



*République Algérienne Démocratique et Populaire*

*Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la*

*Recherche Scientifique*

*Université de Hassiba Ben Bouali Chlef*

*Faculté des Sciences et Sciences de l'ingénieur*

*Département de Génie Mécanique*

**ECOLE DOCTORALE**

**MEMOIRE**

**En Vue de l'obtention du diplôme magister en Mécanique**

**Option : Simulation mécanique**

---

***ETUDE EXPERIMENTALE D'UN  
PALIER LUBRIFIE MESALIGNE***

---

**Présenté par : SAHLI ABDELKADER**

Devant le jury composé de Mrs :

<i>LOUKARFI Larbi</i>	<i>Professeur</i>	<i>(U.H.B.Chlef)</i>	<i>Président</i>
<i>MANSOURI BenSmain</i>	<i>M.C.A</i>	<i>(U.ST.Oran)</i>	<i>Examineur</i>
<i>MERIEM BENZIANE Madjid</i>	<i>M.C.B</i>	<i>(U.H.B.Chlef)</i>	<i>Examineur</i>
<i>TAHAR ABBES Miloud</i>	<i>M.C.A</i>	<i>(U.H.B.Chlef)</i>	<i>Encadreur</i>

**Année universitaire 2010 /2011**

## **Remerciements**

**Je remercie dieu tous puissant qui m'a donné le courage, la force et**

**La volonté pour achever ce modeste travail**

**Mes sincères remerciement a mon promoteur monsieur  
TAHARE ABBAS**

**MILOUD Chargé du cours pour sa disponibilité, ses précieux,  
conseil.**

**Mes remerciements également à tous les enseignant qui  
ont participé a ma**

**Formation, à tous les employés**

**Mes remerciements aux membres du jury pour avoir  
accepté d'examiner ce travail.**

**Je tiens également a remercier tous mes et mes camarades  
de la promotion, et**

**tous ceux qui ont contribué de près de loin a la bon  
réalisation de ce travail**



---

# TABLES DES MATIERES

Titre	page
<b>Introduction générale</b>	<b>2</b>
<b>Chapitre1: Bibliographie</b>	<b>3</b>
<b>1.1 Introduction</b>	<b>4</b>
1.2 Hydrostatique	5
1.2.1 Dynamique des fluides	5
1.2.2. Les équations de Navier-stokes	6
1.2.3. L'équation d'Euler	7
1.2.4. L'équation de Reynolds	7
1.3. Le palier hydrodynamique	7
1.3.1. Caractéristiques d'un palier	8
1.3.2. Projet de calcul d un palier hydrodynamique	9
1.4. Type des paliers	9
1.4.1. Palier court	9
1.4.2. Palier infiniment long	9
1.4.3. Palier de longueur finie	10
1.5. Principe de fonctionnement du palier	10
1.6. Régime de fonctionnement (lubrification)	11
1.6.1. Régime de frottement sec	11
1.6.2 Régime de lubrification limite	12
1.6.3. Régime de lubrifiant fluide	12
1.6.4. Régime de lubrification mixte	13
1.7. Les lubrifiants	13
1.7.1. Les additifs	14
1.7.2. La viscosité	15
1.7.3. Fluide newtonien	16
1.7.4. Fluide non-newtonien	16
<b>Chapitre 2:Equation de base de l'hydrodynamique d'un palier</b>	<b>17</b>
2.1. Introduction	18
2.2. Equation de Reynolds	18
2.2.1. Hypothèses du film minces	20
2.3. Equation de Reynolds du palier lubrifier	22

2.4. Conditions aux limites	26
A) Modèle de Sommerfeld	26
B) Conditions de Gumbel	27
C) Conditions aux limites de Reynolds	28
2.5. Equation du film lubrifiant	30
2.6. Charge hydrodynamique et angle de calage	31
2.7. Influence du désalignement	33
2.8. Equation de l'épaisseur du film d'huile du palier mésaligné	33
2.9. Charge hydrodynamique F pour le palier mésaligné	36
<b>Chapitre 3: Méthode analytique de résolution du palier hydrodynamique</b>	<b>38</b>
3.1 Résolution analytique de Reynolds pour un palier de longueur fini	39
3.2. Organigramme principal de résolution	40
3.3 Obtention de $f(\theta)$	41
3.4 Programmation de calcul de $f(\theta)$	43
3.5 Discrétisation de l'équation de Rohde et Li	45
3.6 Résolution du programme analytique	46
<b>Chapitre 4: Etude expérimentale du palier hydrodynamique</b>	<b>47</b>
4.1 Introduction	48
4.2. Description de l'appareil	50
4.3. Caractéristiques techniques du banc d'essai	51
4.4. Principe de mesure	52
4.5. Réalisation de l'essai	53
4.5.1. Préchauffage mécanique de l'huile	53
4.5.2. Mise en pratique du mouvement hydrodynamique	54
4.6. Répartition de la pression pour une charge constante avec vitesse de rotation Variable	54
4.7. Vitesse de rotation critique en fonction de la charge	66
4.8. Vitesse de rotation critique en fonction de la viscosité	67
Conclusion	65
<b>Chapitre 5 Méthode numérique de résolution du palier</b>	<b>69</b>
5.1. Introduction	70
5.2. Le problème de palier hydrodynamique	72
5.2.1. L'équation de Reynolds	72
5.2.2 Les conditions aux limites de Reynolds	73
5.3 Organigramme principal de résolution	75

---

5.4. Procédure détaillée d'obtention de la solution	76
5.4.1. Le maillage	76
5.4.2 L'épaisseur du film	77
5.4.3 Discrétisation de l'équation de Reynolds par la méthode des différences Finies	78
5.5 Exécution du programme du palier mésaligné	81
5.6 Exécution du programme pour un palier aligné	83
Conclusion	84
<b>Conclusion générale</b>	<b>86</b>
<b>Annexes</b>	<b>88</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>102</b>

## LISTE DES FIGURES

Figures	Titre	Page
1.1	Position de la mécanique de fluide dans la mécanique des milieux continus	P 4
1.2	hydrostatique	P 5
1.3	Dynamique d'un fluide	P 6
1.4	Paliers hydrodynamiques avec champs de pression	P 8
1.5	Caractéristiques du palier hydrodynamique	P 8
1.6	Phase du régime hydrodynamique	P 11
1.7	Régime hydrostatique	P 12
1.8	Régime hydrodynamique	P 13
2.1	Palier (a) et film développé (b)	P 22
2.2	Section radiale du palier	P 24
2.3	Palier lisse développé	P 26
2.4	Condition aux limites de Sommerfeld	P 27
2.5	Condition de aux limites de Gumbel	P 28
2.6	Condition aux limites de Reynolds	P 29
2.7	Les composantes de la charge	P 32
2.8	Paramètres de palier mésaligné	P 33
2.9	Section de gauche	P 34
2.10	Section de droite	P34
2.11	Charge hydrodynamique F pour un palier mésaligné	P 35
2.12	Eliment différentielle d'intégration de la pression	P 36
3.1	Organigramme principale de résolution	P 40
3.2	Fonction $f(\theta)$ aux points de discrétisation selon la variable $\theta$	P 41
3.3	Forme moléculaire de f	P43
3.4	Algorithme de résolution analytique du palier circulaire	P 44
3.5	Discrétisations de $p_{i,j}$	P 45
3.6	Résulta des pressions analytiques	P 46
4 1	Disposition des points de mesures dans le palier	P 48
4 2	Appareil TM280 de mesure de la pression	P49
4 3	Schéma du banc d'essai	P 51
4.4	Schéma d'un tube manométrique	P 53

4.5	Palier expérimental inversé avec coussinet chargé au lieu de l'arbre	P 54
4.6	Répartition de la pression axiale pour différentes vitesses ( <b>P=1N</b> )	P 55
4.7	<b>Répartition de la pression circonférentielle pour différentes vitesses (P=1N)</b>	P56
4.8	Répartition de la pression axiale pour différentes vitesses ( <b>P=2N</b> )	P 56
4.9	<b>Répartition de la pression circonférentielle pour différentes vitesses (P=2N)</b>	P 57
4.10	Répartition de la pression axiale pour différentes vitesses ( <b>P=3N</b> )	P 58
4.11	<b>Répartition de la pression circonférentielle pour différentes vitesses (P=3N)</b>	P 59
4.12	Répartition de la pression axiale pour différentes vitesses ( <b>P=4N</b> )	P 59
4.13	<b>Répartition de la pression circonférentielle pour différentes vitesses (P=4N)</b>	P 60
4.14	Répartition de la pression axiale pour différentes vitesses ( <b>P=5N</b> )	P 61
4.15	<b>Répartition de la pression circonférentielle pour différentes vitesses (P=5N)</b>	P 62
4.16	Répartition de la pression axiale pour différentes vitesses ( <b>P=6N</b> )	P 62
4.17	<b>Répartition de la pression circonférentielle pour différentes vitesses (P=6N)</b>	P 63
4.18	Répartition de la pression axiale pour différentes vitesses ( <b>P=7N</b> )	P 64
4.19	Répartition de la pression circonférentielle pour différentes vitesses ( <b>P=7N</b> )	P 65
4.20	Diagramme de la pression en coordonnées polaires	P 66
4.21	Vitesse de rotation critique en fonction de la charge	P 67
4.22	Vitesse de rotation critique en fonction de la viscosité	P 68
5.1	Paramètres principaux du palier hydrodynamique	P 71
5.2	La configuration du palier développé avec les conditions de Reynolds	P 73
5.3	<b>Conditions aux limites circonférentiels selon <math>\theta</math></b>	P74
5.4	Conditions aux limites axiales selon <b>z</b>	P 74
5.5	Organigramme principale	P 75
5.6	Configuration du maillage du film développé	P 76
5.7	Grille de l'épaisseur h	P77
5.8	Épaisseur h dans le maillage	P 78
<b>5.9</b>	<b>Schéma numérique: Molécule de l'équation de Reynolds en un point (i, j) du maillage</b>	<b>P 81</b>
5.10	Champ de pression d'un palier mésaligné	P 82
5.11	Epaisseur du film d'huile d'un palier mésaligné	P 82
5.12	Champ de pression pour un palier aligné	P 83
5.13	Epaisseur du film d'huile pour un palier aligné	P83

---

## LISTE DES TABLEAUX

<b>Tableaux</b>	<b>Titre</b>	<b>Page</b>
1.1	Classification ISO des huiles industrielles	P 15
3.1	Approche de Rhode et Li cas du palier circulaire: erreur sur la portance(%)	P 40
4.1	Caractéristiques techniques du banc d'essai	P 51
4.2	Effet de la vitesse sur la pression pour une charge P=1N	P 55
4.3	Effet de la vitesse sur la pression pour une charge P=2N	P57
4.4	Effet de la vitesse sur la pression pour une charge P=3N	P 58
4.5	Effet de la vitesse sur la pression pour une charge P=4N	P 60
4.6	Effet de la vitesse sur la pression pour une charge P=5N	P 61
4.7	Effet de la vitesse sur la pression pour une charge P=6N	P 63
4.8	Effet de la vitesse sur la pression pour une charge P=7N	P 64
5.1	Comparaisons des résultats expérimental, numérique et analytique	P 84

---

## NOMENCLATURE DES SYMBOLES

<i>Symbole</i>	<i>Définition</i>	<b>Unité</b>
<b>C</b>	<b>Jeu radial</b>	m
<b>e</b>	<b>Excentricité absolue</b>	m
<b>F</b>	<b>Force hydrodynamique N</b>	N
<b>h</b>	<b>Epaisseur du film</b>	m
<b>L</b>	<b>Longueur du palier</b>	m
<b>D</b>	<b>Diamètre du palier</b>	m
<b>R</b>	<b>Rayon</b>	m
<b>P</b>	<b>Pression</b>	N/m <sup>2</sup>
<b>u, v</b>	<b>Composantes de la vitesse</b>	m/s
<b>U</b>	<b>Vitesse linéaire de l'arbre</b>	m/s
<b>x, y, z</b>	<b>Variable d'espace</b>	m
<b>p</b>	<b>Charge</b>	N
<b>e<sub>b</sub>, e<sub>h</sub></b>	<b>e excentricité a droite et a gauche ou palier mésaligné</b>	m
<b>μ</b>	<b>Viscosité dynamique</b>	kg/m.s
<b>τ<sub>ij</sub></b>	<b>Tenseur des Contrainte de cisaillement</b>	-
<b>ε<sub>ij</sub></b>	<b>: Tenseur des taux de déformations</b>	-
<b>∇</b>	<b>Gradient</b>	-
<b>σ<sub>i,j</sub></b>	<b>Tenseur des contraintes</b>	-
<b>Δ</b>	<b>Laplacien</b>	-
<b>φ</b>	<b>Angle de calage</b>	rd

$\varepsilon = \frac{e}{c}$	<b>Excentricité relative</b>	-
$\theta$	<b>Coordonnée circonférentielle adimensionnelle</b>	rd
$\bar{z}$	<b>Coordonnée axiale adimensionnelle</b>	-
$\bar{p}$	<b>Pression adimensionnelle</b>	-
$\theta$	<b>Coordonnée circonférentielle [</b>	rd
$\rho$	<b>Masse volumique</b>	kg/m <sup>3</sup>
$\omega$	<b>Vitesse angulaire [</b>	rd/s
$\beta$	<b>Direction de mésalignement par rapport à la ligne des centres</b>	rd
$\delta$	<b>Mésalignement relatif</b>	m
$d$	<b>Amplitude de mésalignement</b>	m

### **Introduction générale**

Les paliers hydrodynamiques ont pour objectif principal de supporter une charge radiale. Ces organes de support et de guidage en rotation sont de plus en plus utilisés dans les machines tournantes contemporaines. Ils sont constitués de trois parties: le coussinet (géométrie fixe ou à patins oscillants), l'arbre en rotation, et le film lubrifiant qui les sépare. De nos jours, ils sont pour la plupart très sollicités tant au niveau de la température de fonctionnement qu'au niveau de l'épaisseur minimale du film fluide. Cette situation résulte des conditions de plus en plus sévères appliquées sur ces organes de guidage de rotors.

L'accroissement des vitesses et des charges augmente l'énergie dissipée dans le film d'huile donc les températures, modifiant sensiblement les caractéristiques du lubrifiant et les performances du palier. Ceci entraîne d'une part une baisse de la viscosité du lubrifiant, donc de la capacité de charge, et d'autre part une déformation élastique des surfaces de contact qui peut être dans certains cas très sévères, de l'ordre de, ou même supérieure à l'épaisseur minimale du film. Le malalignement est aussi un facteur perturbant les conditions de fonctionnement du palier, notamment en réduisant considérablement l'épaisseur minimale du film et en augmentant les gradients de température. Afin de prédire au mieux le comportement du palier, il est donc nécessaire de réaliser des simulations numériques aussi précises que possible, prenant en compte tous ces paramètres.

Les effets thermiques dans les paliers hydrodynamiques ont été largement étudiés au cours des vingt dernières années, ainsi que les effets élastiques, mais peu d'études regroupent les deux approches. Le but de l'étude menée au cours de cette thèse a donc été de développer, à partir d'un modèle existant, une modélisation qui tienne compte du plus grand nombre de paramètres, comme les effets thermiques, les déformations thermiques et élastiques, afin qu'elle soit la plus précise possible. De plus, des expérimentations ont permis de valider cette étude, tant au niveau des conditions aux limites qu'au niveau des hypothèses retenues.

Les importants progrès du savoir scientifique au cours des cinquante dernières années écoulées, notamment ce qui concerne les progrès réalisés dans la technologie de fabrication des paliers, l'utilisation des huiles et les méthodes modernes de calcul, ont permis d'augmenter la durée de vie moyenne des paliers, l'accroissement des performances et la réduction des coûts de production.

L'objet de cette étude est d'analyser un palier hydrodynamique sous chargement statique. L'étude est faite expérimentalement, analytiquement et numériquement. L'étude expérimentale est réalisée au département de mécanique grâce au banc d'essai TM280 de la société GUNT.

L'étude analytique repose sur les solutions de pression apportées par les modèles de Sommerfeld, Gümbel et Reynolds. L'étude numérique est réalisée grâce à l'élaboration d'un code de calcul écrit en FORTRAN et qui détermine le champ de pression et l'épaisseur du film d'huile. Pour atteindre ces objectifs notre mémoire est composée des chapitres suivants

Chapitre I: Etude bibliographique

Chapitre II: Le palier hydrodynamique,

Chapitre III: Equation de base de l'hydrodynamique d'un palier lisse,

Chapitre IV: Etude expérimentale d'un palier hydrodynamique,

Chapitre V: Méthode analytique de résolution du palier hydrodynamique,

Chapitre VI : Méthode numérique de résolution du palier mésaligné et aligné



## 1.1. Introduction

La mécanique des fluides est l'étude du comportement des fluides (liquides et gaz). C'est une branche de la mécanique des milieux continus.

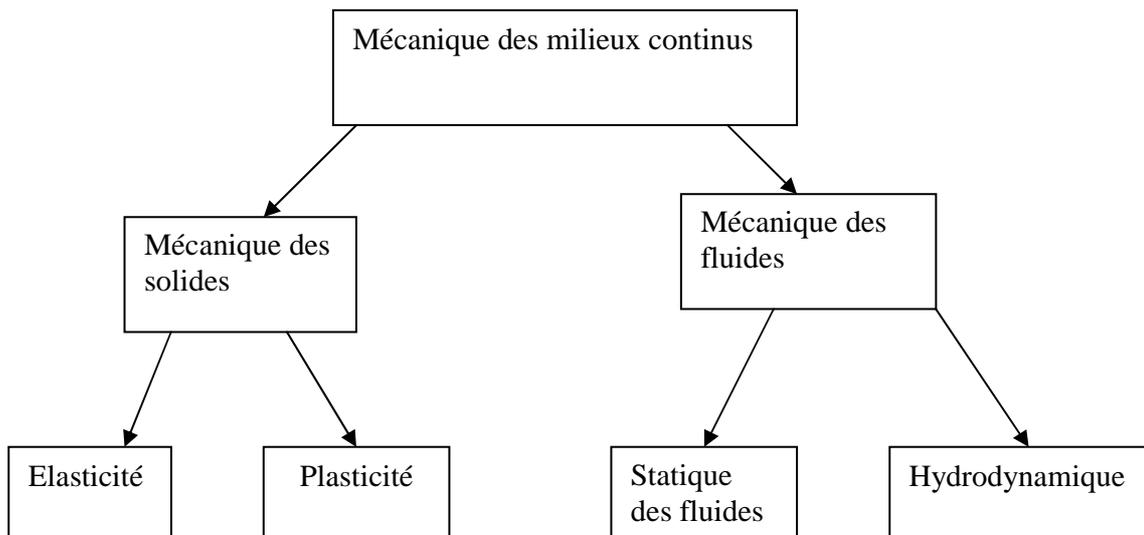
Elle se divise en statique des fluides, l'étude des fluides au repos, qui se réduit pour l'essentiel à l'hydrostatique et la dynamique des fluides, l'étude des fluides en mouvement.

Figure 1.1

L'étude de la mécanique des fluides remonte au moins à l'époque de la Grèce antique avec Archimède qui fut à l'origine de la statique des fluides.

Aujourd'hui, la dynamique des fluides est un domaine actif de la recherche avec de nombreux problèmes non résolus ou partiellement résolus. Elle utilise systématiquement des méthodes numériques pour la résolution dans de cas spécifique d'application.

La mécanique des milieux continus est le domaine de la mécanique qui s'intéresse à la déformation des solides et à l'écoulement des fluides. Nous nous intéresserons donc ici essentiellement à l'hydrodynamique.



**Fig. 1.1:** Position de la mécanique de fluide dans la mécanique des milieux continus

## 1.2 Hydrostatique

L'hydrostatique est l'étude des fluides immobiles. Fondée par Archimède [1], c'est le cas le plus simple de la mécanique des fluides on calcule la pression d'une hauteur comme montre la figure 1.2 avec  $p_M = \rho gh + Pa$

avec Pa la pression atmosphérique

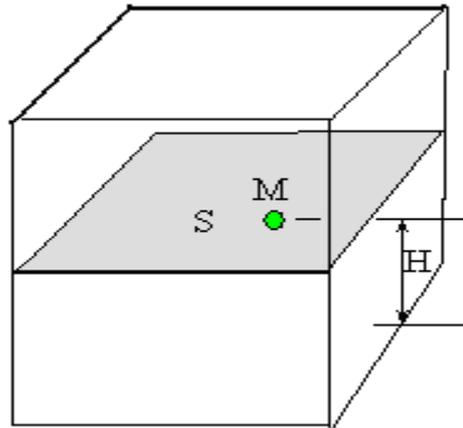


Fig. 1.2: Hydrostatique

### 1.2.1 Dynamique des fluides

L'équation de la dynamique des fluides s'écrit : (la loi fondamentale de la dynamique)

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.1)$$

Dans laquelle ;  $(i=1, 2, 3 ; j=1, 2, 3)$  ;

Les composantes de trois dimension de coordonnées et des vitesses

$u_i$  : Les composantes de la vitesse

$\rho$  : La masse volumique

$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$  : Le tenseur des contraintes donné par la loi de comportement rhéologique du fluide.

$f_i$  : Les forces massiques extérieures..

La résolution d'un problème de dynamique des fluides demande de calculer divers paramètres des fluides comme par exemple la vitesse, la pression, la densité et la température en fonctions de l'espace et du temps. Figure 1.3

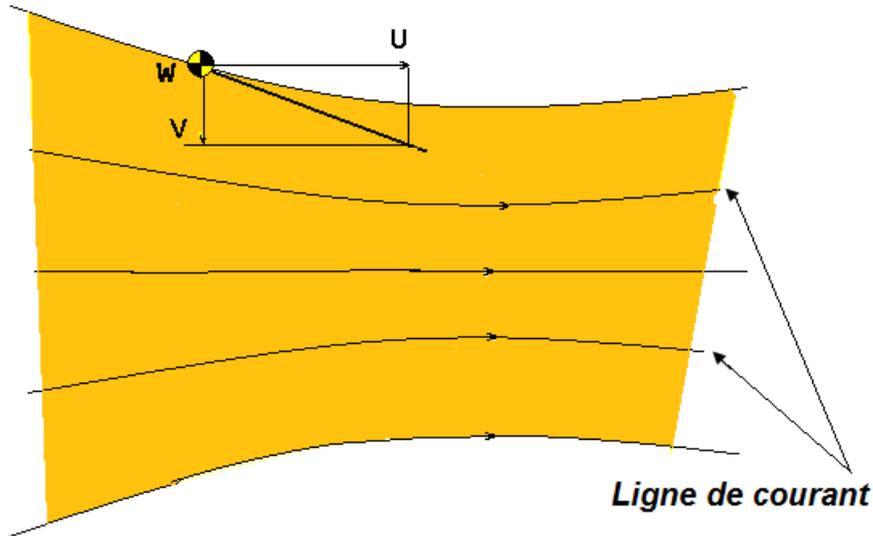


Fig. 1.3: Dynamique d'un fluide

Avec U, V et W: sont les composantes de la vitesse

### 1.2.2. Les équation de Navier-stokes

L'équation de Navier stokes est :

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \quad (1.2)$$

En mécanique des fluides, les équations de Navier-Stokes[2] sont des équations aux dérivées partielles non-linéaires qui décrivent le mouvement des fluides dans l'approximation des milieux continus. Elles gouvernent par exemple les mouvements de l'air de l'atmosphère, les courants océaniques, l'écoulement de l'eau dans un tuyau, et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de fluides. Il est possible de démontrer ces équations à partir de l'équation de Boltzmann [3].

### **1.2.3. L'équation d'Euler**

L'équation d'Euler[4] dérive de la relation fondamentale de la dynamique, appliquée à une particule fluide:  $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$

L'équation d'Euler (établie par Euler en 1755) s'applique dans le cas d'un fluide parfait, c'est-à-dire un fluide non visqueux et sans conductivité thermique. Le fluide peut être incompressible ou compressible. Complétée par d'autres équations tirées de la dynamique des fluides parfaits, elle permet de caractériser un mouvement du fluide en calculant par exemple sa pression motrice.

