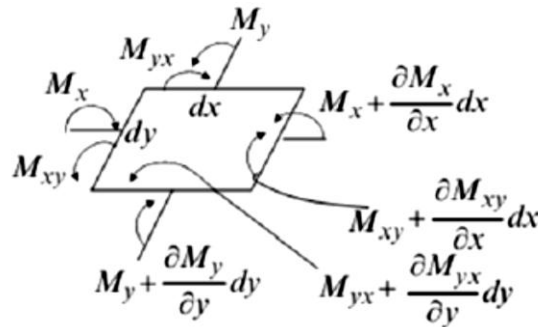


Figure II.3.2. Moments agissant sur un élément.

$$\{Q\} \equiv \{Q_i\} = \begin{Bmatrix} Q_x(x, y) \\ Q_y(x, y) \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz}(x, y, t) \\ \tau_{yz}(x, y, t) \end{Bmatrix} dz \quad (II.5)$$

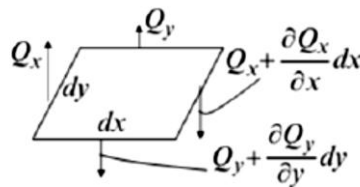


Figure II.3.3. Efforts tranchants dans un élément

II.4. Le potentiel interne et ses applications

Dans ce chapitre seront examinées les relations qui existent entre les sollicitations agissant sur un système et les déplacements qu'elles produisent.

Les systèmes considérés sont généralement plans (géométrie et chargement) mais les développements théoriques s'appliquent à tous les systèmes, sauf précision contraire [Ait yahia, 2015].

Pour garder à la théorie toute sa généralité, tout en simplifiant autant que possible les notations, nous désignerons une sollicitation par F (sollicitation généralisée), que ce soit une force P , un couple C ou une sollicitation globale F (F_1, F_2, \dots, F_n) et un déplacement par δ (déplacement généralisé), que ce soit une translation λ (déplacement linéaire) ou une rotation γ (déplacement angulaire).

II.4.1. Travail des forces extérieures et énergie de déformation

II.4.1.1 Notions de travail et de travail complémentaire

Pour fixer les idées, nous considérons le cas d'une barre prismatique soumise à une traction axiale F_1 qui produit un allongement δ_1 (Figure II.4a).

Nous supposons que la force F_1 est appliquée graduellement, d'une manière lente, de façon à ne produire aucune force d'inertie. Dans ces conditions, on dit que le chargement (force F_1 ici) est appliqué statiquement et le déplacement engendré (ici un allongement) est relié à la force appliquée par une relation représentée par le diagramme "F- δ " de la figure II.4b.

Soit F une valeur intermédiaire et δ l'allongement correspondant. A un accroissement dF de la charge correspond un allongement supplémentaire $d\delta$. Le travail élémentaire produit par F au cours de l'accroissement $d\delta$ est défini par :

$$d\tau_e = Fd\delta \tag{II.6}$$

Il est représenté par l'aire hachurée (hachures inclinées) du diagramme $F-d$ (Figure II.4b).

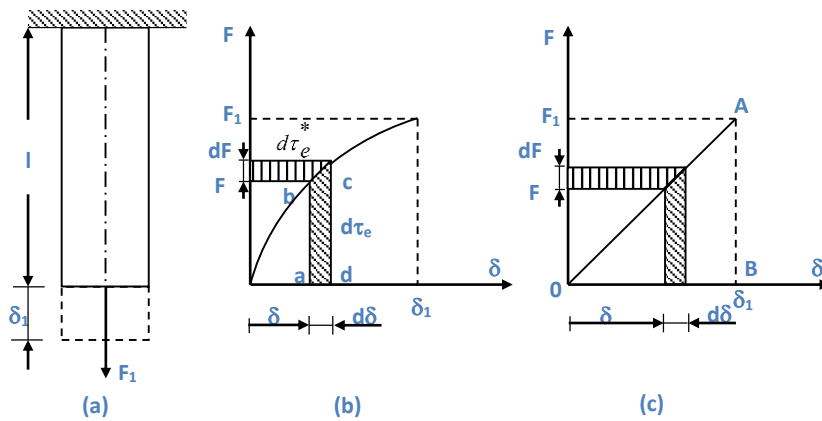


Figure . II.4. Diagramme F- δ d'une barre prismatique.

Avec $Fd\delta$: représente plus exactement le rectangle "abcd". Autrement dit, le travail effectué par dF au cours du déplacement $d\delta$, qui est un infiniment petit d'ordre supérieur à 1, est négligé. Le travail total effectué par la force F_1 au cours du déplacement δ_1 est obtenu par sommation des travaux élémentaires, c'est-à-dire :

$$\tau_e = \int_0^{\delta_1} Fd\delta \tag{II.7}$$

Il est représenté par l'aire délimitée par la courbe $F-\delta$ et l'axe des δ jusqu'à δ_1 .

De même, on appelle travail complémentaire élémentaire du déplacement δ au cours de l'accroissement de charge dF la quantité :

$$d\tau_e^* = \delta dF \tag{II.8}$$

Le travail complémentaire total effectué par F_I , appliquée graduellement de 0 à F_I , au cours du déplacement δ_I est donné par :

$$\tau_e^* = \int_0^{F_I} \delta dF \tag{II.9}$$

C'est l'aire à gauche de la courbe $F-\delta$.

II.4.1.2. Énergie et énergie complémentaire de déformation

Considérons un corps soumis à des sollicitations extérieures. Sous l'action des charges extérieures, le corps se déforme et les efforts internes (contraintes) effectuent un travail qui s'oppose au travail des sollicitations extérieures [Ait yahia, 2015]..

Ce travail interne, changé de signe, est désigné par énergie potentielle de déformation (W) ($-\tau_i = W$).

Isolons un élément $dv = dxdydz$ du corps considéré. L'énergie élémentaire emmagasinée dans dv se calcule comme le travail effectué par les forces agissant sur les faces de l'élément dv . Ainsi, le travail effectué par la force élémentaire $\sigma_x \cdot dydz$ au cours de la variation $d\epsilon_x$ de la déformation ϵ_x , qui produit le déplacement $\Delta dx = d\epsilon_x \cdot dx$, vaut :

$$dW = \sigma_x \cdot dydz \cdot d\epsilon_x \cdot dx = \sigma_x d\epsilon_x dv \tag{II.10}$$

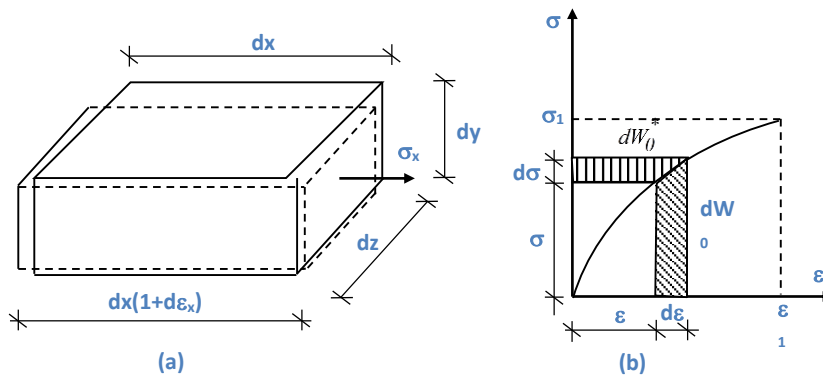


Figure II.5. Energie de déformation d'un corps

En considérant toutes les composantes des contraintes et en utilisant la notation indicielle, on obtient pour l'élément dv :

$$dW = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dv \tag{II.11}$$

L'énergie emmagasinée dans tout le volume du corps (v) vaut :

$$W = \int_v \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dv \tag{II.12}$$

Considérons un diagramme contrainte-déformation unidirectionnel (unidimensionnel) (Figure II.5b).

On a :

$$dW_0 = \sigma d\varepsilon \quad (II.13)$$

Cette quantité a l'unité d'une énergie par unité de volume. L'intégrale :

$$W_0 = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon \quad (II.14)$$

est appelée densité de l'énergie de déformation et est représentée par l'aire comprise entre la courbe σ - ε et l'axe des ε . Remarquons qu'on a :

$$W = \int_v dW_0 dv \quad (II.15)$$

De même, l'énergie complémentaire élémentaire produite par un accroissement $d\sigma_{ij}$ des contraintes au cours des déplacements produits par les déformations ε_{ij} correspondantes vaut :

$$dW^* = \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} dv \quad (II.16)$$

Et pour la totalité du volume du corps :

$$W^* = \int_v \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} dv \quad (II.17)$$

On a aussi :

$$dW_0^* = \varepsilon d\sigma \quad \text{et} \quad W_0^* = \int_0^{\sigma_1} \varepsilon d\sigma \quad (II.18)\mu$$

II.4.2. Travail et énergie dans le domaine élastique linéaire

a) Travail d'une force

Revenons au cas de la traction d'une barre prismatique du paragraphe II.4.2.1 Si la relation entre F et δ est linéaire, domaine d'application de la loi de Hooke (et petits déplacements), c'est-à-dire quand on a à tout moment du chargement la relation (Figure II.4c)

$$F = k\delta \quad (k = \text{constante}) \quad (II.19)$$

le travail total devient :

$$\tau_e = \int_0^{\delta_1} k\delta d\delta = \frac{1}{2} k\delta_1^2 \quad (II.20)$$

et comme : $F_1 = k\delta_1$, il vient :

$$\tau_e = \frac{1}{2} F_1 \delta_1 \quad (II.21)$$

Le travail total est représenté par l'aire du triangle OAB (Figure II.4c).

Remarquons que dans le cas de l'élasticité linéaire, on a : $\tau_e = \tau_e^*$.

b) Généralisation

Si un système en équilibre est soumis à une sollicitation globale F ($F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n$) et que les points d'application de ces forces subissent des déplacements, dont les projections sur les directions de ces mêmes sollicitations valent $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, le travail effectué au cours du chargement du système (passage de l'état d'équilibre initial à l'état d'équilibre final), vaut :

$$\tau_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \delta_i \quad (\text{II.22})$$

Il faut rappeler qu'on suppose que :

- le chargement est statique (les mises en charge sont lentes),
- le matériau a un comportement élastique linéaire (loi de Hooke vérifiée),
- les déplacements n'affectent pas l'action des charges (hypothèse des petits déplacements, pas d'effets du second ordre).

c) Travail des réactions

Si les appuis sont indéformables, le travail fourni par les réactions au cours de la déformation du système est nul puisque le déplacement d'un appui double ou d'un encastrement dans le sens de la réaction est nul et que le déplacement d'un appui simple est perpendiculaire à la réaction.

Dans le cas d'appuis élastiques, les relations (III.21) et (III.22) restent valables pour les réactions.

d) Énergie potentielle de déformation

Dans le domaine élastique linéaire, la relation contrainte-déformation ($\sigma_{ij} - \varepsilon_{ij}$) est linéaire et comme dans le travail, le facteur 1/2 apparaît dans l'expression de l'énergie (Figure.II.7).

Ainsi, le travail fait par la force $\sigma_x dydz$ au cours de la déformation ε_x qui provoque une variation de longueur $\Delta dx = \varepsilon_x dx$ est :

$$dW = \frac{1}{2} \sigma_x dydz \varepsilon_x dx = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dv \quad (\text{II.23})$$

Pour toutes les contraintes agissant sur dv en aura (en notation indicielle)

$$dW = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} dv \quad (\text{II.24})$$

et

$$W = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv \quad (\text{II.25})$$

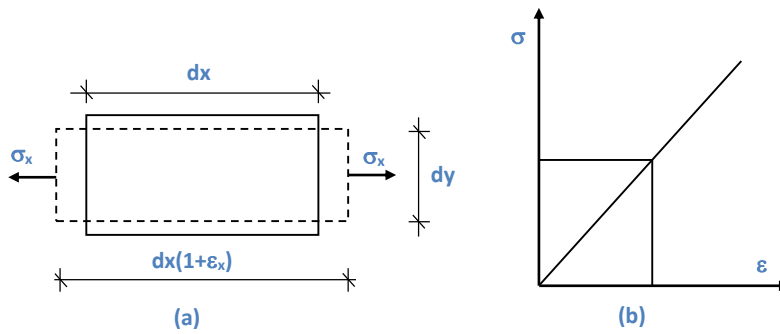


Figure.II.6. Relation linéaire de contrainte-déformation ($\sigma_{ij}-\epsilon_{ij}$).

Dans le cadre de l'élasticité linéaire on a : $W = W^*$.

II.4.3. Principe de la conservation de l'énergie

De manière générale, quand un corps est soumis à des charges extérieures, ces charges effectuent un travail extérieur qui se transforme en énergie potentielle interne (qui déforme le corps), en énergie cinétique et en chaleur qui se dissipe lors des frottements.

Supposons maintenant que :

a) les charges extérieures sont appliquées statiquement (pas d'énergie cinétique),

b) les frottements dans le corps sont nuls (pas de dissipation d'énergie sous forme de chaleur)

c'est-à-dire que le corps considéré est parfaitement élastique,

c) les frottements dans les appuis sont nuls (pas de dissipation d'énergie), alors tout le travail extérieur se transforme en énergie potentielle de déformation, c'est-à-dire qu'on a :

$$\tau_e = W \quad (\text{II.26a})$$

Dans ce cas, on dit que le système (corps + appuis + charges) est conservatif et le travail, ou l'énergie de déformation, puisque $\tau_e = W$, ne dépend pas de l'ordre dans lequel les forces sont appliquées mais uniquement de leur intensité finale. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si le travail dépendait de l'ordre d'application des forces, on pourrait le charger d'une certaine manière et le décharger d'une autre manière de façon à réaliser un gain. Après plusieurs cycles, l'énergie ainsi gagnée ferait exploser le corps, ce qui est absurde.

Si les charges cessent d'agir, l'énergie emmagasinée dans le corps lors du chargement sera restituée sous forme de travail qui va ramener le corps à son état initial [Ait yahia, 2015]..

En plus des hypothèses a), b) et c) ci-dessus nous admettrons dans ce qui suit que :

d) le matériau vérifie la loi de Hooke (matériau élastique linéaire),

e) les déplacements sont suffisamment petits et n'affectent pas l'action des charges (pas d'effets du second ordre).

Il arrive quelquefois que le système, dans son état initial, c'est-à-dire avant toute application de charges, soit déjà assujéti à des efforts internes et des déformations élastiques. C'est le cas notamment des systèmes hyperstatiques dont les appuis subissent des déplacements (appuis non concordants), des systèmes hyperstatiques soumis à des effets thermiques, au phénomène de retrait dans les structures en béton, des effets des défauts de montage, etc.

Dans un cas pareil, le système possède déjà à l'état initial une énergie élastique (W_i) emprisonnée dans le corps et qui ne peut se libérer que dans des conditions particulières. Les efforts et les déformations qui seront produits par les forces extérieures vont s'ajouter aux efforts et à déformations existantes. Dans ce cas, l'énergie de déformation est égale au travail des forces extérieures qui se transforme en énergie élastique interne plus l'énergie élastique initiale, d'où :

$$\tau_e + W_i = W \tag{II.26b}$$

Les résultats (II.26) sont parfois désignés par théorème de Clapeyron.

II.4.4. Travail de déformation des sollicitations simples dans le cas des poutres

Nous allons calculer séparément le travail de déformation (énergie de déformation) en fonction des efforts N , M , T et Mt dans une poutre (droite ou courbe) de longueur l . Considérons un tronçon de poutre dx (ds) suffisamment petit pour pouvoir admettre que les efforts ne varient pas sur dx .

a) Effort normal

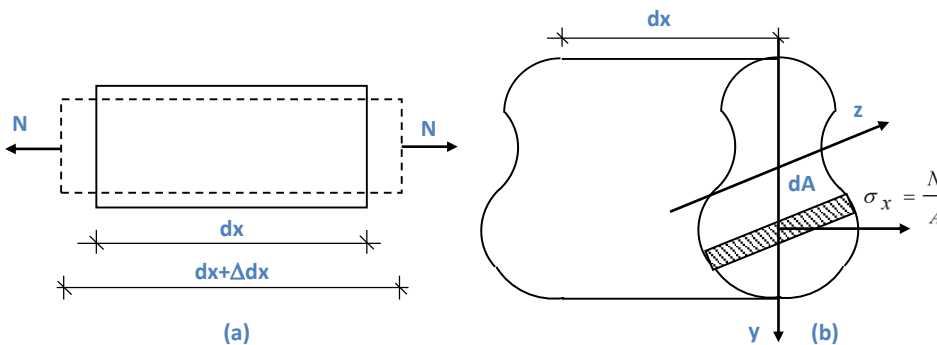


Figure .II.7. Relation des contraintes-effort normal.

