

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

Université Hassiba Ben Bouali de Chlef



(Faculté de Sciences et Sciences de l'Ingénieur)
(Département de Génie Civil)

Mémoire de Magister

Spécialité : **Génie Civil**

Option : **Construction**

Présentée par

Mr: **Mohamed El-Hebib GUELLIL**

Thème :

**Modélisation du comportement des plaques reposant
sur sol élastique par la méthode des éléments finis**

Soutenu le 23/06/2010 devant les membres de jury:

Dr.EZZIANE Karim	Maître de Conférences A, Université de Chlef	Président
Dr. HARICHANE Zamila	Maître de Conférences A, Université de Chlef	Examinatrice
Dr. AMAR BOUZID Djillali	Maître de Conférences A, Université de Médéa	Examineur
Dr. TAHAR ABBES Miloud	Maître de Conférences A, Université de Chlef	Encadreur
Mr. HARICHENE Khelifa	Maitre Assistant A, Université de Chlef	Co-encadreur

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes encadreurs:

Le Dr.Miloud TAHAR ABBES, Maître de Conférence A à l'université Hassiba Benbouali de Chlef du département Mécanique qui a su m'aiguiller, me transmettre des compétences, qui a su également trouver le temps pour relire tous mes travaux. Qu'il trouve ici mes sincères remerciements.

Mr.Khelifa HARICHANE, Maitre Assistant A à l'Université Hassiba Benbouali de Chlef, pour m'avoir guidé. Je le remercie également pour sa gentillesse, sa disponibilité, ses conseils et sa confiance.

J'aimerais également remercier les membres du Jury qui ont accepté de lire et commenter cette thèse :

Monsieur Dr.EZZIANE Karim Maître de Conférence A à l'Université Hassiba Benbouali de Chlef m'a fait le plus grand honneur de présider le jury, je lui adresse mes sincères remerciements.

J'adresse mes vifs remerciements à monsieur Dr.AMAR BOUZID Djillali, Maître de Conférence A à l'Université Yahya FARRES de Médéa, m'a fait le plus grand plaisir de participer au jury et d'examiner ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Madame Dr.HARICHANE Zamila, Maître de Conférence A à l'université Hassiba Benbouali de Chlef d'avoir accepté de rapporter ce travail.

Je souhaite en outre profiter de cette occasion pour remercier le Dr. GHRICI Mohamed pour m'avoir orienté dans l'accomplissement de ce travail.

Je ne pourrais oublier de dédier ce modeste travail à la mémoire de ma mère, et que ce travail soit pour elle une prière de Dieu le tout-puissant de lui accorder sa miséricorde.

A mon père et ma belle mère, mes frères Maamar et Amine, et ma sœur, qui ont restés à mes côtés pour me soutenir pendant les trois années de thèse.

Je tiens aussi vivement à remercier mes collègues et notamment *Toufic, Yacine, Brahim*, qui m'ont encouragé et soutenu au cours de la thèse. Et à tous mes amis de la promotion de post-graduation (2006 - 2010).

المُلخَص

هذه الأطروحة تصف سلوك كل من الهياكل و التربة الموصوفين بنموذج صفائح تستند على تربة لدنة، والصفائح هما هياكل أساسية في الهندسة المدنية ولا سيما في مجال المنشآت الفنية.

تفاعل الاحتكاك الصفائح مع التربة تم وصفها من طرف فلازوف في حين أن سلوك الصفائح تم وصفها بنظرية كيرشوف و ماندلا.

استعمال نموذج العناصر المحدودة من أجل الحل والتمثيل الرقمي لهذا الاحتكاك "التفاعل".

استخدام عنصر رباعي ذو ثماني نقاط في نموذج العناصر المحدودة لوصف التواء "انحناء" الصفائح ولمدانة التربة في نموذج فينكلر و فلازوف.

و هناك قانون لحساب انحناء الصفائح يأخذ بعين الاعتبار نموذج الصفيحة و التربة معا، يقوم البرنامج بحساب الانحراف ، المعزوم و قوى القص.

النتائج المتحصل عليها مطابقة لنتائج المراجع ، و متمشية مع توقعات سلوك نماذج كل من فينكلر و فلازوف.

المفتاح. التواء الصفائح، التربة، تفاعل الاحتكاك الصفائح مع التربة، نموذج فينكلر، نموذج فلازوف، التمثيل بالعناصر المحدودة.

Résumé

Cette thèse décrit le comportement de l'ensemble sol structure schématisé par le modèle de plaque reposant sur un sol élastique. Les plaques sont des éléments de base en Génie Civil notamment dans le domaine du bâtiment et des constructions d'art.

L'interaction plaque sol élastique est développée selon le modèle de Vlasov tandis que le comportement de la plaque est décrit par la théorie de Kirchhoff et Mindlin.

Un modèle d'élément finis est mis en pratique pour la résolution et la modélisation numérique de l'interaction plaque sol selon les différentes formulations de la bibliographie.

Il est utilisé l'élément fini quadrilatéral à huit nœuds pour la modélisation de la flexion des plaques élastiques le sol étant développé selon les modèles de Winkler et Vlasov.

Un code de calcul de flexion des plaque prend également en charge le modèle plaque sol dans sa globalité. Il est déterminé les déflexions de l'ensemble plaque-sol ainsi que les moments de flexion.

Les résultats obtenus sont validés par ceux de la bibliographie et sont conformes aux prévisions de comportement des modèles de Winkler et Vlasov.

Mots clés: Flexion de Plaque, Sol, interaction plaque-sol, modèle Winkler, modèle Vlasov, modélisation par éléments finis.

Abstract

This thesis describes the behavior of the unit soil structure schematized by the model of plate resting on elastic soil. The plates are basic elements in Civil Engineering in particular in the field of the building and great constructions.

The interaction plates elastic soil in developed according to the model of Vlasov, while the behavior of the plate is described by the theory of Kirchhoff and Mindlin.

A model of finite element is put into practice for the resolution and the numerical modeling of the interaction plates ground according to the various formulations of the bibliography.

It is used the quadrilateral finite element with eight nodes for the modeling of the inflection of the elastic plates, the soil being developed according to the models of Winkler and Vlasov.

A computer code of inflection of the plate takes charges the model plate's soil in its globality. It is given the deflections of the plate-soil unit as well as the bending moments.

The results obtained are validated by those of the bibliography and are in conformity with the forecasts of behavior of the models of Winkler and Vlasov.

Key words: Inflection of Plate, Soil, interaction plate-soil, model Winkler, models Vlassov, modeling by finite elements.

Tableau des matières

Remerciement	i
الملخص	iii
Résumé	iv
Abstract	v
Tableau des matières	vi
Tableau des figures	xi
Liste des tableaux	xvii

Chapitre 1 Introduction générale	1
---	----------

Chapitre 2 Etude bibliographique du Plaque et de Sol

2.1 Introduction	3
2.2 Modélisation des plaques	5
2.2.1 Mthodes de résolution	8
2.2.1.1 Méthodes analytiques	9
2.2.1.2 Méthodes expérimentales	10
2.2.1.3 Méthodes numériques	11
a) Méthode des différences finies	12
b) Méthodes d'approximation intégrales et variationnelles	13
c) Méthode des éléments finis	14
d) Méthode des éléments de frontière	17
2.3 Modélisation du sol	19
2.3.1 Modèle de Winkler (le model élastique discret)	21

2.3.2	Modèle élastique continu	22
2.3.3	Versions améliorées du modèle de Winkler	24
2.3.3.1	Base de Filonenko-borodich	25
2.3.3.2	Base de Hetenyi	25
2.3.3.3	Base de Pasternak	26
2.3.3.4	Base généralisée	27
2.3.3.5	Base de Kerr	27
2.3.3.6	Modèle d'analogie de colonne de poutre	28
2.3.3.7	Nouveaux modèles continus de winkler	28
2.3.4	Versions améliorées de modèle continu	29
2.3.4.1	Modèle de Vlasov	29
2.3.4.2	Base de Reissner	31

Chapitre 3 Equations de Base du Plaque et de Sol

3.1	Formulation du comportement de la plaque	32
3.1.1	Théorie de Reissner	36
3.1.2	Théorie de Mindlin	37
3.2	Formulation du comportement du sol	40
3.2.1	Modèle de Winkler	40
3.2.2	Modèle des Deux-Paramètre	46

Chapitre 4 Méthode Numérique de Résolution

4.1	Introduction	51
4.2	Formulation de la plaque par la méthode des éléments finis	52
4.2.1	Analyse du comportement d'une plaque	55
4.2.2	Hypothèses fondamentales	56
4.2.3	Relation contrainte – déformation	58

4.2.4	Expression des fonctions de forme.	59
4.2.4.1	Matrice de déformation [B].	64
4.2.4.2	Matrice d'élasticité [D].	65
4.2.5	Matrice de rigidité élémentaire.	66
4.3	Modélisation du sol de Fondation.	66
4.3.1	Modèle du Winkler.	66
4.3.2	Modèle du Vlasov.	67
4.3.3	Formulation finale du système plaque sur fondation élastique.	67
4.4	Intégration numérique.	68
4.5	Variation linéaire du module d'élasticité du sol.	69
4.6	Condition aux limites.	70
4.7	Calcul des contraintes.	70

Chapitre 5 Organisation du Programme de Résolution de Plaque et de Sol

5.1	Programme Principal.	73
5.2	Le sous programme données.	73
5.2.1	Algorithme du programme principal d'appel.	73
5.2.2	Définition des variables nodales.	74
5.2.3	Modélisation, données principales.	74
5.2.4	Organigramme du sous programme données.	75
5.2.5	Variable de connectivité.	75
5.2.6	Variable des coordonnées coord (ipoint, idim).	77

5.2.7	Variables des conditions aux limites de déplacement.	77
5.2.7.1	Variable Nofix(ivfix).	77
5.2.8	Coordonnées des points de Gauss.	80
5.3	Sous Programme Matrice de Rigidité.	80
5.3.1	Algorithme.	80
5.3.2	Coordonnées cartésiennes nodales.	82
5.3.3	Sous programme fonctions de formes et leurs dérivées.	86
5.3.4	Sous programme matrice Jacobienne.	87
5.3.4.1	Coordonnées des points de Gauss.	90
5.3.4.2	Calcul du Jacobien.	93
5.3.4.3	Calcul de l'inverse du Jacobien et des dérivées cartésiennes.	94
5.3.5	Sous programme matrice des déformations B.	96
5.3.6	Sous programme produit DB.	98
5.3.7	Calcul de Matrices de Rigidité $[K^e]$ et γ .	99
Chapitre 6 Applications et Discussions		99
6.1	Introduction.	
6.2	Comportement d'une plaque sous une charge statique.	
6.2.1	Comportement d'une plaque carrée.	107
6.2.2	Comportement d'une plaque circulaire.	108
6.3	Comportement d'une plaque reposant sur sol élastique.	108
6.3.1	Modèle de <i>Winkler</i> .	112

6.3.2	Modèle de <i>Vlasov</i> .	118
6.4	Effet de l'amélioration des sols sur la déflexion d'une plaque.	118
6.4.1	Sols utilisés.	121
6.4.2	Détermination du module de déformation et du coefficient de poisson des sols améliorés	129
6.4.3	Déflexion d'une plaque reposée sur un sol amélioré.	131
6.4.4	Effet de l'épaisseur de la couche améliorée sur la déflexion d'une plaque.	135
6-4	Conclusion.	136
	Chapitre 7 Conclusions et Perspectives	140
	Conclusions.	
	Perspectives de recherches.	142
	Références	143
		144

Tableau des figures

Fig.2.1- Les contraintes dans divers types d'éléments de plaque.	5
Fig.2.2- La déflexion de la surface neutre de la plaque Kirchhoff ($t = h$).	6
Fig 2.3- Le plan moyen d'une plaque en déformation.	8
Fig. 2.4- Maillage de domaine régulier.	10
Fig. 2.5- Maillage d'une digue de retenu d'eau.	11
Fig. 2.6- Discrétisation par éléments triangulaires d'une digue.	12
Fig. 2.7- Eléments quadrilatérale : (a) à 4noeuds ; (b) à 8noeuds pour l'analyse de la plaque (Mindlin).	13
Fig. 2.8- Déplacement de la ligne centrale de la plaque simplement appuyée :(a) due une charge uniforme ; (b) due une charge concentré.	14
Fig. 2.9- Plaque chargé uniformément représenté par la méthode des éléments de frontière.	15
Fig. 2.10- Déflexion d'une plaque circulaire épaisse encastré chargée par une force concentrée au milieu.	16
Fig. 2.11- Déflexion d'une plaque rectangulaire simplement appuyée sous une charge uniforme.	16
Fig. 2.12- Déflexion de la plaque circulaire épaisse appuyée librement sous une force concentrée.	17
Fig. 2.13- Fondation sur sol élastique.	19
Fig. 2.14- Le modèle du Winkler.	20
Fig. 2.15- Modèle du milieu continu élastique.	21
Fig. 2.16- Comparaison la réponse de la flèche entre Winkler et modèle demi-espace pour différents type de chargement [11].	22

Fig. 2.17- Fondation du Filonenko-Borodich.	23
Fig. 2.18- Fondation du Hetenyi.	24
Fig. 2.19- Fondation de Pasternak.	24
Fig. 2.20- Fondation de Kerr.	25
Fig. 2.21- Modèle analogue du Poutre-Poteau repose sur fondation élastique.	26
Fig.2.22- Modèle du Winkler inter maille.	27
Fig.2.23- Modele du Vlasov.	28
Fig. 3.1- Contraintes élémentaires dans un élément différentiel de plaque.	33
Fig. 3.2- Plaque déformée selon Reissner.	37
Fig. 3.3- Déformation d'une plaque chargée.	41
Fig. 3.4- Réaction adimensionnel du model de Winkler.	43
Fig. 3.5- Variation de module adimensionnel K_{nw} :(a) Centre ;(b) Coté ;(c) 1/4 de la plaque.	44
Fig. 3.6- Comparaisons des résultats dans le cas d'une charge uniformément répartie : (a) Déplacement ; (b) Moment de flexion.	44
Fig. 3.7- Variation du coefficient de Winkler par rapport position.	45
Fig. 4.1- Représentation de la charge nodale.	55
Fig. 4.2- Variables nodales du problème de flexion d'une plaque.	57
Fig. 4.3- Elément quadrilatérale à 8 nœuds :(a) Schéma de la fonction de forme N1,(b) Position des points de Gauss.	61
Fig. 5.1- Programme principal de résolution de plaques.	73
Fig. 5.2- Organigramme principal avec appel du sous programme 'données'.	73
Fig. 5.3- Variable nodale en un point de la plaque $\left[\omega \quad \theta_x \quad \theta_y \right]_{point}^T$	74
Fig. 5.4- Modélisation, transformation sur l'élément de référence et données de génération du maillage	74
Fig. 5.5- Organigramme du sous programme données.	75
Fig. 5.6- Sens de numérotation adoptée	76

Fig. 5.7- Points de connectivité de l'élément 6	76
Fig. 5.8- Algorithme de la variable de connectivité.	76
Fig.5.9- Algorithme de lecture des coordonnées x_i et y_i .	77
Fig.5.10- Conditions aux limites : variable Nofix(ivfix).	78
Fig. 5.11- Algorithme de lecture des nœuds restreints.	79
Fig.5.12- Algorithme d'identification des équations dont la variable correspondante est prescrite	79
Fig.5.13- Position des points de gauss pour une intégration 2x2.	80
Fig. 5.14- Algorithme de calcul des coordonnées des points de Gauss.	80
Fig. 4.15- Organigramme du programme principal avec appel du sous programme 'Rigidite'	81
Fig. 5.16- Organigramme du sous programme 'rigidite'.	82
Fig. 5.17- Transformé d'un point M sur l'élément de référence .	83
Fig. 5.18- Organigramme des coordonnées nodales obtenues par la variable cordel(idim,inod)	83
Fig. 5.19- Variable cordel(idim, inod) du point 22.	84
Fig. 5.20- Algorithme de calcul des coordonnées.	84
Fig. 5.21- Le fonctionnement de l'élément 1 et le nœud 6.	85
Fig. 5.22- Principales étapes d'appel du sous programme fonctions de forme et leurs dérivées FFD.	86
Fig. 5.23- Élément quadrilatérale à 8 nœuds :(a) Schéma de fonction de forme N1, (b) position des points de Gauss.	87
Fig. 5.24- Algorithme du sous programme Jacobien.	88
Fig. 5.25- Schéma du points de gauss dans l'élément réel et oposite en élément de référence.	89
Fig. 5.26- Transformé des points de Gauss sur l'élément de référence pour le calcul des coordonnées des points de Gauss par la variable GPcord(idim, Kgaus).	91
Fig. 5.27- Calcul des coordonnées des points de Gauss des éléments réels.	92

Fig. 5.28- Calcul de la matrice Jacobienne et du Jacobien aux points de Gauss	94
Fig. 5.29- Calcul de l'inverse du Jacobien et des dérivées cartésiennes aux points de Gauss de chaque élément fini.	95
Fig. 5.30- Sous programme matrice des déformations B.	96
Fig. 5.31- Organigramme de calcul de la matrice [B].	97
Fig. 5.32- Schéma d'obtention des termes de [B] à partir du nœud 1.	97
Fig. 5.33- Appel des sous programmes D et DB par le sous programme rigidité.	98
Fig. 5.34- Organigramme calcul matrice de rigidité du plaque.	99
Fig. 5.35- Transformations élémentaires $\tau^{i\text{elem}}$ des éléments réels sur l'élément de référence	100
Fig. 5.36- Matrice [B].	101
Fig. 5.37- Produit matriciel $[\bar{K}] = [B]^T [DB]$.	101
Fig. 5.38- Définition les longueurs a et b du plaque.	102
Fig. 5.39- Calcule les vecteurs de déplacement aux points nodaux.	104
Fig. 5.40- Calcul les contraintes dans les points nodaux.	105
Fig. 5.41- Calcul le paramètre γ .	106
Fig. 6.1- Plaque carrée.	112
Fig. 6.2- Maillage du quart de la plaque circulaire.	108
Fig. 6.3- Déflexion de la plaque circulaire encastree à la ligne centrale due à une charge uniforme.	112
	113
Fig. 6.4- La distribution des contraintes sur la ligne centrale de plaque circulaire encastree due à la charge uniforme : (a) Moment de flexion, (b) Les forces de cisaillements.	114
Fig. 6.5- Déflexion de la plaque circulaire encastree sous charge uniforme.	
Fig. 6.6- Moment de la plaque circulaire encastree sous charge uniforme.	115
Fig. 6.7- Déflexion de la plaque circulaire simplement appuyée sous charge uniforme.	116
	117

Fig. 6.8- Moment de la plaque circulaire simplement appuyée sous charge uniforme	117
Fig. 6.9- Distribution de la déflexion.	120
Fig. 6.10- Déflexion de la plaque sur sol élastique (Modèle de <i>Vlasov</i>) sous charge uniforme.	121
Fig. 6.11- Type de Chargement ; (a) Charge distribuée uniformément, (b) Charge concentrée.	122
Fig. 6.12- Déflexion de la plaque due à la charge répartie (___ : Ozgan[5], :Nos résultats).	123
Fig. 6.13- Variation de moment maximum de la plaque due à la charge répartie par rapport à la profondeur H.	123
Fig. 6.14- Déflexion de la plaque due à la charge concentrée. (___ : Ozgan [5], :Nos résultats).	124
Fig. 6.15- Variation de moment maximum de la plaque due à la charge concentrée par rapport à la profondeur H.	125
Fig. 6.16- Sol fin gris.	129
Fig. 6.17- Sol fin rouge.	130
Fig. 6.18- Dispositif complet de triaxial.	132
Fig. 6.19- Mode de rupture.	133
Fig. 6.20- Détermination du module de déformation [Das].	133
Fig. 6.21- Déflexion de plaque sous charge uniforme pour une profondeur de 3.048 m.	135
Fig. 6.22- Déflexion de plaque sous charge concentrée pour une profondeur de 3.048m.	136
Figure 6.23- Plaque épaisse sur une fondation bicouche.	137
Fig. 6.24- Plaque reposant sur deux couches.	137
Fig. 6.25- Déflexion de la plaque pour différent profondeur de renforcement du sol gris sous charge uniforme.	138
Fig. 6.26- Déflexion de la plaque pour différentes profondeurs de renforcement du sol	

gris sous charge concentrée.	139
Fig. 6.27- Déflexion de la plaque pour différentes profondeurs de renforcement du sol rouge sous charge uniforme.	139
Fig. 6.28- Déflexion de la plaque pour différentes profondeurs de renforcement du sol gris sous charge concentrée.	140

Liste des tableaux

Tableau 4.1- Eléments quadrilatéraux de type déplacements (Influence de l'intégration numérique).	69
Tableau 4.2- Les Conditions aux Limites.	70
Tableau 5.1- Localisation des nœuds globaux de l'élément 6.	75
Tableau 5.2- Correspondance entre les coordonnées des points de Gauss en l'élément.	92
Tableau 6.1- Différentes solutions analytiques d'une plaque carrée.	108
Tableau 6.2- Comparaisons entre les solutions analytiques et numériques pour une plaque simplement appuyée.	109
Tableau 6.3- Comparaisons entre les solutions analytiques et numériques pour une plaque mince encastree.	110
Tableau 6.4- Comparaisons entre les solutions analytique et numérique de la déflexion d'une plaque modérée simplement appuyée (mm).	110
Tableau 6.5- Comparaisons entre les solutions analytique et numérique de la déflexion d'une plaque modérée encastree (mm).	111
Tableau 6.6- Comparaisons entre les solutions analytiques et numériques de la déflexion d'une plaque modéré simplement appuyé (mm).	111
Tableau 6.7- Comparaisons entre les solutions analytique et numérique de la déflexion d'une plaque modéré encastree (mm).	112
Tableau 6.8- Déflexions et moments adimensionnels de la plaque circulaire	116

encastrée.

Tableau 6.9- Comparaison de la déflexion pour une plaque sur sol élastique type <i>Winkler</i> .	118
Tableau 6.10- Comparaison de la déflexion pour une plaque sur sol élastique type <i>Winkler</i> .	119
Tableau 6.11- Comparaison de la déflexion pour une plaque sur sol élastique type <i>Winkler</i> .	120
Tableau 6.12- Déplacement maximum de la plaque reposant sur fondation élastique due à la charge uniforme.	122
Tableau 6.13- Déplacement maximum d'une plaque reposant sur fondation élastique due à la charge concentrée.	124
Tableau 6.14- Déplacement maximum de plaque encastrée.	126
Tableau 6.15- Déplacement maximum de plaque simplement appuyée.	127
Tableau 6.16- Déplacement maximum de plaque libre.	128
Tableau 6.17- Caractéristiques géotechniques des sols étudiés.	130
Tableau 6.18- Formulation des éprouvettes étudiées.	134
Tableau 6.19- Valeurs de E et ν pour différentes combinaisons des deux sols.	134
Tableau 6.20- Déflexion de la plaque pour différentes combinaisons des sols.	135
Tableau 6.21- La déflexion maximum de plaque carrée sur sol stratifié.	137
Tableau 6.22- Effet de l'épaisseur de la couche améliorée sur la déflexion de la plaque.	138

Chapitre 1

Introduction Générale

CHAPITRE 1

Introduction Générale

Les plaques appuyées sur les fondations élastiques présentent des problèmes techniques très courant dans le Génie Civil. Toutes les charges de la structure doivent être transférées au sol, et l'ensemble structure et sol doivent agir ensemble pour supporter les charges. Le développement des modèles plus réaliste de fondation et des méthodes simplifiées pour résoudre ce problème complexe d'Interaction Sol-Structure sont très importantes pour des conceptions sûres et économiques.

Le terme générique désignant l'étude de ces phénomènes porte le nom d'Interaction Sol Structure (ISS). Le terme interaction est très important puisqu'il met bien en évidence le fait que non seulement la nature de sol a une influence sur le comportement de la structure, mais aussi la structure a une influence sur le comportement du sol qui peut modifier ainsi les composantes de la sollicitation selon le modèle adopté.

Plusieurs méthodes numériques sont mises en pratique pour la résolution des modèles interaction sol-structure. La méthode la plus utilisé est la méthode des éléments finis. Elle semble appropriée puisqu'elle permette de définir précisément le comportement de tous les éléments composant le problème (sol, fondation, etc...).

Pour traiter l'ISS, nous allons dans cette thèse développer un outil qui permet, tout en ayant une conception simplifiée, de reproduire de manière phénoménologique le comportement d'une fondation superficielle reposant sur une surface de sol massif semi-infini.

Après un rapide état de l'art sur l'ISS et la méthode utilisée dans le chapitre I, le chapitre II présente une synthèse bibliographique concernant les modèles de comportements du sol élastique.

Le chapitre III est consacré à la présentation de la théorie des plaques et la méthode des éléments finis. Le comportement de la plaque est développé selon les modèles Kirchhoff et Mindlin.

Le chapitre IV décrit la résolution numérique du comportement des plaques sur sol élastique.

Le chapitre V décrit les différentes étapes de programme sous forme d'algorithme. Le chapitre VI présente plusieurs exemples de la validation du programme, plaque et plaque-sol selon les modèles Winkler et Vlasov. Et enfin, le chapitre VII apportera conclusions et perspectives à ce travail.

Chapitre 2

Etude Bibliographique

CHAPITRE 2

Etude Bibliographique du Plaque et de Sol

2.1 Introduction

Les plaques sont des éléments de structures très répandus en Génie Civil. On les rencontre dans des nombreuses applications, notamment, les planchers qui sont considérés comme des plaques reposant sur des appuis. Ces planchers jouent le rôle d'un diaphragme important dans la distribution et la transmission des charges aux portiques. Les éléments de plaques peuvent être homogènes et isotropes ou composite (anisotrope selon z).

Les plaques utilisées en Génie Civil présentent certaines particularités de calcul et de modélisation. En effet, la résistance de ces structures exige généralement une épaisseur relativement importante. Cette exigence est encore justifiée par le besoin d'un enrobage correct des aciers et des granulats et par une bonne isolation thermique et acoustique.

Historiquement, la formulation des plaques a un fondement mathématique et a été probablement faite par *Euler* qui en 1776 donne une analyse de vibration libre des problèmes de plaque.

J. Bernoulli a présenté une plaque comme un ensemble bandes perpendiculaires les uns aux autres, chaque bande est considérée comme une poutre.

Le mathématicien français **Germain** a développé une équation de plaque sans tenir compte de la déformation limite. **Lagrange**, étant l'un des critiques de ce travail, a corrigé les résultats de **Germain (1813)** en ajoutant la limite absente; ainsi, il était la première personne qui présente l'équation générale de plaque correctement.

En 1829 **Poisson** améliore avec succès l'équation de déflexion des plaques de **Germain-Lagrange** sous chargement statique. **Poisson** a également proposé d'ajouter trois conditions de frontière pour n'importe quel point sur la frontière libre.

La première théorie satisfaisante de flexion des plaques sont associées à **Navier**, qui a introduit l'épaisseur de plaque dans l'équation générale de plaque en fonction de la rigidité D . Il a également présenté une méthode exacte qui a transformé l'équation en équations algébriques au moyen des séries trigonométriques de **Fourier**.

En 1850 **Kirchhoff** édite une thèse sur la théorie des plaques minces. Dans cette thèse, **Kirchhoff** a énoncé deux hypothèses de base indépendantes qui sont maintenant largement acceptées dans la théorie plaque-déflexion et sont connues en tant qu'hypothèses de **Kirchhoff**.

À la fin du 19^{ème} siècle et au début des 20^{ème} siècles, les constructeurs ont changé leurs modes de construction en substituant l'acier au bois. Ce changement de matériau était extrêmement avantageux dans le développement de diverses théories de plaque.

Timoshenko a apporté une contribution significative à la théorie et à l'application de l'analyse de déflexion de plaque. Parmi **Timoshenko** les nombreuses contributions importantes sont des solutions des plaques circulaires considérant de grands déflexions et la formulation des problèmes élastiques de stabilité. **Timoshenko** et **Woinowsky-Krieger** ont édité une monographie fondamentale qui a représenté une analyse profonde des problèmes de déflexion de diverse plaque.

Huber, développe une théorie approximative des plaques orthotropes et des plaques résolus a soumis aux charges et aux moments distribués dissymétriques dans le bord. Les bases de la théorie générale des plaques anisotropes ont été développées par **Gehring** et **Boussinesq**. **Lekhnitskii** a apporté une contribution essentielle au développement de la théorie et de l'application de l'analyse linéaire et non linéaire anisotrope des plaques. Il a également développé la méthode de variables complexes pour l'analyse des plaques anisotropes.

E. Reissner a développé une théorie de plaque rigoureuse qui considère les déformations provoquées par les forces de cisaillement transversales. Dans l'Ex-Union Soviétique les travaux

de **Volmir** et de **Panov** ont été consacrés la plupart du temps à la solution des problèmes de recourbement des plaques non linéaires.

La tendance récente dans le développement des théories de plaque est caractérisée l'analyse numérique apportée par les ordinateurs modernes et l'élaboration des méthodes numériques liées à l'ordinateur les plus complètes, [1].

2.2 Modélisation des plaques

Par définition, une plaque est une structure ayant un plan moyen et qui est chargée transversalement par rapport à cet axe.

Les plaques sont classées en quatre catégories selon le rapport épaisseur sur la longueur (h/L).

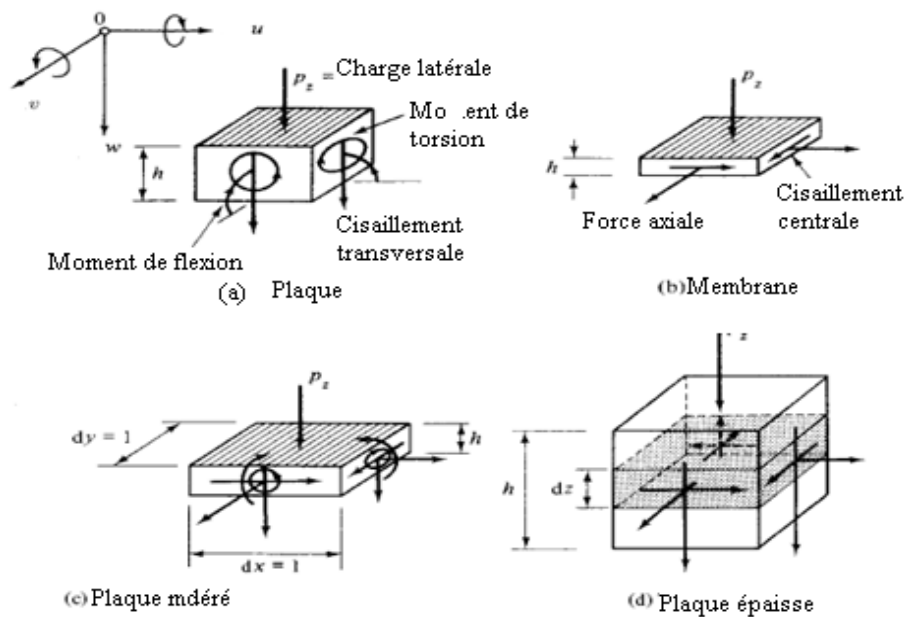


Fig. 2.1- Les contraintes dans divers types d'éléments de plaque.

- Les plaques raides ($h/L = 1/50 - 1/10$) supportent des charges transversales et des moments de flexion, généralement en quelque sorte semblable aux poutres (fig. 2.1a).

Les plaques sont des structures en état plan de contraintes. Ce sont donc des structures minces et planes. Les plaques sont l'équivalent de 2D des poutres : elles admettent des déplacements

verticaux suivant l'axe z . La théorie des plaques minces énoncés par **Love (1888)** sur les hypothèses de **Kirchhoff** s'inspire de celle des poutres minces de **Euler-Bernoulli**.

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par **Kirchhoff** sont celles adoptées pour les poutres :

- la plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan neutre ;
- les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée ;
- les termes non linéaires du déplacement sont négligés en particulier, l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal w est considéré ;
- la contrainte σ_z dans la direction transversale est nulle. Elle doit en effet s'annuler sur les faces extérieures et, du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en tout point de l'axe z [1].

Champs de déplacement

Les composantes des champs de déplacement pour la théorie des plaques minces s'expriment comme (fig.2.2)

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$w(x, y, z) = w(x, y)$$

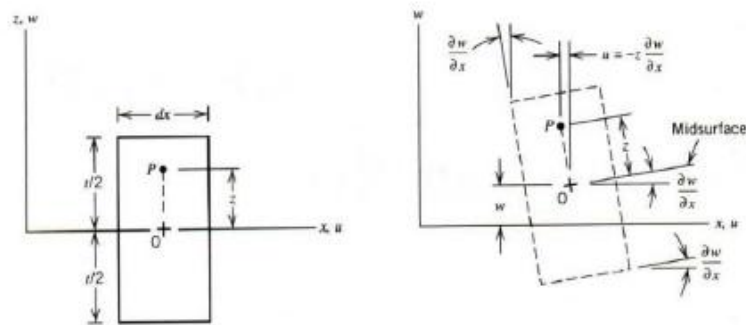


Fig. 2.2-La déflexion de la surface neutre de la plaque Kirchhoff ($t = h$).

- Les membranes ($h/L < 1/50$) sont les plaques très minces sans rigidité de flexion, supportant des charges de cisaillement axial et central (fig. 2.1b).
- Les plaques modérément épaisses ($h/L = 1/10 - 1/5$) sont à bien des égards semblables aux plaques minces, à l'exception notable que les effets des forces de cisaillement transversales sur les composants d'effort normal sont tenus en compte.(fig. 2.1c)
- Les plaques épaisses ($h/L > 1/5$) peuvent supporter aussi bien des charges que des moments dans toutes les directions (fig. 2.1d).

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de **Kirchhoff** quant à leur mouvement de flexion (elle n'est plus très petite devant la dimension des ondes de flexion), une théorie plus complètes basée sur celle des poutres de **Timoshenko** est nécessaire.

Rayleigh en 1877 puis **Timoshenko** en 1921 montrent que la prise en compte des effets d'inertie de rotation et de cisaillement affecte les fréquences propres de flexion des poutres. Ces deux effets tendent à diminuer les fréquences de résonances calculées en raison de la croissance de l'inertie et de la flexibilité du système.

Une extension à la théorie des plaques quant au cisaillement est proposée par **Reissner** en 1945 dans le cas statique. Une première théorie pour le cas dynamique, incluant les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation est proposée par **Uflyand** en 1948. C'est cependant l'article de **Mindlin** (1951), publié 3 ans plus tard qui fera date.

Les hypothèses cinématique de la théorie des plaques de **Reissner-Mindlin** sont proches de celles utilisées dans le cadre des poutres dans la théorie du **Timoshenko**. On utilise comme inconnues cinématiques le déplacement verticale w ainsi les angles de rotation θ_x et θ_y . [1]

$$u(x, y, z) = -z\theta_x(x, y)$$

$$v(x, y, z) = -z\theta_y(x, y)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y, t)$$

Sous l'effet d'un torseur de charge il y a déplacement dans chaque point du plan moyen. Le déplacement selon l'axe Oz appelé la flèche et noté $z(w)$ voir fig 2.3.

Les propriétés de la flexion de la plaque dépendent par leur épaisseur par rapport aux autres dimensions. On distingue deux genres, plaque mince (*Kirchhoff*) et épaisse (*Mindlin & Reissner*) [2].

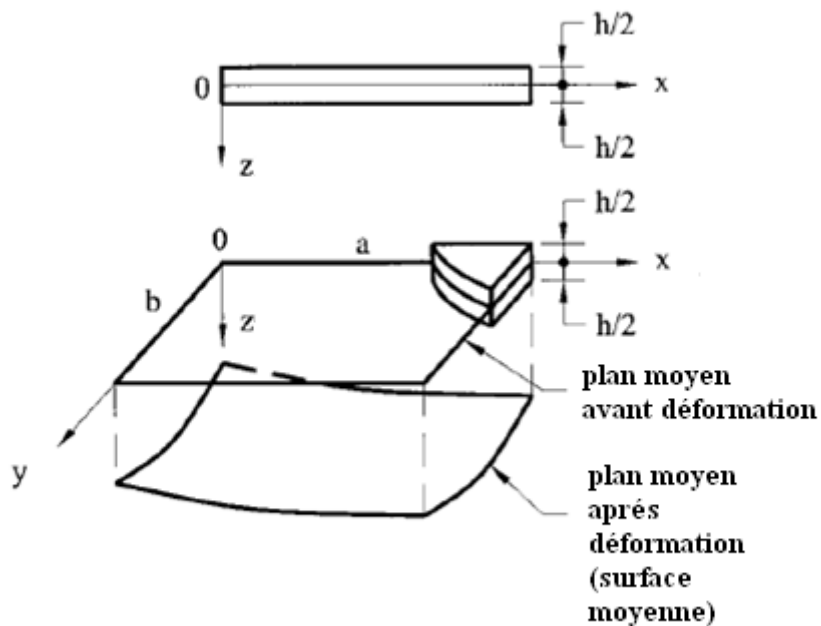


Fig. 2.3- Le plan moyen d'une plaque en déformation.