### **1.2.4. L'équation de Reynolds**

L'équation de Reynolds est :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu R\omega \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.3)$$

## **I.3. Le palier hydrodynamique:**

Les paliers hydrodynamiques sont fréquemment utilisés ; les plus simples sont constitués d'un arbre cylindrique qui tourne à l'intérieur d'un alésage. Figure 1.4

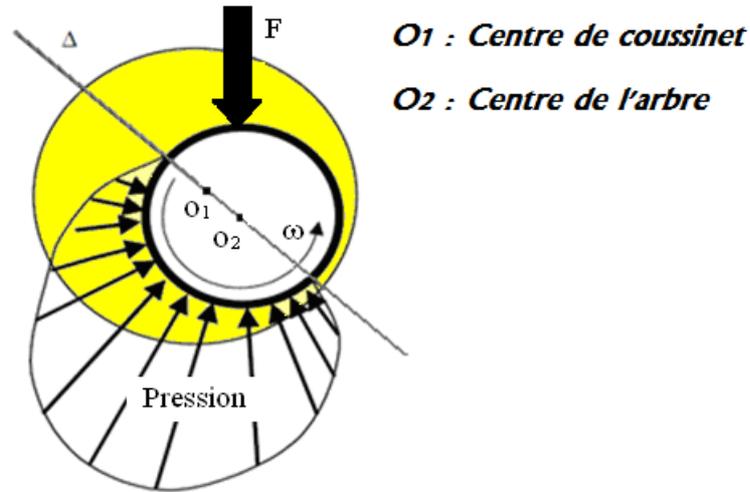


Fig. 1.4: Palier hydrodynamique avec champs de pression hydrodynamique

### 1.3.1. Caractéristiques d'un palier

Un palier hydrodynamique est constitué de deux éléments, l'arbre généralement en acier de rayon  $R_a$  et le coussinet en bronze ou en acier réglé de rayon intérieur en acier  $R_c$  et de longueur  $L$  les caractéristiques de notre palier est indiquée par la figure 1.5

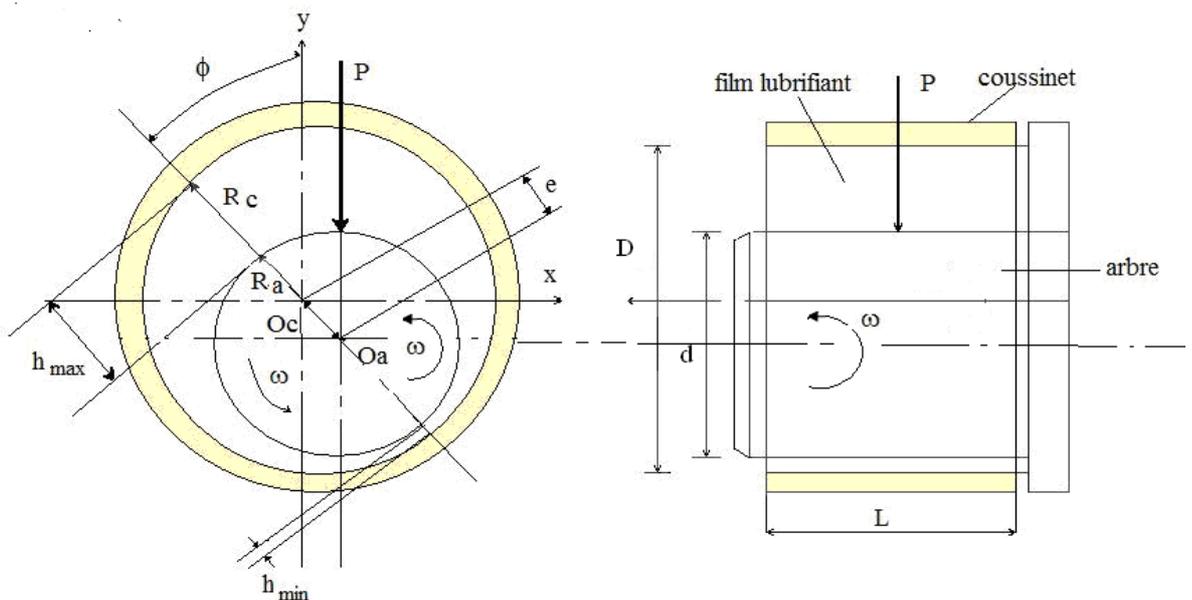


Fig. 1.5: Caractéristiques de fonctionnement du palier hydrodynamique

### **1.3.2. Projet de calcul d'un palier hydrodynamique**

Les principaux paramètres qui interviennent dans la définition d'un palier cylindrique sont:

-les paramètres géométriques : Diamètre D et d, longueur L, jeu radial C.

-Les paramètres cinématiques: vitesse de rotation  $\omega$ , charge P, angle de calage  $\Phi$ , excentricité e, l'épaisseur du film h.

-Les paramètres dynamiques: charge variable, mode de rotation (continu ou alternatif, vibration) (...etc.)

-Les paramètres caractéristiques de lubrifiant : viscosité dynamique, masse volumique, chaleur spécifique.

## **1.4. Types des paliers**

Selon leurs diamètres les paliers lisses cylindriques sont divisés en trois types, les paliers infiniment courts, infiniment longs et les paliers de longueur finie [10].

### **1.4.1. Palier court**

Un palier est dit court lorsque le rapport (L/D) de la longueur au diamètre du palier est faible, de  $L/D < 0,125$ .

Dans ce type de palier, on pose l'hypothèse d'un gradient de pression circonferentiel négligeable, ce qui simplifie considérablement les calculs.

### **1.4.2. Palier infiniment long**

Lorsque le rapport L/D de la longueur au diamètre de palier est grand, on peut négliger le débit axial. L'écoulement est donc purement circonferentiel. En pratique, ce calcul s'applique aux paliers tels que  $L/D > 4$ .

Dans ce type des paliers, on pose l'hypothèse d'un gradient de pression axial négligeable devant le gradient de pression circonferentiel.

### **1.4.3. Palier de longueur finie**

Dans le cas où le rapport  $L/D$  est compris entre 0.125 et 4, le palier est considéré de longueur finie. Les deux types de palier précédent constituent les configurations extrêmes, l'infiniment long et l'infiniment court le palier de longueur finie donne une configuration réelle du palier. Les résultats obtenus par ce type de palier sont plus réels que ceux des deux types précédents, car dans ce type de palier on ne tient pas compte des hypothèses simplificatrices précédentes.

C'est le cas de notre application.

## **1.5. Principe de fonctionnement du palier**

Le fonctionnement du palier repose sur le débit du film. L'adhérence du fluide lubrifiant en film mince aux parois en mouvement crée le débit. Dans le cas de la lubrification hydrodynamique, la génération de la pression se fait par conservation du débit dans la portance et le frottement. Dans le cas d'un palier hydrodynamique, la portance recherchée et le frottement sont une conséquence. Pour que le fluide soit une interface efficace, il faut que le champ de pression soit suffisant pour équilibrer la charge normale en fonction de l'aire du contact disponible, mais aussi que l'épaisseur minimale du film soit supérieure aux éventuels défauts géométriques des surfaces.

La figure 1.6 présente les trois phases que l'on observe lors de la mise en route d'un palier sous chargement.

**Phase (a):** À l'arrêt, (figure. 1.6a), l'arbre et le coussinet sont en contact, la génératrice commune est opposée à la charge et la distance  $O_a O_c$  est égale au jeu radial  $C$ .

**Phase (b):** Au démarrage, (figure. 1.6b), l'arbre roule en glissement à l'intérieur de coussinet, le régime de lubrification est dit mixte, le lubrifiant est entraîné dans l'espace convergent formé par l'arbre et le coussinet.

**Phase (c):** Dès que la vitesse de rotation devient suffisante, (Figure. 1.6c), il y a présence d'un champ de pression hydrodynamique qui supporte la charge  $P$  constante, le centre de l'arbre  $O_a$  occupe une position fixe à l'intérieur du coussinet. Si le torseur de forces extérieur se réduit à une force unique  $P$  qu'agit dans les plans de la section médiane du palier, les axes de l'arbre et de coussinet sont parallèles.

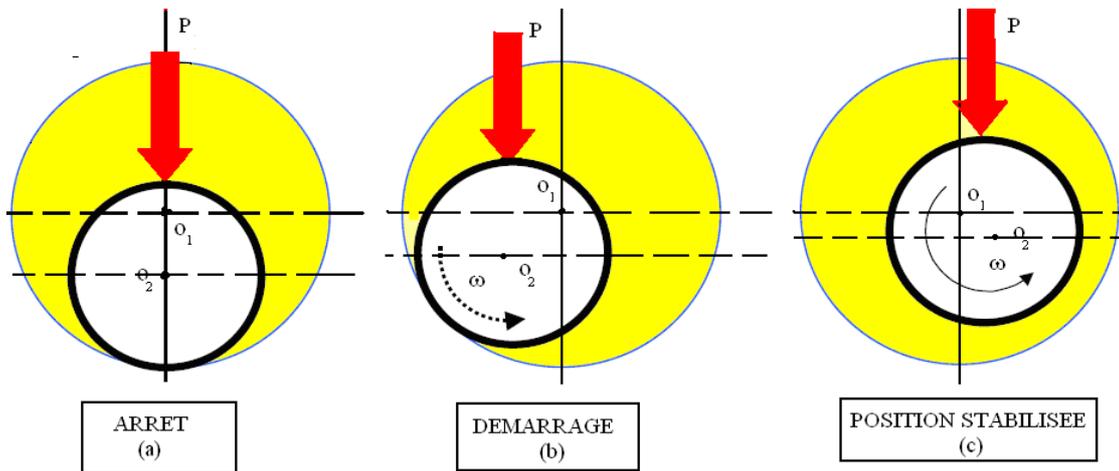


Fig. 1.6: Phase du régime hydrodynamique

## 1.6. Régime de fonctionnement (lubrification)

Lubrification caractérise les conditions dans lesquelles l'arbre et le coussinet sont séparés par le lubrifiant. Leur spécificité repose sur l'existence d'un lubrifiant visqueux, en film complet ou non, et sur le mécanisme de génération de portance au sein du film fluide [12]. Selon la nature et les propriétés du lubrifiant, diverses possibilités de lubrification se présentent:

### 1.6.1. Régime de frottement sec

Ce régime n'est utilisé que lorsqu'on recherche l'adhérence: freinage, embrayage, contact pneumatiques-sol,...etc., ou dans la lubrification de petits mécanismes (ceinture de sécurité) pour lesquels on utilise des vernis antifricition de glissement.

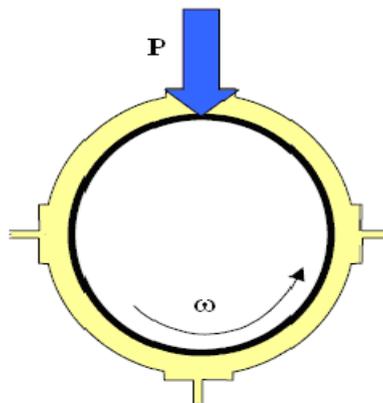
### 1.6.2. Régime de lubrification limite

Il concerne les surfaces se déplaçant à faible vitesse pour lesquelles un film d'huile visqueux continu ne peut se former en raison des trop fortes pressions de contact. Dans les véhicules, ce régime est prépondérant durant le démarrage ou l'arrêt des mécanismes et au cours de certain phase transitoires de fonctionnement comme, par exemple, les contacts segment-piston-cylindre aux point morts.

### 1.6.3. Régime de lubrifiant fluide

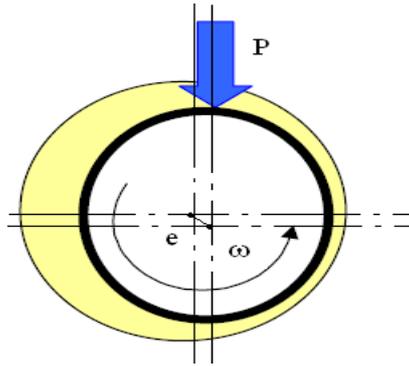
Ces régimes existent lorsque les surfaces sont complètement séparées par un film continu de lubrifiant. Selon la géométrie des deux surfaces en regard et selon l'amplitude des pressions exercées, on est en présence de l'un des trois régimes de lubrification fluide:

-le régime hydrostatique, pour lequel la séparation des surfaces est assurée par une très forte mise en pression extérieure du fluide gazeux ou liquide; ce régime n'existe pas dans l'automobile;



**Fig.1.7:** Régime hydrostatique

-le régime hydrodynamique (HD) pour lequel la viscosité du lubrifiant constitue le paramètre essentiel jouant sur la formation d'un film d'huile épais (palier lisse, contacts segments/piston/cylindre entre points morts...)



**Fig.1.8:** Caractéristique de Régime hydrodynamique

-le régime élastohydrodynamique (EHD), qui fait intervenir la déformation élastique des surfaces et l'augmentation considérable de la viscosité du lubrifiant sous l'effet des très fortes pressions de contact pour former un film d'huile très résistant mais très mince (engrenage, roulement ...)

#### **1.6.4. Régime de lubrification mixte**

Souvent rencontré dans la pratique, il est intermédiaire entre le régime limite et les régimes de lubrifiant fluide: hydrodynamique ou élastohydrodynamique. il existe chaque fois qu'un film visqueux mince s'établit entre les surfaces dont l'épaisseur est insuffisante pour séparer totalement les aspérités les plus proéminentes; un certain nombre de contacts directs métal-métal se produisent alors, ce qui entraîne une augmentation du frottement, des températures de contact et de l'usure adhésive.

#### **1.7. Les lubrifiants**

Il existe deux bases pour les huiles lubrifiantes qui sont soit d'origine minérale le ou synthétique.

Les huiles à base minérale: on distingue deux types de structure, la structure paraffinique formée d'hydrocarbures saturés à chaîne droite (très stable à l'oxydation, bonne résistance à haute température), et les structures naphthéniques formés de noyaux cycliques (grande aptitudes à la gélification) ;

Les huiles à base synthétique: les familles sont très nombreuses citant à titre d'exemple: les phosphoriques, aliphatiques, appréciées pour leur faible viscosité à basse température et leur bas point de congélation; et les polypropylènes glycols.

Les principales caractéristiques d'huiles sont liées à :

- La réduction des frottements ;
- La réduction de l'usure ;
- L'amélioration de l'étanchéité ;
- L'évacuation des impuretés;

### **1.7.1. Les additifs**

Pour améliorer les performances des huiles moteurs, des additifs sont ajoutés, ceux-ci peuvent agir sur les propriétés suivantes :

- la couleur, la fluorescence ;
- la viscosité et l'indice de viscosité ;
- la congélation ;
- le pouvoir dispersif ;
- la réduction du frottement et de l'usure ;
- l'aptitude au rodage ;
- le pouvoir antirouille ;
- la résistance au moussage ;
- la résistance à l'oxydation et à la corrosion

### 1.7.2. La viscosité

Selon la norme NFT 60-100 [13]: « la viscosité d'un liquide est la propriété de ce liquide, résultant de la résistance qu'oppose ses molécules à une force tendant à les déplacer par glissement dans ses seins »

Ainsi, la viscosité d'un fluide est la résistance opposée par fluide à tout glissement interne de ses molécules les unes sur les autres. Les huiles sont classé selon le tableau 1.1

Classe ISO de viscosité	Viscosité cinématique médiane (mm <sup>2</sup> /S) à 40°C
ISOVG 2	2.2
ISO VG 3	3.2
ISO VG 5	4.6
ISO VG 7	6.8
ISO VG 10	10
ISO VG 15	15
ISO VG 22	22
ISO VG 32	32
ISO VG 46	46
ISO VG 68	68
ISO VG 100	100

**Tab.1.1:** Classification ISO des huiles industrielles [13]

### **1.7.3. Fluide newtonien**

Le modèle de fluide newtonien décrit bien la très grande majorité des fluides composés de molécules simples. La définition d'un fluide newtonien est assez restrictive : les contraintes de cisaillement sont proportionnelles au gradient de vitesse, ce qui implique que :

- dans un écoulement de cisaillement simple, les seules contraintes créées par l'écoulement sont des contraintes de cisaillement.
- La viscosité est indépendante de la vitesse de cisaillement.
- La viscosité est indépendante du temps et les contraintes s'annulent immédiatement lorsque l'écoulement est arrêté.

### **1.7.4. Fluide non-newtonien**

Toute déviation des règles du fluide newtonien est le signe d'un comportement non-newtonien. La description de ces comportements et leur interprétation en relation avec la structure microscopique du fluide constitue une discipline appelée rhéologie. Cette discipline est assez récente, mais elle a connu un développement considérable avec l'apparition des polymères synthétiques.

Le caractère non-newtonien le plus répandu est la variation de viscosité avec la vitesse de cisaillement. Très souvent, pour les solutions de polymère, la viscosité diminue au fur et à mesure que l'on augmente le taux de cisaillement (gradient de vitesse) auquel est soumis le fluide. C'est le comportement rhé fluidifiant.

## 2.1. Introduction

Le but de ce chapitre est d'écrire les équations de bases du palier hydrodynamique.

L'arbre est en rotation ,son centre de masse est régi par l'équation fondamentale de la dynamique. Parmi les forces on a la force hydrodynamique F qui est la force de portance du film d'huile.

Cette force F est obtenue par l'intégration du champ de pression développée dans le film. La pression est calculée sur une zone active par la résolution de l'équation de Reynolds [5]. Les limites de la zone active sont données par les modèles de Sommerfeld, Reynolds ou Gümbel.

## 2.2. Equation de Reynolds

L'équation de Reynolds est déduite des équations de la mécanique des milieux continus, appliquées à un fluide newtonien, on a les équations suivantes :

-La loi de conservation de la masse (annexe1):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad i=1,3 \quad (2.1)$$

-La loi fondamentale de la dynamique:

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad i=1,3 \quad \text{et} \quad j=1,3 \quad (2.2)$$

-La loi de comportement rhéologique, qui pour un fluide newtonien s'écrit :

$$T_{ij} = (-p + \lambda\theta)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad i=1,3 \quad \text{et} \quad j=1,3 \quad (2.3)$$

Avec

$x_j$  : Les variables d'espace et de temps,

$u_i$  : Les composantes de la vitesse,  $i = 1,2,3$

$\rho$  : la masse volumique du fluide,

$p$ : pression hydrodynamique,

$\delta_{ij}$  : Le symbole Kronecker,

$\lambda, \mu$ : coefficients de Lamé,

$\theta$  : Taux de dilatation cubique, qui s'écrit :

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (2.4)$$

$\varepsilon_{ij}$  : Le tenseur des taux de déformations:

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.5)$$

En reportant l'équation de comportement rhéologique dans l'équation de dynamique et en négligeant les forces massiques extérieures, on obtient les équations de Navier qui s'écrivent :

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \quad (2.6)$$

i=1, 3                      direction x y et z

j=1, 3                      indices muets

### 2.2.1. Hypothèses du film minces

L'équation de Reynolds est obtenue en adoptant les hypothèses des films minces suivantes:

- 1) L'épaisseur du film est très faible devant les autres dimensions du contact,
- 2) Le milieu est continu, l'équation de Reynolds ne s'applique pas dans les zones où il y a rupture du film (cavitation).
- 3) Le fluide est newtonien : il y a proportionnalité entre le taux de cisaillement et les contraintes de cisaillement dans le film.
- 4) Le régime est laminaire ; en régime non laminaire il faudra utiliser d'autres équations.
- 5) L'une des surfaces du contact est parfaitement plane et ne présente pas de rugosité, ce qui permet de placer l'origine des axes sur cette surface. Ainsi, la courbure générale du film est négligée.
- 6) Il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact : la vitesse du fluide à la paroi est égale à celle de la paroi.
- 7) Les forces d'inertie sont négligeables.

- 8) Les forces massiques extérieures sont négligées.  
 9) La viscosité et la masse volumique du fluide ne varient pas à travers l'épaisseur du film.

Dans ce cas le fluide est régi par l'équation de Reynolds suivante (Annexe 2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= 6\rho(u_1 - u_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 6\rho(w_1 - w_2) \frac{\partial h}{\partial z} \\ + 6h \frac{\partial}{\partial x} [\rho(u_2 + u_1)] + 6h \frac{\partial}{\partial z} [\rho(w_2 + w_1)] &+ 12\rho v_2 + 12h \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.7)$$

A cette équation de Reynolds, s'ajoutent les équations donnant les vitesses dans le fluide:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) + \frac{h-y}{h} u_1 + \frac{y}{h} u_2 \\ w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-h) + \frac{h-y}{h} w_1 + \frac{z}{h} w_2 \end{cases} \quad (2.8)$$

Ainsi que les contraintes de cisaillement dans le fluide:

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (2y-h) + (u_2 - u_1) \frac{\mu}{h} \\ \tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (2y-h) + (w_2 - w_1) \frac{\mu}{h} \end{cases} \quad (2.9)$$

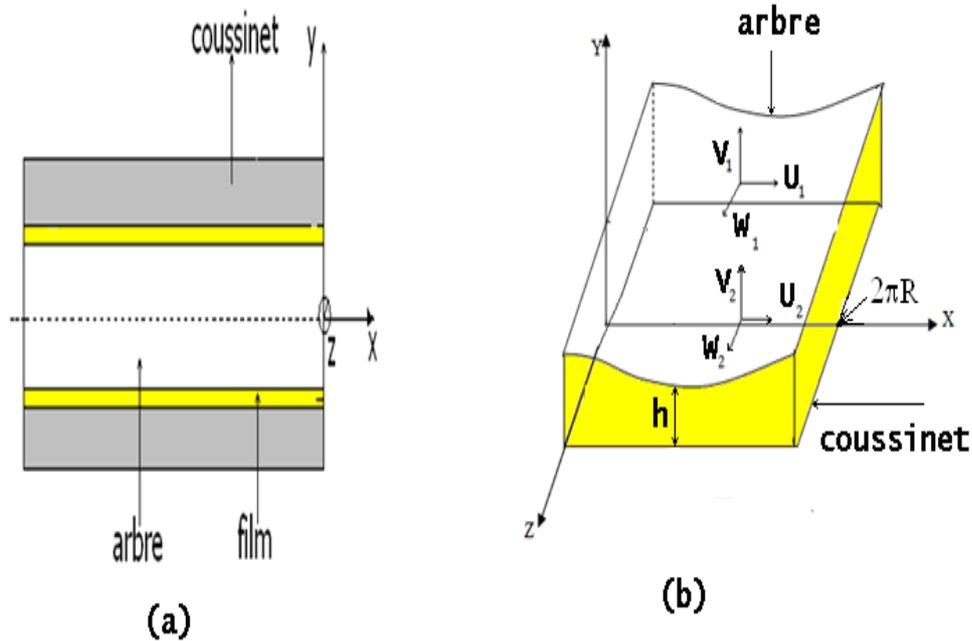


Fig. 2.1: Palier (a) et film développé (b)

### 2.3. Equation de Reynolds du palier lubrifié

-L'équation de Reynolds est assez générale, elle s'applique à différents lubrifiants et à différents types de contact. On peut distinguer :

-Fluide compressible et fluide incompressible, dans ce dernier cas la masse volumique disparaît de l'équation de Reynolds.

-Fluide de viscosité variable et fluide de viscosité constante ; il faut noter que pour un fluide de viscosité variable, la viscosité ne varie pas à travers l'épaisseur de film.

-Régime transitoire et régime permanent : on définit en mécanique des films minces visqueux le régime permanent comme un régime de fonctionnement tel que dans un repère particulier, mobile ou non, les vitesses des parois et les paramètres géométriques du contact sont indépendants du temps.

L'équation de Reynolds permet de différencier ces deux régimes : en régime permanent le terme  $12 \frac{\partial \rho h}{\partial t}$  est nul et les vitesses et les dimensions du contact sont, pour un repère particulier, indépendantes du temps.

-Contact hydrodynamique et contact hydrostatique : la terminologie étant assez imprécise nous conviendrons d'appeler contact hydrostatique les seuls contacts pour lesquels l'équation de Reynolds se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{Coordonnée cartésiennes}) \quad (2.10)$$

Remarquons que ces équations aux dérivées partielles admettent une solution non triviale si et seulement si la pression  $p$  n'est pas nulle en tous points de la frontière du domaine d'intégration ce qui prouve l'existence d'une source de pression extérieure au contact.

Les rayons  $R_a$  et  $R_c$  étant très voisins, on peut négliger la courbure du film, développer le coussinet (ou l'arbre) et l'assimiler à un plan (figure. 2.1.b).

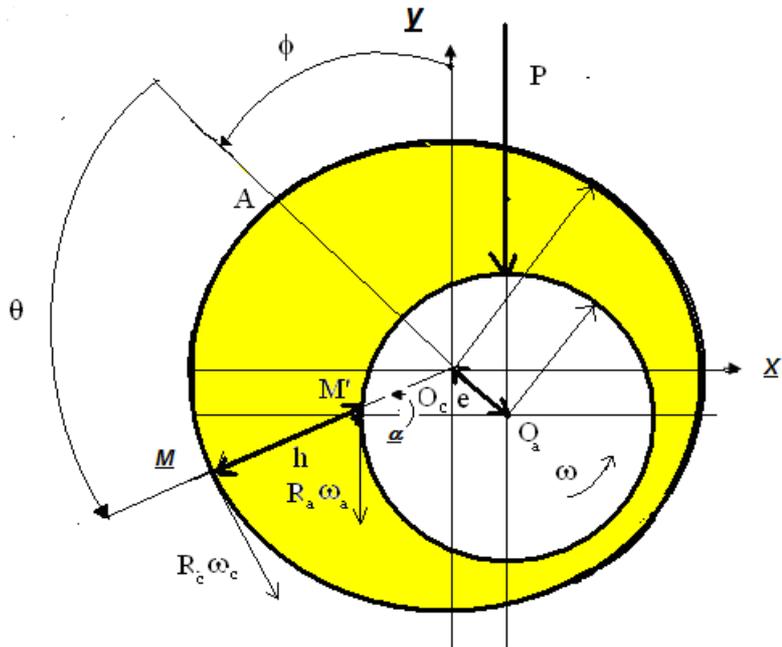


Fig. 2.2: Section radiale du palier

Les conditions cinématiques relatives aux surfaces de l'arbre et du coussinet s'écrivent:

$$U_1 = R_c \omega_c$$

$$V_1 = W_1 = 0$$

$$U_2 = R_a \omega_a \cos \alpha$$

$$V_2 = R_a \omega_a \sin \alpha$$

$$W=0$$

Où  $\alpha$ , angle entre  $O_cM'$  et  $O_aM'$ , est la pente de la courbe  $h(x)$  :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dh}{dx} = \frac{1}{R_a} \frac{dh}{d\theta} = -\frac{e}{R_a} \sin\theta$$

La quantité  $\frac{e}{R_a}$  étant très petite, on peut effectuer un développement et se limite au

1 er Ordre :

$$\cos\alpha \approx 1 \quad \text{et} \quad \sin\alpha \approx \alpha \approx \frac{\partial h}{\partial x}$$

Dans ses conditions les vitesses des surfaces s'écrivent :

$$U_1 = R_c \omega_c$$

$$U_{2=R_a} = \omega_a$$

$$V_2 = R_a \omega_a \frac{\partial h}{\partial x}$$

Si on reporte les vitesses des surfaces du contact dans l'équation de Reynolds, écrite en coordonnées cartésiennes, et si on pose  $R = R_a$ ,  $\omega_c=0$  il vient:

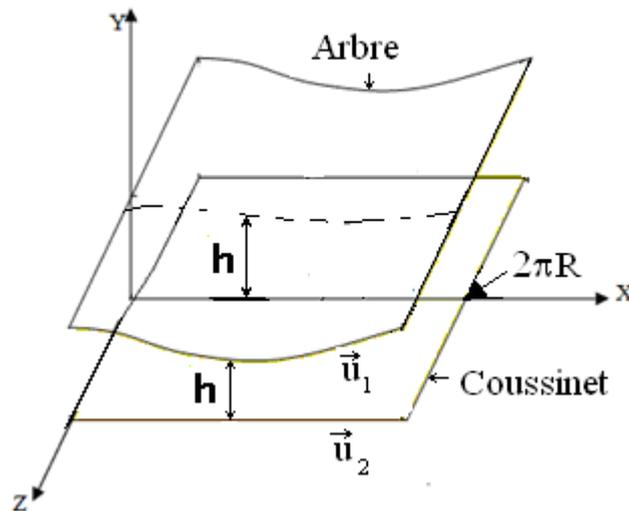
$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu R \omega \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.11)$$

C'est l'équation de Reynolds de notre problème.