Sous l'effet des contraintes d'effort normal, le tronçon dx subit une variation de longueur Δdx définie par :

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \epsilon_x \Rightarrow \Delta dx = \epsilon_x dx = \frac{\sigma_x}{E} dx \tag{II.27a}$$

Comme dans le cas de l'effort normal on a $\sigma_x = N/A$, il vient :

$$\Delta dx = (N/EA)dx \tag{II.27b}$$

L'énergie emmagasinée dans le couche $dA \cdot dx$ se calcule comme le travail effectué par la force $\sigma_x \cdot dA$ au cours du déplacement Δdx , d'où :

$$d^2W = \frac{1}{2} (\sigma_x dA) \Delta dx = \frac{1}{2} \left(\frac{N}{A} dA \right) \frac{N}{EA} dx = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA^2} dA dx \tag{II.28}$$

La notation d^2W est utilisée pour désigner une quantité plus petite que l'énergie élémentaire. L'énergie élémentaire emmagasinée dans le tronçon dx s'obtient par intégration sur l'aire A de la section :

$$dW = \frac{dx}{2} \int_A \frac{N^2}{EA^2} dA = \frac{1}{2} \frac{N^2 dx}{EA^2} \int_A dA = \frac{N^2}{2EA} dx \tag{II.29}$$

Et pour la totalité de la poutre :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2}{EA} dx \tag{II.30}$$

b) Moment fléchissant

Considérons la couche $dA dx$. Sous l'effet des contraintes de flexion, la couche subit une variation de longueur : $\Delta dx = \epsilon_x dx = (\sigma_x/E) dx$. Compte tenu de la relation de Navier, il vient :

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} \Rightarrow \Delta dx = \frac{M_z y}{EI_z} dx \tag{II.31}$$

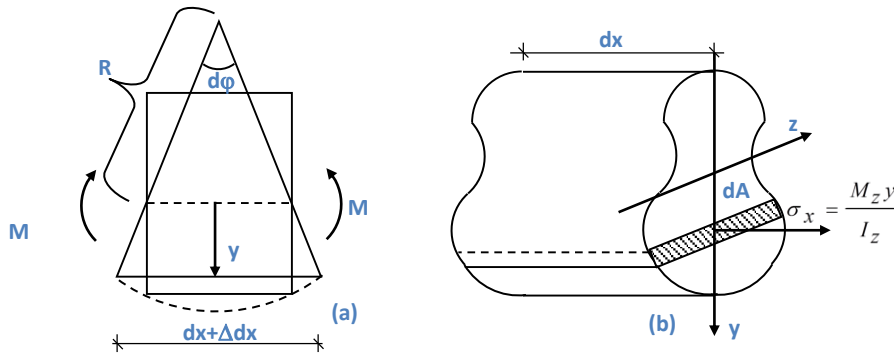


Figure.II.8. Relation de moment de flexion

L'énergie emmagasinée dans la couche $dA dx$ vaut :

$$d^2W = \frac{1}{2} (\sigma_x dA) \Delta dx = \frac{1}{2} \left(\frac{M_z y}{I_z} dA \right) \frac{M_z y}{EI_z} dx = \frac{1}{2} \frac{M_z^2 y^2}{EI_z^2} dA dx \tag{II.32}$$

En intégrant sur la surface on obtient l'énergie emmagasinée dans le tronçon dx :

$$dW = \frac{dx}{2} \int_A \frac{M_z^2 y^2}{EI_z^2} dA = \frac{1}{2} \frac{M_z^2 dx}{EI_z^2} \int_A y^2 dA = \frac{M_z^2}{2EI_z} dx \quad (\text{II.33a})$$

D'où l'énergie de déformation de la poutre, qui se calcule par intégration sur l :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2}{EI_z} dx \quad (\text{II.33b})$$

Dans le cas d'une flexion gauche, on a une relation similaire à (II.33a) pour chaque moment fléchissant et pour les deux moments on aura :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y} \right) dx \quad (\text{II.33c})$$

c) Effort tranchant

L'énergie emmagasinée dans un tronçon dx soumis à un effort tranchant T_y vaut :

$$dW = \frac{\kappa_y T_y^2}{2GA} dx \quad (\text{II.34a})$$

Et pour toute la poutre :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{\kappa_y T_y^2}{GA} dx \quad (\text{II.34b})$$

Si la poutre est soumise à T_y et T_z on aura :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{\kappa_y T_y^2}{GA} + \frac{\kappa_z T_z^2}{GA} \right) dx \quad (\text{II.34c})$$

d) Moment de torsion

L'angle dont tourne l'une par rapport à l'autre les sections extrêmes du tronçon dx soumis à un moment de torsion M_t est donné par (Figure II.9) :

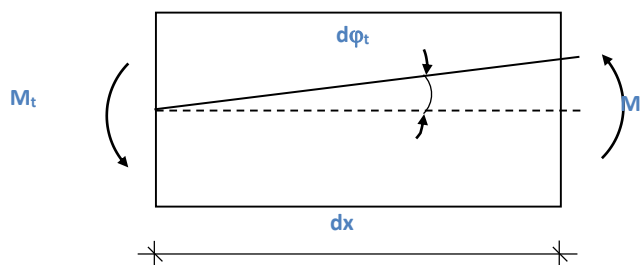


Figure.II.9. Relation de moment de torsion.

$$d\varphi_t = \frac{qM_t}{GI_p} dx \tag{II.35}$$

où :

- q est une constante dépendant de la forme et des dimensions de la section, appelée coefficient de torsion ($q \approx 40I_p^2/A^4$). Ce facteur vaut 1 pour la section circulaire et est supérieur à 1 pour les autres cas.

- la quantité $C = GI_p/q$ est désignée par rigidité à la torsion (ou rigidité torsionnelle).

L'énergie emmagasinée dans le tronçon dx se calcule comme le travail effectué par M_t lors du déplacement $d\varphi_t$:

$$dW = \frac{1}{2} M_t d\varphi_t = \frac{qM_t^2}{2GI_p} dx \tag{II.36}$$

Et pour l'ensemble de la poutre :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{qM_t^2}{GI_p} dx \tag{II.37}$$

III.4.5. Expression générale de l'énergie potentielle de déformation

Isolons à l'intérieur d'un corps élastique un élément $dv = dx dy dz$ suffisamment petit pour pouvoir admettre que les contraintes ne varient pas sur les facettes de l'élément.

Calculons l'énergie emmagasinée dans l'élément dv lorsqu'il est soumis à l'ensemble des contraintes (Figure II.10a).

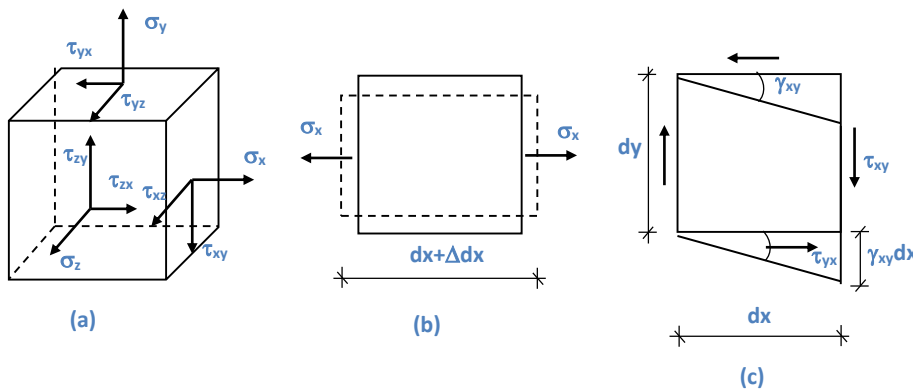


Figure II.10. Relation d'énergie potentielle de déformation

Le travail de déformation de la force $\sigma_x dy dz$ au cours du déplacement $\Delta dx = \varepsilon_x dx$ (Figure II.10b) vaut :

$$dW = \frac{1}{2} (\sigma_x dy dz) \varepsilon_x dx = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dx dy dz \tag{II.38}$$

Pour l'ensemble des trois contraintes normales, on applique le résultat (II.22), d'où :

$$dW = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z) dx dy dz \tag{II.39}$$

où ε_x , ε_y et ε_z sont les déformations longitudinales et peuvent être exprimées en fonction des contraintes normales à partir de la loi de Hooke généralisée.

Les déformations provoquées par les contraintes normales et tangentielles étant indépendantes, si outre les contraintes normales il y a des contraintes tangentielles, il suffit d'ajouter leur effet.

Le travail de la force $\tau_{xy}d_yd_z$ lors du déplacement $\gamma_{xy}dx$ (Figure 3.7c) vaut :

$$dW = \frac{1}{2} (\tau_{xy}d_yd_z)\gamma_{xy}dx = \frac{1}{2} \tau_{xy}\gamma_{xy}dxdydz \quad (II.40)$$

En présence de toutes les contraintes, il vient :

$$dW = \frac{1}{2} (\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})dxdydz \quad (II.41)$$

L'énergie potentielle de déformation de tout le corps s'obtient par sommation sur le volume entier :

$$W = \frac{1}{2} \int_v (\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})dv \quad (II.42)$$

L'expression de W peut être exprimée en fonction des contraintes seulement ou des déformations uniquement en utilisant les expressions des contraintes en fonction des déformations données par la loi de Hooke généralisée.

Dans le cas d'une poutre soumise aux sollicitations N , M , T et M_t , l'expression de W s'obtient en ajoutant les expressions (II.30), (II.33), (II.34) et (II.37) :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{\kappa T^2}{GA} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{qM_t^2}{GI_p} dx \quad (II.43)$$

Notons que cette dernière expression ne découle pas de l'application du principe de superposition, qui n'est pas applicable puisque l'énergie n'est pas reliée linéairement aux sollicitations. La relation (II.43) s'obtient par sommation des contributions de chaque sollicitation du fait que le déplacement provoqué par une des sollicitations ne provoque pas de travail de la part des autres sollicitations (déplacements indépendants).

Si le système comporte "n" barres, la relation (II.43) s'applique à chacune d'elles.

II.4.6. Travail Virtuel

Considérons une particule m soumise à une force F (Figure II.11). Donnons à m un déplacement δ suivant la direction Δ .

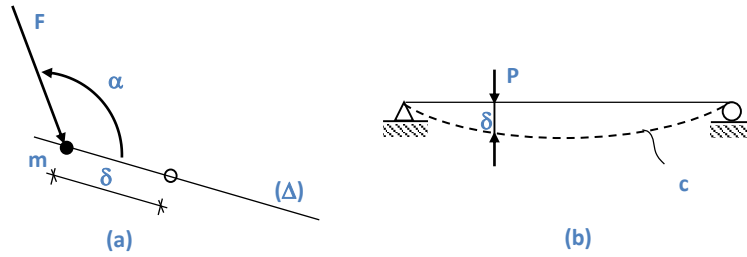


Figure II.11. Système élastique force-déplacement F-δ.

Au cours du déplacement de la particule m , la force F effectue un travail égal, en valeur absolue, au produit de la composante de F agissant dans la direction Δ par le déplacement δ .

$$\tau_v = F \cos \alpha \cdot \delta \tag{II.44a}$$

Ce travail, d'où le $1/2$ a naturellement disparu car la force F avait déjà atteint sa valeur finale au moment de l'application du déplacement δ , est appelé travail virtuel de F dans le déplacement virtuel δ . Si les sens du déplacement δ et de la composante de F suivant la direction de δ sont concordants, le signe du travail est positif, dans le cas contraire il est négatif.

Considérons maintenant le système élastique simple de la figure II.10b et imposons lui une déformation représentée par la courbe c . Au cours de la déformation, la force P , dont le point d'application se déplace de δ , effectue un travail virtuel de la forme (II.44), avec $\alpha = 0$ dans le cas présent.

$$\tau_v = P \cdot \delta \tag{II.44b}$$

Précisons qu'on entend par déplacement virtuel tout petit déplacement possible. Petit par rapport aux dimensions du système, donc comparable aux déplacements réels. Possible, c'est-à-dire compatible avec les liaisons extérieures (appuis) et intérieures du corps. Peu importe la manière utilisée pour produire le déplacement virtuel [Ait yahia, 2015].

De manière plus générale, si un système supportant la sollicitation F (F_1, F_2, \dots, F_n), subit un déplacement virtuel qui impose à chaque force (F_i) un déplacement (δ_i) suivant sa direction, le travail virtuel total effectué au cours du déplacement virtuel s'écrit :

$$\tau_v = \sum_{i=1}^n F_i \delta_i \tag{II.44c}$$

II.5. Les poutres composites

Le terme «poutre» désigne un objet dont la longueur est grande comparée aux dimensions transverses (section fine). Une poutre est un élément de structure utilisée dans la construction des bâtiments, des navires, autres véhicules et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines normes

II.5.1. Historique des théories des poutres

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard De Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation varie de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, mais il ne pût finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte.

Ce sont Leonard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers les années 1750, alors que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas reconnu comme une science, et on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au *XIXe* siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, qu'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.

II.5.2 .Le comportement des poutres composites

L'analyse d'une structure composite est plus complexe que celle d'une structure en matériaux traditionnels, métalliques par exemple .Cela est dû au caractère hautement anisotrope des propriétés mécaniques du matériau de base, tant sur les plans raideur que résistance, et qui sont concentrées dans la direction des fibres [Ouled Larbi ,2014]. L'importance de développer une analyse sur le comportement des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme éléments de base dans la réalisation des structures, d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux composites et ceci à partir des différents essais réalisés sur des éprouvettes en forme de poutres.

II.5.3 .Les différents types de poutres

La poutre est l'élément structural le plus répandu, puisqu'elle fait partie intégrante de la plupart des ouvrages de construction ou des pièces machines .En réaction aux charges appliquées, des forces et des moments internes se développent dans la poutre pour maintenir l'équilibre.

➤ *Poutre simple*

C'est une poutre reposant sur deux supports ; l'appui double et l'appui simple. Les points d'appui sont articulés de façon à ce que les extrémités puissent se mouvoir librement pendant la flexion.

➤ *Poutre console*

C'est une poutre encastrée dans un mur à une extrémité. L'extrémité encastrée ne bouge pas pendant la flexion, tandis que l'autre extrémité est entièrement libre. On appelle aussi cette poutre, poutre en porte-à-faux ou poutre encastrée à une extrémité.

➤ *Poutre avec porte-à-faux*

C'est une poutre sur deux appuis (un simple et l'autre double), elle a une ou deux extrémités qui dépassent de façon appréciable les appuis (porte-à-faux). Les poutres sont classées suivant leurs appuis. Ces trois précédents types de poutres entrent dans la catégorie des poutres statiquement déterminées (poutre isostatique), parce qu'elles possèdent trois inconnues reliées aux trois degrés de liberté et par le fait même des équations d'équilibre.

➤ *Poutre continue*

C'est une poutre supportée par l'un des deux supports, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

➤ *Poutre à double encastrement*

C'est une poutre supportée par deux encastresments, elle est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

➤ *Poutre supportée à double encastrement*

C'est une poutre supportée par deux encastresments ayant un ou plusieurs supports. C'est donc une poutre en équilibre hyperstatique. Elle a plus de fixation ou support que nécessaire. Cependant, ces supports augmentent la capacité portante de la poutre mais les équations de la statique ne suffisent pas à analyser ces poutres. On aura donc recours à différentes méthodes.

II.6. Les différentes théories des poutres

Les théories de poutres impliquent essentiellement la réduction d'un problème en trois dimensions de la théorie de l'élasticité à un problème unidimensionnel. Elles s'appliquent sur des solides élancés [les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversale]. Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements [SALLAI, 2011]

II.6.1 Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT)

Il est bien connu que la théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets *de la déformation de cisaillement*. Il est également connu qu'elle n'est applicable qu'aux poutres fines.

Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche. Comme hypothèse de cette théorie, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre),

La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section reste plane.

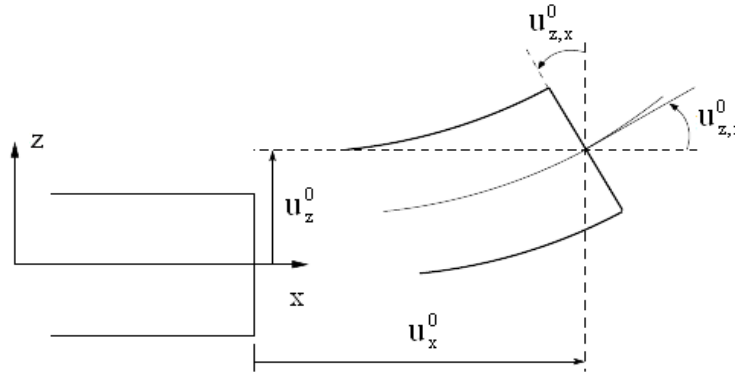


Figure. II.6.1. Cinématique d'Euler Bernoulli.

La fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est:

$$f(z) = 0 \tag{II-45}$$

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres, le déplacement d'un point M est donné par les deux composantes suivantes:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - z \cdot w_{,x}^0(z) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \tag{II-46}$$

$u(x, z)$: représente le déplacement suivant X et $w(x, z)$ est le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

La rotation autour de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que:

$$w_{,x}^0(x) = \frac{\partial w^0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{III-47}$$

$u^0(x)$ et $w^0(x)$ sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z.

Lorsque cette théorie est utilisée pour l'analyse des fréquences naturelles des poutres, les flèches sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de la négligence de la déformation transversale.

II.6.2 Modèle de Timoshenko (FSDBT)

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Elle s'applique sur des poutres courtes, elle est basée sur le principe ; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (Figure II.2). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses. [Timoshenko, 1972]. Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction s'écrit $f(z) = z$. Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT).

Le déplacement d'après Timoshenko s'écrit comme suit:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - z.w'_{,x}(z) + z.\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \tag{II-48}$$

γ_{xz}^0 : est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Tel que :

$$\gamma_{xz}^0(x) = w'_{,x}(x) - \phi^0(x) \tag{II-49}$$

$\phi^0(x)$: Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

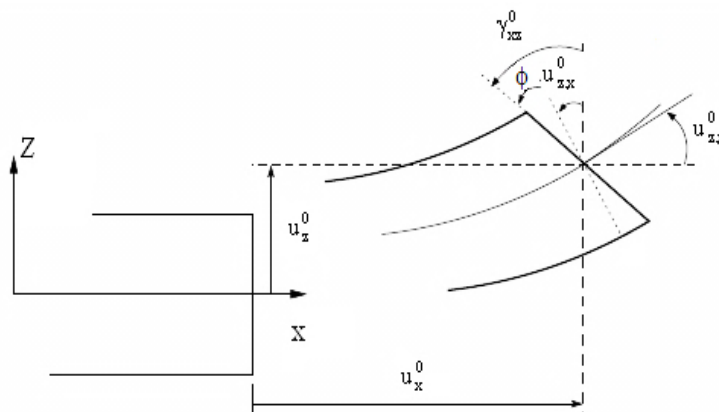


Figure.II.6.2. Cinématique de Timoshenko.

Par définition, la distorsion est donnée par la relation suivante:

$$\begin{cases} \gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w_{,x}^0(x) + \gamma_{xz}^0(x) + w_{,x}^0(x) \\ \gamma_{xz}(x) = \gamma_{xz}^0(x) \end{cases} \quad (\text{II-50})$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale:

$$\tau_{xz} = G_{xz} \cdot \gamma_{xz} = G_{xz} \cdot \gamma_{xz}^0 \quad (\text{II-51})$$

G_{xz} : est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre; cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et pourtant il n'y a aucun chargement qui induit le cisaillement.

Cette contradiction mène à introduire des coefficients pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour la variété de sections de poutres par [Mindlin et Deresiewicz]. Cowper et Murty ont donné de nouvelles expressions de ce coefficient pour différentes sections de la poutre. La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques bien qu'issues de la théorie classique, ces solutions sont toutefois entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Les non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs; c'est "la théorie d'ordre élevé".

II.6.3. Théorie d'Ordre Elevé

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de «gauchissement». Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure II.6.3). La fonction $f(z)$ représente le gauchissement et sa dérivée $f'(z)$ représente le cisaillement.