2.2.1 Méthodes de résolution

On présente dans ce chapitre les méthodes connues d'analyse des problèmes physiques les plus courants. Les méthodes utilisées sont les méthodes analytiques, expérimentales et numériques. Selon la méthode spécifiée on parle respectivement de modèle analytique, expérimental ou

numérique. Le but de tout scientifique est d'utiliser plus d'une méthode pour la validation des résultats obtenus.

On expose dans la première partie de la méthode de résolution analytique. Le modèle analytique ou mathématique définissant le problème physique.

Les méthodes expérimentales exposent les procédures de mesure expérimentale des variables définissant les problèmes de température, la pression, les déformations, etc...

Les principales méthodes numériques les plus connues comme la méthode des différences finis, les méthodes d'approximations intégrales et variationnelles et la méthode des éléments finis la méthode des éléments de frontière. Ces méthodes seront traitées plus en détail dans ce chapitre.

2.2.1.1 Méthodes analytiques

Des solutions rigoureuses de l'équation de la plaque **Kirchhoff** peuvent être obtenues seulement dans des cas limités. Pour la majorité des problèmes pratique, une solution rigoureuse ne peut pas être trouvé ou est appliqué seulement pour quelque structure compliquée avec une grande difficulté dans un calcul pratique. Des solutions de forme close pour les plaques circulaire peuvent être obtenues avec une facilité relative, à condition que la partie latérale doive être charge et les appuis sont des rotations symétriques.

Pour les plaques rectangulaires minces simplement appuyées, la méthode mathématique de **Navier** rapporte des solutions correctes. La convergence des résultats double séries du **Fourier** dépend considérablement sur la continuité de la fonction de chargement. Une convergence lente, crée par un chargement discontinu, est particulièrement prononcé dans le cas des forces concentrées. Pour les charges latérales distribuées sans interruption, cependant, la convergence de cette solution est très satisfaisante.

L'application de la méthode de **L'évy** est basée sur l'utilisation de la seule série de Fourier qui est légèrement plus complexe, mais la solution converge très rapidement. En outre, la méthode de **L'évy** est plus générale. Elle peut être employée seulement si deux bords opposés du plaque sont simplement appuyée et la forme du chargement est la même pour toutes les sections parallèles à la direction des bords simplement soutenus.

Une généralisation de l'approche *Navier* a été également présentée, cette solution peut être appliquée pour les plaques minces avec différentes conditions de frontière et n'importe quel type de chargement.

En plus, il est à noter que l'application des méthodes *Navier* et *Lévy* peut être considérablement prolongée au moyen de la technique de superposition.

Dans les analyses classiques de la flexion pour les plaques épaisses (rectangulaire) l'approche de Navier peut être appliquée à condition que la plaque soit simplement appuyée. D'une façon semblable, la solution classique de *Lévy* peut être aussi prolongée aux solutions des problèmes de la plaque épaisse, mais elle reste plus complexe.

En conclusion, il devrait mentionner que les solutions des plaques très minces ne créent aucun problème si les déflexions restent petits. Pour membrane rectangulaire l'approche de *Navier* offre des solutions faciles. Le nombre des solutions mathématiques correctes obtenues par les méthodes classiques est limité. Beaucoup des problèmes pratiques ne peuvent pas être résolus par ces méthodes ou la solution obtenue est trop encombrante pour l'usage pratique.[3]

Donc, les méthodes analytiques ont des avantages et des inconvénients, il est toujours souhaitable d'avoir recours aux méthodes analytiques pour avoir la solution analytique (exacte) du problème. Cependant ces méthodes sont souvent difficiles à être réalisées à cause des inconvénients suivants:

- 1°) Utilisation d'un grand nombre de termes pour obtenir la solution d'après le principe de superposition. Comme on ne peut atteindre des valeurs infinies de n , la solution ne peut être analytique au sens propre du mot.
- 2°) La solution est toujours difficile à trouver. La méthode est spécifique à chaque type de problème.
- 3°) La difficulté s'accroît davantage si les conditions aux limites et l'équation aux dérivées partielles sont non homogènes.
- 4°) La prise en charge de frontières complexes semble être hors de portée des méthodes analytiques. [4]

2.2.1.2 Méthodes expérimentales

L'expérimentation est un moyen précis d'évaluer les différentes hypothèses qui ont été émises, elle servira à aller chercher des données, c'est-à-dire des informations qui serviront à confirmer ou à

infirmier une hypothèse. Les résultats obtenus sont surtout confrontés aux résultats analytiques (quand ceux-ci existent) car ces résultats sont objectifs et résistent bien à la subjectivité. La méthode expérimentale pour être fiable, doit tenir compte d'un certain nombre de critères ou normes scientifiques et qui sont les suivantes:

1. Objectif à atteindre (émission d'hypothèses, formulation)
2. Procédure d'analyse expérimentale et matériel expérimental
3. Résultats (appelés données)
4. Interprétation des résultats et validation

On utilise dans certaines disciplines pour désigner la méthode expérimentale la désignation 'OPHERIC' (Observation, Problème, Hypothèse, Expérience, Résultats, Interprétation, Conclusion), couramment utilisé dans la conduite d'activités expérimentales.

2.2.1.3 Méthodes numériques

Comme il est déjà discuté et illustré, les plaques ont une multitude d'applications dans les domaines extrêmement divers de l'industrie. En conséquence, des analyses économiques et fiables de divers types de structures du plaque a une grande intérêt aux ingénieurs civils, architecturaux, mécaniques et aéronautiques et architectes navals.

Les formules de comportement de divers types des plaques en flexion, présentent les équations mathématiques différentielles partielles correctes. Malheureusement, les solutions analytiques de ces équations ont été limitées aux plaques homogènes d'états relativement simples (la géométrie, le chargement et les frontières). Même lorsque les solutions analytiques pourraient être trouvées, elles étaient souvent trop difficiles et encombrantes pour employer dans la pratique. Les méthodes numériques traitées satisfaire la plupart de ces conditions pratiques.

Le but de toutes ces méthodes numériques est de fournir des algorithmes informatiques appropriés pour obtenir les solutions numériques approximatives aux problèmes difficiles. Les techniques numériques présentées sont des méthodes discrètes. C'est-à-dire, la continue du plaque ou de sa frontière est discrétisé mathématiquement ou physiquement. Les méthodes numériques sont :

- a) . La méthode des différences finies (FDM);
- b) . Les méthodes d'approximation intégrales et variationnelles ;

- c) . La méthode des éléments finie (FEM) ;
- d) . La méthode des éléments de frontière (BEM).

a) Méthode des différences finies

La méthode des différences finies est basée sur l'approximation locale des dérivées apparaissant dans les équations différentielles. En se basant sur le développement limité de *Taylor*, les fonctions dérivées sont approchées par plusieurs types de schémas aux différences finies: différences finies en avant, en arrière et centrées. La précision du résultat varie d'un schéma à un autre selon la troncature utilisée. La méthode utilise un maillage, ou grille du domaine d'intégration.

L'équation discrétisée, selon les schémas cités plus haut, est projetée aux points du maillage. On obtient alors un système d'équations dont la résolution permet de trouver la solution approchée du problème.

La méthode peut résoudre aussi bien des problèmes à domaines régulier (Fig. 2.4) qu'irrégulier (Fig. 2.5).

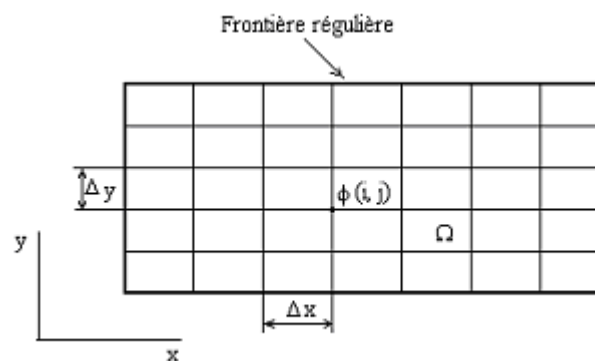


Fig. 2.4- Maillage de domaine régulier.

Pour un domaine irrégulier, les pas Δx et Δy deviennent respectivement $\alpha\Delta x$ et $\beta\Delta y$ aux points voisins des frontières, α et β étant des coefficients de correction du pas, connus, inférieurs à 1.

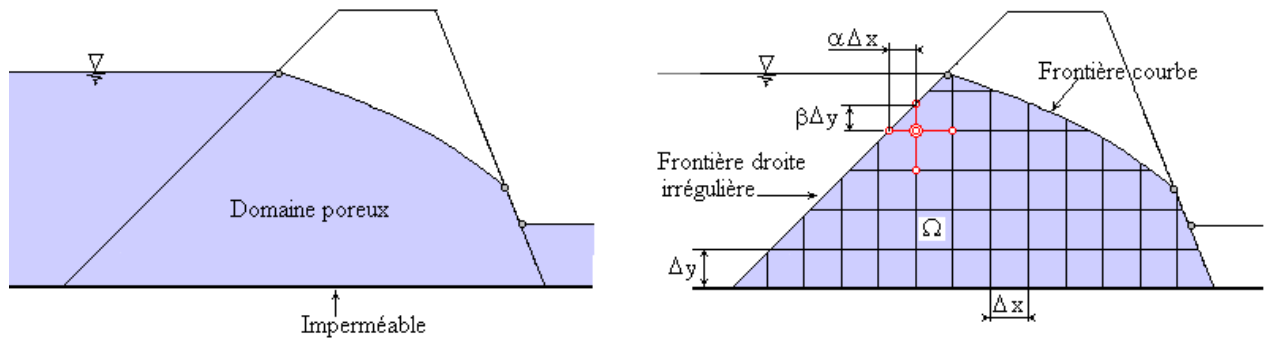


Fig. 2.5- Maillage d'une digue de retenue d'eau.

b) Méthodes d'approximation intégrales et variationnelles

Les méthodes d'approximation peuvent se classer en deux catégories principales : Les méthodes de résidus pondérés, ou méthodes intégrales et les méthodes variationnelles ou méthodes à extremum.

Le principe général de l'approximation consiste à chercher la meilleure approximation d'une fonction sur le domaine d'intégration de manière à satisfaire au mieux les lois physiques auxquelles elle obéit.

La solution est écrite sous forme d'une série polynomiale ou trigonométrique à termes finis. Des paramètres généralisés sont introduits et des fonctions de base sont alors construites. Le principe de la méthode consiste à rechercher les paramètres qui donnent la meilleure approximation construite à l'aide de fonctions de base.

Les méthodes des résidus pondérés utilisent des fonctions test de manière à minimiser l'erreur ou le résidu de l'équation différentielle. Différentes méthodes de résidus pondérés sont obtenues selon la valeur de la fonction test. La méthode de collocation par points, la méthode de collocation par sous domaines, la méthode des moindres carrés et la méthode de *Galerkin*.

Dans d'autres cas, les lois physiques peuvent s'exprimer sous une forme variationnelle, c'est-à-dire sous la forme de conditions d'extremum d'une fonctionnelle comme c'est le cas de l'énergie totale par exemple en mécanique des structures. La méthode adaptée à ce type de formulation est la méthode de *Ritz*, qui aboutit plus tard à la méthode des éléments finis en mécanique des structures.

c) Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis, bien connue aujourd'hui, est la méthode la plus utilisée actuellement, son champ d'application ne cesse de s'élargir. Le succès de la méthode réside principalement dans sa formulation: elle réunit les principes les plus forts de la méthode des différences finies et ceux de la méthode des équations intégrales: respectivement la discrétisation du domaine d'intégration et le principe de construction de l'approximation et sa formulation.

La méthode des éléments finis améliore ces deux principes comme suit :

- i- Le domaine d'intégration n'est plus discrétisé par des points comme pour le cas de la méthode des différences finies, mais par des sous-domaines continus ou des 'continuuw', dont le nombre est fini, et qu'on appelle éléments finis (Fig. 2.6). En utilisant ce découpage, (modélisation géométrique), la méthode fournit un modèle qui représente aussi fidèlement que possible le phénomène physique dans sa réalité.

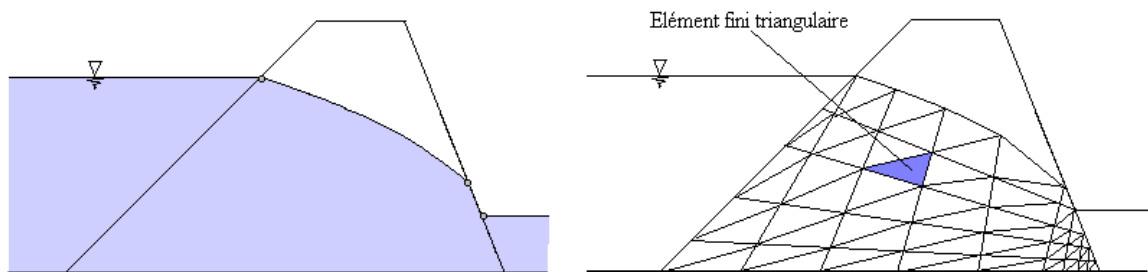


Fig. 2.6- Discretisation par éléments triangulaires d'une digue.

- ii- La formulation intégrale, de type *Galerkin*, est appliquée non pas sur le domaine d'intégration global, mais sur des éléments finis standard, ayant des fonctions de formes normées, au lieu des fonctions de base de la méthode de *Galerkin*. La formulation devient unifiée pour les différents types de problèmes. Une bibliographie d'éléments est alors mise à jour. La méthode devient alors programmable par excellence. Possédant tous ces atouts, la méthode ne cesse de se développer et de s'étendre de plus en plus à des domaines qui étaient jusque là du seul ressort des méthodes expérimentales.[4]

Ozgan et Daloglu [5] ont étudié l'interaction d'une plaque épaisse. Une étude comparative entre deux modèles de la modélisation de la plaque par MEF, un élément avec quatre (04) nœuds et un élément avec huit (08) nœuds (fig. 2.7a et 2.7b). Plus, deux types d'intégration pour chaque élément, *intégrale totale* (FI) et *réduit sélective* (SRI). (fig .2.8a et 2.8b).

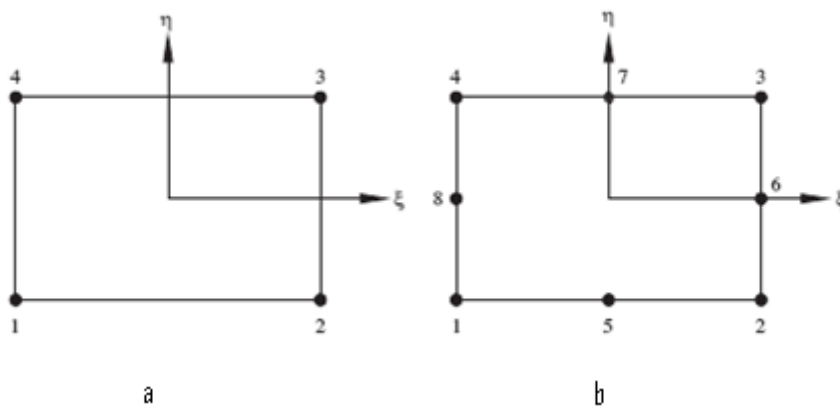


Fig. 2.7- Éléments quadrilatère : (a) à 4 nœuds ;
(b) à 8 nœuds pour l'analyse de la plaque (Mindlin).

Les figures 2.8a et 2.8b présentent la déflexion de la ligne centrale pour une plaque simplement appuyée avec une charge uniforme figure 2.8a et une charge concentrée figure 2.8b. Comme il est bien présenté- la déflexion- dans les figures le problème du cisaillement est bien observé dans 4FI pour $h/L \leq 0.15$, pour 8FI n'est pas évident comme 4FI, et la limite de h/L peut être réduite à 0.005. Le problème disparaît quand SRI est utilisé.

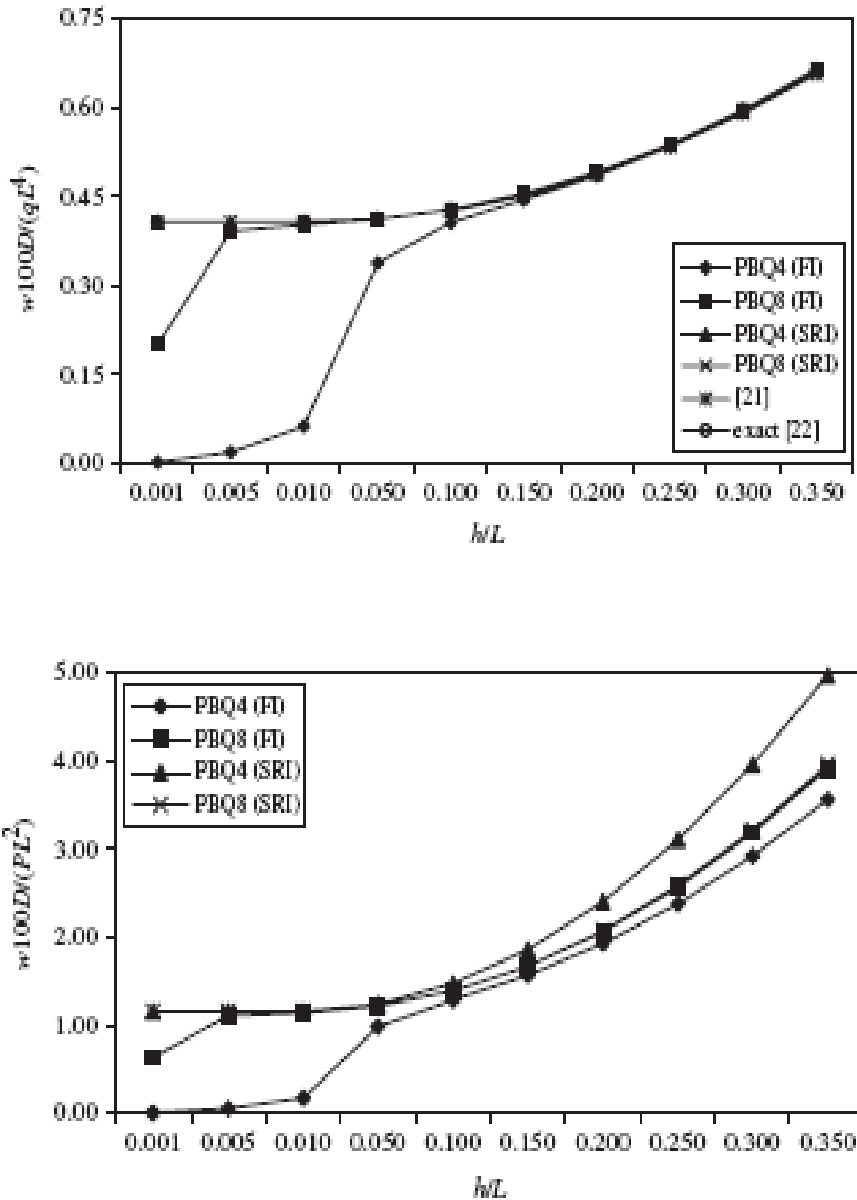


Fig. 2.8- Déplacement de la ligne centrale de la plaque simplement appuyée :
 (a) due une charge uniforme ; (b) due une charge concentré.

Les études représentées sur l'élément 4SRI donnent des résultats peut fiable pour des plaques à grand dimension. Il est à remarquer que l'élément 8SRI peut être utilisé efficacement pour analyser des plaques minces et épaisses qui reposent sur des fondations élastiques sous n'importe quel type de chargement et condition aux limites.

d) Méthode des éléments de frontière

La méthode a émergé en tant que puissante alternative à la méthode des éléments finis. Tandis que ceux-ci et tout l'autre discutés préalablement les techniques de solution numérique exigent la discrétisation du domaine entier de la plaque, la méthode des éléments de frontière applique la discrétisation seulement à la frontière du continu (fig.2.9). La méthode est habituellement divisée en deux catégories : directe et indirecte. La méthode des éléments de frontière directe formule le problème en termes des variables cela peut avoir les significations physiques définies, telles que des déplacements des nœuds de frontière de la plaque. En revanche, la méthode des éléments de frontière indirecte emploie les variables dont les significations physiques ne sont pas toujours clairement spécifiées. En conséquence, la méthode des éléments de frontière directe est plus appropriée.

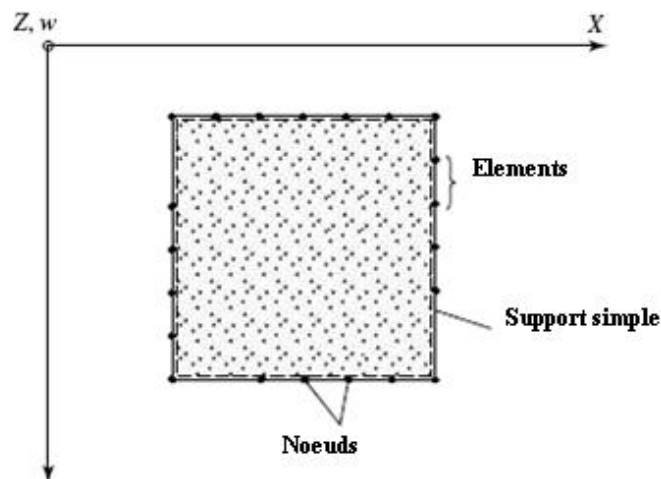


Fig. 2.9- Plaque chargé uniformément représenté par la méthode des éléments de frontière.

Al.Hosani & al [6] ont étudié des plaques épaisses « Reissner » reposant sur une fondation élastique « type Winkler », où l'effet de contrainte normale transversale résultant de la réaction de la fondation sur la surface de la plaque a été pris en considération, les cas étudiés avaient des solutions analytiques connues.

Ils ont introduit pour la première fois la dérivée totale de la solution fondamentale et les équations d'intégrale de frontière de la plaque sur la fondation. Les résultats présentent une très bonne précision de la solution.

La fig 2.10 présente une plaque circulaire encasté sous une chargée de cisaillement concentré. Il est bien clair que les résultats sont très convergents pour les plaques Kirchhoff (pour petite épaisseur) et Reissner avec la solution analytique. Les même remarques pour la plaque rectangulaire (fig 2.11, A= 1m, B= 0.5m) simplement appuyée sous des charges uniformes, et plaque circulaire (fig.2.12) appuyée libre sous charge concentré.

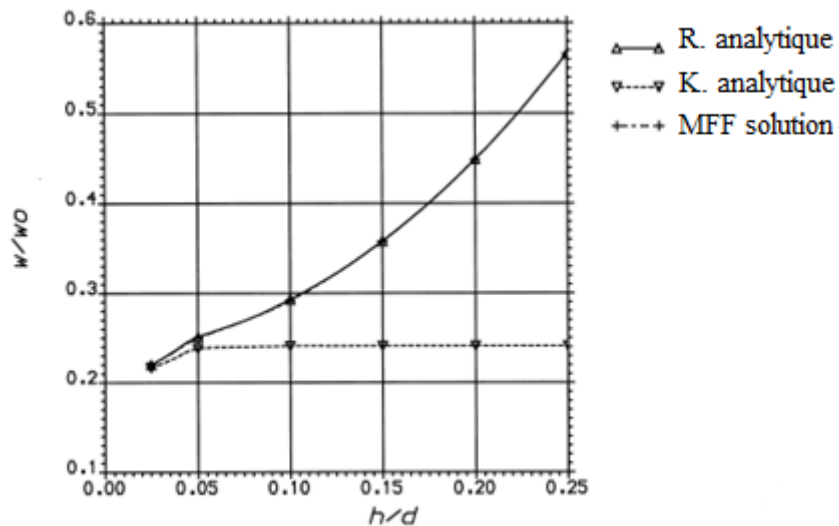


Fig. 2.10- Déflexion d'une plaque circulaire épaisse encasté chargée par une force concentrée au milieu.

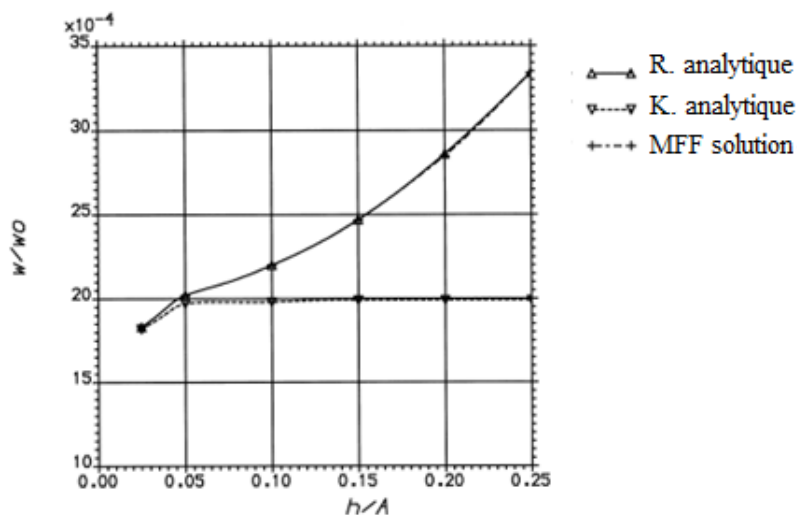


Fig. 2.11- Déflexion d'une plaque rectangulaire simplement appuyée sous une charge uniforme.

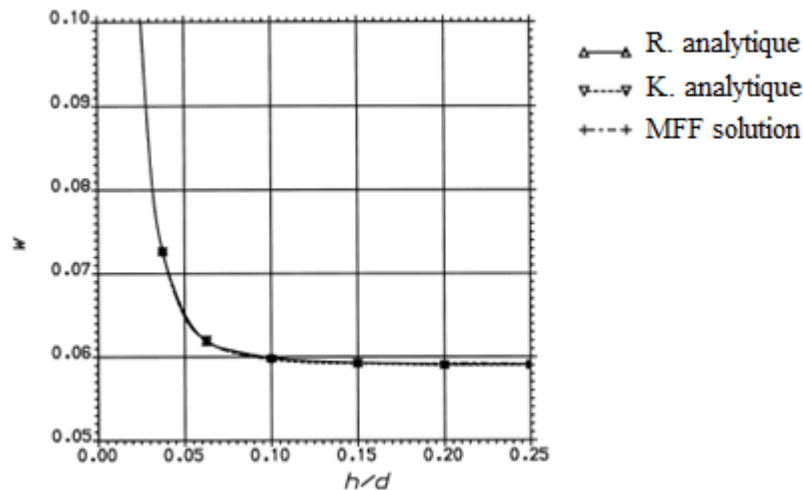


Fig. 2.12- Déflexion de la plaque circulaire épaisse appuyée librement sous une force concentrée.

2.3 Modélisation du sol

L'analyse de l'interaction entre les éléments structuraux tels que les poutres et les plaques de l'ampleur finie ou infinie se reposant sur des milieux élastiques déformables est d'importance pour beaucoup de situations de technologie. L'interaction parmi des structures, leurs bases et le milieu de sol au-dessous des bases changent le comportement réel de la structure considérablement, ce qui est obtenu à partir de la considération seule de la structure.

Les matériaux naturels peuvent être regroupés en trois catégories: les roches, les sols pulvérulents (sols granulaires à forte perméabilité, par exemple la plupart des sables et les graves) et les sols cohérents (sols cohérents à faible perméabilité, par exemple la plupart des argiles et des limons). Ces matériaux ont des comportements relativement distincts. Il ne s'agit pas seulement d'un ordre de grandeur différent des caractéristiques de déformabilité et de résistance, mais bien d'un comportement différent du matériau, dû à sa formation au cours des temps géologiques et à l'histoire des chargements qu'il a subis ultérieurement. Les techniques expérimentales utilisées pour déterminer le comportement mécanique des sols et des roches (procédures de prélèvement, dimensions et préparation des éprouvettes, appareils d'essai, procédures opératoires) sont adaptées à ces classes de matériaux. Il faut noter particulièrement que le prélèvement des sables et graviers à l'état naturel est pratiquement impossible et que les

lois de comportement déterminées en laboratoire correspondent à des matériaux reconstitués, dont la ressemblance avec les mêmes matériaux en place n'est pas assurée.[7]

En plus, le sol a des caractéristiques très complexes, puisqu'il est hétérogène, anisotrope et non linéaire. La présence de la fluctuation de la nappe phréatique autre s'ajoute à sa complexité. Le sol peut être modélisé d'un certain nombre de manières avec de divers niveaux de rigueur.[8]

Une importance a été accordée sur la modélisation physique de milieu de sol, puisqu'il s'avère que la modélisation de la structure est plutôt franche. Afin d'analyser une base complexe réelle, des prétentions doivent être faits pour certains problèmes.

Beaucoup des chercheurs ont essayé de créer un modèle commode représente correctement le comportement physique d'un vrai base. Ainsi, un éventail entier des modèles de base est connu ; à une extrémité est se composer modèle de **Winkler** (*Théorie de déformation élastique locale*) ressorts linéaires étroitement aligné et indépendants et à l'autre extrémité est **un milieu élastique continu** (*Théorie de déformation élastique globale*).

À l'interface de sol, la distribution de la pression de contact est le paramètre important. La variation de la distribution de pression dépend du comportement de base (à savoir, rigide ou flexible: deux situations extrêmes « Si la fondation a une rigidité très basse, les déflexions de la fondation varient d'une valeur maximum au centre à une plus petite valeur aux extrémités, voire fig. 2.13 (a). D'une part, si la fondation est très rigide comparer au sol, les déflexions sur le long de la fondation sont uniformes, alors que la distribution de pression varie de l'infini au bord à une valeur finie au centre. Cette situation est illustrée dans fig. 2.13 (b). Donc, la valeur du k n'est pas constante» [24]) et nature de dépôt de sol (argile ou sable etc.). Puisque la philosophie de la conception de base est d'écarter la charge de la structure au dessus du sol, la modélisation idéale de base est qu'où la distribution de la pression de contact est simulée d'une façon plus réaliste (**Taylor**, 1964). De ce point de vue, les deux approches fondamentales ont quelques limitations. Cependant, le comportement mécanique du sol semble être tout à fait erratique et le complexe semble être impossible d'établir n'importe quelle loi mathématique qui se conformerait à l'observation réelle.

Il y a une grande classe des matériaux de base se produisant dans la pratique qui peuvent ni l'un ni l'autre soyez représenté par un type base de **Winkler** ou par **milieu continu isotrope**.

Des études nombreuses ont été effectuées sur l'effet de l'interaction sol-structure sous le chargement statique. Ces études ont considéré l'effet d'une façon très simplifiée et ont démontré que les quantités des forces sont dues à une telle interaction.

De ces études, il devient évident que la considération de l'effet d'interaction change de manière significative les quantités de force de conception. Ces études, peuvent être quantitativement approximatives.[8]

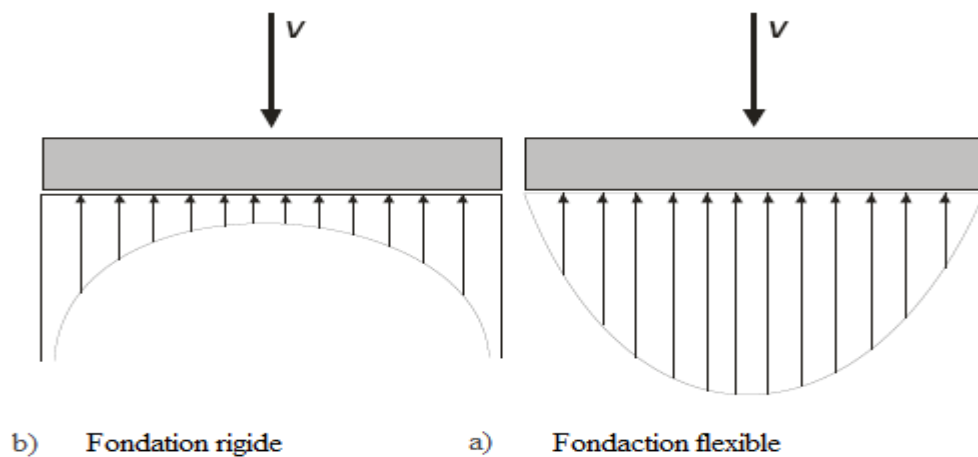


Fig. 2.13- Fondation sur sol élastique.

2.3.1 Modèle de Winkler (le model élastique discret)

La modèle de Winkler est le plus simple et le plus employé dans la théorie de flexion des plaques. La majeure partie des logiciels ont des programmes en service aujourd'hui sont basés sur le modèle de Winkler. L'idéalisation de Winkler représente le milieu de sol comme des ressorts en série, étroitement aligné, discrets, linéairement élastiques (*Winkler 1867*) - Une telle base est équivalente à une base liquide comme si le sol de base n'a aucune résistance au cisaillement (*Huang 1993*) [9]-. Selon cette idéalisation, la déformation de la base due à la charge appliquée est confinée aux régions chargées seulement. Fig.2.14 montre la représentation physique de la base de Winkler. La relation de pression-déflexion à un point quelconque est donnée.

$$p = kw \quad (2.1)$$

là où p est la pression, k est le coefficient de la réaction de sol ou du module de sol, et w est la déflexion.



Fig. 2.14- Le modèle du Winkler.

L'objectif principal de ce modèle est de déterminer la rigidité des ressorts élastiques utilisés pour remplacer le sol au-dessous de la plaque. La résolution du problème est itérative puisque la valeur numérique du coefficient de réaction de sol dépend non seulement de la nature du sol. Puisque la rigidité de sol est le seul paramètre dans le modèle de Winkler pour idéaliser le comportement physique du sol.

Le module de la réaction de sol ou le coefficient de réaction k de sol est le rapport entre la pression p à n'importe quel point donné de la surface du contact y produit par la charge à ce point .[7]

$$k = p / y \quad (2.2)$$

Les premières applications de la méthode du coefficient de réaction dans le domaine du génie civil sont dues à **Zimmermann** (1888) pour le calcul des contraintes dans les traverses de chemins de fer.

Le développement de la méthode a ensuite concerné les fondations et les radiers. Elle a été introduite, très tôt, dans le domaine des soutènements par **Rifaat** (1935) et **Baumann** (1935). **Delatire**, [10]

2.3.2 Modèle élastique continu

C'est une approche conceptuelle de la représentation physique des milieux infinis de sol (fig 2.15). La masse de sol constitue fondamentalement des particules discrètes compactes par quelques forces intergranulaires. Les problèmes se sont généralement occupés de la mécanique

de sol impliquent des distances de frontière et des secteurs chargés, très grand comparé à la taille des différents grains de sol.

La représentation de milieu continu pour les milieux de sol été le travail de recherche de **Boussinesq** (1885) pour analyser le problème d'un solide élastique semi-infini, homogène, isotrope, linéaire soumis à une force concentrée agissant normalement à la frontière du plaque, par l' utilisé de la théorie d'élasticité. Dans l'idéalisation de milieu continu, on assume que le sol est semi-infini et isotrope pour la simplicité.

Le modèle a également l'avantage important (par rapport au modèle du Winkler) de la simplicité des paramètres d'entrée, à savoir, module d'élasticité et le coefficient de Poisson.

Cependant, cette idéalisation du milieu semi-infini élastique mène aux complexités « *beaucoup-se plient (many-fold)* » du point de vue mathématique (**Kerr 1964**). Ceci limite sévèrement l'application de ce modèle dans la pratique. Un des inconvénients principaux de l'approche élastique de milieu continu est l'inexactitude dans les réactions calculées aux périphéries de la base. On l'a également constaté que, pour le sol en réalité, les déplacements extérieurs à partir de la région chargée ont diminué plus rapidement que ce qui est prévu par cette approche (**Foppl 1909**). Ainsi, cette idéalisation est non seulement informatique difficile à s'exercer mais souvent ne représente pas le comportement physique du sol très étroitement. [8]

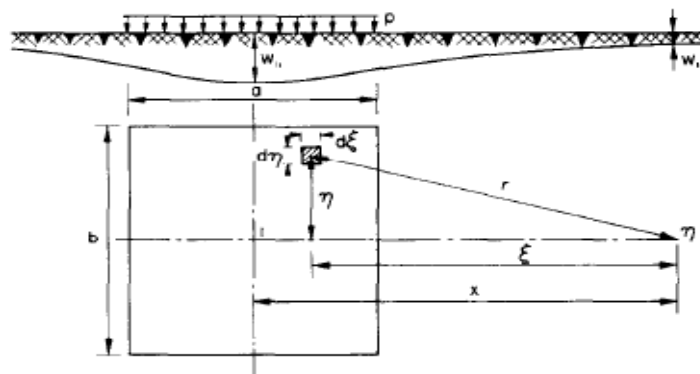


Fig. 2.15- Modèle du milieu continu élastique.