Remarques :

a) On a développé le coussinet et choisi ce dernier comme plan de référence ; un résultat identique aurait été obtenu en développant l'arbre.

b) Les vitesses angulaires  $\omega_c$  et  $\omega_a$ , s'ajoutant ainsi la portance est proportionnelle à la somme des vitesses. Si celles-ci sont égales et opposées, la portance de l'écoulement est nulle au second ordre près.



**Fig2.3** Palier lisse développé

## 2.4. Conditions aux limites

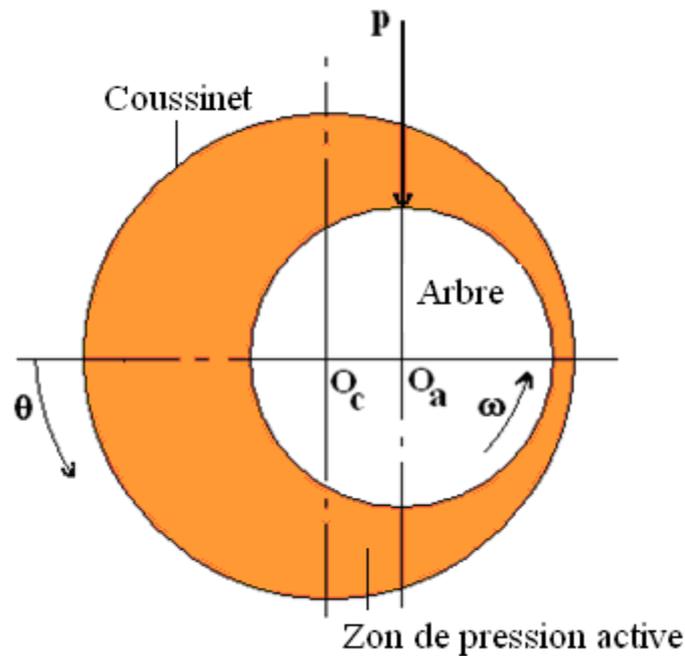
Pour calculer le champ de pression, il faut résoudre l'équation de Reynolds sur le domaine représenté (Figure. 2.3), compte tenu des conditions aux limites sur la zone de pression. La zone est donnée selon les modèles de Reynolds

### A) Modèle de Sommerfeld

Sommerfeld en 1904 [6] a supposé que le film lubrifiant est continu et qu'il n'y a pas de rupture du film. Dans ces conditions la distribution de pression est antisymétrique par

rapport au point  $\theta = \pi$  et le lieu du centre de l'arbre dans le coussinet est une droite normale à la direction de charge.

Ces conditions aux limites ne sont valables que pour les paliers fonctionnant à de très faibles charges ou avec des pressions d'alimentation très élevées, sinon des pressions négatives apparaissent dans le film, ce qui est physiquement inacceptable pour le modèle de Sommerfeld.



**Fig. 2.4:** Conditions aux limites de Sommerfeld

### **B) Conditions de Gümbel [7]**

Gümbel en 1921 [15], à la suite des travaux de Sommerfeld, propose comme conditions aux limites :

$$p(\theta = 0, Z) = 0$$

$$p(\theta = \pi, Z) = 0$$

$$p(\theta, Z) = Z \quad \text{Si} \quad \pi < \theta < 2\pi$$

Cela revient à négliger, dans la solution de Sommerfeld les pressions négatives. Ces conditions impliquent une discontinuité dans l'écoulement au point  $\theta = \pi$ , elles ne sont pas acceptables physiquement mais sont utilisées dans le cas de l'approximation du palier court.

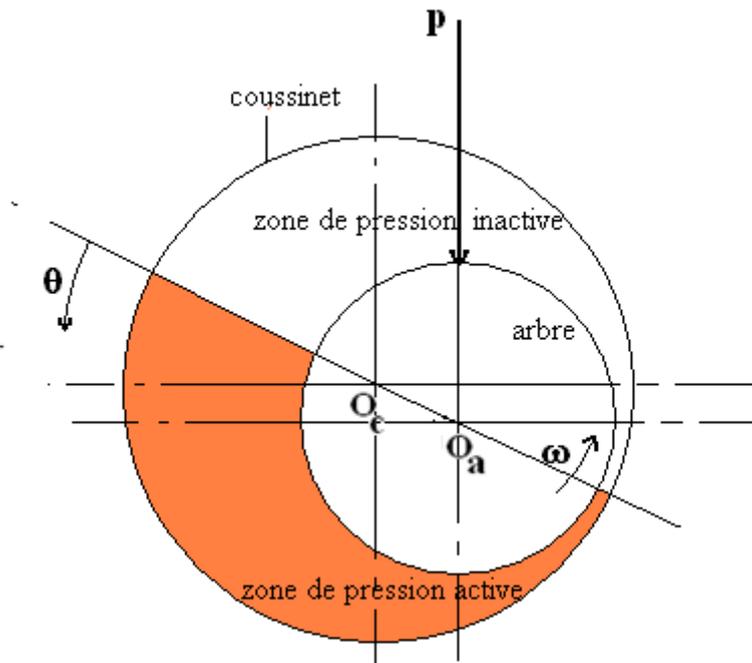


Fig. 2.5: Conditions aux limites de Gumbel

### C) Conditions aux limites de Reynolds

Ces conditions proposées indépendamment par Swift en 1932 [16] et par Steiber en 1933 [17] respectent la continuité du débit et supposent que pour une abscisse  $\theta_s$  inconnue, la pression et le gradient de pression s'annulent:

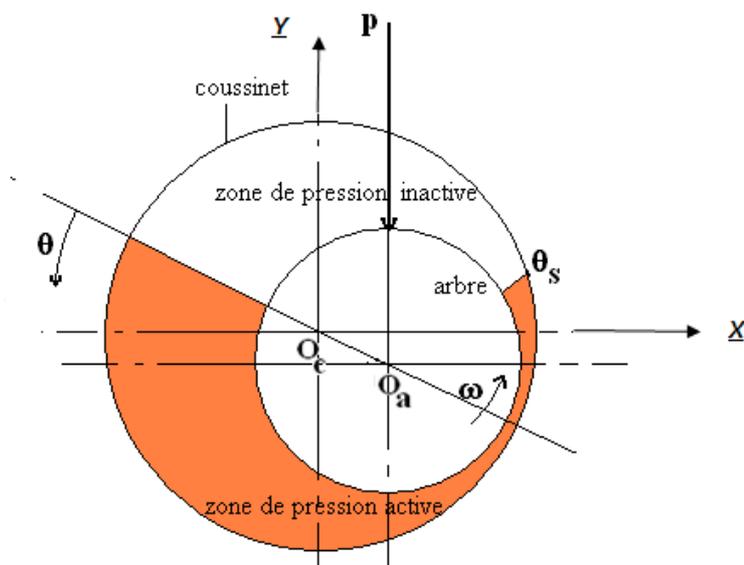
$$P(\theta = 0, Z) = 0$$

$$P(\theta = \theta_s, Z) = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta}(\theta = \theta_s, Z) = \frac{\partial p}{\partial z}(\theta = \theta_s, Z) = 0$$

$$p(\theta, Z) = 0 \quad \text{Si} \quad \theta_s < \theta < 2\pi$$

On distingue ainsi deux régions dans le palier : une région active où la pression est positive et le film complet, pour des valeurs de  $\theta$  comprises entre 0 et  $\theta_s$  et une région inactive à pression nulle et dans laquelle en régime dynamique, peut apparaître de la cavitation, pour  $\theta_s < \theta < 2\pi$  Ces conditions sont celles qui donnent les solutions les plus exactes ; elles ont été vérifiées dans de nombreuses études.



**Fig. 2.6:** Conditions aux limites de Reynolds

## 2.5. Equation du film lubrifiant

Considérons une section droite du palier (figure 2.2). Un point M appartenant à la surface du coussinet sera repéré par les coordonnées angulaires  $\theta = (\overrightarrow{O_c A}, \overrightarrow{O_c M})$  l'épaisseur du film d'huile est donnée par:

$$h = O_c M - O_c M' = R_c - O_c M' = R_a + c - O_c M'$$

En appliquant la règle des sinus au triangle  $O_a M' O_c$  il vient:

$$\frac{O_a M'}{\sin(O_a O_c M')} = \frac{e}{\sin \alpha} = \frac{R_a}{\sin(M' O_a O_c)} = \frac{R_a}{\sin(\Pi - \theta)} = \frac{R_a}{\sin \theta}$$

D'où

$$\sin \alpha = \frac{e}{R_a} \sin \theta \quad \text{Et} \quad O_c M' = \frac{R_a}{\sin \theta} \sin(O_c O_a M')$$

Or

$$(O_c O_a M') = \theta - \alpha = \theta - \arcsin\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)$$

Donc

$$O_c M' = \frac{R_a}{\sin \theta} \sin\left[\theta - \arcsin\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)\right]$$

En développant le sinus il vient :

$$O_c M' = R_a \times \sqrt{1 - \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)^2} - e \cos \theta$$

La quantité  $\frac{e}{R_a} < \frac{c}{R}$  est très petite devant l'unité (de l'ordre  $10^{-3}$ ) on peut donc

négliger le terme  $\frac{e}{R_a} \sin \theta$  devant 1. L'épaisseur du film s'écrit alors:

$$h = C(1 + \varepsilon \cos \theta) = C + e \cos(\theta) \tag{2.12}$$

Où l'excentricité relative  $\varepsilon = \frac{e}{c}$  varie de 0 à 1. Il faut remarquer que cette relation

n'est valable que si  $\frac{c}{R} \ll 1$

## 2.6. Charge hydrodynamique et angle de calage

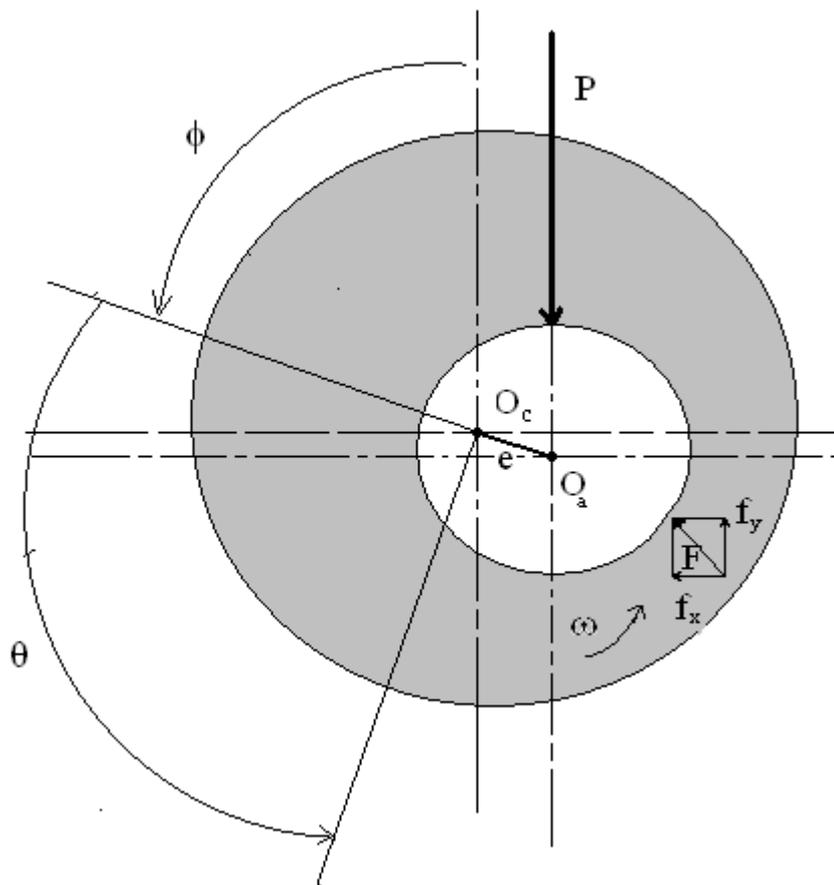
Par intégration du champ de pression, on obtient les composantes de la charge sur deux axes perpendiculaires figure (2.6), elles s'écrivent [18]

$$\begin{cases} f_y = \int_S p \cos \theta dS = P \cos \Phi \\ f_x = \int_S p \sin \theta dS = P \sin \Phi \end{cases} \tag{2.13}$$

$$\text{Avec :} \quad P = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \tag{2.14}$$

L'angle de calage est défini par :

$$\Phi = \text{arctg} \Phi = \left( -\frac{f_y}{f_x} \right) \quad (2.15)$$



**Fig2.7** Les composantes de la charge

La charge peut s'écrire par :

$$F_h = \int_0^L \int_0^{2\pi R} p dx dz \quad (2.16)$$

## 2.7. Influence du désalignement

Dans un palier, les axes du coussinet et de l'arbre ne sont pas toujours parallèles. En pratique, il existe toujours un désalignement dont les causes peuvent être d'origines diverses : déformations thermiques ou élastiques de l'arbre, couples extérieurs ou mauvais alignement des paliers.

Pour calculer l'effet du désalignement, on applique l'équation de Reynolds (2.11) avec une épaisseur du film modifiée. L'effet principal de l'inclinaison d'axe doit décaler le point d'appui (centre de pression hydrodynamique) vers l'épaisseur de film minimum  $h_1$  sur la, qui augmente la pression hydrodynamique maximum.

## 2.8. Equation de l'épaisseur du film d'huile du Palier mésaligné (Fig. 2.8) [23]

Il est possible de repérer la position e l'axe de l'arbre  $(c_1 c_0 c_2)$  par Rapport à celle du coussinet  $(o_1 o_c o_2)$  par intermédiaire de deux angles  $\alpha$  et  $\gamma$  et de la distance  $o_c c_0 = e_0$ ,  $\gamma$  est l'angle que fait la droite et  $(c_1 c_0 c_2)$  avec sa projection sur le plan  $yo_z$ ,  $\alpha$  est l'angle que fait cette projection avec l'axe  $oz$ ,

$e_0$  est l'excentricité dans la section médiane.

Les angles  $\alpha$  et  $\gamma$  sont très petit (de l'ordre de  $10^{-4}$ rd) et on préfère utiliser deux autres paramètres pour définir le mésalignement :

$\beta$  : qui est l'angle que fait la projection de la ligne des centres de l'arbre sur le plan  $xoy$ .

$d$ : qui est le module de cette projection.

Les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $d$  sont liés par les relations :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d}{L} \cos \beta \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{d \sin \beta}{(L^2 + d^2 \cos^2 \beta)^{1/2}}$$

avec  $L = O_1 O_2$ .

De plus  $d$  n'est pas arbitraire, son amplitude maximale est fonction de  $c$ ,  $e_0$  et  $\beta$ .

$$\delta_{\max} = \frac{d_{\max}}{c} = 2 (\sqrt{1 - \varepsilon_0^2 \sin^2 \beta} - \varepsilon_0 \cos \beta)$$

Si l'arbre est indéformable on a :

$$O_a C_0 = \frac{dz}{L} = C \delta \bar{z}$$

Avec  $\delta = \frac{d}{c}$  et  $\bar{z} = \frac{z}{L}$

On peut écrire :

$$h_{messa} = C + e_0 \cos \theta + C \delta \bar{z} \cos (\theta - \beta) \quad (2.17)$$

$$f(\theta, Z) = C \delta \left(\frac{z}{L}\right) \cos (\theta - \beta) \quad \text{pour le facteur de mésaligné}$$

$f(\theta, Z)$  est la distance entre l'axe de l'arbre et le coussinet [23].

On peut écrire l'épaisseur du film d'huile adimensionnelle par l'expression suivante :

$$\bar{h} = \frac{h}{c} \quad \text{nous obtenons alors}$$

$$\bar{h} = 1 + \varepsilon \cos \theta + \delta \bar{z} \cos (\theta - \beta) \quad (2.18)$$

$$\text{Avec } \varepsilon = \frac{e}{c}$$

$\varepsilon$  : Excentricité relative du palier

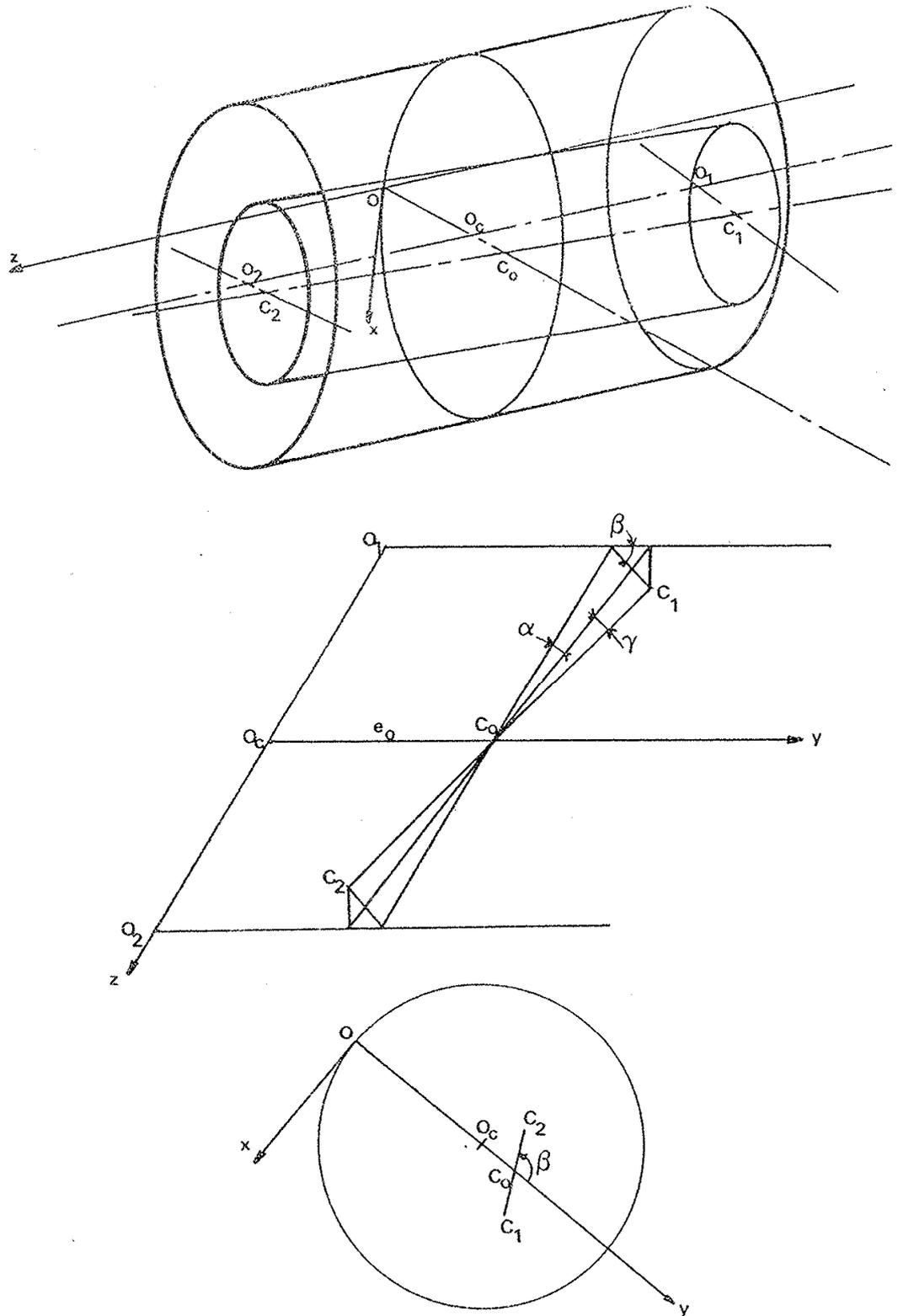


Figure 2 .8 Représentation d'un palier mésaligné

## 2.9. Charge hydrodynamique F pour le palier mésaligné

La force hydrodynamique du palier mésaligné est donnée par

$$F = \int_{\theta} \int_z P \cos \theta . d\theta . dz \quad (2.19)$$

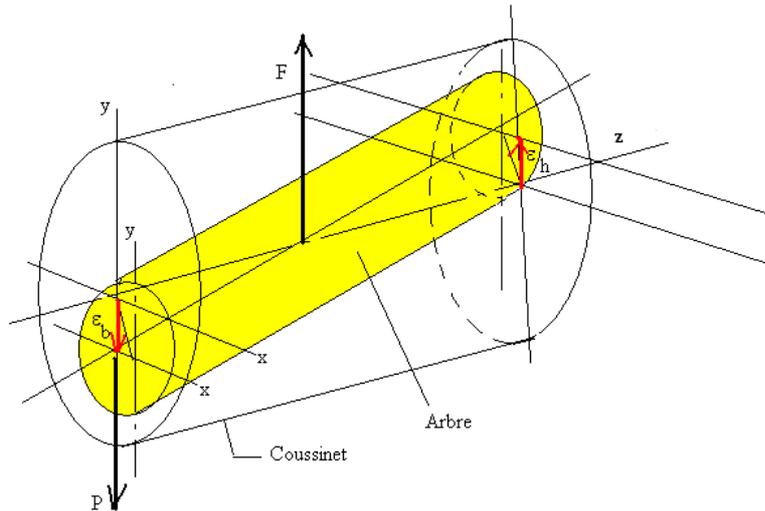


Fig.2.11. Charge hydrodynamique F pour un palier mésaligné

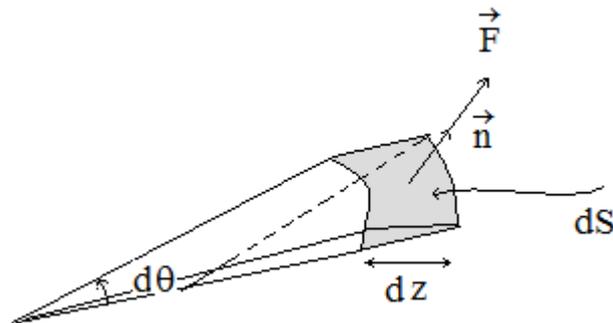


Fig. 2.12 Elément différentiel d'intégration de la pression

L'intégrale (2.19) est calculée numériquement par la méthode des trapèzes

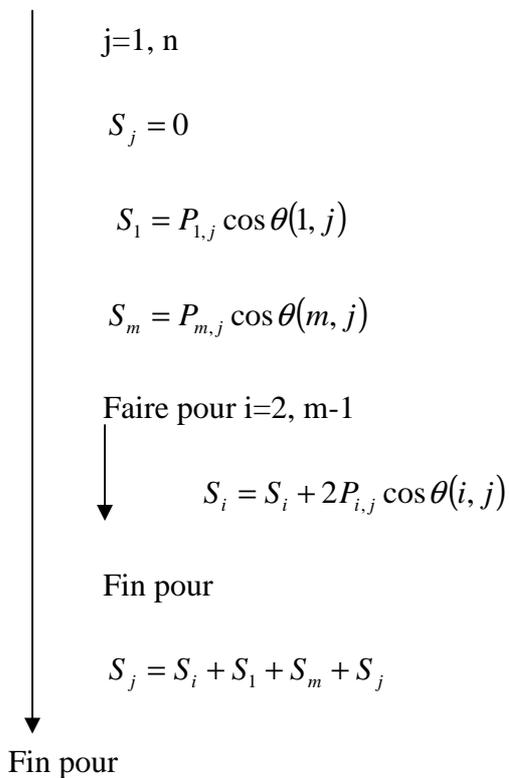
$$F = \sum_j \left[ p_{1,j} \cos \theta_1 + 2 \sum_2^{m-1} p_{i,j} \cos \theta(i) + p_m \cos \theta_m \right] \quad (2.20)$$

qui s'écrit sous forme développée

$$\begin{aligned}
 F = & P_{1,1} \cos\theta(1) + 2P_{2,1} \cos\theta(2) + 2P_{3,1} \cos\theta(3) + \dots + 2P_{m-1,1} \cos\theta(m-1) + P_{m-1} \cos\theta(m) \\
 & + P_{1,2} \cos\theta(1) + 2P_{2,2} \cos\theta(2) + \dots + P_{m,2} \cos\theta(m) + P_{1,3} \cos\theta(1) + 2P_{2,3} \cos\theta(2) + \dots + P_{m,3} \cos\theta(m) \\
 & + \dots \\
 & + P_{1,n} \cos\theta(1) + 2P_{2,n} \cos\theta(2) + \dots + P_{m,n} \cos\theta(m) \qquad (2.21)
 \end{aligned}$$

et dont l'algorithme est

Faire pour



### 3.1. Résolution analytique de Reynolds pour un palier de longueur fini

L'équation dimensionnelle de Reynolds est

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu R \omega \frac{dh}{dx} \quad (3.1)$$

Cette équation n'admet pas de solution analytique ; diverses méthodes approchées ont été proposées. La plupart des approches sont dérivées des approches infiniment court ou infiniment long et ne permettent pas d'appliquer les conditions aux limites de Reynolds. Leur utilisation est souvent limitée aux arcs partiels. Rohde et Li [9] ont proposé une approche qui permet de réduire l'équation de Reynolds à une équation différentielle du second ordre en  $x$ . Utilisant le fait que la répartition de pression dans la direction axiale est parabolique dans le cas du palier court et reste encore quasi-parabolique dans le cas du palier de longueur finie, ils posent :

$$p(\theta, z) = f(\theta) \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{z}{L} \right)^2 \right] \quad (3.2)$$

Et reportent cette relation dans la fonctionnelle associée à l'équation de Reynolds.

