

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Hassiba Ben Bouali – Chlef
Faculté des Sciences et Sciences de l'Ingénieur
Département de Génie mécanique

7411-4/12

MEMOIRE

*Présentée pour obtenir le Diplôme de Magister en Génie Mécanique
Option: Transfert Thermique*

Présentée par: **ROUDANE Mohamed**

Thème :

***ETUDE COMPARATIVE DE TROIS MODELES DE
TURBULENCE : RSTM, ASM et (K-ε) POUR UN JET LIBRE
TURBULENT TOURBILLONNAIRE ET ISOTHERME***

Soutenue le: 19 Mai 2004

Membres de jury :

● YOUSFI Abdelkader	Professeur à l'U.S.T. Oran	Président
● IMINE Omar	Professeur à l'U.S.T. Oran	Examinateur
● ADJLOUT Lahouari	Professeur à l'U.S.T. Oran	Examinateur
● BETTAHAR Ahmed	Professeur à l'Université H.B.B. Chlef	Examinateur
● ZAARAOUI Abdelkader	M.A. Chargé de Cours à l'Université H.B.B. Chlef	Examinateur
● LOUKARFI Larbi	Professeur à l'Université H.B.B. Chlef	Rapporteur

SOMMAIRE

Résumé	
Remerciements	
Nomenclature	
Introduction générale :	01
Chapitre I : Etude générale théorique :	04
1-1) Approches de la mécanique des fluides :	04
1-2) Modélisation :	05
1-3) Méthode numérique :	05
1-4) Types des systèmes d'écoulements :	05
1-5) Vue générale des jets :	06
1-5-1) Jet libre tourbillonnaire :	06
1-5-2) Caractère turbulent du jet libre tourbillonnaire :	06
1-5-3) Nombre de Swirl :	07
1-5-4) Zone de recirculation :	08
1-5-5) Epanouissement du jet tourbillonnaire :	08
1-6) Procédure générale de solution numérique :	09
1-7) Conditions initiales et aux limites :	10
1-8) Relation cohérence – stabilité et convergence :	11
1-9) Objectif de l'étude :	12
Chapitre II : Modélisation mathématique :	14
2-1) Introduction :	14
2-2) Equations fondamentales d'écoulement :	14
2-3) L'approche statistique de la turbulence :	16
2-4) Equation de l'écoulement instantané et moyen :	18
2-5) Modélisation de la turbulence:	19
2-5-1) Equations de base :	19
2-5-2) Modélisation :	19
2-5-3) Modèle à deux équations de transport K- ϵ :	20
2-5-4) Modèle des tensions de Reynolds RSTM :	22
2-5-5) Modèle algébrique des contraintes de Reynolds ASM :	30
Chapitre III : Modélisation numérique :	36
3-1) Introduction :	36
3-2) Formulation mathématique :	36
3-2-1) Termes de source du modèle K- ϵ :	37
3-2-2) Termes de source du modèle RSTM :	38
3-2-3) Termes de source du modèle ASM :	41
3-3) Maillage :	42
3-4) Discrétisation des équations de transport :	45
3-4-1) Schémas de discrétisation :	47
3-4-1-1) Introduction :	47
3-4-1-2) Schéma aux différences centrées (CDS) :	48
3-4-1-3) Schéma aux différences décentrées (Upwind) :	49

3-4-1-4) Schéma Hybride (HDS) :	50
3-4-1-5) Justification du choix du schéma de discrétisation :	51
3-5) Expression du terme de source pour l'écoulement :	52
3-5-1) Nécessité de la linéarisation du terme de source :	52
3-5-2) Exemple d'expression du terme de source :	53
3-5-3) Exemple de discrétisation de l'équation générale de transport :	55
3-6) Traitement de la pression (algorithme SIMPLE):	57
3-7) Solution numérique du système algébrique :	61
3-8) Sous relaxation:	64
3-9) Etapes de solution :	65
3-10) Structure générale du code de calcul :	65
3-11) Critère de convergence :	68
3-12) Organigrammes du programme de calcul :	69
Chapitre IV : Résultats et comparaison des performances :	73
4-1) Introduction :	73
4-2) Données expérimentales :	73
4-3) Domaine de calcul :	75
4-4) Conditions initiales et aux limites :	76
4-5) Paramètres et critère de convergence :	84
4-6) Résultats et comparaisons :	80
4-7) Applications et comparaisons des performances :	96
Conclusion générale :	104
Références bibliographiques :	106

RESUME :

Les jets turbulents avec tourbillonnement présentent un intérêt particulièrement important et pratique dans divers domaines de l'industrie.

La présente étude concerne la comparaison entre trois modèles de turbulence pour la prévision d'un jet axisymétrique libre turbulent avec tourbillonnement. La méthode numérique des volumes finis de PATANKAR (1980) est utilisée pour la résolution des équations couplées et non linéaires qui régissent ce type d'écoulement. Les termes des flux convectifs et diffusifs dans les équations de Navier Stokes sont discrétisés avec le schéma Hybride. La séquence itérative adopte l'algorithme SIMPLE pour la résolution du système d'équations.

Les modèles de turbulence utilisés sont le modèle K- ϵ , le modèle ASM et le modèle RSTM. Les résultats numériques obtenus sont comparés à des résultats expérimentaux disponibles. Le calcul est fait à l'aide d'une version du code numérique TEACH adapté à la présente configuration.

Les trois modèles donnent des résultats satisfaisants. Peu de bénéfice est obtenu avec l'utilisation d'un modèle de haut niveau tel que le ASM et surtout le RSTM.

ملخص:

نظرا لما يمثله جريان السوائل الهائجة في حالة دوران من فوائد جد هامة وتطبيقية في مختلف الميادين الصناعية، تطرقنا من خلال هذه الدراسة إلى المقارنة بين ثلاثة نماذج مختلفة "Modèles de turbulence" من خلال تطبيقها عن طريق دراسة عددية على جريان متناظر، حر وهائج في حالة دوران حيث استعملت نظرية الأحجام المنتهية لـ "Patankar 1980" لحل مختلف المعادلات المرتبطة وغير الخطية التي تدير هذا النوع من الجريان. وتم تحويل مختلف أجزاء معادلات "نافير ستوكز" إلى معادلات جبرية عن طريق رسم « Hybride » واستعمال طريقة « SIMPLE » لحل نظام المعادلات.

النماذج المستعملة خلال هذه الدراسة هي: نموذج (K- ϵ)، نموذج (ASM) ونموذج (RSTM) حيث قورنت النتائج العددية المحصل عليها مع نتائج تجريبية موجودة. مع العلم أن حساب النتائج العددية تمت عن طريق استعمال نسخة من البرنامج العددي « TEACH » الذي تم تكيفه ليتلاءم مع الحالة المدروسة. أعطت النماذج المستعملة نتائج مقبولة. وحصلنا على نتائج أحسن باستعمال نموذج دو مستوى عالي

كالنموذج ASM وخاصة النموذج RSTM.

Remerciements

En premier lieu je tiens à remercier Dieu qui nous a donné la force pour achever ce travail.

Ce travail a été effectué sous la direction de monsieur : LOUKARFI Larbi, professeur à l'université Hassiba Ben Bouali de Chlef.

Je tiens à le remercier vivement de m'avoir encadré et à lui exprimer toute ma reconnaissance particulière pour sa disponibilité généreuse et pour les précieux conseils et encouragements au cours de ce travail.

J'exprime ici ma reconnaissance et mes remerciements à Monsieur : YOUSFI Abdelkader, professeur à l'U.S.T. Oran d'avoir bien voulu m'honorer en acceptant la présidence de jury.

Mes vifs remerciements à tous les membres de jury qui me font l'honneur d'avoir accepter d'examiner et juger ce modeste travail :

- Monsieur IMINE Omar, professeur à l'U.S.T. Oran ;
- Monsieur ADJLOUT Lahouari, professeur à l'U.S.T. Oran ;
- Monsieur BETTAHAR Ahmed, professeur à l'Université de Chlef ;
- Monsieur ZAARAOUI Abdelkader, M.A. Chargé de Cours à l'Université de Chlef.

En fin je tiens à remercier tout ceux qui m'ont aidé, de près ou de loin, pour réaliser ce travail.

Nomenclature

Notations latines :

$a_{e,w,s,n}$:	Aires des interfaces du volume de contrôle
$a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, e_{ij}, f_{ij}$:	Coefficients de l'équation discrétisée en écriture indicielle
$A_{P,E,W,N,S}$:	Coefficients de l'équation discrétisée.
$C_{\mu}, C_1, C_2, C_K, C_S$:	Constantes des modèles de turbulence.
$C_{\epsilon}, C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}, \sigma_k, \sigma_{\epsilon}$	
D :	Diamètre de l'orifice de sortie de jet : [m]
$D_{e,w,s,n}$:	Flux diffusifs à travers les faces (e, w, n, s).
D_{ij} :	Tenseur de diffusion.
e, w, s, n :	Faces : Est, Ouest, Sud, Nord du volume de contrôle.
$F_{e,w,n,s}$:	Flux convectifs à travers les faces (e, n, w, s).
h :	Hauteur de la partie à mailler.
I, J :	Indice donnant la position du nœud P.
$J_{e,w,n,s}$:	Densités de flux totaux à travers les faces (e, w, n, s).
J_m :	Nombre de pas dans la direction (r).
K :	Energie cinétique turbulente : [m ² /s ²].
l_m :	Longueur du mélange de Prandtl.
M :	Résidu de masse dû au champ approché de pression.
Nr :	Nombre total des nœuds dans la direction (x).
Nr :	Nombre total des nœuds dans la direction (r).
P* :	Pression approchée : [N/m ²].
P, E, W, N, S,	Nœuds aux centres des volumes de contrôle considérés
NW, NE, SW, SE :	et nœuds adjacents
p* :	Correction de pression : [N/m ²].
P_e :	Nombre de Peclet.
P_{ij} :	Taux de production des contraintes de Reynolds par interaction directe avec le taux moyen de déformation
P_{KK} :	Taux moyen de production de l'énergie cinétique de turbulence.
q :	Raison de progression géométrique utilisée pour dimensionner la section de maillage.
Q_0 :	Débit d'écoulement : [m ³ /s].
r(j) :	Cordonnées de maillage.
Re :	Nombre de Reynolds.
R_{ij} :	Terme additif à l'équation de transport développée des contraintes de Reynolds résultants de la transformation de l'équation des coordonnées planes aux coordonnées axisymétriques.
\bar{S} :	Terme moyen de source linéarisé.
S_{Φ} :	Terme de source dans l'équation générale de Φ .

Nomenclature

S_C :	Partie constante du terme de source linéarisé.
S_p :	Coefficient de pente du terme de source linéarisé .
U, V, W :	Composantes de vitesse moyenne dans la direction (i, j, k) : [m/s].
u_i :	Fluctuation de vitesse moyenne dans la direction (i) : [m/s]
u'_i :	Correction de la vitesse dans la direction (i) (par l'algorithme Simple) : [m/s]
u_i^* :	Vitesse approchée dans direction (i) : [m/s].
$\overline{u_i u_j}$:	Tenseur de contraintes de Reynolds : [m ² /s ²].

Notations grecques :

Φ_{ij}^* :	Champ de non convergence résultant des itérations précédentes.
Γ_ϕ :	Coefficients de diffusion dans l'équation générale.
$\overline{\Phi_P}$:	Corrections uniformes.
ρ :	Masse volumique : [kg/ m ³].
ε :	Taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence : [m ² /s ²]
Φ :	Variable générale du transport (instantané).
ν :	Viscosité cinématique : [m ² /s]
μ :	Viscosité dynamique : [kg/s.m].
δ_{ij} :	Symbole de Kronecker.
ε_{ij} :	Tenseur de dissipation visqueuse des contraintes de Reynolds
Φ_{ij} :	Corrélation pression – taux de déformation.
$\Phi_{ij,1}$:	Retour linéaire des contraintes isotropiques de Reynolds.
$\Phi_{ij,2}$:	Retour linéaire du taux de production des contraintes isotropiques de Reynolds.
$\Phi_{ij,w}$:	Terme représentant l'effet de frontière solide simultanément sur ($\Phi_{ij,1}$, $\Phi_{ij,2}$)
ν_t :	Viscosité cinématique turbulente : [m ² /s].
μ_t :	Viscosité dynamique turbulente : [m ² /s].
κ :	Constante de Von Kármán.

Introduction Générale

INTRODUCTION :

La majorité des écoulements d'intérêts pratiques sont des écoulements turbulents qui contiennent une ou plusieurs zones de recirculation et qui peuvent être décrits par des équations aux dérivées partielles du type elliptique : une équation de continuité et deux (ou trois selon le nombre de dimensions) équations de quantité de mouvement.

Les écoulements turbulents libres avec recirculation se distinguent par des intensités de turbulence très élevées, cela entraîne alors une situation d'écoulement complexe qui pose une obligation à la modélisation numérique de la turbulence. Ils sont souvent rencontrés dans les champs où il n'existe aucun effet direct de parois. Ces parois peuvent influencer indirectement l'écoulement et peuvent créer un modèle d'écoulement libre. Ces écoulements sont caractérisés sur le plan physique par les propriétés suivantes :

- L'écoulement s'effectue dans un domaine présentant une distorsion géométrique orthogonale à la direction principale de vitesse.
- Les frontières de l'écoulement sont libres en totalité.

La turbulence est intimement liée à son mouvement, elle ne se produit que lorsque le nombre de Reynolds représentatif de l'écoulement est suffisamment grand, un effet essentiel de la turbulence est l'accroissement spectaculaire de la diffusion (turbulences) au sein du fluide (des échanges de toute nature entre les diverses parties de l'écoulement). Cette diffusion turbulente entraîne une homogénéisation très rapide du milieu.

Les équations fondamentales régissant l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible sont les équations de Navier Stokes et celle de continuité qui s'appliquent aux écoulements turbulents aussi bien qu'aux écoulements laminaires. Ces équations font apparaître un nouveau terme appelé tenseur des tensions de Reynolds, dont la forme est non connue a priori et ne peut être déterminé par les principes de conservation. Les composantes de ce tenseur sont reliées non seulement aux propriétés physiques du fluide, mais aussi aux conditions locales de l'écoulement.

Ces nouvelles difficultés ont poussé les chercheurs à ajouter de nouvelles relations « de conservation de la turbulence » aux équations moyennes de continuité, quantité de

mouvement et d'énergie : équation de l'énergie cinétique de turbulence, équation du taux de dissipation de l'énergie cinétique et équation des tensions de Reynolds.

Comme ces équations sont très complexes avec beaucoup de termes de corrélation non connus, ceci a donné naissance à ce que l'on appelle la modélisation de turbulence. Boussinesq (1877) fut le premier à suggérer que les contraintes turbulentes peuvent être reliées aux contraintes moyennes à travers une viscosité apparente turbulente ou viscosité de tourbillon.

Les modèles de turbulence pour fermer les équations de Reynolds peuvent être divisées en deux catégories :

- 1- Les modèles utilisant l'hypothèse de Boussinesq et qui sont appelés modèles de viscosités turbulente (parmi ces modèles on peut citer le modèle à deux équations ou modèle K- ϵ).
- 2- La deuxième catégorie englobe les modèles connus sur l'appellation de modèles des contraintes de Reynolds. De ces modèles on peut citer le modèle des contraintes de Reynolds (RSTM) et le modèle dit modèle algébrique des contraintes (ASM).

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés à la prévision numérique d'un jet turbulent fortement tourbillonnaire libre avec trois modèles de turbulence (RSTM, ASM et K- ϵ). Les résultats numériques de ces modèles sont comparés avec des résultats expérimentaux dans le but de juger la performance de chaque modèle par rapport aux autres. La référence expérimentale utilisée dans le présent travail pour valider les trois modèles de turbulence est celle obtenue par Sislian et Cusworth [01], qui ont mesuré expérimentalement les trois composantes de vitesses, les six composantes de contraintes de Reynolds et l'énergie cinétique de turbulence, pour un écoulement d'un jet libre isotherme axisymétrique avec et sans tourbillonnement (Swirl) en utilisant l'anémométrie Laser.

Nous nous sommes appuyés dans notre travail à la fois sur le progrès dans le domaine de la programmation numérique en utilisant un code numérique, adapté à la présente configuration, comme support de travail et sur des méthodes récentes dans le domaine des techniques de résolutions numériques.

CHAPITRE I

Etude Générale Théorique

I-1 APPROCHES DE LA MECANIQUE DES FLUIDES :

Jusqu'aux années soixante la discipline de la mécanique des fluides était basée sur deux approches fondamentales qui sont, la théorie et l'expérience. Cependant, le progrès réalisé sur les ordinateurs, combiné au développement de la précision numérique des algorithmes, a révolutionné la manière avec laquelle est étudiée et pratiquée la mécanique des fluides aujourd'hui. Une nouvelle approche fondamentale est introduite - l'approche numérique - dont l'objet est la prévision et l'étude des écoulements réels, par résolution numérique des modèles mathématiques sur ordinateurs.

Ils existent donc trois approches pour résoudre un problème de mécanique des fluides. L'approche théorique, l'approche expérimentale et l'approche numérique. Chaque une a ses avantages et ses inconvénients. Dans la mesure du possible, la meilleure méthode consiste à étudier un problème par ces trois approches.

La mécanique des fluides numérique, est aujourd'hui partenaire égal au même titre que l'expérience et la théorie aussi bien dans l'analyse, que dans la solution des problèmes. Sa vocation et son rôle sont de compléter les autres approches fondamentales, et ne pourra jamais remplacer l'une d'elles. Elle a pour avantage d'avoir un coût relativement réduit par rapport aux méthodes expérimentales. Toutes les données du problème sont contrôlées par l'utilisateur et les résultats peuvent être obtenus dans tous les points du domaine d'étude. Les inconvénients sont que les résultats sont presque toujours des approximations. Celles-ci sont dues aux limitations inhérentes de l'ordinateur (arrondis, temps de calcul, capacité de mémoire) ou aux erreurs liées aux méthodes numériques elles mêmes (discrétisation, résolution des équations).

Le progrès futur de la mécanique des fluides restera dépendant de l'équilibre de ces trois approches (théorie, expérience et numérique), et avec le numérique aidant à interpréter et comprendre les résultats de la théorie et de l'expérience.

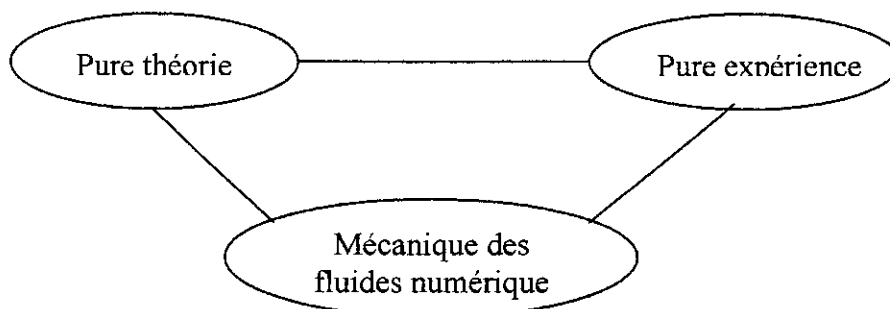


Fig. (1-1) : Les trois dimensions de la mécanique des fluides.

1-2 MODELISATION :

En général, tout écoulement turbulent est décrit par des équations différentielles aux dérivées partielles. Pour résoudre les équations instantanées de Navier- Stokes, on s'oriente vers la modélisation de la turbulence. Par définition, un modèle de turbulence est un système additionnel des équations algébriques aux dérivées partielles permettant le calcul des paramètres liés à la turbulence comme :

- Les contraintes de Reynolds.
- L'énergie cinétique turbulente.
- Le taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente.

1-3 METHODE NUMERIQUE :

Vu l'énorme avantage que présente l'approche numérique par rapport aux autres approches, celle ci est devenue la science de base que les chercheurs utilisent dans leurs travaux.

Actuellement, il existe trois méthodes numériques modernes :

- Méthode des volumes finis
- Méthode des différences finies
- Méthodes des éléments finis.

La méthode des volumes finis présente l'avantage d'être efficace, stable, convergente et préserve le principe de conservation de tout scalaire transportable dans le domaine d'écoulement, ce qui n'est pas le cas pour les autres méthodes numériques.

1-4 TYPES DES SYSTEMES D'ECOULEMENTS :

On remarque trois types de système d'équations différentielles aux dérivées partielles dans la mécanique des fluides, qui expriment leur comportement mathématique. Le système d'équations peut être classé comme :
Hyperbolique, parabolique ou elliptique.

Une équation quadratique est obtenue à partir du déterminant du système d'équation en utilisant la loi de Cramer. La solution de cette équation du second degré passe par son déterminant qui classe directement le type du système d'équation.

La forme générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) s'écrit :

$$A \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + E \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0 \quad (1-1)$$

- 1- Le système d'équations (EDP) est hyperbolique si : $B^2 - 4 \cdot A \cdot C < 0$
- 2- Le système d'équations (EDP) est parabolique si : $B^2 - 4 \cdot A \cdot C = 0$
- 3- Le système d'équations (EDP) est elliptique si : $B^2 - 4 \cdot A \cdot C > 0$

Pour le système d'équation elliptique, la solution en un point quelconque du domaine d'étude, est influencé par toutes les conditions aux limites. Ces équations souvent gouvernent l'écoulement visqueux incompressible et stationnaire comme c'est le cas pour cette étude.

I-5 VUE GENERALE DES JETS :

Un jet est connu comme étant le mouvement d'un fluide s'échappant soudainement d'un milieu statique.

La forme de l'orifice d'échappement, la répartition de vitesses au niveau de l'entrée et le régime d'écoulement (laminaire ou turbulent) constituent les conditions initiales du jet. Pour un jet avec absence d'obstacles, on distingue deux cas de conditions aux limites :

- Jet confiné : existence d'effet paroi.
- Jet libre : débouchant à l'air libre ou bien les parois sont suffisamment éloignées.

I-5-1 Jet libre tourbillonnaire :

Un jet libre tourbillonnaire est un jet avec orifice circulaire et existence d'un Swirl (tourbillonnement). L'écoulement est symétrique par rapport à l'axe et avec un régime permanent.

I-5-2 Caractère turbulent du jet libre tourbillonnaire :

L'expérience de Reynolds a montré que la transition vers la turbulence est influencée par quatre paramètres principaux :

- La densité du fluide : ρ
- La vitesse moyenne de l'écoulement : V
- Le diamètre de l'écoulement : d
- La viscosité du fluide : μ

A partir de ces quatre paramètres, il est former le nombre additionnel de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho \cdot V \cdot d}{\mu}$$

La valeur de ce nombre nous donne une idée suffisante sur le régime d'écoulement (laminaire, transitoire ou turbulent).

1-5-3 Nombre de Swirl :

Le tourbillonnement est caractérisé par un nombre sans dimension appelé le nombre de Swirl (S) qui est le rapport entre le moment angulaire et le moment axial.

Le nombre de Swirl (S) est calculé par l'expression suivante :

$$S = \frac{\int r^2 \cdot U \cdot W \cdot dr}{R \cdot \int r \cdot (U^2 - 0,5 W^2) \cdot dr}$$

Où :

U et W représentent respectivement la vitesse axiale et tangentielle du jet.

R : représente le rayon de l'orifice du jet.

Dans la majorité des cas, la valeur de S est supérieure ou égale à 0.6 et au dessous de cette valeur, le swirl n'est pas tellement intéressant.

D'après Rodi [03] et Amal [04], plus le nombre de Swirl (S) augmente, plus les composantes de la vitesse U et W tendent vers 0, la vitesse tangentielle W diminuant rapidement que la vitesse axiale U.

Grandmaison [05] mesure l'intensité du nombre de Swirl a des différents ouvertures des angles d'ailettes placées à l'origine de soufflage d'un swirlig-jet, il note que pour des angles de 30°, 45°, 60° et 65° correspondent respectivement les nombres de Swirl 0.22, 0.36, 0.61 et 0.68 et signale que seulement les deux derniers nombres provoquent le phénomène de recirculation contrairement aux autres nombres.

1-5-4 Zone de recirculation :

L'évolution d'un Swirling - jet débouchant dans un atmosphère au repos donne naissance à une zone appelée zone de recirculation, qui est manifestée par la formation des bulles elliptiques de part et d'autre de l'axe longitudinal du jet.

A cause de la symétrie de révolution, les bulles sont de même taille et la pression qui y règne reste largement inférieure à la pression atmosphérique. Le foyer de la zone de recirculation dépend de l'accélération du swirling.

En effet, plus le swirling est fort, plus la zone de recirculation devient importante [02].

1-5-5 Epanouissement du jet tourbillonnaire :

Pratte et Keffer [06] montrent qu'un jet tourbillonnaire est mieux épanoui qu'un jet non tourbillonnaire ($S=0$). En effet, le paramètre S caractérise le jet tourbillonnaire, plus que ce nombre augmente, plus vite se fait l'épanouissement.

Selon Loukarfi [07], l'inclinaison des ailettes génératrices du Swirl, provoque à la sortie des diffuseurs de fortes turbulences et donc un rapide épanouissement latéral du jet résultant.

Sur la figure ci dessous, on a tracé la droite $r/D=f(x/D)$ pour $S=0.79$ afin de montrer l'épanouissement du jet.

Il est notable que le jet avec fort Swirl ($S=0.79$) est mieux développé qu'un jet à faible Swirl ou sans Swirl.

Les équations des droites représentant l'épanouissement du jet libre adaptées des résultats de Sislian et Cusworth [01] sont données comme suit :

- Jet libre sans Swirl ($S=0$) :
$$\frac{r}{D} = 0.29 \left(\frac{x}{D} \right) + 0.44$$

- Jet libre avec faible Swirl ($S=0.4$) :
$$\frac{r}{D} = 0.39 \left(\frac{x}{D} \right) + 0.65$$

- Jet libre avec fort Swirl ($S=0.79$) :
$$\frac{r}{D} = 0.46 \left(\frac{x}{D} \right) + 0.79$$

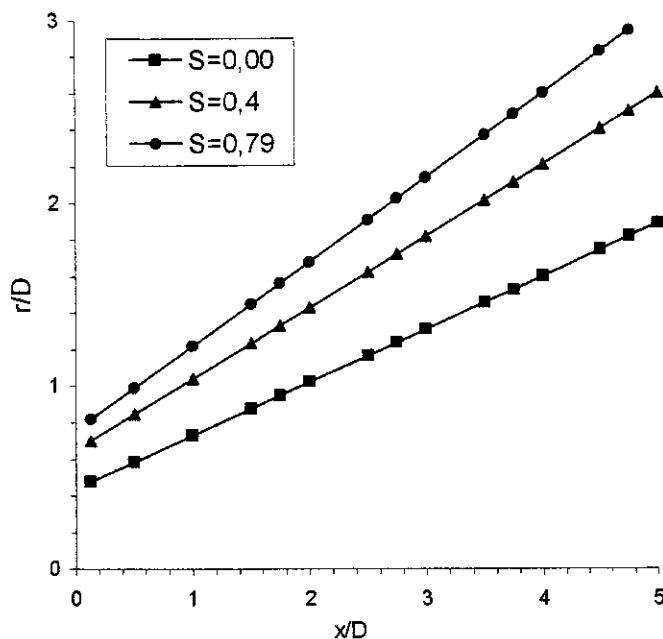


Fig. (1-2) : Epanouissement du jet

La pente de ces droites augmente à mesure que le nombre de Swirl augmente.

On peut conclure d'après la paragraphe (I-5) que :

- Le Swirl est le paramètre le plus important dans le jet tourbillonnaire pour les avantages qu'il procure dans les applications diverses.
- Comparativement au jet libre classique, le jet libre avec tourbillonnement est mieux épanoui. Il augmente les intensités de turbulence et les contraintes de cisaillement, ce qui permet de générer un plus grande surface airée dans le cas de climatisation et un équilibre du jet est vite atteint par diminution de la vitesse axiale d'une manière rapide, ce qui assure un confort meilleur.

I-6: PROCEDURE GENERALE DE SOLUTION NUMERIQUE :

La procédure de calcul pour l'obtention d'une solution numérique est comme suit :

- 1- On doit convertir les équations différentielles partielles continues et les conditions auxiliaires en un système direct des équations algébriques. Cette étape est appelée « discrétisation » qui utilise dans le cas de cette étude la méthode des volumes finis.

- 2- La deuxième étape nécessite une méthode de résolution du système des équations algébriques. Dans ce cas on utilise une méthode itérative basée sur l'algorithme de Thomas [08] et celle de SIMPLE [09]. La solution numérique approximative converge vers la solution exacte quand l'espacement de maillage tend vers zéro.

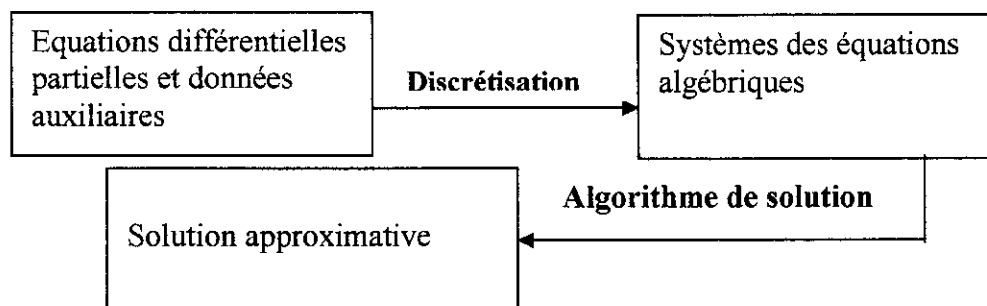


Fig. (1-3) : Etapes de calcul numérique

1-7 CONDITIONS INITIALES ET CONDITIONS AUX LIMITES :

Les conditions initiales sont d'une manière ou d'une autre, le point de départ pour obtenir la solution à l'intérieur du domaine du calcul.

Pour la plupart des écoulements gouvernés par des équations aux dérivées partielles elliptiques (Equations de Navier- Stokes pour le cas étudié), ces équations nécessitent pour leurs résolutions des conditions aux limites pour chaque frontière limitant le domaine de calcul.

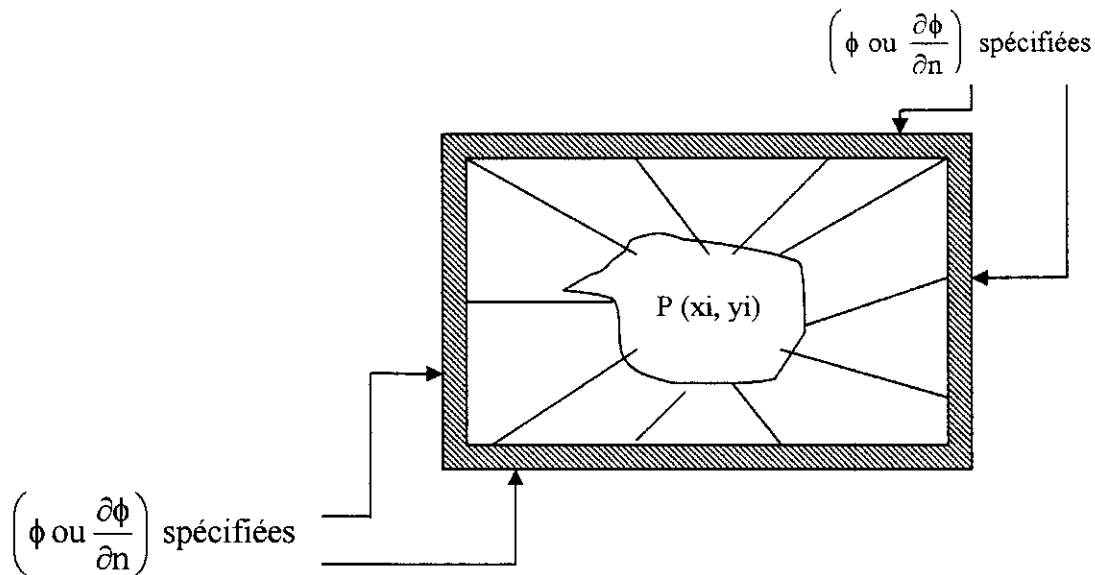


Fig. (1-4) Domaine typique pour une équation aux dérivées partielles elliptique

1-8 RELATION ENTRE COHERENCE – STABILITE ET CONVERGENCE :

La solution numérique approximative converge vers la solution exacte quand l'espacement de maillage tend vers zéro. Mais la convergence est très difficile à établir directement. Un chemin indirect est souvent suivi pour établir la convergence (Fig. 1-5).

1-8-1 Cohérence :

Le système des équations algébriques produit par le processus de discrétisation est reconnu comme cohérent avec l'équation différentielle partielle originale si dans le domaine où l'espacement de maillage tend vers zéro, il est équivalent à l'équation différentielle partielle en chaque point nœud.