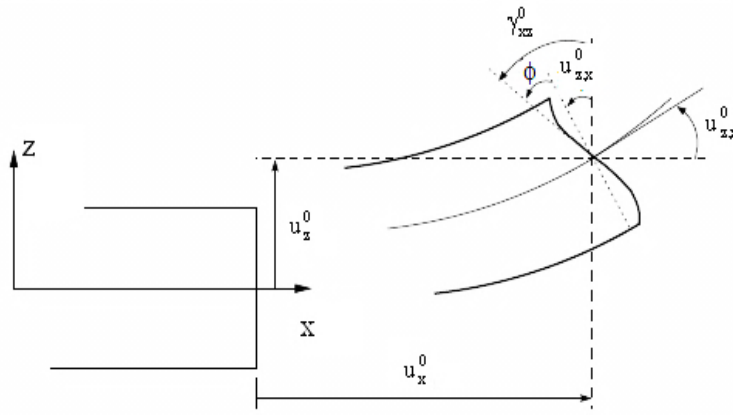


Figure II.6.3. Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.

Dans ce cas, le champ de déplacement devient:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw'_{,x}(x) + f(z)\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (II-52)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w'_{,x}(x) + f'(z)\gamma_{xz}^0(x) + w'_{,x}(x) \quad (II-53)$$

$$\gamma_{xz} = f'(z)\gamma_{xz}^0(x) \quad (II-54)$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir:

$$f'(z) \Big|_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0 \quad (II-55)$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition (II.54).

Selon l'expression de la fonction de gauchissement f(z), quelques modèles sont présentés dans la littérature des poutres en FGM:

1-) Le modèle Euler-Bernoulli (la théorie des poutres classiques) (CBT):

$$f(z) = 0 \quad (II-56)$$

2-) Le modèle de Timoshenko ou bien la théorie du premier ordre (FSDBT):

$$f(z) = z \quad (II-57)$$

3-) Le modèle de puissance avec l'approche de (PSDBT) [Levinson, 1980], [Murthy, 1981] et [Reddy, 1984] :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II-58})$$

4-) Le modèle exponentiel proposé par (ESDBT) [Karama et al, 2003] :

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II-59})$$

5-) Le modèle trigonométrique [Touratier 1991] :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h} \quad (\text{II-60})$$

6-) Le modèle de Mechab (2009) , utilisé aussi [par Ait Atmane et al, 2010, et El Meiche et al, 2011] :

$$f(z) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-1} \left[z \cos h \left(\frac{\pi}{2} \right) - \frac{h}{2} \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad (\text{II-61})$$

7-) Le modèle de Panc (1975), utilisé aussi [par Kaczkowski (1968), Reissner (1975), Voyiadjis and Shi (1991), Shi and Voyiadjis (2011)]

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II-62})$$

Avec : h : étant l'épaisseur de la poutre.

II.7. Introduction du l'effet de déformation normale

Dans les différentes théories d'ordre élevé qui comprend les contraintes normales transversales, les termes d'ordre supérieur sont introduits dans les hypothèses cinématiques pour les deux composantes de déplacement.

La deuxième ligne de l'équation (II-52) est modifiée afin d'examiner la déformation normale transversale :

$$w(x, z) = w_b(x) + w_s(x) + \mathbf{w}_{st}(\mathbf{x}) \quad (\text{II-63})$$

Avec : $w_b(x)$ est la composante de flexion ;

$w_s(x)$ est la composante de cisaillement ;

$\mathbf{w}_{st}(\mathbf{x})$ est la composante d'effet de déformation.

Les deux premiers composants sont en fonctions la coordonnée x et uniquement la troisième est en fonction de x et z .

II.6. Conclusion

Dans cette partie de la thèse ; nous avons présenté dans la première partie les principes énergétiques pour la résolution des problèmes structuraux , on commençant par le principe général d'équilibre, les équations d'équilibre et les conditions nécessaires pour qu'un système soit en équilibre puis nous avons exposé les relations fondamentales dans la structure tel que les relations contraintes-déformations, le potentiel interne et ses applications

Dans la deuxième partie nous avons présenté l'historique des théories des poutres composites ainsi que leurs comportement qui est plus complexe que celui d'une poutre en matériaux traditionnels, métalliques par exemple, et nous l'avons terminé par une présentation des différents types des théories des poutres telles que la théorie classique (CBT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDBT) et les théories d'ordre élevé HSDBT (PSDBT, SSDBT, ESDBT).

III- ETUDE ANALYTIQUE D'UNE POUTRE SANDWICHE SOUS DIFFERENTES SOLLICITATIONS

III.1. Introduction

Bien que les FGM soient des matériaux relativement nouveaux, beaucoup d'études ont été consacrées à leurs comportements statiques et thermomécaniques. En revanche, peu d'études ont été dédiées aux vibrations libres de ces matériaux. C'est à partir de l'an 2000 que des chercheurs ont commencé à s'intéresser à leurs comportements dynamiques.

La communauté scientifique donne à ces nouveaux matériaux ce qui justifie le nombre important de recherches traitant les structures faites à partir de ces matériaux sous diverses sollicitations.

L'objectif visé dans ce chapitre est de développer une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique d'une poutre sandwich raffinée afin d'étudier la vibration libre et le flambement des poutres sandwiches fonctionnellement graduées sous les effets de la variation des divers paramètres tel que (la graduation matérielle, l'effet d'étirement de l'épaisseur, les conditions aux limites et le rapport épaisseur – longueur). Les conditions aux limites sont traitées par l'introduction d'une fonction de forme pour résoudre l'équation de mouvement.

Cette théorie est fondée sur la supposition que le déplacement transversal composé en trois termes, le premier est désigné la flexion, le deuxième désigner le cisaillement et la troisième composante présenter l'effet de déformation normale.

Pour montrer la précision et l'efficacité du modèle proposé dans ce travail, les résultats obtenus sont comparés avec les solutions des résultats obtenus par d'autres théories de cisaillement existant dans la littérature.

III.2. La théorie de la poutre raffinée pour les poutres sandwiches fonctionnellement gradués

III.2.1. Formulation du problème

Considérons une poutre sandwich avec un noyau homogène et des couches de surface FG, avec une hauteur totale (h), une longueur (L) et une largeur (b) fait référence aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) tel qu'illustré sur la Figure.III.1. Les facettes supérieure et inférieure de la poutre sont aux ordonnées $z = \pm h/2$, et les bords horizontaux de la poutre sont parallèles aux axes x et y .

La poutre sandwich est composée de trois couches, à savoir : couche 1, couche 2, et couche 3, de bas en haut de la poutre. Les coordonnées verticales de la partie inférieure, les deux interfaces, et la partie supérieure sont désignées par $h_1 = -h/2, h_2, h_3, h_4 = h/2$, respectivement.

Les couches de surface de la poutre sandwich sont constituées d'un matériau isotrope ayant des propriétés matérielles variables dans la direction z seulement. La couche centrale (Noyau) est constituée d'un matériau homogène isotrope. Le rapport de la hauteur de chaque couche du bas vers le haut est représentée par la combinaison de trois chiffres, c'est à dire " 1-0-1 ", " 2-1-2 " et ainsi de suite. Comme montre la Figure. III.1.

Dans ce qui suit, nous notons que plusieurs types de poutres sandwiches sont utilisés:

- 1-0-1 : La poutre est symétrique et contient seulement deux couches FG (il n'y a pas de couche de noyau). Dans ce cas, nous avons : $h_1 = -h/2, h_2 = 0, h_3 = 0, h_4 = h/2$
- 1-1-1 : la poutre est symétrique et en trois couches avec la même épaisseur. Dans ce cas, nous avons : $h_1 = -h/2, h_2 = -h/6, h_3 = h/6, h_4 = h/2$
- 2-1-2: la poutre est symétrique et nous avons : $h_1 = -h/2, h_2 = -h/10, h_3 = h/10, h_4 = h/2$
- 1-2-1 : la poutre est symétrique et nous avons : $h_1 = -h/2, h_2 = -h/4, h_3 = -h/4, h_4 = h/2$
- 1-8-1 : la poutre est symétrique et nous avons : $h_1 = -h/2, h_2 = -2h/5, h_3 = 2h/5, h_4 = h/2$

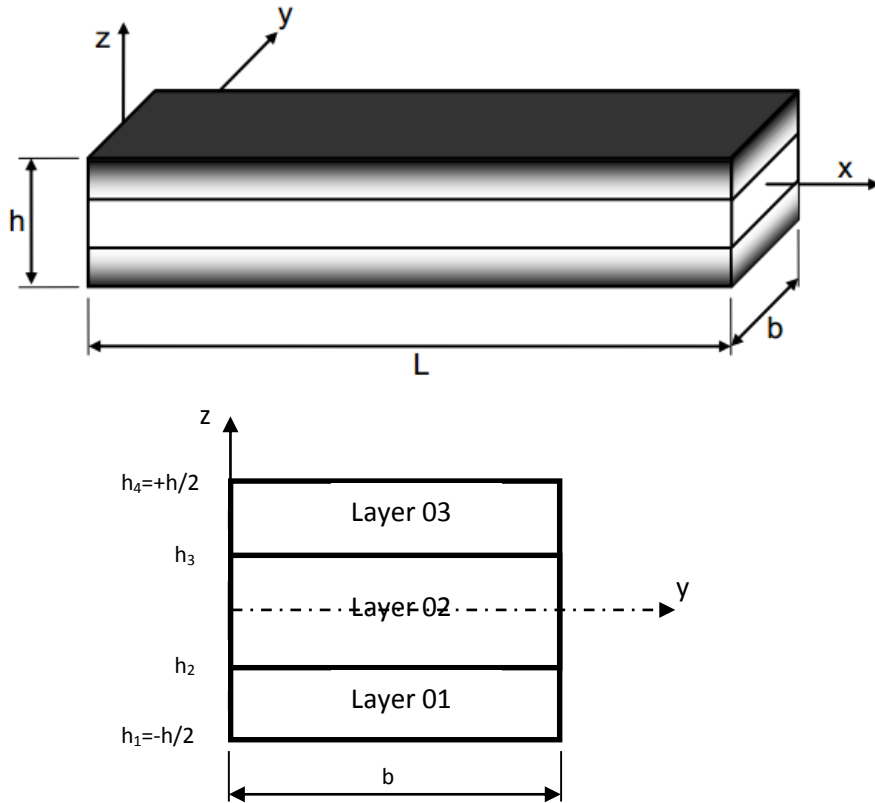


Figure III.1. Coordonner et la géométrie d'une poutre FG sandwich dans les coordonnées cartésiennes rectangulaires.

III.2.2. Propriétés des matériaux

Les propriétés de FGM sont variables de façon continue du fait de la modification progressive de la fraction volumique des matériaux constitutifs, le plus souvent dans le sens de la hauteur seulement. La fonction de la loi de puissance est utilisée pour décrire les variations de propriétés des matériaux:

$$V^{(1)} = \left(\frac{z - h_1}{h_2 - h_1} \right)^k, \quad z \in [h_1, h_2] \quad (1a)$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_2, h_3] \quad (1b)$$

$$V^{(3)} = \left(\frac{z - h_4}{h_3 - h_4} \right)^k, \quad z \in [h_3, h_4] \quad (1c)$$

Où $V^{(n)}$, ($n = 1, 2, 3$) désigne la fonction de la fraction volumique de la couche n ; k est l'indice de fraction volumique ($0 \leq k \leq +\infty$), qui détermine le profil de variation matériau à travers la hauteur de la poutre :

- $K=0$: signifie le matériau possède les propriétés de P_1 homogènes
- $K=\infty$: signifie le matériau possède les propriétés de P_2 homogènes

Les propriétés des matériaux effectives, comme le module de Young E , le coefficient de Poisson ν , et la masse volumique ρ , peuvent être exprimées par la loi de mélange [Benachour et al, 2011; Bachir Bouiadjra et al, 2012; Tounsi et al, 2013; Boudjerba et al, 2013.; Bachir Bouiadjra et al, (2) 2013; Zidi et al, 2014] comme

suit:

$$P^{(n)}(z) = P_2 + (P_1 - P_2)V^{(n)}$$

Où $P^{(n)}$ est la propriété du matériau FGM de la couche n . Où P_1 et P_2 sont les propriétés des facettes supérieure et inférieure de la couche 1, respectivement, et l'inverse pour la couche 3 en fonction de la fraction volumique $V^{(n)}$, ($n = 1, 2, 3$) [Dellal, 1983].

Pour des raisons de simplification de calcul, le coefficient de Poisson de la poutre est considéré négligeable devant les effets du module de Young et de la masse volumique, d'autant plus que l'écart des coefficients de Poisson suit les matériaux 1 et 2 sont très petits. Donc, on peut le considérer comme étant constant.

III.2.3. Hypothèses de base

Les hypothèses de la théorie actuelle sont les suivantes :

- a- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la poutre et, par conséquent, les déformations sont infinitésimal impliqués.
- b- Le déplacement transversal « w » comprend trois composantes : la flexion " w_b ", le cisaillement " w_s ", et l'effet de déformation normale " w_{st} ". Les deux premières composantes sont des fonctions de la coordonnée x seulement et le troisième « *stretching effect* » est une fonction des coordonnées x et z .

$$w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) + w_{st}(x, z, t) \quad (3)$$

- c- Les déplacement u dans la direction x est constitué de trois composantes :

- a- Extensionnelle ;
- b- Flexionnelle ;

c- Cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s$$

L'élément de flexion u_b est considéré comme similaire au déplacement donné par la théorie classique des poutres. Donc, l'expression de u_b peut être donnée par :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (5)$$

La composante de cisaillement u_s peut définir, en parallèle avec w_s , des variations sinusoïdales de la déformation de cisaillement γ_{xz} et donc la contrainte de cisaillement τ_{xz} à travers l'épaisseur de la poutre de telle sorte que la contrainte de cisaillement τ_{xz} est nulle au niveau des facettes supérieure et inférieure de la poutre. Par conséquent, l'expression de u_s peut être donnée :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad (6)$$

Où

$$f(z) = \frac{\frac{h}{\pi} \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right) - z}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 \right]} \quad (7)$$

La composante due à l'effet de déformation normal w_{st} peut être donné en tant que :

$$w_{st}(x, z, t) = g(z) \varphi(x, t) \quad (8)$$

Le déplacement supplémentaire φ représente l'effet de la déformation normale, et $g(z)$ est donnée comme suit :

$$g(z) = 1 - \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{h} z\right) - 1}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1}; \quad (9)$$

III.2.4. Les équations constitutives

Sur la base des hypothèses formulées précédemment, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations. (3) - (9)

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (10a)$$

$$w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) + g(z) \varphi(x, t) \quad (10b)$$

Les déformations associées aux déplacements dans l'équation. (10) sont :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \quad (11a)$$

$$\gamma_{xz} = g(z) \gamma_{xz}^0 \quad (11b)$$

$$\varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \quad (11c)$$

Où

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \quad \gamma_{xz}^0 = \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \varepsilon_z^0 = \varphi \quad (11d)$$

ET

$$g'(z) = \frac{dg(z)}{dz} \quad (11e)$$

En supposant que le matériau de la poutre sandwich FG obéie à la loi de Hooke, les contraintes dans la poutre deviennent :

$$\sigma_x = Q_{11}(z) \varepsilon_x + Q_{13}(z) \varepsilon_z, \quad \tau_{xz} = Q_{55}(z) \gamma_{xz}, \quad \text{and} \quad \sigma_z = Q_{13}(z) \varepsilon_x + Q_{33}(z) \varepsilon_z \quad (12a)$$

Où

$$Q_{11}(z) = Q_{33}(z) = \frac{E(z)}{(1-\nu^2)}, \quad Q_{13}(z) = \nu Q_{11}(z), \quad \text{et} \quad Q_{55}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (12b)$$

III.2.5 .Équations de mouvement

Le principe de Hamilton est utilisé pour déterminer les équations du mouvement. Le principe peut être déclaré sous forme analytique [Reddy, 2002; Draiche, 2014]

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (13)$$

Où t est le temps ; t_1 et t_2 sont le temps initial et finale, respectivement ; δU est la variation virtuelle de l'énergie de déformation ; δV est la variation du travail effectué par des forces extérieures ; et δK est la variation virtuelle de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la poutre peut être énoncée comme suit :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz dx \\ &= \int_0^L \left(N \frac{d\delta u_0}{dx} + N_z \delta \varphi - M_b \frac{d^2 \delta w_b}{dx^2} - M_s \frac{d^2 \delta w_s}{dx^2} + Q \left[\frac{d\delta w_s}{dx} + \frac{d\delta \varphi}{dx} \right] \right) dx \end{aligned} \quad (14)$$

Où N , M_b , M_s , N_z et Q sont les résultantes des contraintes définies comme suit:

$$(N, M_b, M_s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, f(z)) \sigma_x dz, \quad N_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z g'(z) dz, \quad \text{et } Q = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} g(z) dz \quad (15)$$

La variation des travaux effectués par charges externes transversales et force axiale peut être exprimée comme suit:

$$\delta V = - \int_0^L q \delta (w_b + w_s) dx + \int_0^L \bar{N} \frac{d(w_b + w_s + g_0 \varphi)}{dx} \frac{d\delta (w_b + w_s + g_0 \varphi)}{dx} dx \quad (16)$$

La variation de l'énergie cinétique peut être exprimée comme suit:

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}] dz dx \\ &= \int_0^L \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) (\delta \dot{w}_b + \delta \dot{w}_s)] + J_0 [(\dot{w}_b + \dot{w}_s) \delta \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \delta (\dot{w}_b + \dot{w}_s)] \right. \\ &\quad - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{d\delta \dot{w}_b}{dx} + \frac{d\dot{w}_b}{dx} \delta \dot{u}_0 \right) + I_2 \left(\frac{d\dot{w}_b}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_b}{dx} \right) - J_1 \left(\dot{u}_0 \frac{d\delta \dot{w}_s}{dx} + \frac{d\dot{w}_s}{dx} \delta \dot{u}_0 \right) \\ &\quad \left. + K_2 \left(\frac{d\dot{w}_s}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_s}{dx} \right) + J_2 \left(\frac{d\dot{w}_b}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_s}{dx} + \frac{d\dot{w}_s}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_b}{dx} \right) + K_0 \dot{\varphi} \delta \dot{\varphi} \right\} dx \end{aligned} \quad (17)$$

Où le signe (·) indique la dérivée par rapport à la variable de temps t , et (I_i, J_i, K_i) sont les inerties massives définies comme suit:

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad (18a)$$

$$(J_0, J_1, J_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (g, f, z f) \rho(z) dz \quad (18b)$$

$$(K_0, K_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (g^2, f^2) \rho(z) dz \quad (18c)$$