L'intégration par rapport à  $z$ , puis l'application du calcul des variations, conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{h^3}{6\mu} \frac{df}{d\theta} \right) - \frac{10}{6} R^2 h^3 f(\theta) = 5\omega \frac{dh}{d\theta} \quad (3.3)$$

Cette équation doit être intégrée numériquement. Il est possible d'utiliser les conditions aux limites de Reynolds cette approche donne d'excellents résultats dans le cas des paliers circulaire ou des arcs partiels, en régime permanent et même en régime transitoire ; les résultats présentés sur le tableau (3.1) concernent le cas du palier circulaire en régime permanent; l'erreur effectuée sur la portance est donnée en %

$\varepsilon$ \ L/D	0,5	0,8	0,95
0,5	-0	-0	-0
1	-0	1	5
2	1	4	6

Tab.3.1: Approche de Rhode et Li [9], cas du palier circulaire: erreur sur la portance(%)

### 3.2 Organigramme principal de résolution

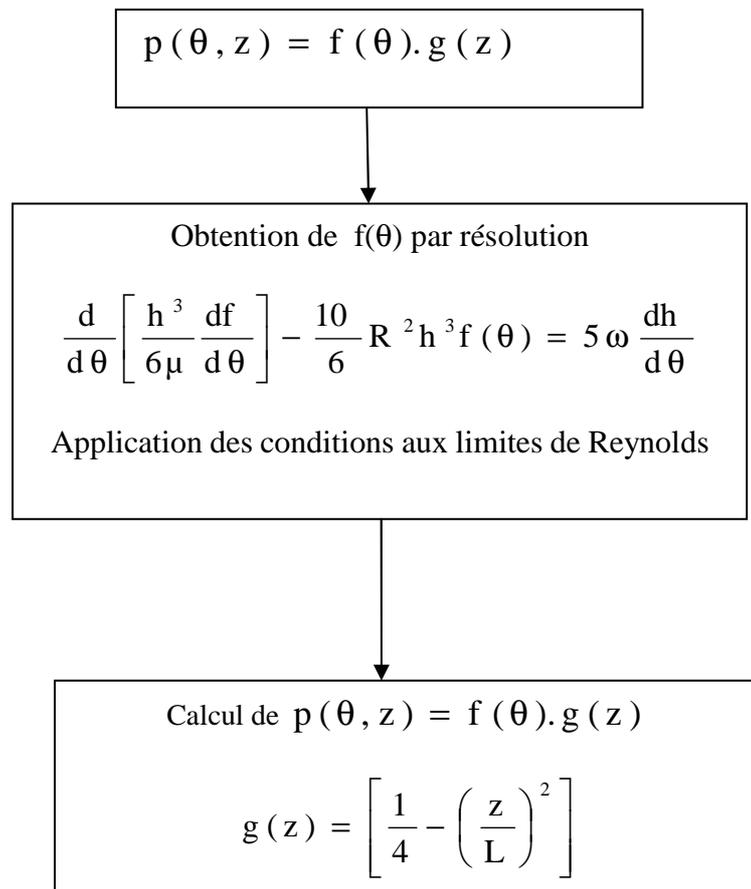


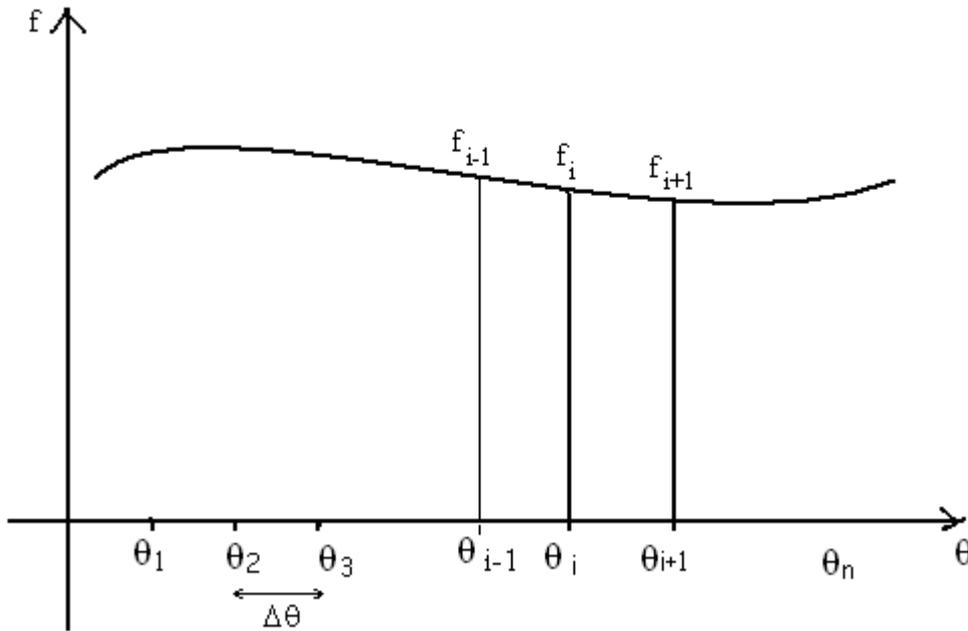
Fig. 3.1: Organigramme principal de résolution

### 3.3 Obtention de $f(\theta)$

On procède à la discrétisation de l'équation (3.3) par la méthode des différences finies

-en dérivant par rapport à la variable  $\theta$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{h^3}{6\mu} \frac{df}{d\theta} \right) &= \frac{1}{6\mu} \frac{dh^3}{d\theta} \frac{df}{d\theta} + \frac{h^3}{6\mu} \frac{d^2f}{d\theta^2} \\ &= \frac{1}{6\mu} 3h^2 \frac{dh}{d\theta} \frac{df}{d\theta} + \frac{h^3}{6\mu} \frac{d^2f}{d\theta^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$



**Fig. 3.2:** Fonction  $f(\theta)$  aux points de discrétisation selon la variable  $\theta$

L'épaisseur du film s'écrit :

$$h = c + e \cos \theta$$

La dérivée de l'épaisseur du film

$$\frac{dh}{d\theta} = -e \sin \theta$$

-puis en discrétisant les termes du second membre par différences finis

$$\frac{df}{d\theta} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta\theta}$$

$$\frac{d^2f}{d\theta^2} = \frac{f_{i-1} - f_i + f_{i+1}}{(\Delta\theta)^2}$$

D'où l'équation discrétisée :

$$\left[ \frac{1}{6\mu} 3h^2 \frac{dh}{d\theta} \frac{1}{2\Delta\theta} + \frac{h^3}{6\mu} \frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] f_{i+1} + \left[ -\frac{1}{6\mu} 3h^2 \frac{dh}{d\theta} \frac{1}{2\Delta\theta} + \frac{h^3}{6\mu} \frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] f_{i-1} + \left[ \frac{h^3}{6\mu} \left( -\frac{2}{(\Delta\theta)^2} \right) - \frac{10}{6} R^2 h^2 \right] f_i = 5\omega \frac{\partial h}{\partial \theta}$$

Qui peut s'écrire

$$C_i f_{i+1} + B_i f_{i-1} + A_i f_i = D_i \quad (3.4)$$

Avec:

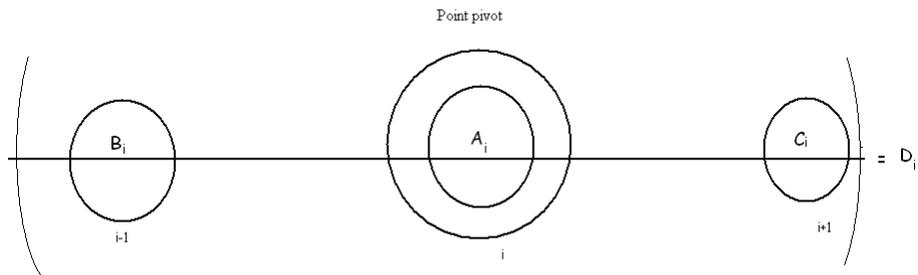
$$C_i = \frac{1}{6\mu} 3h^2 \frac{dh}{d\theta} \frac{1}{2\Delta\theta} + \frac{h^3}{6\mu} \frac{1}{(\Delta\theta)^2}$$

$$B_i = -\frac{1}{6\mu} 3h^2 \frac{dh}{d\theta} \frac{1}{2\Delta\theta} + \frac{h^3}{6\mu} \frac{1}{(\Delta\theta)^2}$$

$$A_i = \frac{h^3}{6\mu} \left( -\frac{2}{(\Delta\theta)^2} \right) - \frac{10}{6} R^2 h^2$$

$$D_i = 5\omega \frac{dh}{d\theta}$$

Qui s'écrit sous forme moléculaire en un point pivot  $i$



**Fig. 3.3:** Forme moléculaire de  $f$

On obtient  $m-2$  équation à  $m-2$  inconnu  $f_i$

On résout ce système par la méthode itérative SOR

$$C_i f_{i+1} + B_i f_{i-1} + A_i f_i = D_i$$

$$f_i^{k+1} = (1 + \omega) f_i^k + \omega f_i^{k-1}$$

$$f_i = \frac{(D_i - C_i f_{i+1} - B_i f_{i-1})}{A_i}$$

$$f_i^{k+1} = (1 - \omega) f_i^k + \omega \left[ \frac{(D_i - C_i f_{i+1} - B_i f_{i-1})}{A_i} \right]$$

$$\omega = 1,3 \quad \text{Facteur de relaxation}$$

### 3.4 Programmation de calcul de $f(\theta)$

Grille de différences finie

$$L = 2\pi R$$

$$m = 100$$

$$\Delta\theta = \frac{L}{m-1}$$

Pour une excentricité donnée, la fonction  $f(\theta)$  est calculée selon l'algorithme suivant :

Lire  $e, m$

$$L = 2\pi R$$

$$\Delta\theta = \frac{L}{m-1}$$

Faire pour  $i = 2, m-1$

$$\theta_i = (i-1)\Delta\theta$$

$$h(\theta_i) = c + e \cos \theta_i$$

$$A_i = \frac{h^3}{6\mu} \left( \frac{-2}{\Delta\theta^2} \right) - \frac{10}{6} R^2 h^2$$

$$B_i = -\frac{3h^2}{6\mu} \frac{dh}{d\theta} \left( \frac{1}{2\Delta\theta} \right) + \frac{h^3}{6\mu} \frac{1}{(\Delta\theta)^2}$$

$$C_i = \frac{3h^2}{6\mu} \frac{dh}{d\theta} \left( \frac{1}{2\Delta\theta} \right) + \frac{h^3}{6\mu} \frac{1}{(\Delta\theta)^2}$$

$$D_i = 5\omega \frac{\partial h}{\partial \theta}$$

$$f(\theta_i) = [D_i - B_i f(\theta_{i-1}) + C_i f(\theta_{i+1})] / A_i$$

Déterminer  $\theta_s$  (limites de cavitation)

$$\text{Conditions aux limites } f(\theta_s) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$$

Sortir la fonction  $f(\theta)$  aux points  $i$

Fin pour

**Fig. 3.4:** Algorithme de résolution analytique du palier circulaire

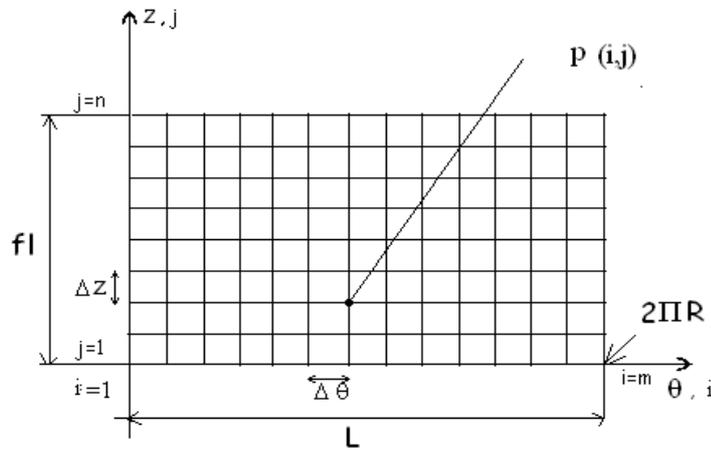
Le calcul sera organisé en sous programmes pour une meilleure compréhension

### 3.5 Discrétisation de l'équation de Rohde et Li

Puisque  $f(\theta)$  est calculé selon l'algorithme 3.4 on peut résoudre l'équation de pression (3.2) par la méthode de différence fine.

En un point  $(i, j)$  de la grille de la figure (3.5) l'équation (3.2) s'écrit sous la forme discrète

$$p_{i,j} = f_i \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{z_j}{L} \right)^2 \right] \quad (3.5)$$



**Fig. 3.5:** Discrétisations de  $p_{i,j}$

Avec :

$$fl = 75\text{mm}$$

$$z_j = (j-1)\Delta z$$

$$n = \frac{fl}{\Delta z} + 1$$

$$\Delta z = \Delta \theta$$

### 3.6 Résolution du programme analytique

Le programme est écrit en fortran selon l'algorithme, le programme est obtenu après plusieurs essais.

L'essai suivant donne les résultats de l'approche analytique

Configuration  $e=1.e-4$

Et les données géométriques suivantes :

Jeu radial  $c=4.e-5$

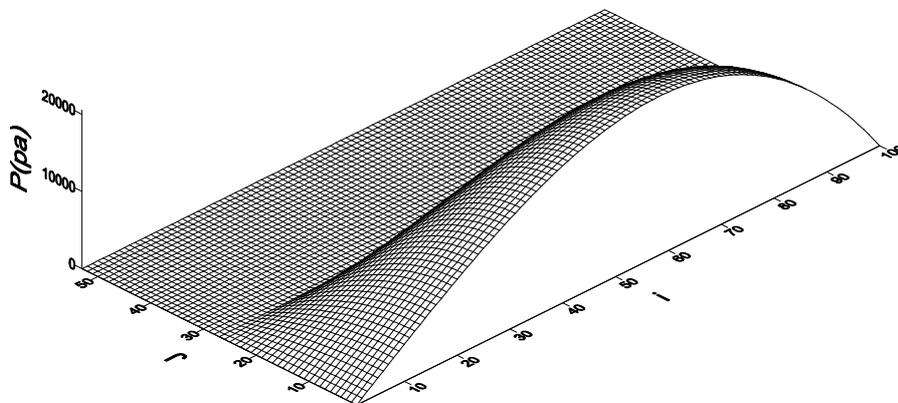
Rayon de l'arbre  $R=0.0225$

Longueur axiale  $L=0.075$

Et pour un maillage

$m=100, n=53$

La figure (3.6) présente la pression dans le palier.



**Fig. 3.6:**Résultat de la pression analytique

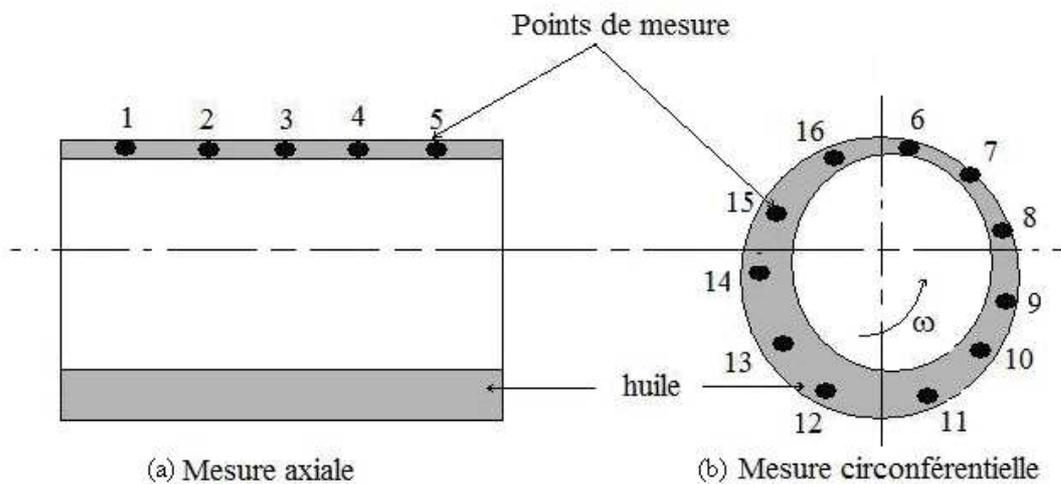
## 4.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de déterminer expérimentalement la répartition de la pression dans un palier hydrodynamique. Le palier est celui décrit dans le chapitre I.

Pour atteindre cet objectif on utilise un banc d'essai situé dans le laboratoire d'hydrodynamique du département de mécanique.

L'appareil TM 280 (GUNT) de la répartition de la pression d'huile dans un coussinet est un banc d'essai qui sert à mesurer la répartition de la pression dans le film lubrifiant séparant l'arbre du coussinet.

La pression est mesurée circonférentiellement et axialement dans le palier (figure 4.1)



**Fig. 4.1:** Disposition des points de mesures dans le palier

Le banc d'essai utilisé est donné par la (figure 4 2) [22]

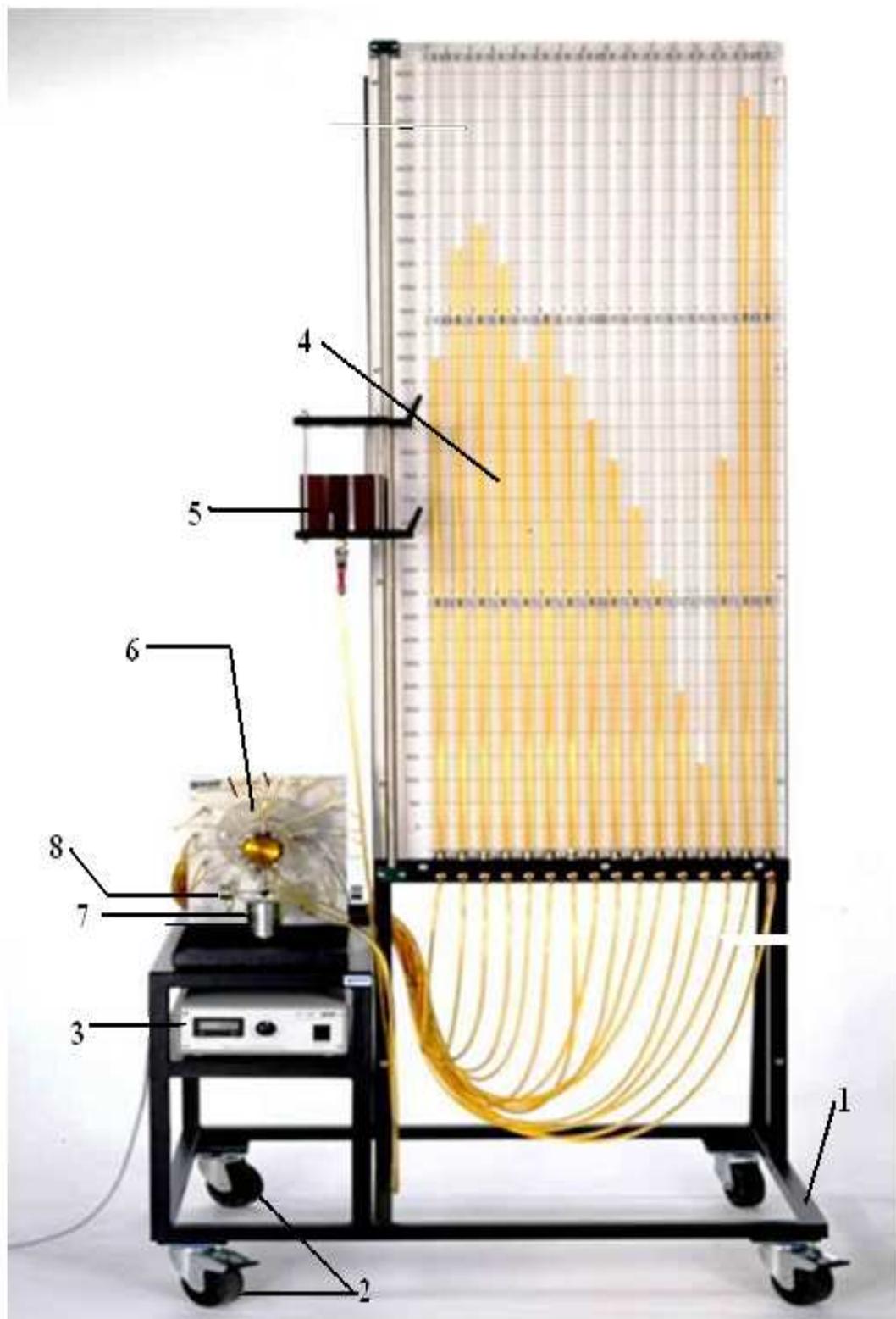


Fig. 4.2:Appareil TM280 de mesure de la pression

## **4.2. Description de l'appareil**

L'appareil est monté sur un châssis mobile (1)

-Quatre roues pivotantes (2) lui confèrent une mobilité et en facilitent le rangement.

-Un boîtier de commande (3) pour le réglage de la vitesse et l'affichage.

-16 tubes en plastique minces (4) font office d'indicateurs manométriques (lecture directe).

-Un réservoir (5) pour l'alimentation en huile (lubrifiant).

-Fonctionnement visible à travers le logement en plexiglas du palier (6).

-Un jeu de poids (7) pour différentes valeurs de charge sur le palier.

-Un poids mobile (8) pour compenser la torsion du logement de palier en présence de charges réduites.

Le schéma explicatif est donné par la (figure 4 3).

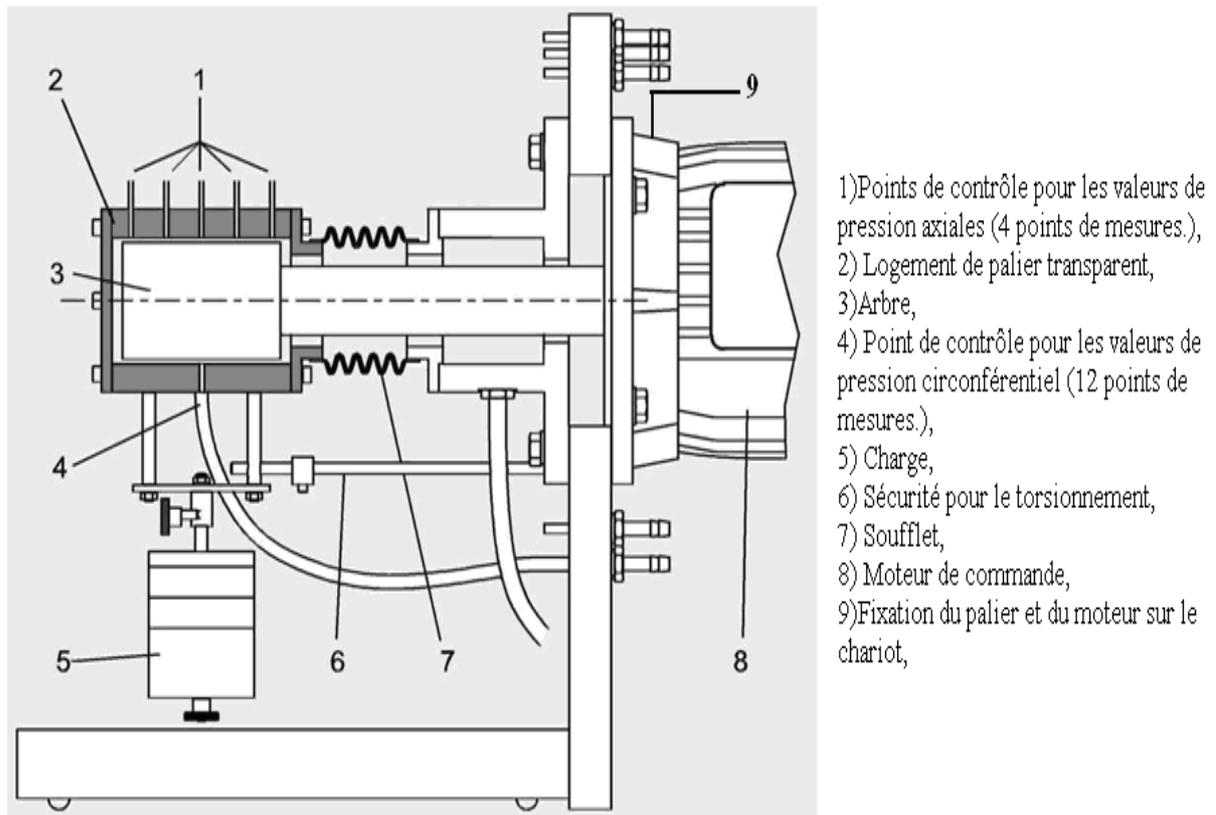


Fig. 4 3: Schéma du banc d'essai

### 4.3. Caractéristiques techniques du banc d'essai

Caractéristiques	Valeur spécifiée
Rayon nominal de l'arbre	$R_a=51\text{mm}$
Largeur du palier	$L=75\text{mm}$
Charge du palier	$P_i = 6.7 \dots 16.7\text{N}$ (contre poids, arbre, balance)

Puissance du moteur	0.37kW
Vitesse de rotation max	$\omega_{\max} = 3000\text{t/min}$
Longueur des tubes de manomètre	1770mm
Classe de viscosité d'huile [ $\mu$ ]:	ISO VG 100
Volume d'huile total	3.51 litre
Jeu de poids: jusqu'à	P=10N

**Tab. 4.1:** Caractéristiques techniques du banc d'essai

#### **4.4. Principe de la mesure**

La pression se mesure selon le principe manométrique suivant (figure 4.4)

$$p_i = \rho g H_i \quad (4.1)$$

Avec :

$\rho = 860\text{kg/m}^3$ : La masse volumique de l'huile.

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

$H_i$  : La hauteur d'huile dans les tubes de manomètre repérée par rapport à la position au repos du palier.