1-8-2 Stabilité :

Le concept d'instabilité est caractérisé par l'augmentation ou la diminution des erreurs introduites à n'importe quelle étape de calcul. Dans ce contexte les erreurs ne sont pas celles qui se produisent par une logique incorrecte mais ceux qui se produisent du fait que le calculateur travail avec un nombre fini de chiffres significatifs induisant en conséquence des erreurs à chaque étape de calcul.

1-8-3 Convergence :

La solution des équations différentielles partielles convergent si la solution approximative approche la solution exacte de l'équation différentielle partielle pour chaque valeur de la variable indépendante ou quand l'espacement de maillage tend vers zéro.

La convergence implique que l'erreur de solution réduite à zéro quand l'espacement de maillage tend vers zéro.

Pour une classe restrictive de problème, la convergence peut être établie à travers le théorème de « Lax- équivalence » [10] : (donner des valeurs initiales linéaires proprement posées pour le problème considéré, et des approximations de différence finie satisfaisant la condition de cohérence, ensuite la stabilité est la condition nécessaire pour la convergence).

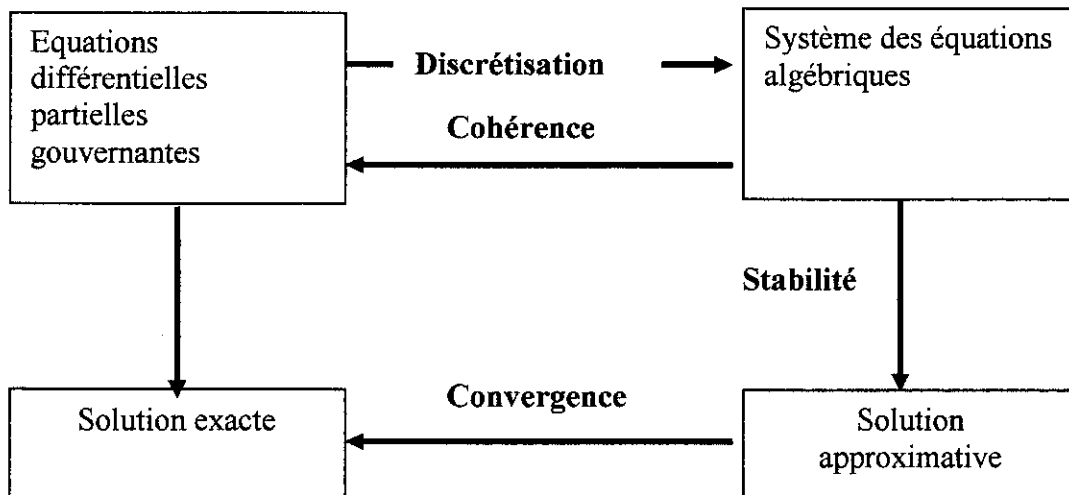


Fig. (1-5) Relation conventionnelle entre cohérence, stabilité et convergence.

1-9 OBJECTIF DE L'ETUDE :

Dans la présente étude, on s'intéresse à la comparaison entre les résultats numériques calculés pour un jet libre turbulent tourbillonnaire, isotherme, incompressible et axisymétrique à l'aide de trois modèles de turbulence :

- Le modèle K- ϵ
- Le modèle algébrique de turbulence (ASM)
- Le modèle de transport des contraintes de Reynolds (RSTM).

Le but est de comparer le comportement numérique ou les performances pour l'ensemble des trois modèles pour tirer des conclusions permettant de rendre compte des hypothèses et des approximations du transport dans les trois approches pour la convection et la diffusion des contraintes de Reynolds.

Les résultats sont obtenues en utilisant un code de calcul sur une configuration d'un jet libre turbulent tourbillonnaire en se basant sur les résultats expérimentaux présentés par Sislian et Cusworth [01] concernant les vitesses, l'énergie cinétique et les contraintes de Reynolds.

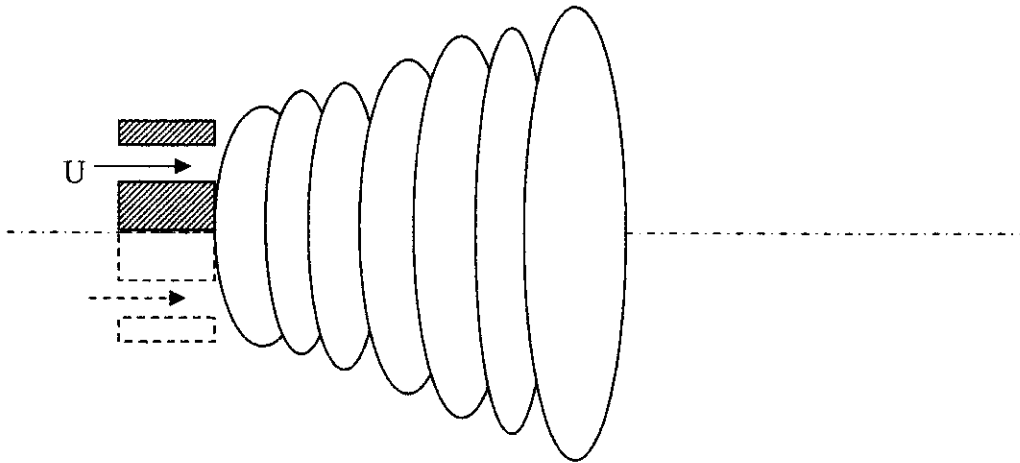


Fig. (1-6) : Forme générale du jet tourbillonnaire étudié.

CHAPITRE II

Modélisation Mathématique

2-1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on expose la formulation des équations mathématiques générales gouvernantes les écoulements, cette formulation consiste à la dérivation des lois régissant le comportement des phénomènes physiques.

La forme finale de ces lois donne les équations différentielles qui seront valides en chaque point du domaine étudié

2-2 EQUATIONS FONDAMENTALES D'ECOULEMENT

2-2-1 Equation de continuité:

L'équation de continuité est déduite de la loi de la conservation de masse et qui s'exprime mathématiquement sous la forme différentielle comme suit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) = 0 \quad (2-1)$$

Elle peut être représentée sous la forme tensorielle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X_i} (\rho U_i) = 0 \quad (2-2)$$

2-2-2 Equation de quantité de mouvement:

Le principe de conservation de quantité de mouvement permet d'établir les relations entre les caractéristiques du fluide et son mouvement ainsi que les causes qui les produisent.

L'application du théorème de la quantité de mouvement sur un volume élémentaire de fluide indique que la variation de quantité de mouvement de fluide, passant à travers le volume est égale à la somme des forces extérieures qui s'exercent sur la surface de ce volume.

Les forces par unité de volume qui peuvent s'exercer sur la masse de fluide sont :

- Les forces de pression ;
- Les forces de surfaces dues aux contraintes tangentielles : $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial X_j}$
- Les forces extérieures et de volumes : F_i

L'équation de quantité de mouvement devient :

$$\frac{d}{dt}(\rho U_i) = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial X_j} + F_i \quad (2-3)$$

Pour un fluide Newtonien, les contraintes τ_{ij} s'écrivent sous la forme :

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right)$$

Si de plus, les forces de gravité sont négligeables, l'équation de mouvement par unité de volume s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U_i) + U_j \frac{\partial}{\partial X_j}(\rho U_i) = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \right] \quad (2-4)$$

2-2-3 Equation globale :

L'équation générale qui exprime le transport d'une variable généralisée dépendante Φ par unité de masse écrite sous la forme tensorielle en coordonnées cartésiennes est :

$$U \frac{\partial}{\partial t}(\rho \Phi) + \frac{\partial}{\partial X_j}(\rho U_j \Phi) = \frac{\partial}{\partial X_i}(\Gamma \Phi) + S_\Phi \quad (2-5)$$

L'équation de continuité (conservation de masse) s'obtient en mettant $\Phi=1$.

Pour un fluide incompressible en régime permanent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= 0 \\ \rho &= C^{te} \\ \Phi &= 1 \\ \frac{\partial U_i}{\partial X_i} &= 0 \end{aligned}$$

L'équation de quantité de mouvement s'obtient avec ($\Phi = U_i$).

$$\frac{\partial}{\partial X_j}(\rho U_i U_j) = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_j}(\tau_{ij}) \quad (2-6)$$

U_i : Composante de vitesse

S_Φ : Terme de source contenant le reste des termes des équations correspondantes.

Γ : Coefficient de diffusion correspond.

Φ : Variable généralisé par unité de masse.

τ_{ij} : Contrainte de cisaillement dans la direction (X_i) sur la normale à la direction (X_j).

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right)$$

2-3 L'APPROCHE STATISTIQUE DE LA TURBULENCE

Le mouvement de la turbulence est toujours désordonné et instationnaire, pour résoudre les équations de mouvement il faut spécifier les conditions initiales de variable du mouvement (V et P) en tout point et à chaque instant.

Il est très difficile de capturer les fines perturbations sur une telle échelle et la résolution dépasse la capacité des calculateurs actuels

Afin d'étudier l'évolution du mouvement d'une particule dans un écoulement, Reynolds (1895) a proposée une approche statistique, cela permet de décomposer la valeur instantanée $\tilde{\Phi}$ en une valeur moyenne $\bar{\Phi}$ et une fluctuation Φ' .

$$\tilde{\Phi} = \bar{\Phi} + \Phi' \quad (2-7)$$

La valeur moyenne $\bar{\Phi}$ est exprimée par la formule suivante :

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi \cdot dt \quad (2-8)$$

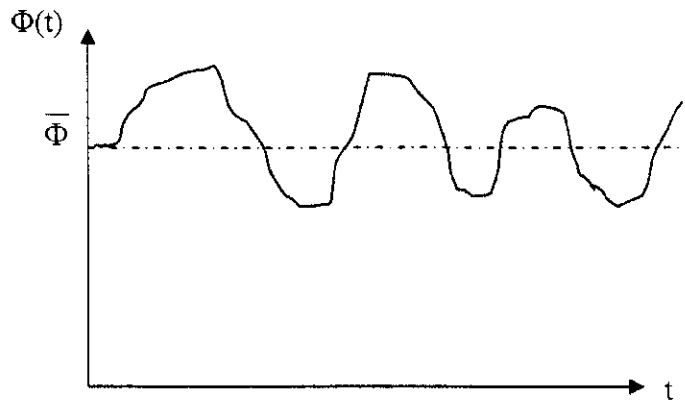


Fig. (2-1) : Fluctuation d'une grandeur Φ autour d'une valeur moyenne $\bar{\Phi}$.

$\bar{\Phi}$: Fluctuation moyenne de $\Phi(t)$.

$\Phi(t)$: Valeur instantané.

On définit alors :

$$1) \quad U_i = \bar{U}_i + u'_i$$

$$P_i = \bar{P}_i + p'_i$$

$$2) \quad \bar{U}_i = \overline{\bar{U}_i + u'_i} = \frac{1}{T} \int_0^T U_i dt = \bar{U}_i$$

$$u'_i = 0$$

On déduit que :

$$\overline{\bar{U}_i \cdot \bar{U}_j} = \bar{U}_i \cdot \bar{U}_j$$

$$\overline{\bar{U}_i \cdot U_j} = \bar{U}_i \cdot \bar{U}_j + \overline{\bar{u}_i \cdot \bar{u}_j}$$

$$\overline{\bar{U}_i \cdot u'_j} = \overline{u'_i \cdot \bar{U}_j} = 0$$

$$3) \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial X} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial X} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial U}{\partial X} dt = \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{1}{T} \int_0^T U dt \right] = \frac{\partial \bar{U}}{\partial X}$$

$$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial t} = 0$$

2-4 EQUATION DE L'ÉCOULEMENT INSTANTANE ET MOYEN

Toute étude d'écoulement turbulent nécessite la résolution des équations de Navier-Stokes, de continuité, de l'énergie et des différentes lois d'état du fluide.

On adopte les hypothèses suivantes :

- Fluide Newtonien et incompressible ($\rho = \text{Cte}$) ;
- Ecoulement stationnaire ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) ;
- Forces extérieures négligeables.

On applique l'approche statistique décrite ci-dessus :

- Considérons d'abord l'équation de continuité :

$$* \text{ Pour un écoulement moyen : } \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial X_i} = 0$$

$$* \text{ Pour les fluctuations : } \frac{\partial u'_i}{\partial X_i} = 0$$

En tenant compte de ces égalités et en effectuant des opérations de moyenne sur les équations dites de Reynolds, on aboutit à :

$$\frac{\partial(U_i U_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{\rho u_i u_j} \right) \quad (2-9)$$

On appelle les termes $\overline{u_i u_j}$ les tensions de Reynolds, ces termes constituent les composantes d'un tenseur symétrique appelé tenseur des contraintes de Reynolds.

$$\bar{\tau}_{ij} = \begin{bmatrix} \overline{u^2} & \overline{uv} & \overline{uw} \\ \overline{uv} & \overline{v^2} & \overline{vw} \\ \overline{uw} & \overline{vw} & \overline{w^2} \end{bmatrix}$$

2-5 MODELISATION DE LA TURBULENCE

2-5-1 Equations de base :

Les écoulements turbulents sont décrits par les équations de Navier-Stokes et l'équation de continuité. La méthode mathématique adoptée dans le présent travail repose sur la résolution numérique de ces équations. L'écoulement est considéré incompressible, isotherme et stationnaire en moyenne.

Les équations décrivant l'écoulement sont :

1- Equation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_i U_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u_i u_j}) \quad (2-10)$$

2- Equation de continuité :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2-11)$$

Le terme de corrélation turbulente ($\overline{\rho u_i u_j}$) qui représente des quantités de mouvement dû au mouvement fluctuant doit être modéliser afin de fermer le système différentiel.

2-5-2 Modélisation :

Les termes de doubles corrélations de type ($\overline{u_i u_j}$) qui apparaissent dans les équations de mouvement ne peuvent pas être déduites de l'équation exacte de transport à cause de l'existence d'autres types de corrélations d'un ordre supérieur.

L'approximation de ces termes de double corrélation est ce qu'on appelle la modélisation. Il existe plusieurs types de modélisation qui permettent de calculer les écoulements turbulents. Parmi ces modèles, on utilise dans cette étude trois modèles de turbulence qui sont : Le modèle K-ε, Le modèle RSTM et le modèle ASM.

2-5 -3 Modèle à deux équations de transport K-ε :

2-5-3-1 Equations de transport :

Le modèle de turbulence à deux équations de transport est basé sur le principe de Boussinesq [11] qui exprime la turbulence en fonction de l'énergie cinétique de turbulence K et son taux de dissipation ε comme suit :

$$-\rho \overline{u_i u_j} = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \cdot \rho \cdot K \quad (2-12)$$

La viscosité turbulente μ_t est définie par :

$$\mu_t = C_\mu \cdot \rho \cdot \frac{K}{\varepsilon} \quad (2-13)$$

L'énergie cinétique K et son taux de dissipation ε sont obtenus à partir de leurs équations différentielles :

$$\frac{\partial}{\partial X_j} (\rho U_j K) = - \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial X_j} - \rho \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial X_j} - \rho \varepsilon \quad (2-14)$$

$$\frac{\partial}{\partial X_j} (\rho U_j \varepsilon) = - \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_j} - C_1 \frac{\varepsilon}{K} \rho \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial X_j} - C_2 \cdot \rho \cdot \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (2-15)$$

Les valeurs des constantes empiriques qui apparaissent dans les équations sont ceux recommandés par Launder et Spalding [23] dont leurs valeurs sont représentés dans le tableau ci dessous :

C_μ	C_1	C_2	σ_k	σ_ε
0,09	1,44	1,92	1,0	1,3

Tableau (2-1) : Constante du modèle (K-ε).

2-5-3-2 Traitement mathématique des équations de transport (K-ε):

Les écoulements turbulents sont souvent décrits par les équations de quantité de mouvement ainsi que l'équation de conservation de masse (continuité).

La résolution du système d'équations aux dérivées partielles nécessite un traitement mathématique préalable qui repose sur la résolution numérique de ces équations.

Nous proposons de résoudre le problème de l'écoulement d'un jet libre tourbillonnaire, isotherme, incompressible, permanent et sans réactions chimiques. Dans ce qui suit on donnera les équations développées qui régissent le mouvement d'un tel écoulement, en coordonnées cylindriques.

2-5-3-2-1 Equation de continuité :

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial r} = 0 \quad (2-16)$$

2-5-3-2-2 Equation de quantité de mouvement :

- Suivant la direction axiale :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} (r \rho U U) + \frac{\partial}{\partial r} (r \rho U V) \right] &= -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\rho K) \\ + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(2r(\mu_t + \mu) \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r(\mu_t + \mu) \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right) \right] & \end{aligned} \quad (2-17)$$

- Suivant la direction radiale :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} (r \rho U V) + \frac{\partial}{\partial r} (r \rho V V) \right] &= -\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} (\rho K) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(2r(\mu_t + \mu) \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right] \\ + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r(\mu_t + \mu) \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right) \right] &- 2(\mu + \mu_t) \frac{V}{r^2} + \rho \frac{W^2}{r} \end{aligned} \quad (2-18)$$

- Suivant la direction circonférencielle :

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} (r\rho UW) + \frac{\partial}{\partial r} (r\rho VW) \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r(\mu_t + \mu) \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r(\mu_t + \mu) \frac{\partial W}{\partial r} \right) \right) \right] \quad (2-19)$$

$$- \rho \frac{WV}{r} - \frac{W}{r^2} (\mu_t + \mu) - \frac{W}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\mu_t + \mu)$$

2-5-3-2-3 Equation de l'énergie cinétique turbulente K :

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} (r\rho UK) + \frac{\partial}{\partial r} (r\rho VK) \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(r \left(\frac{\mu_t}{\sigma_K} + \mu \right) \frac{\partial K}{\partial x} \right) \quad (2-20)$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\mu_t}{\sigma_K} + \mu \right) \frac{\partial K}{\partial r} \right) + P_K - \rho \varepsilon$$

2-5-3-2-4 Equation du taux de dissipation ε :

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} (r\rho U\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial r} (r\rho V\varepsilon) \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} + \mu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} + \mu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) \right) \right] \quad (2-21)$$

$$+ C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} P_K - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{K}$$

Avec P_K : Le taux de production

$$P_K = (\mu + \mu_t) \left[2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{V}{r} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) \right]^2 \right]$$

2-5-4 Modèle des tensions de Reynolds RSTM :

2-5-4-1 Equations de transport :

La forme générale des équations des contraintes de Reynolds peut être déduite de la forme instantanée des équations de Navier-Stokes [12]. Pour les écoulements incompressibles, l'équation exacte gouvernante relative aux contraintes de Reynolds peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 \frac{\overline{D u_i u_j}}{Dt} &= \underbrace{\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial X_k}}_{\text{CONVECTION}} = - \underbrace{\left(\overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial X_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial X_k} \right)}_{\text{PRODUCTION}} - \underbrace{2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial X_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial X_k}}_{\text{DISSIPATION}} \\
 &+ \underbrace{\frac{P}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial X_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial X_i} \right)}_{\text{REDISTRIBUTION}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial X_k} \left\{ \overline{u_i u_j u_k} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial X_k} + \frac{P}{\rho} (u_j \delta_{ik} + u_i \delta_{jk}) \right\}}_{\text{DIFFUSION}}
 \end{aligned} \tag{2-23}$$

Les termes du second membre de l'équation exacte (2-23) doivent être modélisés pour fermer le système d'équations qui englobe aussi l'équation de continuité et les équations de quantité de mouvement.

Ces termes sont représentés par hypothèse par des fonctions empiriques.

Donc on peut écrire l'équation précédente sous la forme suivante :

$$\partial U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial X_k} = P_{ij} - \rho \varepsilon_{ij} + d_{ij} + \Phi_{ij} \tag{2-24}$$

Telle que :

$$1) P_{ij} = -\rho \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial X_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \right) \tag{2-25}$$

Où P_{ij} : représente le taux de production des contraintes de Reynolds induites par le taux moyen de déformation.

$$2) \varepsilon_{ij} = 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial X_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial X_k}$$

Ce terme représente le tenseur de dissipation visqueuse.

Rodi et Col. [14] ont estimés ε_{ij} sur la base d'hypothèse d'isotropie par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \cdot \varepsilon \tag{2-26}$$

Avec : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = j \\ 0 & \text{pour } i \neq j \end{cases}$ Symbole de Kronecker.

Cette hypothèse suppose que les mouvements de dissipation sont isotropes pour les grands nombres de Reynolds et que la dissipation s'effectue par l'action de la viscosité sur les petites échelles de tourbillons.

$$3) d_{ij} = \frac{\partial}{\partial X_k} \left\{ \overline{u_i u_j u_k} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial X_k} + \frac{P}{\rho} \left(\overline{u_j \delta_{ik}} + \overline{u_i \delta_{jk}} \right) \right\}$$

d_{ij} : représente la diffusion turbulente.

- Le second terme entre crochets représentant le transport par interaction moléculaire peut être négligé, puisque pour l'écoulement considéré le nombre de Reynolds est élevé.
- Le troisième terme représentant la diffusion de pression peut être négligé selon [16].
- Le premier terme décrivant la diffusion des vitesses turbulentes n'est pas négligeable et donc doit être retenu pour la modélisation. Selon Daly et Harlow [24], ce terme, sur la base de « gradient de diffusion », peut s'écrire :

$$d_{ij} = \frac{\partial}{\partial X_k} \left(\overline{u_i u_j u_k} \right) = \frac{\partial}{\partial X_k} \left(C_k \frac{\overline{u_k u_n}}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial X_n} \right) \quad (2-27)$$

C_k : Constante du modèle.

$K = \frac{1}{2} \overline{(u_i u_j)}$: Energie cinétique de turbulence.

Masaya [15] montre que l'utilisation de l'hypothèse de Hanjalic et Launder [14] :

$$d_{ij} = \frac{\partial}{\partial X_1} \left(C_k \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial X_k} \right) + \frac{\partial}{\partial X_1} \left(C_k \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{u_i u_l} \frac{\partial \overline{u_k u_j}}{\partial X_k} \right) + \frac{\partial}{\partial X_1} \left(C_k \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{u_j u_l} \frac{\partial \overline{u_k u_i}}{\partial X_k} \right) \quad (2-28)$$

au lieu de l'hypothèse précédente perfectionne la distribution des contraintes normales de Reynolds près de la ligne de centrale, puisque cette hypothèse est invariante pour

L'interchangeabilité des indices (i, j, k) et par conséquent satisfaire la symétrie des termes de diffusion pour (i ≠ j ≠ k) dans le d'un système en coordonnées cylindriques.

$$4) \Phi_{ij} = \frac{P}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

Φ_{ij} : représente la corrélation de pression – taux de déformation.

Φ_{ij} Joue le rôle de redistribution des contraintes de Reynolds, contrôle la redistribution de l'énergie de turbulence entre les contraintes de Reynolds pendant l'interaction de la pression et le taux de déformation. Son approximation faite par Launder [16] en trois parties s'écrit :

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij,1} + \Phi_{ij,2} + \Phi_{ij,w} \quad (2-29)$$

- $\Phi_{ij,1}$: représente le retour linéaire à l'isotropisation des contraintes de Reynolds. Rotta [14] pose comme égale à :

$$\Phi_{ij,1} = -C_1 \rho \frac{\varepsilon}{K} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} K \right)$$

C_1 : Une constante pour l'optimisation de l'approximation.

- $\Phi_{ij,2}$: représente le retour linéaire de l'isotropisation de taux de production des contraintes de Reynolds. Naot et al [17] le posent comme égal à :

$$\Phi_{ij,2} = -C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_{kk} \right)$$

Avec :

P_{kk} : Taux moyen de production de l'énergie cinétique de turbulence K.

- $\Phi_{ij,w}$: représente l'effet de frontières solides sur $\Phi_{ij,1}$, $\Phi_{ij,2}$ simultanément.

Les termes de corrections de paroi $\Phi_{ij,w}$ existent où il y a une paroi solide, et lorsque l'écoulement est tridimensionnel.

Dans le cas étudié l'écoulement est tridimensionnel, mais les parois sont considérées comme suffisamment éloignées pour ne pas influencer l'écoulement (jet libre) dans la direction radiale.

Alors, ce terme $\Phi_{ij,w}$ ne sera pas ajouté dans ce cas précis.

Après regroupement des différents termes selon l'équation (2-24), on peut écrire l'équation de transport des contraintes de Reynolds du modèle RSTM comme suit :

$$\begin{aligned} \partial U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial X_k} = & \frac{\partial}{\partial X_k} \left(C_k \overline{u_i u_j} \frac{K}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial X_1} \right) + P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \\ & - C_1 \frac{\varepsilon}{K} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} K \right) - C_2 \left(P_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} P_{kk} \right) \end{aligned} \quad (2-30)$$

L'énergie cinétique turbulente K est calculée à partir des contraintes de Reynolds par la formule suivante :

$$K = \frac{1}{2} \left(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2} \right) \quad (2-31)$$

L'équation du taux de dissipation prend la forme générale suivante :

$$\frac{\partial U_k \varepsilon}{\partial X_k} = \frac{\partial}{\partial X_k} \left(C_\varepsilon \overline{u_k u_1} \frac{K}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_1} \right) + \frac{C_{\varepsilon 1}}{2} P_{kk} \frac{\varepsilon}{K} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (2-32)$$

Les différents coefficients apparaissent dans les équations précédentes sont données dans le tableau suivant [16] :

Symbole	κ	C_μ	C_1	C_2	C_k	C_ε	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$
Valeur	0.42	0.09	1.8	0.6	0.22	0.18	1.44	1.92

Tableau (2-2) : Constantes du modèle RSTM

2-5-4-2 Traitement mathématique des équations de transport (RSTM) :

La forme développée des différents équations du modèle s'écrivent comme suit :

2-5-4-2-1 Equations des composantes des contraintes de Reynolds :

- Equation du transport de \bar{u}^{-2} :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x}(\rho U \bar{u}^{-2}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho V \bar{u}^{-2}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(C_k \rho \frac{K}{\varepsilon} \bar{u}^{-2} \right) \frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(C_k r \rho \frac{K}{\varepsilon} \bar{v}^{-2} \right) \frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial r} \right] \\
 + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(C_k \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{uv} \right) \frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(C_k r \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{uv} \right) \frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial x} \right] &+ C_1 \rho \frac{\varepsilon}{K} \left(\bar{u}^{-2} - \frac{2}{3} K \right) \\
 + (1 - C_2) \rho \left[-2 \bar{u}^{-2} \frac{\partial U}{\partial x} - 2 \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial r} \right] + \frac{2}{3} (C_2 P_{kk} - \rho \varepsilon) &
 \end{aligned} \tag{2-33}$$

Avec :

$$P_{kk} = -2 \rho \left[\bar{u}^{-2} \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{v}^{-2} \frac{\partial V}{\partial r} + \overline{uv} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \overline{uw} \frac{\partial W}{\partial x} + \overline{vw} \frac{\partial W}{\partial r} \right] \tag{2-34}$$

- Equation du transport de \bar{V}^{-2} :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x}(\rho U \bar{v}^{-2}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho V \bar{v}^{-2}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(C_k \rho \frac{K}{\varepsilon} \bar{u}^{-2} \right) \frac{\partial \bar{v}^{-2}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(C_k \rho \frac{K}{\varepsilon} \bar{v}^{-2} \right) \frac{\partial \bar{v}^{-2}}{\partial r} \right] \\
 + \frac{\partial}{\partial x} \left[C_k \rho \frac{K}{\varepsilon} \left(\overline{uv} \frac{\partial \bar{v}^{-2}}{\partial r} - 2 \overline{uw} \frac{\overline{vw}}{r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[C_k r \rho \frac{K}{\varepsilon} \left(\overline{uv} \frac{\partial \bar{v}^{-2}}{\partial x} - 2 \overline{vw} \frac{\overline{vw}}{r} \right) \right] &+ 2 \rho \overline{vw} \frac{W}{r} \\
 - \frac{2}{r} C_1 \rho \frac{\varepsilon}{K} \left[\overline{uv} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial x} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial r} + \overline{w}^2 \frac{(\bar{v}^{-2} - \bar{w}^{-2})}{r} \right] - C_1 \rho \frac{\varepsilon}{K} \left(\bar{v}^{-2} - \frac{2}{3} K \right) & \\
 + (1 - C_2) \rho \left[-2 \overline{uv} \frac{\partial V}{\partial x} - 2 \bar{v}^{-2} \frac{\partial V}{\partial r} + 2 \overline{vw} \frac{W}{r} \right] + \frac{2}{3} (C_2 P_{kk} - \rho \varepsilon) &
 \end{aligned} \tag{2-35}$$

- Equation du transport de $\overline{w^2}$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} (\rho U \overline{w^2}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho V \overline{w^2}) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(C_k \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{u}^{-2} \right) \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(C_k \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{v}^{-2} \right) \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial r} \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left[C_k \rho \frac{K}{\varepsilon} \left(\overline{uv} \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial r} - 2 \overline{uw} \frac{\overline{vw}}{r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[C_k r \rho \frac{K}{\varepsilon} \left(\overline{uv} \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial x} - 2 \overline{vw} \frac{\overline{vw}}{r} \right) \right] - 2 \rho \overline{vw} \frac{W}{r} \\
 & + \frac{2}{r} C_1 \rho \frac{\varepsilon}{K} \left[\overline{uv} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial x} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial r} + \overline{w^2} \frac{(\overline{v^2} - \overline{w^2})}{r} \right] - C_1 \rho \frac{\varepsilon}{K} \left(\overline{w^2} - \frac{2}{3} K \right) \\
 & + (1 - C_2) \rho \left[-2 \overline{uw} \frac{\partial W}{\partial x} - 2 \overline{vw} \frac{\partial W}{\partial r} + 2 \overline{w^2} \frac{V}{r} \right] + \frac{2}{3} (C_2 P_{kk} - \rho \varepsilon)
 \end{aligned} \tag{2-36}$$

- Equation du transport de \overline{uv} :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} (\rho U \overline{uv}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho V \overline{uv}) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(C_k \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{u}^{-2} \right) \frac{\partial \overline{uv}}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(C_k \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{v}^{-2} \right) \frac{\partial \overline{uv}}{\partial r} \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left[C_k \rho \frac{K}{\varepsilon} \left(\overline{uv} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial r} - \overline{uw} \frac{\overline{uw}}{r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[C_k r \rho \frac{K}{\varepsilon} \left(\overline{uv} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial x} - \overline{vw} \frac{\overline{uw}}{r} \right) \right] + \rho \overline{uw} \frac{W}{r} \\
 & - \frac{1}{r} C_k \rho \frac{\varepsilon}{K} \left(\overline{uw} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial x} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{uw}}{\partial r} + \overline{w^2} \frac{\overline{uv}}{r} \right) - C_1 \rho \frac{\varepsilon}{K} \overline{uv} \\
 & + (1 - C_2) \rho \left[-\overline{u}^{-2} \frac{\partial V}{\partial x} - \overline{uv} \left(\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \overline{v}^{-2} \frac{\partial U}{\partial r} + \overline{uw} \frac{W}{r} \right]
 \end{aligned} \tag{2-37}$$

- Equation du transport de \overline{uw} :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} (\rho U \overline{uw}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho V \overline{uw}) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(C_k \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{u}^{-2} \right) \frac{\partial \overline{uw}}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(C_k \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{v}^{-2} \right) \frac{\partial \overline{uw}}{\partial r} \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left[C_k \rho \frac{K}{\varepsilon} \left(\overline{uv} \frac{\partial \overline{uw}}{\partial r} + \overline{uw} \frac{\overline{uv}}{r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[C_k r \rho \frac{K}{\varepsilon} \left(\overline{uv} \frac{\partial \overline{uw}}{\partial x} + \overline{vw} \frac{\overline{uv}}{r} \right) \right] - \rho \overline{uv} \frac{W}{r} \\
 & + \frac{1}{r} C_k \rho \frac{\varepsilon}{K} \left(\overline{uw} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial x} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial r} - \overline{w^2} \frac{\overline{uw}}{r} \right) - C_1 \rho \frac{\varepsilon}{K} \overline{uw} \\
 & + (1 - C_2) \rho \left[-\overline{u}^{-2} \frac{\partial W}{\partial x} - \overline{uv} \frac{\partial W}{\partial r} - \overline{vw} \frac{\partial U}{\partial r} + \overline{uw} \frac{\partial V}{\partial r} \right]
 \end{aligned} \tag{2-38}$$

- Equation du transport de \overline{vw} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\rho U \overline{vw}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho V \overline{vw}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(C_k \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{u}^{-2} \right) \frac{\partial \overline{vw}}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(C_k \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{v}^{-2} \right) \frac{\partial \overline{vw}}{\partial r} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[C_k \rho \frac{K}{\varepsilon} \left(\overline{uv} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial r} + \overline{uw} \frac{(\overline{v}^{-2} - \overline{w}^{-2})}{r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[C_k r \rho \frac{K}{\varepsilon} \left(\overline{uv} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial x} + \overline{vw} \frac{(\overline{v}^{-2} - \overline{w}^{-2})}{r} \right) \right] \\ &- \rho \frac{(\overline{v}^{-2} - \overline{w}^{-2})}{r} \overline{W} + \frac{1}{r} C_k \rho \frac{\varepsilon}{K} \left(\overline{uw} \frac{\partial (\overline{v}^{-2} - \overline{w}^{-2})}{\partial x} + \overline{vw} \frac{\partial (\overline{v}^{-2} - \overline{w}^{-2})}{\partial r} - 4 \overline{w}^{-2} \frac{\overline{vw}}{r} \right) \\ &+ C_1 \rho \frac{\varepsilon}{K} \overline{vw} + (1 - C_2) \rho \left[-\overline{uv} \frac{\partial \overline{W}}{\partial x} - \overline{uw} \frac{\partial \overline{W}}{\partial r} - \overline{uv} \frac{\partial \overline{V}}{\partial x} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \overline{w}^{-2} \frac{\overline{W}}{r} \right] \end{aligned} \quad (2-39)$$

2-5-4-2-2) Equation de l'énergie turbulente K:

Pour l'énergie turbulente, elle est calculée à partir des contraintes normales de Reynolds par la formule suivante [29] :

$$K = \frac{1}{2} (\overline{u}^{-2} + \overline{v}^{-2} + \overline{w}^{-2}) \quad (2-40)$$

2-5-4-2-3 Equation du taux de dissipation ε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\rho U \varepsilon) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho V \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(C_\varepsilon \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{u}^{-2} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(C_\varepsilon \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{v}^{-2} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(C_\varepsilon \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{uv} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(C_\varepsilon r \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{uv} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{C_{\varepsilon 1}}{2} \rho \frac{\varepsilon}{K} P_{kk} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{2} \end{aligned} \quad (2-41)$$

2-5-4-2-4 Equations de la quantité de mouvement :

- Suivant x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\rho U U) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho U V) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho v \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \rho v \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} \\ &- \frac{\partial (\rho \overline{u}^{-2})}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho \overline{uv}) \end{aligned} \quad (2-42)$$

- Suivant r :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho UV) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho VV) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho v \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \rho v \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{\partial P}{\partial r} \\ &\quad - \frac{\partial(\overline{\rho uv})}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho \overline{v^2}) + \rho \frac{W^2}{r} + \rho \frac{\overline{w^2}}{r} - \mu \frac{V}{r^2} \end{aligned} \quad (2-43)$$

- Suivant θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho UW) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho VW) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho v \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \rho v \frac{\partial W}{\partial r} \right) \\ &\quad - \frac{\partial(\overline{\rho uw})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{\rho vw})}{\partial r} - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial(rW)}{\partial r} - \frac{2\rho}{r} \overline{vw} \end{aligned} \quad (2-44)$$

2-5-4-2-5 Equation de continuité :

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho V)}{\partial r} = 0 \quad (2-45)$$

2-5-5 Modèle Algébrique des contraintes de Reynolds ASM :

2-5-5-1 Equations de transport :

Dans le cas où l'écoulement serait complexe et surtout en présence de tourbillonnement qui ajoute de nombreux termes additionnels à partir de processus de transport, ceci rend le système des équations à résoudre très complexe et nécessite un temps de calcul considérable par le modèle RSTM.