En remplaçant les expressions pour $\delta U, \delta V$, et δK des équations (14), (16) et (17) dans l'équation. (13) et en intégrant par parties, après en recueillant les coefficients de $\delta u_0, \delta w_b, \delta w_s$ et $\delta \varphi$, on obtient les équations de mouvement suivantes de la poutre sandwichée FG suivants :

$$\delta u_0 : \frac{dN}{dx} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{d\ddot{w}_b}{dx} - J_1 \frac{d\ddot{w}_s}{dx} \quad (19a)$$

$$\delta w_b : \frac{d^2 M_b}{dx^2} + q + \bar{N} \left(\frac{d^2 (w_b + w_s + g_0 \varphi)}{dx^2} \right) = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_0 \ddot{\varphi} + I_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (19b)$$

$$\delta w_s : \frac{d^2 M_s}{dx^2} + \frac{dQ}{dx} + q + \bar{N} \left(\frac{d^2 (w_b + w_s + g_0 \varphi)}{dx^2} \right) = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_0 \ddot{\varphi} + J_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - K_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (19c)$$

$$\delta \varphi : \frac{dQ}{dx} - N_z + \bar{N} g_0 \left(\frac{d^2 (w_b + w_s + g_0 \varphi)}{dx^2} \right) = J_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + K_0 \ddot{\varphi} \quad (19d)$$

Les équations (19) peuvent être exprimées en termes de déplacements (u_0, w_b, w_s, φ) en utilisant les équations (10), (11), (12) et (15) comme suit :

$$A_{11} \frac{d^2 u_0}{dx^2} - B_{11} \frac{d^3 w_b}{dx^3} - B_{11}^s \frac{d^3 w_s}{dx^3} + L \frac{d\varphi}{dx} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{d\ddot{w}_b}{dx} - J_1 \frac{d\ddot{w}_s}{dx} \quad (20a)$$

$$B_{11} \frac{d^3 u_0}{dx^3} - D_{11} \frac{d^4 w_b}{dx^4} - D_{11}^s \frac{d^4 w_s}{dx^4} + L^a \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + q + \bar{N} \left(\frac{d^2 (w_b + w_s + g_0 \varphi)}{dx^2} \right) = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_0 \ddot{\varphi} + I_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (20b)$$

$$B_{11}^s \frac{d^3 u_0}{dx^3} - D_{11}^s \frac{d^4 w_b}{dx^4} - H_{11}^s \frac{d^4 w_s}{dx^4} + A_{55}^s \frac{d^2 w_s}{dx^2} + (R + A_{55}^s) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + q + \bar{N} \left(\frac{d^2 (w_b + w_s + g_0 \varphi)}{dx^2} \right) =$$

$$I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_0 \ddot{\varphi} + J_1 \frac{d \ddot{u}_0}{dx} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - K_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (20c)$$

$$L \frac{du_0}{dx} - L^a \frac{d^2 w_b}{dx^2} - (R + A_{55}^s) \frac{d^2 w_s}{dx^2} + R^a \varphi - A_{55}^s \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \bar{N} g_0 \left(\frac{d^2 (w_b + w_s + g_0 \varphi)}{dx^2} \right) =$$

$$J_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + K_0 \ddot{\varphi} \quad (20d)$$

Où A_{11} , B_{11} , etc., sont la rigidité de la poutre, défini par :

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz \quad (21a)$$

Et

$$A_{55}^s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{55} [g(z)]^2 dz, [L, L^a, R, R^a] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} [v, v \cdot z, v \cdot f(z), g'(z)] g'(z) dz \quad (21b)$$

III.3. Solution analytique

La solution exacte des équations (20) pour la poutre sandwich FG sous différentes conditions aux limites peut être réalisé. Les conditions aux limites pour un bord arbitraire avec un appui simple et un encastrement sont :

- Encastrement (C):

$$u_0 = w_b = \partial w_b / \partial x = w_s = \partial w_s / \partial x = \varphi = \partial \varphi / \partial x = 0 \text{ à } x = 0, L \quad (22a)$$

- Appui simple (S):

$$w_b = w_s = \varphi = 0 \text{ à } x = 0, L \quad (22b)$$

La représentation suivante pour les quantités de déplacement, qui satisfont aux conditions aux limites ci-dessus, est appropriée dans le cas de notre problème:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_b \\ w_s \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_m X_m' e^{i\omega t} \\ W_{bm} X_m e^{i\omega t} \\ W_{sm} X_m e^{i\omega t} \\ \Phi_{stm} X_m e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Où U_m , W_{bm} , W_{sm} et Φ_{stm} sont des paramètres arbitraires à déterminer, ω est associé à la fréquence propre de m mode, et $\lambda = m\pi/L$. La fonction $X_m(x)$ est proposée par Reddy [Reddy, 2004] pour répondre au moins aux conditions aux limites géométriques données par les équations (22) et représente des formes approximatives de la poutre défléchi. Ces fonctions, pour les différents cas de conditions aux limites, sont présentées au tableau.III.1.

Tableau III.1. Les fonctions $X_m(x)$ [Reddy, 2004]

Type d'appuis	Les conditions aux limites $x = 0, a$	Fonctions $X_m(x)$
SS	$X_m(0) = X''_m(0) = 0$	$\sin(\lambda x)$ $\lambda = m\pi / a$
CC	$X_m(0) = X'_m(0) = 0$	$\sin(\lambda mx) - \sinh(\lambda mx) - \xi m [\cos(\lambda mx) - \cosh(\lambda mx)]$ $\xi m = [\sin(\lambda ma) - \sinh(\lambda ma)] / [\cos(\lambda ma) - \cosh(\lambda ma)]$ $\lambda m = (m + 0,5)\pi / a$

La charge transversale q est également étendue en série de Fourier comme suit:

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m \sin(\lambda x) \tag{24}$$

Où Q_m est l'amplitude de la charge calculée à partir de :

$$Q_m = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin(\lambda x) dx \tag{25}$$

Les coefficients Q_m sont donnés ci-dessous pour certaines charges typiques. Dans le cas d'une charge distribuée de manière sinusoïdale, nous avons :

$$m = 1 \text{ et } Q_1 = q_0 \tag{26a}$$

Et pour le cas de charge uniforme distribué, nous avons :

$$Q_m = \frac{4q_0}{m\pi}, (m = 1,3,5....) \tag{26b}$$

En remplaçant les équations. (23) et (24) dans l'équation. (20), les solutions analytiques peuvent être obtenues ; pour le problème de vibration libre les paramètres de charge disparaissent et la solution de vibration libre peuvent être obtenus comme problème de valeur propre pour toute valeur fixe de m , comme:

$$([K] - \omega^2[M])\{\Delta\} = \{0\} \quad (27)$$

Pour les problèmes de flambement, la fréquence propre disparaît et l'équation de flambement peut être exprimée comme le problème de valeur propre suivant:

$$([K] - \Lambda[N])\{\Delta\} = \{0\} \quad (28)$$

Dans le cas d'un problème statique, on obtient l'équation de l'opérateur suivant :

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (29)$$

Où

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad [M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ 0 & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Et

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N}\alpha_3 & \bar{N}\alpha_3 & \bar{N}g_0\alpha_3 \\ 0 & \bar{N}\alpha_3 & \bar{N}\alpha_3 & \bar{N}g_0\alpha_3 \\ 0 & \bar{N}g_0\alpha_3 & \bar{N}g_0\alpha_3 & \bar{N}g_0^2\alpha_3 \end{bmatrix}, \quad \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} U_m \\ W_{bm} \\ W_{sm} \\ \Phi_{stm} \end{Bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_m \\ Q_m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

Où

$$a_{11} = A_{11}\alpha_4, a_{12} = -B_{11}\alpha_4, a_{13} = -B_{11}^s\alpha_4, a_{14} = L\alpha_2, \quad (32a)$$

$$a_{21} = B_{11}\alpha_5, a_{22} = -D_{11}\alpha_5, a_{23} = -D_{11}^s\alpha_5, a_{24} = L^a\alpha_3, \quad (32b)$$

$$a_{31} = B_{11}^s\alpha_5, a_{23} = -D_{11}^s\alpha_5, a_{33} = -H_{11}^s\alpha_5 + A_{55}^s\alpha_3, a_{34} = (A_{55}^s + R)\alpha_3, \quad (32c)$$

$$a_{41} = L\alpha_3, a_{42} = -L^a\alpha_3, a_{43} = -(A_{55}^s + R)\alpha_3, a_{44} = R^a\alpha_1 - A_{55}^s\alpha_3, \quad (32d)$$

$$m_{11} = -I_0\alpha_2, m_{12} = I_1\alpha_2, m_{13} = J_1\alpha_2, m_{14} = 0 \quad (32e)$$

$$m_{21} = -I_1\alpha_3, m_{22} = -I_0\alpha_1 + I_2\alpha_3, m_{23} = -I_0\alpha_1 + J_2\alpha_3, m_{24} = -J_0\alpha_1 \quad (32f)$$

$$m_{31} = -J_1\alpha_3, m_{32} = -I_0\alpha_1 + J_2\alpha_3, m_{33} = -I_0\alpha_1 + K_2\alpha_3, m_{34} = -J_0\alpha_1 \quad (32g)$$

$$m_{41} = 0, m_{42} = J_0\alpha_1, m_{43} = J_0\alpha_1, m_{44} = K_0\alpha_1 \quad (32h)$$

Où

$$(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5) = \int_0^L (X_m, X_m'', X_m''') X_m dx \quad (32i)$$

$$(\alpha_2, \alpha_4) = \int_0^L (X_m', X_m''') X_m' dx \quad (32j)$$

Pour les solutions non-insignifiantes de problème aux valeurs propres des équations (27), (28) les déterminants suivants doivent être nuls:

$$[[K] - \omega^2[M]] = \{0\} \quad (33a)$$

$$[[K] - \Lambda[N]] = \{0\} \quad (33b)$$

Les équations (33) donnent les fréquences naturelles ω et le flambement Λ de la poutre sandwichée.

III.4. Conclusion

Dans ce chapitre, L'analyse des vibrations libres et de flambement des poutres FGM fonctionnellement graduées sous des différentes conditions aux limites sont examinées par une nouvelle théorie raffinée de déformation de cisaillement hyperbolique d'une poutre en tenir compte l'effet d'étirement d'épaisseur.

Deux types courants des poutres sandwiches en FGM sont considérés, un premier type avec un cœur homogène léger et un autre sandwich avec cœur homogène lourd.

Les propriétés des matériaux des facettes de la poutre sandwich sont supposées être graduées dans le sens de l'épaisseur selon une distribution simple de loi de puissance en termes des fractions de volume des constituants. La couche de noyau est constituée d'un matériau isotrope. Des équations de mouvement sont dérivées par le principe de Hamilton. Des solutions analytiques de la vibration libre et du flambement sont obtenus pour des poutres sandwiches avec différentes conditions aux limites.

Les conditions aux limites ont été résolues par une fonction de forme nouvellement appliqué pour les poutres sandwiches FG.

IV. VALIDATION DES RESULTATS ET ETUDE PARAMETRIQUE

IV.1. Introduction

Les structures sandwiches existent généralement en deux types : deux revêtements en FGM couvrent un noyau homogène ou bien deux revêtements en homogène couvrent un noyau FGM. Pour le cas d'un noyau homogène, il est généralement employé en raison de la légèreté et la rigidité à la flexion dans la conception structurelle ; pour le type noyau lourd, il est également utilisé dans d'autres domaines tels que barrière dans les environnements thermiques. L'utilisation des structures sandwiches en tant qu'élément structural nous incite à la compréhension des phénomènes tels que vibration ou flambage des structures sandwiches.

Dans ce chapitre, nous allons présenter un ensemble de résultats obtenus suite à l'exécution du programme de calcul Maple, nous présenterons les résultats de la vibration libre et de flambement d'une poutre sandwich fonctionnellement gradient sous différentes conditions aux limites et avec deux cas de noyau (lourd et légère).

IV.2. Les résultats numériques et discussion

Dans cette section, plusieurs exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier la précision de la présente théorie.

À fin de voir l'efficacité du modèle présenté dans cette thèse, les fréquences fondamentales naturelles et les charges critiques de flambement des poutres sandwiches FG prédites par le modèle présenté sont comparées dans les tableaux .IV.1 - IV.14 avec celles obtenues par le modèle de Vo et al [Vo, 2014 ; Vo, 2015]. Les propriétés des matériaux utilisés sont les suivantes :

- Ceramic (P_c: Alumina, Al₂O₃): $E_c = 380 \text{ GPa}$; $\nu = 0.3$; $\rho_c = 3960 \text{ kg/m}^3$.
- Metal (P_m: Aluminium, Al): $E_m = 70 \text{ GPa}$; $\nu = 0.3$; $\rho_m = 2707 \text{ kg/m}^3$.

Deux cas des poutres sandwiches FG avec deux valeurs de rapport longueur / hauteur (égale à 5 et 20), sont examinés :

- **Noyau (cœur) lourd** : noyau homogène avec Al₂O₃ ($E_1 = E_c$; $\nu_1 = \nu_c$; $\rho_1 = \rho_c$), face FG avec le dessus et les surfaces de fond en Al ($E_2 = E_m$; $\nu_2 = \nu_m$; $\rho_2 = \rho_m$).
- **Noyau (cœur) léger** : noyau homogène avec Al ($E_1 = E_m$; $\nu_1 = \nu_m$; $\rho_1 = \rho_m$), face FG avec le dessus et les surfaces de fond en Al₂O₃ ($E_2 = E_c$; $\nu_2 = \nu_c$; $\rho_2 = \rho_c$).

Pour des raisons pratiques et pour uniformiser la lecture de nos résultats avec ceux de la littérature, les formes adimensionnelles suivantes sont utilisées.

$$\bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}, \quad P_{cr} = \bar{N} \frac{12 L^2}{E_m h^3}$$

IV.2. 1. Analyse des résultats de la vibration libre

L'étude de la vibration libre, comprend une validation avec les résultats de Vo et une étude paramétrique. Différents types de paramètres ont été étudiés, à savoir, la taille du core, type d'appuis, paramètre matériel,

Les tableaux IV.1 à IV.4, présentent les fréquences naturelles fondamentales pour des poutres sandwiches simplement appuyées avec deux types de noyau : le premier est lourd et un autre léger.

Les résultats obtenus sont comparés avec ceux de Vo et al. (2014) et Vo et al. (2015) [Vo, 2014 ; Vo, 2015] pour différentes valeurs du paramètre matériel k . La différence entre Vo et al. (2014) et Vo et al. (2015) réside dans la prise en compte de l'effet de la déformation normale.

A partir des résultats présentés dans les tableaux IV.1 et IV.2 qui traitent les poutres sandwiches à cœur lourd, on remarque premièrement que les fréquences analytiques trouvées et ceux de Vo sont en accord pour chacune des deux théories des poutres avec ou sans l'effet de la déformation normale.

Les fréquences trouvées par Vo [Vo, 2014] sont relativement proches à celle du modèle d'étude, en tenant compte l'effet de la déformation normale ($\varepsilon_z \neq 0$), avec un écart d'environ 0.02 % à 0.04 % pour le cas des poutres épaisses ($L/h=5$) avec un cœur lourd, cet écart reste 0.04 % pour le cas des poutres moyennement épaisses ($L/h=20$) avec un cœur lourd.

Ce léger écart pourrait être causé par le choix de la fonction de forme appropriée puisque la nôtre est sous une forme en sinus hyperbolique et celle utilisée par Vo en forme de 3^{ème} ordre.

Si la déformation normale est omise ($\varepsilon_z = 0$), l'accord devient plus juste entre les résultats obtenus, par le modèle présenté dans ce travail et le modèle de Vo et al. (2014) [Vo, 2014].

On remarque que les résultats des fréquences fondamentales d'une poutre sans l'effet de la déformation normale sous-estiment par rapport à ceux d'une poutre avec l'effet de la déformation normale surtout pour le cas des poutres épaisses ($L/h = 5$). Ceci est dû sûrement à la négligence de l'effet d'éirement de l'épaisseur.

Maintenant, si on compare les deux concepts ; le cas des vibrations libres des poutres avec et sans déformation normale ; l'écart devient 0.2 % pour le cas des poutres épaisses ($L/h=5$) à cœur lourd ; mais pour le cas des poutres moyennement élancées l'écart devient 0.05 %. Ceci dit que

l'effet de déformation normale « ε_z » devient plus sensible dans le cas des poutres épaisses, c'est-à-dire que le cisaillement affecte les structures épaisses et amplifie l'effet de la déformation normale.