Une comparaison entre modèle Winkler et modèle de milieu continu élastique indique que les bases élastiques de milieu continu ont un bassin de déflexion beaucoup plus grand (**Poulos 2000**) voir (fig 2.16). Dans la formulation de **Boussinesq**, la déflexion dépend à un point quelconque non seulement de la force à ce point mais également des forces à tous autres points, qui est une approche plus réaliste par rapport au modèle du Winkler.

Pour trouver physiquement une représentation mathématiquement simple de tels modèles pour l'interaction de sol-structure, des tentatives sont faites par **Pasternak, Hetenyi, Filonenko-Borodich**, et **Vlasov** .[9]

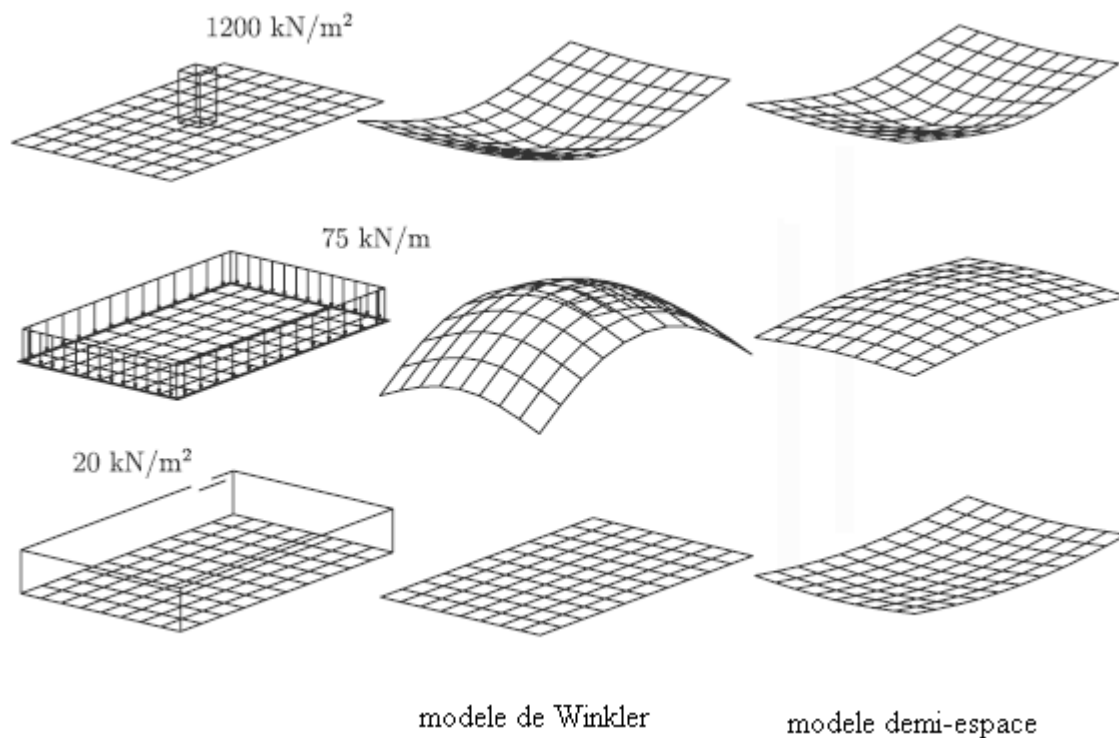


Fig. 2.16- Comparaison la réponse de la flèche entre Winkler et modèle demi-espace pour différents type de chargement [11].

2.3.3 Versions améliorées du modèle de Winkler

Plusieurs chercheurs, réalisant l'inopportunité de la représentation du sol dans le modèle de Winkler, ont essayé de rendre le modèle plus réaliste. Un des problèmes dans le modèle de

Winkler est qu'il n'y a aucune interaction entre les ressorts verticaux. Pour réaliser un certain genre d'interaction entre ces éléments de ressort

2.3.3.1 Base de Filonenko-borodich

Fig. 2.17 montre la représentation physique du fondation- de *Filonenko-Borodich (1940)*.

Selon ce modèle, la connectivité des ressorts de Winkler individu est réalisée par une membrane élastique mince soumise à une tension constante T . Cette membrane est attachée aux extrémités supérieures des ressorts. Ainsi, la réponse du modèle est mathématiquement exprimée comme suit:

$$p = kw - T\nabla^2 w : \text{bande.2D} \quad (2.3)$$

$$p = kw - T \frac{d^2 w}{dx^2} : \text{Uni dim ensionnelle}$$

Où

$$\nabla^2 \equiv \text{opérateur Laplacien} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad T \equiv \text{tension}$$

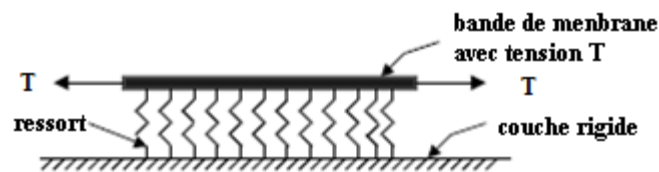


Fig. 2.17- Fondation du Filonenko-Borodich.

Par conséquent, l'interaction des éléments de ressort est caractérisée par l'introduction de la tension T dans la membrane. .[2]

2.3.3.2 Base de Hetenyi

Ce modèle suggéré dans la littérature peut être considéré comme un compromis juste entre deux approches extrêmes (à savoir, base de Winkler et milieu continu isotrope). Dans ce modèle, l'interaction parmi les ressorts discrets est accomplie en incorporant une poutre élastique ou une plaque élastique, qui subit la déformation de flexion seulement, fig. 2.18. Ainsi le rapport de pression-déflexion devient:

$$p = kw - D\nabla^4 w \quad (2.4)$$

$$D = \frac{(E_p t_p^3)}{12(1 - \mu_p)^2} : \text{Rigidité du flexion pour plaque élastique}$$

$$\nabla^4 \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$$

p est la pression à l'interface de la plaque et des ressorts ; E_p et μ_p sont le module de Young et le coefficient de Poisson du matériel de plaque ; h_p est l'épaisseur de la plaque.

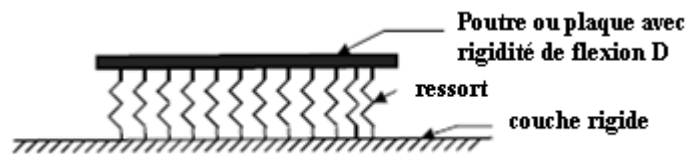


Fig. 2.18- Fondation du Hetenyi.

Ainsi, on le voit la rigidité de flexion de la poutre ou du plaque inclus caractérise l'interaction entre les éléments de ressort du modèle de Winkler.

2.3.3.3 Base de Pasternak

Dans ce modèle, on assume l'existence de l'interaction de cisaillement parmi les éléments de ressort qui est accomplie en reliant les extrémités des ressorts à une poutre ou à une plaque qui subit seulement la déformation transversale de cisaillement (fig. 2.19).

L'équation de deflection de la plaque

$$p = kw - G\nabla^2 w \quad (2.5)$$

là où, G est le module de cisaillement.

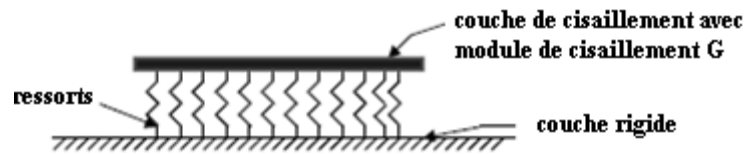


Fig. 2.19- Fondation de Pasternak.

Ainsi la continuité dans ce modèle est caractérisée par la considération de la couche de cisaillement. Une comparaison de ce modèle avec cela de *Filonenko-Borodich* implique leur équivalence physique (le T'' a été remplacé par le G'').

2.3.3.4 Base généralisée

Dans ce modèle de base, on suppose qu'à chaque point de contact le moment est proportionnel à l'angle de la rotation en plus de l'hypothèse du Winkler. Ceci peut être analytiquement décrit comme suit.

$$p = kw$$

et

$$m_n = k_1 \frac{dw}{dn} \quad (2.6)$$

Là où, m_n est le moment dans la direction, n ; n est la direction à un point quelconque dans le plan de la base ; et k, k_1 sont des facteurs de proportionnalité.

La prétention faite sur la proportionnalité dans ce modèle est relativement arbitraire (*Kerr 1964*).

2.3.3.5 Base de Kerr

Une couche de cisaillement est introduit dans la base de Winkler et on assume que les constantes de ressort au-dessus et au-dessous de cette couche sont différentes (*Kerr 1965*). Fig. 2.20 montre la représentation physique de ce modèle mécanique. L'équation de ce modèle peut être exprimée comme suit.

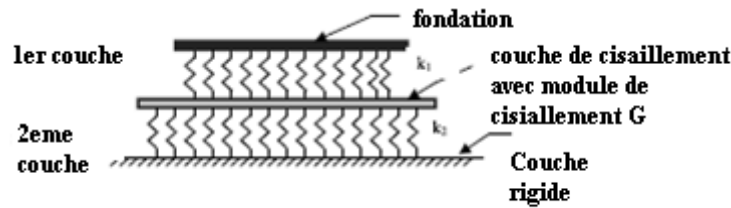


Fig. 2.20- Fondation de Kerr.

Avec:

$$\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right)p = \frac{G}{k_1} \nabla^2 p + k_2 w - G \nabla^2 w \tag{2.7}$$

Là où, k_1 est le constant de ressort de la première couche ; k_2 est le constant de ressort de la deuxième couche ; w est la déflexion de la première couche.

2.3.3.6 Modèle d'analogie de colonne de poutre

Le problème classique des poutres reposent sur une base élastique (fig. 2.21) est résolu par **Horvath (1993)** avec un nouveau modèle de sol. La forme finale de l'équation différentielle pour le comportement combiné de poutre-sol est obtenue comme suit.

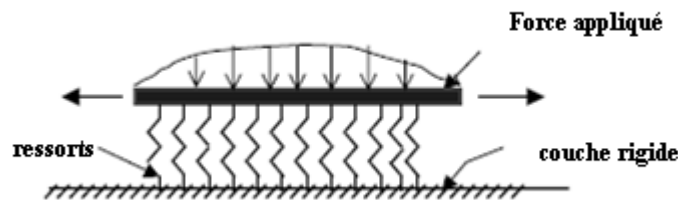


Fig. 2.21- Modèle analogue du Poutre-Poteau repose sur fondation élastique.

Avec:

$$E_b I_b \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - C_{p2} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + C_{p1} w(x) = q(x) \tag{2.8}$$

Là où, $E_b I_b$ est la rigidité de flexion du poutre (constante assumée) ; $w(x)$ est le tassement de la poutre ; $q(x)$ est la charge appliquée ; C_{p1} et C_{p2} sont des constantes.

2.3.3.7 Nouveaux modèles continus de winkler

On l'a observé que, pour modéliser la continuité dans le milieu de sol, généralement un autre élément structural est présenté. Mais dans ce modèle, au lieu de Winkler discret jaillit, les

ressorts sont “inter maille (intermeshed)” de sorte que l'interconnexion soit automatiquement réalisée (*Kurian 2001*). Une représentation schématique du modèle est montrée dans fig. 2.22. Physiquement, l'interconnexion parmi des ressorts de Winkler reliés la poutre de base ou la plaque est réalisé par un certain autre ressort en vertu de leur rigidité axiale, qui n'est pas directement attachée à la base.

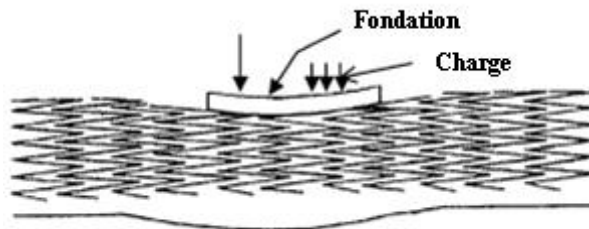


Fig.2.22- Modèle du Winkler inter maille.

L'avantage de ce modèle se situe dans sa capacité d'expliquer l'effet du sol en dehors des frontières de la structure dans la modélisation.

2.3.4 Versions améliorées de modèle continu

2.3.4.1 Modèle de Vlasov

La modélisation du problème d'interaction de plaque-sol est un phénomène tout à fait complexe mathématiquement la réponse du sol est régie par beaucoup de facteurs. Le modèle Winkler est le modèle plus simple employé couramment où on suppose que le sol de base se compose de ressorts élastiques linéaires et chaque ressort est indépendant des autres. Les inconvénients principaux de ce modèle sont la discontinuité dans le déplacement de sol et la nécessité de déterminer le module de la réaction k de sol.

Pour surmonter ce problème, un modèle de fondation plus réaliste est créé pour conduire l'analyse de l'interaction entre la plaque et le sol. **Vlasov** et **Leont'ev** ont développé un modèle de deux-paramètres qui a l'avantage de déterminer des paramètres de sol selon les propriétés matériel de sol et l'épaisseur de la couche de sol par l'introduit d'un paramètre arbitraire, γ , pour caractériser la déformation vertical de profile de sol. (*Vlasov 1949, Vlasov et Leontiev 1960*).

La relation entre le déplacement, w , et la charge, q , est donnée dans ce modèle par.

$$D\nabla^4 w - 2t\nabla^2 + kw = q$$

Ce modèle impose certaines restrictions aux déformations possibles d'une couche élastique. Selon ce modèle,(fig. 2.23).

- a) Le déplacement vertical $w(x,z)=w(x).\Phi(z)$, tel que $\Phi(0)=1$, et $\Phi(H)=0$. Cette fonction décrit la variation du déplacement dans la direction verticale.
- b) Le déplacement horizontal ; on assume que $u(x,z)$ est nulle dans le sol.

La fonction $\Phi(z)$ diminue linéairement avec la profondeur pour une base classique de l'épaisseur finie H . par conséquent, dans ce cas, $\Phi(z) = 1-(z/H)$.

Pour une fondation se reposant sur une épaisseur relativement épaisse (ou une couche élastique infinie), le choix peut être $\Phi(z) = (\sinh[\gamma(H-z)] / \sinh[\gamma H])$,

Où γ est un coefficient selon les propriétés élastiques de la base définissant le taux de diminution des déplacements avec la profondeur. Le principe du travail virtuel, la fonction de réponse pour ce modèle est obtenue et rapportée par **Sarvesh Chandra**:

$$p = kw - 2t \frac{d^2w}{dx^2} \tag{2.9}$$

Avec :

$$k = \frac{E_0}{(1-\nu_0)^2} \int_0^H \left(\frac{dh}{dz}\right)^2 .dz \quad ; \quad t = \frac{E_0}{4.(1-\nu_0)} \int_0^H h^2 dz$$

$$E_0 = \frac{E}{(1-\nu_0)^2}$$

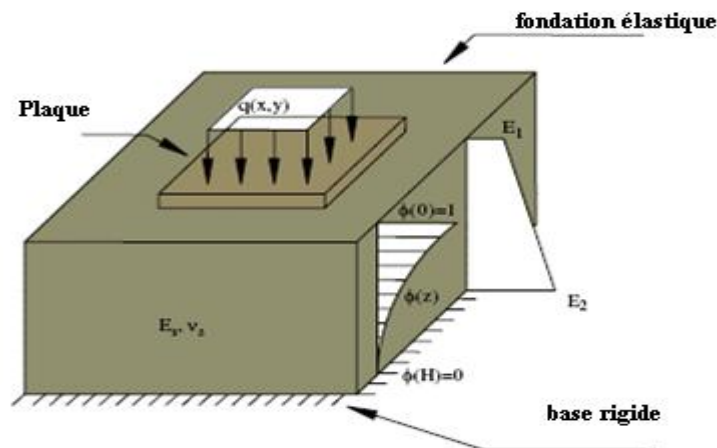


Fig.2.23- Modele du Vlasov.

Dans l'ordre pour calculer ces paramètres, **Vlasov** et **Leont'ev** ont introduit un autre paramètre, γ , pour caractériser le profil de déformation vertical dans le sol continu. L'avantage de

l'approche de **Vlasov** et **Leont'ev** est l'élimination de la nécessité pour déterminer les valeurs de la réaction de sol, k , et du paramètre de cisaillement, t , arbitrairement, parce que ces valeurs peuvent être calculés par les propriétés matérielles E_s, ν_s et H du sol. **Vlasov** et **Leont'ev** ont assumé un modèle de déplacement du milieu de sol en employant une valeur arbitraire de γ , mais les auteurs n'ont fourni aucun mécanisme pour le calcul de γ .

Nogami et **Lam (1987)** ont employé une idée semblable pour développer un modèle à deux-paramètre pour des poutres sur les fondations élastiques. **Yang (1972)**[12] utilise modèle à deux paramètres du **Vlasov** et **Leont'ev** pour l'analyse des plaques rectangulaires sur une fondation élastique. Il a combiné la méthode d'élément fini pour la plaque et la technique de différence-finie pour les conditions aux limites, qui sont calculés à partir des propriétés de sol. Il n'a fourni aucune méthode pour avoir la valeur de γ .

2.3.4.2 Base de Reissner

Selon ce modèle, le rapport de déflexion de pression à l'interface entre la fondation et le sol est obtenu par l'intrusion d'une couche de base au-dessous de la fondation.

Le rapport de pression-déflexion est donné par.

$$C_1 w - C_2 \nabla^2 w = p - \frac{C_2}{4C_1} \nabla^2 p \quad (2.10)$$

$C_1 = E/H$; $C_2 = HG/3$; E, G sont les constantes élastiques du matériel de base et H est l'épaisseur de la couche de base.

L'objectif de cette recherche est de développer une approche réalisable pour l'analyse des plaques sur les fondations élastiques. Différents genres de chargement et de géométrie structurale sont considérés. Le module d'élasticité de sol est assumée varie linéairement de haut à au bas.

Un des buts les plus importants de cette recherche est d'élaborer un procédé réaliste pour l'analyse des plaques sur la base élastique. D'ailleurs, le chargement sur la plaque est complètement arbitraire. Par conséquent, le choix d'un modèle d'élément finis pour la plaque est considéré efficace pour expliquer différent géométries des plaques, les cas de chargement, et les états de frontière.

Pour la modélisation de sol, le modèle modifié de **Vlasov** est employé. Les valeurs du module de la réaction de sol, k , et du paramètre de cisaillement, t , sont calculées par le modèle.

Pour l'analyse des plaques, la théorie de plaque de **Mindlin**, qui s'applique à l'analyse des plaques minces et épaisse est employée. Un programme informatique est développé et employé pour résoudre quelques cas réalistes des plaques chargées sur les bases élastiques pour

déterminer les déplacements et les efforts internes. La comparaison est faite, dans la mesure du possible, avec les résultats obtenus par d'autres chercheurs.

Chapitre 3

Equations de Base du Plaque et de Sol

CHAPITRE 3

Equations de Base du Plaque et de Sol

3.1 Formulation du comportement de la plaque

Nous considérons une plaque rectangulaire orthogonale avec a et b comme côtés et épaisseur h . Nous sélectionnons un système de coordonnées cartésiennes x, y, z . Les axes x et y sont placés dans le plan moyen de plaque et orientés le long des bords de la plaque. L'axe z est choisi perpendiculaire au plan moyen de la plaque c'est-à-dire normal au plan x,y . La figure 3.1 montre une plaque sous un chargement latéral dans le plan (normal et cisaillement). La figure 3.1 montre, la combinaison, des résultantes des forces intérieures dans un élément de cette plaque dans sa configuration déformée, nous avons à considérer l'état déformé de la plaque puisque la théorie de stabilité suppose l'existence d'un état d'équilibre non plat, le système résultant de forces dans une plaque consiste en :

-des forces normales dans le plan et des forces de cisaillement : N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx} ;

-des moments de flexion : M_x, M_y ;

-des couples de torsion : M_{xy}, M_{yx} ;

-les forces de cisaillement transversales (ou hors plan) : Q_x, Q_y .

Toutes ces quantités sont mesurées par unité de largeur de la plaque ainsi les forces intérieures ont des unités de forces par unité de largeur ; les moments intérieurs ont des unités de moment par unité de largeur.

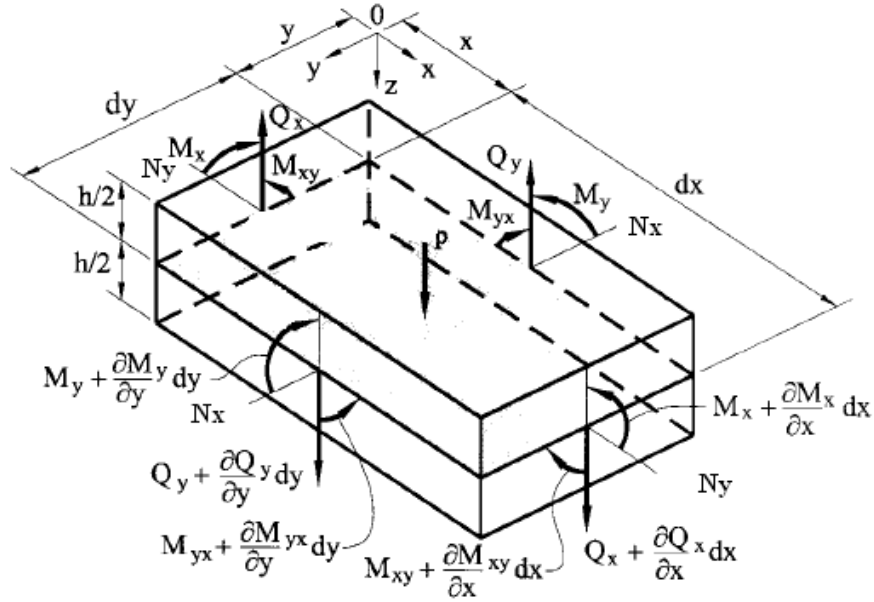


Fig. 3.1- Contraintes élémentaires dans un élément différentiel de plaque.

Les contraintes σ_x et σ_y (fig.3.1) produit moments de flexion dans l'élément de plaque en quelque sorte semblable à celui dans la théorie élémentaire de poutre. Ainsi, par l'intégration des composants d'effort normal, les moments de flexion, agissant sur l'élément de plaque sont:

$$d_x = d_y = 1$$

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \cdot dz & , & & N_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y \cdot dz \\
 N_{xy} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xy} \cdot dz & , & & N_{yx} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yx} \cdot dz \\
 Q_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xz} \cdot dz & , & & Q_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yz} \cdot dz \\
 M_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz & , & & M_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y \cdot z \cdot dz \\
 M_{xy} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz & , & & M_{yx} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} \cdot z \cdot dz
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dû à la condition de l'équilibre rotationnel d'un élément infinitésimal, nous devons avoir.

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx},$$

Ainsi à partir des relation (3-1) il en résulte que $N_{xy} = N_{yx}$ et $M_{xy} = M_{yx}$.

De même, les moments fléchissant produits par les efforts de cisaillement $\tau = \tau_{xy} = \tau_{yx}$ peut être calculé avec

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} z dz \quad \text{et} \quad M_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} z dz \quad (3.2)$$

Mais, $\tau = \tau_{xy} = \tau_{yx}$, donc $M_{xy} = M_{yx}$.

L'équation d'équilibre des moments sera.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p_z(x, y) \quad (3.3)$$

Les relations contraintes déformations sont donner par :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Et, les relations déformation-déplacement

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Par substitution équation (3.5) dans équation (3.4) les équations de contrainte en fonction des déplacements deviennent:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{E.z}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{E.z}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)\end{aligned}\quad (3.6)$$

L'intégration des équations des moments fléchissant après la substitution des contraintes normale donne.

$$\begin{aligned}M_x &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = D(\kappa_x + \nu\kappa_y)\end{aligned}\quad (3.7)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = D(\kappa_y + \nu\kappa_x)\quad (3.8)$$

Avec

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

D : La rigidité de flexion de la plaque.

De la même manière :

$$\begin{aligned}M_{xy} = M_{yx} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau.z.dz = -2G \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} .z^2 .dz \\ &= -(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = D(1-\nu)\chi\end{aligned}\quad (3.9)$$

La substitution des équations (3.7), (3.8) et (3.9) dans l'équation. (3.3) donne l'équation de la plaque soumise aux charges distribuées $P_z(x,y)$, [2]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z(x,y)}{D}\quad (3.10)$$

3.1.1 Théorie de Reissner

Les principales limitations de théorie classique du plaque sont partiellement éliminées par **Reissner** en présentant l'influence du cisaillement transversal et cela de l'effort transversal directe σ_z . **Reissner** a fait deux hypothèses. D'abord, il a assumé une variation linéaire du champ de déplacement par l'épaisseur de la plaque. En second lieu, **Reissner** a supposé que, comme la plaque se fléchit, les sections plan restent plans mais les lignes à l'origine perpendiculaires à la surface moyenne ne reste pas perpendiculaires à elle après déformation (fig. 3.2). Des rotations normales par rapport au plan moyen sont exprimées par.

$$w_x = -\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{6}{5Gt} q_x \quad , \quad w_y = -\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{6}{5Gt} q_y \quad (3.11)$$

Reissner a formulé les équations de la plaque par l'application du théorème de **Castigliano** de moindre travail. Il a obtenu l'équation suivante :

$$D\nabla^2\nabla^2\omega = p_z - \frac{t^2}{10} \frac{2-\nu}{1-\nu} \nabla^2 p_z. \quad (3.12)$$

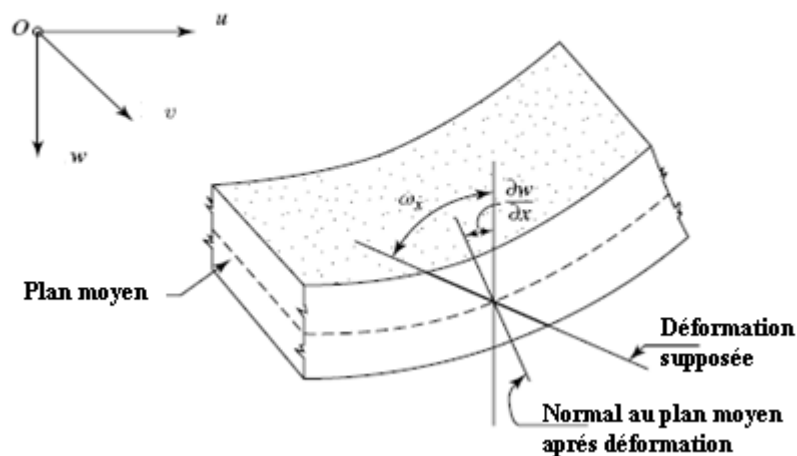


Fig. 3.2- Plaque déformée selon Reissner.

Bien que, **Reissner** ait raffiné sa théorie, et même formulé les équations différentiels en termes de déplacement transversal $w(x, y)$ comme variable simple, *solutions de ces équations restent extrêmement exigeant*. Pour cette raison des théories simplifiées ont été présentées. **Speare et Kemp**, par exemple, les mêmes modèle que Reissner mais ont accepté une correction légèrement inférieure.

3.1.2 Théorie de Mindlin

La théorie la plus couramment employée pour modéliser les plaques épaisses a été développées par **Mindlin**. Elle est basée sur une théorie de déformation utilisé les prétentions cinématiques suivantes pour déplacements dans le plan :

$$\begin{aligned} u &= z \cdot \theta_x(x, y), \\ v &= z \cdot \theta_y(x, y). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Où $\theta_x(x, y)$ et $\theta_y(x, y)$ représentent les déformations du plan-moyen. La formulation de la théorie de **Mindlin** est identique à celle de **Reissner**, Et, dans ce cas-ci

$$w_x = \theta_x \quad \text{et} \quad w_y = \theta_y \quad (3.14)$$

Les équations du déplacements (u, v) rapporte des valeurs constantes pour les contraintes de cisaillement transversale et les efforts distribué qui correspond. Puisque la vraie distribution d'effort dans les plaques épaisse modéré est parabolique, cette prétention est incorrecte. En conséquence, il était nécessaire de présenter un facteur de correction κ^2 , qui a été évalué par comparaison avec les solutions élastiques exactes. Suivant l'approche du **Timoshenko** a utilisé valeur modérément profonde pour poutre $\kappa^2 = 5/6$.

Mindlin note que les valeurs du facteur de correction de cisaillement κ^2 sont des fonctions linéaires du coefficient de Poisson ν . Il fournit à deux évaluations basées sur la comparaison de sa théorie par la solution plus exacte de l'élasticité tridimensionnelle. La première évaluation donne $0.75 \leq \kappa^2 \leq 0.91$ pour $0 \leq \nu \leq 0.5$. La deuxième évaluation est basée sur la vitesse d'onde

de cisaillement $\kappa^2 = \pi^2/12 = 0.822$. Si $\nu = 0.3$, puis $\kappa^2 \approx 0.86$, qui compare favorablement avec la prétention généralement utilisée de $\kappa^2 = 5/6 = 0.8333$.

Plus expression exacte pour facteur de correction du cisaillement est $\kappa^2 = 20(1 + \nu)/(24 + 25\nu + \nu^2)$, qui considère même la variation parabolique des forces de cisaillement. Ceci l'expression donne, pour $\nu = 0.3$, $\kappa^2 = 0.823$, qui est, pour tous les buts pratiques.

Wittrick en 1987 propose une approximation de κ^2 dans le cas d'une plaque simplement supportée :

$$\kappa^2 = \frac{5}{(6 - \nu)}$$

A ce jour, le facteur κ^2 , lorsqu'il est utilisé, est toujours sujet à discussion. L'ensemble des auteurs s'accordent cependant pour juger de son influence sur les résultats.

D'autres théories ne nécessitant pas de proposer de facteur de correction, notamment **Reddy (1984)** qui utilise une interpolation polynomiale du troisième ordre pour la déformation en cisaillement. Ces théories d'ordre supérieur impliquent cependant une mise en œuvre difficile par rapport au faible gain de précision sur les résultats [14].

A partir du théorème d'énergie potentielle minimale, **Mindlin** a décrit les équations d'équilibre suivantes :

$$\begin{aligned} \kappa^2 Gt(\nabla^2 \omega + \phi) + p_z(x, y) &= 0, \\ \frac{D}{2} \left[(1 - \nu)\nabla^2 \theta_x + (1 + \nu)\frac{\partial \phi}{\partial x} \right] - \kappa^2 Gt(\theta_x + \frac{\partial \omega}{\partial x}) &= 0, \\ \frac{D}{2} \left[(1 - \nu)\nabla^2 \theta_y + (1 + \nu)\frac{\partial \phi}{\partial y} \right] - \kappa^2 Gt(\theta_y + \frac{\partial \omega}{\partial y}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Où :

D représente la rigidité de flexion de la plaque donnée,

G et ν sont le module le module de cisaillement et le coefficient de Poisson, respectivement,

κ^2 Le facteur de correction de cisaillement.

On a :

$$\phi_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y}. \quad (3.16)$$

- Les équations des moments sont données par

$$\begin{aligned} M_x &= D \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right), \\ M_y &= D \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right), \\ M_{xy} &= M_{yx} = \frac{1-\nu}{2} D \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

- Les expressions des efforts de cisaillement sont tels que

$$\begin{aligned} Q_x &= \kappa^2 Gt \left(\theta_x + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right), \\ Q_y &= \kappa^2 Gt \left(\theta_y + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.2 Formulation du comportement du sol

Le développement théorique des équations de comportement d'une plaque sur une fondation élastique suivant les indications du schéma 3.3. Le concept le plus important ici est d'inclure toute l'énergie dans la plaque et dans le sol.

3.2.1 Modèle de Winkler

Dans le modèle de **Winkler**, le rapport entre la pression externe p et la déflexion w de la surface de base est exprimé par :

$$p = kw \quad (3.19)$$

Là où w , le déplacement vertical du sol, est proportionnel à la pression de contact, p . La constante de proportionnalité, k , s'appelle « le module de la réaction de sol ». La loi de comportement est donnée par :

$$D\nabla^4 w + kw = q, \quad (3.20)$$

D : la rigidité de la plaque,
 ∇^4 : Opérateur bi-harmonique.

Dans le modèle de *Winkler*, on le suppose que le sol de base se compose linéairement des ressorts élastiques qui sont étroitement aligné et indépendant de l'un l'autre et a une rigidité égale à « k » Le modèle désigné également sous le nom d'un « modèle d'un-paramètre. » Un modèle de déformation d'une plaque uniformément chargé pour ce modèle est montré sur le schéma 3.3 (a). Comme peut être vu dans cette figure, le déplacement du plaque est indépendant du déplacement du sol en dehors de la région chargée, on suppose que ce qui est zéro. On observe une discontinuité dans le déplacement de sol entre le sol sous la structure et cet extérieur de la structure. Il peut montrer que le modèle de *Winkler* implique deux problèmes majeurs. Le premier problème est que le déplacement du plaque est une constante quand il est soumis à une charge uniformément distribuée, q . Il n'y a aucun moment de flexion ou force de cisaillement dans la plaque pendant cette condition de charge, qui est complètement peu réaliste et non conservative. Le deuxième problème est que la valeur de k n'est pas unique, et elle dépend de diverses propriétés du plaque et du sol, aussi bien que le chargement (*Vallabhan, Das et Straughan, 1991*).[8]

Beaucoup de chercheurs ont travaillé pour développer une technique pour évaluer le module de la réaction k . *Terzaghi (1955)* fait quelques recommandations, et propose des valeurs de k pour une dalle rigide de longueur 0.305 m (1 feet), placée sur un sol ; cependant, le procédé pour calculer une valeur de k pour l'utiliser dans une plus grande dalle n'était pas spécifique.

Biot (1937) a résolu le problème pour une poutre infini avec une charge concentrée reposant sur un sol tridimensionnel élastique continu. Il a trouvé une corrélation de la théorie élastique du milieu continu et le modèle de *Winkler* où les moments maximum dans la poutre sont égalisés.

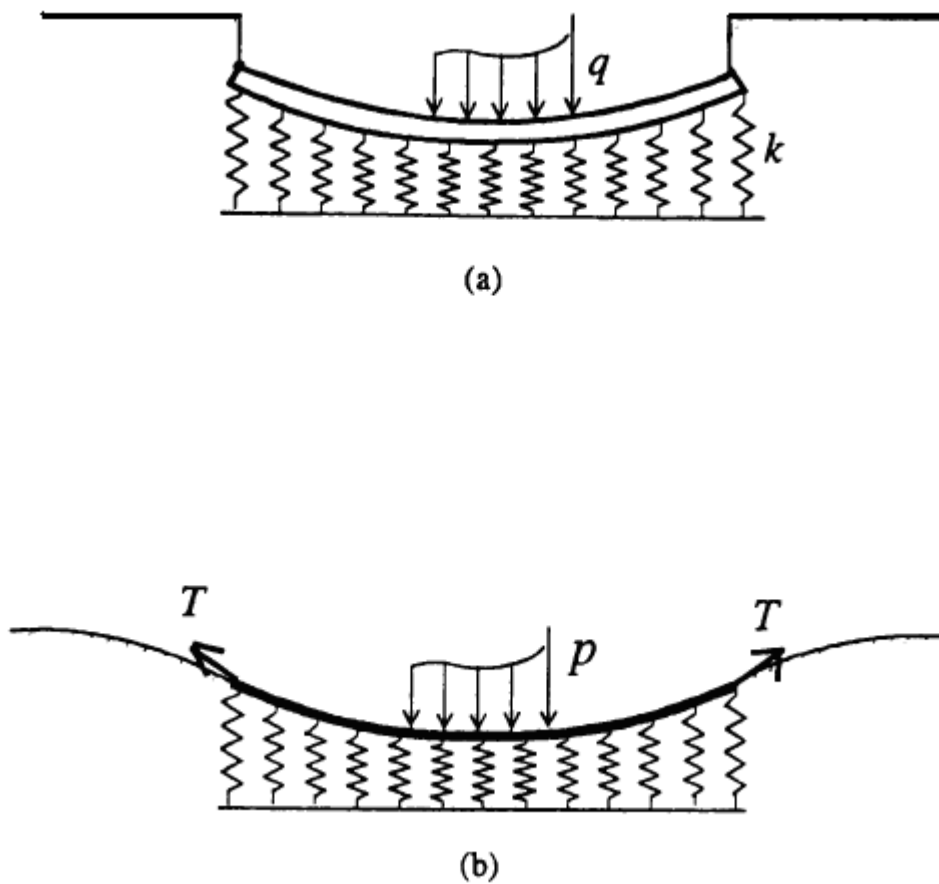


Fig. 3.3- Déformation d'une plaque chargée.