Afin de contourner cette difficulté, le modèle ASM (modèle algébrique des contraintes de Reynolds) apparaît comme un niveau intermédiaire dans la modélisation.

En effet il pallie à la simplicité du modèle (K- ϵ) avec son temps réduit de calcul tout en tenant compte de la réalité physique considérée par le modèle RSTM.

Pour simplifier la complexité du modèle RSTM, Rodi [18] a déduit des relations algébriques pour les contraintes de Reynolds à partir des équations différentielles de transport en supposant que le transport des contraintes $\overline{u_i u_j}$ est proportionnel au transport

de l'énergie cinétique de turbulence K et où le facteur de proportionnalité es le rapport $\left(\frac{\overline{u_i u_j}}{K}\right)$.

Cette simplicité permet aux équations originales de transport des contraintes de Reynolds dans le modèle RSTM d'être exprimées en une série de formules algébriques dans le modèle ASM, contenant seulement l'énergie cinétique de turbulence K et son taux de dissipation comme inconnues dont l'équation différentielle des contraintes de Reynolds est représentée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} - \frac{\partial}{\partial X_k} \left(C_s \overline{u_k u_l} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial X_l} \right) = \\ \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \left[\frac{Dk}{Dt} - \frac{\partial}{\partial X_k} \left(C_s \overline{u_k u_l} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial X_l} \right) \right] = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \left(\frac{1}{2} P_{kk} - \varepsilon \right) \end{aligned} \quad (2-46)$$

C_s : est une constante.

P_{kk} : Taux moyen de production de l'énergie cinétique de turbulence.

L'énergie cinétique et son taux de dissipation sont obtenues respectivement de :

$$\frac{\partial U_k K}{\partial X_k} = \frac{\partial}{\partial X_k} \left(C_s \overline{u_k u_l} \frac{K}{\varepsilon} \frac{\partial K}{\partial X_l} \right) + \frac{1}{2} P_{kk} - \varepsilon \quad (2-47)$$

$$\frac{\partial U_k \varepsilon}{\partial X_k} = \frac{\partial}{\partial X_k} \left(C_\varepsilon \overline{u_k u_l} \frac{K}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_l} \right) + \frac{C_{\varepsilon 1}}{2} P_{kk} \frac{\varepsilon}{K} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (2-48)$$

Les contraintes de Reynolds sont obtenues par deux possibilités:

- La première : Utilisation directe de l'équation (2-46) et le traitement mathématique des différents équations de transport ;
- La deuxième : L'introduction de l'équation (2-46) dans l'équation de transport du modèle RSTM (2-30) qui conduit à l'équation suivante:

$$\overline{u_i u_j} = K \left[\frac{\frac{2}{3} \delta_{ij} + \left((1 - C_2) \left(\frac{P_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \frac{P_K}{\varepsilon} \delta_{ij} \right) \right)}{\left(\rho C_1 + \frac{P_K}{\varepsilon} - \rho \right)} \right] \quad (2-49)$$

Pour l'obtention des contraintes de Reynolds, on a utilisé la première possibilité (l'équation (2-46)) qui conduit à l'équation suivante :

$$\frac{\partial(\rho U_k \overline{u_i u_j})}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_s \overline{u_k u_l} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right) + \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \left(\frac{1}{2} P_{kk} - \varepsilon \right) \quad (2-50)$$

Les différents coefficients apparaissent dans les équations précédentes ont pour valeur [18] :

Symbole	C_s	C_ε	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$
Valeur	0.22	0.18	1.44	1.92

Tableau (2-3): Constante du modèle ASM

2-5-5-2 Traitement Mathématique des équations de transport (ASM) :

2-5-5-2-1 Equations des composantes des contraintes de Reynolds :

- Equation de la composante \overline{u}^{-2} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\rho U \overline{u}^{-2}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho V \overline{u}^{-2}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(C_s \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{u}^{-2} \right) \frac{\partial \overline{u}^{-2}}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(C_s r \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{v}^{-2} \right) \frac{\partial \overline{u}^{-2}}{\partial r} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(C_s \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{uv} \right) \frac{\partial \overline{u}^{-2}}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(C_s r \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{uv} \right) \frac{\partial \overline{u}^{-2}}{\partial x} \right] + \frac{\overline{u}^{-2}}{K} \left(\frac{1}{2} P_{kk} - \rho \varepsilon \right) \end{aligned} \quad (2-51)$$

2-5-5-2-2 Equation de l'énergie turbulente K :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho U K) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho V \cdot K) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(C_{s\rho} \frac{K}{\varepsilon} \overline{u^2} \right) \frac{\partial K}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(C_{s\rho} \frac{K}{\varepsilon} \overline{v^2} \right) \frac{\partial K}{\partial r} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(C_{s\rho} \frac{K}{\varepsilon} \overline{uv} \right) \frac{\partial K}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(C_{s\rho} \frac{K}{\varepsilon} \overline{uv} \right) \frac{\partial K}{\partial x} \right] + \frac{1}{2} P_{kk} - \rho \varepsilon \end{aligned} \quad (2-57)$$

2-5-5-2-3 Equation du taux de dissipation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho U \varepsilon) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho V \cdot \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(C_{s\rho} \frac{K}{\varepsilon} \overline{u^2} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(C_{s\rho} \frac{K}{\varepsilon} \overline{v^2} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(C_{s\rho} \frac{K}{\varepsilon} \overline{uv} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(C_{s\rho} \frac{K}{\varepsilon} \overline{uv} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{C_{\varepsilon 1}}{2} \rho P_{kk} \frac{K}{\varepsilon} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{K} \end{aligned} \quad (2-58)$$

Avec :

$$P_{kk} = -2\rho \left[\overline{u^2} \frac{\partial U}{\partial x} + \overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial r} + \overline{uv} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \overline{uw} \frac{\partial W}{\partial x} + \overline{vw} \frac{\partial W}{\partial r} \right]$$

2-5-5-2-4 Equations de la quantité de mouvement :

- Suivant x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho U U) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho U V) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho v \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \rho v \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} \\ &- \frac{\partial(\overline{\rho u^2})}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho \overline{uv}) \end{aligned} \quad (2-59)$$

- Suivant r :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho U V) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho V V) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho v \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \rho v \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{\partial P}{\partial r} \\ &- \frac{\partial(\overline{\rho uv})}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho \overline{v^2}) + \rho \frac{W^2}{r} + \rho \frac{\overline{w^2}}{r} - \mu \frac{V}{r^2} \end{aligned} \quad (2-60)$$

- Suivant θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho U W) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho V W) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho v \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \rho v \frac{\partial W}{\partial r} \right) \\ &- \frac{\partial(\overline{\rho uw})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{\rho vw})}{\partial r} - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial(rW)}{\partial r} - \frac{2\rho}{r} \overline{vw} \end{aligned} \quad (2-61)$$

$$\text{2-5-5-2-5 Equation de continuité : } \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho V)}{\partial r} = 0 \quad (2-62)$$

CHAPITRE III

Modélisation Numérique

3-1- INTRODUCTION

La résolution analytique des équations différentielles partielles gouvernant l'écoulement dans notre cas est pratiquement impossible. D'où la nécessité du calcul numérique qui résout ce problème et tend à linéariser les systèmes d'équations différentielles en des systèmes algébriques dont la résolution est possible.

La méthode utilisée dans cette étude est la méthode des volumes finis présentée par PATANKAR (1980). Elle se base sur l'intégration sur les volumes de contrôle finis obtenus par découpage du domaine étudié de l'écoulement. Cette méthode est caractérisée par les avantages suivants par rapport aux autres méthodes numériques:

- Sa rapidité qui résulte de son caractère non itératif et dans son universalité, car elle permet de traiter simultanément les équations de quantité de mouvement et des modèles de plusieurs équations de transport.

- Elle assure la conservation des quantités physiques transportables (quantité de mouvement, masse, énergie, ... etc.) sur tout le domaine étudié.

- Le schéma de discrétisation des équations de transport assure une stabilité inconditionnelle de calcul.

- Elle est largement utilisée et testée.

3-2 FORMULATION MATHÉMATIQUE :

Un jet turbulent avec tourbillonnement est généralement gouverné par les équations de Navier-Stokes et les lois de conservation de masse et d'énergie.

Pour un écoulement permanent, incompressible, axisymétrique et isotherme, les équations de transport dans un système de coordonnées cylindro-polaires (x, r) peuvent se mettre sous la forme générale suivante [19] :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\rho r U \Phi) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r V \Phi)}_{\text{CONVECTION}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(r \Gamma_{\Phi, x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma_{\Phi, r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)}_{\text{DIFFUSION}} + \underbrace{r S_{\Phi}}_{\text{SOURCE}} \quad (3-1)$$

Où :

Φ : est assimilable à toute grandeur physique transportable (U, V, W, K, ε , \overline{uv} , ...)

Γ_{Φ} : Coefficient de diffusion qui dépend de la signification particulière de la variable

Φ à traiter.

S_Φ : Le terme de source.

Les tableaux suivants regroupent les expressions des termes de source et de diffusion des différentes équations de transport pour les trois modèles de turbulence:

3-2-1 Termes de sources du modèle K-ε :

Equation	Variable Φ	Diffusivité Γ	Terme de source S_Φ
Continuité	1	0	0
Qt. de mvt axiale	U	μ_e	$-\frac{\partial}{\partial x} \left(P + \frac{2}{3} \rho K \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_e \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right)$
Qt. de mvt radiale	V	μ_e	$-\frac{\partial}{\partial r} \left(P + \frac{2}{3} \rho K \right) + \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_e \cdot \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_e \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right) - 2\mu_e \cdot \frac{V}{r^2} + \rho \frac{W^2}{r}$
Qt. de mvt circonférencielle	W	μ_e	$-\rho \frac{WV}{r} - \frac{W}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r(\mu_t + \mu)]$
Energie de turbulence	K	$\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}$	$P_{kk} - \rho \cdot \varepsilon$
Taux de dissipation	ε	$\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}$	$C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} \cdot P_{kk} - C_{\varepsilon 2} \cdot \rho \cdot \frac{\varepsilon^2}{K}$

Tableau (3-1) : tableau des termes de source du modèle (K-ε)

Avec :

μ : viscosité laminaire

μ_t : Viscosité turbulente définie par : $\mu_t = C_\mu \rho \frac{K^2}{\varepsilon}$

μ_e : Viscosité effective définie par $\mu_e = (\mu_t + \mu)$

3-2-2 Termes de source du modèle RSTM :

Equation	Variable Φ	Diffusivité Γ	Terme de source S_Φ
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement axiale	U	$\rho\nu$	$-\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \overline{u^2})}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho \overline{uv})$
Quantité de mouvement radiale	V	$\rho\nu$	$\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\partial(\rho \overline{uv})}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho \overline{v^2}) + \rho \frac{W^2}{r}$ $+ \rho \frac{\overline{w^2}}{r} - \rho \mu \frac{V}{r^2}$
Quantité de mouvement circumférentielle	W	$\rho\nu$	$-\frac{\partial(\rho \overline{uw})}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial r}(r \rho \overline{vw}) - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial(rW)}{\partial r} - \frac{2\rho}{r} \overline{vw}$
Taux de dissipation	ε	$\Gamma_{\varepsilon,x} = C_\varepsilon \rho \frac{K}{\varepsilon} u^{-2}$ $\Gamma_{\varepsilon,r} = C_\varepsilon \rho \frac{K}{\varepsilon} v^{-2}$	$\frac{\partial}{\partial x} \left(C_\varepsilon r \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{uv} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(C_\varepsilon r \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{uv} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)$ $+ \frac{C_{\varepsilon 1}}{2} \rho \cdot P_{kk} \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \cdot \rho \cdot \frac{\varepsilon^2}{k}$
Contrainte normale de Reynolds $\overline{u^2}$	$\overline{u^2}$	$\Gamma_{\overline{u^2},x} = C_k \rho \frac{K}{\varepsilon} u^{-2}$ $\Gamma_{\overline{u^2},r} = C_k \rho \frac{K}{\varepsilon} v^{-2}$	$\frac{\partial}{\partial x} \left(C_k r \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{uv} \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(C_k r \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{uv} \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} \right)$ $- C_1 \rho \frac{\varepsilon}{K} \left(\overline{u^2} - \frac{2}{3} K \right) + \frac{2}{3} (C_2 P_{kk} - \rho \varepsilon)$ $+ (1 - C_2) \rho \left[-2 \overline{u^2} \frac{\partial U}{\partial x} - 2 \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial x} \right]$

<p>Contrainte normale de Reynolds \bar{v}^{-2}</p>	<p>\bar{v}^{-2}</p>	<p>$\Gamma_{\bar{v},x}^{-2} = C_k \cdot \rho \frac{K}{\epsilon} \bar{u}^{-2}$ $\Gamma_{\bar{v},r}^{-2} = C_k \cdot \rho \frac{K}{\epsilon} \bar{v}^{-2}$</p>	$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_k \rho \frac{k}{\epsilon} \left(\overline{uv \frac{\partial \bar{v}^{-2}}{\partial r}} - 2 \overline{uw} \frac{\bar{v}^{-2}}{r} \right) \right]$ $+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[C_k \rho \frac{k}{\epsilon} \left(\overline{uv \frac{\partial \bar{v}^{-2}}{\partial x}} - 2 \overline{vw} \frac{\bar{v}^{-2}}{r} \right) \right] + 2 \rho \overline{vw} \frac{W}{r}$ $- \frac{2}{r} \rho C_k \frac{\epsilon}{K} \left[\overline{uv \frac{\partial \bar{v}^{-2}}{\partial x}} + \overline{vw \frac{\partial \bar{v}^{-2}}{\partial r}} + \bar{w}^2 \frac{(\bar{v}^{-2} - \bar{w}^{-2})}{r} \right]$ $- C_1 \rho \frac{\epsilon}{K} \left(\bar{v}^{-2} - \frac{2}{3} K \right) + \frac{2}{3} (C_2 P_{kk} - \rho \epsilon)$ $+ (1 - C_2) \rho \left[-2 \overline{uv} \frac{\partial V}{\partial x} - 2 \bar{v}^{-2} \frac{\partial V}{\partial r} \right]$
<p>Contrainte normale de Reynolds \bar{w}^{-2}</p>	<p>\bar{w}^{-2}</p>	<p>$\Gamma_{\bar{w},x}^{-2} = C_k \cdot \rho \frac{K}{\epsilon} \bar{u}^{-2}$ $\Gamma_{\bar{w},r}^{-2} = C_k \cdot \rho \frac{K}{\epsilon} \bar{v}^{-2}$</p>	$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_k \rho \frac{k}{\epsilon} \left(\overline{uv \frac{\partial \bar{w}^{-2}}{\partial r}} - 2 \overline{uw} \frac{\bar{w}^{-2}}{r} \right) \right]$ $+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[C_k \rho \frac{k}{\epsilon} \left(\overline{uv \frac{\partial \bar{w}^{-2}}{\partial x}} - 2 \overline{vw} \frac{\bar{w}^{-2}}{r} \right) \right] - 2 \rho \overline{vw} \frac{W}{r}$ $+ \frac{2}{r} \rho C_k \frac{\epsilon}{K} \left[\overline{uw \frac{\partial \bar{w}^{-2}}{\partial x}} + \overline{vw \frac{\partial \bar{w}^{-2}}{\partial r}} + \bar{w}^2 \frac{(\bar{v}^{-2} - \bar{w}^{-2})}{r} \right]$ $- C_1 \rho \frac{\epsilon}{K} \left(\bar{w}^{-2} - \frac{2}{3} K \right) + \frac{2}{3} (C_2 P_{kk} - \rho \epsilon)$ $+ (1 - C_2) \rho \left[-2 \overline{uw} \frac{\partial W}{\partial x} - 2 \overline{vw} \frac{\partial W}{\partial r} \right]$
<p>Contrainte de Reynolds tangentielle \bar{uv}</p>	<p>\bar{uv}</p>	<p>$\Gamma_{\bar{uv},x} = C_k \cdot \rho \frac{K}{\epsilon} \bar{u}^{-2}$ $\Gamma_{\bar{uv},r} = C_k \cdot \rho \frac{K}{\epsilon} \bar{v}^{-2}$</p>	$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_k \rho \frac{k}{\epsilon} \left(\overline{uv \frac{\partial \bar{uv}}{\partial r}} - 2 \overline{uw} \frac{\bar{uv}}{r} \right) \right]$ $+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[C_k \rho \frac{k}{\epsilon} \left(\overline{uv \frac{\partial \bar{uv}}{\partial x}} - 2 \overline{vw} \frac{\bar{uv}}{r} \right) \right] + 2 \rho \overline{vw} \frac{W}{r}$ $- \frac{1}{r} \rho C_k \frac{K}{\epsilon} \left[\overline{uw \frac{\partial \bar{uv}}{\partial x}} + \overline{vw \frac{\partial \bar{uv}}{\partial r}} + \bar{w}^2 \frac{\bar{uv}}{r} \right]$ $- C_1 \rho \frac{\epsilon}{K} \bar{uv}$ $+ (1 - C_2) \rho \left[-\bar{u}^{-2} \frac{\partial V}{\partial x} - \bar{uv} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \bar{v}^{-2} \frac{\partial U}{\partial r} + \overline{uw} \frac{W}{r} \right]$

<p>Contrainte de Reynolds tangentielle \overline{uw}</p>	<p>\overline{uw}</p>	<p>$\Gamma_{\overline{uw},x} = C_k \cdot \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{u}^{-2}$ $\Gamma_{\overline{uw},r} = C_k \cdot \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{v}^{-2}$</p>	$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_k \rho \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{uv} \frac{\partial \overline{uw}}{\partial r} - 2 \overline{uw} \frac{\overline{uv}}{r} \right) \right]$ $+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[C_k \rho \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{uv} \frac{\partial \overline{uw}}{\partial x} - 2 \overline{vw} \frac{\overline{uv}}{r} \right) \right] - \rho \overline{uv} \frac{\overline{W}}{r} -$ $\rho \overline{uw} \frac{\overline{V}}{r} - \frac{1}{r} \rho C_k \frac{K}{\varepsilon} \left[\overline{uw} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial x} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial r} + \overline{w}^2 \frac{\overline{uw}}{r} \right]$ $- C_1 \rho \frac{\varepsilon}{K} \overline{uw}$ $+ (1 - C_2) \rho \left[-\overline{u}^2 \frac{\partial \overline{W}}{\partial x} - \overline{uv} \frac{\partial \overline{W}}{\partial r} - \overline{vw} \frac{\partial \overline{U}}{\partial r} - \overline{uw} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} \right]$
<p>Contrainte de Reynolds tangentielle \overline{vw}</p>	<p>\overline{vw}</p>	<p>$\Gamma_{\overline{vw},x} = C_k \cdot \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{u}^{-2}$ $\Gamma_{\overline{vw},r} = C_k \cdot \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{v}^{-2}$</p>	$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_k \rho \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{uv} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial r} - 2 \overline{uw} \frac{(\overline{v}^2 - \overline{w}^2)}{r} \right) \right]$ $+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[C_k \rho \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{uv} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial x} - 2 \overline{vw} \frac{(\overline{v}^2 - \overline{w}^2)}{r} \right) \right]$ $+ \rho \overline{w}^2 \frac{\overline{W}}{r} - \rho \overline{vw} \frac{\overline{V}}{r} - C_1 \rho \frac{\varepsilon}{K} \overline{vw}$ $- \frac{1}{r} \rho C_k \frac{K}{\varepsilon} \left[\overline{uw} \frac{(\overline{v}^2 - \overline{w}^2)}{\partial x} + \overline{vw} \frac{(\overline{v}^2 - \overline{w}^2)}{\partial r} - 4 \overline{w}^2 \frac{\overline{vw}}{r} \right]$ $+ (1 - C_2) \rho \left[-\overline{uv} \frac{\partial \overline{W}}{\partial x} - \overline{v}^2 \frac{\partial \overline{W}}{\partial r} - \overline{uw} \frac{\partial \overline{V}}{\partial r} - \overline{vw} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} \right]$

Tableau (3-2) : Tableau des termes de source du modèle RSTM

3-2-3 Termes de source du modèle ASM

Equation	Variable Φ	Diffusivité Γ	Terme de source $S\Phi$
Continuité	1	0	0
Qt de mvt axiale	U	ρv	$-\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \bar{u}^{-2})}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho \bar{u} v)$
Qt de mvt radiale	V	ρv	$\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho \bar{v}^{-2}) + \rho \frac{W^2}{r} + \rho \frac{\bar{w}^{-2}}{r} - \rho \mu \frac{V}{r^2}$
Qt de mvt circonférentielle	W	ρv	$-\frac{\partial(\rho \bar{u} w)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial r} (r \rho \bar{v} w) - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial(rW)}{\partial r} - \frac{2\rho}{r} \bar{v} w$
Taux de dissipation	ϵ	$\Gamma_{\epsilon,x} = C_{\epsilon} \rho \frac{K}{\epsilon} \bar{u}^{-2}$ $\Gamma_{\epsilon,r} = C_{\epsilon} \rho \frac{K}{\epsilon} \bar{v}^{-2}$	$\frac{\partial}{\partial x} \left(C_{\epsilon} r \rho \frac{k}{\epsilon} \bar{u} v \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(C_{\epsilon} r \rho \frac{k}{\epsilon} \bar{u} v \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right) + \frac{C_{\epsilon 1}}{2} \rho \cdot P_{kk} \frac{\epsilon}{k} - C_{\epsilon 2} \cdot \rho \cdot \frac{\epsilon^2}{k}$
Energie cinétique	K	$\Gamma_{K,x} = C_s \rho \frac{K}{\epsilon} \bar{u}^{-2}$ $\Gamma_{K,r} = C_s \rho \frac{K}{\epsilon} \bar{v}^{-2}$	$\frac{\partial}{\partial x} \left(C_s r \rho \frac{k}{\epsilon} \bar{u} v \frac{\partial K}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(C_s \cdot r \cdot \rho \frac{k}{\epsilon} \bar{u} v \frac{\partial K}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \rho \cdot P_{kk} - \rho \epsilon$
Contrainte normale de Reynolds \bar{u}^{-2}	\bar{u}^{-2}	$\Gamma_{\bar{u}^{-2},x} = C_s \rho \frac{K}{\epsilon} \bar{u}^{-2}$ $\Gamma_{\bar{u}^{-2},r} = C_s \rho \frac{K}{\epsilon} \bar{v}^{-2}$	$\frac{\partial}{\partial x} \left(C_s r \rho \frac{k}{\epsilon} \bar{u} v \frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(C_s \cdot r \cdot \rho \frac{k}{\epsilon} \bar{u} v \frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial x} \right) + \frac{\bar{u}^{-2}}{K} \left(\frac{1}{2} \rho \cdot P_{kk} - \rho \epsilon \right)$
Contrainte normale de Reynolds \bar{v}^{-2}	\bar{v}^{-2}	$\Gamma_{\bar{v}^{-2},x} = C_s \rho \frac{K}{\epsilon} \bar{u}^{-2}$ $\Gamma_{\bar{v}^{-2},r} = C_s \rho \frac{K}{\epsilon} \bar{v}^{-2}$	$\frac{\partial}{\partial x} \left(C_s r \rho \frac{k}{\epsilon} \bar{u} v \frac{\partial \bar{v}^{-2}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(C_s \cdot r \cdot \rho \frac{k}{\epsilon} \bar{u} v \frac{\partial \bar{v}^{-2}}{\partial x} \right) + \frac{\bar{v}^{-2}}{K} \left(\frac{1}{2} \rho \cdot P_{kk} - \rho \epsilon \right)$

<p>Contrainte normale de Reynolds</p> $\frac{\overline{w^2}}{w^2}$	$\frac{\overline{w^2}}{w^2}$	$\Gamma_{\overline{w^2},x} = C_s \cdot \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{u^2}$ $\Gamma_{\overline{w^2},r} = C_s \cdot \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{v^2}$	$\frac{\partial}{\partial x} \left(C_s r \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{uv} \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(C_s \cdot r \cdot \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{uv} \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial x} \right)$ $+ \frac{\overline{w^2}}{K} \left(\frac{1}{2} \rho \cdot P_{kk} - \rho \varepsilon \right)$
<p>Contrainte tangentielle de Reynolds</p> $\frac{\overline{uv}}{uv}$	$\frac{\overline{uv}}{uv}$	$\Gamma_{\overline{uv},x} = C_s \cdot \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{u^2}$ $\Gamma_{\overline{uv},r} = C_s \cdot \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{v^2}$	$\frac{\partial}{\partial x} \left(C_s r \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{uv} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(C_s \cdot r \cdot \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{uv} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial x} \right)$ $+ \frac{\overline{uv}}{K} \left(\frac{1}{2} \rho \cdot P_{kk} - \rho \varepsilon \right)$
<p>Contrainte tangentielle de Reynolds</p> $\frac{\overline{uw}}{uw}$	$\frac{\overline{uw}}{uw}$	$\Gamma_{\overline{uw},x} = C_s \cdot \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{u^2}$ $\Gamma_{\overline{uw},r} = C_s \cdot \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{v^2}$	$\frac{\partial}{\partial x} \left(C_s r \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{uv} \frac{\partial \overline{uw}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(C_s \cdot r \cdot \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{uv} \frac{\partial \overline{uw}}{\partial x} \right)$ $+ \frac{\overline{uw}}{K} \left(\frac{1}{2} \rho \cdot P_{kk} - \rho \varepsilon \right)$
<p>Contrainte tangentielle de Reynolds</p> $\frac{\overline{vw}}{vw}$	$\frac{\overline{vw}}{vw}$	$\Gamma_{\overline{vw},x} = C_s \cdot \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{u^2}$ $\Gamma_{\overline{vw},r} = C_s \cdot \rho \frac{K}{\varepsilon} \overline{v^2}$	$\frac{\partial}{\partial x} \left(C_s r \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{uv} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(C_s \cdot r \cdot \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{uv} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial x} \right)$ $+ \frac{\overline{vw}}{K} \left(\frac{1}{2} \rho \cdot P_{kk} - \rho \varepsilon \right)$

Tableau (3-3) : Tableau des termes de source du modèle ASM

3-3 MAILLAGE :

Un maillage consiste à diviser le domaine d'évolution de l'écoulement en une série de lignes, transversales et longitudinales qui forment des cellules appelées volumes de contrôle, dont les intersections forment les nœuds : lieux de stockage des variables dépendantes ou scalaires.

Chaque nœud du maillage est repéré par deux indices (I) et (J) et le nombre total des nœuds est défini par (Ni × Nj).

La géométrie du maillage du domaine d'étude est schématisée dans la figure suivante (maillage rectangulaire):

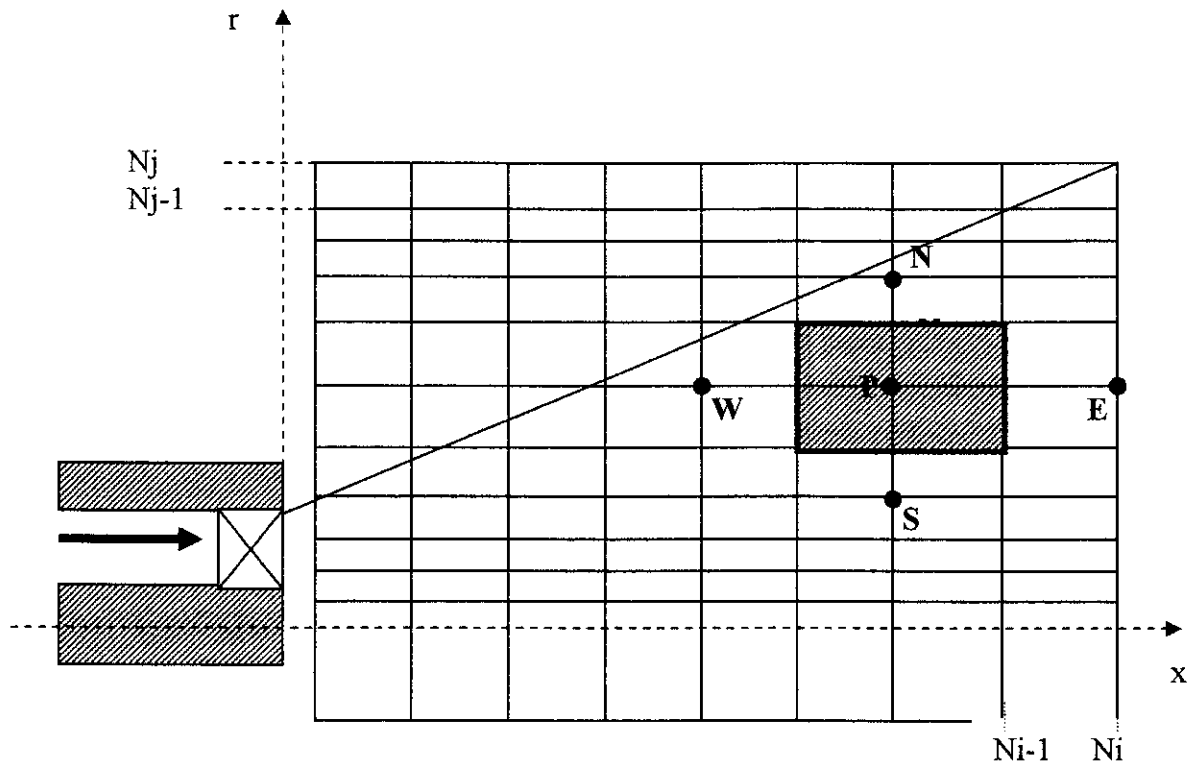


Fig. (3-1) : Grille de maillage

3-3-1 Définition du pas de maillage :

Pour obtenir une distribution satisfaisante des points de calcul à travers l'épaisseur du jet, on adopte le choix des coordonnées cylindriques (x, r) et il convient de raffiner le maillage dans la direction (r) . Il est à signaler que la progression dans la direction (x) de l'écoulement pose un problème de choix du pas Δx , puisque si ce pas est trop grand le schéma diverge et s'il est petit, le temps de calcul augmente ce qui implique un coût élevé.