$p_i$  : Pression au point de mesure ( $i=1$  jusqu'à 16)

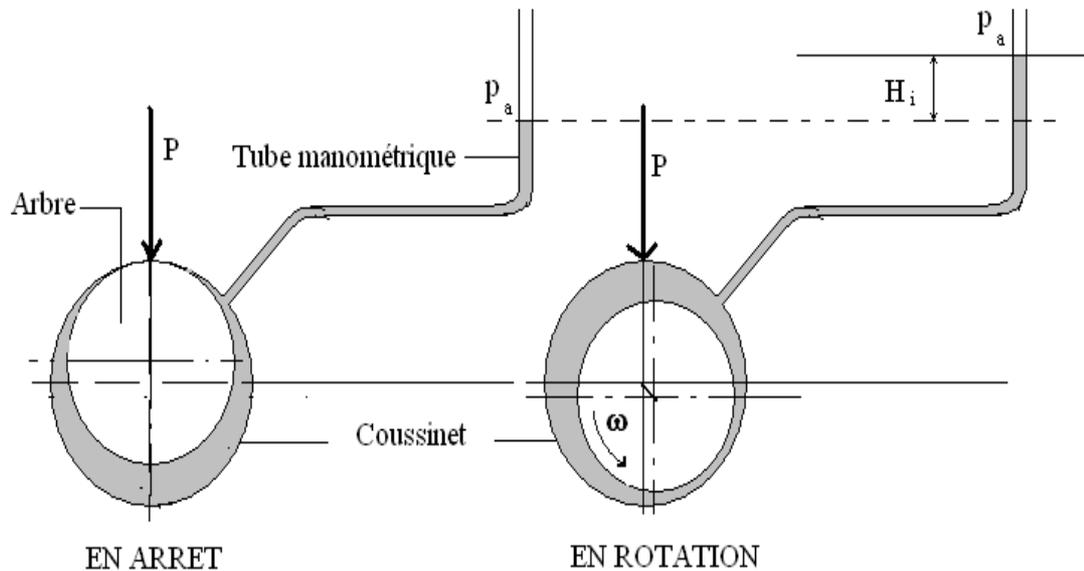


Fig. 4.4: Schéma d'un tube manométrique.

## 4.5. Réalisation de l'essai

### 4.5.1. Préchauffage mécanique de l'huile

Avant de réaliser une série des essais, il est nécessaire de préchauffer l'huile, on sait que la viscosité dépend de la température.

Pour chauffer l'huile, charger la suspente avec poids max, afin d'atteindre une vitesse de rotation de 1500 tr/min. L'huile atteint sa température de service ( $42^{\circ}\text{C}$ ) au bout de 30 min.

#### 4.5.2. Mise en pratique du mouvement hydrodynamique

Cette expérience permet, grâce au coussinet transparente et à la grande valeur du jeu C de visualiser les pressions.

Pour des raisons pratiques, la partie mobile, ici, est le coussinet et non l'arbre.

C'est pourquoi ce n'est pas l'arbre qui repose en bas sur le coussinet mais l'inverse voir la figure (4 5).

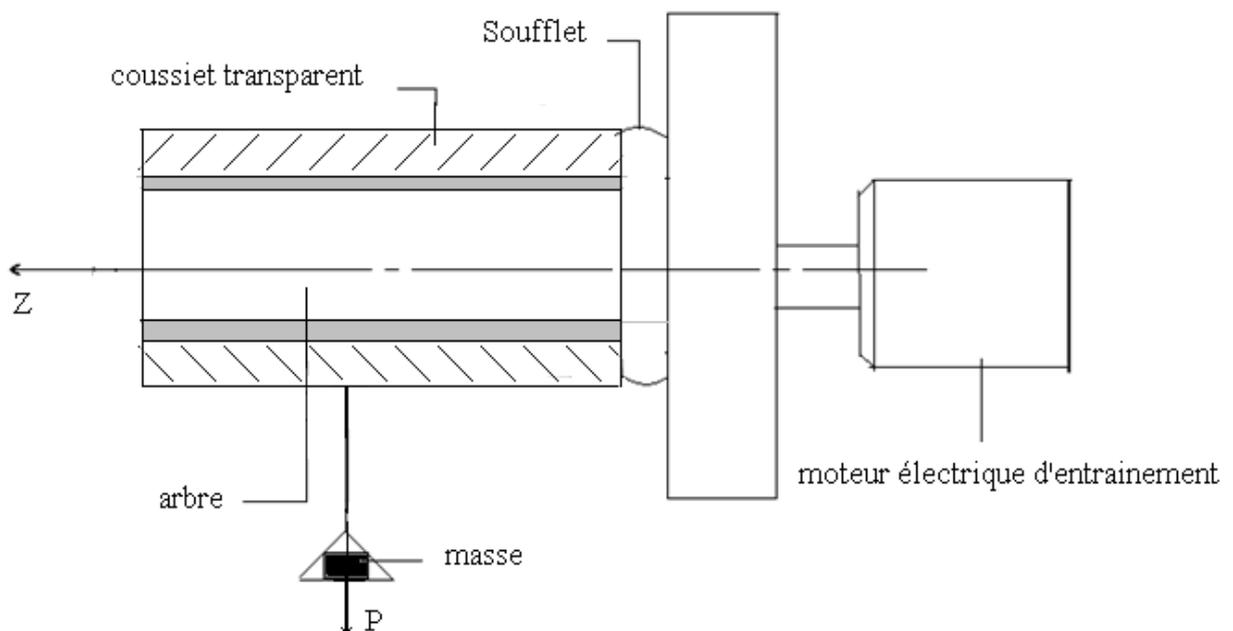


Fig. 4.5: Palier expérimental inversé avec coussinet chargé au lieu de l'arbre

#### 4 6. Répartition de la pression pour une charge constante avec vitesse de rotation variable (annexe3)

Cette expérience permet de visualiser la répartition de la pression dans notre palier.

- Charge  $P=1N$

a/Pression axiale

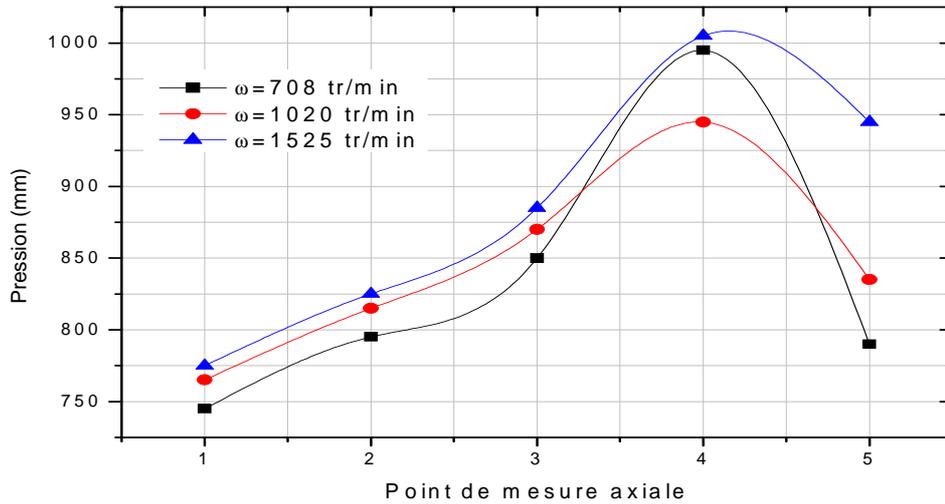


Fig. 4.6: Répartition de la pression axiale pour différentes vitesses ( $P=1N$ )

$\omega_1 = 708$ tr / mn	$\omega_1 = 1020$ tr / mn	$\omega_1 = 1525$ tr / mn
$P_{\max} = 925$ mm	$P_{\max} = 990$ mm	$P_{\max} = 1025$ mm

Tab. 4.2: Effet de la vitesse sur la pression

Le résultat de la figure ci-dessus et du tableau 4.1 montre que plus la vitesse augmente plus le champ de pression augmente

b/Pression circonférentielle

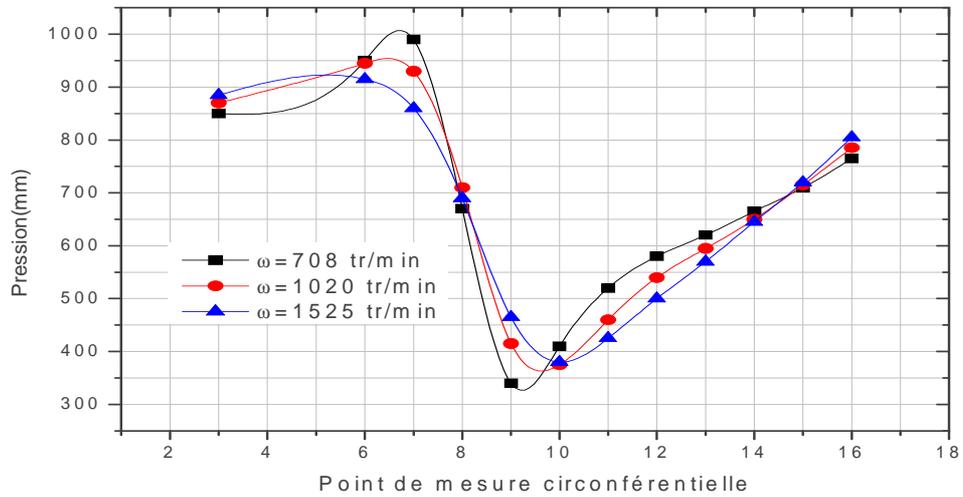


Fig. 4.7: Répartition de la pression circonférentielle pour différentes vitesses (P=1N)

- Charge P=2N

a/Pression axiale

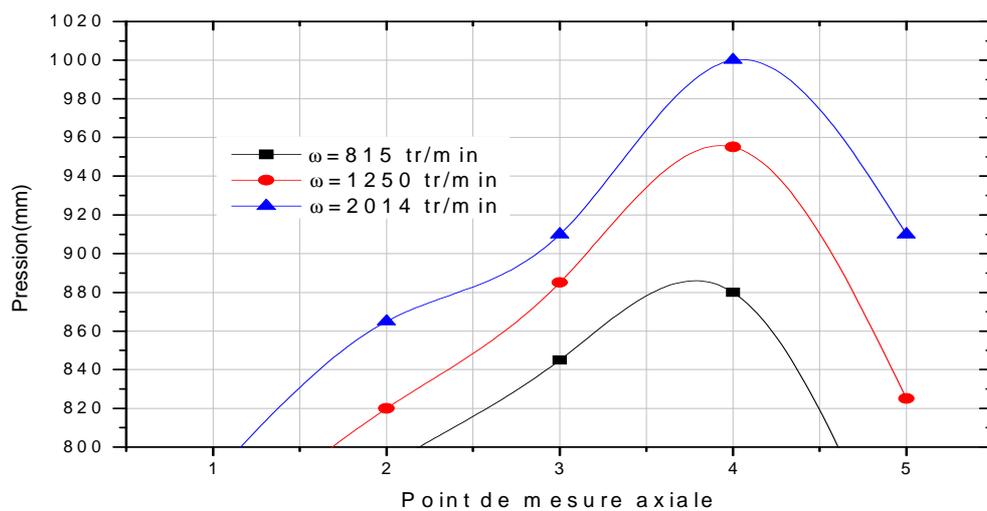


Fig. 4.8: Répartition de la pression axiale pour différentes vitesses (P=2N)

$\omega_1 = 815 \text{ tr / mn}$	$\omega_1 = 1250 \text{ tr / mn}$	$\omega_1 = 2014 \text{ tr / mn}$
$P_{\text{max}} = 870 \text{ mm}$	$P_{\text{max}} = 965 \text{ mm}$	$P_{\text{max}} = 1000 \text{ mm}$

Tab. 4.3 : Effet de la vitesse sur la pression

Le résultat de la figure ci-dessus et du tableau 4.2 montre que plus la vitesse augmente plus le champ de pression augmente

**b/Pression circonférentielle**

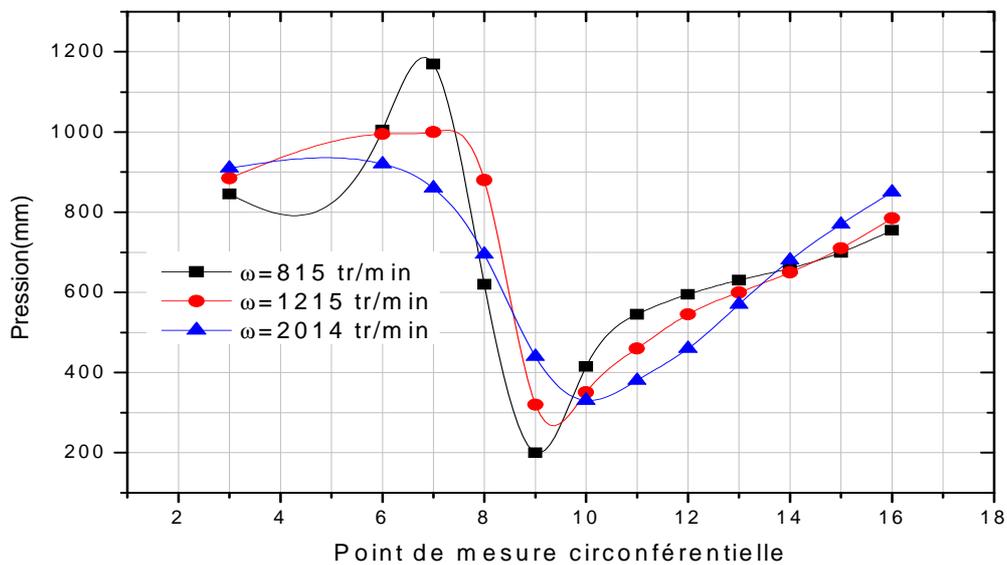


Fig. 4.9: Répartition de la pression circonférentielle pour différentes vitesses (P=2N)

- Charge P=3N

a/Pression axiale

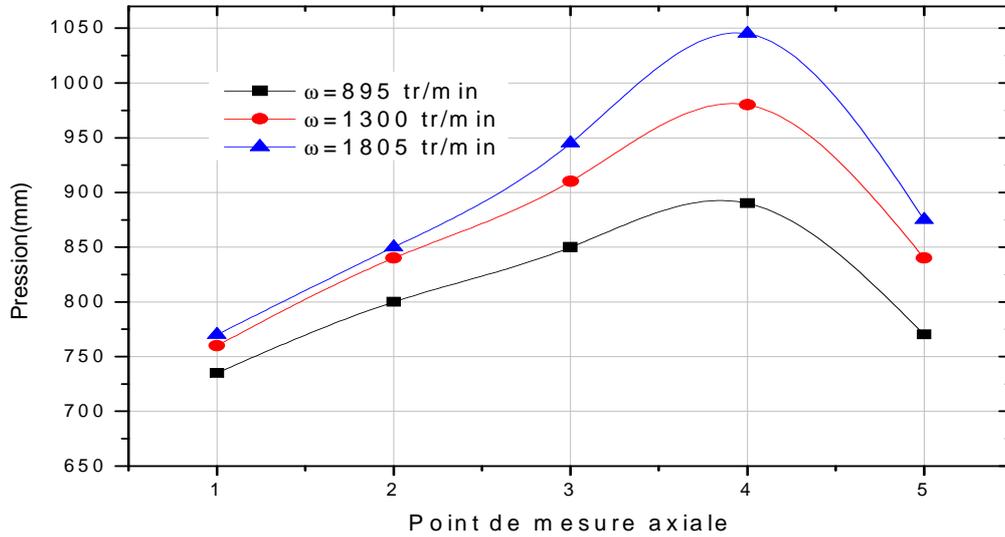


Fig. 4.10: Répartition de la pression axiale pour différentes vitesses (P=3N)

$\omega_1 = 1805$ tr / mn	$\omega_1 = 1300$ tr / mn	$\omega_1 = 895$ tr / mn
$p_{\max} = 1050$ mm	$p_{\max} = 975$ mm	$P_{\max} = 890$ mm

Tab. 4.4 : Effet de la vitesse sur la pression

Le résultat de la figure ci-dessus et du tableau 4.4 montre que plus la vitesse augmente plus le champ de pression augmente

b/Pression circumférentielle

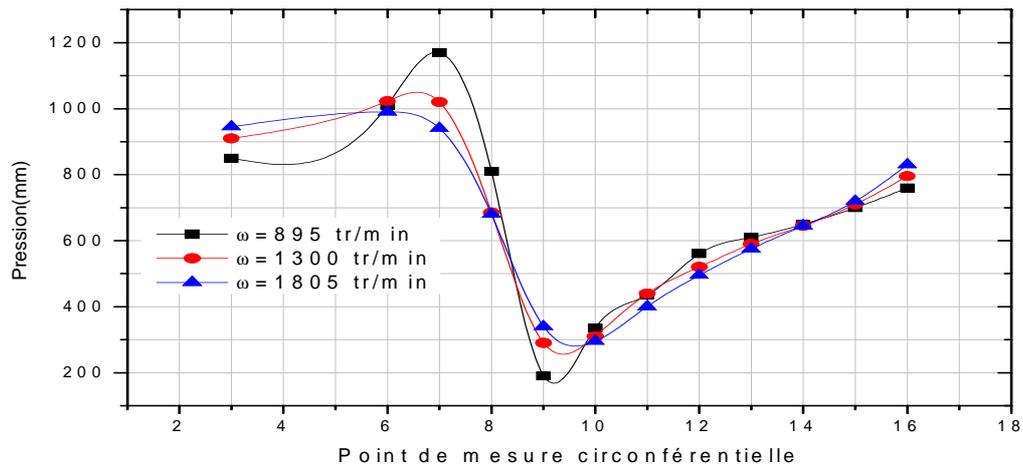


Fig. 4.11: Répartition de la pression circonférentielle pour différentes vitesses ( $P=3N$ )

- Charge  $P=4N$

a/Pression axiale

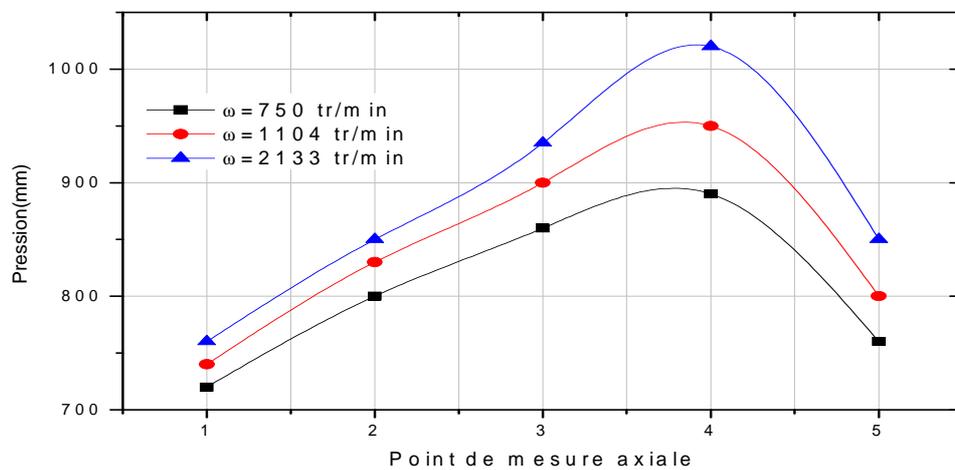


Fig. 4.12: Répartition de la pression axiale pour différentes vitesses ( $P=4N$ )

$\omega_1 = 2133 \text{tr / mn}$	$\omega_1 = 1104 \text{tr / mn}$	$\omega_1 = 750 \text{tr / mn}$
$p_{\text{max}} = 1040 \text{mm}$	$p_{\text{max}} = 950 \text{mm}$	$p_{\text{max}} = 890 \text{mm}$

Tab. 4.5 : Effet de la vitesse sur la pression

Le résultat de la figure ci-dessus et du tableau 4.5 montre que plus la vitesse augmente plus le champ de pression augmente

**b/Pression circonférentielle**

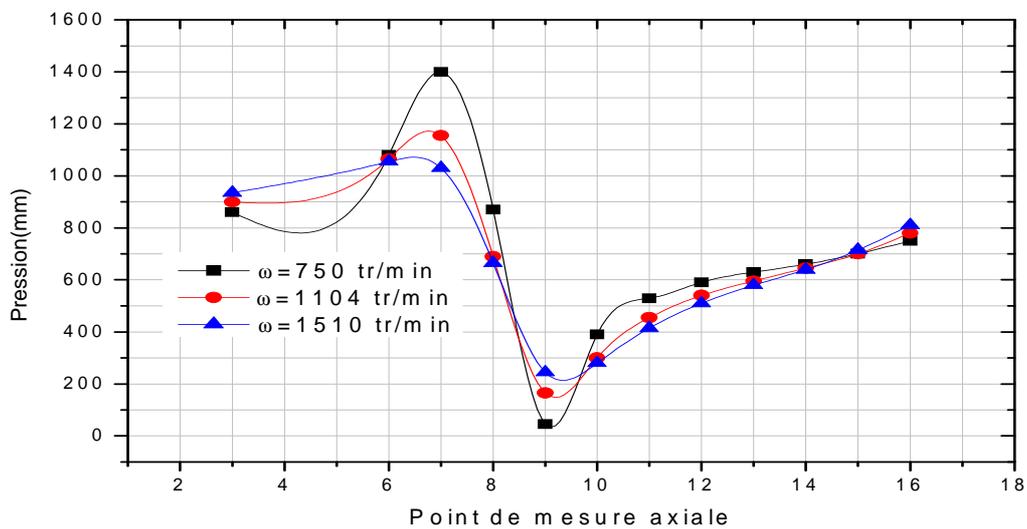


Fig. 4.13: Répartition de la pression circonférentielle pour différentes vitesses (P=4N)

Charge P=5N

a/Pression axiale

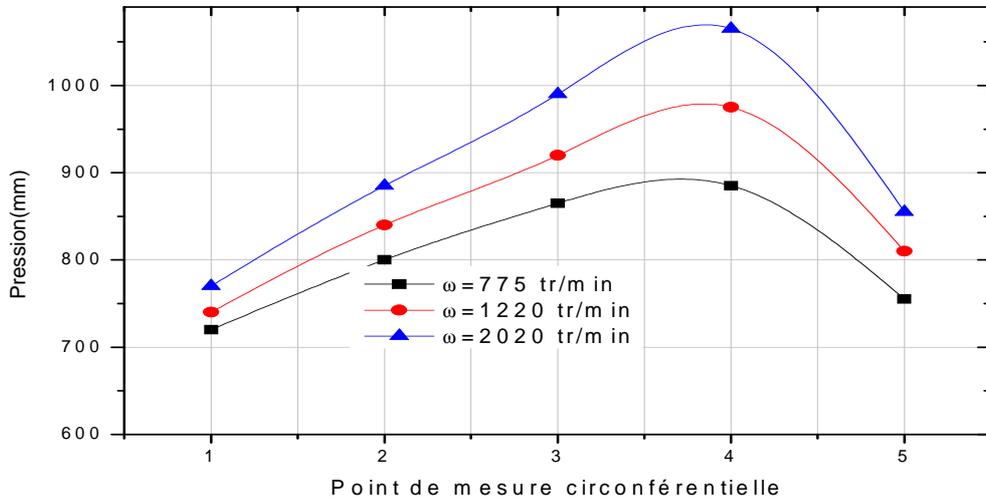


Fig. 4.14: Répartition de la pression axiale pour différentes vitesses (P=5N)

$\omega_1 = 775$ tr / mn	$\omega_1 = 1220$ tr / mn	$\omega_1 = 2020$ tr / mn
$p_{\max} = 890$ mm	$P_{\max} = 975$ mm	$p_{\max} = 1075$ mm

Tab. 4.6 : Effet de la vitesse sur la pression

Le résultat de la figure ci-dessus et du tableau 4.6 montre que plus la vitesse augmente plus le champ de pression augmente

b/Pression circonférentielle

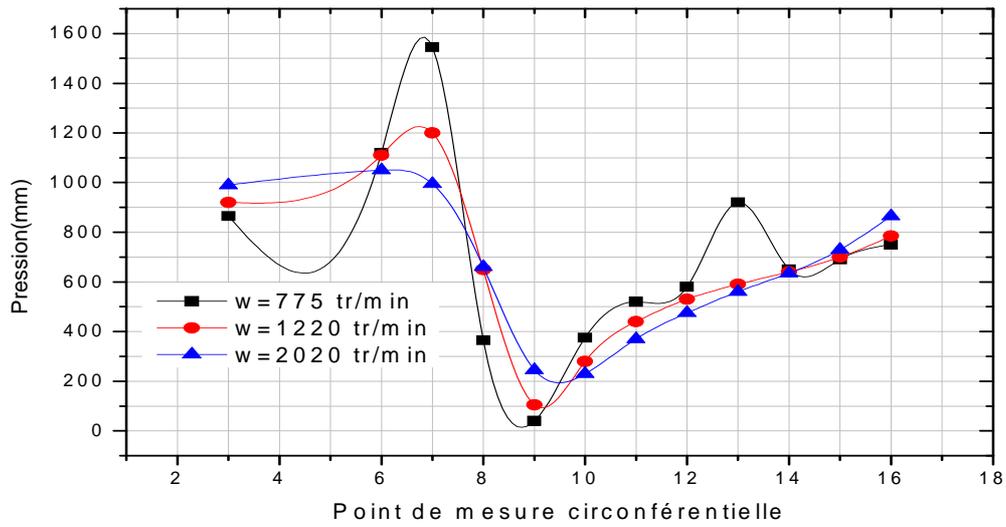


Fig. 4.15: Répartition de la pression circonférentielle pour différentes vitesses ( $P=5N$ )