Tableau .IV.1. Les fréquences naturelles non dimensionnelles ω d'une poutre sandwich simplement appuyées avec un noyau lourd homogène ($L/h = 5$).

k	Théorie	1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-8-1
0	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	5.1629	5.1629	5.1629	5.1629	5.1629
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	5.1529	5.1529	5.1529	5.1529	5.1529
	Vo et al (2014)	5.1528	5.1528	5.1528	5.1528	5.1528
	Vo et al (2015)	5.1618	5.1618	5.1618	5.1618	5.1618
0.5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	4.1352	4.2438	4.3394	4.4895	4.8526
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	4.1270	4.2353	4.3305	4.4799	4.8425
	Vo et al (2014)	4.1268	4.2351	4.3303	4.4798	4.8422
	Vo et al (2015)	4.1344	4.2429	4.3383	4.4881	4.8511
1	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	3.5809	3.7376	3.8840	4.1199	4.6900
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	3.5730	3.7302	3.8754	4.1108	4.6091
	Vo et al (2014)	3.5735	3.7298	3.8755	4.1105	4.6084
	Vo et al (2015)	3.5803	3.7369	3.8830	4.1185	4.6884
2	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	3.0741	3.2433	3.4267	3.7424	4.5248
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	3.0672	3.2368	3.4187	3.7336	4.5151
	Vo et al (2014)	3.0680	3.2365	3.4190	3.7334	4.5142
	Vo et al (2015)	3.0737	3.2427	3.4257	3.7410	4.5231
5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	2.7490	2.8492	3.0247	3.3854	4.3607
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	2.7433	2.8436	3.0178	3.3770	4.3511
	Vo et al (2014)	2.7446	2.8439	3.0181	3.3771	4.3501
	Vo et al (2015)	2.7493	2.8489	3.0238	3.3840	4.3589
10	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	2.6971	2.7399	2.8867	3.2438	4.2882
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	2.6918	2.7353	2.8806	3.2353	4.2782
	Vo et al (2014)	2.6932	2.7355	2.8808	3.2356	4.2776
	Vo et al (2015)	2.6978	2.7400	2.8860	3.2422	4.2864

Tableau .IV.2. Les fréquences naturelles non dimensionnelles ω d'une poutre sandwich simplement appuyées avec un noyau lourd homogène ($L/h = 20$).

k	Théorie	1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-8-1
0	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	5.4634	5.4634	5.4634	5.4634	5.4634
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	5.4603	5.4603	5.4603	5.4603	5.4603
	Vo et al (2014)	5.4603	5.4603	5.4603	5.4603	5.4603
	Vo et al (2015)	5.4610	5.4610	5.4610	5.4610	5.4610
0.5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	4.3173	4.4316	4.5351	4.7006	5.1095
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	4.3148	4.4290	4.5324	4.6979	5.1067
	Vo et al (2014)	4.3148	4.4290	4.5324	4.6979	5.1067
	Vo et al (2015)	4.3153	4.4296	4.5330	4.6985	5.1073
1	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	3.7169	3.8791	4.0352	4.2914	4.9259
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	3.7146	3.8768	4.0328	4.2889	4.9233
	Vo et al (2014)	3.7147	3.8768	4.0328	4.2889	4.9233
	Vo et al (2015)	3.7152	3.8773	4.0333	4.2895	4.9239
2	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	3.1785	3.3488	3.5413	3.8793	4.7406
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	3.1763	3.3465	3.5389	3.8769	4.7382
	Vo et al (2014)	3.1764	3.3465	3.5389	3.8769	4.7382
	Vo et al (2015)	3.1768	3.3469	3.5394	3.8774	4.7388
5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	2.8457	2.9331	3.1134	3.4946	4.5577
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	2.8438	2.9310	3.1110	3.4921	4.5554
	Vo et al (2014)	2.8439	2.9310	3.1111	3.4921	4.5554
	Vo et al (2015)	2.8443	2.9314	3.1115	3.4926	4.5560
10	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	2.8057	2.8207	2.9685	3.3434	4.4772
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	2.8040	2.8188	2.9661	3.3406	4.4749
	Vo et al (2014)	2.8041	2.8188	2.9662	3.3406	4.4749
	Vo et al (2015)	2.8045	2.8191	2.9665	3.3411	4.4755

Tableau .IV.3. Les fréquences naturelles non dimensionnelles ω d'une poutre FG Sandwich simplement appuyées avec un noyau léger homogène ($L/h=5$).

k	Théorie	1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-8-1
0	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	2.6826	2.6826	2.6826	2.6826	2.6826
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	2.6774	2.6774	2.6774	2.6774	2.6774
	Vo et al (2014)	2.6773	2.6773	2.6773	2.6773	2.6773
0.5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	4.4557	4.3184	4.1968	4.0016	3.4379
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	4.4446	4.3067	4.1924	3.9959	3.4374
	Vo et al (2014)	4.4427	4.3046	4.1839	3.9921	3.4342
1	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	4.8683	4.7368	4.6050	4.3814	3.7101
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	4.8593	4.7254	4.5922	4.3726	3.7052
	Vo et al (2014)	4.8525	4.7178	4.5858	4.3663	3.7065
2	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	5.1108	5.0190	4.8984	4.6677	3.9344
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	5.1002	5.0012	4.8815	4.6512	3.9296
	Vo et al (2014)	5.0945	4.9970	4.8740	4.6459	3.9303
5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	5.2022	5.1818	5.0968	4.8841	4.1194
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	5.1916	5.1644	5.0769	4.8646	4.1140
	Vo et al (2014)	5.1880	5.1603	5.0703	4.8564	4.1139
10	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	5.1973	5.2165	5.1561	4.9622	4.1920
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	5.1869	5.2057	5.1376	4.9408	4.1857
	Vo et al (2014)	5.1848	5.1966	5.1301	4.9326	4.1855

Concernant la taille du cœur à considérer, une étude paramétrique a été faite sur une poutre à plusieurs tailles de cœur. La première remarque à tirer de ce paramètre c'est la proportion existante entre l'épaisseur de cœur et la fréquence fondamentale.

Dotant plus que le cœur soit rigide la fréquence augmente, par contre, si le cœur soit moins rigide la fréquence diminue.

Dans les tableaux IV-1 – IV4 cette observation est bien visible ; puisque, d'autant plus que le cœur lourd soit dominant (augmentation de rigidité) la fréquence augmente ; tandis que lorsque le cœur léger soit dominant (diminution de rigidité) les fréquences diminuent.

Ceci peut s'expliquer vu le type de matériau considéré. En effet, les propriétés vibratoires des poutres sandwiches dépendent très fortement aux propriétés mécaniques du cœur.

Tableau .IV.4. Les fréquences naturelles non dimensionnelles ω d'une poutre sandwich simplement appuyées avec noyau léger homogène ($L/h = 20$).

k	Théorie	1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-8-1
0	Présent ($\varepsilon_z \neq 0$)	2.8387	2.8387	2.8387	2.8387	2.8387
	Présent ($\varepsilon_z = 0$)	2.8371	2.8371	2.8371	2.8371	2.8371
	Vo et al (2014)	2.8371	2.8371	2.8371	2.8371	2.8371
0.5	Présent ($\varepsilon_z \neq 0$)	4.8607	4.7488	4.6320	4.4181	3.7271
	Présent ($\varepsilon_z = 0$)	4.8582	4.7465	4.6297	4.4161	3.7257
	Vo et al (2014)	4.8579	4.7460	4.6294	4.4160	3.7255
1	Présent ($\varepsilon_z \neq 0$)	5.3023	5.2250	5.1193	4.8965	4.0664
	Présent ($\varepsilon_z = 0$)	5.2996	5.2220	5.1165	4.8941	4.0647
	Vo et al (2014)	5.2990	5.2217	5.1160	4.8938	4.0648
2	Présent ($\varepsilon_z \neq 0$)	5.5273	5.5150	5.4449	5.2479	4.3558
	Présent ($\varepsilon_z = 0$)	5.5244	5.5118	5.4415	5.2448	4.3541
	Vo et al (2014)	5.5239	5.5113	5.4410	5.2445	4.3542
5	Présent ($\varepsilon_z \neq 0$)	5.5679	5.6422	5.6284	5.4884	4.6007
	Présent ($\varepsilon_z = 0$)	5.5648	5.6387	5.6247	5.4847	4.5991
	Vo et al (2014)	5.5645	5.6382	5.6242	5.4843	4.5991
10	Présent ($\varepsilon_z \neq 0$)	5.5335	5.6491	5.6663	5.5617	4.6977
	Présent ($\varepsilon_z = 0$)	5.5303	5.6459	5.6627	5.5579	4.6961
	Vo et al (2014)	5.5302	5.6452	5.6621	5.5575	4.6960

Quand on parle de notion d'appui en mécanique des structures ca signifie l'étude de la résistance des matériaux liée aux actions extérieures, tout on ayant comme souci le maintien de notre structure stable par un système de control.

L'appui d'une structure en générale est de réaliser une structure immobile (bâtiment, pont...), ou bien à réaliser un travail (par exemple déplacer une charge). Dans tous les cas, chaque élément de la structure est en contact avec plusieurs autres, ce qui va d'une part limiter les mouvements de chaque pièce, et d'autre part permettre la transmission d'efforts.

En mécanique des structures, l'hyperstatisme est la situation d'un assemblage pour lequel le fonctionnement se fait avec plus de contraintes que ce qui est strictement nécessaire pour le maintenir, ce qui signifie qu'au moins un degré de mobilité d'une pièce est supprimé plusieurs fois.

Tableau .IV.5. Les fréquences naturelles non dimensionnelles ω d'une poutre sandwich encastéré –encastéré avec noyau lourd homogène ($L/h = 5$).

k	Théorie	1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-8-1
0	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	10.5190	10.5190	10.5190	10.5190	10.5190
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	10.2571	10.2571	10.2571	10.0306	10.2571
	Vo et al (2014)	10.0678	10.0678	10.0678	10.0678	10.0678
	Vo et al (2015)	10.1851	10.1851	10.1851	10.1851	10.1851
0.5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	8.7065	8.9289	9.1100	9.3800	9.9996
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	8.4689	8.6857	8.8632	9.1291	9.7420
	Vo et al (2014)	8.3600	8.5720	8.7423	8.9942	9.5731
	Vo et al (2015)	8.4635	8.6780	8.8498	9.1036	9.6857
1	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	7.6568	7.9915	8.2792	8.7196	9.7207
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	7.4386	7.7638	8.0450	8.4774	9.4658
	Vo et al (2014)	7.3661	7.6865	7.9580	8.3705	9.3076
	Vo et al (2015)	7.4611	7.7854	8.0595	8.4752	9.4174
2	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	6.6494	7.0366	7.4111	8.0218	9.4333
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	6.4542	6.8282	7.1929	7.7906	9.1815
	Vo et al (2014)	6.4095	6.7826	7.1373	7.7114	9.0343
	Vo et al (2015)	6.4952	6.8740	7.2328	7.8114	9.1415
5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	5.9358	6.2420	6.6199	7.3413	9.1444
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	5.7633	6.0534	6.4193	7.1229	8.8959
	Vo et al (2014)	5.7264	6.0293	6.3889	7.0691	8.7605
	Vo et al (2015)	5.8016	6.1124	6.4780	7.1652	8.8653
10	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	5.7474	6.0072	6.3400	7.0645	9.0158
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	5.5863	5.8260	6.1467	6.6869	8.5622
	Vo et al (2014)	5.5375	5.8059	6.1240	6.8087	8.6391
	Vo et al (2015)	5.6074	5.8848	6.2099	6.9030	8.7430

Tableau .IV.6. Les fréquences naturelles non dimensionnelles ω d'une poutre sandwich encasté –encasté avec noyau lourd homogène ($L/h = 20$).

k	Théorie	1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-8-1
0	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	12.5691	12.5691	12.5691	12.5691	12.5691
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	12.1642	12.1642	12.1642	12.1642	12.1642
	Vo et al (2014)	12.2228	12.2228	12.2228	12.2228	12.2228
	Vo et al (2015)	12.2660	12.2660	12.2660	12.2660	12.2660
0.5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	9.9635	10.2267	10.4635	10.8407	11.7685
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	9.6400	9.8947	10.1240	10.4893	11.3883
	Vo et al (2014)	9.6942	9.9501	10.1800	10.5460	11.4459
	Vo et al (2015)	9.7297	9.9865	10.2172	10.5842	11.4867
1	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	8.5895	8.9644	9.3227	9.9087	11.3523
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	8.3096	8.6722	9.0191	9.5865	10.9851
	Vo et al (2014)	8.3594	8.7241	9.0722	9.6411	11.0421
	Vo et al (2015)	8.3908	8.7569	9.1061	9.6768	11.0815
2	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	7.3519	7.7478	8.1912	8.9668	10.9316
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	7.1117	7.4944	7.9234	8.6743	10.5775
	Vo et al (2014)	7.1563	7.5417	7.9727	8.7262	10.6336
	Vo et al (2015)	7.1839	7.5711	8.0035	8.7593	10.6719
5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	6.5812	6.7911	7.2080	8.0849	10.5156
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	6.3663	6.5685	6.9716	7.8203	10.1746
	Vo et al (2014)	6.4064	6.6116	7.0170	7.8692	10.2298
	Vo et al (2015)	6.4308	6.6379	7.0451	7.9000	10.2669
10	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	6.4817	6.5313	6.8741	7.7371	10.3323
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	6.2707	6.3173	6.6485	7.4834	9.8974
	Vo et al (2014)	6.3086	6.3590	6.6924	7.5311	10.0519
	Vo et al (2015)	6.3319	6.3841	6.7194	7.5609	10.0884

Dans le cas où la poutre est bi-encastée, la résolution des équations d'équilibre III.19 en fonction de ce type de condition aux limites serait difficile, donc les pulsations propres ne peuvent plus être déterminées analytiquement du fait de la relation en puissance qui découle des conditions aux limites cinématiques. Une fonction de forme a été utilisée et testé pour le cas bi-encasté.

Les tableaux IV.5 et IV.8 représentent les fréquences fondamentales naturelles non dimensionnelles pour une poutre sandwich avec un mode appuis encastré –encastré et différent types de noyau homogène, pour les deux cas : poutre épaisses et l’autre moyennement épaisses, respectivement.

Contrairement au cas appuyé- appuyé, ce cas d’appuis donne des fréquences naturelles assez grandes. Ceci est expliqué par l’absorption des efforts au niveau de l’encastrement c’est-à-dire la diminution de l’amplification induisant une augmentation des fréquences.

En général, un bon accord entre les résultats obtenus par le présent modèle et celles de Vo et al. (2014) et Vo et al. (2015) [Vo, 2014 ; Vo, 2015] peut être remarqué.

Tableau .IV.7. Les fréquences naturelles non dimensionnelles ω d’une poutre sandwich encastré –encastré avec noyau léger homogène ($L/h = 5$).

k	Théorie	1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-8-1
0	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	5.4660	5.4660	5.4660	5.4660	5.4660
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	5.3295	5.3295	5.3295	5.3295	5.3295
	Vo et al (2014)	5.2311	5.2311	5.2311	5.2311	5.2311
0.5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	8.4583	8.0595	7.7782	7.4236	6.6423
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	8.3107	7.9341	7.6590	7.2987	6.4945
	Vo et al (2014)	8.0509	7.6627	7.3914	7.0539	6.3333
1	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	9.0680	8.7724	8.3993	7.9271	7.0089
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	9.1094	8.6540	8.2974	7.8231	6.8620
	Vo et al (2014)	8.8221	8.3354	7.9726	7.5187	6.6705
2	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	9.7779	9.3578	8.9202	8.3329	7.2869
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	9.6957	9.2337	8.8275	8.2506	7.1442
	Vo et al (2014)	9.4121	8.8948	8.4655	7.8960	6.9233
5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	10.1007	9.8474	9.3919	8.7071	7.5005
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	10.0817	9.6985	9.2916	8.6402	7.3656
	Vo et al (2014)	9.8336	9.3724	8.9201	8.2498	7.1155
10	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	10.1258	9.9832	9.5950	8.8800	7.5820
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	10.1867	9.8683	9.4827	8.8151	7.3265
	Vo et al (2014)	9.9640	9.5608	9.1193	8.4162	7.1884

Tableau .IV.8. Les fréquences naturelles non dimensionnelles ω d'une poutre sandwich encastéré –encastéré avec noyau léger homogène ($L/h = 20$)

k	Théorie	1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-8-1
0	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	6.5299	6.5299	6.5299	6.5299	6.5299
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	6.3204	6.3204	6.3204	6.3204	6.3204
	Vo et al (2014)	6.3509	6.3509	6.3509	6.3509	6.3509
0.5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	11.0924	10.6021	10.5371	9.9567	8.5232
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	10.7472	10.4797	10.2129	9.7407	8.2532
	Vo et al (2014)	10.7743	10.4993	10.2298	9.7587	8.2818
1	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	12.1044	11.6851	11.6196	10.9831	9.2732
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	11.7279	11.5219	11.2675	10.7633	8.9814
	Vo et al (2014)	11.7579	11.5383	11.2767	10.7706	9.0064
2	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	12.6417	12.2566	12.3561	11.8731	9.9067
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	12.2459	12.1726	11.9843	11.5185	9.5974
	Vo et al (2014)	12.2833	12.1920	11.9911	11.5168	9.6175
5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	12.7696	12.5779	12.7945	12.4151	10.4385
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	12.3652	12.4801	12.4079	12.0477	10.1153
	Vo et al (2014)	12.4132	12.5088	12.4199	12.0423	10.1297
10	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	12.7083	12.6130	12.8980	12.5891	10.6482
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	12.3033	12.5112	12.5059	12.2167	10.2570
	Vo et al (2014)	12.3564	12.5460	12.5230	12.2122	10.3315

L'écart entre les solutions analytiques et ceux de Vo (numériques) c'est grand, dans ce cas les solutions numériques tel que Ritz sont des solutions basent sur une approche variationnelle qui dépend du type de maillage.

De même, dans le cas des poutres encastéré –encastéré la théorie qui tient compte de l'effet de la déformation normale donne des valeurs assez grandes que celle qui ne tient pas compte de ce paramètre, cette remarque stable que ce soit pour les poutres élancées ou les poutres épaisses.

Des valeurs de fréquences élevées signifient l'effet de stretching qui contribue à l'augmentation de la fréquence de pulsation, cette différence n'est liée qu'à ce paramètre puisque le pourcentage que ce soit pour le cas des poutres épaisses ou lancées.