(a) modèle de Winkler, (b) modèle de deux paramètres.

Il a développé une équation empirique donnant k .

$$k = \frac{0.95E_s}{(1-\nu_s^2)} \left[\frac{B^4 E_s}{(1-\nu_s^2)EI} \right]^{0.108} \quad (3.21)$$

Avec :

E_s = module d'élasticité du sol ;

ν_s = coefficient de Poisson du sol ;

B = largeur de la poutre ;

EI = rigidité de flèche de la poutre.

Pour les raisons semblables, **Vesic (1961)** essayé de développer une valeur pour k , excepté, au lieu des moments de flexion assortis, il a assorti les déplacements maximum de la poutre dans les deux modèles (massif élastique contenu et *Winkler*). Il a obtenu l'équation du k pour l'usage dans le modèle de *Winkler* :

$$k = \frac{0.65E_s}{(1-\nu_s^2)^{1/2}} \sqrt{\frac{B^4 E_s}{EI}} \quad (3.22)$$

D'après **Daloglu et Vallabhan** [15] beaucoup des codes informatiques ont été développés par des ingénieurs pour analyser des poutres et des radiers sur une fondation élastique ; l'utilisateur du code doit déterminer la valeur de k pour représenter le sol. Il n'y a aucune manière simple pour déterminer la valeur de k parce que sa valeur n'est pas unique pour un type indiqué de sol. Habituellement, le sol est stratifié, ayant différentes épaisseurs, et la valeur équivalu de k doit être au moins en fonction de l'épaisseur de la couche de sol, même lorsque ses propriétés matérielles demeurent les mêmes. Plus l'épaisseur est grande, plus la valeur du k est inférieure.

Beaucoup de chercheurs ont prouvé ce manque d'unicité de k dans le passé. **Bowles (1988)** et **Coduto (1994)** ont proposé que la valeur de k doit être augmentée sur les bords de radier. En d'autres termes, la valeur de k varie pour différents propriétés matériels et géométriques du sol. Pour éviter cette condition, un modèle de deux-paramètre a été suggéré par **Pasternak (1954)** et plus tard par **Vlasov et Leont'ev (1966)**. (**Vallabhan et Daloglu 1997, 1999 ; Vallabhan et Das 1988, 1989 ; Straughan 1990** [22] ; **Turhan 1992** [18]).

L'Utilisation des paramètres adimensionnels, les auteurs ont essayé d'évaluer la valeur de k pour utiliser dans le modèle de *Winkler* pour l'analyse des radier soumises des charges concentrer et uniformément. On fournit des graphiques dont des valeurs équivalentes de k (de fig. 3.4 à 3.7). Le module de la réaction k de sol peut être calculé à partir de ce qui suit.

$$r = \sqrt[4]{\frac{DH}{Es}} \quad \& \quad k = \frac{K_{nw} D}{r^4}$$

D : rigidité de flexion du radier ;

Es : moduls d'élasticité du sol ;

H : profondeur du couche de sol ;

K_{nw} : paramètre adimensionnel du Winkler.

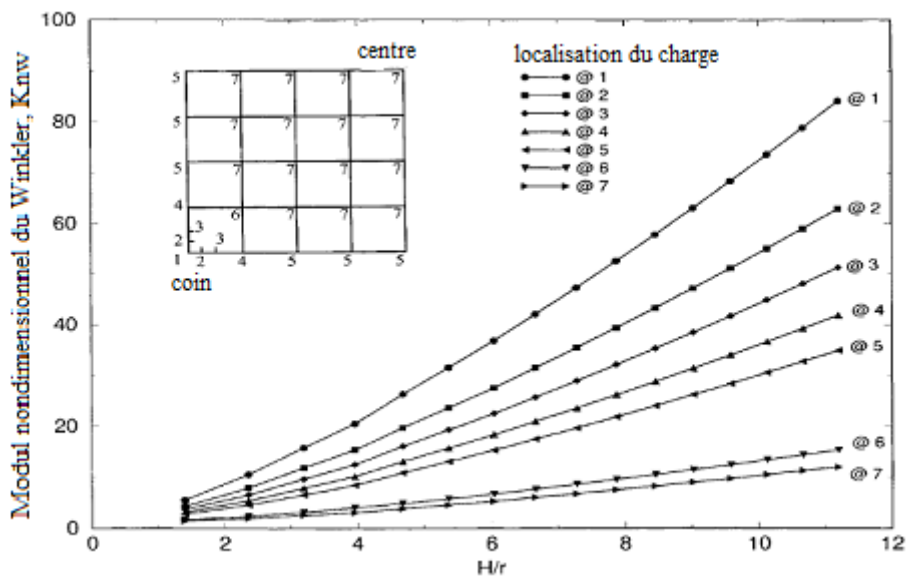


Fig. 3.4- Réaction adimensionnel du model de Winkler.

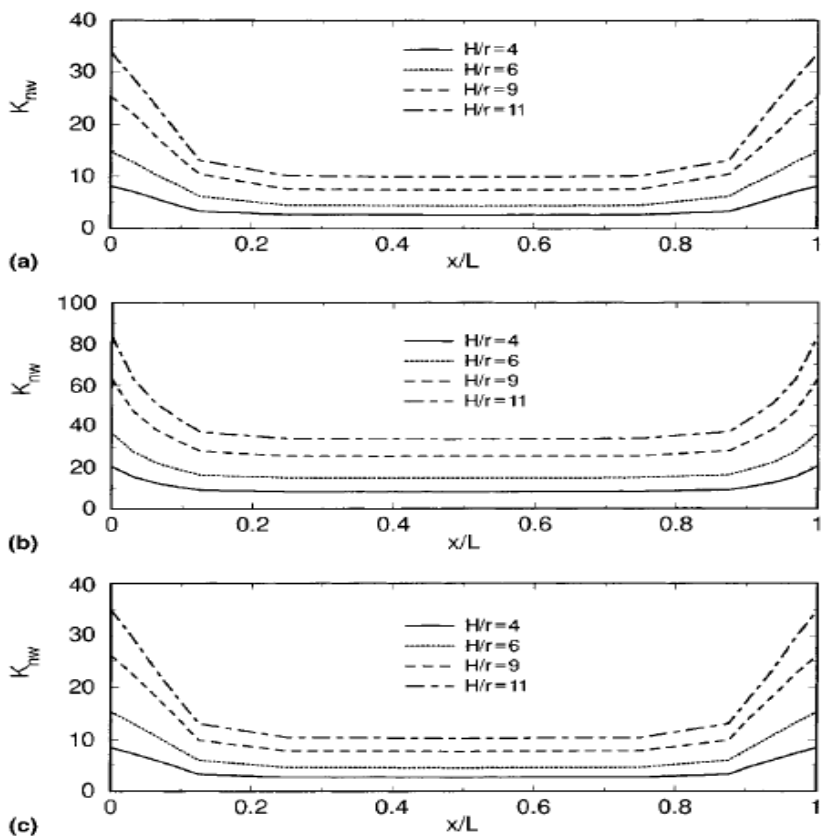


Fig. 3.5- Variation de module adimensionnel K_{nw} :

(a) Centre ;(b) Côté ;(c) 1/4 de la plaque.

Et un exemple est effectué pour comparer les résultats à ceux de la méthode modifiée de *Vlasov* et à ceux obtenus à partir d'autres chercheurs. Voir fig 3.6.

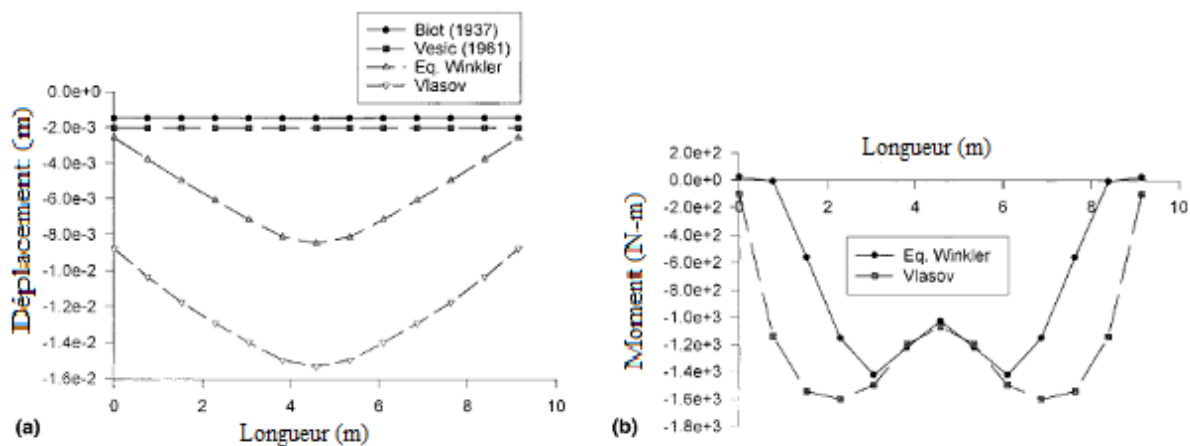


Fig. 3.6- Comparaisons des résultats dans le cas d'une charge uniformément répartie :
 (a) Déplacement ; (b) Moment de flexion.

Mofid et Noroozi [16] ont assumé que le paramètre constant de *Winkler* est variable tel que les ressorts non-uniformes avec la fonctionnalité de la position de domaine en plus de la plaque et la poutre pour considérer le comportement non-uniforme de la fondation. Et l'équation de système est résolue par l'utilisation de la méthode de *Galerkin*.

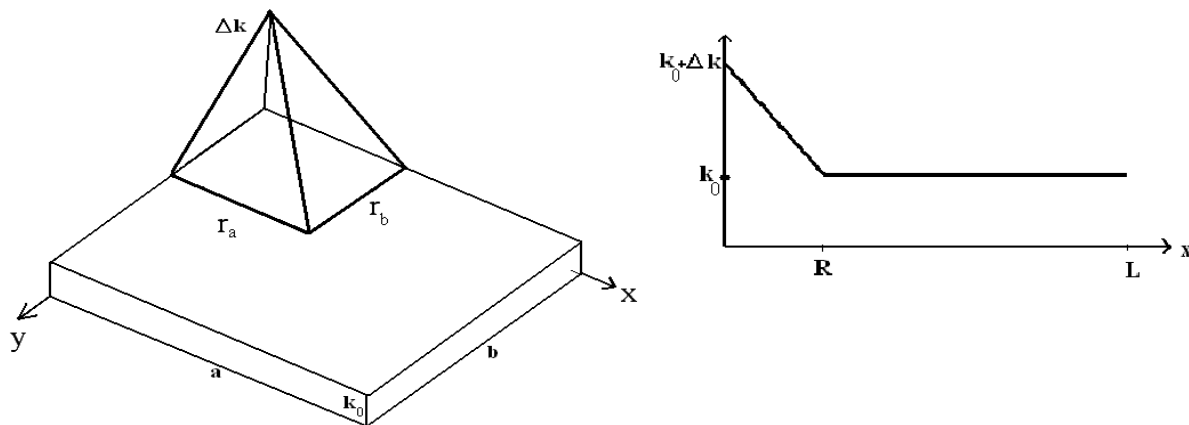


Fig. 3.7- Variation du coefficient de Winkler par rapport position.

L'équation du paramètre variable de *Winkler* sera :

$$k_{(x,y)} = k_0 + \Delta k \left(1 - \frac{x}{r_a}\right) \left(1 - \frac{y}{r_b}\right) \left[1 - u_{(x-r_a)}\right] \left[1 - u_{(y-r_b)}\right] \tag{3.23}$$

Avec : $u_{(x-ra)}, u_{(x-rb)}$ sont les pas (steps)

Moayed et **Janbaz** [17] ont essayé de modéliser l'effet de la taille de la plaque sur un sol argileux avec l'utilisation d'un logiciel d'élément fini (plaxis 3D) pour rechercher (enquêter) la formule de **Terzaghi** sur la détermination du module de réaction du sol.

Les résultats obtenus pour la valeur de k dans cette étude sont plus grands que ceux prévus par la formule de **Terzaghi**; selon l'équation de **Terzaghi** d'équation obtenue est:

$$k = 1.33 * K_{sp} \left(\frac{B_p}{B} \right)^{0.73} \quad (3.24.a)$$

$$k = K_{sp} \left(\frac{B_p}{B} \right) \quad \text{« Equation de Terzaghi »} \quad (3.24.b)$$

La valeur du module de sol peut être obtenue par les approches suivantes :

- Essai de charge la plaque,
- Essai de consolidation,
- Essai à triaxiale, et
- Essai de CBR.

Cependant, les limitations de l'hypothèse de **Winkler** se situent dans le fait que ce modèle ne peut pas expliquer la dispersion croissant de la charge au-dessus d'un secteur d'influence avec l'augmentation de profondeur. Le démerite le plus sérieux du modèle est concernant l'indépendance des ressorts. Ainsi l'effet de la charge appliquée extérieurement du sol. Ceci n'implique aucun lien cohésif existant parmi les particules comportant le milieu de sol. Par conséquent, plusieurs tentatives ont été faites pour développer les modèles modifiés pour surmonter ces goulots. [8]

3.2.2 Modèle des Deux-Paramètre

Plusieurs chercheurs, réalisant l'inopportunité de la représentation du sol dans le modèle de **Winkler**, ont essayé de rendre le modèle plus réaliste. Un des problèmes dans le modèle de **Winkler** est qu'il n'y a aucune interaction entre les ressorts verticaux. Pour réaliser un certain genre d'interaction entre ces éléments de ressort, **Filonenko-Borodich (1940)** essayent pour

relier les extrémités supérieures des ressorts à une membrane élastique étirée à une tension constante T . (voir le schéma 3.3 (b).)

La relation entre la charge, p , et la déflexion, w , dans ce modèle est définie comme

$$p = kw - T\nabla^2 w \quad (3.25)$$

∇^2 est l'opérateur de Laplace

Bien que ce soit approprié, aucune méthode n'a été donnée pour le calcul de k et de T , excepté par l'expérience étendue et la corrélation empirique. **Hetenyi (1946 ; 1950)** accompli une interaction entre les éléments indépendants de ressort en enfonçant une plaque additionnel avec une rigidité de flexion, D ". Sa relation entre le déplacement, w , et la charge, p , est donnée,

$$p = kw + D\nabla^2 \nabla^2 w, \quad (3.26)$$

La rigidité de flexion de la plaque, D , représente l'interaction entre les éléments de ressort, mais encore aucune méthode n'a été rendue disponible pour déterminer les valeurs de k et de D , excepté peut-être quelques expériences détaillées.

Se rendant compte que le sol est soumis aux déformation de cisaillement en plus des déformation verticales, **Pasternak (1954)** a développé un modèle dans lequel il a assumé une interaction de cisaillement entre les ressorts en reliant les extrémités des ressorts à une poutre ou à une plaque se composant des éléments verticaux incompressibles qui déforment seulement par le cisaillement latéral. La relation de charge-déflexion dans le modèle de **Pasternak** est donnée,

$$p = kw - G\nabla^2 w, \quad (3.27)$$

G représente le module de cisaillement de la base élastique.

Cependant, aucune méthode n'a été donnée pour l'évaluation du k . **Vlasov et Leont'ev (1966)** essayent pour employer une nouvelle approche mathématique pour résoudre le problème ci-dessus. Ils ont développé un modèle de deux-paramètre pour des plaques sur les fondations élastiques utilisé une méthode de variation de la constante. Cette méthode a expliqué la

contrainte de cisaillement négligée dans le sol. La relation entre le déplacement, w , et la charge, q , est donnée dans ce modèle,

$$D\nabla^4 w - 2t\nabla^2 w + kw = q, \quad (3.28)$$

t est le paramètre de cisaillement.

Vlasov et **Leont'ev** sont présentés un autre paramètre, γ , pour caractériser le profil vertical de déformation dans le sol continu. L'avantage de l'approche de **Vlasov** et **Leont'ev** est l'élimination de la nécessité pour déterminer les valeurs de la réaction de sol, k , et du paramètre de cisaillement, t , arbitrairement, parce que ces valeurs peuvent être calculées d'après les propriétés matérielles.

Il a suivi la même valeur recommandée de γ que trouvée **Vlasov** et **Leont'ev**. L'utilisation de calcul variationnel, **Jones** et **Xenophontos** [13] ont proposé une expression pour le calcul de γ . Ils n'ont pas calculé sa valeur, mais leur travail a établi un rapport entre le paramètre γ et la déflexion de la poutre ou la plaque se reposant sur un milieu élastique. Après **Jones** et **Xenophontos**, **Vallabhan** et **Das (1987)** ont développé une méthode itérative pour le calcul du paramètre γ pour des poutres sur une fondation élastique. Ils ont développé tous les paramètres qui influencent sur les valeurs de k et de t . Pour les charges uniformément distribuées, ils ont constaté que la valeur de γ dépend de rapport entre la profondeur du sol et de la longueur des poutres. Ils ont appelé leur modèle un modèle modifié de **Vlasov**. Ces paramètres ont dépendu des propriétés matérielles du sol et de la structure, de la géométrie de la structure, et de la profondeur de la couche de sol, aussi bien que la distribution du chargement de la plaque.

Pour le cas d'une poutre sur une fondation élastique, le rapport entre la déflexion, w , et la charge, q , est donné,

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + kw = q, \quad (3.29)$$

Vallabhan et **Das** ont résolu le problème pour des poutres sur une fondation élastique avec des couches finies de sol. Ils ont employé la méthode de différence-finie pour trois cas de chargement. Ils ont eu une très bonne concordance avec les solutions des éléments finis.

Straughan [22] a appliqué le modèle modifié de **Vlasov** pour analyser des dalles rectangulaires sur les fondations élastiques. Il utilise la technique de différence-finie pour résoudre l'équation de champ (2.28), pour plusieurs cas de chargement.

Entre temps, **Kolar** et **Nemec (1989)** essayent de résoudre le problème plaque sur fondation élastique par la méthode des éléments finis. Ils ont résolu le problème par la méthode des éléments finis tridimensionnel, et le modèle de **Vlasov**.

Energies des efforts total du system sol-structure est.:

$$\Pi = \Pi_p + \Pi_s + V \quad (3.30)$$

Avec

Π_p : L'énergies d'efforts dans la plaque

Π_s : L'énergies d'efforts dans le sol, et

V : L'énergies potentiel des charges extérieure

Les energies de deformation de la plaque et sol s'écrivent comme ci-dessous.

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) [D] \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^T dx dy, \quad (3.31)$$

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_0^H \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dx dy dz, \quad (3.32)$$

Et, de force

$$V = - \int_{\Omega} q.w dx dy \quad (3.33)$$

- Minimisation de l'énergie potentielle totale

L'utilisation du principe variationnel minimisé l'énergie potentiel total.

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} (D \nabla^4 w - 2t \nabla^2 w + kw - q) \delta w dx dy + \int_0^H \left(-m \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + n \phi \right) \delta \phi dx + CF = 0 \quad (3.34)$$

Avec

$$\begin{aligned}
 m &= \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \bar{E} w^2 dx dy \\
 n &= \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} G(\nabla w)^2 dx dy
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Les variations ∂w et $\partial \phi$ ne sont pas égale zéro, les termes entre parenthèse et les conditions au frontière doit être égale à zéro.

L'équation générale du système est :

$$D\nabla^4 w - 2t\nabla^2 w + kw = q \tag{3.36}$$

Dehors du demain de la plaque

$$-2t\nabla^2 w + kw = 0 \tag{3.37}$$

La deuxième expression entre parenthèse du l'équation au dessus est le champ de l'équation de déformation de sol dans la direction vertical, l'équation est

$$-m \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + n\phi = 0 \tag{3.38}$$

Ou, les conditions de frontière sont $\phi(0)=1$ et $\phi(H)=0$

La solution de l'équation préside avec ces conditions des frontières est

$$\phi(z) = \frac{\sinh \gamma(1 - z/H)}{\sinh \gamma} \tag{3.39}$$

Cette fonction de forme est introduite la première fois par *Vlasov et Leont'ev (1960)*.

Avec $(\gamma/H)^2 = n/m$, ou γ représente le paramètre déformation-sol, qui caractérise la distribution vertical de la déformation de sol. Dans le model du *Vlasov* le paramètre γ est déterminé comme fonction du caractéristique du structure et de fondation, utilisé avec procédure d'itération. Premièrement k et deuxièmes $2t$ qui peuvent calculer dépend du paramètre γ .

L'expression générale de γ de la plaque sur fondation élastique est :

$$\left(\frac{\gamma}{H}\right)^2 = \frac{(1-2\nu_s) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\nabla w)^2 dx dy}{2(1-\nu_s) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 dx dy} \quad (3.40)$$

Le paramètre γ varié par le déplacement de la plaque et le profondeur du sol H, et on plus, les tous ces paramètres w, q, k, t, H et γ sont connecté entre eu.[18]

Chapitre 4

Méthode Numérique de Résolution

CHAPITRE 4

Méthode Numérique de Résolution

4.1 Introduction

La méthode d'élément fini peut être considérée comme une généralisation des procédures d'analyse structurale standard, particulièrement la méthode de déplacement, qui permet l'évaluation des efforts et des contraintes dans une structure.

La méthode d'élément fini est une méthode très puissante pour la solution des équations être dans dont les domaines technologie. Dans la méthode, le domaine structural est simplement divisé en régions (éléments finis) de taille et de forme appropriées avec toutes les propriétés matérielles du domaine original étant maintenu dans les différents éléments finis. Par supposé la fonction de déplacement approximatif (des fonctions d'interpolation ou des fonctions de forme) dans un élément, il est possible de dériver la matrice de rigidité d'une structure par utilisation les principes des théorèmes d'énergie ou du travail virtuel. Si les états de l'équilibre sont appliqués à chaque nœud de la structure discrétisée, un ensemble d'équations algébriques simultanées peut être formé, et la solution de ces équations donne tous les déplacements nodaux. Les efforts internes sont alors obtenus par utilisation les valeurs du déplacement nodales calculées.

La recherche considérable a été faite pour analyser la flexion des éléments finis de la plaque et sol. Les chercheurs ont développé tout à fait un certain nombre d'éléments (c.-à-d.,

rectangulaire, triangulaire, quadrilatère, etc.) avec le nombre variable des points nodaux avec différents types de fonctions d'interpolation. Le but du chercheur est de développer un élément qui a le moindre nombre de coefficients et satisfait en même temps aux conditions de frontière telles que la continuité des pentes.

4.2 Formulation de la plaque par la méthode des éléments finis

Dans ce chapitre, les modèles d'élément fini linéaires des théories du plaque de la déformation classique (ou *Kirchhoff* ou mince) et de cisaillement (ou *Mindlin* ou épaisses) pour les éléments rectangulaires sera présenté. Un élément rectangulaire simple à huit nœuds est choisi. Dans n'importe quel milieu le nombre réel de degrés de liberté est infini et, à moins qu'une solution de forme close soit disponible, un exact (dans les prétentions faites) approche est impossible, parce que n'importe quelle approche numérique qu'une solution approximative est essayée en supposant que le comportement du milieu peut être représenté par un nombre fini d'inconnus. Comme précédemment mentionné dans la méthode d'élément fini le milieu est divisé en série d'éléments qui connecté à un nombre fini de points connus sous le nom de points nodaux. Ce processus est connu pendant que la discrétisation et une subdivision typique est montrée.

Pour l'application structurale au moins, l'équation d'équilibre peut être obtenue en réduisant au minimum toute l'énergie potentielle du système. L'énergie potentielle totale peut être exprimée comme :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V [\sigma]^T \cdot \varepsilon \cdot dV - \int_V [\delta]^T \cdot P \cdot dV - \int_S [\delta]^T \cdot q \cdot dS \quad (4.1)$$

Là où, σ et ε sont les vecteurs de contrainte et de déformation respectivement, δ les déplacements à tous points, P les forces de volume et q les tractions (forces de surface) extérieurs appliqués.

Dans cette étude, on traite que le cas bidimensionnel, ou on élimine le deuxième terme de l'équation (4.1) qui caractérise la distribution du travail externe des forces de volume.

La relation (4.1) devient :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V [\sigma]^T \cdot \varepsilon \cdot dV - \int_S [\delta]^T \cdot q \cdot dS \quad (4.2)$$

Le premier terme de la deuxième relation correspond l'énergie de déformation interne, tandis que le deuxième terme représente le travail des forces du surface imposées à la structure.

Dans la méthode d'élément finie de déplacement, on n'assume que le déplacement à des valeurs inconnues seulement aux points nodaux, de sorte que la variation dans n'importe quel élément soit décrite en termes de valeurs nodales au moyen de fonctions d'interpolation. Ainsi

$$\delta = N\delta^e \quad (4.3)$$

Là où, N est l'ensemble de fonctions d'interpolation nommées les fonctions de forme et δ^e est le vecteur des déplacements nodaux de l'élément. Les déformations dans l'élément peuvent être exprimées en termes de déplacements nodaux d'élément comme :

$$\varepsilon = B\delta^e \quad (4.4)$$

Là où B est la matrice de déformation généralement composée de dérivés de la fonction de forme. Finalement les contraintes peuvent être liées aux déformations au moyen d'une matrice d'élasticité D , comme suit

$$\sigma = D\varepsilon \quad (4.5)$$

L'énergie potentielle totale de la structure peut être obtenue par sommation des énergies potentielles totales élémentaires si les éléments ont la compatibilité requise c'est-à-dire un bon choix des fonctions de forme avec le non existence de singularité dans les termes du fonctionnel Π .

On la relation suivante :

$$\Pi = \sum_e \Pi_e \quad (4.6)$$

Π_e : Energie potentielle totale de l'élément « e ».

Après combinaisons de ces relations, on trouve

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} [\delta^e]^T [B]^T DB \delta^e dV - \int_{S_e} [\delta^e]^T [N]^T q dS \quad (4.7)$$

Là où, V_e est le volume d'élément et S_e la surface d'élément chargé.

L'exécution de la minimisation de l'énergie potentielle pour l'élément « e » en ce qui concerne le déplacement nodal δ^e pour l'élément résulte :

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial \delta^e} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial \delta^e} = \int_{V_e} ([B]^T DB) \delta^e dV - \int_{S_e} [N]^T q dS = K^e \delta^e - F^e \quad (4.8)$$

Où,

$$K^e = \int_{V_e} [B]^T D B dV \quad (4.9)$$

Nommé la matrice de rigidité d'élément,

$$F^e = \int_{S_e} [N]^T q dS \quad (4.10)$$

Les forces nodales équivalentes pour l'élément.

Représentation des charges nodales équivalentes : voir figure 4.1.

Deux types de chargement sont considérés, le premier cas de chargement concerne les forces concentrées. Le deuxième cas de chargement concerne une charge distribuée et normale à la surface supérieure de la plaque

$$F_i = \begin{bmatrix} P \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} = \int_{A^e} N_i \begin{bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dA \quad (4.11)$$

Avec

q : intensité de la charge distribuée

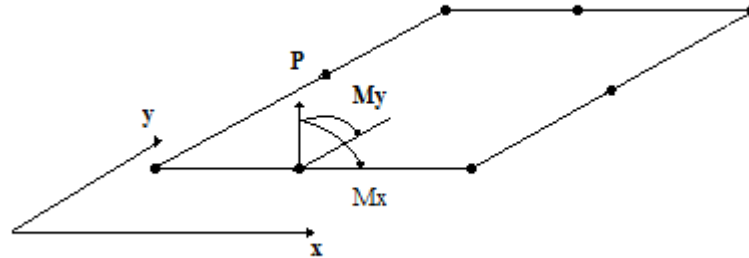


Fig. 4.1- Représentation de la charge nodale.

4.2.1 Analyse du comportement d'une plaque

Les éléments de plaque en flexion jouent un rôle très important dans l'analyse de nombreux types de structures. Une plaque est un solide élastique dont une dimension selon l'épaisseur, est petite en comparaison des deux autres et qui généralement comporte un plan de symétrie au milieu de l'épaisseur que nous appellerons surface moyenne. Par convention, cette surface moyenne sera le plan xy , l'axe Oz correspondant à l'axe transverse selon l'épaisseur.

Les éléments de plaque en flexion de type déplacement peuvent être classés en trois catégories :

- * les éléments basés sur la théorie de **Kirchhoff** (sans effet de cisaillement transverse) ;
- * les éléments basés sur la théorie de **Henky-Mindlin** (avec effet de cisaillement transverse) ;
- * les éléments obtenus à partir d'élément isoparamétrique de volume.

Les éléments basés sur la théorie de **Kirchhoff** sont en principe les mieux adaptés à la modélisation des plaques minces. Leur formulation nécessite que l'approximation d'une seule composante de déplacement $w(x,y)$. Ce n'est qu'une simplicité apparente. La condition de comptabilité inter-élément correspond à la continuité du déplacement transverse, c'est-à-dire à la continuité de w et de la pente normale $\frac{\partial w}{\partial n}$. Cette condition ne peut généralement être satisfaite qu'avec des éléments sophistiqués et d'ordre élevé.

Les éléments basés sur la théorie de **Henky-Mindlin** avec prise en compte du cisaillement transverse sont les mieux adaptés dans les cas des plaques épaisses d'épaisseur modérée. Leur formulation est basée sur une approximation des trois variables indépendantes w , θ_x et θ_y . Cependant, on note que n'interviennent que des dérivées premières de w , θ_x et θ_y dans l'expression de l'énergie de déformation. La conformité de ces éléments est facilement obtenue, en effet, la condition de compatibilité inter-éléments ne nécessite qu'une continuité. Ainsi, les fonctions d'interpolation usuelles peuvent être utilisées.

4.2.2 Hypothèses fondamentales

1 : Les contraintes normales σ_{zz} sont négligeables par rapport aux autres composantes de contraintes $\sigma_{zz} = 0$.

2 : Les pentes de la surface moyenne après déformation sont supposées petites par rapport à l'unité.

3 : Négligence de l'interaction des phénomènes de membrane et de flexion due aux grands déplacements, en d'autres termes, la négligence des contraintes dans la surface moyenne (membrane) induites par les déformations transverses (flexion).

4 : les points situés sur une normale à la surface moyenne avant déformation restent sur cette normale au cours de la déformation. Ceci revient à négliger l'effet de cisaillement transverse, $\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$.

La plupart des théories des plaques admettent l'hypothèse 1. Les hypothèses 2 et 3, correspondent aux hypothèses classiques des petites déformations de la théorie de l'élasticité linéaire. Donc, la théorie de **Henky,Mindlin** et **Reissner** (hypothèses 1,2 et 3) ou théorie linéaire des plaques avec cisaillement transversale ; la théorie de Kirchhoff (hypothèses 1,2,3 et 4) ou théorie linéaire des plaques sans cisaillement transversale.

Le champ des déformations sera spécifié par trois variables indépendantes qui sont le déplacement vertical « w » et les deux rotations « θ_x » & « θ_y », présenté au figures (4.2).

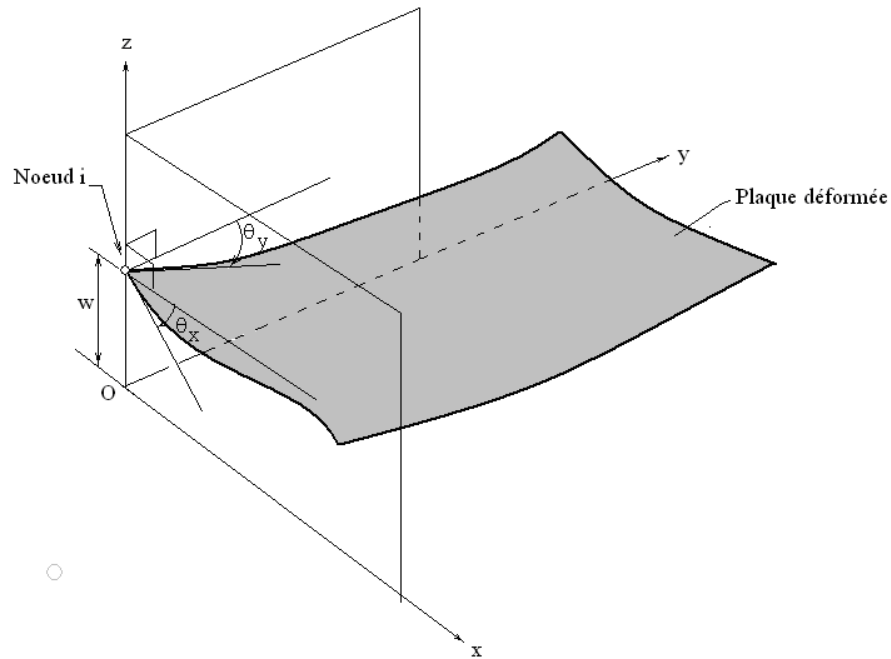


Fig. 4.2- Variables nodales du problème de flexion d'une plaque.

D'après la figure (4.2), le vecteur de déplacement est :

$$\delta = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \phi_x \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) - \phi_y \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

ϕ_x, ϕ_y : Représentent les déformation dues au cisaillement.

Le vecteur de déformation est donné par :

$$\varepsilon = \{\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}, \phi_x, \phi_y\}^T \quad (4.13)$$

Avec

$\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$: Représentent les déformations dues à la flexion.

Donc, le vecteur de déformation ε admet les deux vecteurs composants suivants :

Le vecteur de déformation $\{\chi\}$ est donnée par :

$$\{\chi\} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{array} \right\} \quad (4.14)$$

Et, le vecteur de cisaillement $\{\phi\}$ est donnée par :

$$\{\phi\} = \left\{ \begin{array}{l} \phi_x \\ \phi_y \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{array} \right\} \quad (4.15)$$

4.2.3 Relation contrainte – déformation

Le vecteur de contrainte $\{\sigma\}$ en un point de la plaque est donnée par :

$$\{\sigma\} = \{M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y\}^T \quad (4.16)$$

Les relations des vecteurs des moments et des efforts tranchants sont :

$$\{M\} = \left\{ \begin{array}{l} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \int \sigma_x z \cdot dz \\ \int \sigma_y z \cdot dz \\ \int \tau_{xy} z \cdot dz \end{array} \right\} \quad (4.17)$$

$$\{Q\} = \left\{ \begin{array}{l} Q_x \\ Q_y \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \int \tau_{xz} \cdot dz \\ \int \tau_{yz} \cdot dz \end{array} \right\} \quad (4.18)$$

Dans le cas d'un matériau isotrope homogène.

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D_f] \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

Avec

$$[D_f] = \frac{E_p t_p^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \\ \nu & 1 & \\ & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = [D_c] \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

Avec

$$[D_c] = \frac{E_p t_p}{2\alpha(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\alpha = 5/6$ facteur de correction de cisaillement.