- Charge  $P=6N$

a/Pression axiale

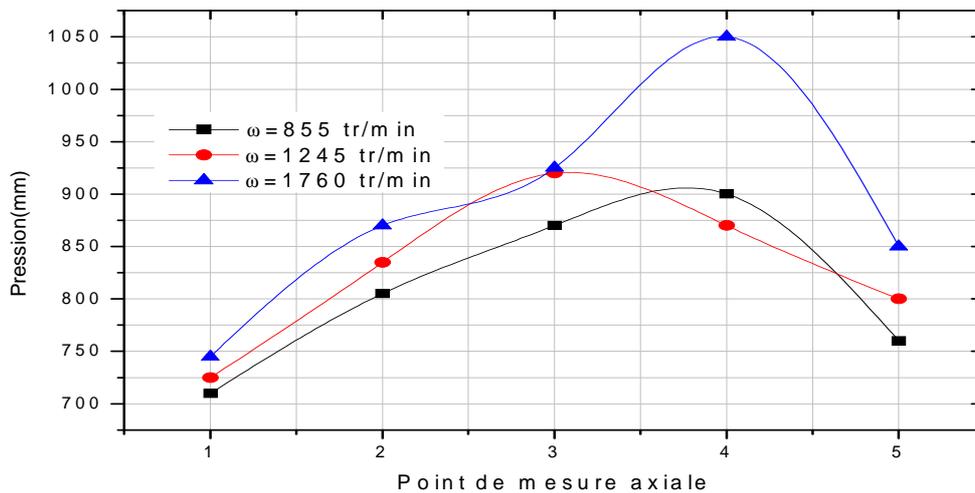


Fig. 4.16: Répartition de la pression axiale pour différentes vitesses ( $P=6N$ )

$\omega_1 = 855 \text{ tr / mn}$	$\omega_1 = 1245 \text{ tr / mn}$	$\omega_1 = 1760 \text{ tr / mn}$
$P_{\text{max}} = 910 \text{ mm}$	$P_{\text{max}} = 925 \text{ mm}$	$P_{\text{max}} = 1050 \text{ mm}$

Tab. 4.7 : Effet de la vitesse sur la pression

Le résultat de la figure ci-dessus et du tableau 4.7 montre que plus la vitesse augmente plus le champ de pression augmente

**b/Pression circonférentielle**

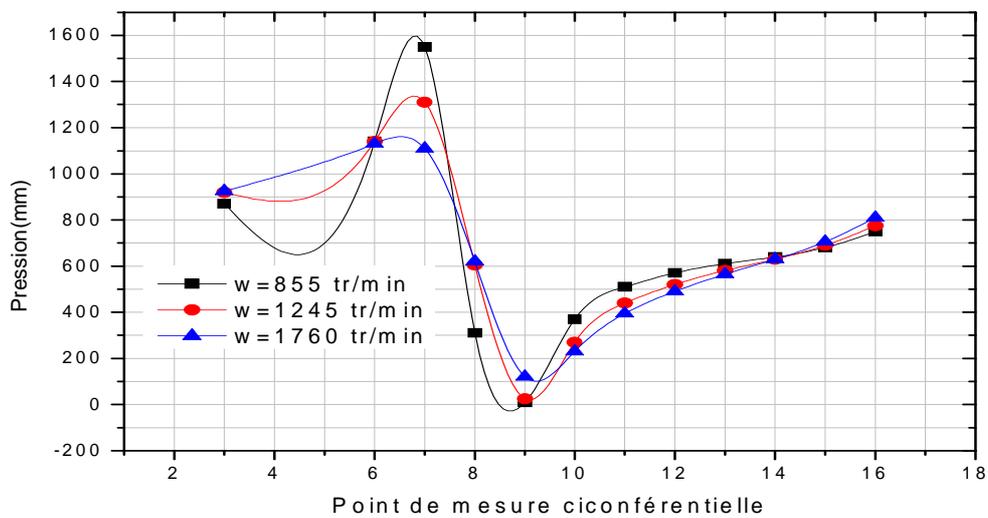


Fig. 4.17: Répartition de la pression circonférentielle pour différentes vitesses (P=6N)

- Charge P=7N

a/Pression axiale

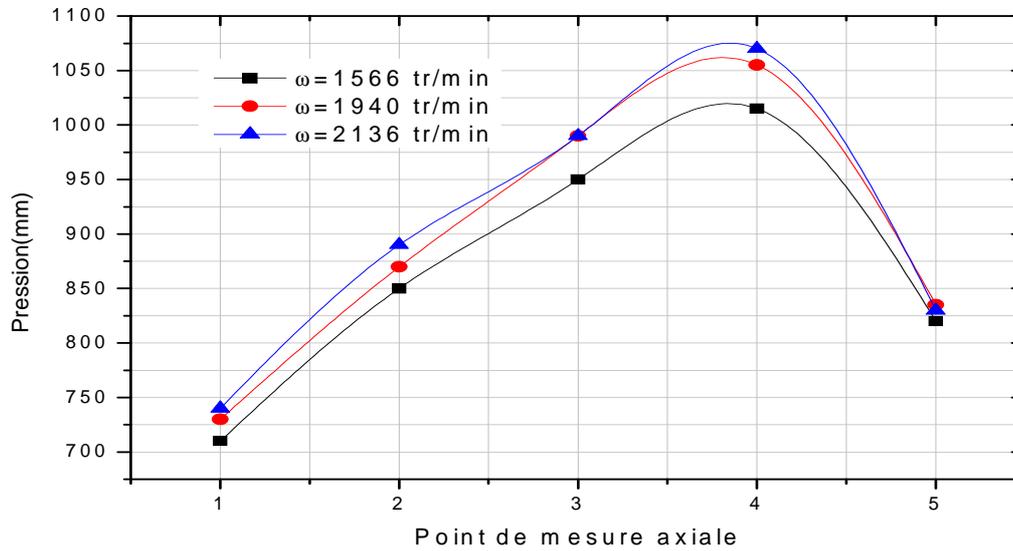


Fig. 4.18: Répartition de la pression axiale pour différentes vitesses ( $P=7N$ )

$\omega_1 = 1566$ tr / mn	$\omega_1 = 1940$ tr / mn	$\omega_1 = 2136$ tr / mn
$p_{\max} = 1020$ mm	$p_{\max} = 1065$ mm	$p_{\max} = 1075$ mm

Tab. 4.8 : Effet de la vitesse sur la pression

Le résultat de la figure ci-dessus et du tableau 4.8 montre que plus la vitesse augmente plus le champ de pression augmente

b/Pression circonférentielle

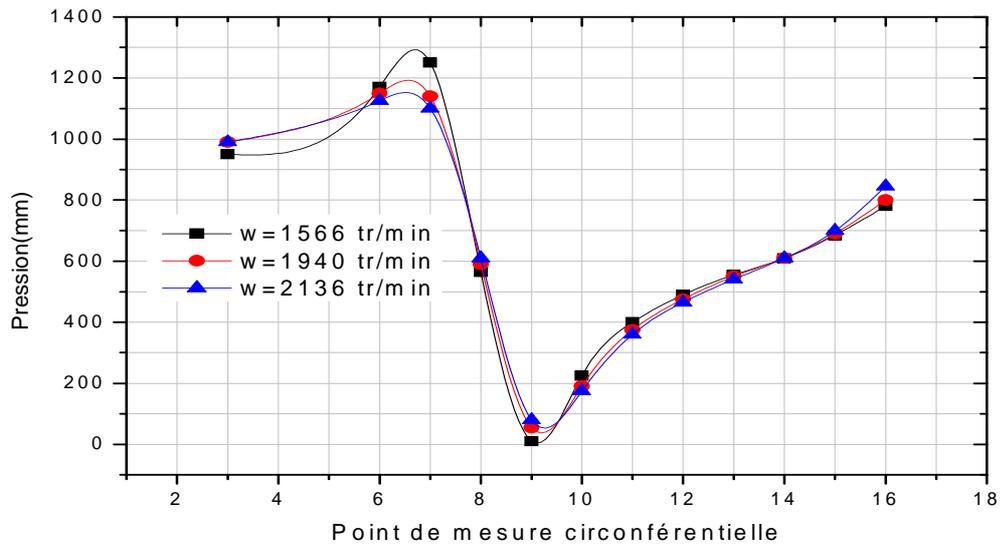


Fig. 4.19: Répartition de la pression circonférentielle pour différentes vitesses ( $P=7N$ )

## Conclusion

Les courbes des figures (4.6-4.19) ont même allure pour les pressions axiales et circonférentielles. On remarque que la vitesse n'influence pas beaucoup sur la pression obtenue.

Il existe deux méthodes de représenter la pression circonférentielle :

- Sous forme de diagramme normale avec des coordonnées cartésiennes figures (4.6-4.19) .

- Sous forme de diagramme polaire (r,  $\theta$ ), est plus convenable car la pression est lue directement avec les points circonférentiels correspondants pour une vitesse de rotation  $\omega=2700$  tr /min et une charge constante  $P=10$  N. Fig.4.20

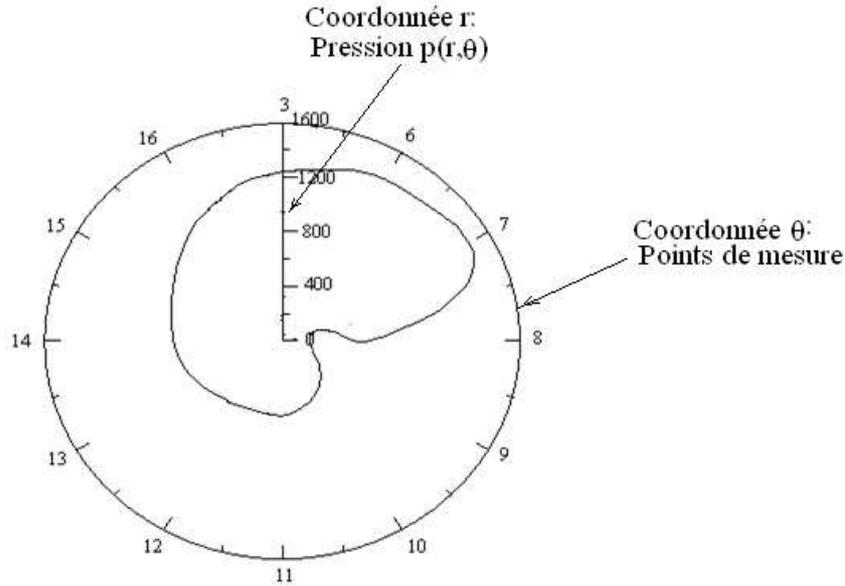


Figure 4.20 Diagramme de la pression en coordonnées polaires

#### **4.7. Vitesse de rotation critique en fonction de la charge**

Cette expérience vise à démontrer que la vitesse de rotation maximale possible dépend de la charge.

Les mesures des vitesses en (tr /min) sont données pour différentes charges par le tableau de mesure suivant

La charge(N)	2	4	6	8	10
La vitesse tr /min	2150	2270	2400	2660	2720

Tableau 4.9 Mesures des vitesses données pour différentes charges

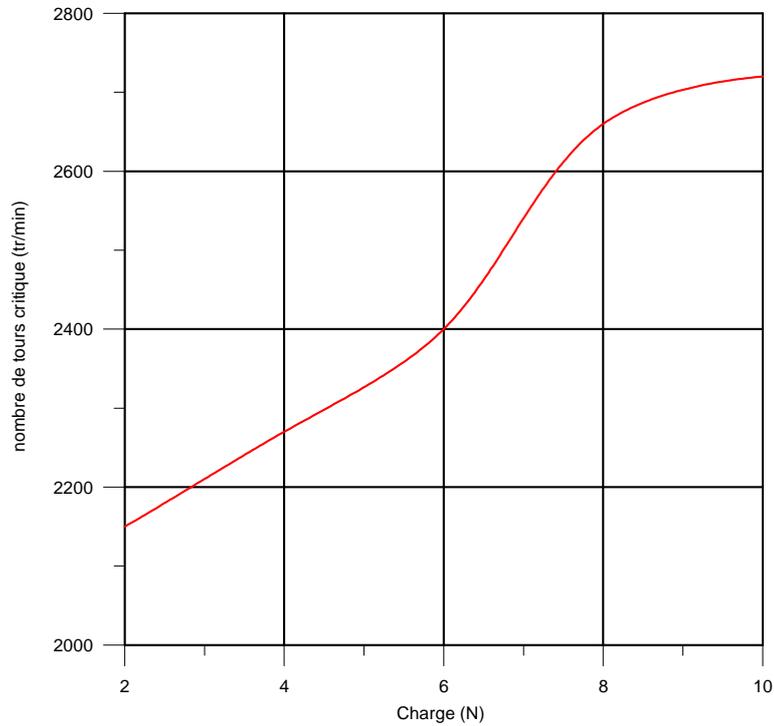


Figure 4.21 Vitesse de rotation critique en fonction de la charge

Nous remarquons que la vitesse de rotation critique augmente avec l'augmentation de la charge.

#### **4.8. Vitesse de rotation critique en fonction de la viscosité**

Cette expérience cherche à mettre en lumière la très forte dépendance existant entre la vitesse de rotation maximale et la température.

L'interprétation des essais permet d'observer distinctement le déplacement de la limite de stabilité.

Les mesures de vitesse en fonction de la température sont indiquées dans le tableau suivant

t (°C)	15	17	20	23	25	26	30	33	35
V (tr/min)	1100	1150	1200	1400	1500	1640	2000	2300	2500

Tableau 4.10 mesures de vitesse en fonction de la température

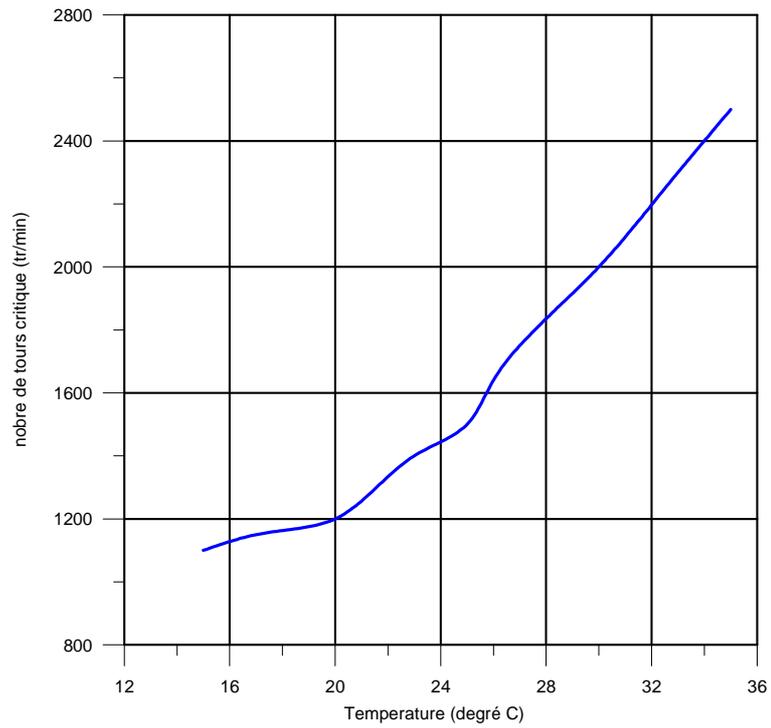


Figure 4.22 Vitesse de rotation critique en fonction de la viscosité

Nous remarquons que la vitesse de rotation critique augmente avec l'augmentation de la température.

## 5.1. Introduction

Le problème a été résolu par ou par avant dans le cadre de PFE 2009 mais celui-ci a déterminé le champ de pression a été déterminé uniquement pour une configuration donnée c'est-à-dire en fixant l'excentricité  $e$  et l'angle de calage  $\phi$  puis a résolu l'équation de Reynolds pour cette configuration.

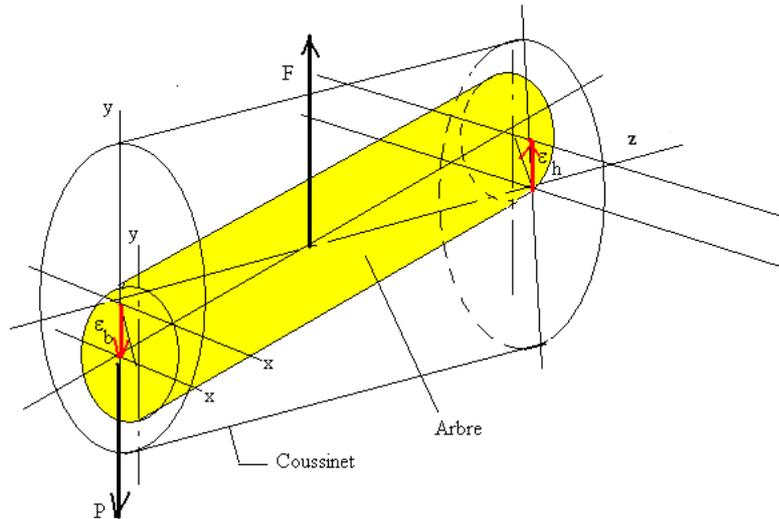
En fait pour résoudre ce problème d'hydrodynamique qui est assez complexe puisque on a trois inconnues à une équation qui est l'équation de Reynolds .Les inconnues sont :

- La pression hydrodynamique développée dans le film d'huile:  $p(\theta, z)$
- L'angle de calage:  $\Phi$
- Cordonnées circonférentielle délimitant la zone active du palier  $\theta_s$
- L'épaisseur:  $h(\theta, z)$  et l'excentricité  $e$

L'épaisseurs du film d'huile  $h$  et l'excentricité  $e$  sont déterminées à partir de la relation résolution de l'équation du palier mésaligné.

$$h(\theta, Z) = C + e_0 \cos\theta + C \delta \bar{z} \cos(\theta - \beta)$$

On traitera uniquement le palier dans le cas où la charge  $\mathbf{P}$  appliquée sur l'arbre est constante (Figure. 5.1)



**Fig. 5.1:** Paramètres principaux du palier hydrodynamique

Le problème n'a pas de solution analytique. Seules les méthodes numériques ou expérimentales peuvent être utilisées.

Les méthodes utilisées généralement sont la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis. Cette dernière, est généralement employée pour les paliers à géométrie complexe. Dans cette présente étude, nous avons utilisé la méthode des différences finies .

La procédure de résolution est itérative et se base sur le développement des étapes suivantes:

- 1°) Equation de Reynolds sans dimensions
- 2°) Définition du domaine d'étude et des conditions aux limites. Maillage
- 3°) - Discrétisation numérique de l'équation de Reynolds
- 4°) Résolution numérique du système d'équations algébriques

## 5.2. Le problème de palier hydrodynamique

### 5.2.1 L'équation de Reynolds

On rappelle l'équation dimensionnelle de Reynolds

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu R\omega \frac{\partial h}{\partial x} \quad (5.1)$$

Il est intéressant d'utiliser des variables adimensionnées, afin de simplifier et de généraliser les calculs.

Ainsi, on pose :

Epaisseur adimensionnée  $\bar{h} = \frac{h}{c}$

Coordonnée circonférentielle adimensionnelle  $\bar{\theta} = \frac{x}{R}$

Coordonnée axiale adimensionnelle  $\bar{z} = \frac{z}{L}$

La pression adimensionnelle  $\bar{p} = \frac{p}{6\mu\omega \left( \frac{R}{c} \right)^2}$

Avec :

$h(\theta, z)$  est l'épaisseur de film hydrodynamique

$C$  est le jeu radial

$R_a$  est le rayon de l'arbre

Lest la longueur axiale de l'arbre ;

U vitesse linéaire de l'arbre ;

$\mu$  est la viscosité dynamique du fluide ;

$x, z$  sont les coordonnées cartésiennes.

$\bar{p}$ : La pression adimensionnelle

L'équation de Reynolds sous sa forme adimensionnelle, s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \quad (5.2)$$

Equation à la quelle il faudrait ajouter les conditions aux limites

### 5.2.2 Les conditions aux limites de Reynolds

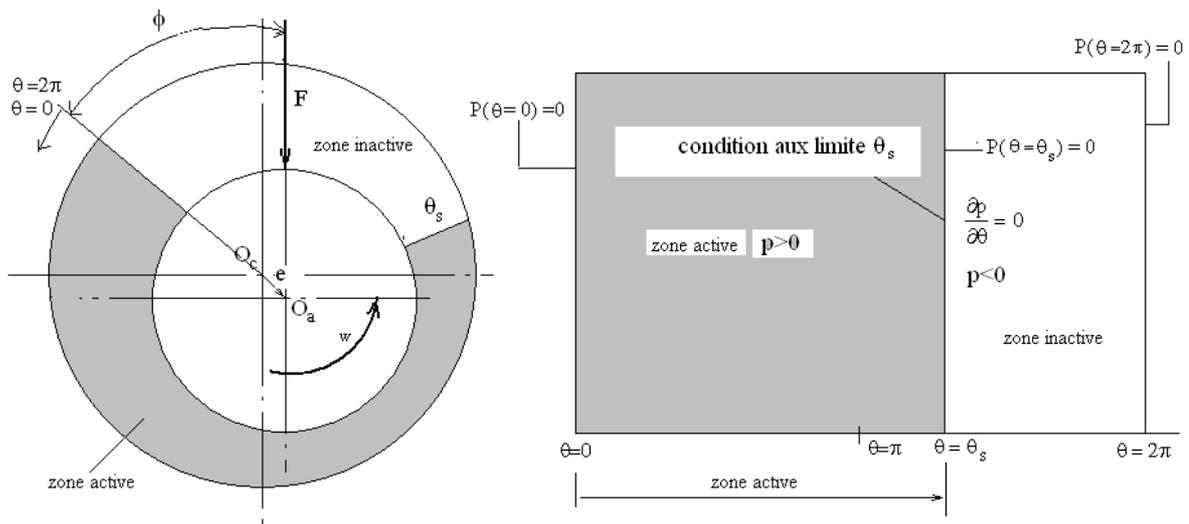


Fig. 5.2: La configuration du palier développé avec les conditions de Reynolds

Le domaine d'étude de la figure 5.2 est maillé comme l'indique les figures. 5.3, 5.4:

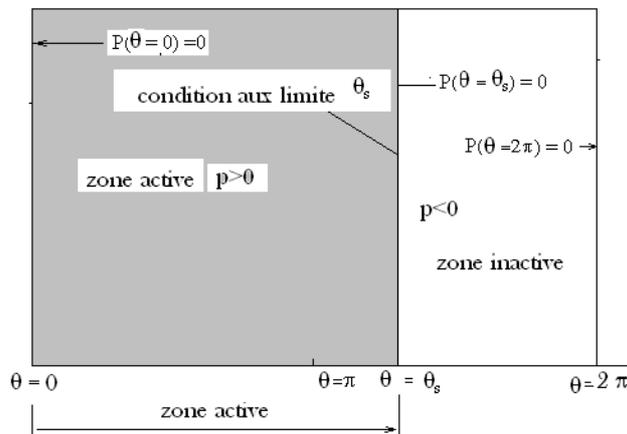
Les conditions aux limites avant discrétisation sont alors données par

$$p(\theta = 0) = 0$$

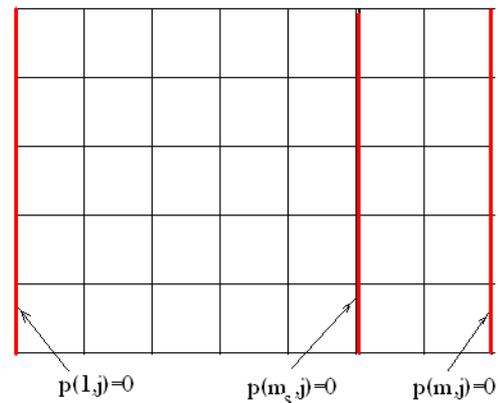
$$p(\theta = \theta_s) = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

Par projection dans le maillage on obtient les équations paramétriques de la figure (5.3b) et (5.4b) pour les conditions aux limites circonférentiels et axiales respectivement

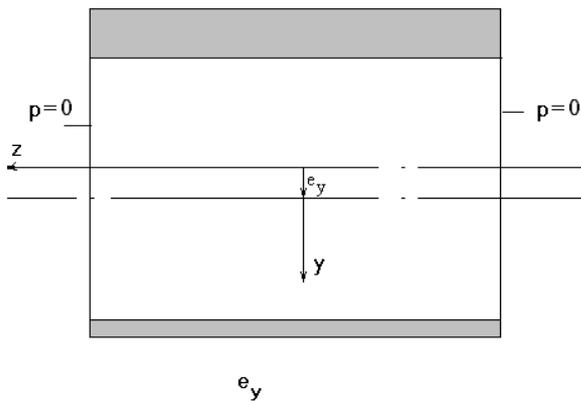


(3a)

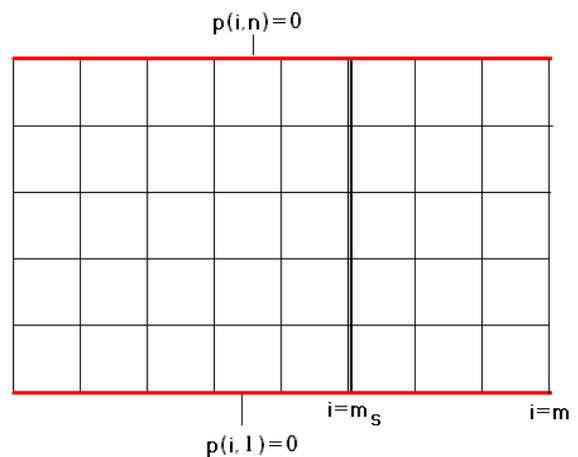


(3b)

Fig. 5.3: Conditions aux limites circonférentiels selon  $\theta$



(4a)



(4b)