Il faut faire alors un compromis entre ces deux extrêmes. Pour arriver effectivement à ce compromis, on fixe pour x et r une grille en progression géométrique de raison (q) .

On fixe un nombre de pas maximal (J_m) et on prend :

$$\frac{r(j+1)}{r(j)} = \frac{1-q^j}{1-q^{(j-1)}} \quad (3-2)$$

Où :

$$r(j) = h \cdot \frac{1 - q^{(j-1)}}{1 - q^{(j_m-1)}} \quad (3-3)$$

h : représente la hauteur de la partie à mailler.

Le choix du nombre de pas maximal N_i et N_j se fait en tenant compte du temps de calcul.

3-3-2 Définition du volume de contrôle :

Le maillage consiste à diviser le domaine de calcul en un ensemble de cellules appelées volumes de contrôle (V.C) comme le montre la figure suivante :

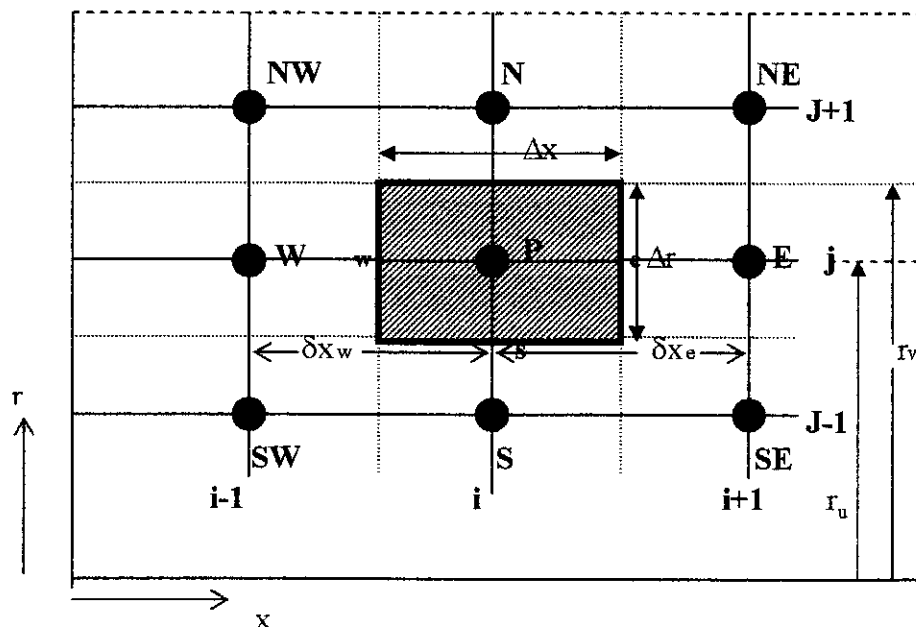


Fig. (3-2) : Volume de contrôle généralisé

Pour chacun de ces volumes :

P : représente le nœud central repéré par deux indices i et j , donnant sa position suivant les directions x et r .

E, W, N, S : représentent les nœuds voisins des volumes de contrôle adjacents ;

e, w, n, s : représentent les milieux de chaque segment reliant deux nœuds adjacents.

3-3-3 Localisation des différents variables :

Pour localiser les différentes variables de l'écoulement, des règles de maillages sont entamées de manière à ce que :

- Les vitesses soient localisées aux interfaces de volumes de contrôle, il en est même pour les contraintes tangentielles de Reynolds qui sont nécessaire à l'évaluation du taux d'écoulement.
- Les variables scalaires sont localisées aux nœuds de maillage.

Cette pratique permet d'augmenter la stabilité numérique.

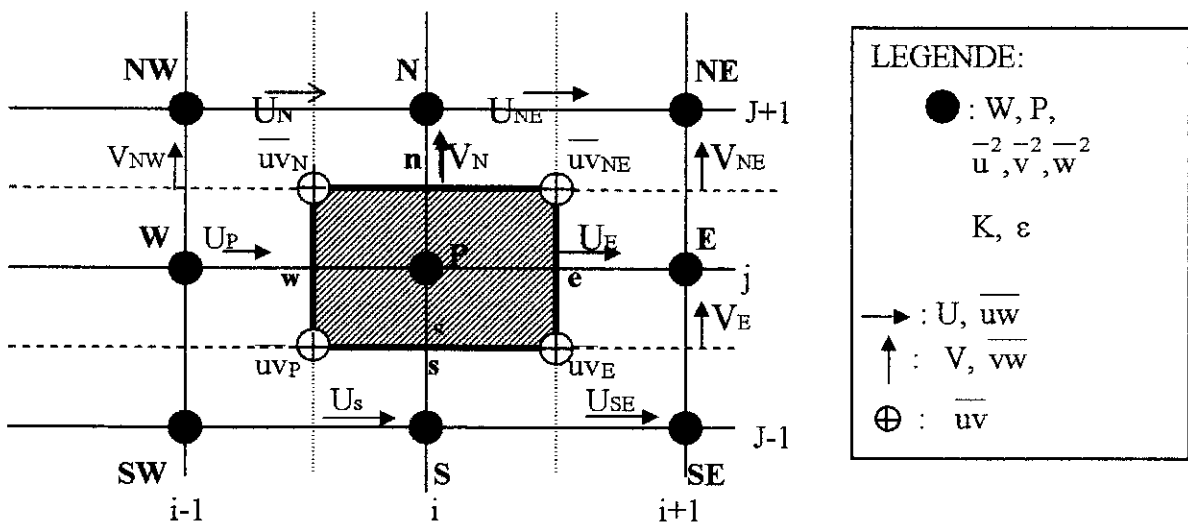


Fig. (3-3) : Volume de contrôle pour chaque variable

3-4 DISCRETISATION DES EQUATIONS DE TRANSPORT :

La discrétisation consiste à transformer les équations différentielles à des équations algébriques approchées.

Les équations algébriques appelées «équations discrétisées» sont déduites de l'intégration des équations de transport. L'intégration sur chaque interface de volume de contrôle selon la figure (3-2) de l'équation générale de transport (3-1), utilisant la notation conventionnelle de Patenkar [19] conduit aux expressions suivantes pour le flux :

L'équation (3-1) peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(\rho r U \Phi) - \left(r \Gamma_{\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[(\rho r V \Phi) - \left(r \Gamma_{\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \right] = r \cdot S_{\phi} \quad (3-2)$$

Si on note :

J_x et J_r les densités de flux totaux (convection + diffusion) à travers le volume de contrôle dans les directions x et r , elles seront données par:

$$\begin{cases} J_x = \rho U \Phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ J_r = \rho V \Phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \end{cases}$$

L'équation précédente s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} (r \cdot J_x) + \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot J_r) = r \cdot S_{\phi} \quad (3-3)$$

Si on intègre l'équation (3-3) sur le volume de contrôle correspondant à la variable ϕ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_s^e \int_w^e \left[\frac{\partial}{\partial x} (r \cdot J_x) + \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot J_r) \right] \cdot \partial x \cdot \partial r &= \int_s^e \int_w^e (r \cdot S_{\phi}) \cdot \partial x \cdot \partial r \\ \int_s^n [(J_x)_e - (J_x)_w] r \cdot \partial r + \int_w^e [(J_r)_n - (J_r)_s] r \cdot \partial x &= \int_s^e \int_w^e r \cdot S_{\phi} \cdot \partial x \cdot \partial r \\ J_e \cdot a_e - J_w \cdot a_w + J_n \cdot a_n - J_s \cdot a_s &= \int_s^e \int_w^e r \cdot S_{\phi} \cdot \partial x \cdot \partial r \end{aligned} \quad (3-4)$$

J_e , J_w , J_n et J_s représentent les densités des flux totaux à travers les faces Est, Ouest, Nord et Sud du volume de contrôle.

a_e , a_w , a_n , a_s Représentent les aires Est, Ouest, Nord et Sud des faces du volume de contrôle.

$$\begin{aligned}
J_e &= (\rho U \Phi)_e - \left(\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e ; & a_e &= (r \cdot \delta r)_e \\
J_w &= (\rho U \Phi)_w - \left(\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w ; & a_w &= (r \cdot \delta r)_w \\
J_n &= (\rho V \Phi)_n - \left(\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_n ; & a_n &= (r \cdot \delta x)_n \\
J_s &= (\rho V \Phi)_s - \left(\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_s ; & a_s &= (r \cdot \delta x)_s
\end{aligned}$$

L'équation intégrée de l'équation de mouvement est donc :

$$\begin{aligned}
& \left[(\rho U \Phi)_e - \Gamma_\Phi \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e \right] \cdot a_e - \left[(\rho U \Phi)_w - \Gamma_\Phi \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w \right] \cdot a_w + \left[(\rho V \Phi)_n - \Gamma_\Phi \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_n \right] \cdot a_n \\
& - \left[(\rho V \Phi)_s - \Gamma_\Phi \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_s \right] \cdot a_s = \int_s^n \int_w^e r \cdot S_\Phi \cdot \partial x \cdot \partial r
\end{aligned}$$

Si cette équation exprime le transfert de masse, on aura l'équation de continuité donnée par :

$$(\rho U)_e \cdot a_e - (\rho U)_w \cdot a_w + (\rho U)_n \cdot a_n - (\rho U)_s \cdot a_s = 0 \quad (3-5)$$

3-4-1 Schémas de discrétisation :

3-4-1-1 Introduction

Les schémas de discrétisation sont de méthodes de calcul adaptées pour évaluer les grandeurs à calculer aux différents points du domaine d'étude.

Ils sont choisis d'après les problèmes traités, suivant la concordance des résultats qu'ils donnent avec les résultats physiques et la stabilité numérique.

Un schéma de discrétisation doit posséder trois propriétés essentielles [20]. Il doit être :

- 1- conservatif.
- 2- Convergent sans conditions
- 3- Non dissipatif.

Le schéma utilisé dans cette étude est le schéma Hybride. Ce dernier est la combinaison de deux autres schémas: schéma des différences centrées (Centred Difference Scheem) et le schéma aux différences décentrées (Upwind Différence Scheem).

3-4-1-2 Schéma aux différences centrées (CDS) :

Ce schéma est basé sur l'approximation des valeurs de la grandeur Φ au niveau des interfaces par une interpolation linéaire.

Les valeurs de Φ au niveau des interfaces du volume de contrôle sont approximées par:

$$\begin{aligned} \Phi_e &= \frac{\Phi_P + \Phi_E}{2} & ; & & \left(\Gamma_\Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e &= \Gamma_e \cdot \frac{(\Phi_E - \Phi_P)}{(\delta x)_e} \\ \Phi_w &= \frac{\Phi_P + \Phi_W}{2} & ; & & \left(\Gamma_\Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w &= \Gamma_w \cdot \frac{(\Phi_P - \Phi_W)}{(\delta x)_w} \\ \Phi_n &= \frac{\Phi_P + \Phi_N}{2} & ; & & \left(\Gamma_\Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_n &= \Gamma_n \cdot \frac{(\Phi_N - \Phi_P)}{(\delta r)_n} \\ \Phi_s &= \frac{\Phi_P + \Phi_S}{2} & ; & & \left(\Gamma_\Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_s &= \Gamma_s \cdot \frac{(\Phi_P - \Phi_S)}{(\delta r)_s} \end{aligned}$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation intégrée, on aura l'équation générale discrétisée par le schéma des différences centrées :

$$A_P \cdot \Phi_P = A_N \cdot \Phi_N + A_S \cdot \Phi_S + A_E \cdot \Phi_E + A_W \cdot \Phi_W + \int \int_{s \ w}^n \Gamma_\Phi \cdot S_\Phi \cdot \partial x \cdot \partial r \quad (3-6)$$

Où:

$$\begin{aligned} A_N &= \left[-\frac{(\rho V)_n}{2} + \Gamma_n \cdot \frac{1}{(\delta r)_n} \right] \cdot a_n \\ A_S &= \left[\frac{(\rho V)_s}{2} + \Gamma_s \cdot \frac{1}{(\delta r)_s} \right] \cdot a_s \\ A_E &= \left[-\frac{(\rho U)_e}{2} + \Gamma_e \cdot \frac{1}{(\delta x)_e} \right] \cdot a_e \\ A_W &= \left[\frac{(\rho U)_w}{2} + \Gamma_w \cdot \frac{1}{(\delta x)_w} \right] \cdot a_w \end{aligned}$$

Si on définit les paramètres F et D par:

$$F = (\rho U) \quad \text{et} \quad D = \frac{\Gamma}{\delta x}$$

$$\text{On aura :} \quad \begin{cases} F_e = (\rho U)_e & ; & D_e = \frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e} \\ F_w = (\rho U)_w & ; & D_w = \frac{\Gamma_w}{(\delta x)_w} \\ F_s = (\rho V)_s & ; & D_s = \frac{\Gamma_s}{(\delta r)_s} \\ F_n = (\rho V)_n & ; & D_n = \frac{\Gamma_n}{(\delta r)_n} \end{cases}$$

Les coefficients Ai s'écrivent alors :

$$A_N = \left[-\frac{F_n}{2} + D_n \right] \cdot a_n$$

$$A_S = \left[\frac{F_s}{2} + D_n \right] \cdot a_s$$

$$A_E = \left[-\frac{F_e}{2} + D_e \right] \cdot a_e$$

$$A_W = \left[\frac{F_w}{2} + D_w \right] \cdot a_w$$

L'équation de continuité s'écrit en fonction de F par :

$$F_n - F_s + F_e - F_w = 0 \quad (3-7)$$

Ce qui vérifie alors :

$$A_P = A_N + A_S + A_E + A_W$$

3-4-1-3 Schéma aux différences décentrées (Upwind):

Ce Schéma prend en considération le sens de l'écoulement pour évaluer les valeurs de Φ au niveau des faces des volumes de contrôle.

$$\Phi_n = \Phi_P \text{ si } F_n > 0 \text{ et } \Phi_n = \Phi_N \text{ si } F_n < 0$$

$$\Phi_e = \Phi_P \text{ si } F_e > 0 \text{ et } \Phi_e = \Phi_E \text{ si } F_e < 0$$

$$\Phi_w = \Phi_W \text{ si } F_w > 0 \text{ et } \Phi_w = \Phi_P \text{ si } F_w < 0$$

$$\Phi_s = \Phi_S \text{ si } F_n > 0 \text{ et } \Phi_s = \Phi_P \text{ si } F_n < 0$$

Ces relations peuvent être généralisées en une seule expression, ne définissant l'opérateur suivant :

$$[[A, B]] = \max(A, B)$$

$$\begin{aligned} F_e \cdot \Phi_e &= \Phi_p \cdot [[F_e, 0]] - \Phi_E \cdot [[-F_e, 0]] \\ F_w \cdot \Phi_w &= \Phi_p \cdot [[-F_w, 0]] + \Phi_W \cdot [[F_w, 0]] \\ F_n \cdot \Phi_n &= \Phi_p \cdot [[F_e, 0]] - \Phi_N \cdot [[-F_n, 0]] \\ F_s \cdot \Phi_s &= \Phi_p \cdot [[-F_s, 0]] + \Phi_S \cdot [[F_s, 0]] \end{aligned}$$

L'équation discrétisée dans ce cas est donnée par:

$$A_P \cdot \Phi_P = A_N \cdot \Phi_N + A_S \cdot \Phi_S + A_E \cdot \Phi_E + A_W \cdot \Phi_W + \int_{SW}^{ne} r \cdot S_\phi \cdot \partial x \cdot \partial r \quad (3-8)$$

Où:

$$\begin{aligned} A_N &= D_n + [[-F_n, 0]] \\ A_S &= D_s + [[F_s, 0]] \\ A_E &= D_e + [[-F_e, 0]] \\ A_W &= D_w + [[F_w, 0]] \end{aligned}$$

$$A_P = A_N + A_S + A_E + A_W$$

3-4-1-4 Schéma Hybride (HDS):

Ce schéma utilise les avantages qu'offrent les schémas centrés et décentrés et réalise un équilibre entre ces deux schémas.

Pour rendre la forme de l'équation discrétisée plus compacte, on définit deux nouvelles grandeurs symbolisées par :

F : intensité de convection

D : Conductance de diffusion.

Tels que :

$$F = \rho U$$

$$D = \frac{\Gamma}{\delta x}$$

En utilisant le nombre de Peclet définie par:

$$P_e = \frac{F}{D} = \frac{(\rho U)}{\Gamma} (\delta x) \quad (3-9)$$

$$\Phi_e = \Phi_p \quad \text{si} \quad P_e > 2$$

$$\Phi_e = \Phi_E \quad \text{si} \quad P_e < -2$$

$$\Phi_e = \frac{\Phi_E + \Phi_p}{2} \quad \text{si} \quad |P_e| < 2$$

Le nombre de Peclet exprime le rapport de convection à la diffusion, l'évolution des grandeurs aux nœuds dépendra de ce nombre.

3-4-1-5 Justification du choix du schéma de discrétisation :

En comparant le schéma hybride aux deux autres schémas, on peut retenir :

- Le schéma hybride coïncide avec le schéma des différences centrées dans le cas où : $|P_e| < 2$, et avec le schéma Upwind pour $|P_e| \geq 2$.
- Aucun des schémas existants ne satisfait les trois conditions. Pour le schéma des différences centrées (CDS), les coefficients d'influences deviennent négatifs si : $F > 2D$ et par conséquent conduit à la divergence de la solution, un maillage fin peut utiliser afin de contourner cette difficulté.

Pour le schéma Upwind, les coefficients d'influence sont toujours supérieurs à zéro et le schéma des solutions physiquement plausibles quel que soit le nombre de Peclet.

Le schéma hybride (HDS) utilise les avantages des deux schémas précédents.

En évaluant toutes les valeurs de la grandeur Φ et ses gradients dans l'équation générale de transport (3-1), on obtient l'équation générale discrétisée dont les coefficients seront notés par A_i :

$$A_p \cdot \Phi_p = A_N \cdot \Phi_N + A_S \cdot \Phi_S + A_E \cdot \Phi_E + A_W \cdot \Phi_W + \int_s^e \int_w^e (r \cdot S_\Phi) \cdot \partial x \cdot \partial r \quad (3-10)$$

Patankar (1980) a proposée une expression générale d'une fonction $A(P_e)$ qui tient compte de toutes les conditions précédentes est :

$$A(P_e) = \llbracket 0, 0 ; 1 - 0,5 | P_e | \rrbracket \quad (3-11)$$

Les coefficients A_i seront données par :

$$\begin{aligned} A_N &= D_n \cdot (|P_n| + \llbracket -F_n, 0 \rrbracket) \\ A_S &= D_s \cdot (|P_s| + \llbracket +F_s, 0 \rrbracket) \\ A_E &= D_e \cdot (|P_e| + \llbracket -F_e, 0 \rrbracket) \\ A_W &= D_w \cdot (|P_w| + \llbracket +F_w, 0 \rrbracket) \end{aligned}$$

$$A_p = A_N + A_S + A_E + A_W$$

3-5- EXPRESSION DU TERME DE SOURCE POUR L'ÉCOULEMENT:

Pour aboutir à la forme finale de l'équation discrétisée Il faut discrétiser le terme de source de chaque variable Φ . Les expressions du terme de source diffèrent d'une variable à un autre et d'un écoulement à un autre.

3-5-1 Nécessité de la linéarisation du terme de source:

Si le terme de source S_Φ dépend de la variable Φ elle-même, il est nécessaire de calculer cette dépendance dans la discrétisation de l'équation gouvernante. Cette dépendance peut être linéaire ou non linéaire. Mais pour que l'équation discrétisée résultante soit linéaire, le terme de source doit être exprimé comme une fonction linéaire en Φ_p .

Soit:

$$\bar{S}_\Phi = \int_s^e \int_w^e r \cdot S_\Phi \cdot \partial x \cdot \partial r = S_c + S_p \cdot \Phi_p \quad (3-12)$$

Où:

S_p : le coefficient de Φ_p

S_c : est la partie qui ne dépend pas explicitement de Φ_p

La bonne formulation est obtenue généralement lorsque la droite de l'équation (3-10) forme une tangente de la courbe ($S - \Phi$).

Il faut noter que:

- La linéarisation du terme de source est souvent une opération cruciale car la modélisation dans de nombreuses situations complexes dépend de la linéarisation.
- Il est nécessaire que la linéarisation abouti à un coefficient (S_p) négatif, car un (S_p) positif puisse causer une divergence.

3-5-2 Exemple d'expression du terme de source relatif à la contrainte normale \bar{u}^{-2} (modèle ASM):

L'intégration se fait sur le volume de contrôle de la figure (3-3) :

$$S_{\bar{u}^{-2}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{srp} \frac{k}{\varepsilon} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(C_s \cdot r \cdot \rho \frac{k}{\varepsilon} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial x} \right) + \frac{\bar{u}^{-2}}{K} \left(\frac{1}{2} \rho \cdot P_{kk} - \rho \varepsilon \right)$$

$$\bar{S}_{\bar{u}^{-2}} = \int_s^e \int_w^e S_{\bar{u}^{-2}} \cdot r \cdot dx dr$$

$$a = \int_s^e \int_w^e \frac{\bar{u}^{-2}}{K} \left(\frac{1}{2} \rho \cdot P_{kk} - \rho \varepsilon \right)$$

$$= \int_s^e \int_w^e \frac{\bar{u}^{-2}}{K} \left[-\rho \cdot \left[\bar{u}^{-2} \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{u} \bar{v} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \bar{v}^{-2} \frac{\partial V}{\partial r} + \bar{u} \bar{w} \frac{\partial W}{\partial x} + \bar{v} \bar{w} \frac{\partial W}{\partial r} \right] - \rho \varepsilon \right] r dx dr$$

$$= -\rho \int_s^e \int_w^e \frac{\bar{u}^{-2}}{K} \varepsilon \cdot r dx dr - \rho \int_s^e \int_w^e \frac{\bar{u}^{-2}}{K} \left[\bar{u}^{-2} \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{u} \bar{v} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \bar{v}^{-2} \frac{\partial V}{\partial r} + \bar{u} \bar{w} \frac{\partial W}{\partial x} + \bar{v} \bar{w} \frac{\partial W}{\partial r} \right] r dx dr$$

$$\begin{aligned}
 a &= -\rho \frac{u_p^{-2}}{K_p} \varepsilon_p \cdot \text{Vol} \\
 & - \rho \frac{u_p^{-2}}{K_p} \left[\frac{u_p^{-2} (U_p - U_e)}{\Delta x} + \overline{uv_p} \left\{ \frac{(U_N + U_{NE} - U_S - U_{SE})}{4\Delta r} - \frac{(V_E + V_{NE} - V_W - V_{NW})}{4\Delta x} \right\} \right. \\
 & \left. + \frac{v_p^{-2} (V_N - V_p)}{\Delta r} + \overline{uw_p} \frac{(W_E - W_w)}{2\Delta x} + \overline{vw_p} \frac{(W_N - W_s)}{2\Delta r} \right] \cdot \text{Vol}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{sr} \cdot \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{uv} \frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial r} \right) r dx dr \\
 &= C_s \rho \left(\frac{K_E + K_P}{\varepsilon_E + \varepsilon_p} \right) \left(\frac{\overline{uv_E} + \overline{uv_{NE}}}{2} \right) \left[\frac{(u_N^{-2} + u_{NE}^{-2} - u_S^{-2} - u_{SE}^{-2})}{4 \cdot \Delta r} \right] a_e \\
 & - C_s \rho \left(\frac{K_E + K_P}{\varepsilon_E + \varepsilon_p} \right) \left(\frac{\overline{uv_N} + \overline{uv_P}}{2} \right) \left[\frac{(u_N^{-2} + u_{NW}^{-2} - u_{SW}^{-2} - u_S^{-2})}{4 \cdot \Delta r} \right] a_w
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c &= \int_s^n \int_w^e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(C_s \cdot r \cdot \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{uv} \frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial x} \right) r dx dr \\
 &= C_s \rho \left(\frac{K_N + K_P}{\varepsilon_N + \varepsilon_p} \right) \left(\frac{\overline{uv_N} + \overline{uv_{NE}}}{2} \right) \left[\frac{(u_E^{-2} + u_{NE}^{-2} - u_{NW}^{-2} - u_W^{-2})}{4 \cdot \Delta x} \right] a_n \\
 & - C_s \rho \left(\frac{K_S + K_P}{\varepsilon_s + \varepsilon_p} \right) \left(\frac{\overline{uv_E} + \overline{uv_P}}{2} \right) \left[\frac{(u_E^{-2} + u_{SE}^{-2} - u_{SW}^{-2} - u_W^{-2})}{4 \cdot \Delta x} \right] a_s
 \end{aligned}$$

$$\bar{S}_u^{-2} = a + b + c$$

3-5-3 Exemple de discrétisation de l'équation générale de transport (3-1) :**Cas de \bar{u}^{-2} (modèle ASM):**

$$\begin{aligned}
& \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial X} \left(\rho r U \bar{u}^{-2} - C_s r \rho \frac{k^{-2}}{\varepsilon} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial X} \right) dx dr + \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho r V \bar{u}^{-2} - C_s r \rho \frac{k^{-2}}{\varepsilon} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial r} \right) dx dr = \int_s^e \int_w^e \bar{S}_u^{-2} r dx dr \\
& \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial X} \left(\rho r U \bar{u}^{-2} - C_s r \rho \frac{k^{-2}}{\varepsilon} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial X} \right) dx dr = \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial X} \left(\rho U \bar{u}^{-2} - C_s \rho \frac{k^{-2}}{\varepsilon} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial X} \right) r dx dr \\
& = \int_s^n \left(\rho U \bar{u}^{-2} - C_s \rho \frac{k^{-2}}{\varepsilon} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial X} \right)_w^e r dr \\
& = \int_s^n \left(\rho U \bar{u}^{-2} \right)_w^e r dr - \int_s^n \left(C_s \rho \frac{k^{-2}}{\varepsilon} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial X} \right)_w^e r dr \\
& = \left[\left(\rho U \bar{u}^{-2} \right)_e - \left(\rho U \bar{u}^{-2} \right)_w \right] \int_s^n r dr - \left[\left(C_s \rho \frac{k^{-2}}{\varepsilon} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial X} \right)_e - \left(C_s \rho \frac{k^{-2}}{\varepsilon} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial X} \right)_w \right] \int_s^n r dr \\
& = \left(\rho U \right)_e \bar{u}_e^{-2} a_e - \left(\rho U \right)_w \bar{u}_w^{-2} a_w - \left(C_s \rho \frac{k^{-2}}{\varepsilon} \bar{u} \right)_e \left(\frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial X} \right)_e a_e + \left(C_s \rho \frac{k^{-2}}{\varepsilon} \bar{u} \right)_w \left(\frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial X} \right)_w a_w \\
& = F_e \left(\frac{\bar{u}_E + \bar{u}_P}{2} \right) a_e - F_w \left(\frac{\bar{u}_W + \bar{u}_P}{2} \right) a_w - \Gamma_e \left(\frac{\bar{u}_E - \bar{u}_P}{\Delta X} \right) a_e + \Gamma_w \left(\frac{\bar{u}_P - \bar{u}_W}{\Delta X} \right) a_w \\
& = \frac{F_e}{2} \left(\bar{u}_E + \bar{u}_P \right) a_e - \frac{F_w}{2} \left(\bar{u}_W + \bar{u}_P \right) a_w - \frac{\Gamma_e}{\Delta X} \left(\bar{u}_E - \bar{u}_P \right) a_e + \frac{\Gamma_w}{\Delta X} \left(\bar{u}_P - \bar{u}_W \right) a_w \\
& = \frac{F_e}{2} \left(\bar{u}_E + \bar{u}_P \right) a_e - \frac{F_w}{2} \left(\bar{u}_W + \bar{u}_P \right) a_w - D_e \left(\bar{u}_E - \bar{u}_P \right) a_e + D_w \left(\bar{u}_P - \bar{u}_W \right) a_w \\
& \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho r V \bar{u}^{-2} - C_s r \rho \frac{k^{-2}}{\varepsilon} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial r} \right) dx dr = \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial X} \left(\rho r V \bar{u}^{-2} - C_s r \rho \frac{k^{-2}}{\varepsilon} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial r} \right) r dx dr \\
& = \int_w^e \left(\rho V \bar{u}^{-2} - C_s \rho \frac{k^{-2}}{\varepsilon} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial r} \right)_s^n r dx
\end{aligned}$$

De la même manière on trouve :

$$\int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho r V \bar{u}^{-2} - C_s r \rho \frac{k^{-2}}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial x} \right) dx dr =$$

$$\frac{F_n}{2} (\bar{u}_N + \bar{u}_P)^{-2} a_n - \frac{F_s}{2} (\bar{u}_S + \bar{u}_P)^{-2} a_s - D_n (\bar{u}_N - \bar{u}_P)^{-2} a_n + D_s (\bar{u}_P - \bar{u}_S)^{-2} a_s$$

$$\int_s^e \int_w^e \bar{S}_u^{-2} dx dr = \bar{S}_u^{-2} \text{ (Déjà calculé précédemment)}$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \frac{F_e}{2} (\bar{u}_E + \bar{u}_P)^{-2} a_e - \frac{F_w}{2} (\bar{u}_W + \bar{u}_P)^{-2} a_w - D_e (\bar{u}_E - \bar{u}_P)^{-2} a_e + D_w (\bar{u}_P - \bar{u}_W)^{-2} a_w \\ & + \frac{F_n}{2} (\bar{u}_N + \bar{u}_P)^{-2} a_n - \frac{F_s}{2} (\bar{u}_S + \bar{u}_P)^{-2} a_s - D_n (\bar{u}_N - \bar{u}_P)^{-2} a_n + D_s (\bar{u}_P - \bar{u}_S)^{-2} a_s = \bar{S}_u^{-2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[\left(D_e + \frac{F_e}{2} \right) a_e + \left(D_w - \frac{F_w}{2} \right) a_w + \left(D_n + \frac{F_n}{2} \right) a_n + \left(D_s - \frac{F_s}{2} \right) a_s \right] \bar{u}_P^{-2} =$$

$$\left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) a_e \bar{u}_E^{-2} + \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) a_w \bar{u}_W^{-2} + \left(D_n - \frac{F_n}{2} \right) a_n \bar{u}_N^{-2} + \left(D_s + \frac{F_s}{2} \right) a_s \bar{u}_S^{-2} + \bar{S}_u^{-2}$$

$$\left[A_E + A_W + A_N + A_S + (F_e a_e - F_w a_w + F_n a_n - F_s a_s) \right] \bar{u}_P^{-2} =$$

$$A_E a_e \bar{u}_E^{-2} + A_W a_w \bar{u}_W^{-2} + A_N a_n \bar{u}_N^{-2} + A_S a_s \bar{u}_S^{-2} + \bar{S}_u^{-2}$$

$$A_P \bar{u}_P^{-2} = A_E a_e \bar{u}_E^{-2} + A_W a_w \bar{u}_W^{-2} + A_N a_n \bar{u}_N^{-2} + A_S a_s \bar{u}_S^{-2} + \bar{S}_u^{-2}$$

Selon la règle de base (n°4) [25] de la méthode de volumes finies qui implique :

$$a_P = \sum a_{nb}$$

Le taux d'écoulement de masse : $(F_e a_e - F_w a_w + F_n a_n - F_s a_s)$ doit satisfaire l'équation de continuité.

Selon le principe de conservation de masse :

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho V)}{\partial r} = 0$$

$$\int_s^e \int_w^e \left(\frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho V)}{\partial r} \right) r dx dr = 0$$

3-6 TRAITEMENT DE LA PRESSION :

(Algorithme SIMPLE : Semi Implicit Méthode for Pressure Linked Equation)

Pour le traitement explicite du champ de pression, Patankar et Spalding [09] ont développé l'algorithme « SIMPLE ». Cet algorithme est basé sur la méthode suivante :

En donnant un champ initial de pression dans le domaine d'écoulement, les vitesses figurant dans l'équation de continuité, intégrée sur le volume de contrôle associé à la pression, seront alors des vitesses approchées. Elles ne vérifient pas l'équation de conservation de masse à cause d'un résidu de masse (M) accumulé dans le volume de contrôle dû à la fausse distribution de pression. Ceci peut se traduire mathématiquement par :

Si on note les valeurs exactes des composantes de vitesses et de pression U, V, P, les valeurs approchées seront notés par : U*, V* et P*.

- Pour les valeurs exactes de vitesses, l'équation de continuité intégrée sur le volume de contrôle s'écrit :

$$(\rho U)_e a_e - (\rho U)_w a_w + (\rho V)_n a_n - (\rho V)_s a_s = 0 \quad (3-13)$$

- Dans le cas des valeurs approchées, il n'y aura pas de conservation de masse. L'équation de continuité est donnée par :

$$(\rho U^*)_e a_e - (\rho U^*)_w a_w + (\rho V^*)_n a_n - (\rho V^*)_s a_s = M \quad (3-14)$$

M : Résidu de masse dû au champ approché de pression.