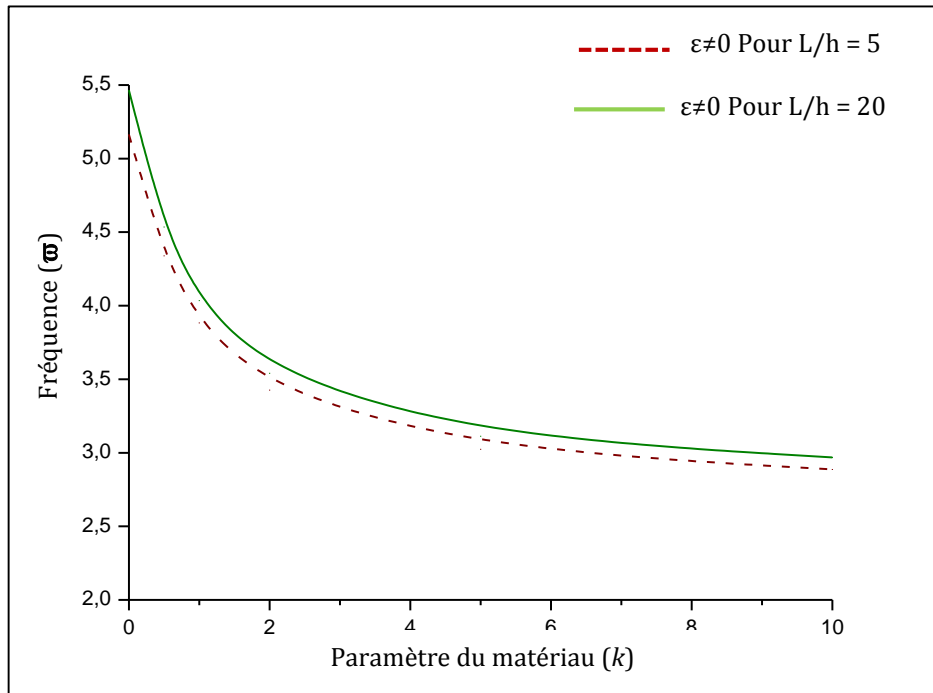


Figure. IV.1. Variation de la fréquence fondamentale ω par rapport au paramètre de matériau k (1-1-1), d'une poutre sandwich simplement appuyées avec noyau lourd homogène

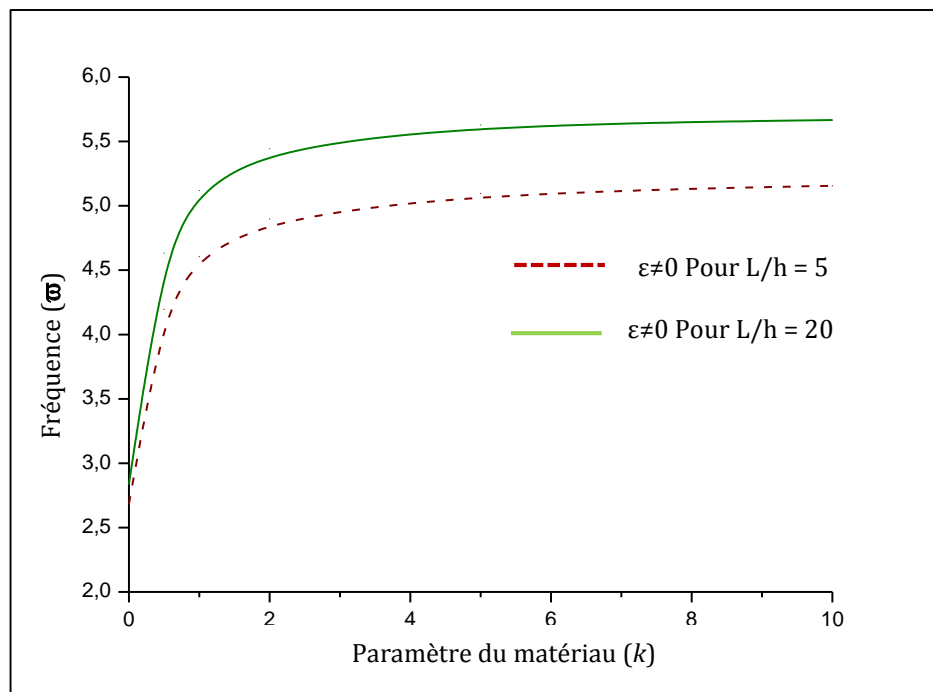


Figure. IV.2. Variation de la fréquence fondamentale ω par rapport au paramètre de matériau k (1-1-1), d'une poutre sandwich simplement appuyées avec un noyau léger homogène

Tout comme le cas des poutres appuyées – appuyées, dans le cas bi-encasté on étudie aussi la relation entre la fréquence de pulsation en fonction de l'épaisseur du cœur et du facteur de puissance matérielle.

Les figures IV.1 et IV. 2 représentent la variation de la fréquence fondamentale ω par rapport au paramètre de matériau k d'une poutre sandwich (1-1-1), simplement appuyées avec un noyau homogène lourd et léger, respectivement.

A partir de ces deux figures, on remarque que l'augmentation du paramètre matériel diminue la fréquence fondamentale de la poutre dans le cas d'un cœur (noyau) lourd. Mais, la fréquence « ω » de la poutre à cœur léger augmente avec l'augmentation de ce paramètre.

On peut observer aussi, l'influence de l'effet de l'épaisseur de la poutre sur la fréquence propre, il est bien entendu que la variation de la fréquence soit comme suit :

Pour une poutre à cœur lourd : la différence entre les fréquences est assez petite entre les deux courbes des poutres sandwiches épaisses ($L/h=5$) et des poutres sandwiches moyennement épaisses ($L/h=20$).

Pour une poutre à cœur léger : cette différence entre les fréquences est plus apparente entre les deux courbes des poutres sandwiches épaisses ($L/h=5$) et des poutres sandwiches moyennement épaisses ($L/h=20$). Ceci implique qu'en plus le l'élanement, le poids du cœur peut constituer un facteur de variation des fréquences propres.

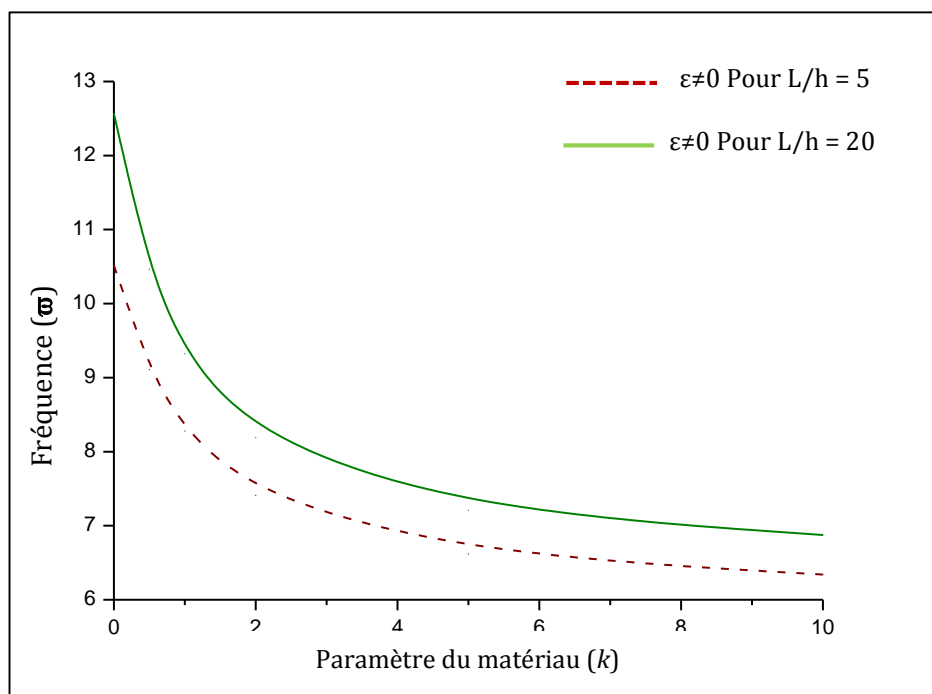


Figure. IV.3. Variation de la fréquence fondamentale ω par rapport au paramètre de matériau k (1-1-1), d'une poutre sandwich encasté –encasté avec noyau lourd homogène

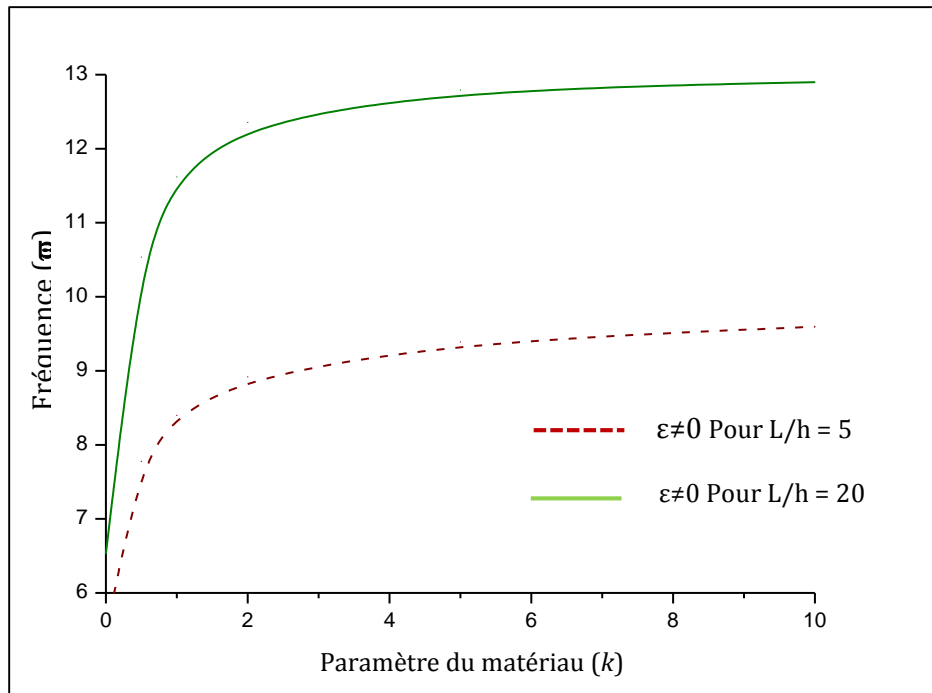


Figure. IV.4. Variation de la fréquence fondamentale ω par rapport au paramètre de matériau k (1-1-1), d'une poutre sandwich encasté-encasté avec un noyau léger homogène

Les courbes illustrées dans les figures IV.3 et IV.4, montrent la variation de la fréquence fondamentale par rapport au paramètre matériel k d'une poutre sandwich (1-1-1) bi-encasté avec un noyau homogène lourd et léger, respectivement.

A partir de ces courbes, les mêmes observations des deux premières figures ont été remarquées. Sauf que, cette fois-ci l'écart de fréquence entre les poutres épaisses ($L/h=5$) et les poutres moyennement élancées ($L/h=20$) est plus grand ; même les fréquences trouvées pour le cas d'une poutre bi-encastée sont plus grandes (page 73 dernier paragraphe).

La figure IV.5 montre la variation de la fréquence fondamentale en fonction du paramètre matériel, des poutres sandwichs simplement appuyées, avec différents types de cœurs.

A partir de ces figures, on remarque que le paramètre de fréquence diminue avec la diminution du paramètre k pour tous les rapports d'épaisseurs. Il convient de noter que lorsque le paramètre matériel est supérieur à cinq ($k > 5$), la variation de ces deux paramètres diminue davantage.

On peut observer aussi, que le rapport de diminution de la fréquence fondamentale diminue en fonction de l'augmentation de l'épaisseur du cœur de la poutre.

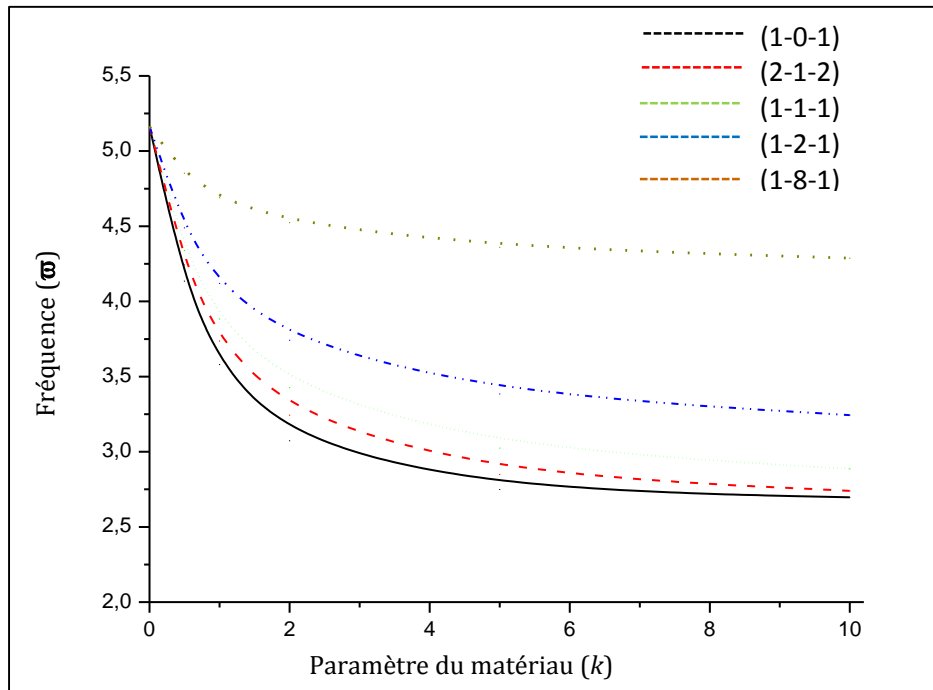


Figure. IV.5. Variation de la fréquence fondamentale ω par rapport au paramètre de matériau k des différentes poutres sandwich simplement appuyées avec un noyau lourd homogène

IV.2.2. Analyse des résultats de flambage

Une comparaison entre le modèle présenté dans ce travail et celle de Vo et al [Vo, 2014 ; Vo, 2015] a été réalisée afin d'étudier le problème de flambement dans une poutre sandwich. Pour cela, on a procédé à la recherche des charges critiques de flambement d'une poutre sandwich avec deux types d'appuis (appuyé-appuyé, encasté-encasté) en fonction du paramètre de matériau, le type du cœur et l'épaisseur de la poutre ($L / h = 5, 20$) qui représente les deux catégories de la poutre, à savoir : épaisses et modérément épaisses.

Les tableaux IV.9 à IV.14, présentent les charges critiques de flambement pour des poutres sandwichs simplement appuyées et bi-encasté, respectivement, avec deux types de noyau (lourd et léger).

Les résultats obtenus sont comparés avec ceux de Vo et al. (2014) et Vo et al. (2015) [Vo, 2014 ; Vo, 2015] pour différentes valeurs du paramètre matériel k . La différence entre Vo et al. (2014) et Vo et al. (2015) réside dans la prise en compte de l'effet de la déformation normale.

Tableau .IV.9. Charges critiques de flambement P_{cr} d'une poutre sandwich simplement appuyées avec noyau lourd homogène ($L/h = 5$).

k	Theorie	1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-8-1
0	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	165.7137	165.7137	165.7137	165.7137	165.7137
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	154.5978	154.5978	154.5978	154.5978	154.5978
	Vo et al (2014)	152.1470	152.1470	152.1470	152.1470	152.1470
	Vo et al (2015)	160.2780	160.2780	160.2780	160.2780	160.2780
0.5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	102.0793	109.8888	116.1127	125.3367	146.8777
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	94.4652	101.7035	107.5141	116.1804	136.6076
	Vo et al (2014)	92.8833	99.9860	105.6790	114.1710	134.2870
	Vo et al (2015)	98.4559	105.9750	111.9680	120.8630	141.7880
1	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	74.4910	84.2031	92.5165	105.5315	137.4443
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	68.6650	77.6050	85.3186	97.4780	127.6257
	Vo et al (2014)	67.4983	76.2634	83.8177	95.7287	125.3860
	Vo et al (2015)	71.7654	81.0936	89.0834	101.6130	132.5510
2	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	52.7606	62.2868	71.4009	86.9540	128.1608
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	48.5114	57.2000	65.5961	80.0364	118.8061
	Vo et al (2014)	47.7010	56.2057	64.4229	78.5608	116.6580
	Vo et al (2015)	50.8183	59.9354	68.6743	83.6159	123.4770
5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	39.2032	46.5945	54.7453	70.8229	119.2304
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	36.0974	42.7203	50.1642	64.9913	110.3426
	Vo et al (2014)	35.5493	42.0033	49.2763	63.7824	108.2970
	Vo et al (2015)	37.8295	44.8488	52.6395	68.0510	114.7700
10	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	35.4627	42.1045	49.2629	64.7226	115.3670
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	32.7650	38.6182	45.1208	59.3329	106.6885
	Vo et al (2014)	32.3019	37.9944	44.3374	58.2461	104.6920
	Vo et al (2015)	34.2824	40.5544	47.3804	62.1959	111.0120

A partir des résultats présentées dans les tableaux IV.9 à IV.14, on remarque que les charges critiques de flambement sont les même quelle que soit la configuration de la poutre sandwich pour un paramètre de matériel nul ($k = 0$).

On observe aussi, que si le cœur de la poutre soit rigide, la charge critique du flambement augmente avec l'augmentation de l'épaisseur du cœur. Par contre, cette charge diminue avec l'augmentation de l'épaisseur du cœur dans le cas d'une poutre avec un cœur léger.

Dans tous les cas, les valeurs maximales de la charge critique de flambement sont obtenues lorsque le paramètre de matériau soit nul ($k = 0$) dans le cas d'une poutre sandwich avec un cœur lourd quel que soit le type d'appuis. Dans l'autre cas c.-à-d. le cœur de la poutre soit léger, les valeurs minimales de la charge critique de flambement sont obtenues lorsque le paramètre de matériau est nul ($k = 0$). Ce comportement est en quelque sorte prévu puisque la diminution de la rigidité du cœur signifie la diminution du module d'élasticité de ce dernier ; la poutre devient donc plus souple ; ce qui nous donne des charges critiques de flambement faible.

Tableau.IV.10. Charges critiques de flambement P_{cr} d'une poutre sandwich simplement appuyées avec noyau lourd homogène ($L/h = 20$).

k	Theorie	1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-8-1
0	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	228.3777	228.3777	228.3777	228.3777	228.3777
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	213.5879	213.5879	213.5879	213.5879	213.5879
	Vo et al (2014)	208.9510	208.9510	208.9510	208.9510	208.9510
	Vo et al (2015)	210.7420	210.7420	210.7420	210.7420	210.7420
0.5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	128.3061	138.3757	147.0931	160.8884	195.9677
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	119.9188	129.3312	137.4835	150.3902	183.2318
	Vo et al (2014)	117.3030	126.5080	134.4810	147.1040	179.2350
	Vo et al (2015)	118.3530	127.6410	135.6840	148.4130	180.8010
1	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	89.7126	101.4032	112.3328	130.6555	180.3802
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	83.8241	94.7462	104.9626	122.0979	168.6366
	Vo et al (2014)	81.9927	92.6741	102.6650	119.4220	164.9490
	Vo et al (2015)	82.7434	93.5248	103.6060	120.5090	166.4060
2	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	61.5867	72.0716	83.2946	103.9198	165.4276
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	57.5336	67.3225	77.8079	97.0883	154.6386
	Vo et al (2014)	56.2773	65.8489	76.1020	94.9563	151.2500
	Vo et al (2015)	56.7986	66.4664	76.8166	95.8403	152.6000
5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	46.0361	52.54716	61.8472	81.9806	151.3849
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	43.0119	49.0795	57.7618	76.5732	141.4945
	Vo et al (2014)	42.0775	48.0070	56.4958	74.8903	138.3880
	Vo et al (2015)	42.4596	48.4588	57.0343	75.6019	139.6370
10	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	43.1931	47.4158	55.1536	74.0377	145.4102
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	40.3659	44.2893	51.5090	69.1453	135.9027
	Vo et al (2014)	39.4930	43.3233	50.3811	67.6270	132.9170
	Vo et al (2015)	39.8436	43.7273	50.8611	68.2737	134.1220

Les tableaux IV.9, IV.10, IV.11 et IV.12 montrent les charges critiques de flambement pour une poutre sandwich appuie- appuie coté avec noyau rigide et léger, respectivement.

Les résultats des charges critiques d'une poutre sandwich simplement appuyées avec un noyau lourd sont obtenus par la théorie proposée et comparés aux ceux de Vo et al [Vo, 2014 ; Vo, 2015].