Energie potentielle totale

En combinant ces équations. L'énergie potentielle totale s'écrit :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A (\{M\}^T \{\chi\} + \{Q\}^T \{\phi\}) dA - \int_A \{q\} \{\delta\} dA \quad (4.21)$$

L'expression finale de l'énergie potentielle est :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A (\{\chi\}^T [D_f] \{\chi\} + \{\phi\}^T [D_c] \{\phi\}) dA - \int_A \{q\} \{\delta\} dA \quad (4.22)$$

4.2.4 Expression des fonctions de forme

X_i, Y_i : coordonnées du nœud « i »

n : nombre total des éléments

$$\sum_i N_i = \mathbf{1}$$

$$\begin{aligned}
 X(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) X_i \\
 Y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) Y_i
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

Pour l'interpolation des déplacements. On a la relation suivante :

$$\delta = \sum_{i=1}^n N_i \delta_i
 \tag{4.24}$$

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum N_i w_i \\ \sum N_i \theta_{xi} \\ \sum N_i \theta_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ & & & & N_8 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & N_8 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \vdots \\ \vdots \\ w_8 \\ \theta_{x8} \\ \theta_{y8} \end{Bmatrix}
 \tag{4.25}$$

Avec $[N_i] = N_i [I]_{3 \times 3}$

Où $[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Les expressions des fonctions de forme d'élément isoparamétrique à 8 nœuds sont illustrées comme suite :

$$N_1(\xi_{PG}, \eta_{PG}) = (-1 + \xi_{PG}\eta_{PG} + \xi_{PG}^2\eta_{PG}^2 - \xi_{PG}^2\eta_{PG} - \xi_{PG}\eta_{PG}^2)/4$$

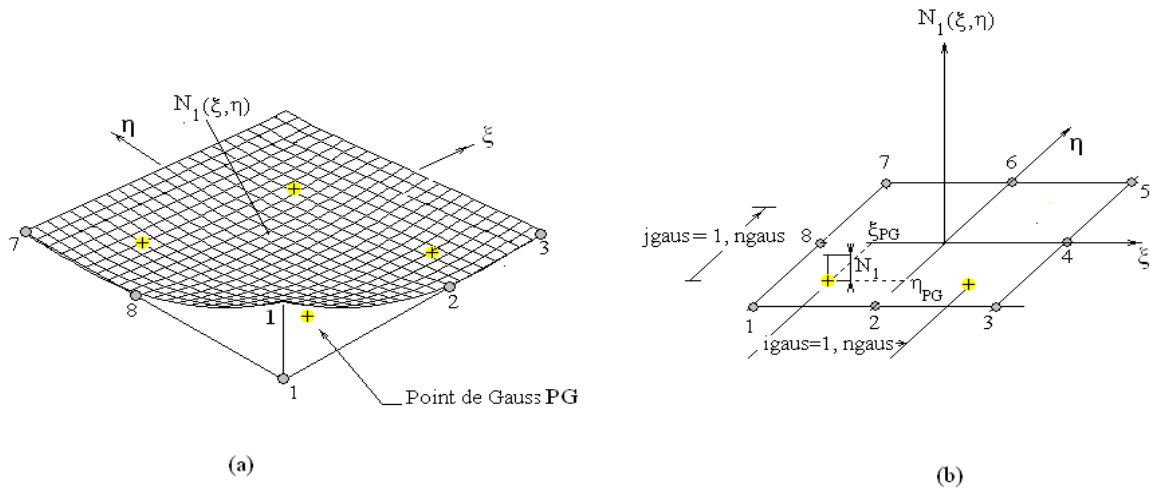
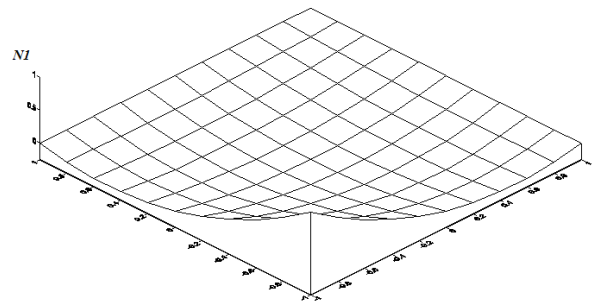
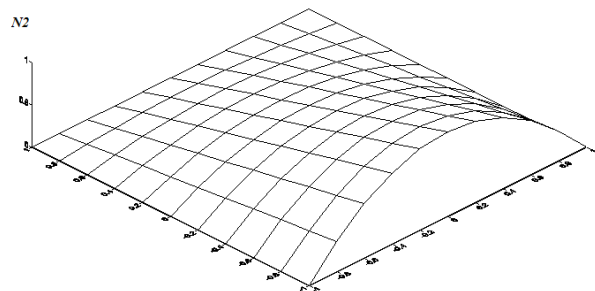


Fig. 4.3- Élément quadrilatère à 8 nœuds ;(a) Schéma de la fonction de forme N_1 ,(b) Position des points de Gauss.

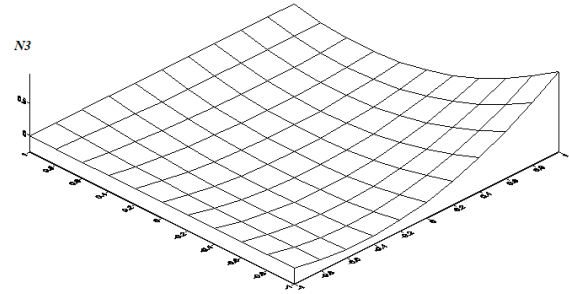
$$N_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$



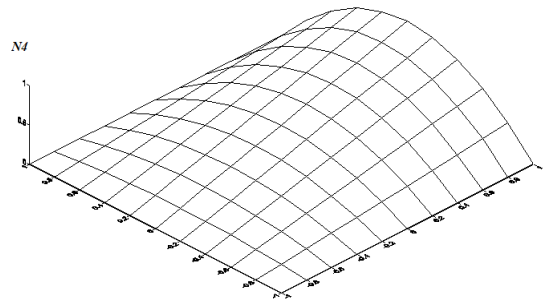
$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$



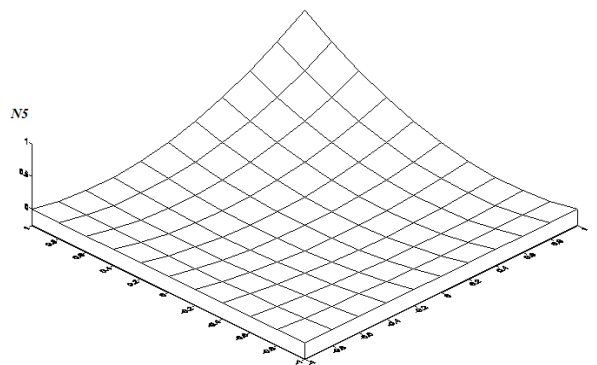
$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1)$$



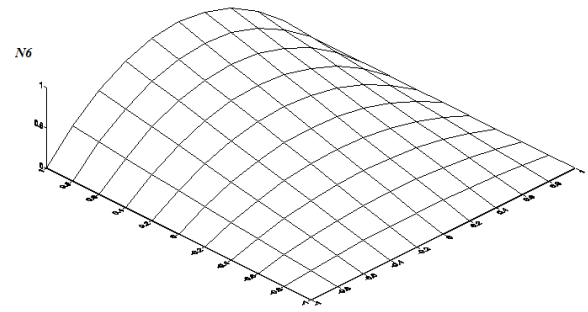
$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2)$$



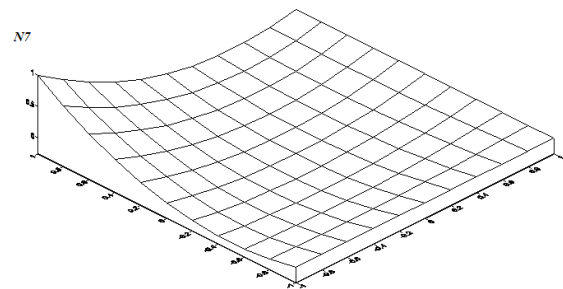
$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1)$$



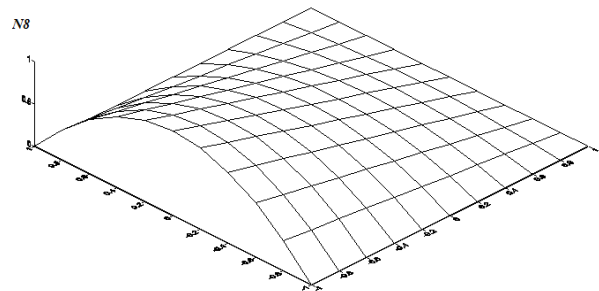
$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta)$$



$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1)$$



$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2)$$



* Les dérivées cartésiennes seront calculées comme suit :

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

- La matrice Jacobéenne est définie par :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\right) x_i & \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\right) y_i \\ \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\right) x_i & \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\right) y_i \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

- L'inverse est :

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

L'élément de surface élémentaire « dx dy » peut être calculé par :

$$dx.dy = (\det[J])d\xi d\eta \quad (4.29)$$

4.2.4.1 Matrice de déformation [B]

La relation déformation-déplacement pour la flexion des plaques est donnée par :

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n B_i \delta_i \quad (4.30)$$

$$\{\varepsilon\}^T = \{\chi\}^T, \{\phi\}^T$$

La matrice [B] sera :

$$[B_i] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix}, i=1, nne \quad (4.31)$$

La déformation sera $\{\varepsilon\}$ donnée par l'équation 3.30 est donc :

$$\{\varepsilon\}_i = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial y} & -\frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots\dots\dots 0 & -\frac{\partial N_8}{\partial y} & -\frac{\partial N_8}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} & -N_1 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} & -N_8 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & -N_1 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & 0 & -N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \vdots \\ \vdots \\ w_8 \\ \theta_{x8} \\ \theta_{y8} \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

4.2.4.2 Matrice d'élasticité [D]

La matrice des rigidités élastique de l'élément est :

$$[D] = \begin{bmatrix} Df & 0 \\ 0 & Dc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{\nu Et^3}{12(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu Et^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Et}{24(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Et}{24(1+\nu)} \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

Avec

* $[Df]$ matrice d'élasticité associée à la flexion,

$$[Df] = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \nu \\ \nu & \mathbf{1} \\ & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

• $[Dc]$ matrice d'élasticité associée au cisaillement.

$$[D_e] = \frac{\alpha \cdot E \cdot t}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ou' $\alpha = 5/6$ facteur de correction de cisaillement

4.2.5 Matrice de rigidité élémentaire

Des ces relations, la matrice de rigidité d'un élément de plaque est définie par la relation suivante :

$$K_{ij}^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_i]^T [D] [B_i] \det J \cdot d\xi d\eta \quad (4.34)$$

4.3 Modélisation du sol de Fondation

4.3.1 Modèle du Winkler

L'expression de l'énergie de déformation dans la fondation est donnée par la relation suivante.

$$U_F^e = \frac{k}{2} \iint \delta^2 dx dy \quad (4.35)$$

En utilisant la relation 3.3 on trouve :

$$U_F^e = \frac{k}{2} \{\delta^e\}^T \iint [N]^T [N] dx dy \cdot \{\delta^e\} \quad (4.36)$$

Ou d'une autre façon :

$$U_F^e = \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T [S^e] \{\delta^e\} \quad (4.37)$$

Avec :

$$[S^e] = k \iint [N]^T [N] dx dy \quad (4.38)$$

$[S^e]$: Matrice de rigidité du sol de fondation correspondante à l'élément de plaque.

k : le module de fondation

4.3.2 Modèle du Vlasov

L'énergie potentielle de cisaillement dans le sol est

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right]^T 2t; \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (4.39)$$

La matrice de rigidité dans l'élément de référence est

$$[K_{2t}^e] = 2t.a.b. \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{a^2} \left[\frac{\partial N}{\partial \xi} \right]^T \left[\frac{\partial N}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{b^2} \left[\frac{\partial N}{\partial \eta} \right]^T \left[\frac{\partial N}{\partial \eta} \right] \right) d\xi d\eta \quad (4.40)$$

4.3.3 Formulation finale du système plaque sur fondation élastique

Pour analyser le phénomène de l'interaction sol structure, l'énergie de déformation dans la fondation sera ajoutée à celle de la plaque pour aboutir à :

$$U_p^e = \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T [K^e] \{\delta^e\} \quad (4.41)$$

Dans ces relations, l'énergie potentielle totale du système plaque-sol s'écrit :

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T [K^e] \{\delta^e\} + \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T [S^e] \{\delta^e\} + \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T [K_{2t}^e] \{\delta^e\} - \{F^e\} \{\delta^e\}^T \quad (4.42)$$

En appliquant le principe de minimisation de l'énergie potentiel :

$$\frac{\partial \Pi^e}{\partial \{\delta^e\}} = [K^e] \{\delta^e\} + [S^e] \{\delta^e\} + [K_{2t}^e] \{\delta^e\} - \{F^e\} = 0 \quad (4.43)$$

Soit :

$$([K^e] + [S^e] + [K_{2t}^e]) \{\delta^e\} = \{F^e\} \quad (4.44)$$

En posant

$$[K_g^e] = [K^e] + [S^e] + [K_{2t}^e] \quad (4.45)$$

On obtient le système global suivant :

$$[K_g^e] \{\delta^e\} = \{F^e\} \quad (4.46)$$

$[K_g^e]$: Matrice de rigidité globale élémentaire de système plaque sur fondation élastique

4.4 Intégration numérique

Concerne la formulation d'éléments finis de plaques en flexion-cisaillement basée sur la théorie de *Reissner/Mindlin*. Chaque type d'élément est caractérisé par les matrices $[B_c]$ et $[B_f]$. La matrice de rigidité $[K]$ est obtenue par intégration numérique de Gauss.

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_i a_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (4.47)$$

ou

a_i, a_j : facteur de pondération.

ξ_i, η_j : position des coordonnées à l'intérieur de l'élément.

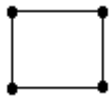
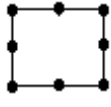
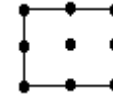
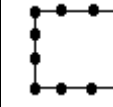
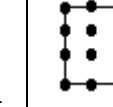
m : nombre total des points d'intégration.

On observe généralement une amélioration des modèles déplacements présentés ci-dessus en utilisant un schéma d'intégration numérique réduit (tous les termes de la matrice sont intégrés en utilisant un seul schéma d'intégration) ou sélective (les termes de la matrice de rigidité associés à la représentation de cisaillement transversal sont sous-intégrés par rapport aux termes de flexion) (tableaux 1).

Remarque :

En effectuant une intégration exacte (ou en utilisant un schéma d'intégration suffisamment élevé) chaque matrice de rigidité aura un rang correct, c'est-à-dire qu'il n'existera que trois modes à énergie nulle correspondant aux modes rigides. Si on utilise un schéma d'intégration réduite ou sélective, il est possible que des modes dits parasites apparaissent et risquent de conduire à une matrice globale $[K]$ singulière après prise en compte des conditions aux limites (tableau 4.1).[19]

Tableau 4.1. Eléments quadrilatéraux de type déplacements
(Influence de l'intégration numérique).

	 Q4	 8 Q	 9 Q	 20 Q1	 6 Q1
interpolation	Lagrange linéaire	$\dots + \xi^2 \eta + \xi \eta$	Lagrange quadratique	$\dots + \xi^3 \eta + \xi \eta^3$	Lagrange cubique
Intégration exacte	2X2	3X3	3X3	4X4	4X4
Modes parasites	0	0	0	0	0
Cb	1	1	12/11	1	27/23
Intégration réduite	1X1	2X2	2X2	3X3	3X3
Modes parasites	4	1	4	0	3
Cb	3/2	9/8	12/8	15/14	27/18
Intégration sélective	F : 2X2 C : 1X1	F : 3X3 C : 2X2	F : 3X3 C : 2X2	F : 4X4 C : 3X3	F : 4X4 C : 3X3
Modes parasites	2	0	1	0	1
Cb	3/2	9/8	12/8	15/14	27/18

D'après ce tableau et l'article du **Ozgan et Daloglu** on trouve que l'élément à huit nœuds avec intégrale sélective est le plus avantageux.

4.5 Variation linéaire du module d'élasticité du sol

Le sol proposé à une profondeur uniforme avec variation linéaire du module de sol.

$$E_s = E_1 \left(1 - \frac{Z}{H} \right) + E_2 \left(\frac{Z}{H} \right) \quad (4.48)$$

Avec, E_1 et E_2 représente le module d'élasticité du sol à haut et au bas de la couche de sol respectivement.

L'équation de module de réaction de sol k et le module de cisaillement t sera calculé comme suite :

$$k = \frac{1-\nu}{8.H.(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{E_1(2\gamma \sinh 2\gamma + 4\gamma^2) + (E_2 - E_1)(\cosh 2\gamma - 1 + 2\gamma^2)}{\sinh^2 \gamma} \right] \quad (4.49)$$

$$2t = \frac{H}{16\gamma^2(1+\nu)} \left[\frac{E_1(2\gamma \sinh 2\gamma - 4\gamma^2) + (E_2 - E_1)(\cosh 2\gamma - 1 - 2\gamma^2)}{\sinh^2 \gamma} \right] \quad (4.50)$$

Cette équation est donnée par **Vallabhan et Das (1991)**.

4.6 Condition aux limites

Trois types des conditions à la limite de plaque sont considérés, on les cite :

- plaque simplement appuyée,
- plaque appuyée librement, et
- plaque encastree.

Le tableau 4.2 résume les conditions aux limites sur le long des axes Ox et Oy.

Tableau 4.2- Les Conditions aux Limites.

Appuis	Parallèle à Ox	Parallèle à Oy
<i>Simple</i>	$w = 0$ $\theta_x = 0$	$w = 0$ $\theta_y = 0$
<i>Libre</i>	$\theta_y = 0$	$\theta_x = 0$
<i>Encastree</i>	$w = 0$ $\theta_x = \theta_y = 0$	$w = 0$ $\theta_x = \theta_y = 0$

4.7 Calcul des contraintes

Les champs de contraintes obtenus pour les éléments finis de type déplacements pose des problèmes d'interpolation. Les déplacements nodaux et les réactions aux nœuds de chaque élément sont obtenus après la résolution du système d'équations algébriques. Pour l'établir la

relation matricielle suivante entre les contraintes en un point de l'élément et ses déplacements nodaux. Ces contraintes sont calculées en tout point de l'élément :

$$\{\sigma^e\} = [D]\{\epsilon^e\} = [D][B]\{\delta^e\} \quad (4.51)$$

Les contraintes sont calculées aux points d'intégration, parce que dans ces points on a la meilleure connaissance du champ des déformations et donc des contraintes.[18]

Vallabhan et al [29] ont utilisé le principe d'énergie pour calculer les moments M_x et M_y :

$$M_x = \frac{1}{2} 2t \sqrt{2t/k} \theta_x ;$$
$$M_y = \frac{1}{2} 2t \sqrt{2t/k} \theta_y .$$

Chapitre 5

**Organisation du
programme de
résolution de Plaque
et Sol**

Organisation du Programme de Résolution de Plaque et de Sol

Le développement théorique de la formulation de méthode d'élément fini de la théorie de déformation de plaque élastique en cisaillement (théorie de Mindlin), et le modèle de sol (Vlasov modifié) ont été mis en application par un dans programme informatique développé en Fortran.

Le programme est dont le format modulaire ; en d'autres termes, il se compose d'un certain nombre de sous-routines, qui effectue une tâche particulière dans le corps principal du programme. Il n'y a pratiquement aucune limitation sur le nombre d'éléments à manipuler par le programme ; cependant, un nombre fixe d'éléments et des noeuds doit être assignés près ajustement des rapports de dimension dans le cadre du programme.

Le fond théorique de la méthode d'élément fini, la théorie de déformation de plaque élastique en cisaillement, et le modèle élastique de sol continu (modèle de Vlasov modifié) ont été décrits en détail dans les chapitres précédents (c.-à-d., chapitre III et IV). Ce chapitre se concentre, ainsi, seulement sur la disposition de programmation de Fortran et la structure du programme.

5.1 Programme Principal

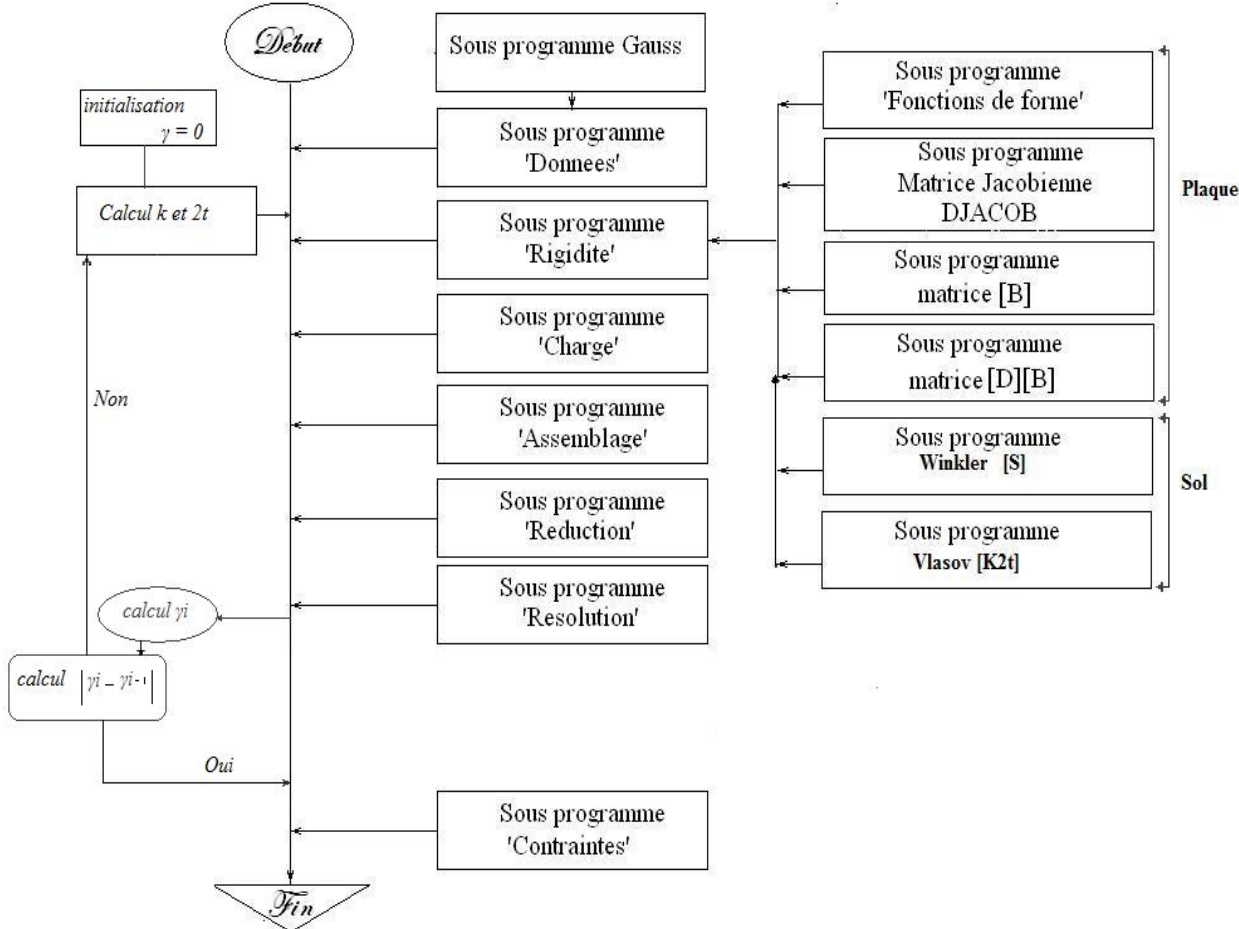


Fig. 5.1- Programme principal de résolution de plaques.

5.2 Le sous programme données

5.2.1 Algorithme du programme principal d'appel

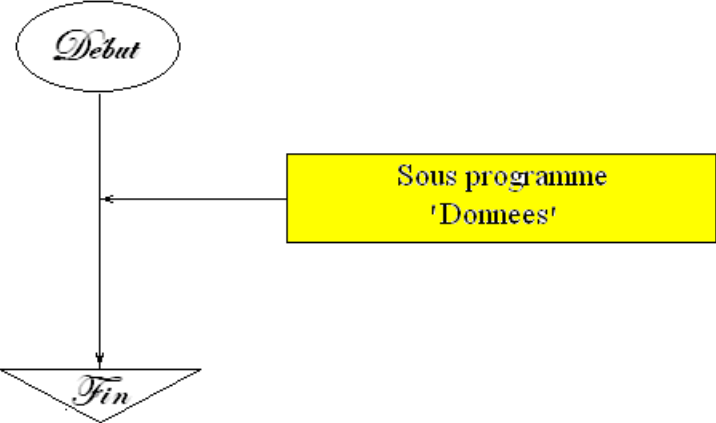


Fig.5.2- Organigramme principal avec appel du sous programme 'données'.

5.2.2 Définition des variables nodales

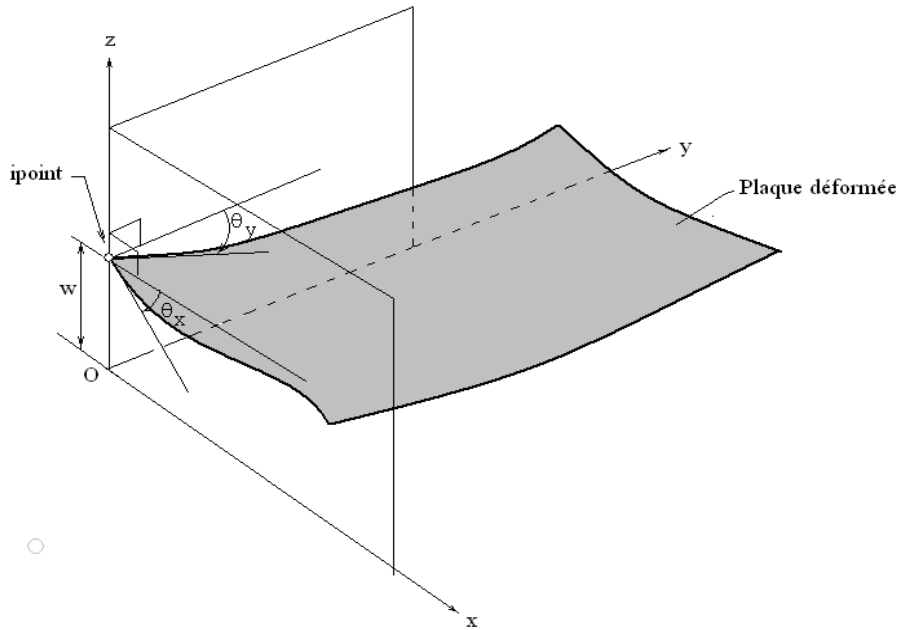


Fig.5.3- Variable nodale en un point de la plaque. $[\omega \ \theta_x \ \theta_y]_{\text{ipoint}}^T$

Le vecteur déplacement est donné par

$$\{x_{\text{depl}}\}_{\text{ipoint}} = \begin{Bmatrix} \omega \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}_{\text{ipoint}} \quad (5.1)$$

5.2.3 Modélisation, données principales

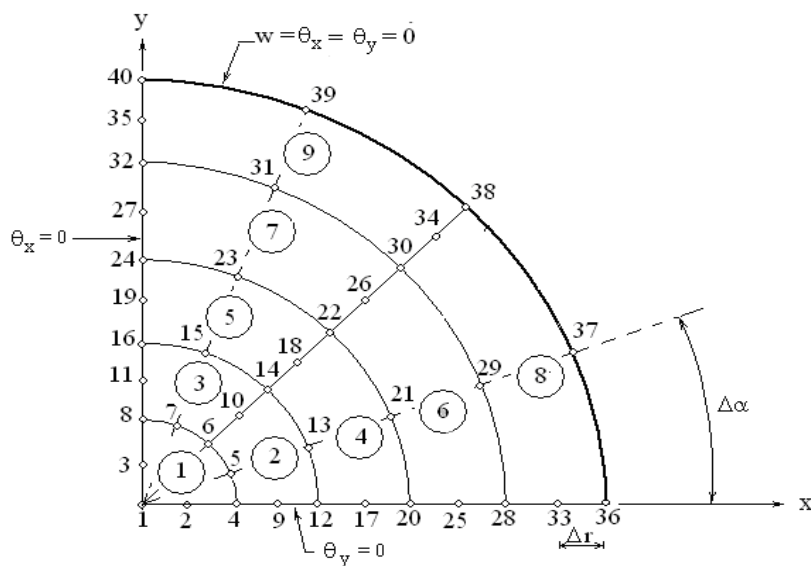


Fig. 5.4- Modélisation, transformation sur l'élément de référence et données de génération du maillage

5.2.4 Organigramme du sous programme données

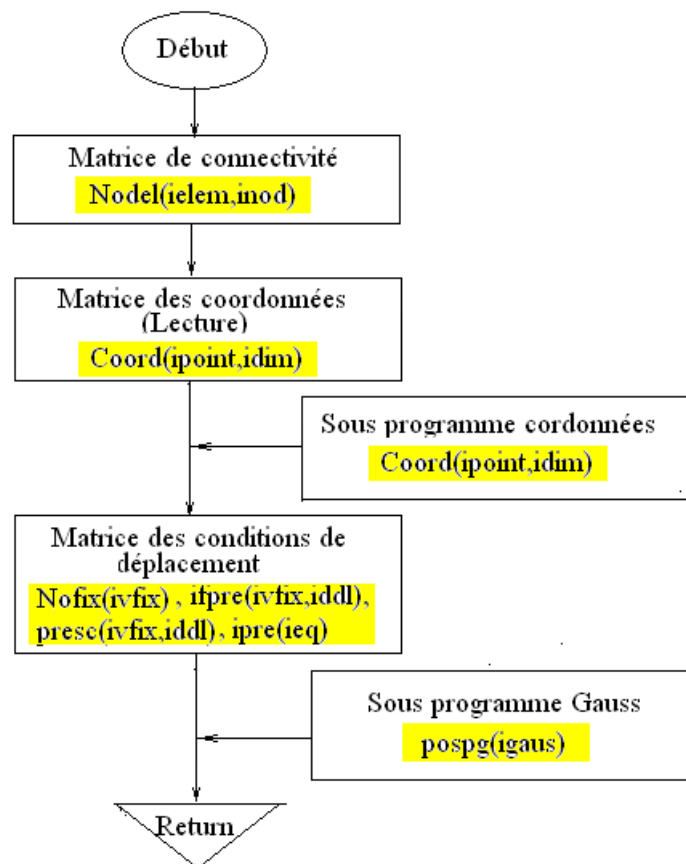


Fig. 5.5- Organigramme du sous programme données.

5.2.5 Variable de connectivité

La variable **Nodel(ielem, inod)** est une matrice de dimension $nelem \times nne$. Cette variable définit la connectivité des éléments modélisant le domaine. Elle permet de localiser les points nodaux écrits en *numérotation globale* selon leur position *inod*, variable désignant la *numérotation locale*. *Inod* varie de 1 à 8 pour un élément à 8 noeuds.

Tableau 5.1 : Localisation des nœuds globaux de l'élément 6

Inod (numérotation locale)	1	2	3	4	5	6	7	8
Nodel(6,inod) (numérotation globale)	20	25	28	29	30	26	22	21

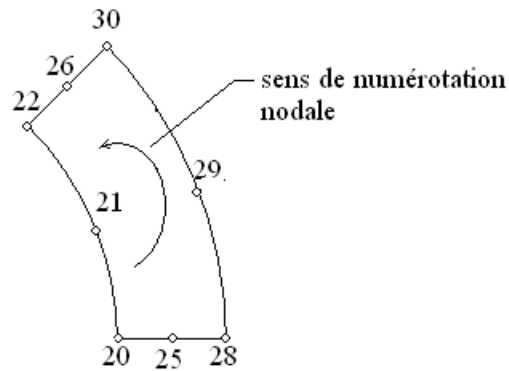


Fig. 5.6- Sens de numérotation adoptée.

La figure 5.7 permet de mieux visualiser les points de connectivité (couleur rouge) seul le point 25 n'est pas un point commun. La variable de connectivité permet cependant de situer l'emplacement de ce nœud.

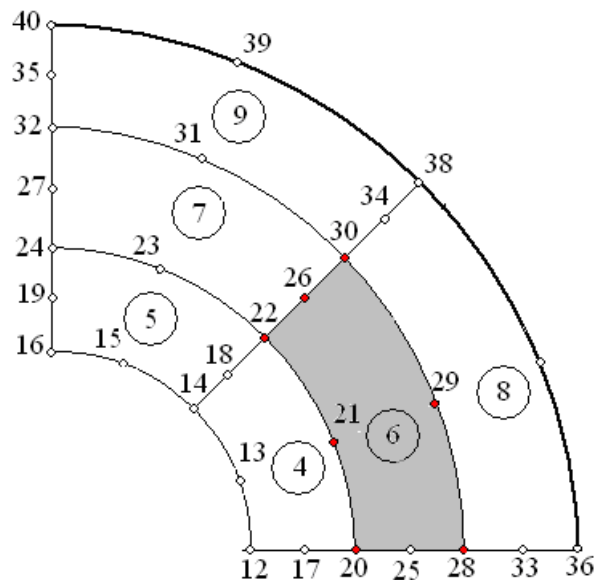


Fig. 5.7- Points de connectivité de l'élément 6.

La génération de la connectivité des éléments est donnée par l'algorithme

```

Lire nelem, nme
Faire pour ielem = 1, nelem
    Lire (Nodel(ielem,inod), inod=1,nme)
Fin

```

Fig. 5.8- Algorithme de la variable de connectivité.

La variable de connectivité est utilisée pour situer les termes des matrices élémentaires $[K^e]$ et $\{F^e\}$ dans les matrices assemblées $[K]$ et $\{F\}$.

5.2.6 Variable des coordonnées **coord (ipoint, idim)**

La variable des coordonnées est donnée par la variable **coord (ipoint, idim)** de dimension $n_{point} \times n_{dim}$.

Dans notre exemple (Fig. 4), $n_{point}=40$ $n_{dim}=2$ (problème bidimensionnel x et y). **coord** est donc une matrice formée de 40 lignes et 2 colonnes

coord(ipoint,1)	x(i)	ou x_i
coord(ipoint,2)	y(i)	ou y_i

Exemple : Coordonnée du point 4

Coord(4,1)=0.1	soit, $x_4 = 0.1$
Coord(4,2)=0.0	soit, $y_4 = 0.0$

La génération des coordonnées est donc donnée par l'algorithme

```
Lire npoint, ndim
Faire ipoint = 1, npoint
  Lire (Coord(ipoint, idim), idim = 1, ndim)
Fin
```

Fig. 5.9- Algorithme de lecture des coordonnées x_i et y_i .

5.2.7 Variables des conditions aux limites de déplacement

5.2.7.1 Variable **Nofix(ivfix)**

Nofix spécifie si un point nodal est concerné par une restriction de déplacement selon un ou plus d'un degré de liberté, l'index **ivfix** est le compteur des points concernés par cette restriction

Exemple : Le nœud 4 de la figure 10 est restreint selon la direction y. Exprimer que le nœud est concerné par cette condition de déplacement.

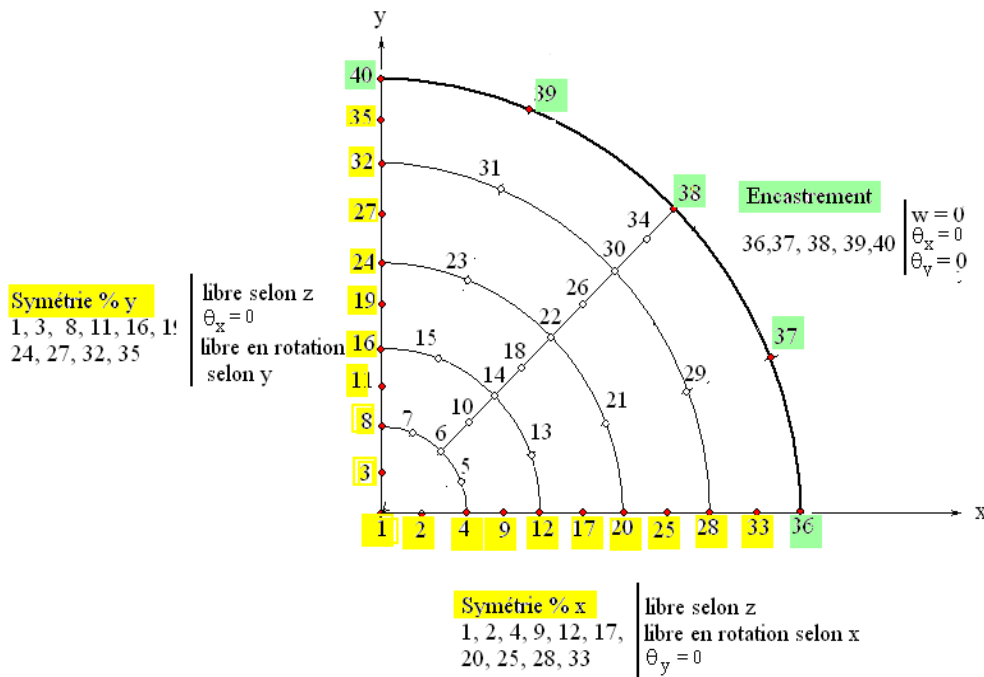


Fig.5.10- Conditions aux limites : variable Nofix(ivfix).

-Variable **ifpre(ivfix,iddl)**

La variable ifpre(ivfix,iddl) explicite davantage les conditions aux limites de déplacement du nœud restreint Nofix(ivfix) en indiquant si le degré de liberté du nœud concerné est fixé ou libre.