Les corrections de vitesses approchées doivent réduire le résidu (M) du processus d'intégration à zéro. Pour cela Patankar et Spalding [09] ont développé l'algorithme SIMPLE pour le traitement de champ de pression contenu dans les termes de source des équations de quantité de mouvement.

Les valeurs exactes de variables (vitesses et pression) seront égales à la somme des valeurs approchées et les corrections (fluctuations) :

Soient :

$$U = U^* + u \quad (3-15)$$

$$V = V^* + v$$

$$P = P^* + p \quad (3-16)$$

Tels que :

(u, v, p) : les fluctuations des variables considérées.

$$(3-13) - (3-14) = \rho(U_e - U_e^*)a_e - \rho(U_w - U_w^*)a_w + \rho(U_n - U_n^*)a_n - \rho(U_s - U_s^*)a_s = -M$$

$$\rho u_e \cdot a_e - \rho u_w \cdot a_w + \rho u_n \cdot a_n - \rho u_s \cdot a_s = -M \quad (3-17)$$

Les équations discrétisées de quantité de mouvement de composantes de vitesses U et V dans le cas d'un champ exacte de pression s'écrivent :

$$A_P^U \cdot U_P = A_E^U \cdot U_E + A_W^U \cdot U_W + A_N^U \cdot U_N + A_S^U \cdot U_S + (P_w - P_p) \cdot (r \cdot \delta r)^u \quad (3-18)$$

$$A_P^U \cdot V_P = A_E^U \cdot V_E + A_W^U \cdot V_W + A_N^U \cdot V_N + A_S^U \cdot V_S + (P_s - P_p) \cdot (r \cdot \delta x)^v \quad (3-19)$$

Les équations précédentes s'écrivent de la même façon pour les vitesses approchées :

$$A_P^U \cdot U_P^* = A_E^U \cdot U_E^* + A_W^U \cdot U_W^* + A_N^U \cdot U_N^* + A_S^U \cdot U_S^* + (P_w^* - P_p^*) \cdot (r \cdot \delta r)^u \quad (3-20)$$

$$A_P^U \cdot V_P^* = A_E^U \cdot V_E^* + A_W^U \cdot V_W^* + A_N^U \cdot V_N^* + A_S^U \cdot V_S^* + (P_s^* - P_p^*) \cdot (r \cdot \delta x)^v \quad (3-21)$$

En soustrayant l'équation (3-18) de l'équation (3-20), on aura :

$$A_P^U \cdot (U_P - U_P^*) = A_E^U \cdot (U_E - U_E^*) + A_W^U \cdot (U_W - U_W^*) + A_N^U \cdot (U_N - U_N^*) + A_S^U \cdot (U_S - U_S^*) + \left[(P_w - P_w^*) - (P_p - P_p^*) \right] \cdot (r \cdot \delta r)^u$$

Donc :

$$A_P^U \cdot u_P = A_E^U \cdot u_E + A_W^U \cdot u_W + A_N^U \cdot u_N + A_S^U \cdot u_S + (p_w - p_p) \cdot (r \cdot \delta r)^u \quad (3-22)$$

En soustrayant l'équation (3-19) de l'équation (3-21), on aura :

$$A_P^V (V_P - V_P^*) = A_E^V (V_E - V_E^*) + A_W^V (V_W - V_W^*) + A_N^V (V_N - V_N^*) + A_S^V (V_S - V_S^*) + [(P_S - P_S^*) - (P_P - P_P^*)] (r.\delta x)^V$$

Donc :

$$A_P^V . V_P = A_E^V . V_E + A_W^V . V_W + A_N^V . V_N + A_S^V . V_S + (p_S - p_P) . (r.\delta x)^V \quad (3-22)$$

On suppose que la vitesse se corrige en un point en fonction des corrections de pression seulement sans tenir compte des corrections de vitesses des points voisins, donc les équations pour les corrections se réduisent à :

$$A_P^U . u_P = (p_w - p_P) . (r.\delta r)^u$$

$$A_P^V . v_P = (p_S - p_P) . (r.\delta x)^V$$

D'où :

$$u_P = \frac{(p_w - p_P) . (r.\delta r)^u}{A_P^U}$$

$$v_P = \frac{(p_S - p_P) . (r.\delta x)^V}{A_P^V}$$

On note par : $d_u = \frac{..(r.\delta r)^u}{A_P^U}$ et $d_v = \frac{..(r.\delta x)^V}{A_P^V}$

$(r.\delta r)^u$ et $(r.\delta x)^V$ Sont les aires de faces des volumes de contrôle des composantes U et V respectivement.

$$\text{Donc : } \begin{aligned} u_P &= d_u . (p_w - p_P) \\ v_P &= d_v . (p_S - p_P) \end{aligned} \quad (3-23)$$

On peut exprimer les vitesses fluctuantes (u_e, u_w, v_n, v_s) de l'équation (3-17) par (3-23) :

$$\begin{aligned} u_e &= d_{u_e} . (p_P - p_E) \\ u_w &= d_{u_w} . (p_P - p_W) \\ v_n &= d_{v_n} . (p_P - p_N) \\ v_s &= d_{v_s} . (p_P - p_S) \end{aligned} \quad (3-24)$$

En substituant les valeurs de corrections des vitesses précédentes (3-24) dans l'équation (3-17), on obtient l'équation discrétisée de la correction de pression (p) :

$$\begin{aligned} \rho du_e (p_P - p_E) a_e - \rho du_w (p_P - p_W) a_w + \rho dv_n (p_P - p_N) a_n - \rho dv_s (p_P - p_S) a_s &= -M \\ (\rho du_e a_e - \rho du_w a_w + \rho dv_n a_n - \rho dv_s a_s) p_P &= \\ (\rho du_e a_e) p_E + (-\rho du_w a_w) p_W + (\rho dv_n a_n) p_N + (-\rho dv_s a_s) p_S - M \end{aligned}$$

$$A_P \cdot p_P = A_E \cdot p_E + A_W \cdot p_W + A_N \cdot p_N + A_S \cdot p_S - M \quad (3-25)$$

Avec :

$$A_E = \rho du_e a_e$$

$$A_W = -\rho du_w a_w$$

$$A_N = \rho dv_n a_n$$

$$A_S = \rho dv_s a_s$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S$$

En fin, on peut conclure les étapes d'algorithme SIMPLE :

- 1) Estimation du champ de pression : P*
- 2) Substitution de P* dans les équations (3-20) et (3-21) et résoudre les équations de mouvement sur la première ligne pour (U et V) pour obtenir les vitesses (U* et V*) en se basant sur ce champ de pression.
- 3) Ces vitesses (U*, V*), en général ne satisfaisant pas l'équation de continuité, on les substitue dans l'équation (3-14), pour obtenir le résidu de masse M.
- 4) Substitution de M dans l'équation (3-25) pour obtenir le champ de pression (p).
- 5) Substitution de (p) dans l'équation (3-16) pour obtenir (P) et dans l'équation (3-24) pour obtenir les vitesses (u_e, u_w, v_n, v_s).
- 6) Prendre (P) comme nouveau (P*) et retourner à l'étape 2 en répétant les étapes (2 à 5) jusqu'à la tolérance permet.
- 7) Avancer à la ligne suivante en répétant les étapes (2 à 6).
- 8) Continuer jusqu'au balayage complet du domaine de calcul.
- 9) Perfectionner avec plusieurs balayages si ceci conduit à une solution convergente vers une tolérance prescrite.

3-7 SOLUTION NUMERIQUE DU SYSTEME ALGEBRIQUE :

Le choix de la méthode de résolution numérique dépend surtout de la capacité de stockage de la mémoire du calculateur et le temps d'exécution.

Les méthodes de calcul d'un système algébrique sont classées en deux catégories principales :

- Méthodes directes qui sont limitées aux seuls systèmes linéaires et elles exigent une mémoire énorme et un temps de calcul relativement grand.
- Méthodes indirectes qui peuvent s'appliquer aux systèmes non linéaires et surtout aux problèmes où de nombreux éléments matriciels sont nuls, ce qui nécessite moins de mémoire d'ordinateur que les méthodes directes.

Puisque notre système est non linéaire, on doit le résoudre d'une manière itérative en utilisant une méthode indirecte. La méthode proposée de Settari et Aziz [26] consiste en deux étapes :

- Technique ligne par ligne (station par station).
- La procédure de correction par bloc.

Cette technique consiste à faire un balayage ligne par ligne, c'est à dire rendre le système étudié à un système à matrice tri diagonale et utiliser l'algorithme de Thomas [08] pour la résolution de ce type de matrice comme unité de base.

Dans le cas étudié, le système d'équations algébrique obtenu est :

$$A_p \cdot \Phi_p = A_E \cdot \Phi_E + A_w \cdot \Phi_w + A_N \cdot \Phi_N + A_s \cdot \Phi_s + \bar{S}_\phi \quad (3-26)$$

Pour un nœud (I, J), l'équation précédente peut s'écrire :

$$\begin{aligned} A_p(I, J) \cdot \Phi(I, J) = & A_E(I, J) \cdot \Phi(I + 1, J) + A_w(I, J) \cdot \Phi(I - 1, J) \\ & + A_N(I, J) \cdot \Phi(I, J + 1) + A_s(I, J) \cdot \Phi(I, J - 1) + \bar{S}_\phi \end{aligned} \quad (3-27)$$

Le balayage suivant (x) se fait comme suit :

Pour déterminer les valeurs d'une grandeur $\Phi(I, J)$ sur une ligne choisie (I), les valeurs sur les lignes voisines (I-1) et (I+1) sont connues. L'équation précédente peut être écrite sous un système tri diagonal suivant :

$$a(J).\Phi(J) = b(J).\Phi(J + 1) + c(J).\Phi(J - 1) + d(J) \quad (3-28)$$

Tels que :

$$\begin{aligned} a(J) &= A_p(I, J) \\ b(J) &= A_N(I, J + 1) \\ c(J) &= A_S(I, J - 1) \\ d(J) &= A_E(I, J).\Phi(I + 1, J) + A_W(I - 1, J).\Phi(I - 1, J) + \bar{S}_\phi \end{aligned}$$

(3-29)

Les valeurs de $\Phi(1)$ et $\Phi(NJ)$ sont données par les conditions aux limites.

Sous forme matricielle, le système s'écrit :

$$\begin{aligned} a(J).\Phi(J) &= b(J).\Phi(J + 1) + c(J).\Phi(J - 1) + d(J) \\ \Leftrightarrow a(J).\Phi(J) - b(J).\Phi(J + 1) - c(J).\Phi(J - 1) &= d(J) \\ \Leftrightarrow [A][\Phi] &= [D] \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a(2) & -b(2) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -c(3) & a(3) & -b(2) & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & -c(NJ-1) & a(NJ-1) & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(2) \\ \Phi(3) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi(NJ-2) \\ \Phi(NJ-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(1) + c(2).\Phi(1) \\ d(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d(NJ-1) \\ d(NJ) + b(NJ-1).\Phi(NJ+1) \end{bmatrix} \quad (3-30)$$

Pour la détermination du système tri diagonal, on utilise l'algorithme de Thomas qui réduit la matrice tri diagonale en une matrice bi diagonale et unitaire (les termes de diagonales sont égaux a 1) dont la solution est immédiate.

Les étapes de résolution sont :

La première ligne du matrice donne la valeur de $\Phi(2)$ en fonction de $\Phi(3)$:

$$\Phi(2) = \frac{b(2)}{a(2)} \cdot \Phi(3) + \frac{d(2) + c(2) \cdot \Phi(1)}{a(2)}$$

$$\Phi(2) = a'(2) \cdot \Phi(3) + b'(2)$$

Avec :

$$a'(2) = \frac{b(2)}{a(2)}$$

$$b'(2) = \frac{d(2) + c(2) \cdot \Phi(1)}{a(2)}$$

On remplace $\Phi(2)$ par son expression dans la deuxième ligne qui donne la valeur de $\Phi(3)$ en fonction de $\Phi(4)$.

$$\Phi(2) = \frac{b(3)}{a(3) - c(3) \cdot a'(2)} \cdot \Phi(4) + \frac{d(3) + c(3) \cdot b'(2)}{a(3) - c(3) \cdot a'(2)}$$

$$\Phi(3) = a'(3) \cdot \Phi(4) + b'(3)$$

Avec :

$$a'(3) = \frac{b(3)}{a(3) - c(3) \cdot a'(2)}$$

$$b'(3) = \frac{d(3) + c(3) \cdot b'(2)}{a(3) - c(3) \cdot a'(2)}$$

Ainsi on aura les formules généralisées :

$$\Phi(J) = a'(J) \cdot \Phi(J+1) + b'(J) \tag{3-31}$$

Avec :

$$\begin{aligned} a'(J) &= \frac{b(J)}{a(J) - c(J) \cdot a'(J-1)} \\ b'(J) &= \frac{d(J) + c(J) \cdot b'(J-1)}{a(J) - c(J) \cdot a'(J-1)} \end{aligned} \tag{3-32}$$

Donc le système associé sous forme matricielle est :

$$\begin{bmatrix} 1 & -a'(2) & 0 & & & & & 0 \\ 0 & 1 & -a'(3) & 0 & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ 0 & & & & & & 1 & -a'(J) \\ 0 & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(2) \\ \Phi(3) \\ \vdots \\ \vdots \\ \Phi(NJ-2) \\ \Phi(NJ-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'(2) \\ b'(3) \\ \vdots \\ \vdots \\ b'(NJ-2) \\ b'(NJ-1) \end{bmatrix} \quad (3-33)$$

3-8 SOUS RELAXATION :

Le procédé de la résolution itérative consiste à modifier successivement les valeurs de Φ de manière à approcher la solution correcte. L'expérience numérique montre que, dans les calculs des problèmes complexes, le changement trop rapide des valeurs de Φ du tour à l'autre risque de provoquer des instabilités numérique. Par conséquent, pour minimiser les risques de divergence, il est toujours souhaitable d'amortir l'amplitude de ces changements en utilisant la technique de sous relaxation reflétée dans ce qui suit:

Soit l'équation (3-26), écrite sous une forme générale :

$$A_p \Phi_p = \sum A_i \Phi_i + c \quad (3-34)$$

Cette dernière peut être écrite sous la forme suivante :

$$\Phi_p^n = \Phi_p^{n-1} + \left[\frac{\sum A_i \Phi_i^n + c}{A_p} - \Phi_p^{n-1} \right] \quad (3-34)$$

Le contenu entre parenthèse de l'équation (3-34), peut être interprété comme le changement de Φ_p dans l'itération (n-1) à l'itération (n). Pour réduire ce changement, un facteur de sous relaxation α (dont la valeur varie entre 0 et 1) peut être introduit tel que :

$$\Phi_p^n = \Phi_p^{n-1} + \alpha \left[\frac{\sum A_i \Phi_i^n + c}{A_p} - \Phi_p^{n-1} \right] \quad (3-35)$$

Cette équation peut être écrite sous la forme :

$$\frac{A_p}{\alpha} \cdot \Phi_p^n = \sum A_i \Phi_i + c + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} A_p \Phi_p^{n-1} \quad (3-36)$$

L'utilisation de cette équation (3-36) avec une valeur appropriée de α introduit la sous relaxation désirée dans la solution de système d'équation algébriques.

- Si α est près de zéro, les valeurs de Φ changent très rapidement ;
- Quand $\alpha=1$, pas de sous relaxation.
- Si α est choisi près de l'unité, les valeurs de Φ changent plus rapidement que le changement impliqué par (3-34), ce comportement est connu par « sur relaxation ».

Ainsi, il est montré que la sous relaxation peut être inclut automatiquement dans le système d'équation en modifiant seulement A_p et le terme de source. En plus on diminue la valeur de α

3-9 ETAPES DE SOLUTION :

Les étapes de solution sont les suivantes :

1)- Estimation d'un champ initial pour les variables du cas étudié $\left[U, V, W, \overline{u^2}, \overline{v^2}, \overline{w^2}, \overline{uv}, \overline{uw}, \overline{vw}, K, \varepsilon \right]$.

2)- Estimation d'un champ initial de pression : P^*

3)- Résolution des équations de quantité de mouvement pour obtenir : (U^*, V^*)

4)- Obtention de la source de masse et résolution de l'équation de correction de pression : (p).

5) Correction de champ de pression et de vitesse et mise a jour de : (P, U, V) .

6) Solution des équations discrétisées pour d'autres variables (Φ) : $\left[W, \overline{u^2}, \overline{v^2}, \overline{w^2}, \overline{uv}, \overline{uw}, \overline{vw}, K, \varepsilon \right]$

7) On considère le champ de pression corrigé P comme champ de pression approximé P^* , et refaire des étapes (2 à 6) jusqu'à atteindre la convergence.

3-10 STRUCTURE GENERALE DU CODE DE CALCUL :

Le code de calcul utilisé est composé d'un programme principal et de des sous programme, la fonction de chaque sous subroutine est :

3-10-1 Modèle RTSM :

- 1-Init : Calcul des différents paramètres géométriques du maillage et initialisation des variables.
- 2- Clac U : Calcul des coefficients (A_i) et résolution des équations de transport de la composante de vitesse (U^*).
- 3- Calc V : Calcul des coefficients (A_i) et résolution des équations de transport la composante de vitesse (V^*).
- 4- Calc P : Calcul des coefficients (A_i), résolution de l'équation de correction de pression (P^*) et correction des composantes de vitesses (U, V).
- 5- $\left[\text{Calc } W, \text{Calc } \bar{u}^2, \text{Calc } \bar{v}^2, \text{Calc } \bar{w}^2, \text{Calc } \bar{uv}, \text{Calc } \bar{uw}, \text{Calc } \bar{vw}, \text{Calc } \varepsilon \right]$:
Calcul des coefficients A_i et résolution des équations de transport de tous les variables cotés ci-dessus.
- 6- Calvi : Calcul des termes de diffusivité ($\Gamma_{\phi,x}, \Gamma_{\phi,r}$), et le calcul de l'énergie cinétique de turbulence : K .
- 7- ModU : Calcul de conditions aux limites de la composante de vitesse U .
- 8- ModV : Calcul de conditions aux limites de la composante de vitesse V .
- 9- ModW : Calcul de conditions aux limites de la composante de vitesse W .
- 10- $\left[\text{Mod } \bar{u}^2, \text{Mod } \bar{v}^2, \text{Mod } \bar{w}^2, \text{Mod } \bar{uv}, \text{Mod } \bar{uw}, \text{Mod } \bar{vw}, \text{Mod } \varepsilon \right]$:
Calcul des conditions aux limites de chaque variable cité ci-dessus.
- 11- Lisolv : Résolution du système d'équations algébriques associé à la variable Φ en général.
- 12- Print : Impression des résultats.

3-10-2 Modèle ASM :

- 1-Init : Calcul des différents paramètres géométriques du maillage et initialisation des variables.
- 2- Clac U : Calcul des coefficients (A_i) et résolution des équations de transport de la composante de vitesse (U^*).

- 3- Calc V : Calcul des coefficients (A_i) et résolution des équations de transport la composante de vitesse (V^*).
- 4- Calc P : Calcul des coefficients (A_i), résolution de l'équation de correction de pression (P^*) et correction des composantes de vitesses (U, V).
- 5- $\left[\text{Calc } W, \text{Calc } \bar{u}^2, \text{Calc } \bar{v}^2, \text{Calc } \bar{w}^2, \text{Calc } \overline{uv}, \text{Calc } \overline{uw}, \text{Calc } \overline{vw}, \text{Calc } K, \text{Calc } \varepsilon \right]$:
Calcul des coefficients A_i et résolution des équations de transport de tous les variables cotés ci-dessus.
- 6- Calvi : Calcul des termes de diffusivité ($\Gamma_{\Phi,x}, \Gamma_{\Phi,r}$)
- 7- ModU : Calcul de conditions aux limites de la composante de vitesse U.
- 8- ModV : Calcul de conditions aux limites de la composante de vitesse V.
- 9- ModW : Calcul de conditions aux limites de la composante de vitesse W.
- 10- $\left[\text{Mod } \bar{u}^2, \text{Mod } \bar{v}^2, \text{Mod } \bar{w}^2, \text{Mod } \overline{uv}, \text{Mod } \overline{uw}, \text{Mod } \overline{vw}, \text{Mod } K, \text{Mod } \varepsilon \right]$:
Calcul des conditions aux limites de chaque variable cité ci-dessus.
- 11- Lisolv : Résolution du système d'équations algébriques associé à la variable Φ en général.
- 12- Print : Impression des résultats.

3-10-3 Modèle K- ε :

- 1-Init : Calcul des différents paramètres géométriques du maillage et initialisation des variables.
- 2- Clac U : Calcul des coefficients (A_i) et résolution des équations de transport de la composante de vitesse (U^*).
- 3- Calc V : Calcul des coefficients (A_i) et résolution des équations de transport la composante de vitesse (V^*).
- 4- Calc P : Calcul des coefficients (A_i), résolution de l'équation de correction de pression (P^*) et correction des composantes de vitesses (U, V).
- 5- Calc W : Calcul des coefficients (A_i) et résolution des équations de transport la composante de vitesse (W^*).
- 6- Calc K : Calcul des coefficients (A_i) et résolution des équations de transport de l'énergie cinétique turbulente K.

- 7- Calc ϵ : Calcul des coefficients (A_i) et résolution des équations de transport du taux de dissipation ϵ .
- 8- Calvi : Calcul de la viscosité turbulente
- 9- Cal \bar{u}^{-2} : Calcul du contrainte de turbulence \bar{u}^{-2} .
- 10- ModU : Calcul de conditions aux limites de la composante de vitesse U.
- 11- ModV : Calcul de conditions aux limites de la composante de vitesse V.
- 12- ModW : Calcul de conditions aux limites de la composante de vitesse W.
- 13- ModK : Calcul de conditions aux limites de l'énergie cinétique turbulente K.
- 14- Mod ϵ : Calcul de conditions aux limites du taux de dissipation ϵ .
- 8- Lisolv : Résolution du système d'équations algébriques associé à la variable Φ en général.
- 9- Print : Impression des résultats.

3- 11 CRITERE DE CONVERGENCE :

Le critère de convergence de la résolution itérative est basé sur les résidus absolus normalisés des équations à résoudre. Ils sont définis comme suit :

$$\text{Resor}\Phi = \sum \left| \frac{\sum A_i \Phi_i^n + S_\Phi - A_p \Phi_p}{F_{in\Phi}} \right| \quad (3-37)$$

Resor Φ est la somme des résidus normalisés en valeur absolue correspondant à la variable générale Φ .

$$\text{Resor}M = \sum \left| \frac{m_{ij}}{m_{in}} \right| \quad (3-38)$$

ResorM est la somme des résidus de masse normalisées en valeur absolue. Pour les équation de mouvement, F_{in} et m_{in} sont respectivement le flux et le débit massique total à l'entrée.

Sorce= Maximum de Resor Φ (ResorM, ResorU, ResorV, ResorW, Resor \bar{u}^{-2} , Resor \bar{v}^{-2} , Resor \bar{w}^{-2} , Resor \bar{uv} , Resor \bar{uw} , Resor \bar{vw} , ResorK, Resor ϵ).

La solution convergera quand ces résidus se réduisent à une valeur inférieure à celle prescrite par Sormax. Sormax = $\epsilon^?$.

3-12 ORGANIGRAMMES:

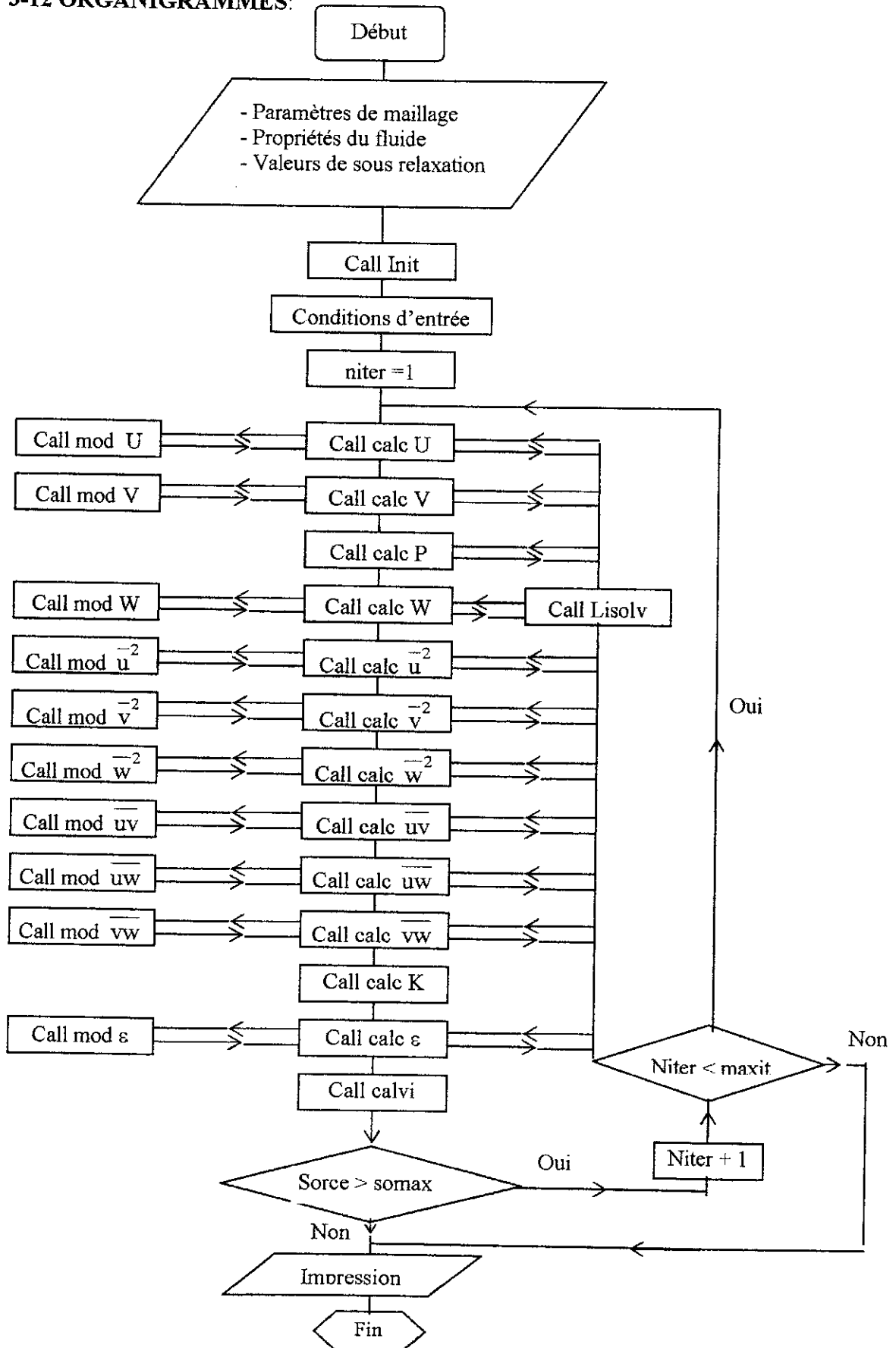


Fig. (3-4) : Organigramme de calcul pour le modèle RSTM

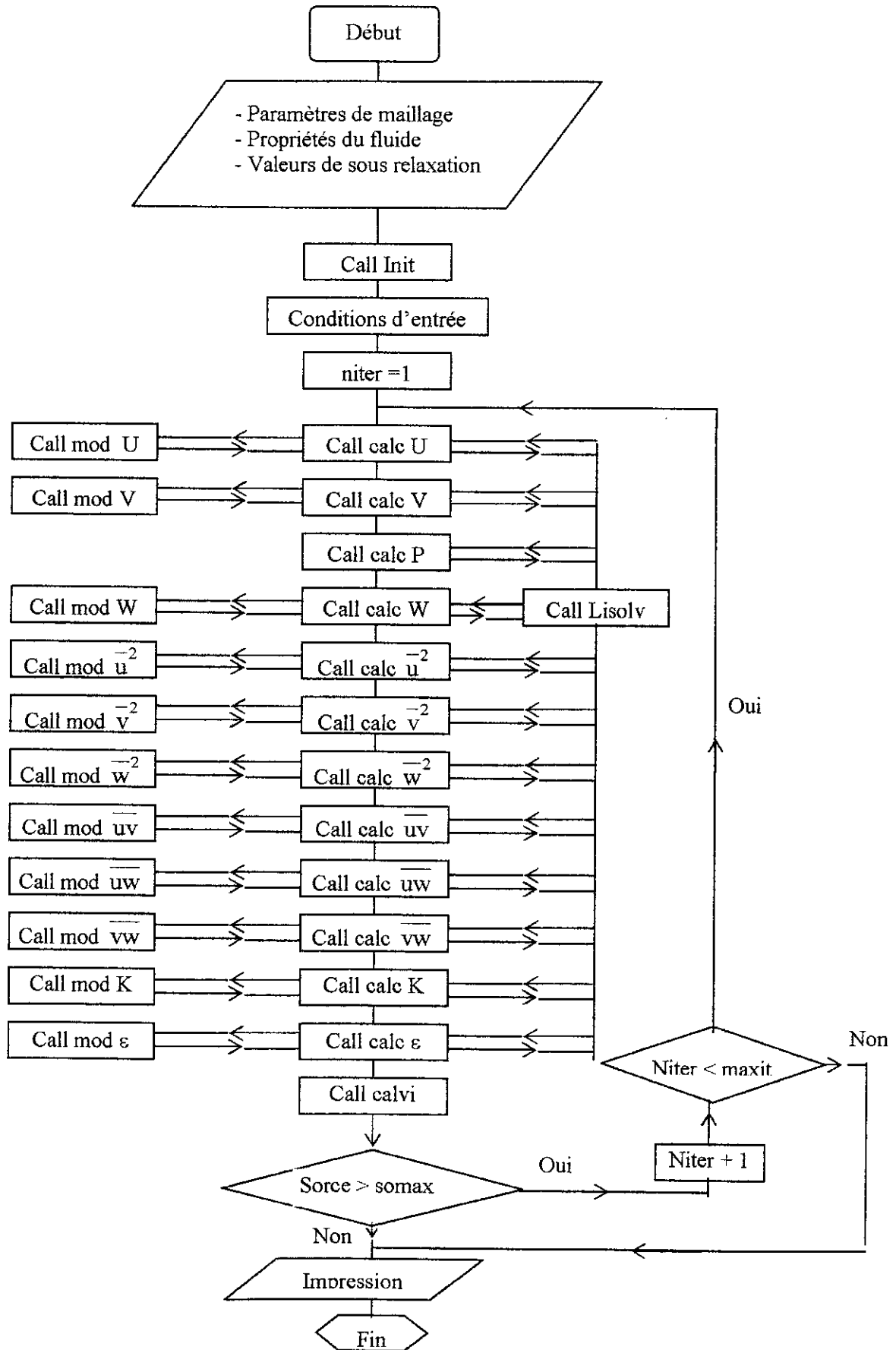


Fig. (3-5) : Organigramme de calcul pour le modèle ASM

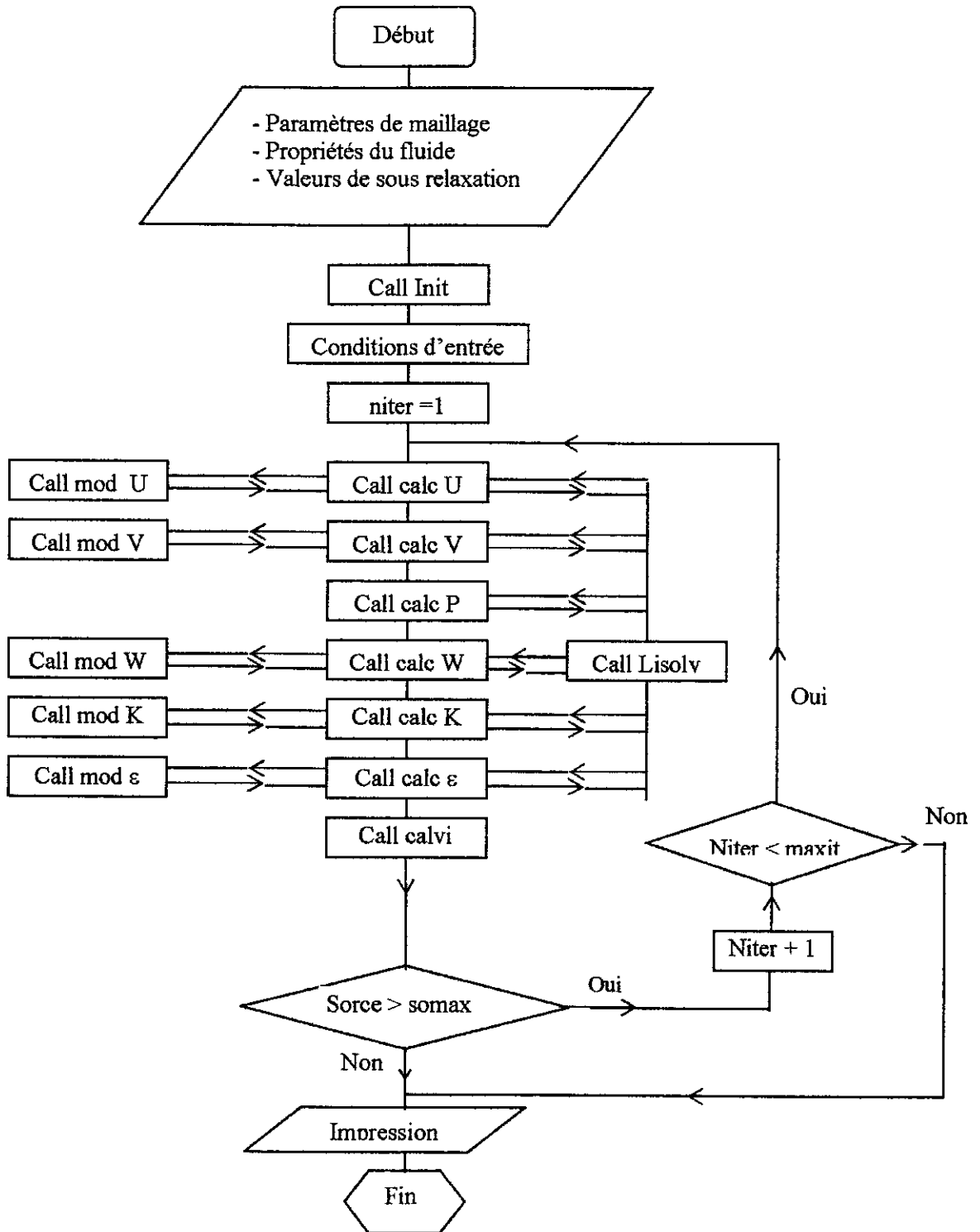


Fig. (3-6) : Organigramme de calcul pour le modèle (K-ε)

CHAPITRE IV

**Résultats et Comparaison
des Performances**

4-1 INTRODUCTION :

L'objectif est de comparer les résultats numériques pour l'ensemble des modèles $K-\varepsilon$, RSTM et ASM et les résultats expérimentales [01] pour tirer les conclusions permettant de rendre compte des hypothèses et des approximations du transport dans les trois approches pour la convection et la diffusion des contraintes de Reynolds.