Fig. 5.4: Conditions aux limites axiales selon  $z$

### 5.3 Organigramme principal de résolution

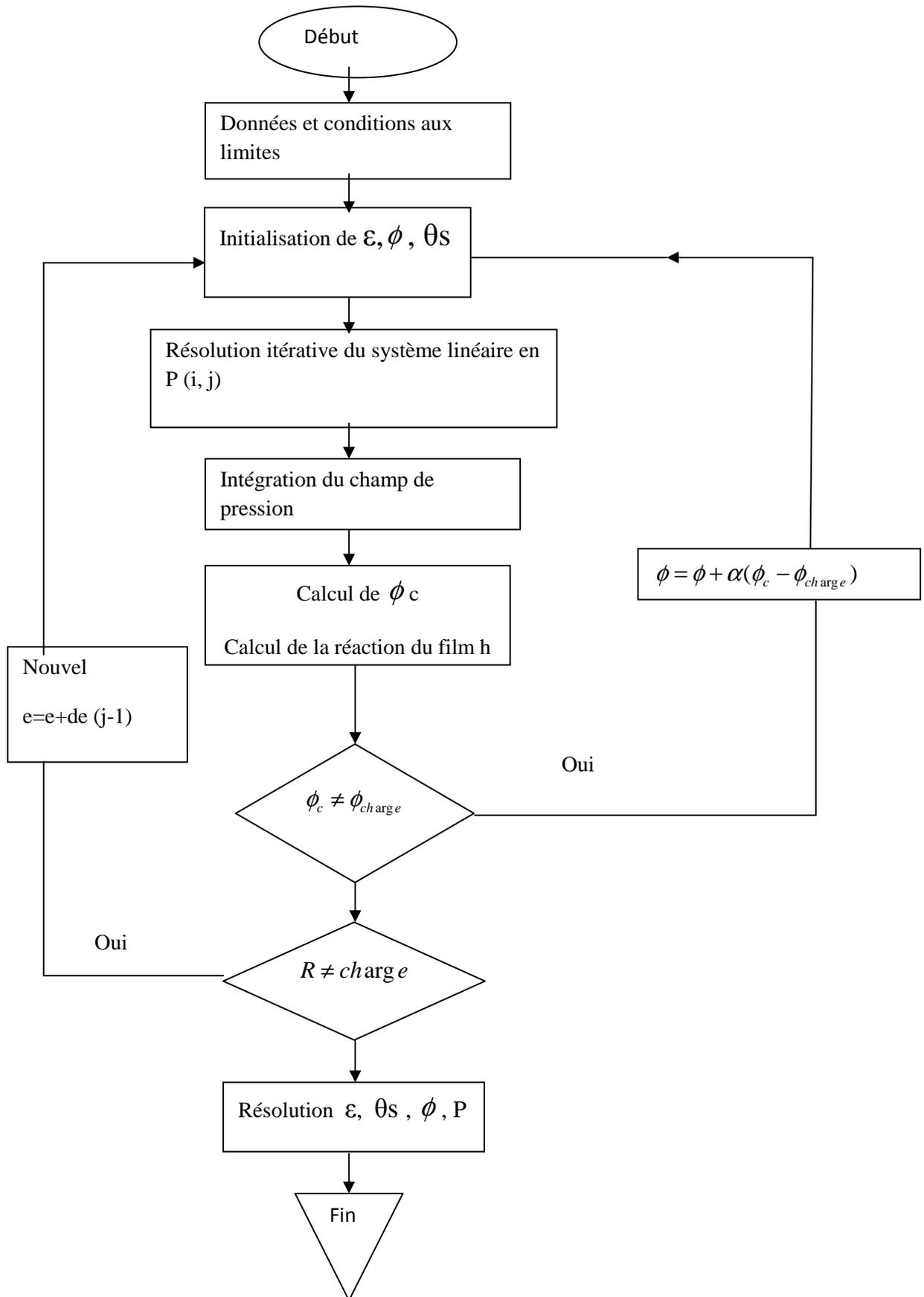
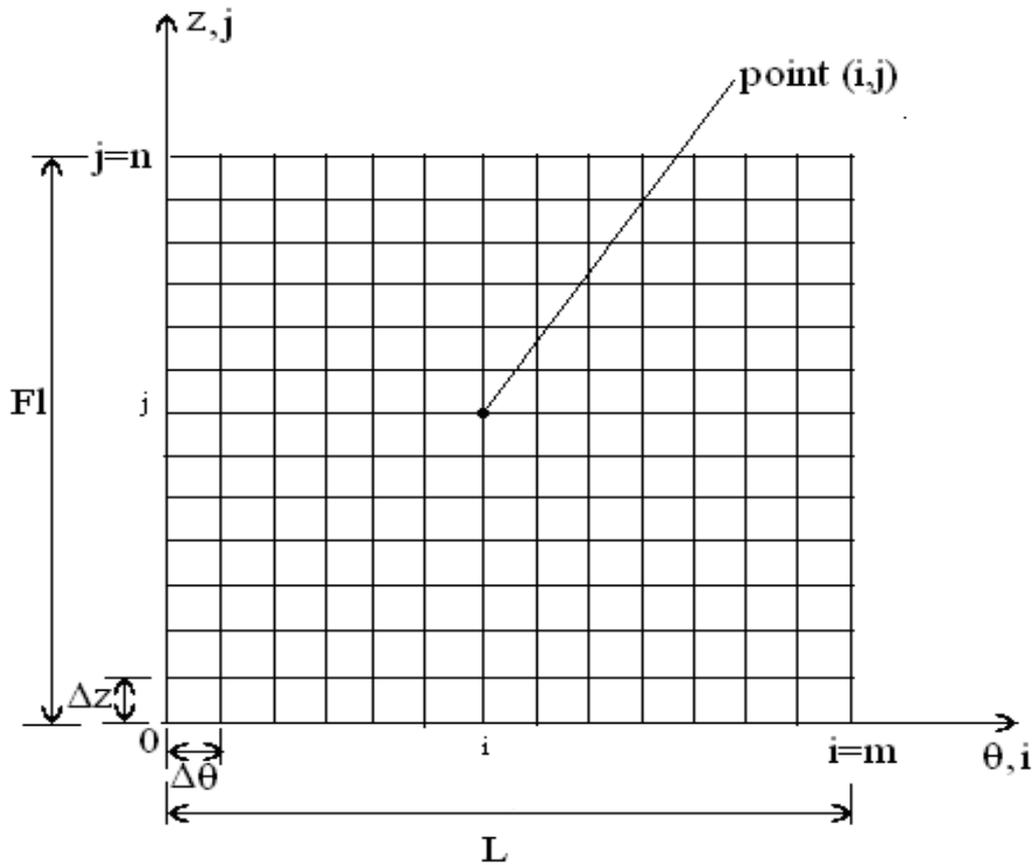


Fig. 5.5: Organigramme principal

## 5.4. Procédure détaillée d'obtention de la solution [20]

### 5.4.1. Le maillage

Le maillage est indiqué sur la figure 5.6



**Fig. 5.6:** Configuration du maillage du film développé

$$\Delta\theta = \Delta Z = cte \Leftrightarrow \text{Maillage uniforme}$$

$$\theta = (i-1)\Delta\theta$$

$$z = (j-1)\Delta Z$$

Le maillage est défini par

m: le nombre des points selon  $\theta$

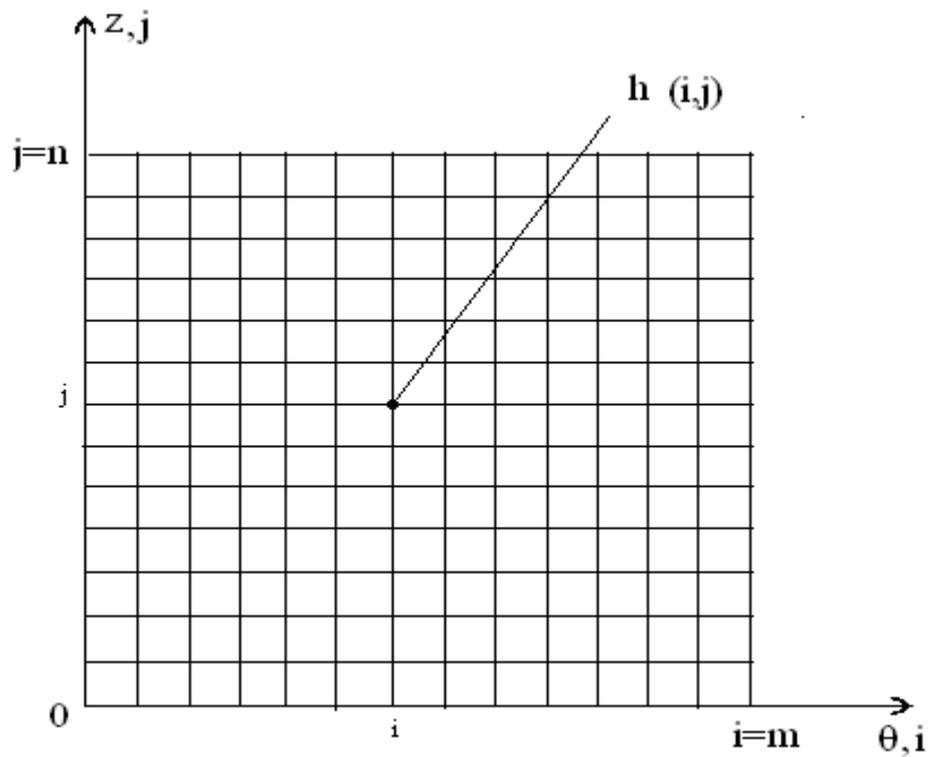
n: le nombre des points selon z

$$m = \frac{L}{\Delta\theta} + 1$$

$$L = 2\pi R$$

$$n = \frac{Fl}{\Delta z} + 1$$

### 5.4.2 L'épaisseur du film



**Fig. 5.7:** Grille de l'épaisseur h

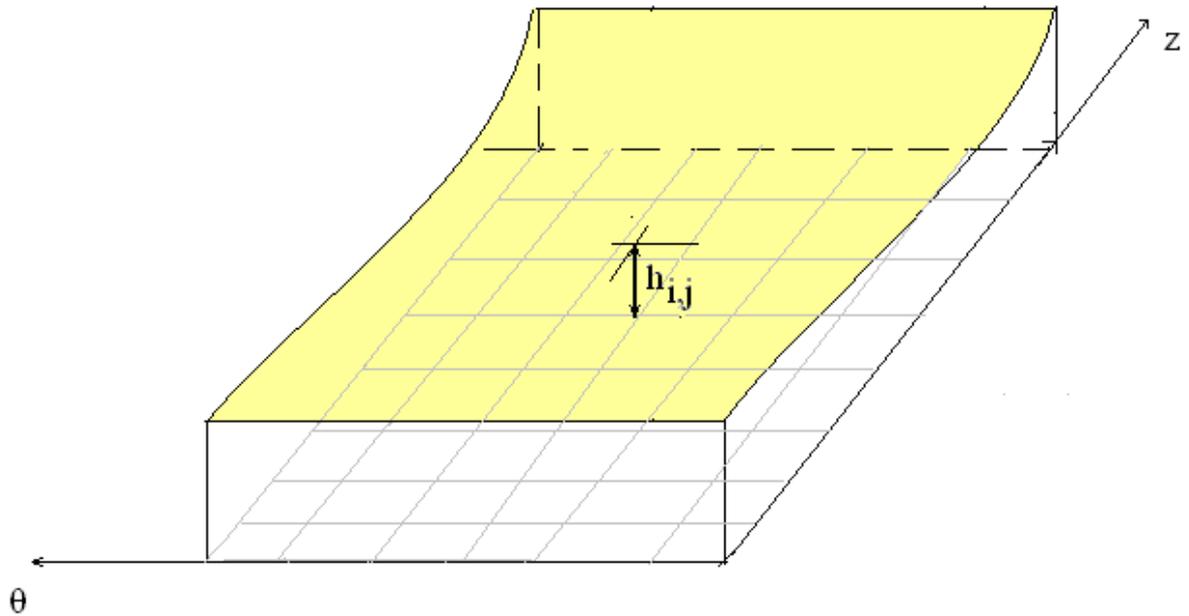


Fig. 5.8: Épaisseur h dans le maillage

### 5.4.3 Discrétisation de l'équation de Reynolds par la méthode des différences finies

Utilisant un schéma 2D de différences finies centrées, les différents termes de l'équation de Reynolds (5.1) ,relatives aux variables  $\theta$  et  $z$ , aux quelles correspondent les indices de discrétisation  $i$  et  $j$  respectifs, peuvent être obtenus par le calcul en chaîne suivant

-en dérivant par rapport à la variable  $\theta$  et  $z$  (indice  $i$   $j$ ) de l'équation (5.2)

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) = 3\bar{h}^2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} + \bar{h}^3 \frac{\partial^2 \bar{p}}{(\partial \theta)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) = 3\bar{h}^2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial z} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \bar{h}^3 \frac{\partial^2 \bar{p}}{(\partial z)^2}$$

-puis en discrétisant les termes du second membre par différences finis

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} = \frac{\bar{p}_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\Delta\theta}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{(\partial \theta)^2} = \frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{(\Delta\theta)^2}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = \frac{\bar{p}_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2\Delta\bar{z}}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{(\partial \bar{z})^2} = \frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{(\Delta\bar{z})^2}$$

Le premier terme de l'équation (5.2) s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) &= 3\bar{h}^2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{p}_{i+1,j} - \bar{p}_{i-1,j}}{2\Delta\theta} \right) + \bar{h}^3 \left( \frac{\bar{p}_{i+1,j} - 2\bar{p}_{i,j} + \bar{p}_{i-1,j}}{(\Delta\theta)^2} \right) \\ &= \bar{p}_{i+1,j} \left( \frac{3\bar{h}^2}{2\Delta\theta} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} + \frac{\bar{h}^3}{(\Delta\theta)^2} \right) + \bar{p}_{i-1,j} \left( \frac{\bar{h}^3}{(\Delta\theta)^2} - \frac{3\bar{h}^2}{2\Delta\theta} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \right) - \frac{2\bar{h}^3}{(\Delta\theta)^2} \bar{p}_{i,j} \end{aligned}$$

De même en changeant la variable  $\theta$  en  $\bar{z}$  le deuxième terme de l'équation s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = \bar{p}_{i,j+1} \left( \frac{3\bar{h}^2}{2\Delta\bar{z}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} + \frac{\bar{h}^3}{(\Delta\bar{z})^2} \right) + \bar{p}_{i,j-1} \left( \frac{\bar{h}^3}{(\Delta\bar{z})^2} - \frac{3\bar{h}^2}{2\Delta\bar{z}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{2\bar{h}^3}{(\Delta\bar{z})^2} \bar{p}_{i,j}$$

D'après l'équation adimensionnelle de l'épaisseur du film d'huile d'un palier mésaligné (équation 2.18) on' a

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = -e_0 \sin \theta - \delta c z \sin(\theta - \beta)$$

et

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \delta c \cos(\theta - \beta)$$

Finalement l'équation (5.2) s'écrit sous la forme discrète de différences finies condensée

$$\begin{aligned} & \bar{P}_{i+1,j} \left( \frac{3\bar{h}^2}{2\Delta\theta} \frac{\partial\bar{h}}{\partial\theta} + \frac{\bar{h}^3}{(\Delta\theta)^2} \right) + \bar{P}_{i-1,j} \left( \frac{\bar{h}^3}{(\Delta\theta)^2} - \frac{3\bar{h}^2}{2\Delta\theta} \frac{\partial\bar{h}}{\partial\theta} \right) - \frac{2\bar{h}^3}{(\Delta\theta)^2} \bar{P}_{i,j} + \\ & \left( \frac{R}{L} \right)^2 \left\{ \bar{P}_{i,j+1} \left( \frac{\bar{h}^3}{(\Delta\bar{z})^2} + \frac{3\bar{h}^2}{2\Delta\bar{z}} \frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{z}} \right) + \bar{P}_{i,j-1} \left( \frac{\bar{h}^3}{(\Delta\bar{z})^2} - \frac{3\bar{h}^2}{2\Delta\bar{z}} \frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{z}} \right) - \frac{2\bar{h}^3}{(\Delta\bar{z})^2} \bar{P}_{i,j} \right\} = \frac{\partial\bar{h}}{\partial\theta} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Avec

$$A_{i,j} = -2\bar{h}^3 \left( \frac{1}{(\Delta\theta)^2} + \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{1}{(\Delta\bar{z})^2} \right)$$

$$B_{i,j} = \frac{3\bar{h}^2}{2\Delta\theta} \frac{\partial\bar{h}}{\partial\theta} + \frac{\bar{h}^3}{(\Delta\theta)^2}$$

$$C_{i,j} = \frac{\bar{h}^3}{(\Delta\theta)^2} - \frac{3\bar{h}^2}{2\Delta\theta} \frac{\partial\bar{h}}{\partial\theta}$$

$$D_{i,j} = \left( \frac{R}{L} \right)^2 \left( \frac{\bar{h}^3}{(\Delta\bar{z})^2} + \frac{3\bar{h}^2}{2\Delta\bar{z}} \frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{z}} \right)$$

$$E_{i,j} = \left( \frac{R}{L} \right)^2 \left( \frac{\bar{h}^3}{(\Delta\bar{z})^2} - \frac{3\bar{h}^2}{2\Delta\bar{z}} \frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{z}} \right)$$

$$F_{i,j} = \frac{\partial\bar{h}}{\partial\theta}$$

On obtient :

$$\bar{P}_{i,j} A_{i,j} + \bar{P}_{i+1,j} B_{i,j} + \bar{P}_{i-1,j} C_{i,j} + \bar{P}_{i,j+1} D_{i,j} + \bar{P}_{i,j-1} E_{i,j} = F_{i,j} \quad (5.4)$$

L'équation (5.4) est l'équation discrétisée de Reynolds sur le maillage ou grille de la (figure 5.6)

La molécule correspondante est donnée par la (figure 5.9)

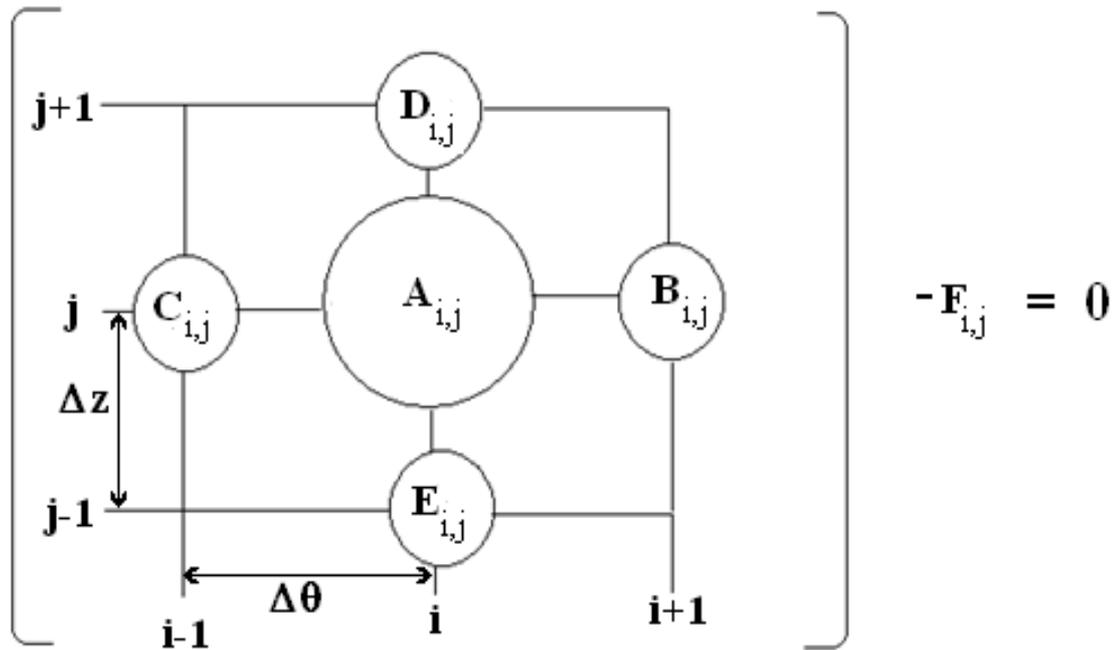


Fig. 5.9: Schéma numérique: Molécule de l'équation de Reynolds en un point (i, j) du maillage

Avec :

$i=2, \dots, m-1$

$j=2, \dots, n-1$

### 5.5 Exécution du programme de palier mésaligné

Le programme est écrit selon l'algorithme de la figure 2.14. Après plusieurs essais le programme a convergé et on a obtenu les résultats suivants:

Pour la première itération du programme et avec une charge de 16.7 N on a obtenu un angle de calage  $\phi = 1.488rad$  ce qui correspond à  $\phi = 85.29$  degré

Le champ de pression et l'épaisseur du film sont représentés dans la figure (5.10) et (5.11)

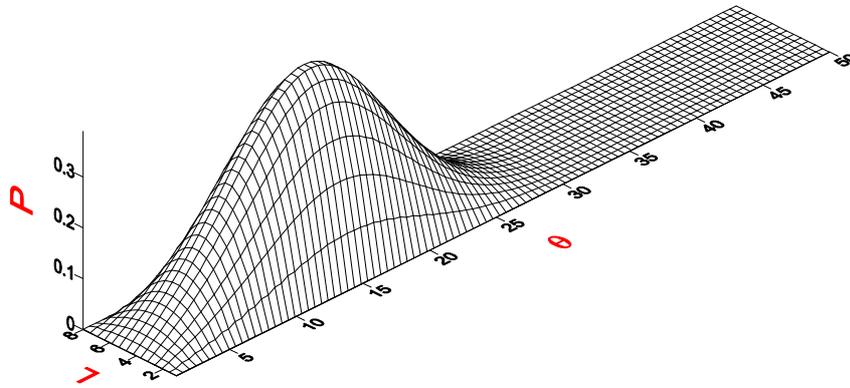


Fig. 5.10: Champ de pression d'un palier mésaligné

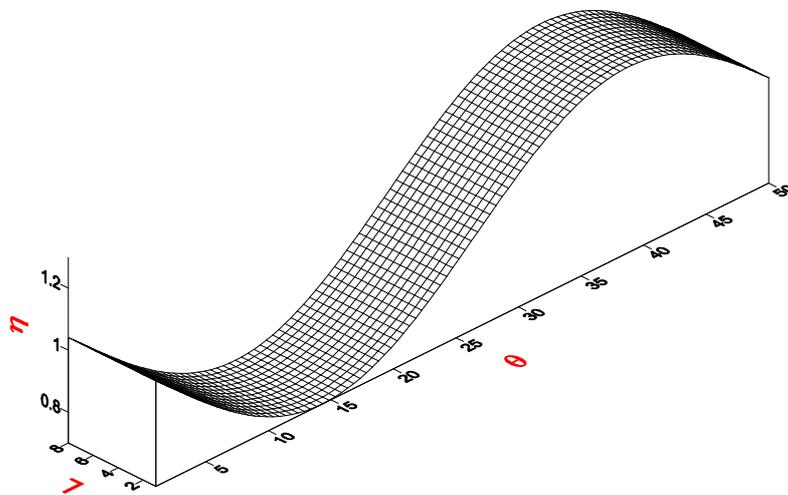


Fig. 5.11: Epaisseur du film d'huile d'un palier mésaligné

## 5.6 Exécution du programme pour un palier aligné

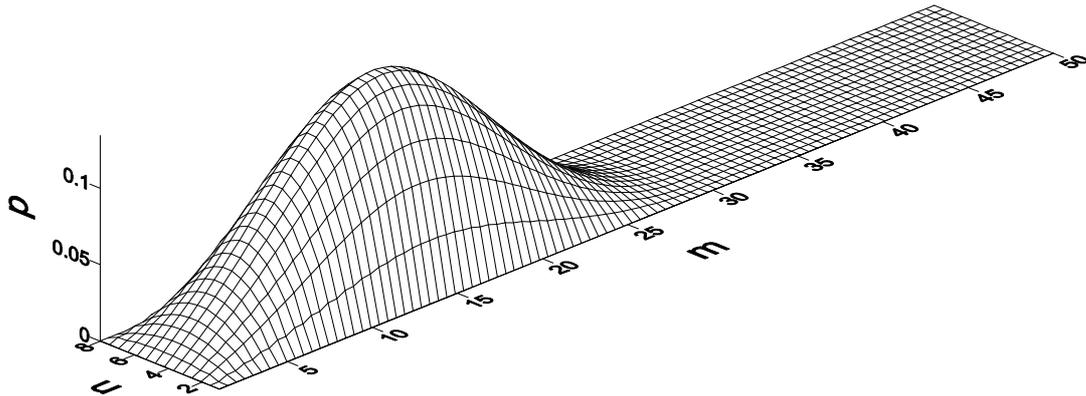


Fig. 5.12: Champ de pression pour un palier aligné

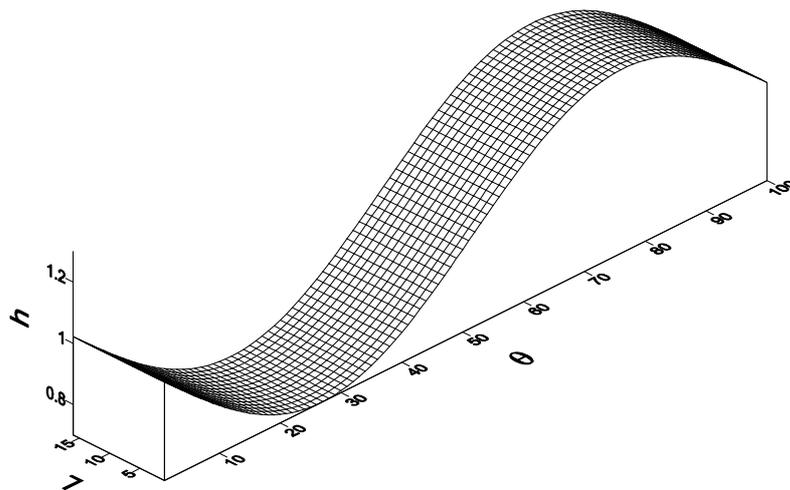


Fig. 5.13: Epaisseur de film pour un palier aligné

## Conclusion

D'après les courbes (5.10 - 5.13) la pression diminue dans le palier aligné par rapport au palier mésaligné

Pour le palier:

Mésaligne  $p_{\max} = 0.3$

Aligné  $p_{\max} = 0.1$

Les figurent (5.10-5.13) montrent que, sous l'effet du mésalignement, le champ de Pression perdait sa symétrie et que la valeur du maximum de pression augmentait de façon importante.