On adopte le code suivant :

- 1 si le nœud Nofix(ivfix) restreint est fixé selon la direction donnée iddl
- 0 si le nœud Nofix(ivfix) restreint est libre selon la direction donnée iddl

La variable prend en charge ces conditions.

ifpre(ivfix,iddl) prendra la valeur entière 1 ou 0

Exemple du nœud 36

D'après la variable Nofix(ivfix) on a :

Ivfix = 20

Nofix(20)=36

-Variable **presc(ivfix,iddl)**

C'est la valeur de déplacement ou de rotation prescrite selon le degrés de liberté iddl du nœud Nofix(ivfix)

Exemple : Nœud 36

presc(20,1)=0.0

presc(20,2)=0.0

presc(20,3)=0.0

Les données relatives à un nœud restreint sont donc contenues dans l'algorithme suivant

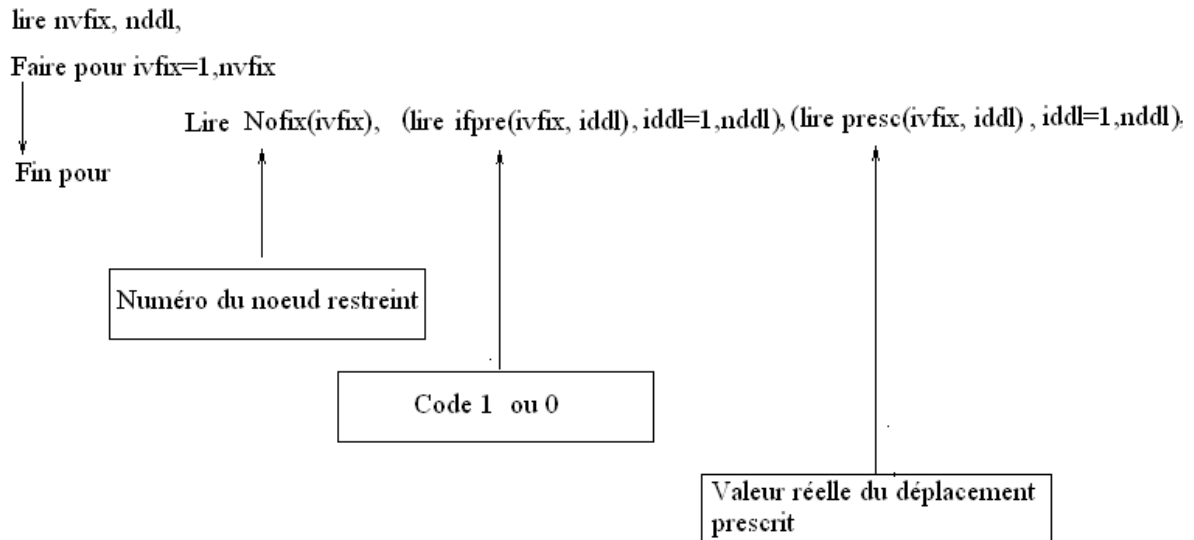


Fig. 5.11- Algorithme de lecture des noeuds restreints.

-Variable **ipre(iEQ)**

$$ipre(iEQ) = \begin{cases} 1 & \text{noeud fixé selon la direction iddl} \\ 0 & \text{noeud libre selon la direction iddl} \end{cases}$$

La variable ipre(iEQ) spécifie l'équation pour laquelle le degrés de liberté iddl est prescrit.

Dans le cas où le iddl du noeud est prescrit ipre(iEQ)=1

Dans le cas où le iddl du noeud est libre ipre(iEQ)=0

Les équations dont la variable nodale de degrés de liberté iddl est prescrite sont identifiées par ipre(iEQ) dont l'algorithme s'écrit

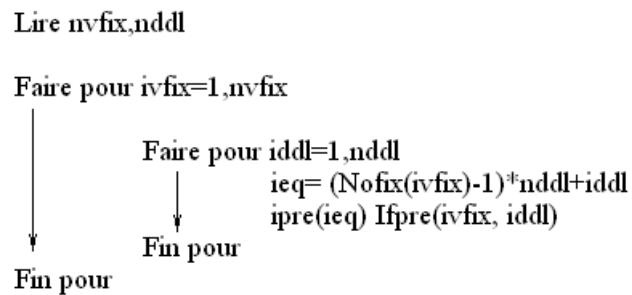


Fig. 5.12- Algorithme d'identification des équations dont la variable correspondante est prescrite.

Ivfix	1	2	3	4	5	6	etc...
Nofix	1	2	3	4	8	9	
Iddl	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3	
Ieq(*)	1 2 3	4 5 6	7 8 9	10 11 12	22 23 24	25 26 27	
Ipre(iEQ)	0 1 1	0 0 1	0 1 0	0 0 1	0 1 0	0 0 1	

(*)en numérotation globale selon l'iddl, $ieq=(Nofix(ivfix)-1)*nddl+iddl$

5.2.8 Coordonnées des points de Gauss

La variable $\text{pospg}(\text{igaus})$ donne la coordonnée ξ ou η du point igaus de Gauss selon la direction correspondante ξ ou η . Si on choisit une intégration numérique à $\text{ngaus} = 2$ dans chacune des directions ξ et η , la variable $\text{pospg}(\text{igaus})$ est montrée dans la figure 5.13.

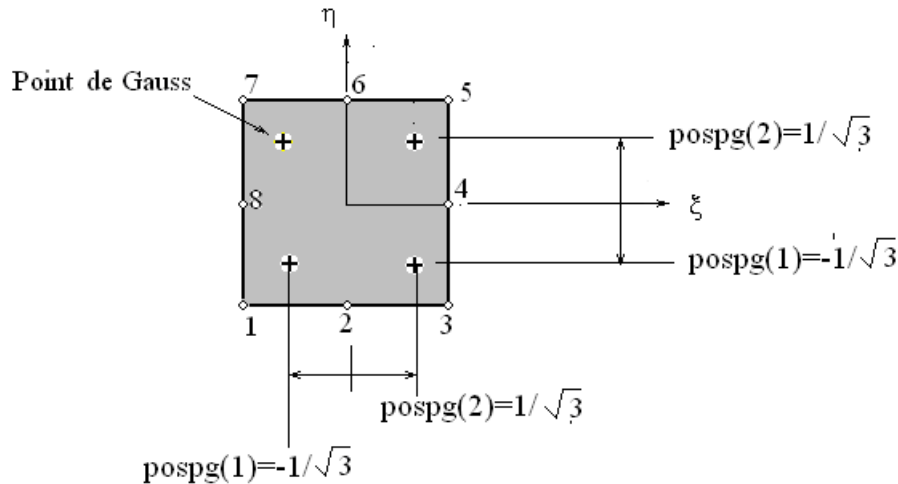


Fig.5.13- Position des points de gauss pour une intégration 2x2.

L'algorithme ci-dessous donne les coordonnées des quatre points de Gauss en utilisant la variable $\text{pospg}(\text{igaus})$

```

Lire ngaus
pospg(1) = -0.577330269189626
pospg(2) = 0.577330269189626
Faire pour igaus = 1, ngaus
    Faire pour jgaus = 1, ngaus
        ksi = pospg(igaus)
        eta = pospg(jgaus)
    Fin pour
Fin pour
    
```

Fig. 5.14- Algorithme de calcul des coordonnées des points de Gauss.

On a alors toutes les informations pour la construction du sous programme 'données'

5.3 Sous Programme Matrice de Rigidité

5.3.1 Algorithme

L'organigramme du sous programme 'Rigidite' calcule les matrices de rigidité

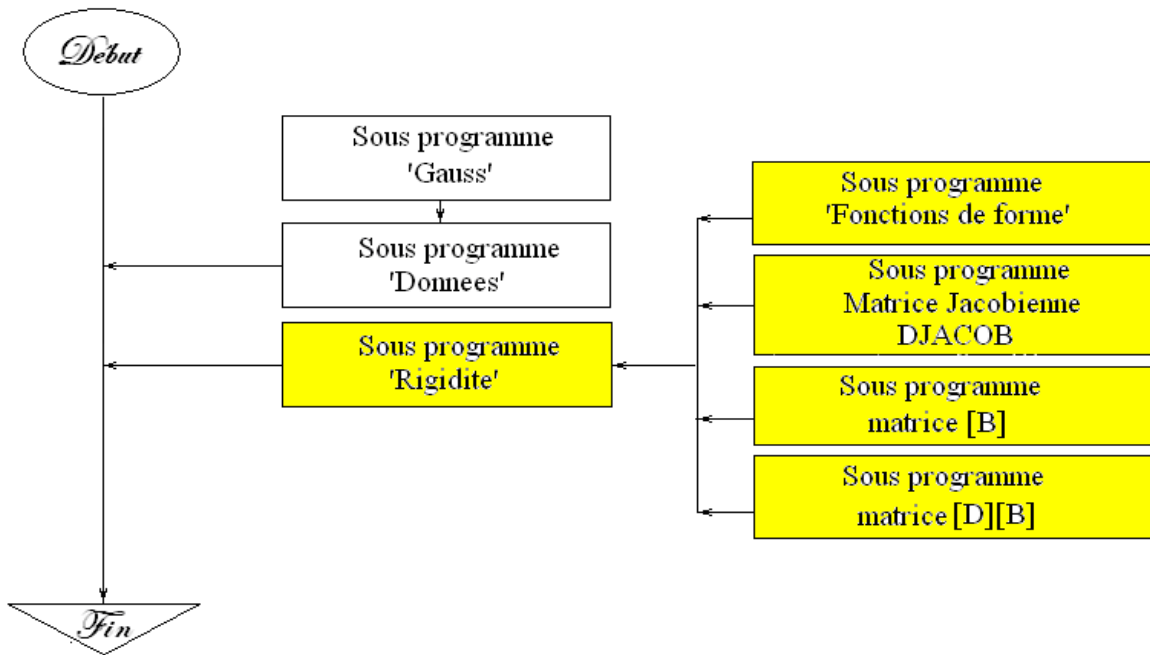
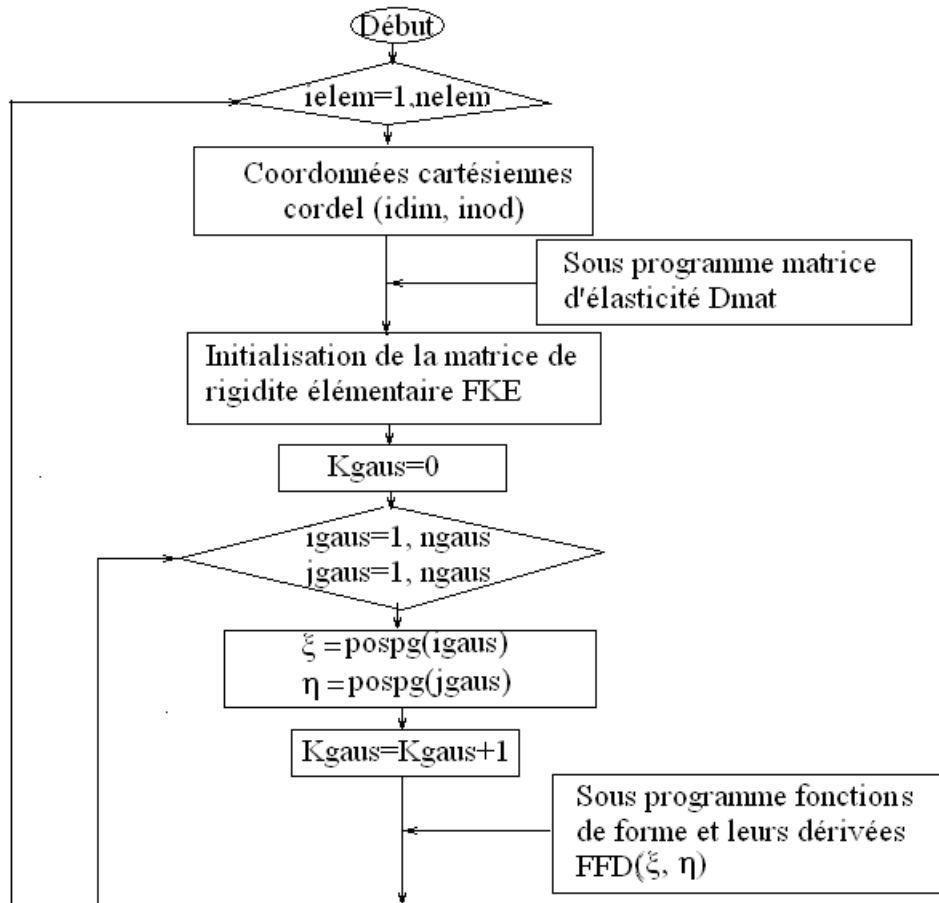


Fig. 4.15- Organigramme du programme principal avec appel du sous programme 'Rigidite'.



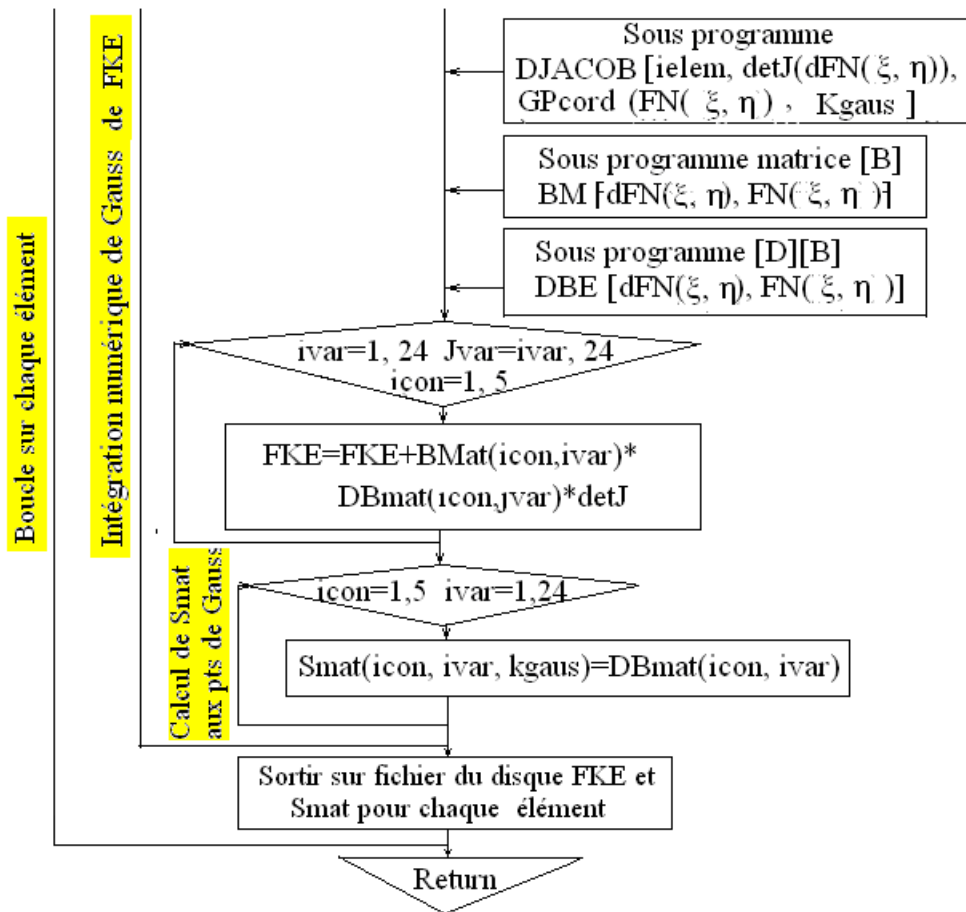


Fig. 5.16- Organigramme du sous programme 'rigidite'.

5.3.2 Coordonnées cartésiennes nodales

On a besoin des coordonnées nodales de chacun des éléments finis lors de l'équation de transformation

$$x_M = \sum_{inod=1}^{nne} N_{inod}(\xi_{M'}, \eta_{M'}) x_{inod}$$

$$y_M = \sum_{inod=1}^{nne} N_{inod}(\xi_{M'}, \eta_{M'}) y_{inod}^{ielem}$$

Où

Les points M' utilisés sont les points de Gauss sur l'élément de référence. Les relations ci-dessus s'écrivent pour les points de Gauss (variable **GPcord(idim, Kgaus)**)

$$x_{pg} = \sum_{inod=1}^{nne} N_{inod}(\xi_{pospg}(jgaus), \eta_{pospg}(jgaus)) x_{inod}^{ielem}$$

$$y_{pg} = \sum_{inod=1}^{nne} N_{inod}(\xi_{pospg}(jgaus), \eta_{pospg}(jgaus)) y_{inod}^{ielem}$$

Les coordonnées x_{inod}^{ielem} , y_{inod}^{ielem} sont les coordonnées x et y du point nodal inod de l'élément fini $ielem$. Les coordonnées x_{inod}^{ielem} , y_{inod}^{ielem} sont représentées par la variable `cordel(idim, inod)` selon l'organigramme de la figure 5.18 et 5.19

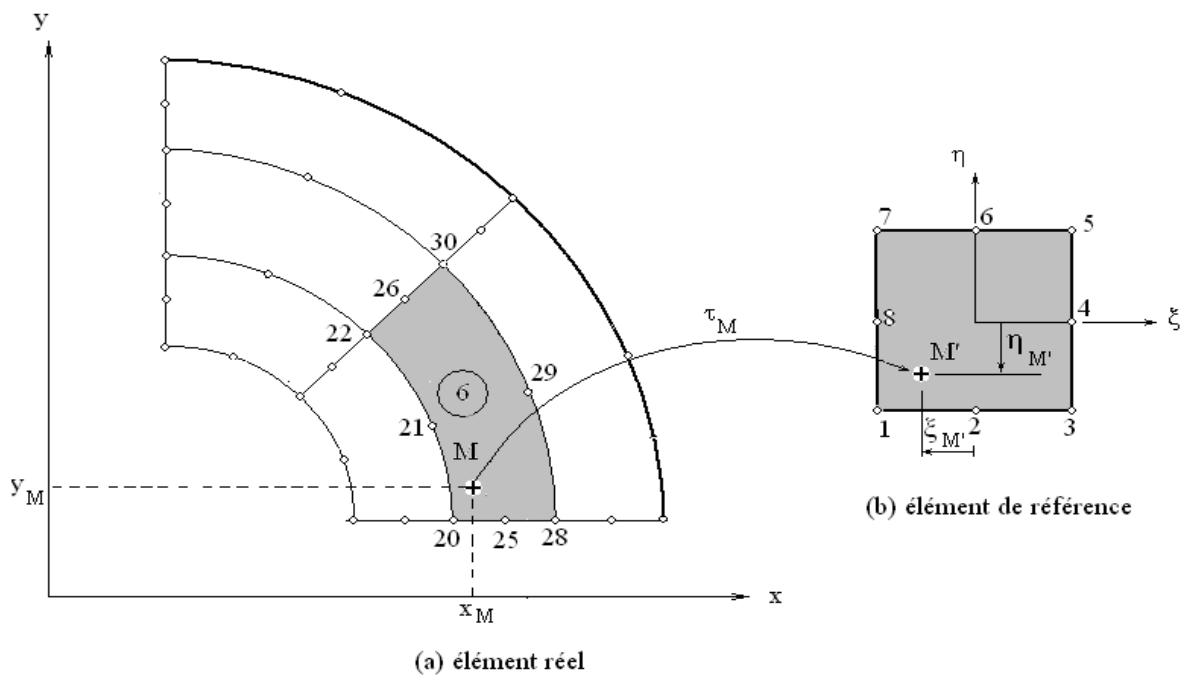


Fig .5.17- Transformé d'un point M sur l'élément de référence .

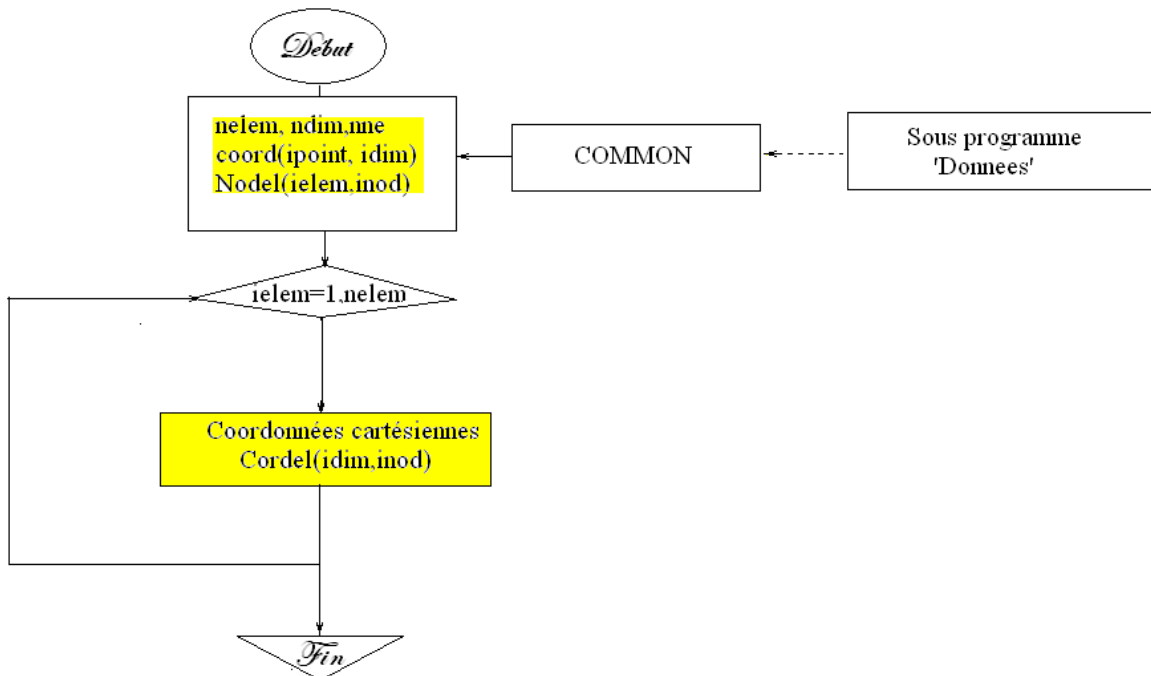


Fig. 5.18- Organigramme des coordonnées nodales obtenues par la variable `cordel(idim, inod)`.

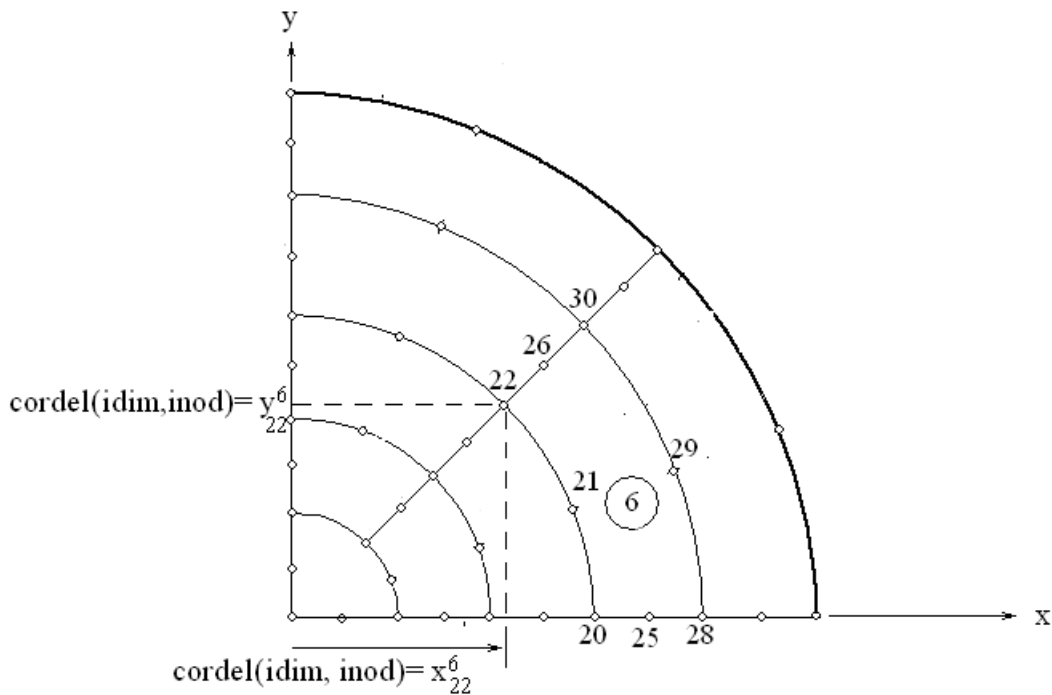


Fig. 5.19 - Variable cordel(idim, inod) du point 22.

On a pour le point nodal 22

$$x_{22} = \text{coord}(\text{ipoint}, \text{idim})$$

C'est-à-dire que :

$$x_{22} = \text{cordel}(\text{idim}, \text{inod}) = \text{cordel}(1, 7)$$

On sait que la matrice des coordonnées est donnée par la variable **coord(ipoint, idim)** ipoint = 1, npoints.

Comme la numérotation des éléments ne se fait pas dans l'ordre successif des nombres, il faudrait faire correspondre ipoint de la variable coord(ipoint, idim) au nœud inod de l'élément dans sa numérotation globale. L'identification du nœud en numérotation globale nommé **ipoint** est donné par la variable Nodel(ielem, inod). On aura l'algorithme suivant

```

Faire pour ielem=1, nelem
  Faire pour inod=1, nne
    ipoint=nodel(ielem,inod)
    Faire pour idim=1, ndim
      cordel(idim,inod)=coord(ipoint, idim)
    Fin pour
  Fin pour
Fin pour

```

Fig. 5.20- Algorithme de calcul des coordonnées.

Exemple

Le fonctionnement de la variable $\text{cordel}(\text{idim}, \text{inod})$ pour l'élément 1 et le nœud 6 est donné comme exemple à la figure 5.21.

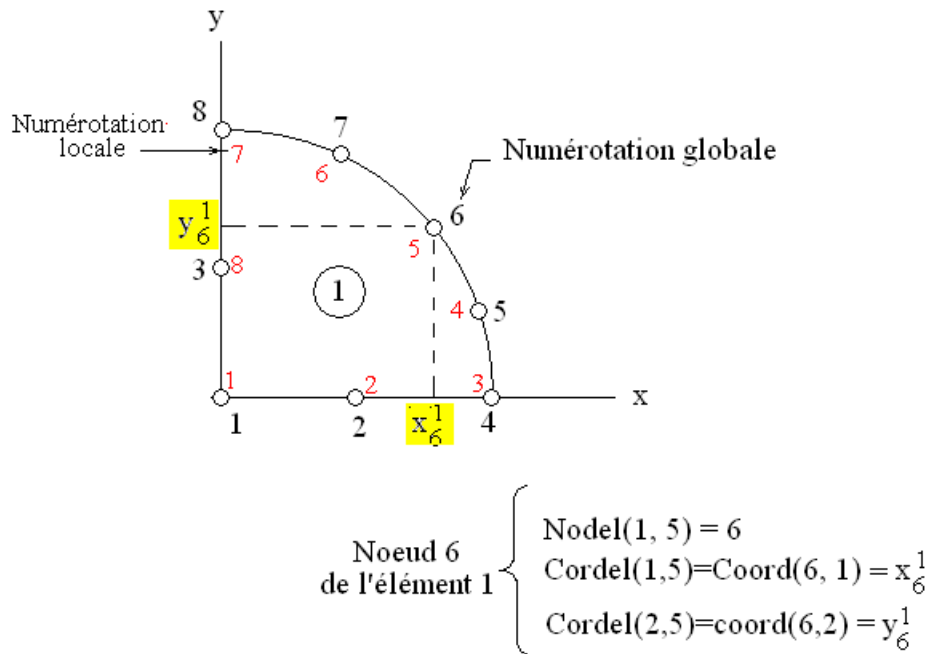


Fig. 5.21 - Le fonctionnement de l'élément 1 et le nœud 6.

Les coordonnées nodales $x_{\text{inod}}^6, y_{\text{inod}}^6$ de l'élément 6, données par la variable $\text{cordel}(1, \text{inod})$ et $\text{cordel}(2, \text{inod})$, ainsi que la correspondance des variables locales et globales sont données par le tableau ci-dessous

ipoint	inod	$\text{cordel}(1, \text{inod})$	$\text{cordel}(2, \text{inod})$
1	1	.000	.000
2	2	.050	.000
4	3	.100	.000
5	4	.092	.038
6	5	.071	.071
7	6	.038	.092
8	7	.000	.100
3	8	.000	.050

5.3.3 Sous programme fonctions de formes et leurs dérivées

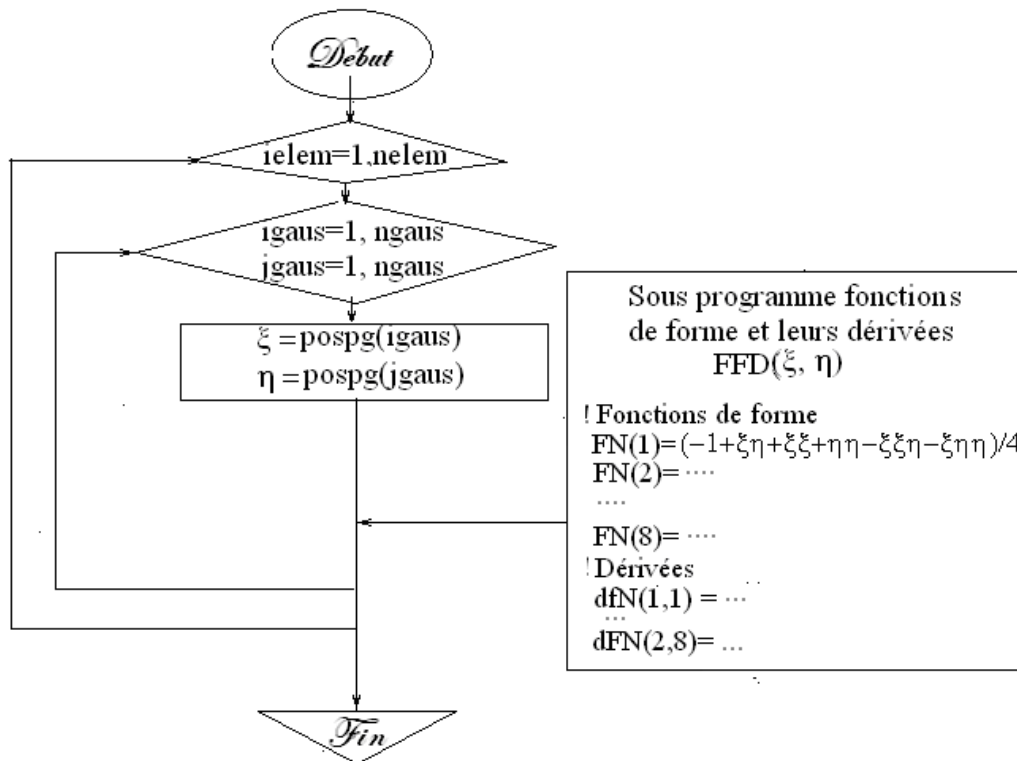
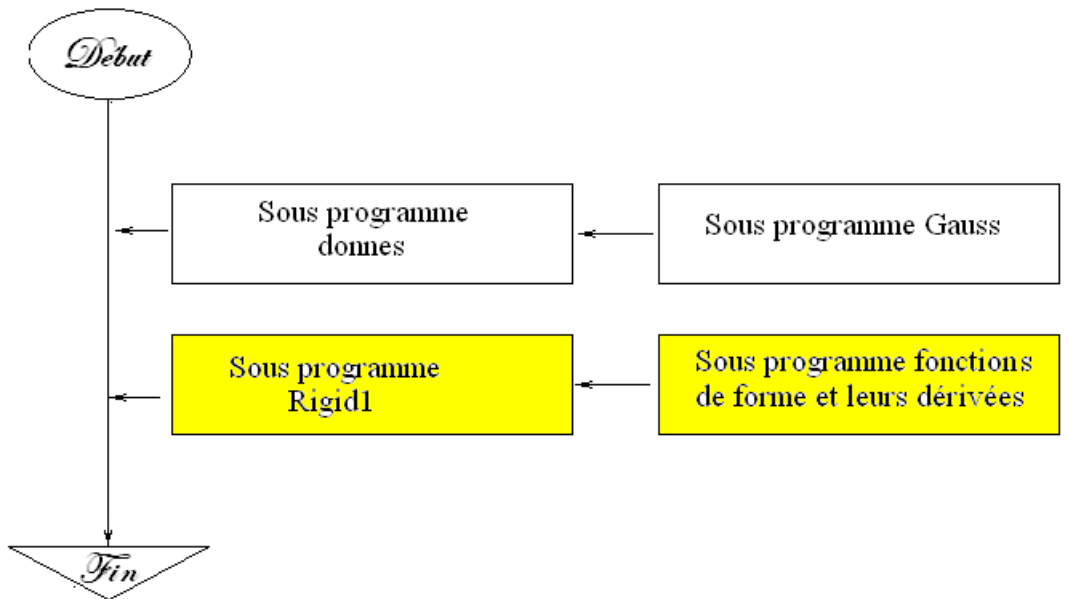


Fig.5.22- Principales étapes d'appel du sous programme fonctions de forme et leurs dérivées FFD.

1°) Calcul des Fonctions de forme aux points nodaux de l'élément de référence

$$N_1(-1,-1) = 1$$

$$N_1(-1,1) = 0$$

...

2°) Calcul des fonctions de forme aux points de Gauss de l'élément de référence

$$N_1(\xi_{PG}, \eta_{PG}) = (-1 + \xi_{PG}\eta_{PG} + \xi_{PG}^2\eta_{PG}^2 - \xi_{PG}^2\eta_{PG} - \xi_{PG}\eta_{PG}^2)/4$$

...

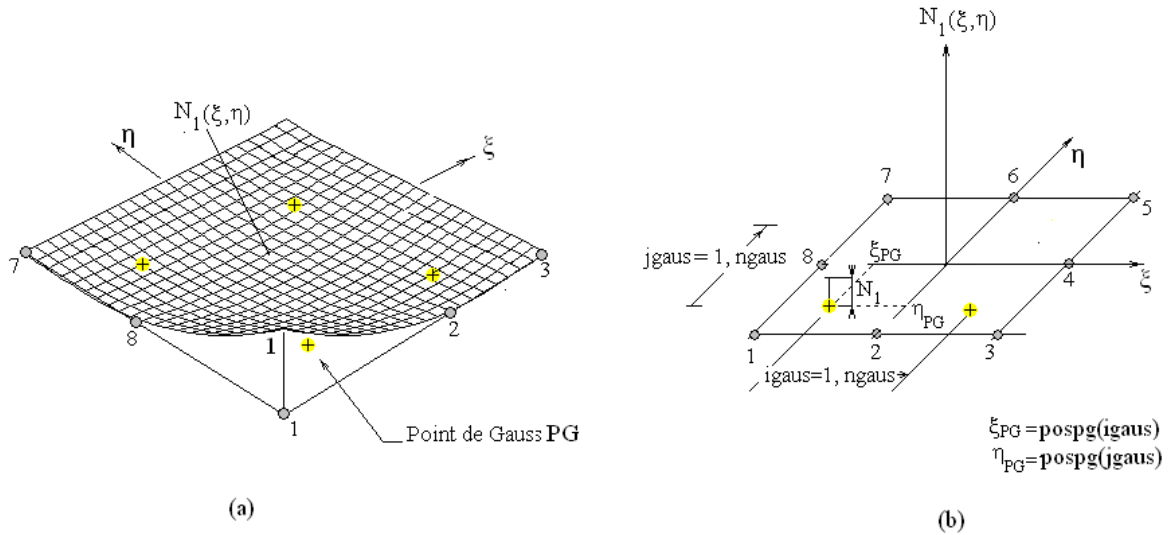
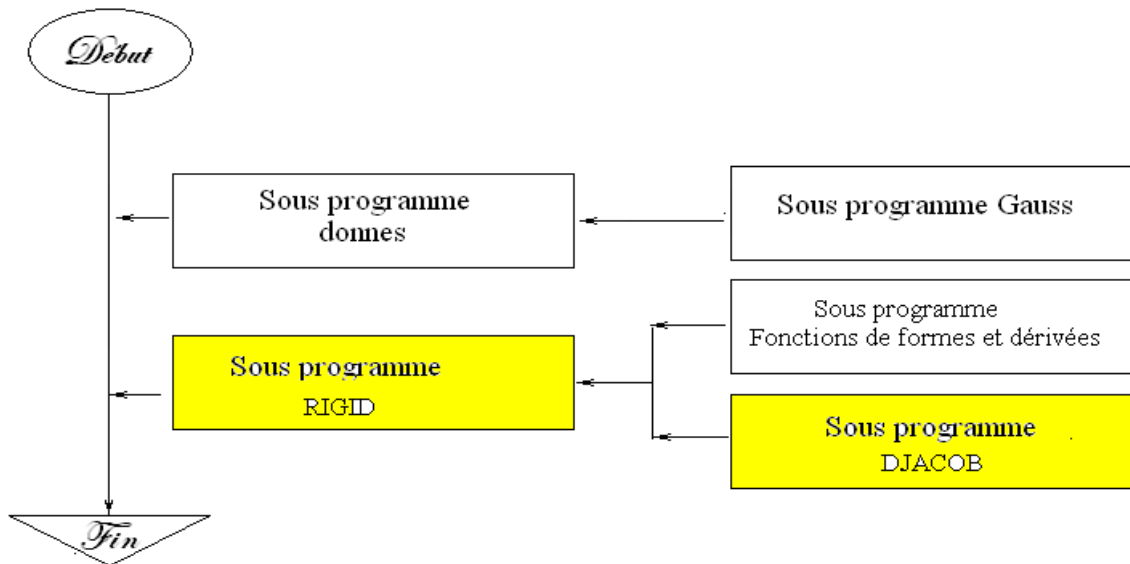


Fig.5 .23 - Elément quadrilatère à 8 nœuds :(a) Schéma de fonction de forme N1, (b) position des points de Gauss.