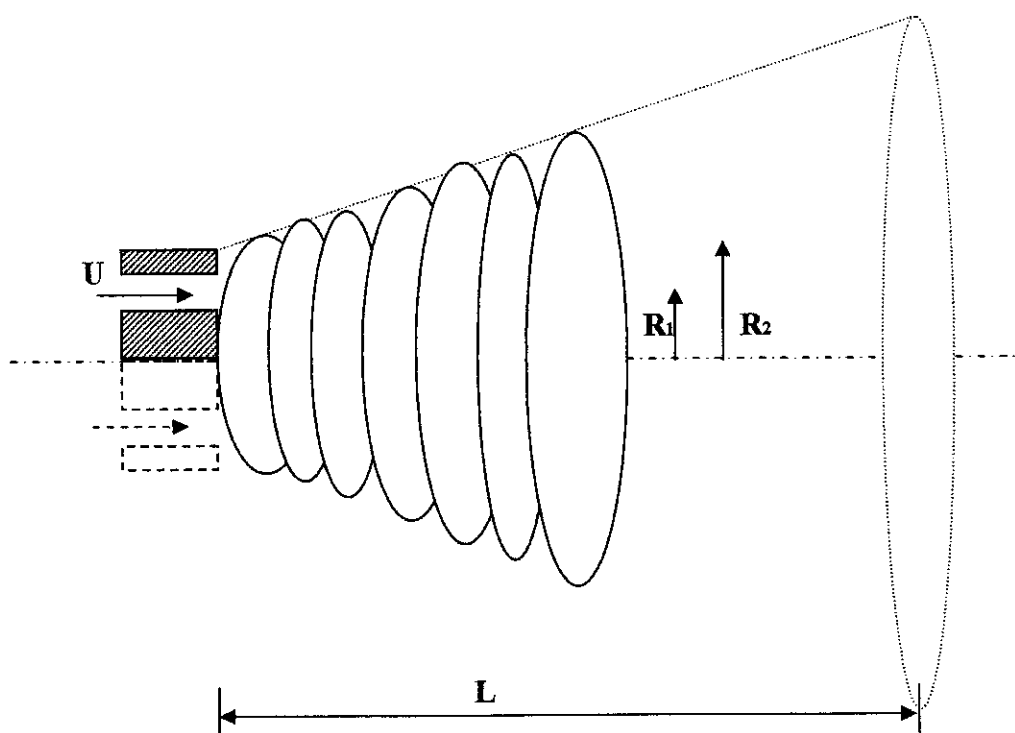


Fig. (4-1) : Caractéristiques géométriques.

4-2 DONNEES EXPERIMENTALES :

Les données expérimentales utilisées dans cette étude pour les comparer avec les résultats numériques sont celles obtenues par Sislian et Cusworth [01] qui ont mesuré expérimentalement les trois composantes de vitesses ainsi que les six composantes du tenseur de contraintes de Reynolds pour un écoulement d'un jet libre isotherme axisymétrique avec tourbillonnement en utilisant l'anémométrie Laser.

Comme le montre l'installation expérimentale (Fig. 4-2), l'air est émis sous pression par un compresseur, pour passer à travers deux filtres afin de purifier toute particule

indésirable. L'air est ensuite divisé vers deux branches, l'une vers une conduite verticale faite de deux diamètres coaxiaux et l'autre vers un régulateur de pression et filtre.

Une enceinte de (685mm) de longueur et de (76,2mm) de diamètre interne qui contient une grille connectée par la conduite circulaire a un orifice de soufflage de (25,4mm) de diamètre.

Le tourbillonnement est induit par des ailettes ajustables fixées juste au niveau l'orifice de soufflage.

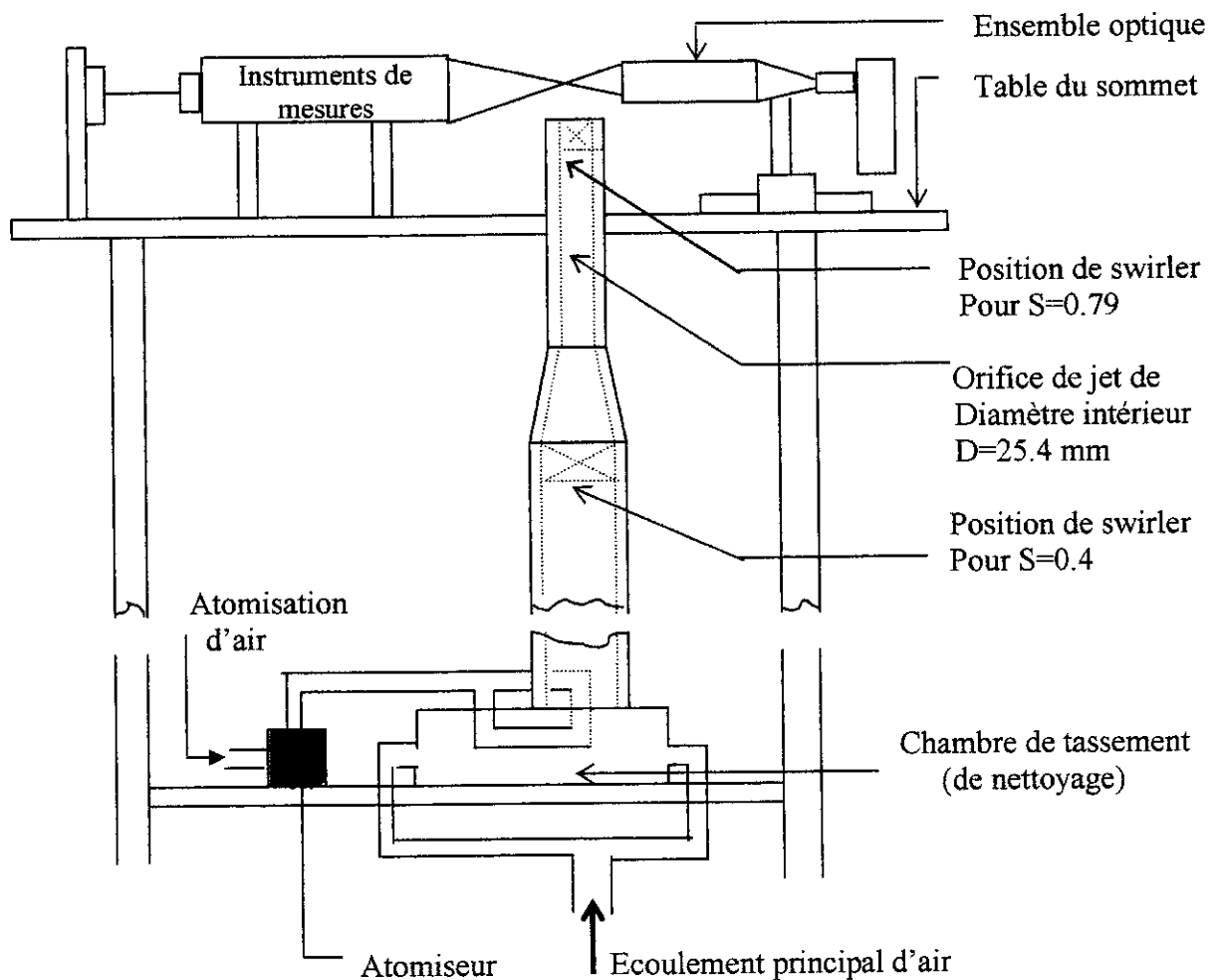


Fig. (4-2) : Installation expérimentale de Sislian et Cusworth [01]

- Diamètre de l'orifice de sortie : $D=25.4\text{mm}$
- Diamètre intérieur de l'hélice (roue centrale de Swirl) : $d_1 = 7.28\text{ mm}$

- Débit d'écoulement : $Q_0 \Rightarrow U_0 = \frac{4.Q_0}{\pi.D^2}$
- Le nombre de swirl pour le type d'écoulement de jet étudié est : $S=0.79$
- Le nombre de Reynolds calculé à la sortie de jet est : $Re = 11600$ pour $S=0.79$ correspond à la vitesse moyenne axiale : $U_0=6.8$ m/s

Les propriétés de l'écoulement pour les profils expérimentaux sont les suivants :

S	Nombre de Reynolds	Vitesse moyenne axiale U_0 [m/s]	Debit Q_0 [m ³ /s]
0.79	11600	6.8	3.445×10^{-3}

Tableau (4-1) : Caractéristiques de l'écoulement.

- Le fluide utilisé dans cette étude est l'air qui a les conditions suivantes (dans les conditions normales de température et de pression) :

Densité: $\rho = 1.293$ [Kg/m³]

Viscosité : $\mu = 1.72 \times 10^{-5}$ [Kg/m.s]

4-3 DOMAINE DE CALCUL :

La comparaison se fait en choisissant trois stations : ($x/D=0.125$, $x/D=3$, $x/D=5$) du domaine qui s'étend de la première station de mesure ($x/D=0.125$) à l'aval de l'orifice de soufflage jusqu'à la dernière station ($x/D=5$) pour ($S=0.79$).

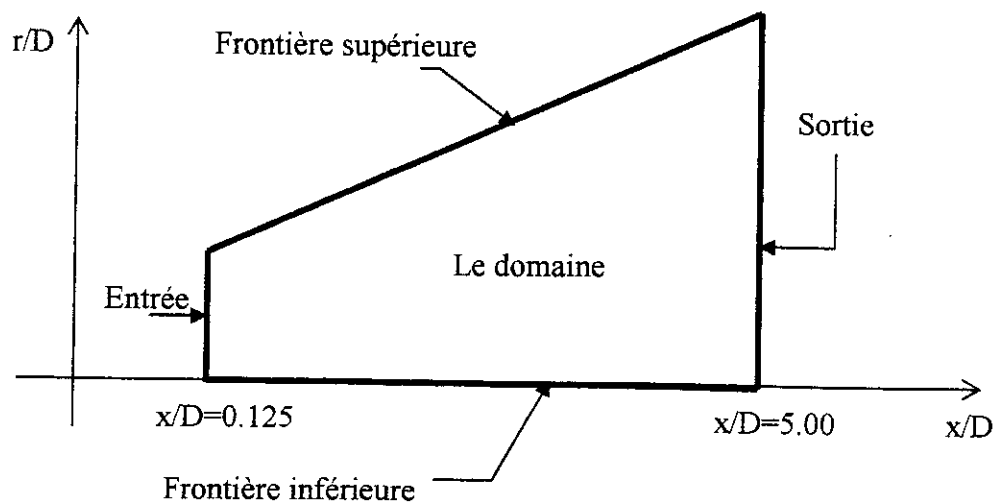


Fig. (4-3) : Domaine de calcul

4-4 CONDITIONS INITIALES ET AUX LIMITES :

Pour la plupart des écoulements gouvernés par des équations elliptiques (équations de Navier Stokes pour le cas étudié), ces équations nécessitant pour leur résolution des conditions aux limites pour chaque frontière limitant le domaine de calcul.

Quatre types de conditions aux limites peuvent être rencontrés :

- 1- L'entrée
- 2- L'axe de symétrie
- 3- La sortie
- 4- Limite d'entraînement

Ces conditions sont de type Dirichlet ou Newman [08], mais l'incorporation de deux façons différentes de ces conditions donnent résultats similaires.

4-4-1 Frontière d'entrée :

Elle est localisée à la première station de mesure ($x/D=0.125$)

Pour pouvoir calculer l'écoulement du jet libre avec fort swirl ($S=0.79$), il faut démarrer le calcul suffisamment près de l'orifice de soufflage et imposer ~~les~~ des profils initiaux aux variables caractéristiques de l'écoulement. Pour cela nous avons pris comme base les valeurs de la première station de mesure correspond au rapport ($x/D=0.125$) dans l'écoulement, comme valeurs initiales de calcul.

Les profils de toutes les variables sont fixés à partir des valeurs expérimentales décrites d'après le tableau (4-1)

r/D	U(m/s)	V(m/s)	W(m/s)	$\overline{u^2}$ (m ² /s ²)	$\overline{v^2}$ (m ² /s ²)	$\overline{w^2}$ (m ² /s ²)	\overline{uv} (m ² /s ²)	\overline{uw} (m ² /s ²)	\overline{vw} (m ² /s ²)	k (m ² /s ²)	ϵ (m ² /s ³)
0	-4.285	0	0	2.6548	1.8584	1.9469	0	0	0	3.1853	102.18
0.05	-4.285	0.089	0.535	2.7433	1.5929	1.5929	-0.0707	0.142	0.035	3.1853	102.18
0.1	-3.928	0.357	1.25	3.0973	1.7699	2.0353	-0.142	0.2123	0	3.4513	115.22
0.15	-3.571	0.446	1.785	3.5398	1.7699	2.0353	-0.2831	0.3893	0.035	3.8053	133.39
0.2	-3.035	0.178	2.142	4.0707	1.9469	2.3008	-0.4247	0.4955	0	4.3362	162.25
0.25	-2.142	0.535	2.857	4.9557	2.3008	2.7433	-0.5663	0.3893	-0.141	5.0442	203.57
0.3	0	0.357	3.928	6.0176	3.1858	4.6017	-1.9115	0.3893	-0.849	7.6106	377.28
0.35	4.464	0.535	6.071	9.2035	3.9823	6.9911	-2.3362	1.3097	-0.884	10.265	591.02
0.4	8.75	1.071	10.535	9.0265	5	9.5575	-2.3362	2.8318	-0.707	11.946	742.04
0.45	12.85	2.678	14.464	7.0796	3.7168	5.7522	-1.0679	1.4159	0	8.2477	425.64
0.5	16.96	3.571	14.642	4.5132	5.1327	6.7256	-0.4247	0.8141	1.31	8.3185	431.13
0.52	16.60	5.357	11.785	7.9646	11.2389	12.035	0.6371	1.4867	-1.31	15.752	1123.4
0.55	11.25	5	7.5	16.6371	21.2389	13.451	6.0884				
0.57	5.375	3.571		9.7345	22.1238						

Tableau (4-2) : Valeurs expérimentales [01] dans la 1^{ère} station (x/D=0.125) pour S=0.79.

En vue d'adapter correctement les valeurs expérimentales des profils initiaux au maillage proposé, on procède à l'interpolation linéaire de ces valeurs au niveau des nœuds.

Dans la section d'entrée de l'écoulement, les profils de vitesses initiaux sont considérés comme uniformes aux conditions expérimentales. Quand à l'énergie cinétique K et son taux dissipation ϵ , ils sont estimés par les expressions suivantes [13] :

$$K_e = 0.01.U_0^2 \tag{4-1}$$

$$\epsilon_e = \frac{K_e^{3/2}}{0.183.D_j} \tag{4-2}$$

D_j : diamètre intérieur du jet.

4-4-2 Frontière inférieure (axe de symétrie de l'écoulement) :

Cette frontière est placée à $r/D=0$.

Les contraintes de cisaillement, les vitesses radiale V et de Swirl W , ainsi que la diffusion radiale de toutes les autres impliquées dans les équations de transport sont supposées nulles :

$$\overline{uv} = \overline{uw} = \overline{vw} = V = W = \frac{\partial \left(\Phi = \overline{u^2}, \overline{v^2}, \overline{w^2}, k, \varepsilon, U \right)}{\partial r} = 0$$

4-4-3 Frontière de sortie :

Cette frontière est placée à $x/D=5$.

La diffusion axiale de tous les variables impliquées dans les équations de transport est supposée nulle :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi = \overline{u^2}, \overline{v^2}, \overline{w^2}, \overline{uv}, \overline{uw}, \overline{vw}, k, \varepsilon, U, V, W \right) = 0$$

4-4-4 Conditions aux limites près des frontières :

Pour les conditions aux limites au niveaux des frontières, elles peuvent être déduits de l'adaptation des profils expérimentaux représentant toutes les variables du modèle au voisinage des limites de ces frontières [21]

Cette possibilité a été adopté pour le cas étudié où la frontière supérieure est placée à $(r/D=6)$, à partir de l'axe de symétrie.

Les Caractéristiques de l'écoulement au voisinage de la frontière supérieure (limite d'entraînement) sont données d'après les résultats expérimentaux [01], pour le jet avec fort tourbillonnement comme suit :

1) Les composantes de vitesses moyennes sur la frontière libre limitée par la droite :

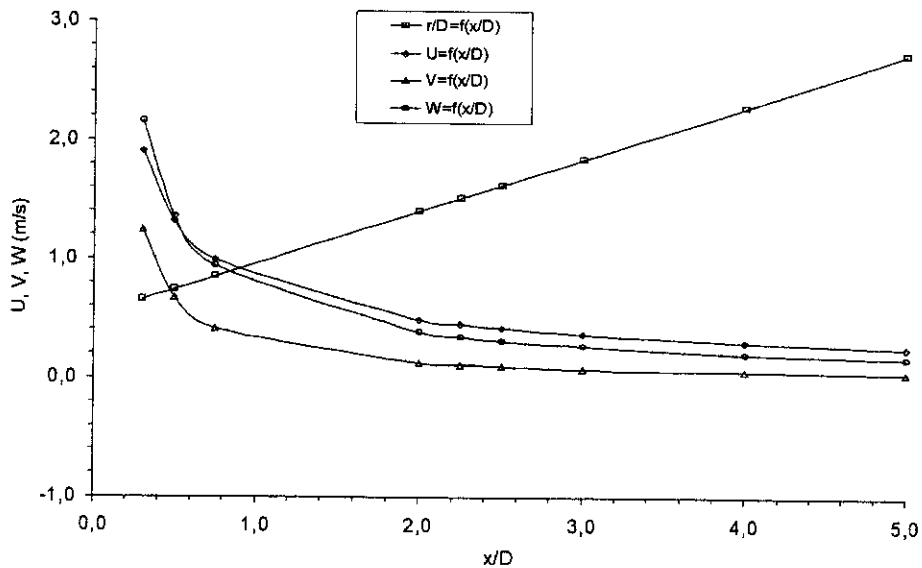
$$\frac{r}{D} = 0.44 \frac{x}{D} + 0.52$$

Sont données par :

- Pour la composante axiale :
$$U\left(\frac{x}{D}\right) = 0.806 \left(\frac{x}{D}\right)^{-0.715}$$

- Pour la composante radiale :
$$V\left(\frac{x}{D}\right) = 0.294 \left(\frac{x}{D}\right)^{-1.197}$$

- Pour la composante tangentielle :
$$W\left(\frac{x}{D}\right) = 0.722 \left(\frac{x}{D}\right)^{-0.909}$$



2) Les composantes des contraintes de Reynolds sur la frontière libre limitée par la

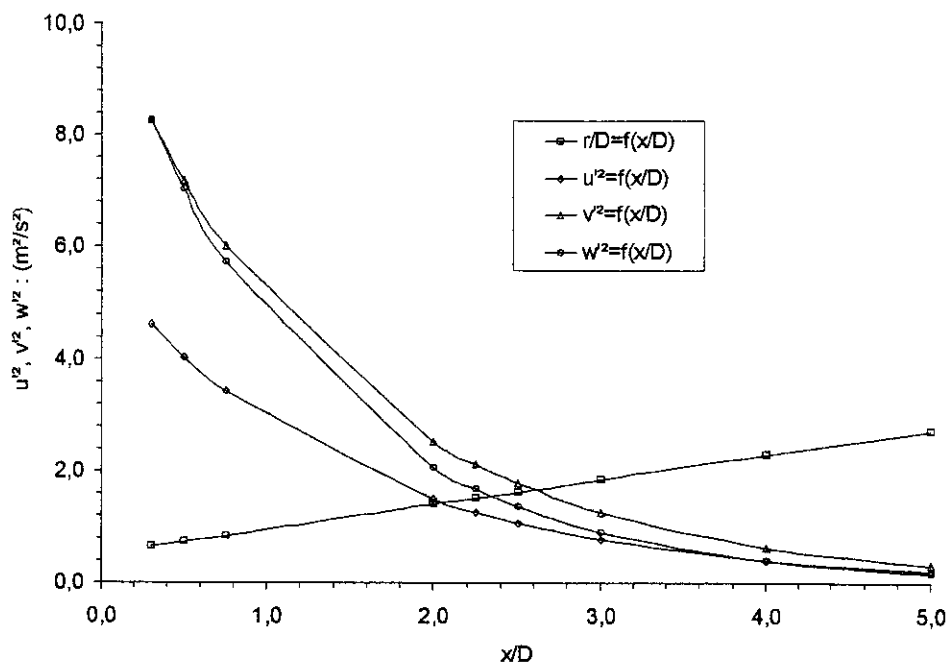
droite :
$$\frac{r}{D} = 0.44 \frac{x}{D} + 0.52$$

Sont données par :

- Les contraintes normales :
$$\bar{u}^2\left(\frac{x}{D}\right) = 5,629 \cdot e^{\left(-0,663 \cdot \frac{x}{D}\right)}$$

$$\bar{v}^2\left(\frac{x}{D}\right) = 10,194 \times e^{\left(-0,698 \cdot \frac{x}{D}\right)}$$

$$\bar{w}^2\left(\frac{x}{D}\right) = 10,579 \cdot e^{\left(-0,818 \cdot \frac{x}{D}\right)}$$

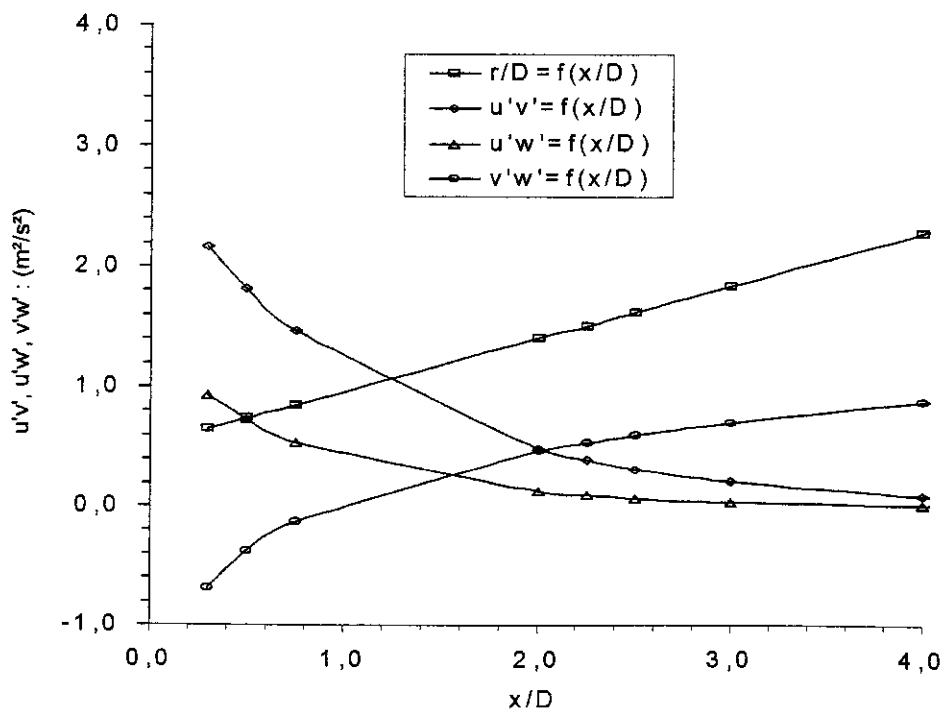


- Les contraintes tangentielles :

$$\overline{uv}\left(\frac{x}{D}\right) = 2,824 \cdot e^{\left(-0,880 \cdot \frac{x}{D}\right)}$$

$$\overline{uw}\left(\frac{x}{D}\right) = 1,340 \cdot e^{\left(-1,212 \cdot \frac{x}{D}\right)}$$

$$\overline{vw}\left(\frac{x}{D}\right) = 0.607 \cdot \log\left(\frac{x}{D}\right) + 0.039$$



3) Taux de dissipation :

Il est donné par :

$$\varepsilon\left(\frac{x}{D}\right) = 409,696.e^{-0,891.\frac{x}{D}}$$

Pour toutes les frontières du domaine de calcul, le tableau (4-3) récapitule les Caractéristiques de l'écoulement pour un jet avec fort tourbillonnement (S=0.79)

Variables	Frontière d'entrée	Frontière inférieure	Frontière supérieure	Frontière de sortie
U	Profil initial	$\frac{\partial U}{\partial r} = 0$	$U\left(\frac{x}{D}\right) = 0.806\left(\frac{x}{D}\right)^{-0.715}$	$\frac{\partial U}{\partial x} = 0$
V	Profil initial	V=0	$V\left(\frac{x}{D}\right) = 0.294\left(\frac{x}{D}\right)^{-1.197}$	$\frac{\partial V}{\partial x} = 0$
W	Profil initial	W=0	$W\left(\frac{x}{D}\right) = 0.722\left(\frac{x}{D}\right)^{-0.909}$	$\frac{\partial W}{\partial x} = 0$
\bar{u}^{-2}	Profil initial	$\frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial r} = 0$	$\bar{u}^{-2}\left(\frac{x}{D}\right) = 5,629.e^{\left(-0,663.\frac{x}{D}\right)}$	$\frac{\partial \bar{u}^{-2}}{\partial x} = 0$
\bar{v}^{-2}	Profil initial	$\frac{\partial \bar{v}^{-2}}{\partial r} = 0$	$\bar{v}^{-2}\left(\frac{x}{D}\right) = 10,194 \times e^{\left(-0,698.\frac{x}{D}\right)}$	$\frac{\partial \bar{v}^{-2}}{\partial x} = 0$
\bar{w}^{-2}	Profil initial	$\frac{\partial \bar{w}^{-2}}{\partial r} = 0$	$\bar{w}^{-2}\left(\frac{x}{D}\right) = 10.579.e^{\left(-0,818.\frac{x}{D}\right)}$	$\frac{\partial \bar{w}^{-2}}{\partial x} = 0$
\overline{uv}	Profil initial	$\overline{uv} = 0$	$\overline{uv}\left(\frac{x}{D}\right) = 2,824.e^{\left(-0,880.\frac{x}{D}\right)}$	$\frac{\partial \overline{uv}}{\partial x} = 0$
\overline{uw}	Profil initial	$\overline{uw} = 0$	$\overline{uw}\left(\frac{x}{D}\right) = 1,340.e^{\left(-1,212.\frac{x}{D}\right)}$	$\frac{\partial \overline{uw}}{\partial x} = 0$
\overline{vw}	Profil initial	$\overline{vw} = 0$	$\overline{vw}\left(\frac{x}{D}\right) = 0.607.\log\left(\frac{x}{D}\right) + 0.039$	$\frac{\partial \overline{vw}}{\partial x} = 0$
ε	Profil initial	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0$	$\varepsilon\left(\frac{x}{D}\right) = 409,696.e^{-0,891.\frac{x}{D}}$	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0$

Tableau (4-3) : Caractéristiques de l'écoulement sur la frontière d'entraînement (S=0.79)

- Cas Particulier pour les conditions aux limites :

L'adoption des profils expérimentaux pour obtenir les conditions aux frontières est limitée puisqu'il n'est pas toujours possible de fournir ces profils. Alors on utilise les fonctions standards [30], établis pour les parois solides supposées suffisamment éloignées pour simuler le jet libre.

Ainsi, les conditions aux limites pour le champ moyen (U, V, W) sont spécifiés comme suit :

- Lorsque : $y_p^+ < 11.6$:

$$\overline{U}_P^+ = \frac{\overline{U}_P}{u_\tau} = y_p^+ = \frac{u_\tau \cdot y_P}{\nu} \quad (4-3)$$

\overline{U}_P : Vitesse adimensionnelle parallèle à la paroi.

$$\overline{U}_P = \sqrt{V_P^2 + W_P^2}$$

V_P et W_P : Composantes de vitesse moyenne au voisinage de la paroi.

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} : \text{Vitesse de frottement à la paroi.}$$

τ_w : La contrainte tangentielle résultante à la paroi.

y_p^+ : Distance adimensionnelle entre la paroi et les nœuds considérés voisins de cette paroi.

- Lorsque $y_p^+ > 11,6$:

$$\overline{U}_P^+ = \frac{1}{\kappa} \cdot \text{Log}(E \cdot y_p^+) \quad (4-4)$$

κ : Constante de Von Karman ($\kappa = 0.41$).

E : Constante empirique (E=9,8).

Pour les quantités de turbulence (K et ε), elles sont spécifiées d'après une formule récursive développée à partir de l'hypothèse de l'équilibre local entre la production et destruction de l'énergie cinétique de turbulence K dans la région logarithmique de l'écoulement.

$$K_P = \frac{u_\tau^2}{C_\mu^{1/2}} \quad (4-5)$$

$$\varepsilon_P = \frac{C_\mu^{3/4} \cdot K_P^{3/2}}{\kappa \cdot y_P} \quad (4-6)$$

De (4-5) :

$$u_\tau = K_P^{1/2} \cdot C_\mu^{1/2} \quad (4-7)$$

$$u_\tau = \frac{\bar{U}_P}{\bar{U}_P^+} = \frac{\bar{U}_P}{\frac{1}{\kappa} \cdot \text{Log}(E \cdot y_P^+)}$$

$$\Rightarrow u_\tau = \frac{\kappa \cdot \bar{U}_P}{\text{Log}(E \cdot y_P^+)} \quad (4-8)$$

$$\tau_w = \rho \cdot u_\tau^2 = \rho \cdot u_\tau \cdot u_\tau \quad (4-9)$$

De (4-7) et (4-8), on tire :

$$\tau_w = \frac{\rho \cdot K_P^{1/2} \cdot C_\mu^{1/4} \cdot \kappa \cdot \bar{U}_P}{\text{Log}(E \cdot y_P^+)} \quad (4-10)$$

$$\text{Log}(E \cdot y_P^+) = \text{Log}\left(E \cdot \frac{u_\tau \cdot y_P}{\nu}\right) = \text{Log}\left(E \cdot \frac{\rho \cdot C_\mu^{1/4} \cdot K_P^{1/2} \cdot y_P}{\mu}\right) \quad (4-11)$$

De (4-11) et (4-10) $\Rightarrow \tau_w = \frac{\rho \cdot \kappa \cdot K_P^{1/2} \cdot C_\mu^{1/4} \cdot \bar{U}_P}{\text{Log}\left(\frac{\rho \cdot C_\mu^{1/4} \cdot K_P^{1/2} \cdot y_P}{\mu}\right)}$ (4-12)

Et puisque :

$$\tau_w = \mu_{\text{eff}} \cdot \frac{\bar{U}_P}{y_P} \quad (4-13)$$

De (4-12) et (4-13), on tire :

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{\rho \cdot \kappa \cdot K_P^{1/2} \cdot C_\mu^{1/4} \cdot y_P}{\text{Log}\left(E \cdot \frac{\rho \cdot C_\mu^{1/4} \cdot K_P^{1/2} \cdot y_P}{\mu}\right)} \quad (4-14)$$

Après avoir spécifié le cas de U , V , W , K et ε , pour celui des contraintes de Reynolds, des conditions similaires sont imposés à la paroi selon l'équation (4-12).