Tableau .IV.11. Charges critiques de flambement P_{cr} d'une poutre sandwich simplement appuyées avec noyau léger homogène ($L/h = 5$).

k	Theorie	1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-8-1
0	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	9.1575	9.1575	9.1575	9.1575	9.1575
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	8.9524	8.9524	8.9524	8.9524	8.9524
	Vo et al (2014)	8.9519	8.9519	8.9519	8.9519	8.9519
0.5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	29.0755	26.5470	24.5952	21.8303	15.4469
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	28.4995	25.9956	24.1306	21.4239	15.1495
	Vo et al (2014)	28.4280	25.9503	24.0540	21.3821	15.1589
1	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	37.0638	33.7041	30.9841	27.0786	18.2334
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	36.3172	32.9786	30.3046	26.5884	17.8974
	Vo et al (2014)	36.2103	32.8974	30.2449	26.4801	17.9093
2	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	43.4657	39.8517	36.6422	31.7878	20.7839
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	42.5601	38.9753	35.8463	31.2146	20.4130
	Vo et al (2014)	42.4501	38.8589	35.7058	31.0152	20.4222
5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	47.7566	44.6508	41.4173	35.9875	23.0939
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	46.7208	43.6303	40.4032	35.3273	22.6907
	Vo et al (2014)	46.6504	43.5338	40.3235	35.0357	22.6881
10	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	48.9012	46.2561	43.2072	37.7129	24.0628
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	47.8231	45.2333	42.1412	36.7453	23.6402
	Vo et al (2014)	47.7825	45.1141	42.0693	36.6874	23.6329

Pour toutes les configurations les types de poutre, il peut être vu que les charges critiques de flambement diminuent d'une manière rapide, avec l'augmentation de paramètre k .

A partir des résultats présentés dans les tableaux IV.9 à IV.12 qui traitent les charges critiques des poutres sandwichs à cœur lourd et léger, on remarque que l'écart entre les solutions analytiques et ceux de Vo (numériques) c'est grand, cette différence peut être expliquée par la fonction de forme

utilisée dans les deux théories. On observe aussi, que si le noyau lourd soit dominant (augmentation de rigidité) la charge critique de la poutre augmente ; tandis que lorsque le noyau léger soit dominant (diminution de rigidité) la charge critique de la poutre diminuent.

Tableau.IV.12. Charges critiques de flambement P_{cr} d'une poutre sandwich simplement appuyées avec noyau léger homogène ($L/h = 20$).

k	Theorie	1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-8-1
0	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	9.8299	9.8299	9.8299	9.8299	9.8299
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	9.8067	9.8067	9.8067	9.8067	9.8067
	Vo et al (2014)	9.8067	9.8067	9.8067	9.8067	9.8067
0.5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	33.2953	30.9259	28.8816	25.6595	17.4709
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	33.2249	30.8623	28.8236	25.6094	17.4347
	Vo et al (2014)	33.2187	30.8546	28.8167	25.6086	17.4355
1	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	42.2809	39.5081	36.9329	32.6526	21.1098
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	42.1902	39.4266	36.8594	32.5906	21.0688
	Vo et al (2014)	42.1810	39.4124	36.8445	32.5803	21.0698
2	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	48.8388	46.3198	43.6517	38.8121	24.5803
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	48.7307	46.2216	43.5632	38.7387	24.5348
	Vo et al (2014)	48.7215	46.2035	43.5408	38.7192	24.5356
5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	52.4921	50.8904	48.6442	43.8770	27.8236
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	52.3711	50.7776	48.5416	43.7922	27.7739
	Vo et al (2014)	52.3655	50.7608	48.5163	43.7637	27.7736
10	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	53.1605	52.1127	50.2228	45.7224	29.1999
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	53.0363	51.9945	50.1143	45.6354	29.1492
	Vo et al (2014)	53.0331	51.9804	50.0902	45.6040	29.1471

Les tableaux IV.13 et IV.14 montrent les charges critiques de flambement pour une poutre encastéré-encastéré avec un noyau lourd.

Les résultats des charges critiques d'une poutre sandwich bi-encastéré avec un noyau lourd sont obtenus par la théorie proposée et comparer aux ceux de Vo et al [Vo, 2014 ; Vo, 2015].

A partir des tableaux IV.9 a IV.14, on peut conclure que l'efficacité du présent modèle est bien satisfaisante par rapport à celle présenté par Vo. [Vo, 2014 ; Vo, 2015].

Tableau .IV.13. Charges critiques de flambement P_{cr} d'une poutre sandwich encasté –encasté avec noyau lourd homogène ($L/h = 5$).

k	Theorie	1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-8-1
0	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	165.7137	165.7137	165.7137	165.7137	165.7137
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	154.5978	154.5978	154.5978	154.5978	154.5978
	Vo et al (2014)	152.1470	152.1470	152.1470	152.1470	152.1470
	Vo et al (2015)	160.2780	160.2780	160.2780	160.2780	160.2780
0.5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	102.0793	109.8888	116.1127	125.3367	146.8777
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	94.4652	101.7035	107.5141	116.1804	136.6076
	Vo et al (2014)	92.8833	99.9860	105.6790	114.1710	134.2870
	Vo et al (2015)	98.4559	105.9750	111.9680	120.8630	141.7880
1	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	74.4910	84.2031	92.5165	105.5315	137.4443
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	68.6650	77.6050	85.3186	97.4780	127.6257
	Vo et al (2014)	67.4983	76.2634	83.8177	95.7287	125.3860
	Vo et al (2015)	71.7654	81.0936	89.0834	101.6130	132.5510
2	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	52.7606	62.2868	71.4009	86.9540	128.1608
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	48.5114	57.2000	65.5961	80.0364	118.8061
	Vo et al (2014)	47.7010	56.2057	64.4229	78.5608	116.6580
	Vo et al (2015)	50.8183	59.9354	68.6743	83.6159	123.4770
5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	39.2032	46.5945	54.7453	70.8229	119.2304
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	36.0974	42.7203	50.1642	64.9913	110.3426
	Vo et al (2014)	35.5493	42.0033	49.2763	63.7824	108.2970
	Vo et al (2015)	37.8295	44.8488	52.6395	68.0510	114.7700
10	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	35.4627	42.1045	49.2629	64.7226	115.3670
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	32.7650	38.6182	45.1208	59.3329	106.6885
	Vo et al (2014)	32.3019	37.9944	44.3374	58.2461	104.6920
	Vo et al (2015)	34.2824	40.5544	47.3804	62.1959	111.0120

A partir de ses deux tableaux, on observe aussi que la poutre moyennement épaisse ($L/h=20$) donne des charges critiques du flambement P_{cr} assez grandes que ceux de la poutre épaisse ($L/h=5$).

Tableau .IV.14. Charges critiques de flambement P_{cr} d'une poutre sandwich encasté –encasté avec noyau lourd homogène ($L/h = 20$).

k	Theorie	1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-8-1
0	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	228.3777	228.3777	228.3777	228.3777	228.3777
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	213.5879	213.5879	213.5879	213.5879	213.5879
	Vo et al (2014)	208.9510	208.9510	208.9510	208.9510	208.9510
	Vo et al (2015)	210.7420	210.7420	210.7420	210.7420	210.7420
0.5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	128.3061	138.3757	147.0931	160.8884	195.9677
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	119.9188	129.3312	137.4835	150.3902	183.2318
	Vo et al (2014)	117.3030	126.5080	134.4810	147.1040	179.2350
	Vo et al (2015)	118.3530	127.6410	135.6840	148.4130	180.8010
1	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	89.7126	101.4032	112.3328	130.6555	180.3802
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	83.8241	94.7462	104.9626	122.0979	168.6366
	Vo et al (2014)	81.9927	92.6741	102.6650	119.4220	164.9490
	Vo et al (2015)	82.7434	93.5248	103.6060	120.5090	166.4060
2	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	61.5867	72.0716	83.2946	103.9198	165.4276
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	57.5336	67.3225	77.8079	97.0883	154.6386
	Vo et al (2014)	56.2773	65.8489	76.1020	94.9563	151.2500
	Vo et al (2015)	56.7986	66.4664	76.8166	95.8403	152.6000
5	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	46.0361	52.54716	61.8472	81.9806	151.3849
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	43.0119	49.0795	57.7618	76.5732	141.4945
	Vo et al (2014)	42.0775	48.0070	56.4958	74.8903	138.3880
	Vo et al (2015)	42.4596	48.4588	57.0343	75.6019	139.6370
10	Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	43.1931	47.4158	55.1536	74.0377	145.4102
	Present ($\varepsilon_z = 0$)	40.3659	44.2893	51.5090	69.1453	135.9027
	Vo et al (2014)	39.4930	43.3233	50.3811	67.6270	132.9170
	Vo et al (2015)	39.8436	43.7273	50.8611	68.2737	134.1220

Les figures IV.6, IV.7 et IV.8 montres la variation des charges critiques de flambement par rapport au paramètre de matériau des poutres sandwiches simplement appuyées et encasté- encasté, respectivement, avec des cœurs lourd et léger.

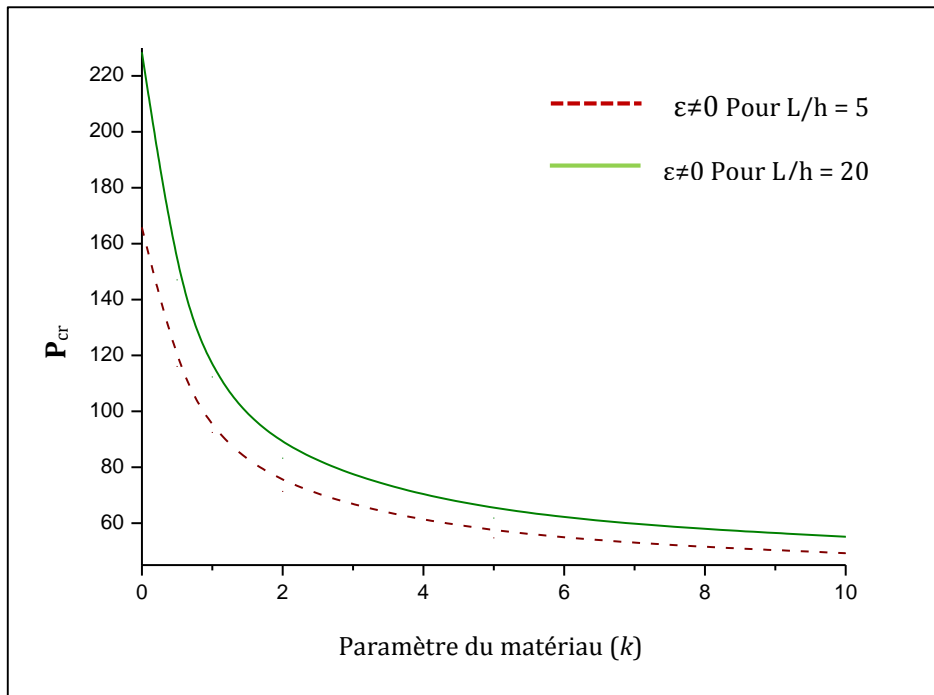


Figure. IV.6. Variation des charges critiques de flambement P_{cr} par rapport au paramètre de matériau k (1-1-1), d'une poutre sandwiche simplement appuyées avec un noyau lourd homogène

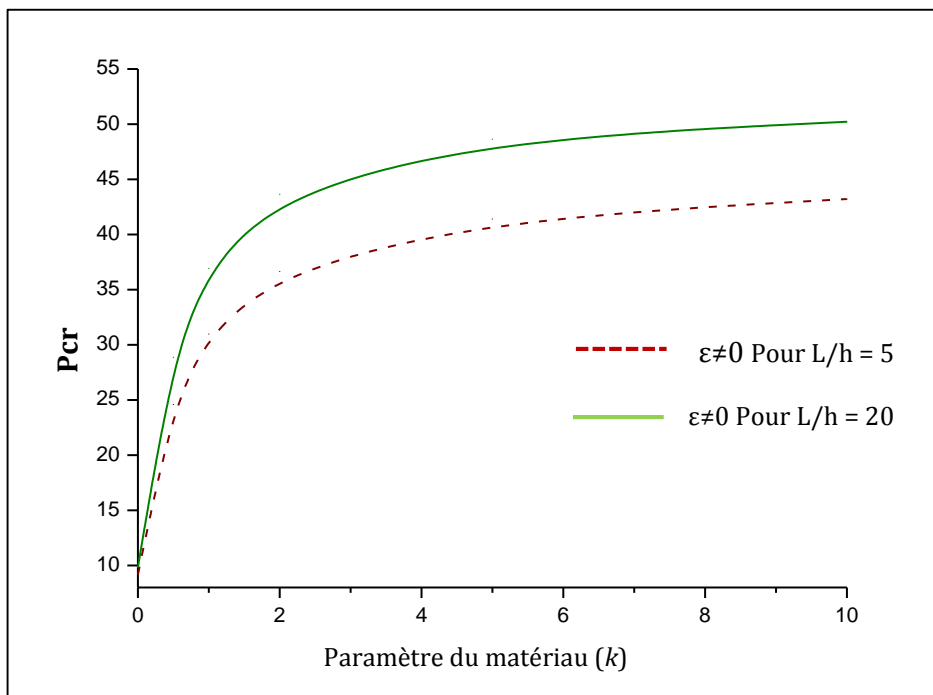


Figure. IV.7. Variation des charges critiques de flambement P_{cr} par rapport au paramètre de matériau k (1-1-1), d'une poutre sandwiche simplement appuyées avec un noyau léger homogène

A partir de ces figures (figures IV.6, IV.7), nous remarquons que la charge critique de flambement diminue au fur et à mesure que le paramètre de matériau k augmente lorsque le type de noyau est rigide, par contre une augmentation de cette charge a été observée lorsque le cœur de la poutre est léger.

A travers de ces figures, on observe aussi que les courbes de la poutre épaisse ($L/h = 5$) sont situées au-dessous des courbes de la poutre moyennement épaisse ($L/h = 20$), et s'écartent fortement dans la première phase de chargement.

On peut dire donc, que la charge critique de la poutre sandwich et dépend à l'épaisseur de cette dernière.

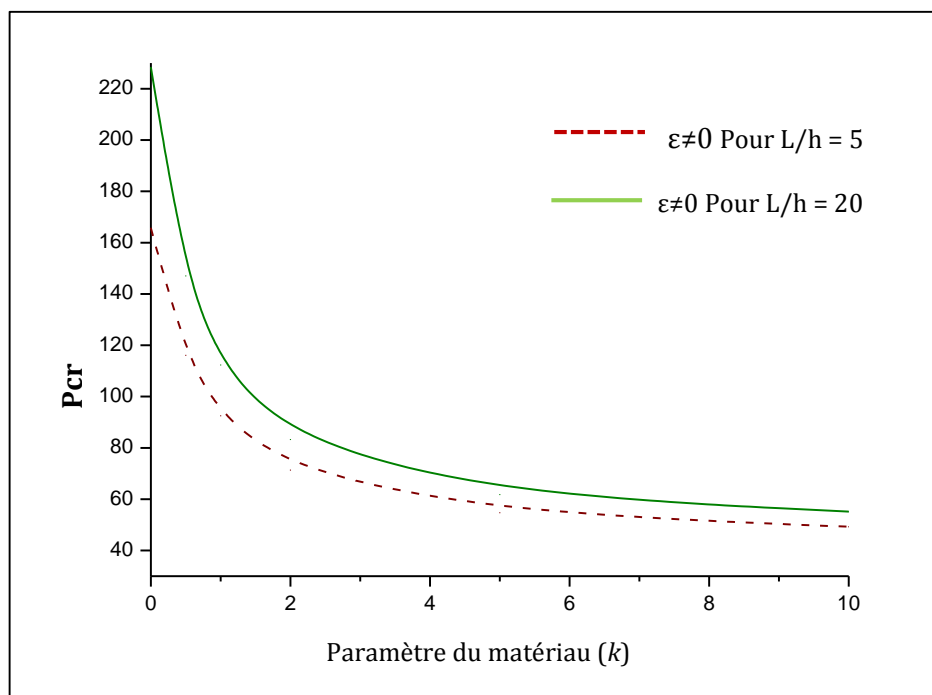


Figure. IV.8. Variation des charges critiques de flambement P_{cr} par rapport au paramètre de matériau k , d'une poutre sandwich (1-1-1) encasté-encasté avec un noyau lourd homogène

La Figure. IV.9 illustre l'effet de la déformation normale sur les charges critiques de flambement d'une poutre sandwich épaisse de type (1-1-1), avec un cœur rigide homogène appuyée-appuyée. Cette figure montre que l'effet de la déformation normale augmente la charge critique de la poutre sandwich.

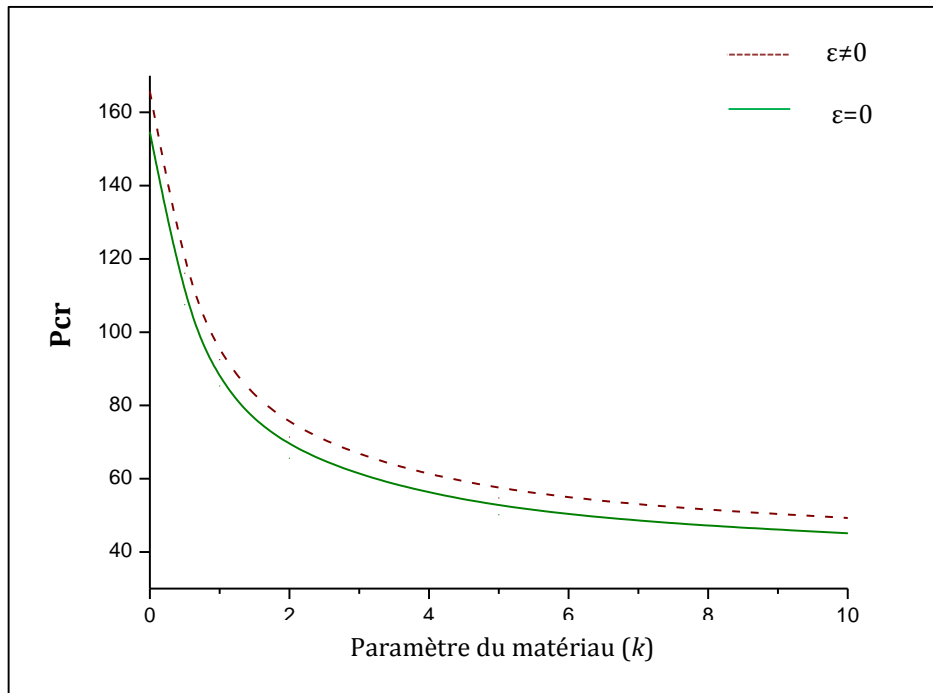


Figure. IV.9. Effet de la déformation normale sur les charges critiques de flambement P_{cr} d'une poutre sandwich (1-1-1), simplement appuyées avec un noyau lourd homogène ($L/h = 5$).