5.3.4 Sous programme matrice Jacobienne



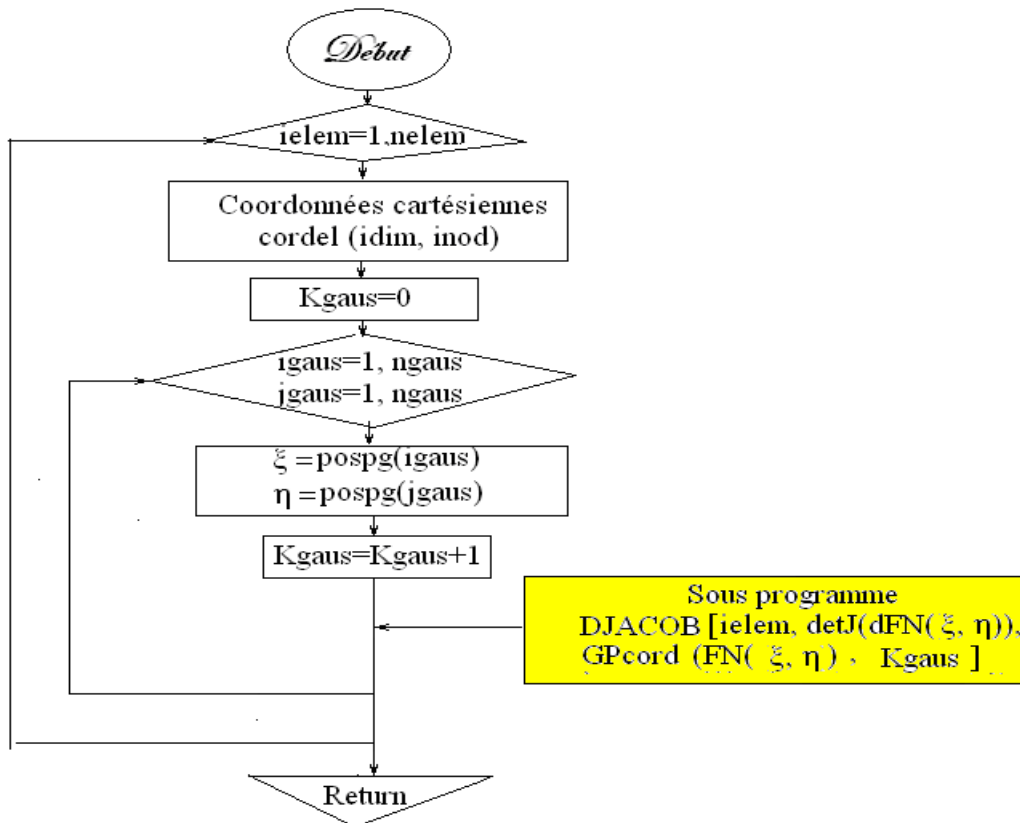


Fig.5.24 - Algorithme du sous programme Jacobien.

1°) Matrice Jacobienne

Dans la matrice [B] apparaissent les dérivées partielles cartésiennes $\frac{\partial N_i}{\partial x}$, $\frac{\partial N_i}{\partial y}$. Leurs expressions sont à déterminer.

Ramenées sur l'élément de référence les fonctions de forme s'écrivent

$$N_i = N_i(\xi, \eta)$$

et leurs dérivées sur cet élément sont calculées par la règle de dérivation en chaîne

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

Ou sous forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

D'où

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \text{Matrice Jacobienne}$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

$$\det[J] = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta}$$

Maintenant on peut déterminer les dérivées cartésiennes

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

avec

$$(\xi, \eta) \rightarrow x = x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{nne} N_i(\xi, \eta) x_i$$

$$(\xi, \eta) \rightarrow y = y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{nne} N_i(\xi, \eta) y_i$$

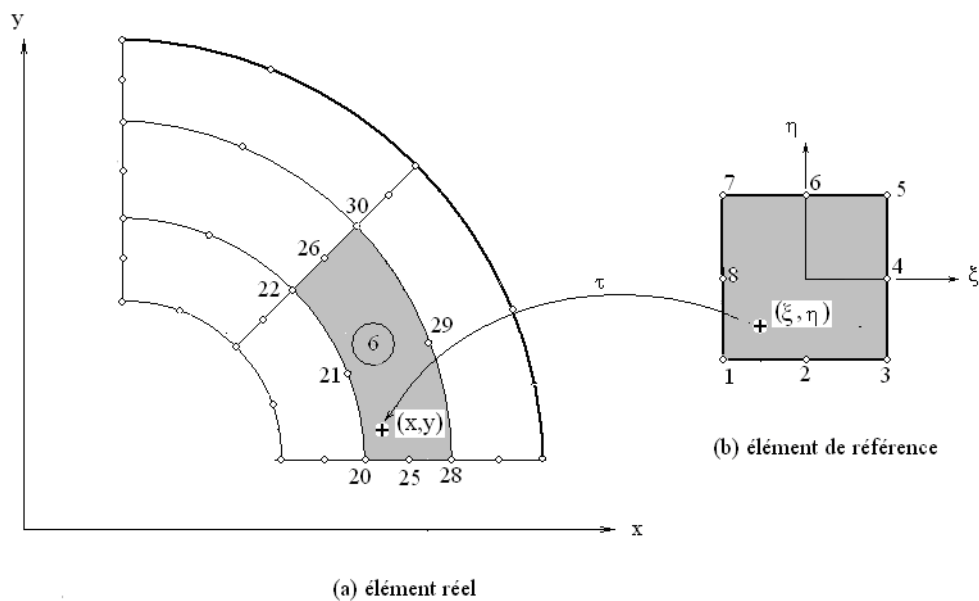


Fig.5.25- schéma du points de gauss dans l'élément réel et oposite en élément de référence.

Si le point (ξ, η) est un point de Gauss, les transformations précédentes s'écrivent

$$\begin{aligned} (\xi_{\text{igaus}}, \eta_{\text{jgaus}}) \rightarrow x_{\text{PG}} = x(\xi_{\text{igaus}}, \eta_{\text{jgaus}}) &= \sum_{i=1}^{\text{nne}} N_i(\xi_{\text{igaus}}, \eta_{\text{jgaus}}) x_i \\ (\xi_{\text{igaus}}, \eta_{\text{jgaus}}) \rightarrow y_{\text{PG}} = y(\xi_{\text{igaus}}, \eta_{\text{jgaus}}) &= \sum_{i=1}^{\text{nne}} N_i(\xi_{\text{igaus}}, \eta_{\text{jgaus}}) y_i \end{aligned}$$

Les dérivées cartésiennes s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \sum_{i=1}^{\text{nne}} N_i(\xi, \eta) y_i = \sum_{i=1}^{\text{nne}} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} y_i = y_1 \frac{\partial N_1}{\partial \eta}(\xi, \eta) + y_2 \frac{\partial N_2}{\partial \eta}(\xi, \eta) + \dots + y_8 \frac{\partial N_8}{\partial \eta}(\xi, \eta) \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{i=1}^{\text{nne}} N_i(\xi, \eta) y_i = \sum_{i=1}^{\text{nne}} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} y_i = y_1 \frac{\partial N_1}{\partial \xi}(\xi, \eta) + y_2 \frac{\partial N_2}{\partial \xi}(\xi, \eta) + \dots + y_8 \frac{\partial N_8}{\partial \xi}(\xi, \eta) \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \sum_{i=1}^{\text{nne}} N_i(\xi, \eta) x_i = \sum_{i=1}^{\text{nne}} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} x_i = x_1 \frac{\partial N_1}{\partial \eta}(\xi, \eta) + x_2 \frac{\partial N_2}{\partial \eta}(\xi, \eta) + \dots + x_8 \frac{\partial N_8}{\partial \eta}(\xi, \eta) \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{i=1}^{\text{nne}} N_i(\xi, \eta) x_i = \sum_{i=1}^{\text{nne}} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} x_i = x_1 \frac{\partial N_1}{\partial \xi}(\xi, \eta) + x_2 \frac{\partial N_2}{\partial \xi}(\xi, \eta) + \dots + x_8 \frac{\partial N_8}{\partial \xi}(\xi, \eta) \end{aligned}$$

Aux points de Gauss $(x_{\text{PG}}, y_{\text{PG}})$ on a

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial y}{\partial \eta} \right|_{\text{PG}} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \sum_{i=1}^{\text{nne}} N_i(\xi_{\text{igaus}}, \eta_{\text{jgaus}}) y_i = \sum_{i=1}^{\text{nne}} y_i \left. \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right|_{(\xi_{\text{igaus}}, \eta_{\text{jgaus}})} \\ \left. \frac{\partial y}{\partial \xi} \right|_{\text{PG}} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{i=1}^{\text{nne}} N_i(\xi_{\text{igaus}}, \eta_{\text{jgaus}}) y_i = \sum_{i=1}^{\text{nne}} y_i \left. \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right|_{(\xi_{\text{igaus}}, \eta_{\text{jgaus}})} \\ \left. \frac{\partial x}{\partial \eta} \right|_{\text{PG}} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \sum_{i=1}^{\text{nne}} N_i(\xi_{\text{igaus}}, \eta_{\text{jgaus}}) x_i = \sum_{i=1}^{\text{nne}} x_i \left. \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right|_{(\xi_{\text{igaus}}, \eta_{\text{jgaus}})} \\ \left. \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|_{\text{PG}} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{i=1}^{\text{nne}} N_i(\xi_{\text{igaus}}, \eta_{\text{jgaus}}) x_i = \sum_{i=1}^{\text{nne}} x_i \left. \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right|_{(\xi_{\text{igaus}}, \eta_{\text{jgaus}})} \end{aligned}$$

D'où

$$\det[\mathbf{J}]_{\text{PG}} = \left. \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right|_{\text{PG}} - \left. \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right|_{\text{PG}}$$

Le sous programme prend en charge le calcul suivant

5.3.4.1 Coordonnées des points de Gauss : Variable $\text{GPcord}(\text{idim}, \text{Kgaus})$ et index Kgaus

Les coordonnées des points de Gauss PG sur l'élément réelle sont calculées en fonction des points transformés de l'élément de référence par les relations ci-dessus

$$(\xi_{\text{igaus}}, \eta_{\text{jgaus}}) \rightarrow x_{\text{PG}} = x(\xi_{\text{igaus}}, \eta_{\text{jgaus}}) = \sum_{i=1}^{\text{nne}} N_i(\xi_{\text{igaus}}, \eta_{\text{jgaus}}) x_i$$

$$(\xi_{j\text{gaus}}, \eta_{i\text{gaus}}) \rightarrow y_{\text{PG}} = y(\xi_{i\text{gaus}}, \eta_{j\text{gaus}}) = \sum_{i=1}^{\text{nne}} N_i(\xi_{i\text{gaus}}, \eta_{j\text{gaus}}) y_i$$

Les coordonnées des points de Gauss x_{PG} et y_{PG} sont représentées par la variable **GPcord(idim, Kgaus)**

PG est le point de Gauss représenté par la variable Kgaus

Comme on a 4 points de Gauss

Kgaus=1, 4

Idim=1 coordonnée x

Idim=2 coordonnée y

On a :

$$x_{\text{PG}} = \text{GPcord}(1, \text{Kgaus})$$

$$y_{\text{PG}} = \text{GPcord}(2, \text{Kgaus})$$

Les relations ci-dessus s'écrivent

$$x_{\text{PG}} = \sum_{i=1}^{\text{nne}} N_i(\xi_{i\text{gaus}}, \eta_{j\text{gaus}}) x_i$$

$$y_{\text{PG}} = \sum_{i=1}^{\text{nne}} N_i(\xi_{i\text{gaus}}, \eta_{j\text{gaus}}) y_i$$

Où

x_i et y_i sont les coordonnées des points nodaux de l'élément réel. Elles sont données par la variable **Cordel(idim, inod)**

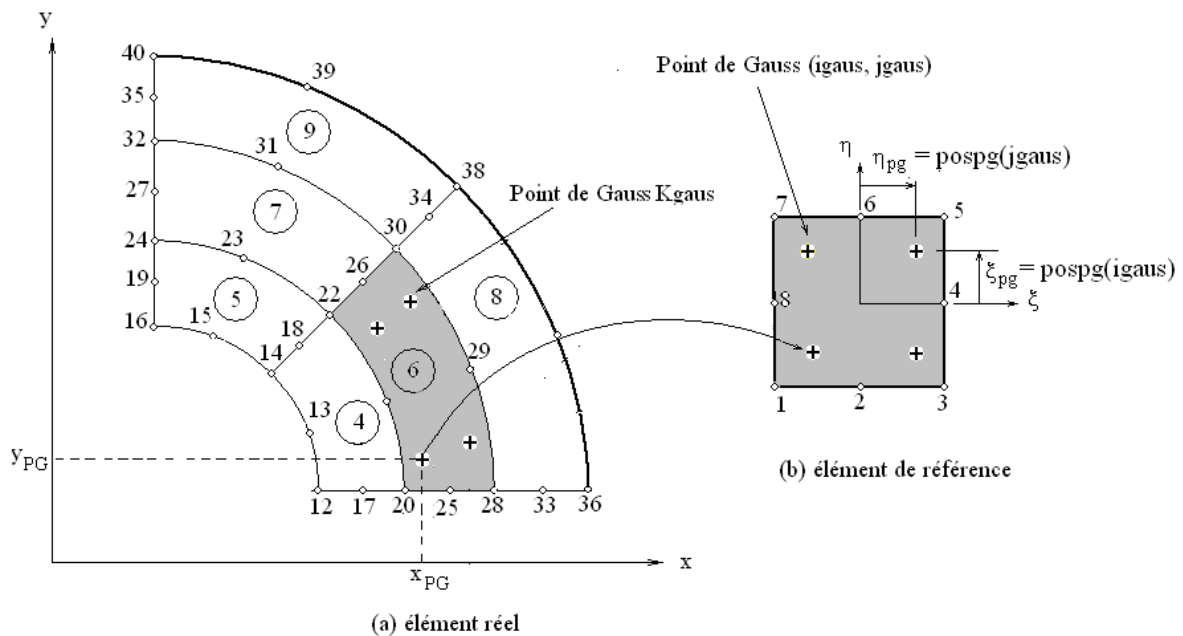


Fig.5.26- Transformé des points de Gauss sur l'élément de référence pour le calcul des coordonnées des points de Gauss par la variable **GPcord(idim, Kgaus)**.

Le tableau suivant donne la correspondance entre les variables **pospg(igauss)**, **pospg(jgauss)**, variables qui désignent les coordonnées ξ_{pg} , η_{pg} des points de Gauss de l'élément de référence et la variable **GPcord(idim, Kgaus)**.

Tableau 5.2- Correspondance entre les coordonnées des points de Gauss en l'élément.

(igaus,jgaus) Elément de référence	Coordonnée $\xi_{pg} = \text{pospg}(igaus)$	Coordonnée $\eta_{pg} = \text{pospg}(jgaus)$	Kgaus Elément réel	x_{Kgaus}	y_{Kgaus}
(1,1)	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1	GPcord(1,1)	GPcord(2,1)
(1,2)	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	2	GPcord(1,2)	GPcord(2,2)
(2,1)	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	3	GPcord(1,3)	GPcord(2,3)
(2,2)	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	4	GPcord(1,4)	GPcord(2,4)

L'organigramme donnant le fonctionnement de la variable **GPcord(idim, Kgaus)** est donc

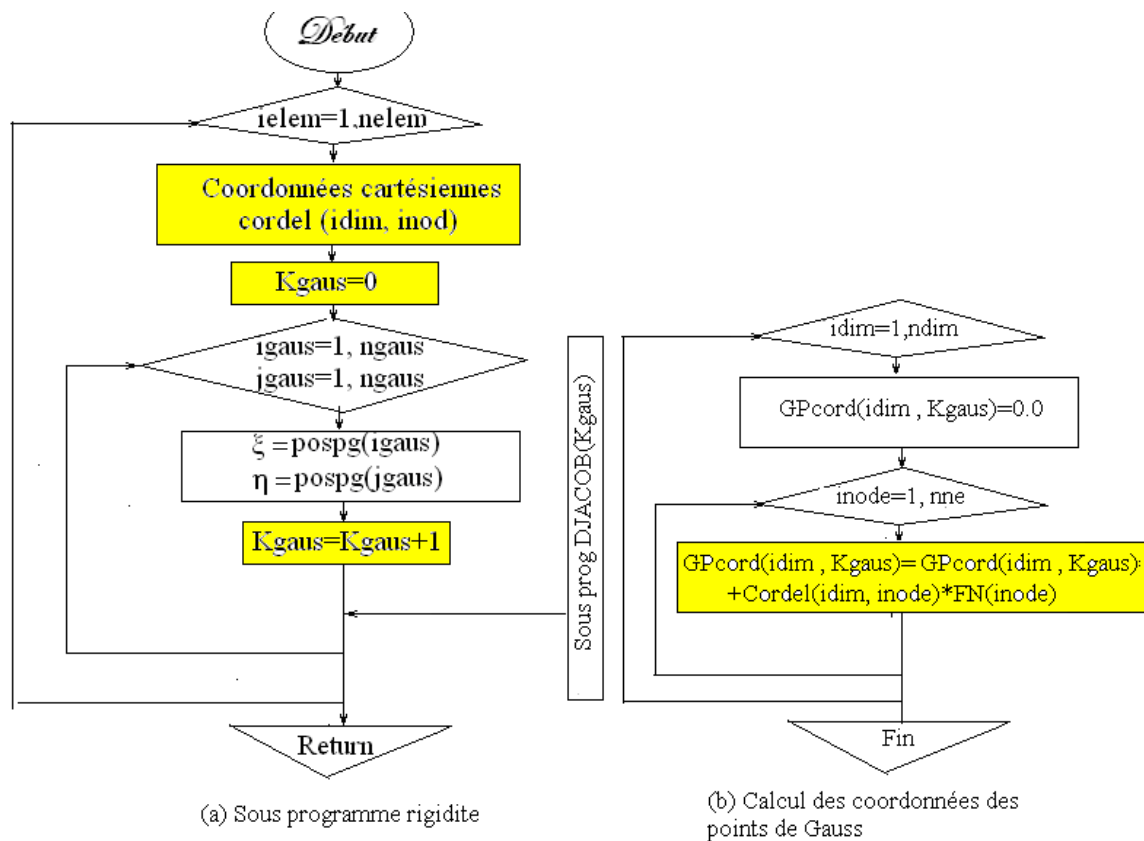


Fig.5.27 - Calcul des coordonnées des points de Gauss des éléments réels.

GPcord est contenue dans le sous programme DJACOB. Cette variable est appelée dans par le sous programme RIGIDITE via le sous programme DJACOB. La variable cordel fait correspondre les coordonnées des nœuds de l'élément en cours de calcul.

Pour chaque point de Gauss Kgaus de l'élément réel ielem, la variable GPcord donne les coordonnées réelles de ce point en utilisant les relations de transformation ci-dessus

5.3.4.2 Calcul du Jacobien

Le Jacobien et le déterminant sont calculés aux points de Gauss de l'élément réel

$$[J]_{PG} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{PG} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}_{PG}$$

$$\det[J]_{PG} = J_{11}J_{22}|_{PG} - J_{12}J_{21}|_{PG}$$

En utilisant le calcul sur l'élément de référence à des points transformés on a

$$J_{11} = \left. \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|_{PG} = \sum_{i=1}^{nne} x_i \left. \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right|_{(\xi_{igaus}, \eta_{jgaus})}$$

$$J_{12} = \left. \frac{\partial y}{\partial \xi} \right|_{PG} = \sum_{i=1}^{nne} y_i \left. \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right|_{(\xi_{igaus}, \eta_{jgaus})}$$

$$J_{21} = \left. \frac{\partial x}{\partial \eta} \right|_{PG} = \sum_{i=1}^{nne} x_i \left. \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right|_{(\xi_{igaus}, \eta_{jgaus})}$$

$$J_{22} = \left. \frac{\partial y}{\partial \eta} \right|_{PG} = \sum_{i=1}^{nne} y_i \left. \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right|_{(\xi_{igaus}, \eta_{jgaus})}$$

Les termes J_{11} , J_{12} , J_{21} et J_{22} sont désignés par la variable **fjacob(idim,jdim)**

On sait que les dérivées partielles des fonctions de forme sont désignées par la variable **dFN(idim,inode)** et sont appelées dans le sous programme FDD. Les dérivées partielles sont calculées aux points de Gauss sur l'élément de référence (indices igaus et jgaus).

x_i et y_i sont données par la variable **cordel(idim,inod)**

Le déterminant du jacobien est donné par la variable **detJ**. Le déterminant est calculé aux points de Gauss de l'élément de référence.

D'où l'organigramme d'appel de la matrice Jacobienne et du déterminant

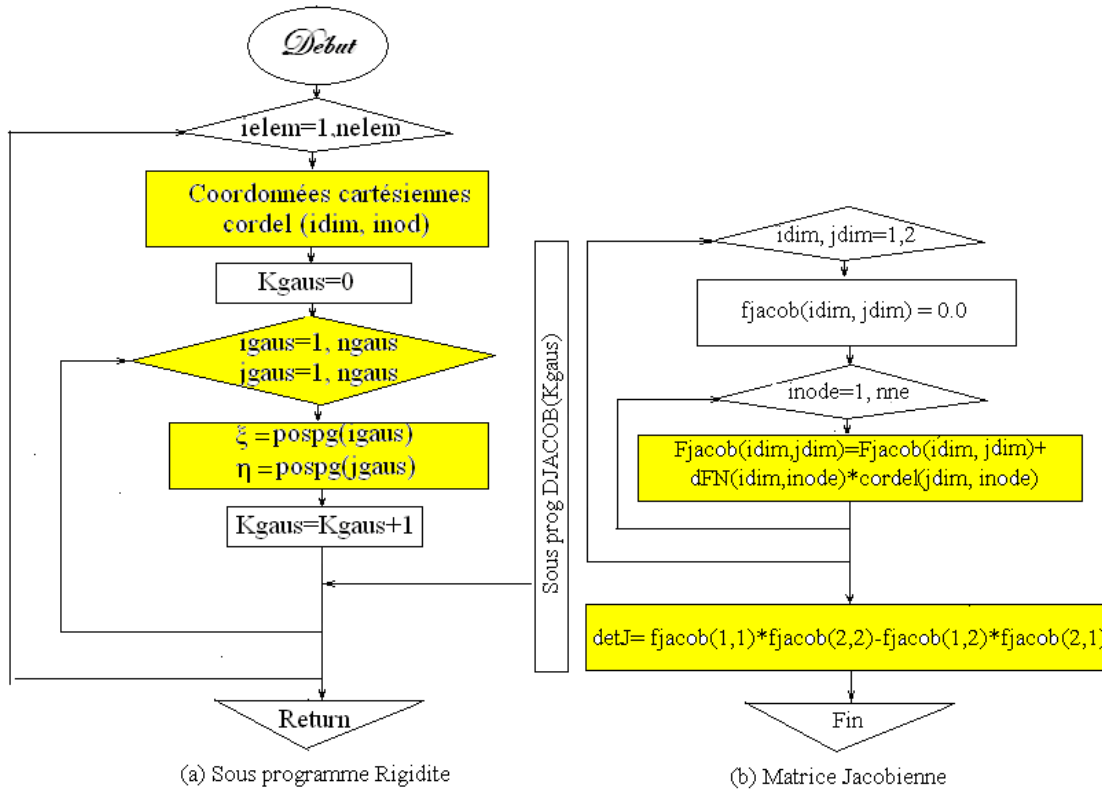


Fig.5.28- Calcul de la matrice Jacobienne et du Jacobien aux points de Gauss.

5.3.4.3 Calcul de l'inverse du Jacobien et des dérivées cartésiennes

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{21} & \bar{J}_{22} \end{bmatrix}$$

où

$$\bar{J}_{22} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{1}{\det[J]} \Big|_{PG} = \frac{1}{\det[J]} \sum_{i=1}^{nne} x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \Big|_{(\xi_{igaus}, \eta_{jgaus})}$$

$$\bar{J}_{12} = -\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{1}{\det[J]} \Big|_{PG} = -\frac{1}{\det[J]} \sum_{i=1}^{nne} y_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \Big|_{(\xi_{igaus}, \eta_{jgaus})}$$

$$\bar{J}_{21} = -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{1}{\det[J]} \Big|_{PG} = \frac{1}{\det[J]} \sum_{i=1}^{nne} x_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \Big|_{(\xi_{igaus}, \eta_{jgaus})}$$

$$\bar{J}_{11} = \frac{1}{\det[J]} \frac{\partial y}{\partial \eta} \Big|_{PG} = \frac{1}{\det[J]} \sum_{i=1}^{nne} y_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \Big|_{(\xi_{igaus}, \eta_{jgaus})}$$

Les dérivées cartésiennes sont données par

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{21} & \bar{J}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

L'inverse de la matrice est donné par la variable **fIjacob(idim,jdim)**

Les dérivées cartésiennes sont données par la variable **dNdx(idim,inod)**

Les variables ci-dessus sont calculées aux points de Gauss de l'élément de référence igaus, jgaus. On a l'algorithme

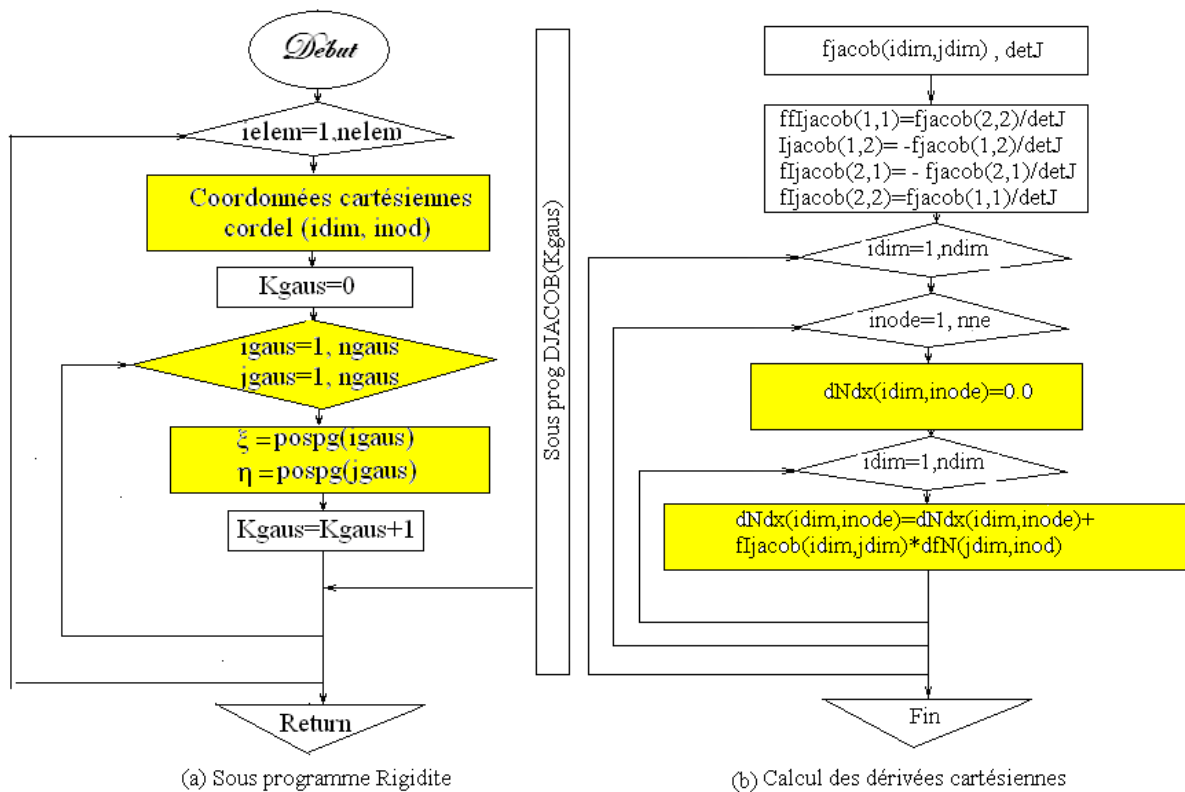


Fig.5.29 - Calcul de l'inverse du Jacobien et des dérivées cartésiennes aux points de Gauss de chaque élément fini.

5.3.5 Sous programme matrice des déformations B

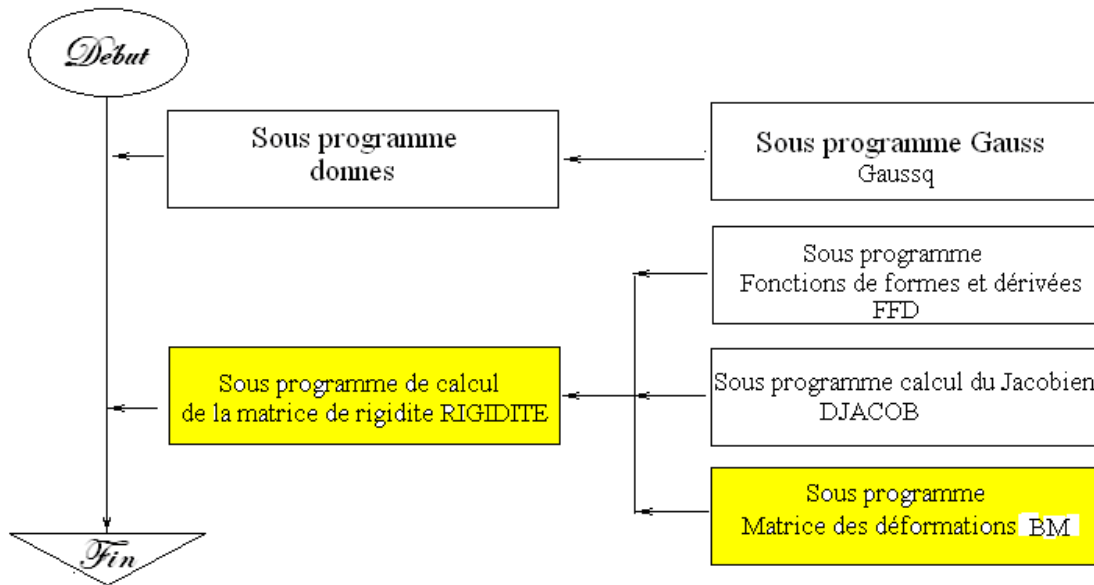


Fig. 5.30- Sous programme matrice des déformations B.

Le sous programme RIGIDITE fait appel au sous programme de calcul de la matrice BM en utilisant les sous programmes indiqués par la figure. La matrice BM calcule les déformations qui sont obtenues en fonction des dérivées cartésiennes des fonctions de forme aux points nodaux de l'élément de référence

$$[B_i] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix}, i=1, nne$$

Les termes de la matrice [B] sont donnés par la variable Bmat(icon,ivar), icon=1, 5, ivar=1,24

La matrice [B] est calculée aux points de Gauss en vue de calculer numériquement la matrice de rigidité de chaque élément fini

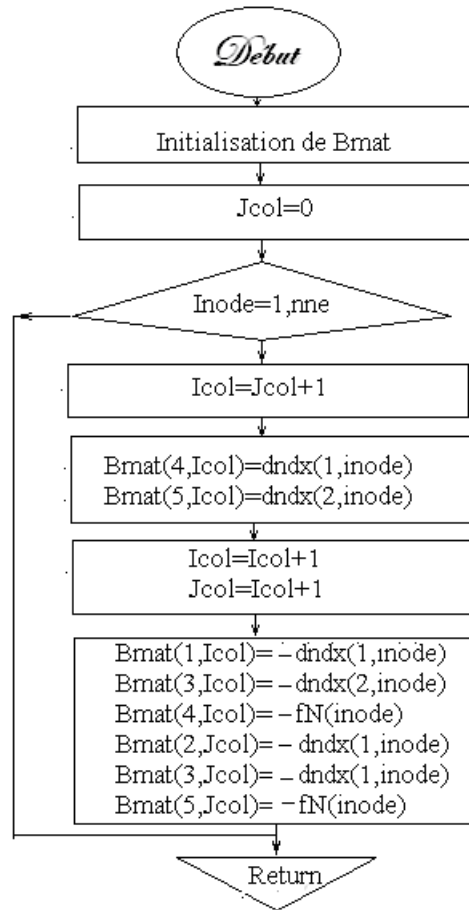


Fig. 5.31- Organigramme de calcul de la matrice [B].

L'organigramme de calcul de la matrice [B] est donné par la figure. Cet algorithme permet de générer à partir des sous matrices $[B_i]$ de chaque point nodal inod (ou indice jcol) les termes $B_{icon,icol}$ $icon=1,5$, $icol=1,24$ de la matrice $[B]_{5 \times 24}$ selon le mécanisme de la figure.

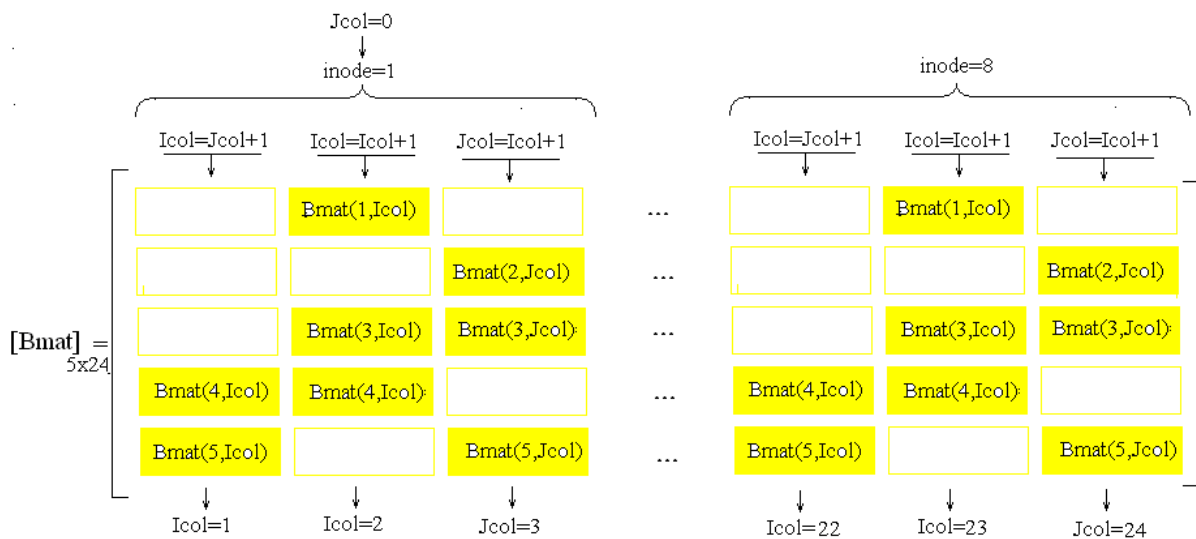


Fig.5.32- Schéma d'obtention des termes de [B] à partir du nœud 1.

Le programme suivant permet de déterminer les termes de la matrice [B] aux points de Gauss pour chaque élément.