### 5.7 Comparaison des pressions maximale entre les résultats numériques et expérimentaux

	Résultat analytique	Résultat numérique	Résultat expérimental
Pression maximale (bar)	0.2	0.3	0.13

**Tab. 5.1:** Comparaisons des résultats expérimental, numérique et analytique

Les courbes de pression sont conformes aux résultats expérimentaux et analytiques du point de vue tendance. Le tableau (5.1) montre que les résultats obtenues sont assez proches du point de vue analytique et numérique mais expérimentale ils ne sont pas a cause du palier qui est un modèle approche (jeu assez grand)

## CONCLUSION GENERALE:

L'objectif de cette étude est d'analyser un palier hydrodynamique sous chargement statique expérimentalement, analytiquement et numériquement été mené dans ce PFE. L'étude analytique repose sur l'approche de l'équation de Rohde et Li extraite de l'équation de Reynolds.

L'étude expérimentale a été réalisée grâce à un banc d'essai implanté au département de mécanique. On a déterminé les pressions axialement et radialement dans le palier hydrodynamique. L'effet de la vitesse et de la charge a été pris en considération. Les résultats obtenus montrent que la vitesse de rotation de l'arbre a un effet minime sur les pressions. Les résultats montrent également que plus on augmente la charge, plus le champ de pression axial et circonférentiel augmente.

Les pressions obtenues montrent que la pression axiale a une tangence parabolique comme prévu pour les paliers hydrodynamiques

L'étude numérique est réalisée grâce à l'élaboration d'un code de calcul hydrodynamique qui prend en charge le calcul de l'angle de calage et la condition de Reynolds.

- Le code de calcul détermine l'excentricité (calcul adimensionnelle), le champ de pression pour une charge et une vitesse donnée, l'angle de calage  $\varphi$  la coordonnée circonférentielle délimitant la zone active du palier  $\theta_s$  selon la condition de Reynolds.

- Les résultats obtenus montrent un certain écart entre les valeurs théorique selon le modèle de Rhode et les résultats expérimentaux et les résultats numériques vue la complexité du problème et le palier étudié expérimentalement a un jeu assez grand et on a fait notre étude avec un jeu conforme à ce type de palier soit de l'ordre du micron alors qu'expérimentalement le jeu est trop grand sur le banc d'essai étudié.

En ce qui concerne le palier mésaligné on a trouvé les équations analytiques et on a programmé l'algorithme de résolution du palier mésaligné. Le champ de pression obtenu s'étend sur toute la longueur axiale du palier contrairement au palier aligné où la pression est présente par la condition de Reynolds vers la moitié axiale du palier.

## *Conclusion*

---

Il est souhaitable que ce projet puisse encore être étudié pour fournir des solutions plus réelles et constitueront sûrement un pas dans la bonne compréhension du palier hydrodynamique.

## Bibliographie

- [1]Archimède: né à Syracuse vers 287 av. J.-C. et mort à Syracuse en 212 av. J.-C
- [2]**Claude Louis Marie Henri Navier**:né à Dijon le 10 février 1785 et mort à Paris le 21 août 1836 est un ingénieur et scientifique français.
- [3]**Ludwig Boltzmann**:né Ludwig Eduard Boltzmann le 20 février 1844 à Vienne, Autriche - 5 septembre 1906 à Duino) est un physicien autrichien.
- [4] **Leonhard Paul Euler**: né le 15 avril 1707 à Bâle et mort le 18 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg, est un mathématicien et physicien suisse.
- [5]**Reynolds**: né le: 23 Aoute 1842 in Belfast, Ireland mort le 21 Février 1912 in Watchet, Somerset, England
- [6] **Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld**:(5 décembre 1868 – 26 avril1951), physicien théoricien allemand, né à Königsberg
- [7] **Émil Julius Gumbel**: né le 18 juillet 1891 à Munich et mort le 10 septembre 1966 à New York, était un mathématicien allemand considéré comme le père de la théorie des valeurs extrêmes
- [8] **Wilhelm Johann Carl Eduard Stieber**: né en 1818 et mort le 29 janvier 1882
- [9] **Rohde et Li Erwin Rohde** (9 Octobre 1845 - Janvier 11, 1898) a été l'un des grands allemande universitaires classiques du début du 19 ème et 20 ème siècle.
- [10] **J. Frêne \_ Butés et paliers hydrodynamique**. Technique de l'ingénieur, B5320 ,1996.
- [12] **Jean-Louis LIGIER**-lubrification des paliers moteurs, Edition TECHNIP. PP83\_98, 134\_136
- [13] **J. Frêne, Daniel Nicolas, Bernard berthe et Maurice Godet** – lubrification hydrodynamique des paliers et butées. Edition RYROLLRS, PP49\_90, 1990

[14] **M.J. NEALE; Tribology:** handbook London Butterworth's, 1973 d'après ESDU ITEM 65007.

[15] **D.R. GARNERS** the use of designs procedures for plain bearings Leeds conference, September 1980.

[16] **F.A.MARTIN** Minimum allowable oil film thickness INS seedily loaded journal bearings proceedings lubrication and wear convention, 1964, Vol. 178, Pt3N, p. 161.

[17] **F.A. MARTIN, D.R. GARNER** Plain journal bearings under steady loads= design guidance for safe operation First European tribology congress 1973, paper C313 / 73 proceedings IME p.449.

[18] **E.R. BOOSER, F.D. RYAN, C.L LINKINHOKER: Maximum** temperature for hydrodynamique bearings under steady load lubrication Engineering's, July 1970, p. 226.

[19] **O'CONNOR:** standard handbook of lubrication engineering, Mc Graw Hill \_ ASEL 1968, p18.

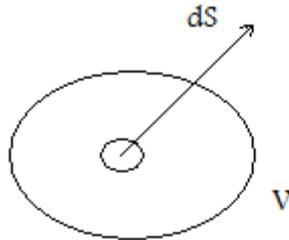
[20] **D.R TAHAR ABBAS MILOUD:** Méthodes numériques tome 1, méthode des différences finies méthodes intégrales et variationnelles OPU 2007.

[22]**G.U.N.T. GERATEBAU G.m.b.H.,** Barsbittel

[23] **Thèse de doctorat de Patrick MASPEYROT** « comportement dynamique des paliers de vilebrequin. Influence des défauts de forme et des mésalignements »février 1989 **université de Poitiers**

## Annexe 1 :

### Equation de continuité (ou de conservation de la masse)



Soit une partie d'un fluide de masse volumique  $\mu$  délimitée par une surface fermée  $S_f$  (de volume  $v$ ).

Soit  $d\vec{s}$  un vecteur élémentaire de cette surface, orienté vers l'extérieur à la surface fermée.

La partie de fluide a une masse  $m = \iiint_V \mu dv$ , le débit massique sortant de la surface  $S_f$  est égal à  $\oiint_S \mu \vec{V} d\vec{s}$

La conservation de la masse s'écrit  $\frac{dm_s}{dt} - \oiint_S \mu \vec{V} d\vec{s} = \iiint_V \frac{\partial \mu}{\partial t} dv$

Où  $\frac{dm_s}{dt}$  représente le débit massique de fluide interne au volume considéré, compté positivement s'il s'agit d'une source et négativement s'il s'agit d'un puits.

Compte tenu du théorème d'Ostrogradsky

$$\oiint_S \mu \vec{V} d\vec{s} = \iiint_V \text{div}(\mu \vec{V}) dv$$

L'équation de conservation de la masse peut être écrite:

$$\frac{dm_s}{dt} = \iiint_V \left[ \text{div}(\mu \vec{V}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} \right] dv$$

Remarque:

Sauf précision contraire, nous appliquerons l'équation de conservation de masse en absence de source ou de puits,

Soit

$$\operatorname{div}(\mu \vec{V}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

Deux cas particuliers sont alors à considérer.

Le cas 1 du fluide incompressible ( $\mu = \text{constante}$ )  $\Rightarrow \operatorname{div} \vec{V}$

Pour un écoulement stationnaire ou in stationnaire. Cet écoulement est dit iso volume.

Le cas 2 d'un écoulement stationnaire

$$\left( \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \right) \Rightarrow \operatorname{div}(\mu \vec{V}) = 0 = \mu \operatorname{div} \vec{V} + \vec{V} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \mu$$

En dehors de la possibilité cas 1, il existe la possibilité d'écoulements

iso volumes tels que  $\vec{V} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \mu = 0$

Où les variations de masse volumique sont orthogonales, en tout point, au vecteur vitesse.

Ce cas correspond à des écoulements stratifiés par salinité ou température (courants marins), par température et humidité (atmosphère).

## Annexe 2 :

(Démonstration de l'équation de Reynolds)

En lubrification, la dimension suivant l'épaisseur du film ( $O, \vec{x}_2$ ) est très faible par rapport aux deux autres, ce qui permet, pour déterminer l'ordre de grandeur des différents termes de l'équation de Navier, d'écrire [33] :

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= \frac{x_1}{L} & \bar{X}_2 &= \frac{x_2}{H} & \bar{X}_3 &= \frac{x_3}{L} & \bar{t} &= \frac{tv_1}{L} \\ \bar{U}_1 &= \frac{u_1}{v} & \bar{U}_2 &= \frac{u_2 L}{vH} & \bar{U}_3 &= \frac{u_3}{v} & \bar{\mu} &= \frac{\mu}{\mu_0} \\ & & \bar{\lambda} &= \frac{\lambda}{\lambda_0} \end{aligned}$$

$h$  : épaisseur du film,

$V = \omega R$  : vitesse de rotation de l'arbre,

Dans ces expressions  $L$  et  $V = \omega R$  sont respectivement la dimension et la vitesse caractéristiques selon les axes ( $O, \vec{x}_1$ ) et ( $O, \vec{x}_3$ ),  $H$  et  $\frac{VH}{L}$  celles suivant ( $O, \vec{x}_2$ )  $\frac{L}{V}$ ,  $\mu_0$  et,  $\lambda_0$  définissant l'ordre de grandeur du temps et des coefficients de viscosité.

Supposons que ces deux coefficients sont de même ordre de grandeur.

Ce changement de variable conduit à poser  $\bar{p} = p \frac{H^2}{\mu_0 V L}$ .

Remarquons que la vitesse caractéristique  $V$  peut-être définie de plusieurs façons ; en hydrodynamique,  $V$  sera la vitesse d'une des parois du contact. Si les parois du contact sont immobiles, le contact est hydrostatique, on définit alors

La pression adimensionnelle par  $\bar{p} = p/p_s$  où  $p_s$  est, par exemple, la pression d'alimentation ;

La vitesse caractéristique peut alors s'écrire  $V = \frac{\rho_s H^2}{\mu_0 L}$

Ce changement de variable met en évidence les 3 variables sans dimension suivants :

$R = \frac{\rho_0 V H}{\mu_0}$  le nombre de Reynolds relatif à l'épaisseur de l'écoulement,

$\varepsilon = \frac{H}{L}$  Le paramètre d'échelle, qui en lubrification est de l'ordre de  $10^{-3}$ ,

$\frac{\lambda}{\mu_0}$  Le rapport des coefficients de viscosité, généralement de l'ordre de 1.

Compte tenu de ces changements de variable l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} = \varepsilon \left[ -R \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{t}} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_j} \right) + \varepsilon \left( \bar{\mu} + \bar{\lambda} \frac{\lambda_0}{\mu_0} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} \right) + \varepsilon \bar{\mu} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_3^2} \right) \right] + \quad (2)$$

$$\bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_2^2} + \varepsilon^2 \left[ \frac{\lambda_0}{\mu_0} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{x}_1} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} + 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_1} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_3} \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_3} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_1} \right) \right] + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_1} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} = \varepsilon^2 \left\{ \left[ -R \left( \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{t}} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_j} \right) + \varepsilon \bar{\mu} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_3^2} \right) \right] + \left( \bar{\mu} + \bar{\lambda} \frac{\lambda_0}{\mu_0} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} \right) + \right. \\ \left. \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2^2} \frac{\lambda_0}{\mu_0} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} + 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_1} \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_1} \right) + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_3} \left( \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_3} \right) \right\} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} = \varepsilon \left[ -R \left( \frac{\partial u_3}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_j} \right) + \varepsilon \left( \bar{\mu} + \bar{\lambda} \frac{\lambda_0}{\mu_0} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} \right) + \varepsilon \bar{\mu} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_3^2} \right) \right] +$$

$$\bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_2^2} + \varepsilon^2 \left[ \frac{\lambda_0}{\mu_0} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{x}_3} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} + 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_3} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_1} \left( \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_3} \right) \right] + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \left( \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_3} \right) \quad (4)$$

En négligeant les termes multipliés soit par  $\varepsilon^2$ , soit par  $\varepsilon^2 R$  il vient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} = -\varepsilon R \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j} \right] + \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_2^2} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_2} = 0 \end{cases} \quad (i=1 \text{ et } 3) \quad (5)$$

Les termes en  $\varepsilon R$ , ou les termes d'inertie, de l'équation ci-dessus seront négligeables devant les termes de viscosité quand  $\varepsilon R \ll 1$ ; ce qui est souvent vérifié dans les écoulements rencontrés en lubrification.

Et en revenant aux variables dimensionnées en coordonnées cartésiennes (o x y z) :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Pour obtenir le champ de vitesse, il faut intégrer. Si  $\mu$  est indépendant de y, il vient :

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} y + A \quad \mu \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} y + C$$

Soit :

$$U = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + \frac{A}{\mu} y + B \qquad w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + \frac{C}{\mu} y + D$$

A, B, C, D constants d'intégration,

Les conditions aux limites sur la vitesse permettent de déterminer A, B, C, D. elles s'écrivent, (figure III.1) :

$$\begin{cases} y = 0 & u = U_1, \quad v = 0 \text{ et } w = W_1 \\ y = h & u = U_2, \quad v = V_2 \text{ et } w = W_2 \end{cases}$$

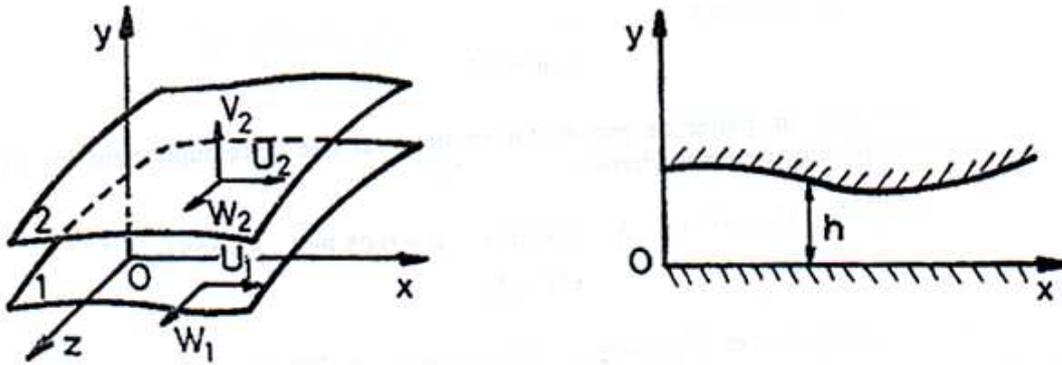


Figure 1 Système d'axes en coordonnées cartésiennes

On a donc :  $u_1 = B$

$$u_2 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^2 + \frac{A}{\mu} h + B$$

Soit :

$$\frac{A}{\mu} = \frac{u_2 - u_1}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h$$

Il vient donc alors :

$$U = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) + \frac{u_2 - u_1}{h} y + u_1 \tag{6}$$

De même pour w :

$$U = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-h) + \frac{u_2 - u_1}{h} y + w_1 \quad (7)$$

En reportant ces vitesses dans l'équation de continuité et en intégrant à travers l'épaisseur du film l'inconnue v disparaît. En effet, l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (8)$$

En intégrant, on obtient:

$$\int_0^h \frac{\partial \rho}{\partial t} dy + \int_0^h \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dy + \int_0^h \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dy + \int_0^h \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) dy = 0 \quad (9)$$

Il vient ainsi:

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dy = \rho v_2 \quad \text{Car } \rho v_1 = 0 \text{ par hypothèses}$$

Par ailleurs, si  $\rho$  n'est pas fonction de y, on peut écrire :

$$\int_0^h \frac{\partial \rho}{\partial t} dy = \frac{\partial \rho}{\partial t} \int_0^h dy = h \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Pour intégrer les deux autres termes, il faut intervertir les signes dérivés et sommes en remarquant que :

$$\int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial F(x,z,t)}{\partial x} dy = \int_0^h F(x,y,z,t) dy - F(x,h,z,t) \frac{\partial h}{\partial x}$$

Soit :

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho v dy - \rho U_2 \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) dy = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h \rho w dy - \rho w_2 \frac{\partial h}{\partial z}$$

Ces deux intégrales se calculer en utilisant les expressions donnant les vitesses dans le film.

On a ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \left[ \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) + \rho \frac{u_2 - u_1}{h} y + \rho U_1 \right] dy = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{u_2 - u_1}{h} y + \rho U_1 h \right] \quad (10)$$

Soit encore :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho u dy = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{u_2 + u_1}{2} h \right) \quad (11)$$

De même :

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^h \rho w dy = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \frac{w_2 + w_1}{2} h \right) \quad (12)$$

Et en regroupant tous les termes il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{u_2 + u_1}{2} h \right) - \rho U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \frac{w_2 + w_1}{2} h \right) \\ &- \rho W_2 \frac{\partial h}{\partial z} + \rho V_2 + h \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (13)$$

Soit encore : en intégrant et en passant par les conditions aux limites on obtient [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= 6\rho(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 6\rho(W_1 - W_2) \frac{\partial h}{\partial z} \\ &+ 6h \frac{\partial}{\partial x} [\rho(U_2 + U_1)] + 6h \frac{\partial}{\partial z} [\rho(W_2 + W_1)] + 12\rho V_2 + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (14)$$

## Annexe 3 :

### Répartition de la pression pour une charge constante et de vitesse variable 1-pour une charge de 1 N

a/Pression axiale

h<sub>0</sub> = 700 mm (Référence de mesure )

Point de mesure	$\omega = 708 \text{ tr/min}$	$\omega = 1020 \text{ tr/min}$	$\omega = 1525 \text{ tr/min}$	$\omega = 2000 \text{ tr/min}$
1	745	765	775	780
2	795	815	825	840
3	850	870	885	860
4	995	945	1005	990
5	790	835	945	1035

b/Pression circonférentielle

Point de mesure	$\omega = 708 \text{ tr/min}$	$\omega = 1020 \text{ tr/min}$	$\omega = 1525 \text{ tr/min}$	$\omega = 2000 \text{ tr/min}$
3	850	870	885	860
6	950	945	915	850
7	990	930	860	790
8	670	710	690	680
9	340	415	465	500
10	410	375	380	385
11	520	460	425	395
12	580	540	500	460
13	630	595	570	550
14	665	650	645	660
15	710	715	720	750
16	765	785	805	820

### 2-pour une charge de 2 N

a/Pression axiale

Point de mesure	T=30.6c	T=29c	T=30.1c
	$\omega = 815 \text{ tr/min}$	$\omega = 1215 \text{ tr/min}$	$\omega = 2014 \text{ tr/min}$
1	725	750	785
2	790	820	865
3	845	885	910
4	880	955	1000
5	720	825	910

b/Pression circonférentielle

Point de mesure	$\omega = 815 \text{ tr/min}$	$\omega = 1215 \text{ tr/min}$	$\omega = 2014 \text{ tr/min}$
3	845	885	910
6	1005	995	920

7	1170	1000	860
8	620	995	695
9	200	320	440
10	415	350	330
11	545	460	380
12	595	545	460
13	630	600	570
14	660	650	680
15	700	710	770
16	755	785	850

### 3-pour une charge de 3 N

a/Pression axiale

Point de mesure	T=28.3c $\omega = 895\text{tr/min}$	T=28.5c $\omega = 1300\text{tr/min}$	T=29.3c $\omega = 1805\text{tr/min}$
1	735	760	770
2	800	840	850
3	850	910	945
4	890	980	1045
5	770	840	875

b/Pression circonférentielle

Point de mesure	$\omega = 895\text{tr/min}$	$\omega = 1300\text{tr/min}$	$\omega = 1805\text{tr/min}$
3	850	910	945
6	1010	1023	990
7	1170	1020	940
8	810	685	680
9	190	290	340
10	335	310	295
11	435	440	400
12	560	520	495
13	610	590	575
14	650	645	645
15	700	710	720
16	760	795	830

### 4-pour une charge de 4 N

a/Pression axiale

Point de mesure	$\omega = 750\text{tr/min}$	$\omega = 1104\text{tr/min}$	$\omega = 1510\text{tr/min}$	$\omega = 2133\text{tr/min}$
1	720	740	760	785
2	800	830	850	895
3	860	900	935	950
4	890	950	1020	1035

5	760	800	850	870
---	-----	-----	-----	-----

b/Pression circonférentielle

Point de mesure	$\omega=750\text{tr/min}$	$\omega=1104\text{tr/min}$	$\omega=1510\text{tr/min}$	$\omega=2133\text{tr/min}$
3	860	900	935	950
6	1080	1065	1055	980
7	1400	1155	1030	920
8	870	690	665	690
9	45	165	245	345
10	390	300	280	250
11	530	455	415	350
12	590	540	510	455
13	630	595	580	570
14	660	645	640	680
15	700	700	715	780
16	750	780	810	870

### 5-pour une charge de 5 N

a/Pression axiale

Point de mesure	$\omega=775\text{ tr/min}$	$\omega=1220\text{ tr/min}$	$\omega=2020\text{ tr/min}$	$\omega=2426\text{ tr/min}$
1	720	740	770	795
2	800	840	885	910
3	865	920	990	960
4	885	975	1065	1045
5	755	810	855	880

b/Pression circonférentielle

Point de mesure	$\omega=775\text{ tr/min}$	$\omega=1220\text{ tr/min}$	$\omega=2020\text{ tr/min}$	$\omega=2426\text{ tr/min}$
3	865	920	990	960
6	1120	1110	1050	940
7	1545	1200	995	930
8	365	650	660	700
9	40	105	245	330
10	375	280	230	205
11	520	440	370	305
12	580	530	475	440
13	620	590	560	565
14	650	640	635	680
15	690	700	730	785
16	750	785	865	880

### 6-pour une charge de 6 N

a/Pression axiale

Point de mesure	$\omega=855$ tr/min	$\omega=1245$ tr/min	$\omega=1760$ tr/min	$\omega=2300$ tr/min
1	710	725	745	780
2	805	835	870	920
3	870	920	925	980
4	900	970	1050	1050
5	760	800	850	840

b/Pression circonférentielle

Point de mesure	$\omega=855$ tr/min	$\omega=1245$ tr/min	$\omega=1760$	$\omega=2300$ tr/min
3	870	920	925	980
6	1140	1140	1130	1045
7	1550	1310	1110	980
8	310	605	620	695
9	10	25	120	235
10	370	270	230	160
11	510	440	395	305
12	570	520	490	450
13	610	580	565	570
14	640	630	630	680
15	680	690	705	780
16	750	775	810	885

**7-pour une charge de 7N**

a/Pression axiale

Point de mesure	$\omega=1566$ tr/min	$\omega=1940$ tr/min	$\omega=2136$ tr/min	$\omega=2415$ tr/min
1	710	730	740	765
2	850	870	890	925
3	950	990	990	985
4	1015	1055	1070	1030
5	820	835	830	800

b/Pression circonférentielle

Point de mesure	$\omega=1566$ tr/min	$\omega=1940$ tr/min	$\omega=2136$ tr/min	$\omega=2415$ tr/min
3	950	990	990	985
6	1170	1150	1125	1040
7	1250	1140	1100	1000
8	565	590	610	700
9	10	55	80	180
10	225	190	175	95
11	400	375	360	270
12	490	475	465	450
13	555	550	540	560
14	610	610	610	680
15	685	690	700	780

16	785	800	845	835
----	-----	-----	-----	-----

## 8-pour une charge de 8N

a/Pression axiale

Point de mesure	$\omega=1500$ tr/min	$\omega=1800$ tr/min	$\omega=2145$ tr/min	$\omega=2415$ tr/min
1	775	785	800	820
2	920	935	965	990
3	1025	1050	1100	1075
4	1080	1125	1150	1130
5	875	900	900	875

b/Pression circonférentielle

Point de mesure	$\omega=1500$ tr/min	$\omega=1800$ tr/min	$\omega=2145$ tr/min	$\omega=2415$ tr/min
3	1025	1050	1100	1075
6	1270	1270	1230	1155
7	1385	1280	1205	1120
8	630	630	660	740
9	10	60	90	170
10	265	245	215	155
11	455	435	410	350
12	550	535	520	495
13	615	605	600	620
14	670	670	670	725
15	740	750	760	835
16	845	865	905	955

## 9-pour une charge de 9N

a/Pression axiale

Point de mesure	$\omega=2200$ tr/min	$\omega=2362$ tr/min	$\omega=2553$ tr/min
1	785	800	820
2	965	990	1020
3	1095	1100	1080
4	1155	1150	1120
5	895	890	860

b/Pression circonférentielle

Point de mesure	$\omega=2200$ tr/min	$\omega=2362$ tr/min	$\omega=2553$ tr/min
3	1095	1100	1080
6	1280	1240	1160
7	1285	1220	1135
8	630	670	770
9	15	50	135
10	215	190	95
11	420	400	310

12	525	710	500
13	600	590	700
14	665	680	745
15	750	790	855
16	900	990	990

## 10-pour une charge de 10N

a/Pression axiale

Point de mesure	$\omega=2000$ tr/min	$\omega=2450$ tr/min	$\omega=2700$ tr/min
1	890	900	945
2	1150	1120	1145
3	1190	1195	1198
4	1238	1290	1222
5	902	930	950

b/Pression circonférentielle

Point de mesure	$\omega=2000$ tr/min	$\omega=2450$ tr/min	$\omega=270$ tr/min 0
3	1190	1195	1198
6	1480	1340	1280
7	1590	1352	1260
8	595	815	900
9	16	102	188
10	382	295	140
11	570	505	410
12	650	602	614
13	712	685	738
14	778	800	870
15	884	918	988
16	950	1050	1090