4-5 PARAMETRES ET CRITERES DE CONVERGENCE :

Les calculs sont faits avec un maillage non uniforme de (40×35) lignes. Le nombre de nœuds selon x est $N_i = 40$, celui des nœuds selon r est $N_j = 35$.

Comme la méthode est itérative, nous devons appliquer un critère de convergence. Pour arrêter les calculs on surveille la convergence de la solution en examinant les résidus Resor (Φ). La solution est convergente si la somme de ces résidus est inférieure ou égale à une certaine valeur (ϵ') qu'on l'impose. Alors :

La solution converge pour le modèle RSTM quand le résidu est inférieur ou égal à 10^{-6} , pour le modèle ASM converge quand le résidu est inférieur ou égale à 8.10^{-3} et pour le modèle K- ϵ converge quand le résidu est égale à 4.10^{-2} du flux d'entrée correspondant.

Une autre condition est fixée sur le nombre d'itération (niter). Ce nombre est fixé à une valeur (maxit). Si cette valeur est atteint (niter=maxit) sans que la condition des résidus soit vérifié (sorce<sormax), le calcul s'arrêtera. Dans ce cas la solution à besoin de plus d'itérations de calcul pour converger.

Le nombre d'itérations nécessaires pour achever la convergence par les trois modèles est :

Le modèle K- ϵ : 350 itérations, ASM : 450 itérations et le RSTM : 500 itérations.

Avec un M.O Pentium 233 Mhz, le maillage utilisé exige 10 minutes de temps de calcul pour le modèle RSTM. A titre de comparaison, le modèle RSTM consomme 3.1 le temps de calcul nécessaire pour le modèle K- ϵ et il est de 1.7 pour le modèle ASM.

4-6 RESULTATS ET COMPARAISONS :

Dans cette étude, le code de source de calcul est une version de code TEACH (Teaching Elliptic axisymmetry characteristics Heuristically) d'Impérial collège développé par Lilley et Rhode [27], modifié pour calculer l'écoulement avec recirculation axisymétrique, turbulent avec tourbillonnement à l'aide de trois modèles de turbulence RSTM, ASM et K- ϵ . En général, on a huit équations de transport, six pour les composantes de tenseur de contraintes, la septième est pour l'énergie cinétique turbulente et la huitième est pour le taux de dissipation de l'énergie cinétique, en plus trois équations de quantités de mouvement et de l'équation de continuité.

-Remarque :

Les tensions de Reynolds sont calculées à partir de leurs équations de transport pour les modèles RSTM et ASM. Quant au modèle K- ϵ , les tensions de Reynolds n'ont pas leurs équations de transport, on ne peut pas calculer que les tensions axiales de Reynolds à partir de l'équation suivante [22, 28] :

$$K = \frac{1}{2} \left(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2} \right) \quad (4-1)$$

Pour pouvoir calculer les tensions axiales de Reynolds, supposer que les tensions de Reynolds $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ et $\overline{w^2}$ de mêmes grandeurs.

Donc,

$$k = \frac{1}{2} \left(\overline{u^2} + \overline{u^2} + \overline{u^2} \right) \Leftrightarrow k = \frac{3}{2} \overline{u^2} \quad (4-2-a)$$

$$\overline{u^2} = \frac{2}{3} k \quad (4-2-b)$$

En générale, les tensions axiales de Reynolds varient comme l'énergie turbulente k.

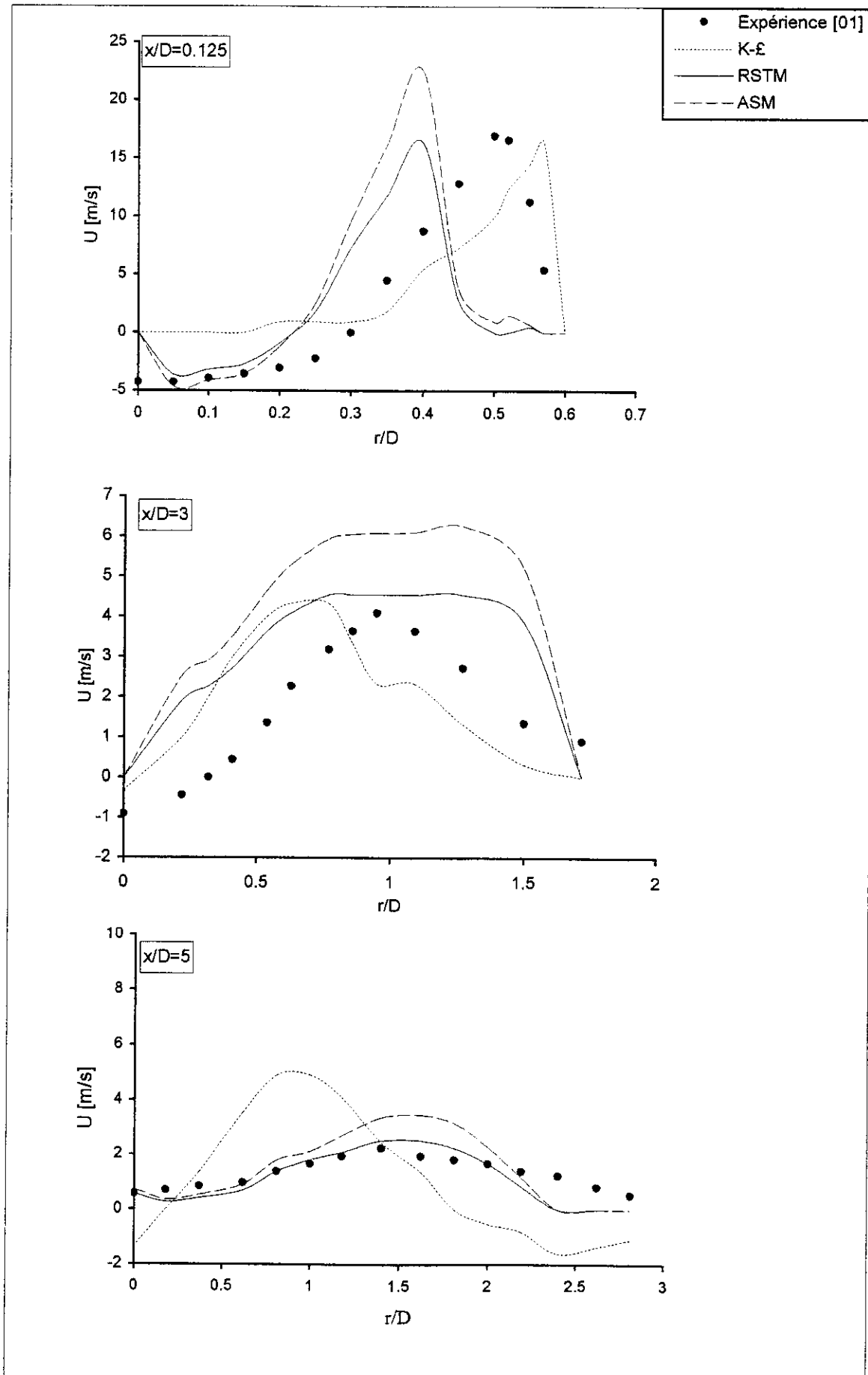


Fig. (4-3): Profils de la vitesse axiale U à différentes stations du domaine de calcul

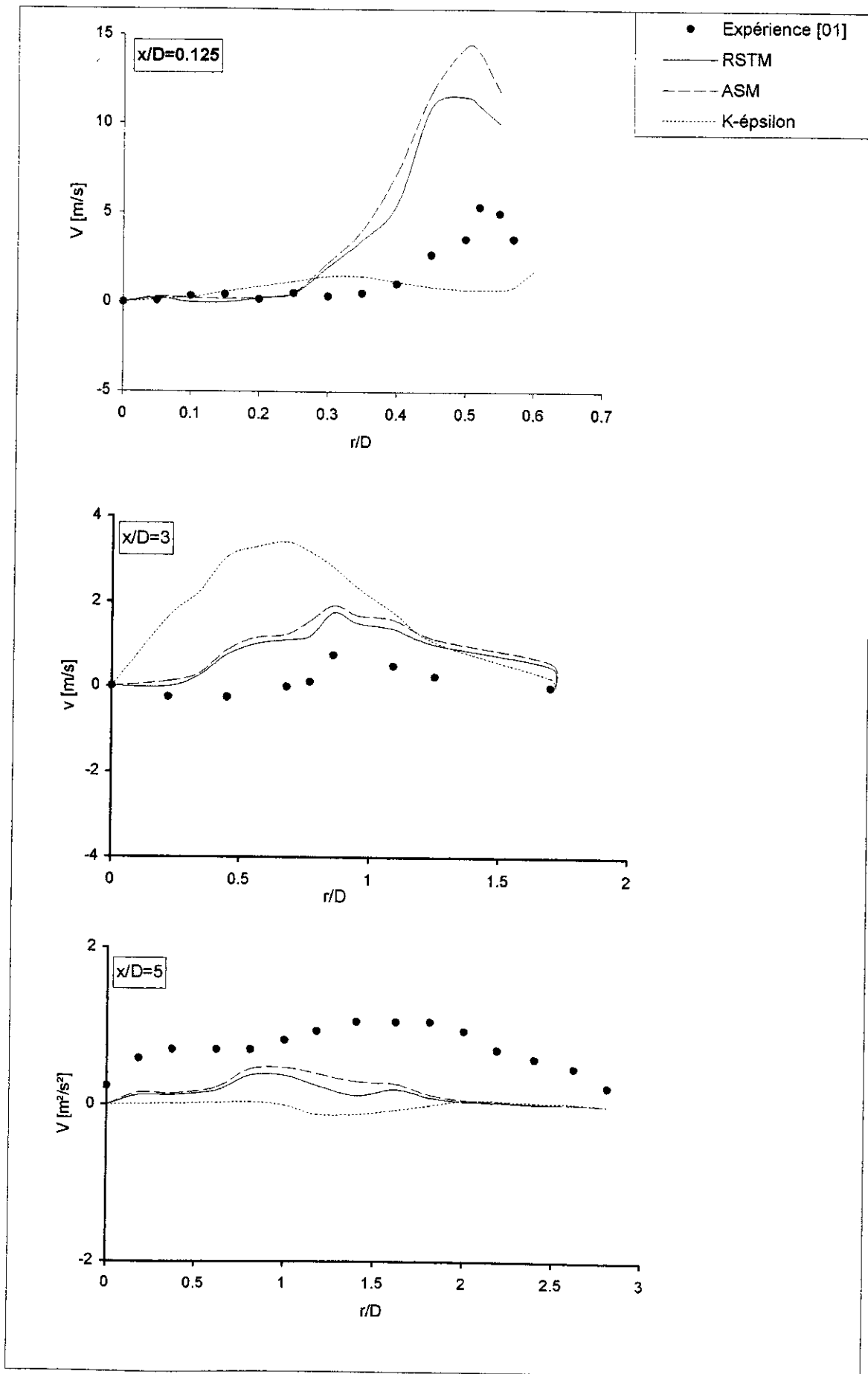


Fig. (4-4): Profils de la vitesse radiale V à différentes stations du domaine de calcul

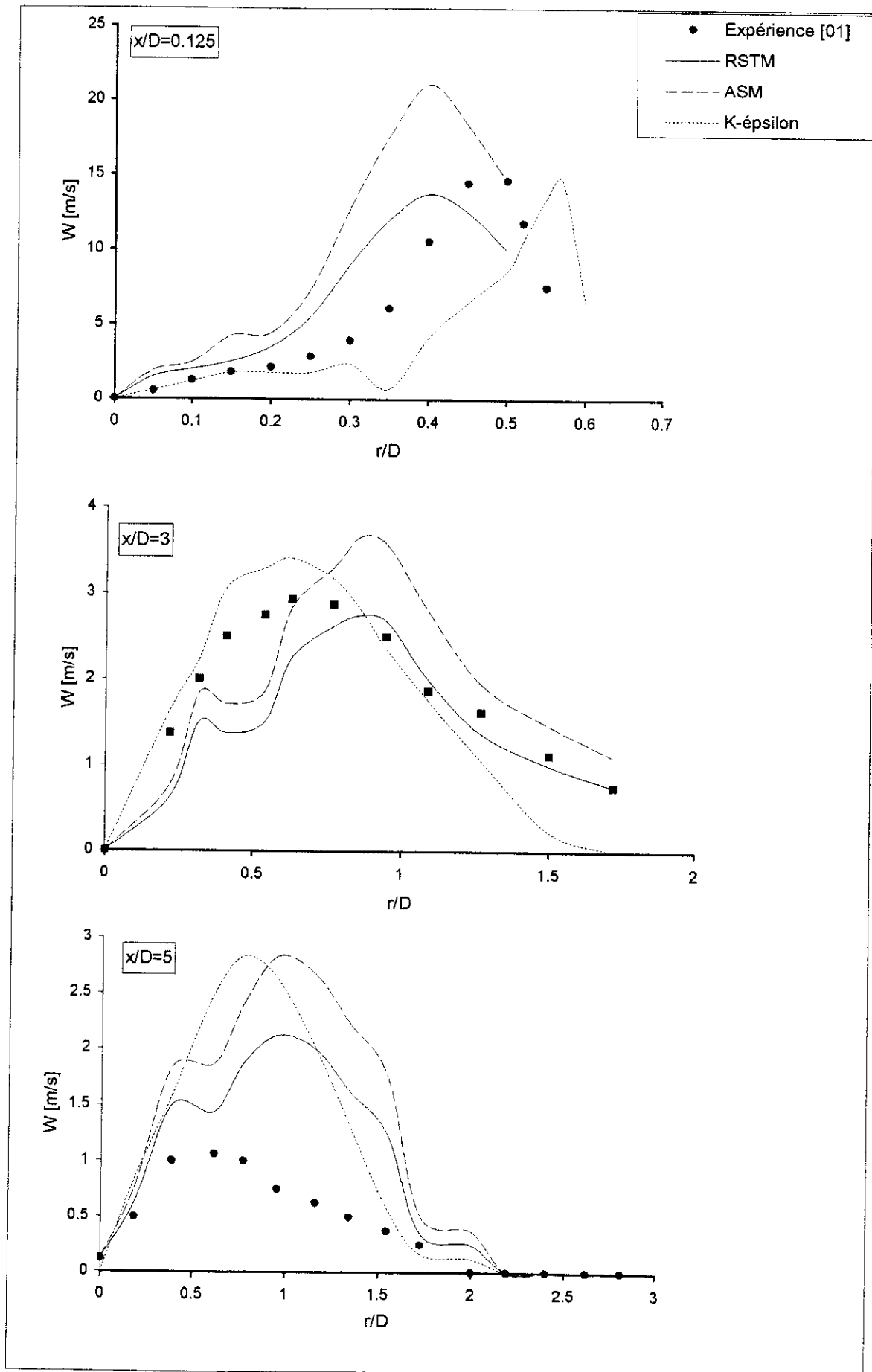


Fig.(4-5): Profils de la vitesse tangentielle W à différentes stations du domaine de calcul

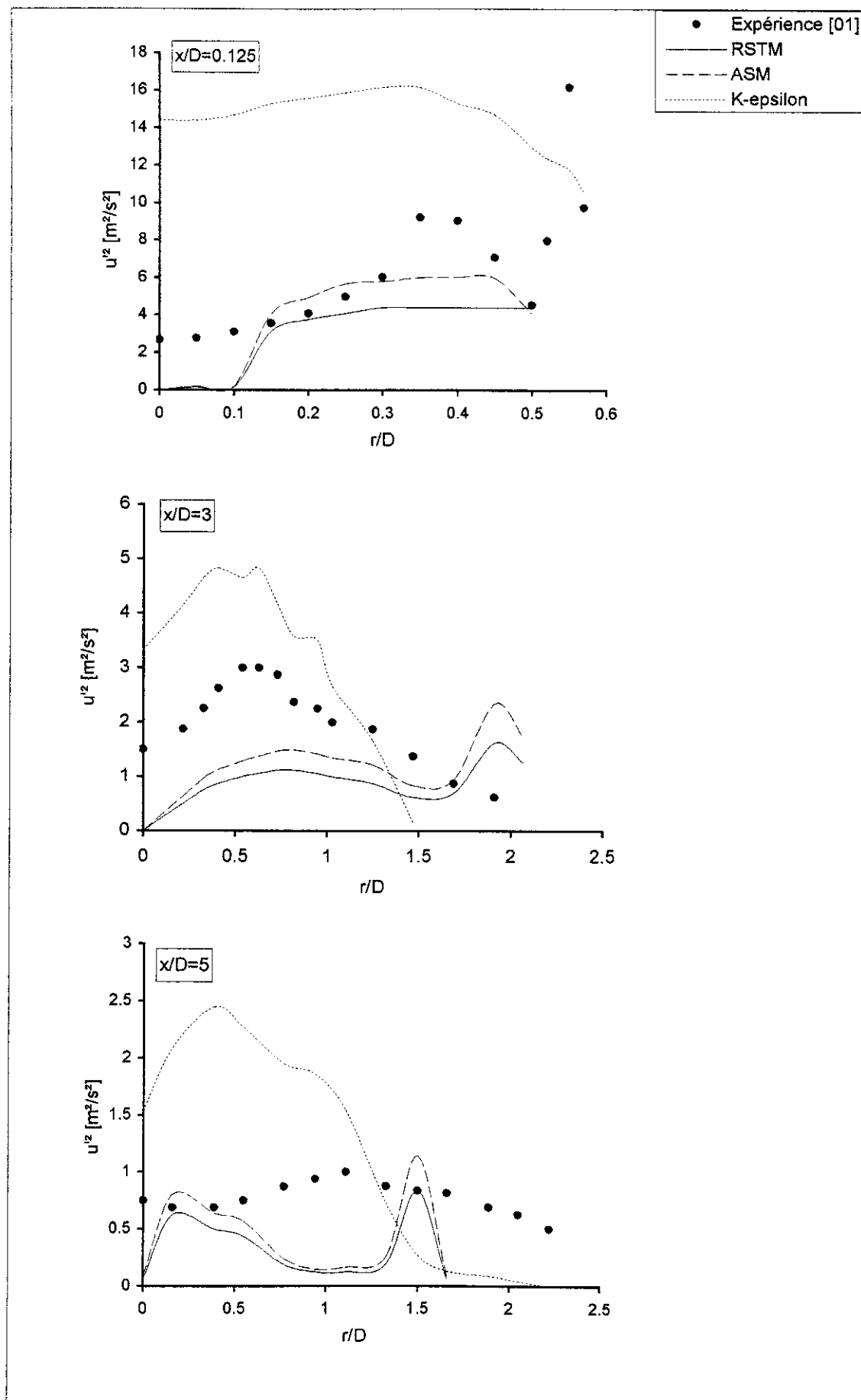


Fig.(4-6): Profils de la contrainte normale u^2 à différentes stations du domaine de calcul

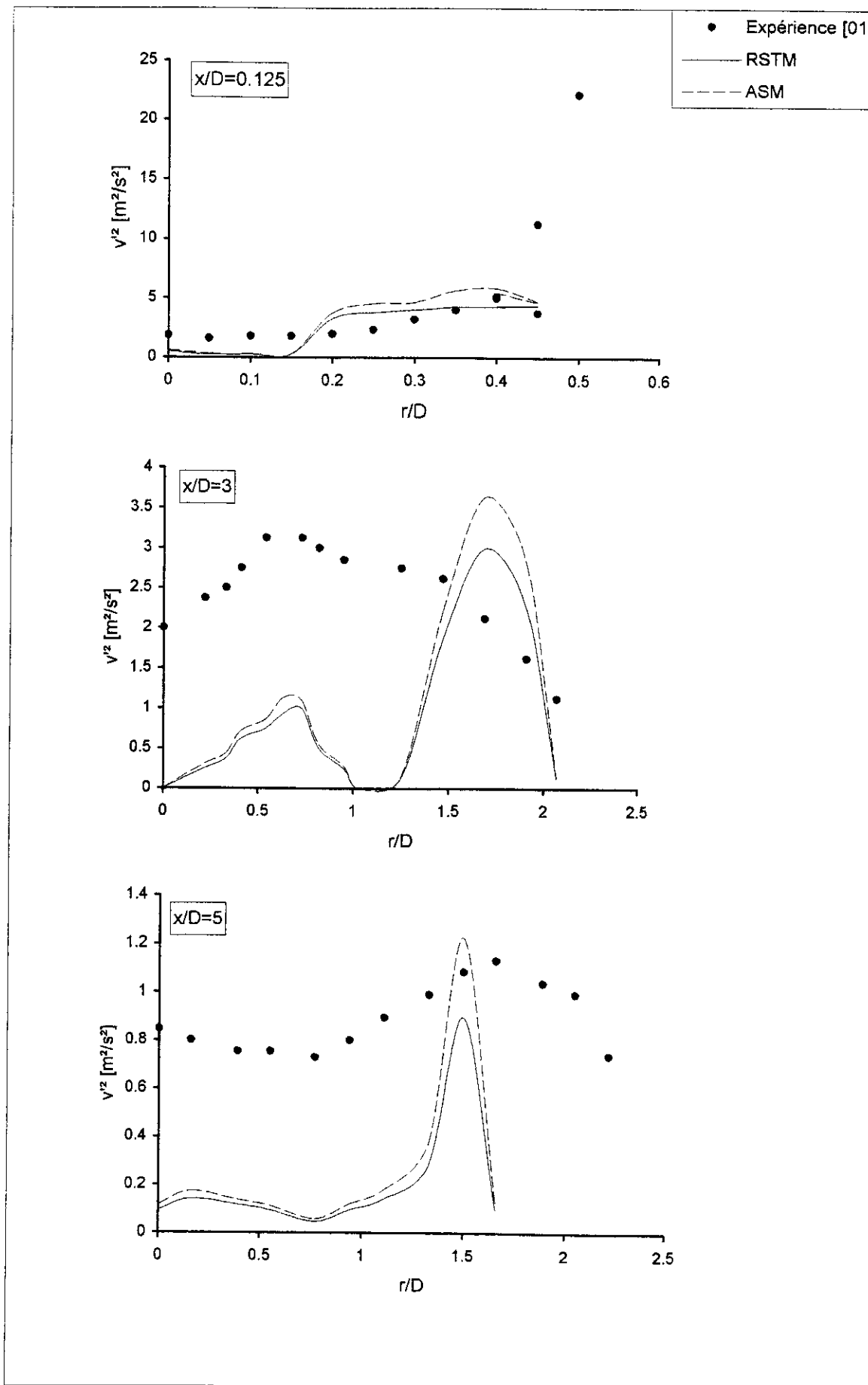


Fig.(4-7):Profils de la contrainte normale v^2 à différentes stations du domaines de calcul.

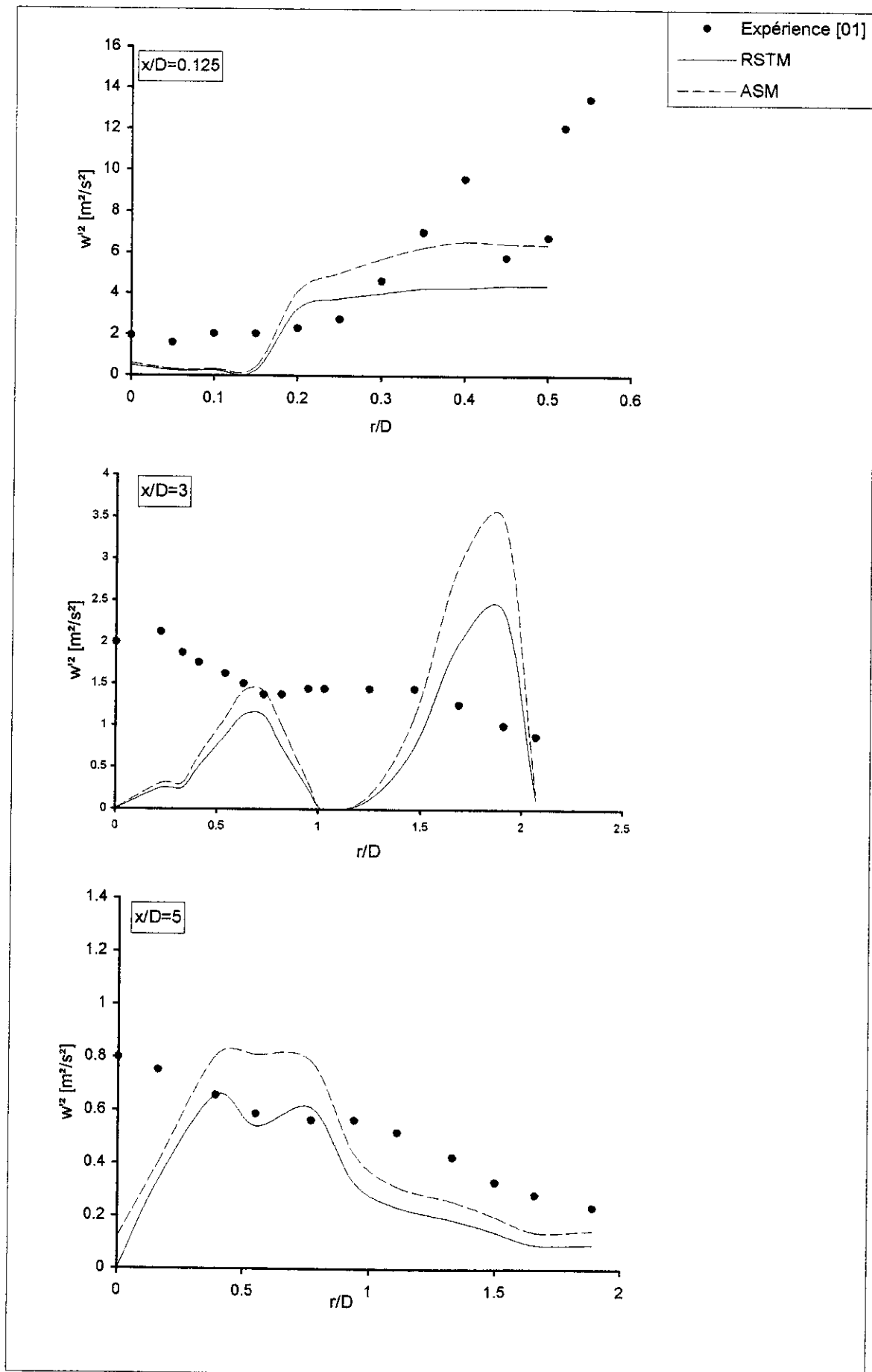
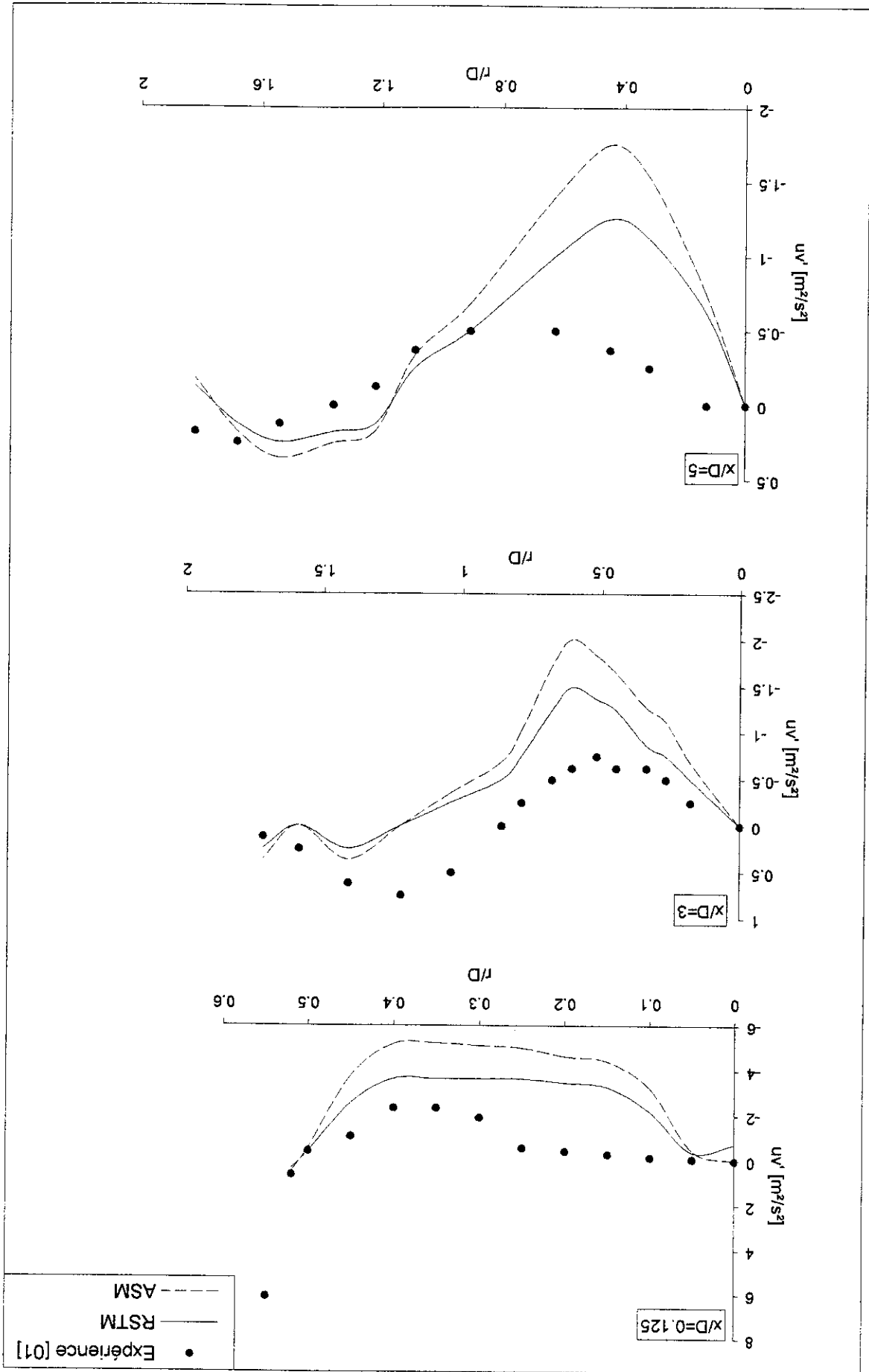


Fig.(4-8): Profils de la contrainte normale w^2 à différentes stations du domaine de calcul.

Fig (4-9): Profils de la contrainte tangentielle uv' à différentes stations du domaine de calcul



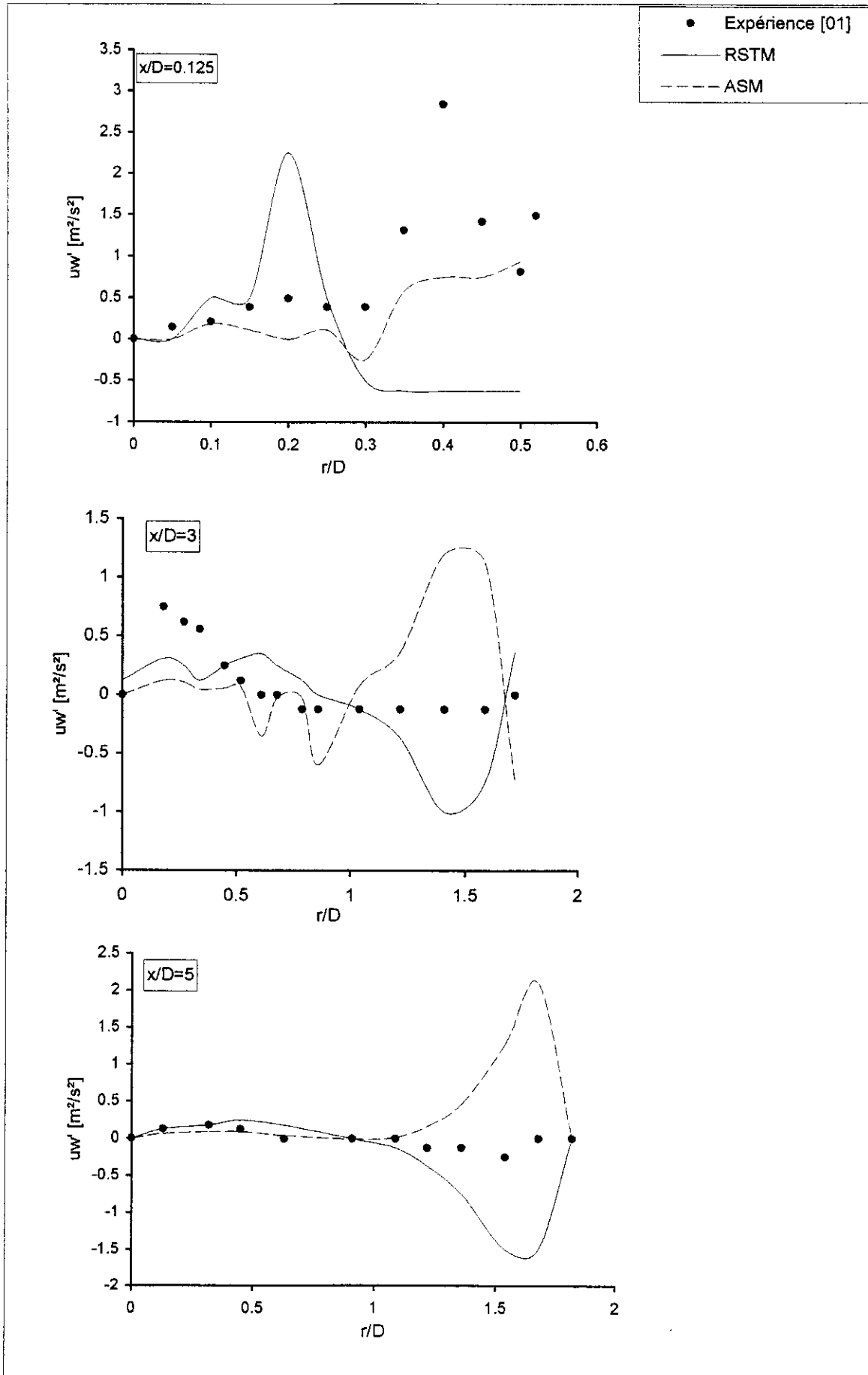


Fig.(4-10): Profils de la contrainte tangentielle uw' à différentes stations du domaine de calcul.