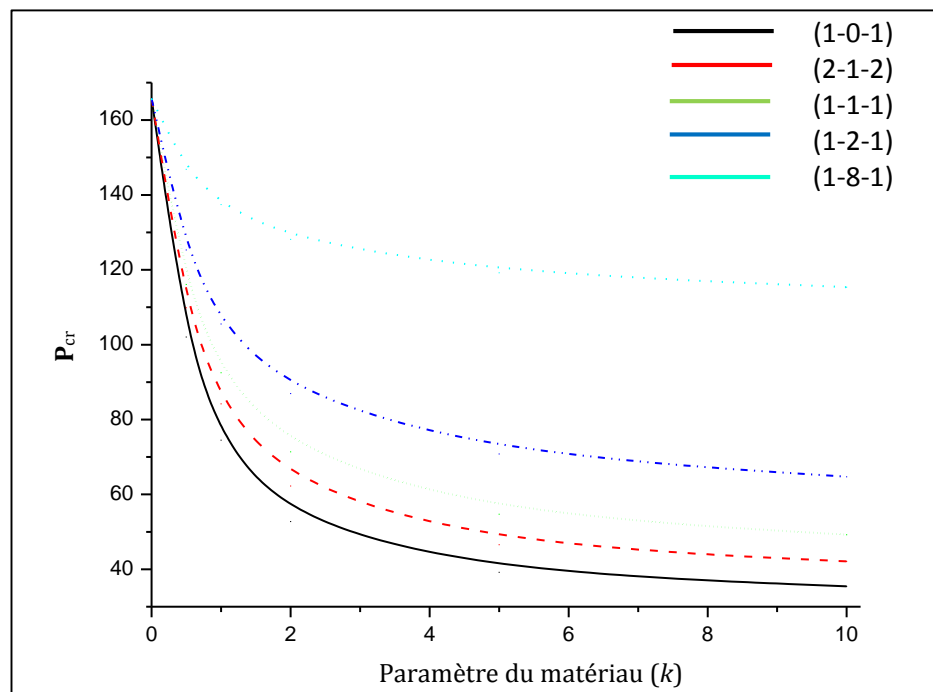


Figure. IV.10. Variation des charges critiques P_{cr} par rapport au paramètre de matériau k des différentes poutres sandwich simplement appuyées avec un noyau lourd homogène

La figure IV.10 montre la variation de la charge critique en fonction du paramètre matériel, des poutres sandwiches simplement appuyées, avec différents type de cœur. A partir de cette figure, on remarque que le paramètre de fréquence et de la charge critique diminue avec diminution du paramètre k pour tous les rapports d'épaisseurs. Il convient de noter que lorsque paramètre matériel supérieur à cinq ($k > 5$), la variation de ces deux paramètre devient très faible.

IV.3. Conclusion

La théorie présentée dans cette thèse est développée pour l'analyse de la vibration libre et du flambement d'une poutre sandwich en utilisant des fonctions hyperboliques.

Les effets de la déformation normale transverse, élancement ainsi que le rapport d'épaisseur peau-cœur-peau sur les charges critiques de flambement et les fréquences naturelles d'une poutre sandwich sont pris en considération.

Des équations du mouvement sont dérivées par le principe de minimisation des énergies. Des solutions analytiques de la vibration libre et du flambage sont obtenus pour des poutres sandwiches sous différentes conditions d'appuis ; ces conditions pris en considération en intégrant de nouvelles fonctions de forme.

En conclusion, nous pouvons dire que toutes les études comparatives ont démontré que la présente théorie proposée est non seulement précise, mais aussi efficace pour l'analyse de la vibration libre et du flambement des poutres sandwiches.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Dans le cadre de ce travail, nous avons développé une méthode analytique directe qui détermine les valeurs des forces critiques de flambage, les déplacements sous un chargement statique ainsi que les fréquences de vibration d'une poutre conçue en matériau anisotrope ; une poutre en FGM sandwich. La méthode utilise une fonction de forme assez nouvelle qui tient compte des conditions aux limites autres que le cas appuyé-appuyé. Le cas d'une poutre courte a été illustré sous les différentes sollicitations étudiées.

Comparée aux issues de la littérature, cette méthode analytique, sous conditions d'appuis C-C et S-S, a montré sa précision pour la détermination des forces critiques de flambage, ainsi que pour des fréquences de vibration d'une poutre qui sont à l'origine d'un éventuel délaminage des poutres conçues en composite conventionnel si elles dépassent une certaine valeur.

Les solutions mathématiques pour les problèmes des poutres courtes dépendant de la fonction de forme et sous différents conditions d'appuis sont assez restreintes ; ceci nous a conduits à présenter un nouveau modèle par rapport aux modèles analytiques existants basés sur des approximations du champ de déplacements classique sans prise en compte de la déformation normale. Cette méthode de résolution est basée sur une théorie de déformation de cisaillement trigonométrique.

Des solutions de forme close pour l'analyse de la vibration libre et du flambement des poutres sandwiches fonctionnellement graduées sont trouvées vérifiant les déplacements transversaux de cisaillement variant comme fonction parabolique suivant la hauteur de la poutre. le principe énergétique des travaux virtuels a été utilisé pour solutionner un problème et tirer les équations de mouvement.

Contrairement à la méthode de Navier qui ne donne que des solutions pour une poutre bi-simplement appuyée. Une fonction de forme utilisée nous a permis de trouver des solutions de la vibration et du flambement d'une poutre sous les conditions du bi-encastrement.

la validation et l'étude paramétrique de l'analyse ainsi faite avec des résultats d'autres recherches assez récentes nous ont permis de dégager les points suivants:

- Les fréquences de vibration obtenues dans le présent travail sans l'effet de déformation normal ($\epsilon_z = 0$) et le modèle de Vo et al. (2014) donnent des résultats proches les uns des autres ; sachant que les résultats obtenus par vo et al sont obtenus en fonction de modèle d'éléments finis.
- Par contre pour ceux qui tiennent compte de l'effet de déformation normale ($\epsilon_z \neq 0$) les fréquences de vibration obtenues par le présent modèle sont presque identiques avec celles obtenues par le modèle de Vo et al. (2015).

- On constate aussi que présent modèle sans effet de déformation normale ($\varepsilon_z = 0$) et le modèle de Vo et al. (2014) surestiment légèrement la fréquence de vibration pour une poutre épaisse ($L/h = 5$), en raison de la négligence l'effet de la déformation normal.
- On peut aussi conclure que les fréquences fondamentales naturelles augmentent quand la raideur du matériau augmente, ceci est expliquer par la variation de l'indice de puissance matérielle.
- En fonction du procédé d'industrialisation, il est à conclure, aussi, que l'approche monocouche utilisé s'avère plus adéquat aux matériaux à gradient fonctionnelle puisque la variation matérielle se fait de manière ponctuelle ; tandis que les pour stratifiés il est plus commode d'utiliser l'approche par couche pour mieux poser les conditions aux limites entre les couche.
- On note aussi que pour les poutres élancées, les résultats corroborent, et c'est du a l'atténuation de l'effet du cisaillement pour les poutres élancées.
- pour les poutres à noyau lourd homogène pour les deux cas, épaisses et moyennement épaisses, respectivement, et pour le cas d'appuis encastré –encastré, un bon accord entre les résultats de la fréquence de vibrations obtenues par le modèle présenté et les solutions du modèle numérique peut être remarqué.
- La théorie proposée sans effet de déformation normale ($\varepsilon_z = 0$) et le modèle de Vo et al (2014) donnent des solutions de chargement critique proches les uns des autres, ces résultats peuvent être en accord avec les résultats des poutres élancées pour la théorie qui tient compte de la déformation normale.

En perspective de ce travail, nous allons essayer d'étudier d'autres problèmes liés à la déformation normale ainsi qu'au gauchissement, et d'utiliser d'essayer de travailler pour trouver d'autres fonctions de formes pour étudier d'autres modes d'appuis tel que le cas encastré-libre, encastré-appuyée...etc

Nous envisageront aussi de :

- Prendre en compte l'effet de la porosité sur les propriétés matérielles ;
- Prendre en compte l'effet de la haute température ;
- Améliorer au mieux les fonctions de forme pour nous donner des résultats plus précisent en comparant aux autres méthodes numérique, avec un temps de calcul plus rapide ;
- On compte aussi maitriser un code de calcul numérique pour résoudre des formes de structure plus complexes.

À la fin, on espère que ce modeste travail reflète notre modeste contribution dans le domaine de recherches sur les matériaux composites (FGM), précisément leurs comportements vis à vis des conditions de chargements statiques et vibratoires.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Ait Amar Meziane, 2014] Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”, *J. Sandw. Struct. Mater.* 16(3), 293-318.
- [Ait Atmane, 2010] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., and Adda Bedia, E. A. (2010). “Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory.” *Int. J. Mech. Mater. Des.*, Vol. 6, No. 2, pp. 113-121.
- [Ait Atmane, 2011] AI Ait ATMANE « Vibration des structures composites en tenant compte de l’effet du cisaillement. » Thèse de Doctorat de l’université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2011.
- [Akavci, 2014 a] Akavci, S.S. (2014a), “An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation”, *Compos. Struct.*, 108, 667-676.
- [Akavci, 2014 b] Akavci, S.S. (2014b), “Thermal buckling a nalysis of functionally graded plates on an elastic foundation according to a hyperbolic shear deformation theory”, *Mech. Compos. Mater.*, 50(2), 197-212.
- [Ait yahia, 2015] Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 53(6), 1143-1165.
- [Attia, 2015] Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), “Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 187-212.
- [Benachour, 2011] Benachour, A., Daouadji, H.T., Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Meftah, S.A. (2011), “A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient”, *Compos. Part B*, 42(6), 1386-1394.
- [Bessaim, 2013] Bessaim, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Adda Bedia, E.A. (2013), “A new
- [Berthelot, 2005] Jean-Marie Berthelot. « Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures ». 4^{ème} Edition, Lavoisier ,2005
- [Bhangale, 2006] Bhangale, R.K. and Ganesan, N. (2006), “Thermoelastic buckling and vibration behavior of a functionally
- [Bouderba, 2013] Bouderba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013), “Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 14(1), 85-104.
- [Bourada, 2012] Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A. (2012), “A new four-variable refined plate
- [Bouiadjra, 2012] Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2012), “Thermal buckling of functionally graded plates according to a four-variable refined plate theory”, *J. Therm. Stress.*, 35(8), 677-694.
- [Bouiadjra, 2013] Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2013), “Nonlinear thermal buckling behavior of functionally graded plates using an efficient

- sinusoidal shear deformation theory”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 48(4), 547-567.
- [Bousahla, 2014]** Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., (2014), “A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates”, *International Journal of Computational Methods*, (In press).
- [Bréard, 2003]** J. Bréard, A. Saouab, G. Bouquet, ‘Numerical simulation of void formation in LCM’, *Composites: Part A*, Vol. 34, pp 517-523, 2003.
- [Chatin, 2001]** M .Chatin, "Matériaux composites – présentation générale", *Technique de l'ingénieur BT4*, 2000.
- [Chapuis, 2010]** Chapuis, B. .Contrôle Santé Intégré par méthode ultrasonore des réparations composites collées sur des structures métalliques Thèse de doctorat, 2010, Université de Paris 7.
- [Chen, 2009]** Chen, C.S., Hsu, C.Y., Tzou, G.J. (2009), “Vibration and stability of functionally graded plates based on a higher-order deformation theory”, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 28(10), 1215-1234.
- [Chen, 2007]** Chen, W.Q., Wang, H.M., Bao, R.H. (2007), “On calculating dispersion curves of waves in a functionally graded elastic plate”, *Composite Structures*, 81, 233–242.
- [Cho, 2002]** CHO, J. R. & HA, D. Y. 2002. Volume fraction optimization for minimizing thermal stress in Ni-Al₂O₃ functionally graded materials. *Materials Science and Engineering A*, 334, 147-155.
- [Dellal, 1983]** Dellal, F. and Erdogan, F. (1983), “The crack problem for a non homogeneous plane”, *J. Appl. Mech.*, 50(3), 609.
- [Draiche, 2014]** Draiche, K., Tounsi, A. and Khalfi, Y. (2014), “A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 17(1), 69-81.
- [Erdogan , 1995]** Erdogan, F. 1995. Fracture mechanics of functionally graded materials. *Composites engineering*, 5, 753-770.
- [El Meiche, 2011]** El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. and Adda Bedia, E.A. (2011), “A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, *Int. J. Mech. Sci.*, 53(4), 237-247.
- [Etemadi, 2009]** Etemadi, E., Khatibi, A.A. and Takaffoli, M. (2009), “3D finite element simulation of sandwich panels with a functionally graded core subjected to low velocity impact”, *Compos. Struct.*, 89(1), 28-34.
- [Fekrar, 2014]** Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2014), “A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates”, *Meccanica*, 49(4), 795-810.
- [Ghugal, 2011]** Ghugal, Y.M. (2011), “Buckling and vibration of plates by hyperbolic shear

- deformation theory”, J. Aerosp. Eng. Technol., 1(1), 1-12
- [Hadji, 2013]** HADJI LAZREG « Contribution à l'étude de la vibration des plaques sandwiches en FGM. » Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2013.
- [Hadji, 2013]** HADJI LAZREG « Analyse du comportement dynamique des poutres à gradient de propriétés type FGM. » Séminaire de Mécanique, SNM'13, 2013
- [Hebali, 2014]** Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), “A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, ASCE J. Eng. Mech., 140(2), 374-383.
- [Houari, 2013]** Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. (2013), “Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory”, International Journal of Mechanical Sciences, 76, 102–111.
- [Houari, 2011]** HOUARI MOHAMMED SID AHMED « Analyse des contraintes thermo-élastiques : lois des puissances. » Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2011.
- [Hadji, 2013]** HADJI LAZREG « Contribution à l'étude de la vibration des plaques sandwiches en FGM. » Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2013.
- [Hadji, 2013]** HADJI LAZREG « Analyse du comportement dynamique des poutres à gradient de propriétés type FGM. » Séminaire de Mécanique, SNM'13, 2013
- [Hebali, 2014]** Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), “A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, ASCE J. Eng. Mech., 140(2), 374-383.
- [Kaskas, 2010]** KESKAS « Etude de l'effet de cisaillement transverse sur le comportement des poutres composites. » Thèse Magister en génie civil de l'université Mentouri, Constantine, 2010.
- [Khalfi, 2014]** Khalfi, Y., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2014), “A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation”, Int. J. Comput. Method., 11(5), 135007.
- [Kettaf, 2013]** Kettaf, F.Z., Houari, M.S.A., Benguediab, M. and Tounsi, A. (2013), “Thermal buckling of functionally
- [Mahi, 2015]** Mahi, A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2015), “A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, Appl. Math. Model., 39(9), 2489-2508.

- [Natarajan, 2012] Natarajan, S. and Manickam, G. (2012), “Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory”, *Finite Elem. Anal. Des.*, 57, 32-42.
- [Nedri, 2014] Nedri, K., El Meiche, N. and Tounsi, A. (2014), “Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory”, *Mech. Compos. Mater.*, 49(6), 641-650.
- [Ouled Larbi, 2014] Ould Larbi Latifa « Etude comparative des différentes théories à ordre élevé pour la vibration libre des poutres FGM » Thèse de Doctorat de l’université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2013.
- [Ouled Larbi, 2013] Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), —An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 41, 421 – 433.
- [Pitakthapanaphong, 2002] Pitakthapanaphong, S. & Busso, E. P. 2002, Self-consistent elasto-plastic stress solutions for functionally graded material systems subjected to thermal transients, *J. Mech. Phys. Solids*, 50: 695-716. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50, 695-716; 2002.
- [Reddy, 1984] Reddy, J.N., 1984. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J Appl Mech* 51(4), 745–52.
- [Reddy, 2002] Reddy, J.N. (2002), *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*, John Wiley & Sons Inc.
- [Reddy, 2004] Reddy, J.N. (2004), *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, (2nd Ed.), CRC Press, Boca Raton, FL, USA.
- [SALLAI, 2011] SALLAI BEN-OUMRANE « Etude et analyse des structures en FGM : Comparaison entre E-FGM, P-FGM et S-FGM. » Thèse de Doctorat de l’université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2011.
- [Saidi, 2015] SAIDI Hayat « Analyse de l’influence du cisaillement transverse et des déformations normales sur le comportement thermomécanique des plaques FGM » Thèse de Doctorat de l’université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2015
- [Sankar, 2011] Sankar, B. V. 2001. An elasticity solution for functionally graded beams, *Composites science and technology*, 61, 689-696.
- [Sayyad, 2011] Sayyad, A.S. and Ghugal, Y.M. (2011), “Flexure of thick beams using new hyperbolic shear deformation theory”, *Int. J. Mech.*, 5, 113-122.
- [Tounsi, 2013] Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Anwar Bég, O. (2013), “A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates”, *Aerosp. Sci. Technol.*, 24(1), 209-220.
- [Vo, 2014] Vo, T.P., Thai, H.T., Nguyen, T.K., Maheri, A. and Lee, J. (2014), “Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory”, *Eng. Struct.*, 64, 12-22.

- [Vo, 2015] Vo, T.P., Thai, H.T., Nguyen, T.K., Inam, F. and Lee, J. (2015), "A quasi-3D theory for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams", *Compos. Struct.*, 119, 1-12.
- [Xiang, 2013] Xiang, S., Kang, G.-w., Yang, M.-s. and Zhao, Y. (2013), "Natural frequencies of sandwich plate with functionally graded face and homogeneous core", *Compos. Struct.*, 96, 226-231
- [Yaghoobi, 2013] Yaghoobi, H. and Yaghoobi, P. (2013), "Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: An analytical approach", *Meccanica*, 48(8), 2019-2035.
- [Yang , 2006] J. Yang, Y. Jia, S. Sun, D. Ma, T. Shi, L. An, 'Mesoscopic simulation of the impregnating process of unidirectional fibrous preform in resin transfer molding', *Materials Science and Engineering*, pp 515-520, 2006.
- [Zidi , 2014] Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Anwar Bég, O. (2014), "Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory", *Aerosp. Sci. Technol.*, 34, 24-34.