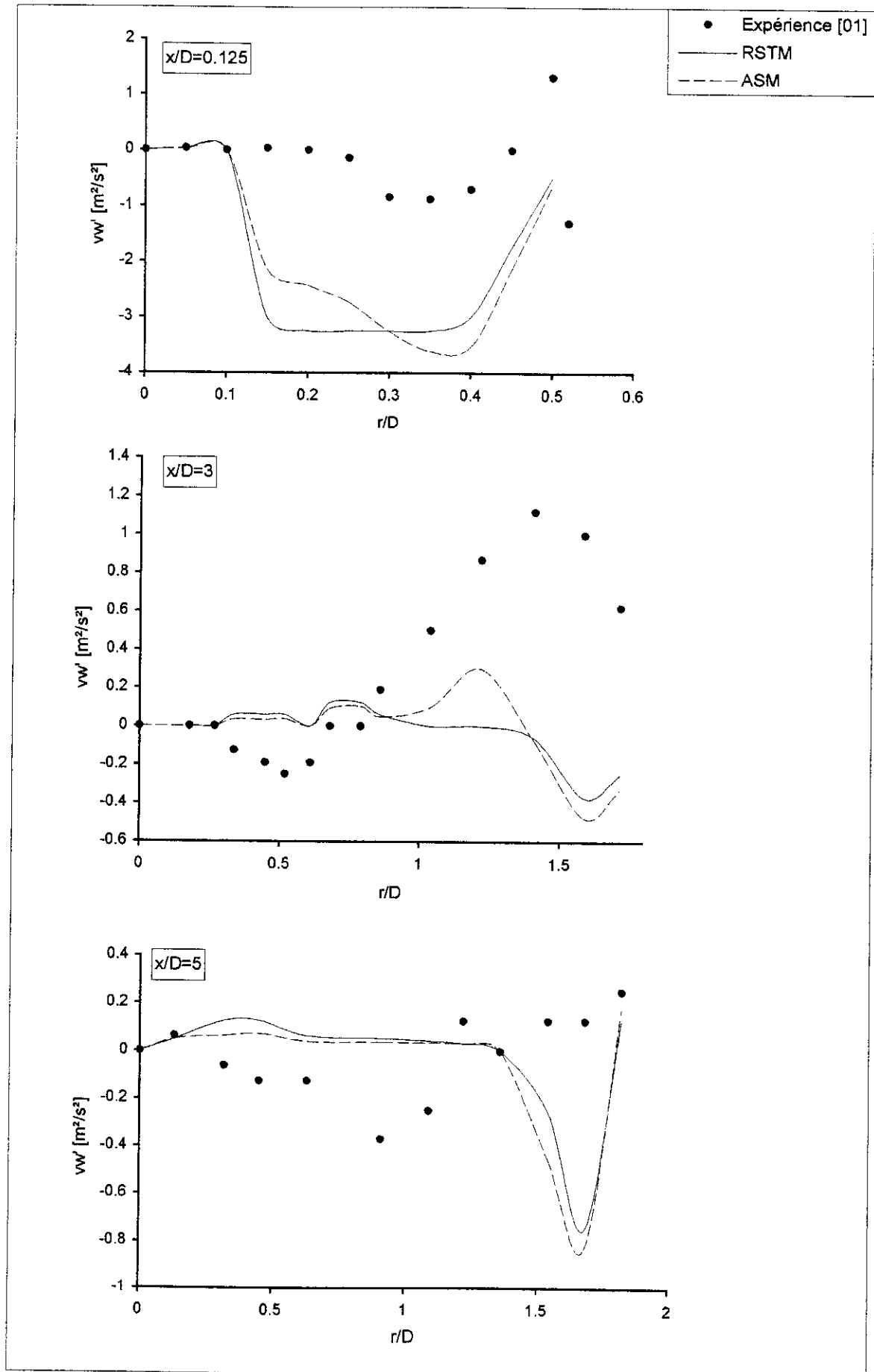


Fig.(4-11): Profils de la contrainte tangentielle vw' à différentes stations du domaine de calcul.

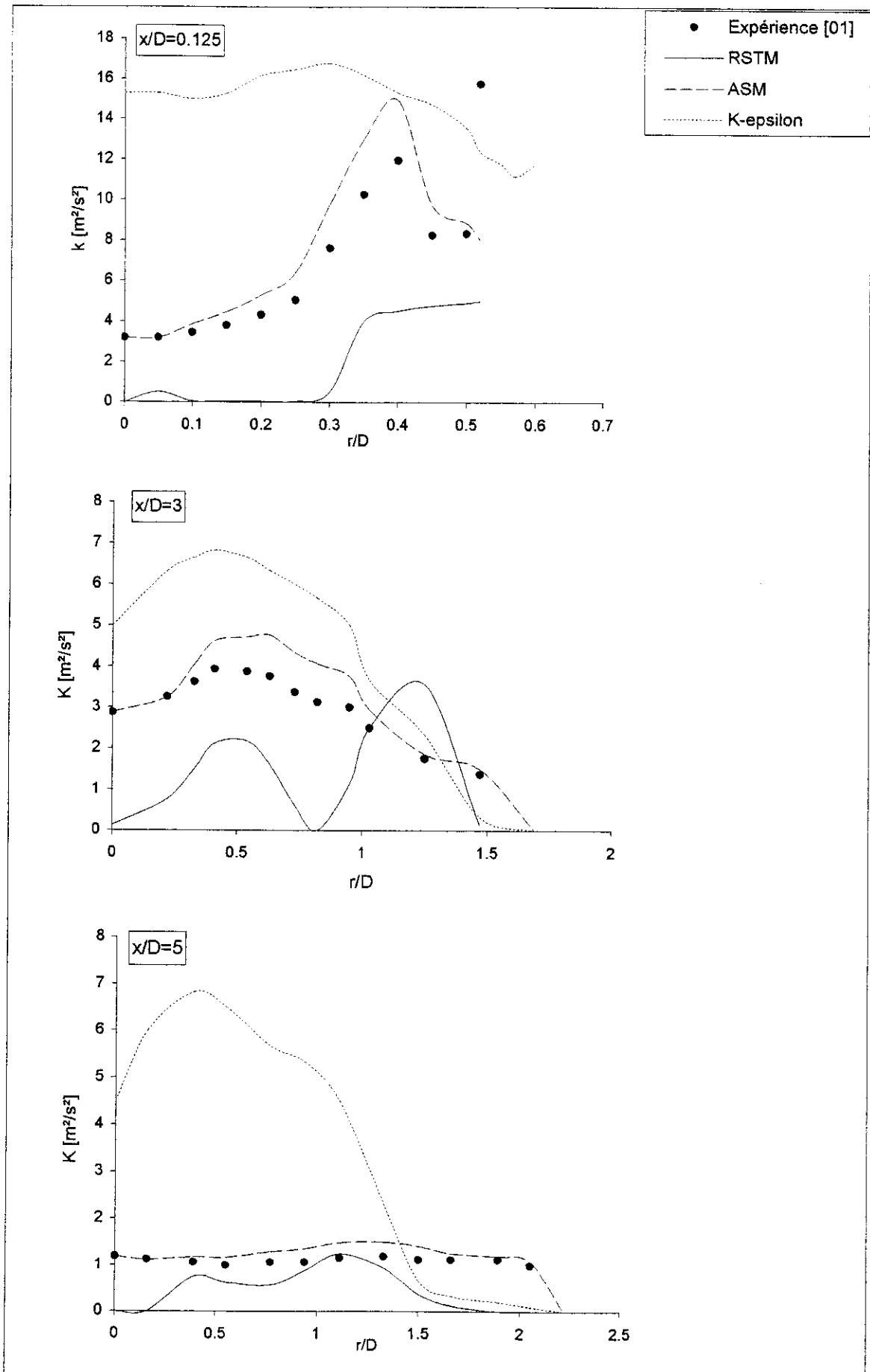


Fig.(4-12): Profils de l'énergie cinétique K à différentes stations du domaine de calcul

4-7 APPLICATIONS ET COMPARAISON DES PERFORMANCES

Les Comparaisons des solutions calculées avec les données expérimentales pour les trois écoulements, sont montrées sur les figures précédentes :

a) Profils de vitesses:

Les figures (4-3), (4-4), (4,5) expose les tracés des profils des composantes de la vitesse moyenne à des distances axiales adimensionnelles ($x/D=0.125$, 3 et 5) des trois modèles (K- ϵ), (RSTM), (ASM) comparées avec les résultats expérimentaux [01].

Ces résultats présentent un assez bon accord avec les résultats expérimentaux. Les trois modèles semblent donner de résultats similaires.

- En comparant les trois composantes de vitesse, on remarque que la composante axiale U est maximale par rapport aux deux autres.
On remarque que le maximum de U des modèles RSTM et ASM est plus proches au maximum des résultats expérimentaux par rapport à celui du modèle K- ϵ .
Les faibles valeurs de la composante axiale localisées près de l'orifice de soufflage sont dues à la création d'un fort gradient de vitesse qui tend à inverser le sens de l'écoulement.
- Avant l'établissement de l'écoulement, la composante de vitesse tangentielle W atteint son maximal, car le tourbillonnement tend à diviser au maximum la vitesse vers le sens orthogonal à l'écoulement, puis atteint rapidement son minimal lorsque l'écoulement sera établi.
On remarque qu'il existe un décalage important entre le modèle K- ϵ et les résultats expérimentaux, par rapport à l'écart entre les profils ASM, surtout RSTM, et les points expérimentaux. Ce qui implique la précision et la performance du modèle RSTM pour l'imposition du tourbillonnement.
- Concernant la composante radiale V , elle reste faible comparativement aux deux autres.
- Les maxima positifs des gradients radiaux des composantes U et W de vitesse coïncident avec une ligne de vitesse nulle situé à la limite de la zone de circulation.

En conclusion :

L'examen des résultats de calcul, montre que la prévision des vitesses moyennes par les trois modèles de turbulence utilisés est bonne dans l'ensemble, ou il y a un bon accord avec les résultats expérimentaux ; et d'une façon générale, on peut constater que le meilleur accord avec les expériences est obtenu avec le modèle K- ϵ .

b) Profils d'énergie cinétique :

La distribution radiale de l'énergie cinétique K en fonction de la distance axiale adimensionnelle (x/D) des modèles ASM, K- ϵ , RSTM comparée avec les résultats expérimentaux [1] est exposé sur la figure (4-12).

- Les distributions de l'énergie cinétique de turbulence sont similaires à celles des contraintes normales surtout pour les modèles K- ϵ et RSTM. Les profils de K montrent qu'elle est maximale à l'entrée du jet et dans la région centrale de la zone de recirculation. Au-delà de cette zone, l'énergie cinétique de turbulence présente une décroissance d'une manière rapide.

On peut conclure que :

En ce qui concerne la comparaison des trois modèles, on peut constater une supériorité du modèle (K- ϵ) par rapport aux deux autres modèles ASM et RSTM, et une supériorité du modèle ASM par rapport au modèle RSTM (fig. (4-12)). Ce qui donne que le modèle (K- ϵ) donne des prévisions systématiquement au dessus des modèles ASM et RSTM, et le modèle ASM donne des prévisions systématiquement au dessus du modèle RSTM. L'écart entre les trois modèles devient très important à l'entrée du jet et dans la région centrale de la zone de recirculation.

La distribution de l'énergie cinétique est déterminée d'une manière plus correcte, par rapport à l'expérience, par le modèle ASM.

c) Profils des intensités de turbulence :

- Les contraintes de Reynolds prédites sont généralement en bon accord avec les résultats expérimentaux et plus particulièrement pour les contraintes tangentielles.
- Elles sont maximales dans la région no établie de l'écoulement du jet, mais faible aux frontières et deviennent de plus en plus faibles au fur et à mesure qu'on s'éloigne de l'orifice de soufflage.
- Les contraintes \bar{u}^2 et \bar{v}^2 sont, en général plus grandes que \bar{w}^2 .
- Les contraintes tangentielles de Reynolds sont sensiblement plus petites que les contraintes normales.

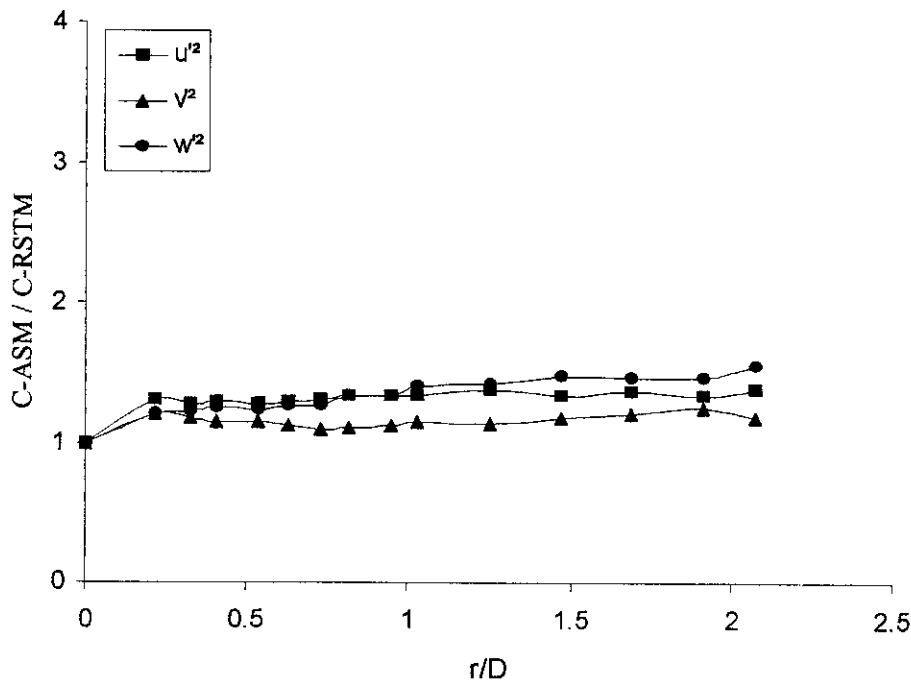


Fig. (4-14): Rapport du transport des contraintes normales de Reynolds, du modèle ASM au modèle RSTM pour un jet tourbillonnaire ($S=0.79$)

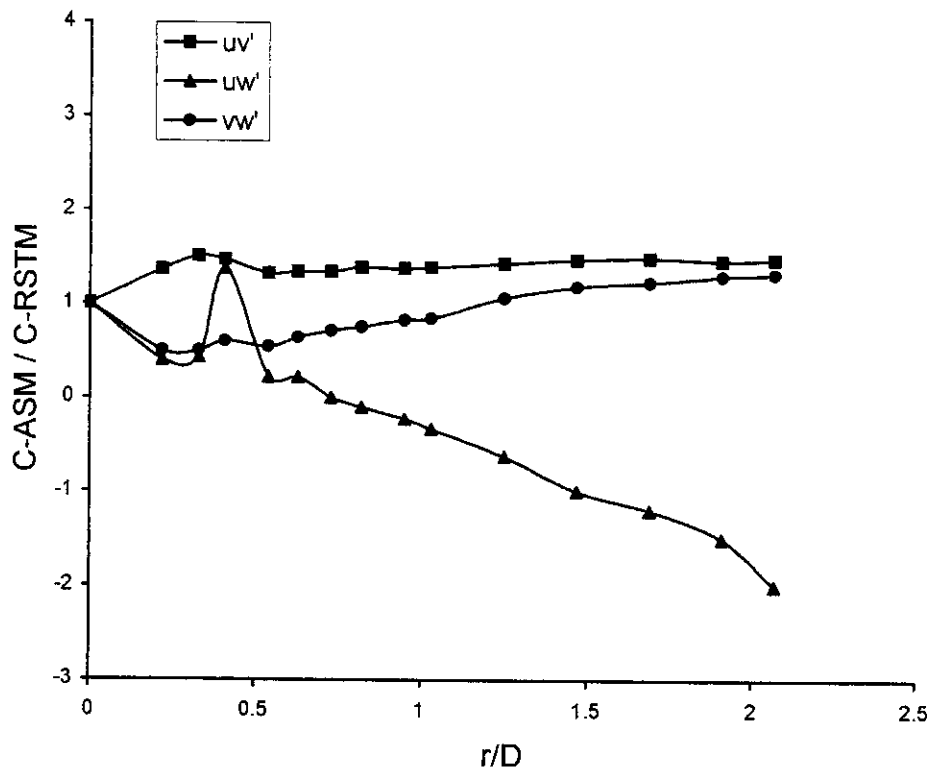


Fig.(4-15): Rapport du transport des contraintes tangentielles de Reynolds, du modèle ASM au modèle RSTM pour un jet tourbillonnaire ($S=0.79$)

Les ordonnées du repère des figures (4-14) et (4-15) représentent le transport des contraintes calculé par le modèle ASM et divisé par celui calculé par le modèle RSTM. Donc la validité des approximations du modèle ASM par rapport au modèle RSTM doit conduire à une valeur d'unité le long du domaine de calcul.

- Pour les contraintes normales, une valeur proche de l'unité est obtenue, mais pour les contraintes tangentielles est surtout la composante \overline{uw} cependant, une assez différence apparaît et les niveaux de pics de \overline{uw} sont supérieurs pour le modèle ASM. Ce qui donne directement un taux d'épanouissement plus que ce lui obtenu par le modèle RSTM.

Le modèle ASM n'est pas suffisant pour représenter convenablement le transport. En effet :

- 1- La transformation du terme de diffusion dans l'équation de transport pour la contrainte tangentielle \overline{uv} en coordonnées cylindricopolaire donne :

- Pour le modèle RSTM :

$$D_{uv}^{RSTM} = \frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{k}{\varepsilon} \frac{-2}{v} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial r} \right) - \frac{C_s}{r} \frac{\varepsilon}{k} \frac{-2}{w} \frac{\overline{uv}}{r} \quad (4-3)$$

- Les hypothèses de Rodi [18] pour le modèle ASM conduisent ce terme à être approximé par la relation suivante :

$$D_{uv}^{ASM} = \frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{k}{\varepsilon} \frac{-2}{v} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial r} \right) \quad (4-4)$$

L'expression (4-4) est simplement une approximation du 1^{er} terme de l'expression (4-3), et dans ce cas une erreur remarquable peut se produire en négligeant le second terme de l'expression (4-3) particulièrement près de l'axe où (r) tend vers zéro.

- 2- Dans le cas d'un écoulement tourbillonnaire, la présence de swirl ajoute de nombreux termes additionnels au modèle RSTM à partir des processus du transport ce qui le qualifié par rapport au modèles ASM et K-ε.

Les termes de convection pour les composantes normales et tangentielles des contraintes de Reynolds sont :

- Pour le modèle RSTM :

$$\begin{aligned}
 C_{rr} &= \rho U \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial x} + \rho V \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial r} - 2 \overline{\rho v w} \frac{W}{r} \\
 C_{\theta\theta} &= \rho U \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial x} + \rho V \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial r} + 2 \overline{\rho v w} \frac{W}{r} \\
 C_{rx} &= \rho U \frac{\partial \overline{uv}}{\partial x} + \rho V \frac{\partial \overline{uv}}{\partial r} - \overline{\rho u w} \frac{W}{r} \\
 C_{r\theta} &= \rho U \frac{\partial \overline{vw}}{\partial x} + \rho V \frac{\partial \overline{vw}}{\partial r} + \rho \left(\overline{v^2} - \overline{w^2} \right) \frac{W}{r} \\
 C_{r\theta} &= \rho U \frac{\partial \overline{uw}}{\partial x} + \rho V \frac{\partial \overline{uw}}{\partial r} + \overline{\rho u v} \frac{W}{r}
 \end{aligned} \tag{4-5}$$

- En appliquant les hypothèses du modèle ASM, ces termes de transport convectif sont approximés par l'expression suivante :

$$C_{ij} = \frac{\partial}{\partial x} (\rho U \overline{u_i u_j}) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho V \overline{u_i u_j}) \tag{4-6}$$

Les termes C_{ij} dans ce cas et surtout C_{rx} sont indépendants de l'effet de vitesse de swirl tandis que la version exacte ne l'est pas.

Pour les termes de diffusion, il en est de même. En considérant seulement comme exemple, le transport diffusif de $\overline{v^2}$:

D_{rr} dans l'approximation du modèle RSTM est donné par :

$$\begin{aligned}
 D_{rr}^{\text{RSTM}} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[C_s \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{u^2} \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial x} + \overline{uv} \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial r} - \left\{ 2 \overline{uv} \frac{\overline{vw}}{r} \right\} \right) \right] \\
 &+ \frac{\partial}{\partial r} \left[r C_s \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{uv} \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial x} + \overline{v^2} \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial r} - \left\{ 2 \overline{vw} \frac{\overline{vw}}{r} \right\} \right) \right] \\
 &- 2 \frac{C_1}{r} \frac{k}{\varepsilon} \left[\overline{uw} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial x} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial r} + \left\{ \frac{\overline{w^2}}{r} (\overline{v^2} - \overline{w^2}) \right\} \right]
 \end{aligned} \tag{4-7}$$

- Tandis que dans le cas du modèle ASM, ce terme est simplifié par :

$$D_{rr}^{ASM} = \frac{\partial}{\partial x} \left[C_s \frac{k}{\varepsilon} \left(u^2 \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial x} + uv \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{r \cdot \partial r} \left[r \cdot C_s \frac{k}{\varepsilon} \left(uv \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial x} + v^2 \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial r} \right) \right] \quad (4-8)$$

Les termes entre { } dans l'expression de (4-7) se produisent en présence du swirl. Ces termes dans l'expression (4-8) sont négligés ce qui affecte directement les niveaux des contraintes normales et tangentielles.

Conclusion :

Comme cet écoulement est complexe, il est difficile d'identifier des rapports de causes spécifiques responsables des différences entre les deux modèles. Cependant, il apparaît que c'est principalement l'influence des changements de niveaux des contraintes normales sur la production des contraintes tangentielles qui est le mécanisme clé.

Conclusion Générale

Conclusion générale

Les résultats qui ont été présentés dans le chapitre précédent indiquent que les modèles RSTM et ASM sont supérieurs par rapport au modèle (K- ϵ) lorsqu'on s'intéresse aux variations des tensions de Reynolds, alors que pour les applications en ingénierie où la puissance de calcul peut faire défaut et le coût de calcul est limité, le modèle (K- ϵ) peut être utilisé pour la prévision des écoulements avec recirculation si l'on s'intéresse aux paramètres globaux uniquement.

Donc, le modèle K- ϵ est valable pour la prédiction des écoulements turbulents simples, mais dans le cas des écoulements tourbillonnaires avec recirculation il n'est pas bien adéquat, pour les écoulements fortement tourbillonnaires ne prédit pas convenablement la zone de recirculation en taille et en grandeur. Ce modèle remis des niveaux excessifs pour la diffusion turbulente, on remarque qu'il donne une représentation erronée des caractéristiques d'écoulement, en comparant ces résultats avec ceux donnés expérimentaux. Il ignore la présence des déformations rotationnelles et omet de faire une distinction entre les plans de cisaillement et de déformation. La cause des insuffisances de ce modèle est l'hypothèse d'une viscosité isotropique qui est en réalité anisotropique pour l'écoulement tourbillonnaire [24]

La comparaison entre quelques prédictions des modèles ASM et RSTM pour les jets axisymétriques tourbillonnaires a montré que les hypothèses de transport des contraintes utilisées pour simplifier la forme du modèle RSTM à celle du modèle ASM affectent directement les niveaux des termes de transport (contraintes normales et tangentielles).

La nature de ces termes responsables de ces différences montre qu'aucune de plus complexes hypothèses de transport du modèle ASM proposées précédemment peut être espéré d'aller dans le bon sens.

En plus, l'approximation de diffusion cause une différence majeure et inévitable entre les deux formes des deux modèles ASM et RSTM, spécialement pour les écoulements tourbillonnaires où toutes les six composantes du tenseur des contraintes de Reynolds ne sont pas nulles.

Les Schémas du modèle ASM utilisés en écoulements axisymétriques tourbillonnaires ignorent certains termes significatifs pour l'équilibre général des contraintes de Reynolds. Dans ce cas et pour une bonne qualité des résultats, on doit utiliser le modèle de fermeture complet RSTM.

On peut conclure que le modèle RSTM est une bonne approche de l'écoulement réel et représente correctement la sensibilité physique réelle de l'écoulement aux perturbations introduites loin en aval. Il permet de mieux prédire l'écoulement par rapport aux deux autres modèles ASM et K- ϵ , mais la solution du système d'équations devient plus lourde lorsque le modèle considère toutes les composantes du tenseur de Reynolds.

En fin, on peut dire que le choix d'un modèle de turbulence est très important pour la validité des calculs. Cependant, il ne suffit pas de savoir quel modèle utiliser, il faut être sûr d'avoir les moyens informatiques pour le mettre en oeuvre et de bien connaître le modèle en question et ses limites : il est en effet possible d'adapter un modèle à un problème en jouant sur les valeurs numériques de ses constantes. Ainsi, nous n'avons pas pu, comme nous le désirions au départ, associer à ce problème physique donné, un unique modèle de turbulence.

En général, il y a trois critères influencent de manière importante le choix d'un modèle de turbulence : la nature physique du problème, la qualité des résultats attendus et la puissance de calcul.

Bien que les résultats obtenus par les deux modèles ASM et RSTM qui sont de coût, élevés (beaucoup des relations, surtout le modèle RSTM), sont généralement justifiés et identifiés pour les écoulements turbulents tourbillonnaires par rapport au modèle à deux équations, et avec l'apparition des puissantes ordinateurs, de fait notre recommandation est d'utiliser les résultats obtenus comme support pour la résolution du aspect thermique des problèmes d'écoulements turbulents.

Références Bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] **Sislian J. P. et Cusworth R. A.**,
« Measurements of Mean Velocity and Turbulent Intensities in Free Isothermal Swirling jet », University of Toronto, Canada.
AIAA Journal, Vol 24 N° 02, February 1986.
- [2] **Shi, R. X. et Chehrouj, B.**,
« Velocity Characteristics of a Confined Highly Turbulent Swirling Flow Near a Swirl Plate »,
Journal of Engineering, transaction of ASME, Vol 116, Dec. 1994.
- [3] **Rodi W.**
« Turbulence Models for Environmental Problems »,
Computed Fluid Dynamics, Vol. 01, Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
- [4] **Amal, M.**,
« Contribution à l'Etude du Swirling Jet avec ou sans Sillage pour le Chauffage des Grands Bâtiments »,
Thèse de doctorat de 3^{ème} cycle, 1987, Université de Valenciennes, France.
- [5] **Grandmaison, E. W. et Becker, H. A.**,
« Turbulent mixing in Free Swirling jets »,
The Canadian journal of Chemical Engineering, Vol. 60, February 1982.
- [6] **Pratte, B. D. et Keffer, J. F.**,
« The swirling Turbulent Jet »,
Journal of Basic Engineering, December 1972.
- [7] **Loukarfi L.**,
« Contribution Expérimentale à l'Etude de la Déstratification d'une Ambiance par Interaction de Jets tourbillonnaire »,
Thèse de Doctorat d'Etat, 1998, Université d'Oran.
- [8] **Fletcher C.A.J.**,
« Computational Techniques for Fluid Dynamics »
Volume 1, Edition Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1988.
- [9] **Patankar S. V. and Spalding D. B.**,
« A Calculation for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-dimensional parabolic flows », Int. J. Heat Mass Transfer, 15, 1787-1806 (1972).
- [10] **Richtmyer, R.D., Morton, K.W.**,
« Difference Methods for Initial – Value Problems »,
(Interscience, New York). 1967, p45.

-
- [11] **Demuren A.Q.**,
« Multigrid Acceleration and Turbulence Models for Computations of 3D Turbulent jets in Crossflow », Int. J. Heat mass Transfer Vol. 35, N° 11, PP.2783-2794, 1992.
- [12] **Nobuyuki Shima.**,
« A Reynolds Stress Model for Near-Wall and Low-Reynolds-Number Regions », Journal of Fluids Engineering, Vol. 110, March 1988.
- [13] **S. Fu, B. E. Launder, M.A. Leschziner.**,
« Modeling Strongly Swirling Recirculating jet Flow with Reynolds-stress Transport Closures »,
Proceeding of the 6th symposium on turbulent shear flows, Toulouse, 1987.
- [14] **Rotta, J. C.**,
« Statistische Theorie Nichtomogener turbulent Turbulenz », Phys. Fluids, 129, 547. (1951) .
- [15] **MAZAYA. OHTSUKA.**,
« Numerical Analysis of Swirling non-reacting and Reacting Flows by the Reynolds Stress Differential Method »,
Int. Heat Mass Transfer, Vol. 38, N° 2, PP.331-337, 1995.
- [16] **Launder B.E., Reece G.J. et Rodi W.**,
« Progress in the Development of a Reynolds-stress Turbulence Closure », J. Fluid Mech. (1975), Vol. 68, part. 3, PP.537-566.
- [17] **Naot, D., Shavit, A. et Wolfshtein, M.**,
« Interactions between components of the turbulent velocity correlation tensor », Israel J. Tech. 8, 259. (1970).
- [18] **Rodi W.**,
« A New Algebraic Relation for Calculating the Reynolds Stress », ZAMM (Mech. Fluid.) 56, 219 (1976).
- [19] **PATANKAR S.V.**,
« Numerical Heat Transfer and Fluid Flow », McGraw-Hill, New York, 1980.
- [20] **Patel M.K. et Markatos N.C.**,
« An Evaluation of Eight Discretization Schemes for Two-Dimensional Convection-Diffusion Equations », International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 6, 129-154 (1986).
- [21] **Patel, V. C., Rodi W. et Scheuerer, G.**,
« Turbulence Models for Near-Wall and Low-Reynolds Number Flows », A Review, AIAA Journal, Vol. 33, PP 1308-1319, 1985.

-
- [22] **Belhaj E. E.**,
« Modélisation Numérique de l'Écoulement d'un Jet Libre Tourbillonnaire Isotherme », Thèse de Magister, 1999, Université de Chlef
- [23] **Launder, B.E. et Spalding, D.B.**,
« Lectures in Mathematical Models of turbulence », Academic Press, London and New York, 1972.
- [24] **Daly, B.G. et Harlow, F.G.**,
« Transport equations of turbulence », Phys. Fluides, 13,2643. (1970).
- [25] **Hanjalic K. and Launder B. E.**,
« A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows », J. fluid mech. 52, 609. (1972).
- [26] **Settari A. and Aziz K.**,
« A Generalization of the additive correction methods for the iterative solution of matrix equation », SIAM J. Numer. Anal., Vol. 10, p.506, 1973.
- [27] **Lilley, D. G., and Rhode, D.L.**,
« A Computer code for swirling turbulent axisymmetric recirculating flows in practical isothermal combustor geometries », NASA CR – 3442., 1982.
- [28] **Damou, M. et Khida, M.**,
« Simulation Numérique d'Écoulement turbulents avec tourbillonnement dans une chambre à combustion », 1^{er} colloque sur les moteurs et l'énergétique (COME 96), Université de Blida 14, 15 et 16 janvier 1996.
- [29] **Borjane, M.**,
« Modélisation d'un jet libre isotherme turbulent avec tourbillonnement », Thèse de Magister, 2000, Université de Chlef.
- [30] **Sharif M.A.R et Wong Y. K. E.**,
« Evaluation of the performance of Three Turbulence Closure Models in the Prediction of Confined Swirling Flows », Computers and Fluids Vol. 24 N°1, PP. 81-100, 1995.