5.3.6 Sous programme produit DB

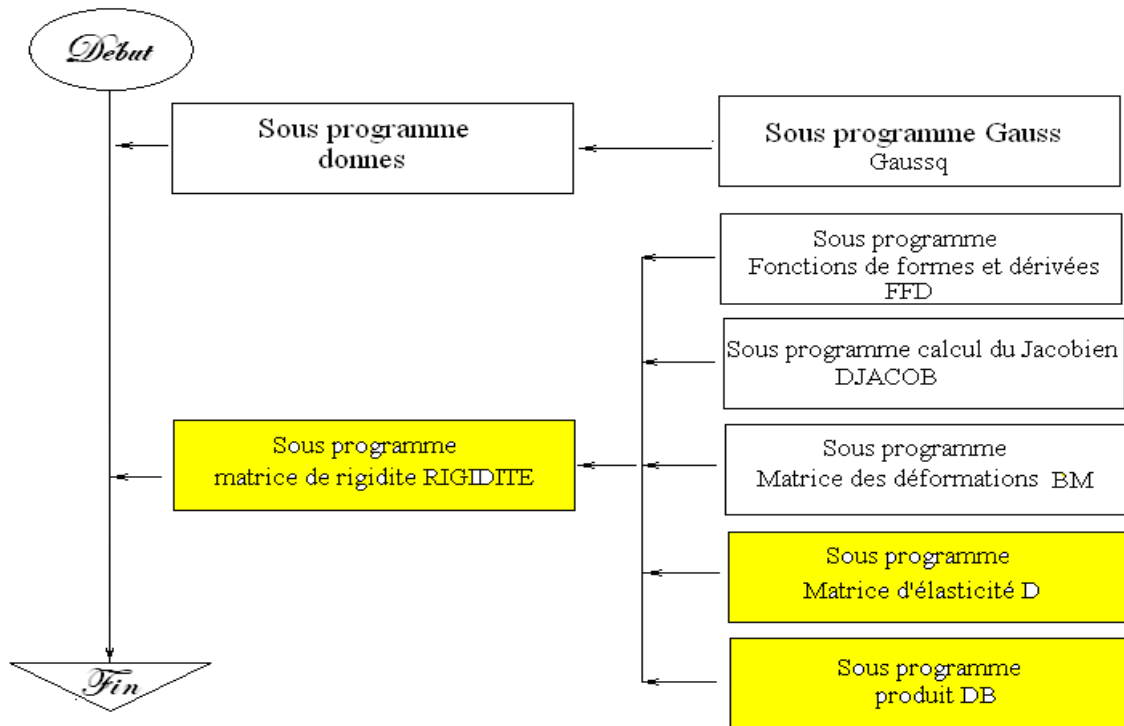


Fig.5.33 - Appel des sous programmes D et DB par le sous programme rigidité.

La matrice d'élasticité pour l'élément de plaque est donnée par

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{\nu Et^3}{12(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu Et^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Et}{24(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Et}{24(1+\nu)} \end{bmatrix}$$

Le produit DB est donné par

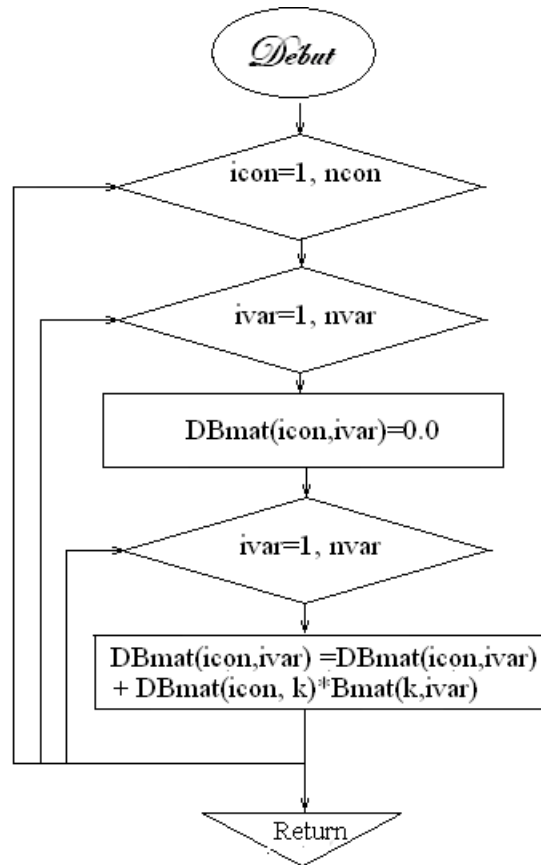
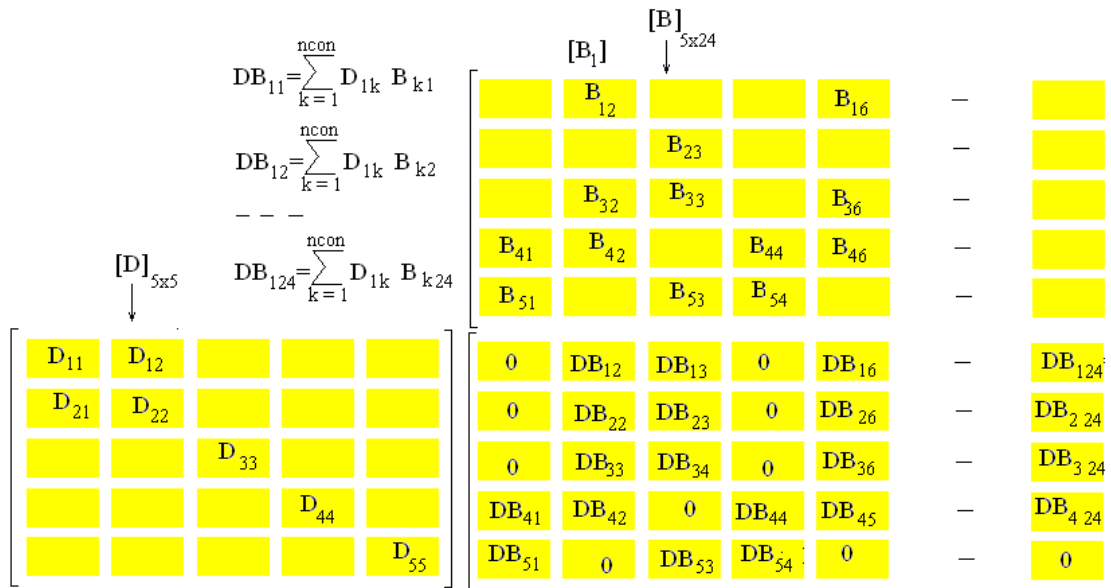


Fig. 5.34 -Organigramme calcul matrice de rigidité du plaque.

5.3.7 Calcul de Matrices de Rigidité $[K^e]$ et γ

Les matrices élémentaires $[K^e]$ sont données par la variable FKE

Dimension de la variable

Un terme de la matrice s'écrit $K_{i \text{ var}, j \text{ var}}$ avec

$$\begin{aligned} i \text{ var} &= 1, n \text{ var} \\ j \text{ var} &= 1, n \text{ var} \\ n \text{ var} &= n \text{ ne} * n \text{ ddl}, \end{aligned}$$

où

$n \text{ ddl} = 3$ les degrés de liberté en chaque point nodal $i \text{ point} = 1, n \text{ point}$ sont

ω , θ_x et θ_y

et $n \text{ ne} = 8$ (élément quadrilatéral à 8 nœuds)

d'où la dimension de la matrice $[K^e]$

$$\dim[K^e] = 24 \times 24$$

Les termes de la matrice élémentaire s'écrivent

$$K_{i \text{ var}, j \text{ var}} = \iint_{\Omega^{\text{ielem}}} [B \text{ mat}(i \text{ var}, i \text{ con})]^T [D \text{ mat}(i \text{ con}, i \text{ con})] [B \text{ mat}(i \text{ con}, j \text{ var})] d\Omega^{\text{ielem}}$$

$$K_{i \text{ var}, j \text{ var}} = \iint_{\Omega^{\text{ielem}}} [B \text{ mat}(i \text{ var}, i \text{ con})]^T [D B \text{ mat}(i \text{ con}, j \text{ var})] d\Omega^{\text{ielem}}$$

Où Ω^{ielem} est l'aire de l'élément $i \text{ elem}$,

Il est plus simple de faire le calcul de la matrice de rigidité en utilisant les transformations des éléments réels sur l'élément de référence (Figure 5.35)

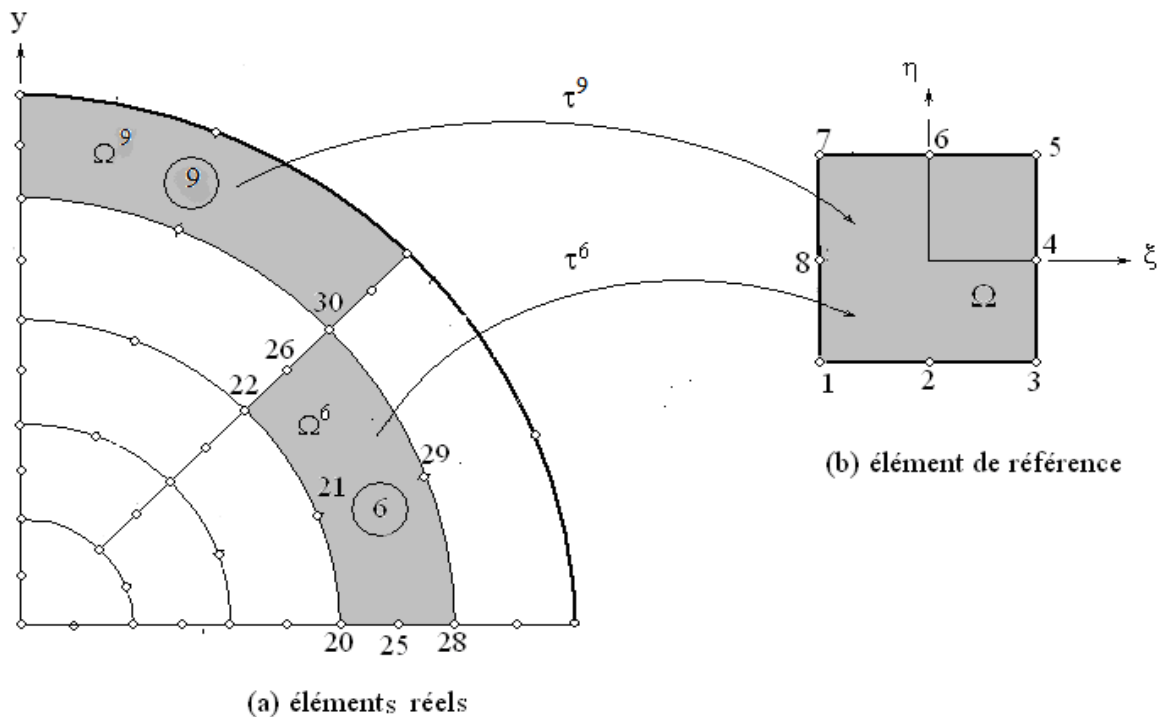


Fig.5.35- Transformations élémentaires τ^{ielem} des éléments réels sur l'élément de référence .

$$K_{i \text{ var}, j \text{ var}} = \iint_{\Omega^r} [B \text{ mat}(i \text{ var}, i \text{ con})]^T [D B \text{ mat}(i \text{ con}, i \text{ var})] \det[J] d\Omega^r$$

Les termes $K_{i \text{ var}, j \text{ var}}$ de la matrice $[K]$ s'écrivent alors :

$$Kp_{i \text{ var}, j \text{ var}} = \sum_{i \text{ gauss}=1}^2 \sum_{j \text{ gauss}}^2 \bar{K}_{i \text{ var}, j \text{ var}}(i \text{ gauss}, j \text{ gauss}) \det[J](i \text{ gauss}, j \text{ gauss}), \quad i \text{ var} = 1,24 \quad j \text{ var} = 1,24$$

Pour le cas du sol

a) **model du Winkler (réaction du sol) :**

$$Kw_{i \text{ var}, j \text{ var}} = k \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^T [N] \det[J] d\xi d\eta$$

k : la réaction de sol.

$[N]$: fonction de forme.

b) **model du cisaillement du sol :**

$$K2t_{i \text{ var}, j \text{ var}} = 2t.ab. \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{a^2} \left[\frac{\partial N}{\partial \xi} \right]^T \left[\frac{\partial N}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{b^2} \left[\frac{\partial N}{\partial \eta} \right]^T \left[\frac{\partial N}{\partial \eta} \right] \right) d\xi d\eta$$

$2t$: cisaillement de sol.

$[\partial N/\partial \xi]$ et $[\partial N/\partial \eta]$: les dérivé de fonction de forme.

Avec a et b sont les demi de longueur de la plaque, voir la figure ci-dessous.

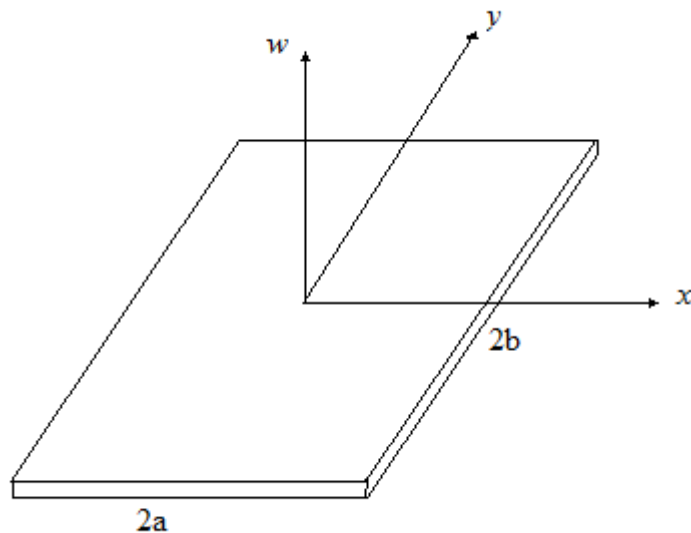


Fig .5.38 - Définition les longueurs a et b du plaque.

Donc la matrice de rigidité globale du système plaque-sol est la somme de ces matrices

$$[K] = \sum_{i=1}^{ne} (Kp + Kw + K2t)$$

Avec ne est le nombre des éléments finis de plaque.

Et, le vecteur de chargement de la plaque avec une charge distribuée uniformément peut être calculé sous la forme suivant :

$$\{f\} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^T q \det(J) d\xi d\eta$$

Finalement, l'équation qui être résolu est

$$[K]\{W\} = \{F\}$$

Ou, $\{F\}$ le vecteur de charge équivalent appliqué au système, et $\{W\}$ représente le déplacement nodale globale.

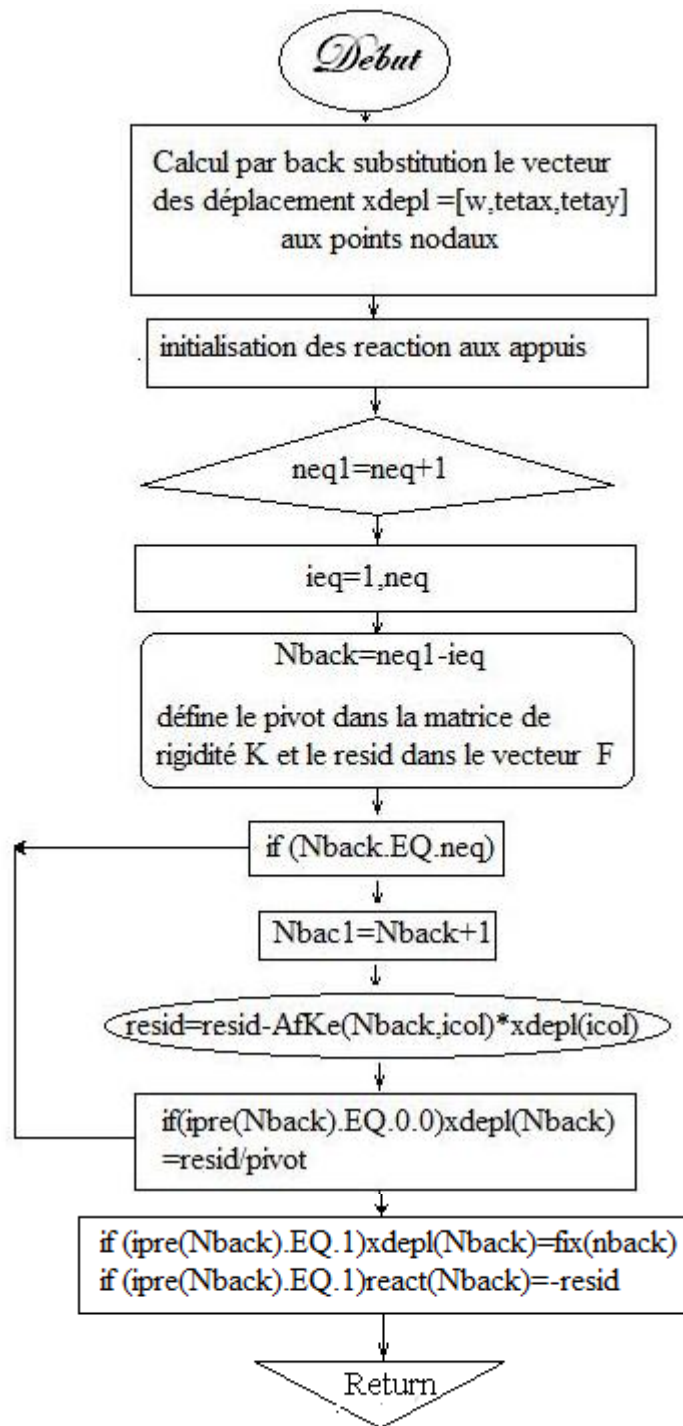


Fig.5.39 - Calcule les vecteurs de déplacement aux points nodaux.

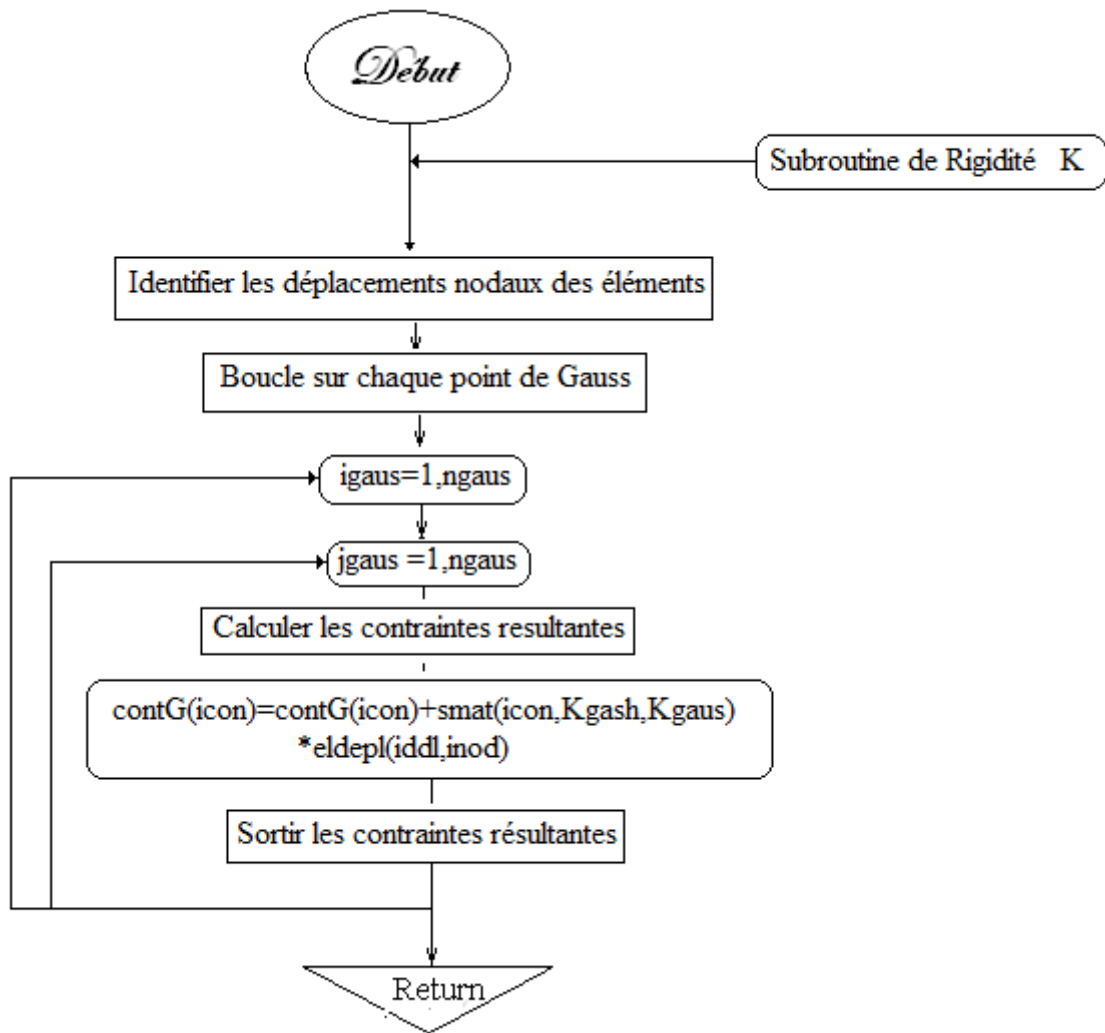


Fig.5.40 - Calcul les contraintes dans les points nodaux.

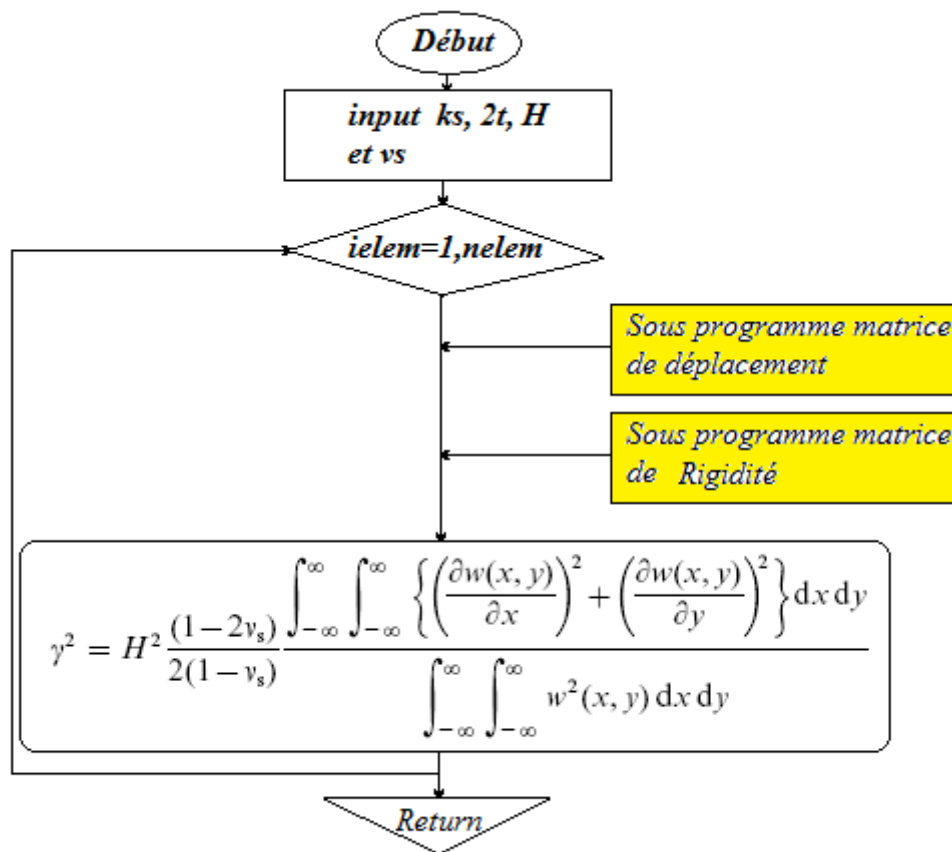


Fig.5.41 - Calcul le paramètre γ .

Chapitre 6

Applications et Discussions

CHAPITRE 6

Applications et Discussions

6.1 Introduction

Pour pouvoir représenter le comportement des structures en tenant compte de leur interaction avec le sol, les chercheurs sont amenés à utiliser des modèles très sophistiqués et très élaborés pouvant donner un nombre important de degrés de liberté.

De plus, l'utilisation des moyens informatiques actuellement disponibles peuvent satisfaire les auteurs mais au dépend d'un critère très onéreux qui est le facteur temps considéré comme un paramètre économique très important.

L'utilisation des modèles compliqués engendre des calculs très longs, ainsi l'ingénieur se trouve confronté à la nécessité d'une modélisation donnant un nombre de degrés de liberté acceptable du point de vue temps de traitement sur ordinateur [22].

Dans ce chapitre on compare les résultats obtenus par notre programme avec les résultats d'autres applications données par les chercheurs.

6.2 Comportement d'une plaque sous une charge statique

L'application qui suite concerne une étude statique d'une plaque carrée pour différents conditions aux limites. Cet exemple a également été étudié par un programme « Plate : Plate Bending Analysis by Finite Element Method », utilise 18 éléments triangulaire à trois nœuds dans un quart de la plaque (A, B, C et D) [23]. La configuration de la plaque est schématisée dans la figure 6.1.

6.2.1 Comportement d'une plaque carrée

Le premier cas traité concerne une plaque carrée mince ($h/L = 0,025$). Dans un premier temps, nous avons analysé le comportement d'une plaque simplement appuyée. Dans un deuxième temps, la plaque est encastree, et les deux cas sont chargés uniformément. Nous disposons pour ce problème des solutions analytiques de référence proposée par Timoshenko 1959, [3].

Tableau 6.1- Différentes solutions analytiques d'une plaque carrée.

Condition de frontière de chargement	Plaque Carrée		
	W mince [3]	W modérées [24]	M mince [3]
Simply supported uniformly loaded	$0.00406 qa^4/D$	$0.00427 qa^4/D$	$0.0479 qa^2$
Fixed with uniform loading	$0.001264 qa^4/D$	$0.0015 qa^4/D$	$0.0231 qa^2$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad : \text{La rigidité à la flexion de la plaque.}$$

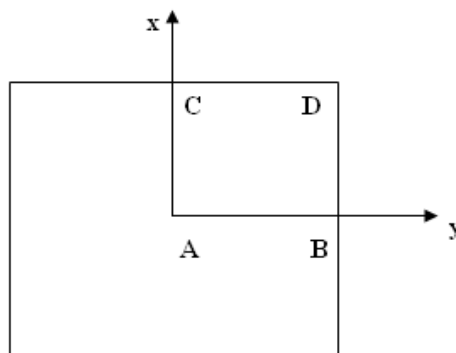


Fig. 6.1- Plaque carrée.

Les caractéristiques géométriques et mécaniques de cette plaque sont comme suite. La plaque a une grandeur de 120 cm et une épaisseur de 3 cm, la charge appliquée sur la plaque est égale à 0,001 Kgf/mm² avec un module de Young égale à 5000 Kgf/mm² et un coefficient de Poisson 0,3.

En raison de la symétrie, on modélise un quart de la plaque pour différentes conditions aux limites d'après le tableau 6.1. Les résultats en déplacement et moment sont représentés dans les tableaux 6.2 et 6.3.

Tableau 6.2- Comparaisons entre les solutions analytiques et numériques pour une plaque simplement appuyée.

		Maillages		
		3x3	5x5	8x8
Déflexion w(cm)	analytique	0.068199	0.068199	0.068199
	numérique	0.069916	0.069749	0.06935
	Erreur (%)	2.51	2.27	1.68
Moment M(Kgf.cm)	analytique	0.689	0.689	0.689
	numérique	0.699	0.6978	0.6951
	Erreur (%)	1.45	1.27	0.885

La flèche donnée par l'élément à huit nœuds est satisfaisante, l'écart est de 1.68 % avec un maillage de 8x8 par rapport au résultat analytique. Le moment au centre de l'élément est bien calculé avec un écart inférieur à 0.9 % pour le maillage de 8x8. D'autre part le programme de *Taki* [23] a donnée une déflexion de 0.0619 m et 10.74 % écart d'erreur, ce qui présente une convergence pour notre programme.

Tableau 6.3- Comparaisons entre les solutions analytiques et numériques pour une plaque mince encastree.

		Maillages		
		3x3	5x5	8x8
Déflexion w(cm)	analytique	0.0212	0.0212	0.0212
	numérique	0.0213	0.0214	0.0214
	Erreur (%)	0.471	0.943	0.943
Moment M(Kgf.cm)	analytique	0.3326	0.3326	0.3326
	numérique	0.3238	0.3280	0.3290
	Erreur (%)	2.64	1.38	1.08

D'après les résultats obtenus dans le tableau 6.3, on constate que la solution converge rapidement pour la flèche avec une erreur inférieure à 1 % pour le maillage de 8x8. Sa convergence en termes de moment est également bonne avec une erreur presque égale à 1 % pour le même maillage.

On remarque que les déplacements et les moments se rapprochent de la solution analytique d'une plaque isotrope quand le maillage augmente, pour notre programme, à 68 éléments et les résultats sont satisfaisants pour le premier cas.

Dans ce qui suit nous présentons le deuxième cas, qui concerne une plaque modérée avec $h = 18$ cm ($h/L = 0,15$). La plaque est traitée avec les mêmes conditions aux limites et le même chargement que la plaque mince. Les solutions analytiques sont illustrées par (*Liu et Riggs*, [24]), et le maillage augmente jusqu'à 10x10. Les résultats du déplacement sont représentés sur les tableaux 6.4 et 6.5.

Tableau 6.4- Comparaisons entre les solutions analytique et numérique de la déflexion d'une plaque modérée simplement appuyée (mm).

	Maillages		
	3x3	5x5	10x10
Analytique	0.000331	0.000331	0.000331
Numérique	0.000391	0.000402	0.000391
Erreur %	17.77	21.08	17.77

Tableau 6.5- Comparaisons entre les solutions analytique et numérique de la déflexion d'une plaque modérée encastree (mm).

	Maillages		
	3x3	5x5	10x10
Analytique	0.001165	0.001165	0.001165
Numérique	0.00145	0.00144	0.00139
Erreur %	24.46	23.60	19.31

Les tableaux 6.4 et 6.5 présentent la déflexion pour une plaque modérée. On observe que l'erreur diminue dès que le maillage augmente; le programme montre dans ce cas une convergence plus lente et la déflexion calculée par *Taki* [23] pour une plaque simplement appuyée est de 0.000357mm, qui présente un erreur de 8.7 % par rapport à notre résultat et 7.8 % par rapport à la solution analytique.

D'après les tableaux 6.4 et 6.5, on constate que l'erreur atteint 15.18 % et 16.18 % pour une plaque simplement appuyée et une plaque encastree, respectivement, ce qui signifie que les plaques modérées demandent un maillage plus grand que les plaques minces et que les effets de l'effort tranchant et de l'inertie de rotation sont loin d'être négligeables. Pour valider cette remarque, la même plaque sera calculée mais cette fois pour une épaisseur plus proche de la plaque mince ($h= 15$ cm, $h/L= 0,125$) et pour les mêmes maillages, les résultats sont illustrés dans les tableaux 6.6 et 6.7.

Tableau 6.6- Comparaisons entre les solutions analytiques et numériques de la déflexion d'une plaque modérée simplement appuyée (mm).

	Maillages		
	3x3	5x5	10x10
Analytiques	0.000573	0.000573	0.000573
Numériques	0.000646	0.00666	0.000646
Erreurs %	12..74	16.23	12.74

Tableau 6.7- Comparaisons entre les solutions analytique et numérique de la déflexion d'une plaque modéré encastéré (mm).

	Maillages		
	3x3	5x5	10x10
Analytiques	0.0002012	0.0002012	0.0002012
Numériques	0.0002306	0.0002870	0.0002200
Erreurs %	14.61	42.64	09.34

On observe que l'erreur a diminué de l'ordre 5.03 % et 9.97 % pour la plaque simplement appuyé et la plaque encastérée, respectivement, quand l'épaisseur diminue de 2.5 %.

6.2.2 Comportement d'une plaque circulaire.

On étudie dans ce cas une plaque circulaire encastérée, ce problème a été traité par *Hinton* [25]. La plaque a un rayon égal à 0.5 in (1.27 cm) et une épaisseur de 0.01 in (0.0254 cm). Le module de Young est égal à 10.92 lb/in² (0.767752 Kg/cm²) et une charge uniforme égale à 1.0 lb/in² (0.070307 Kg/cm²).

La plaque est modélisée par neuf éléments paraboliques isoparamétriques comme *Hinton* [25] l'a modélisé. Pour raison de symétrie, on modélise le quart de la plaque.

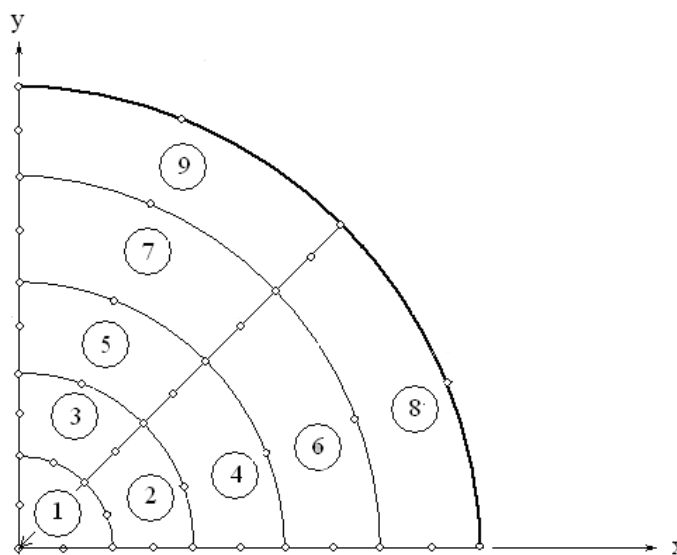


Fig. 6.2- Maillage du quart de la plaque circulaire.

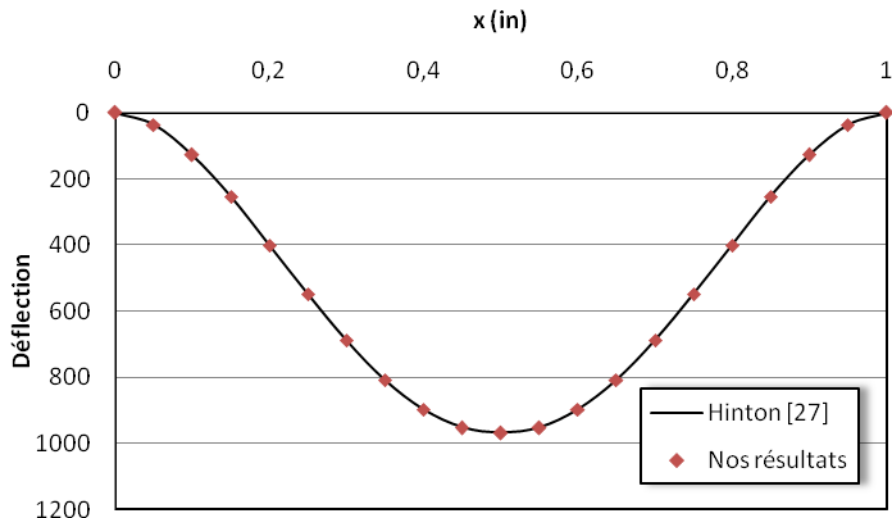
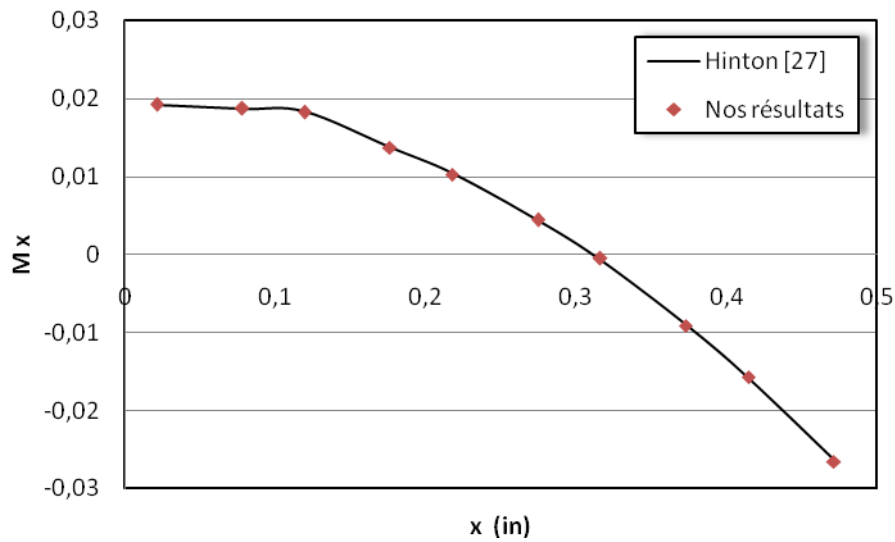
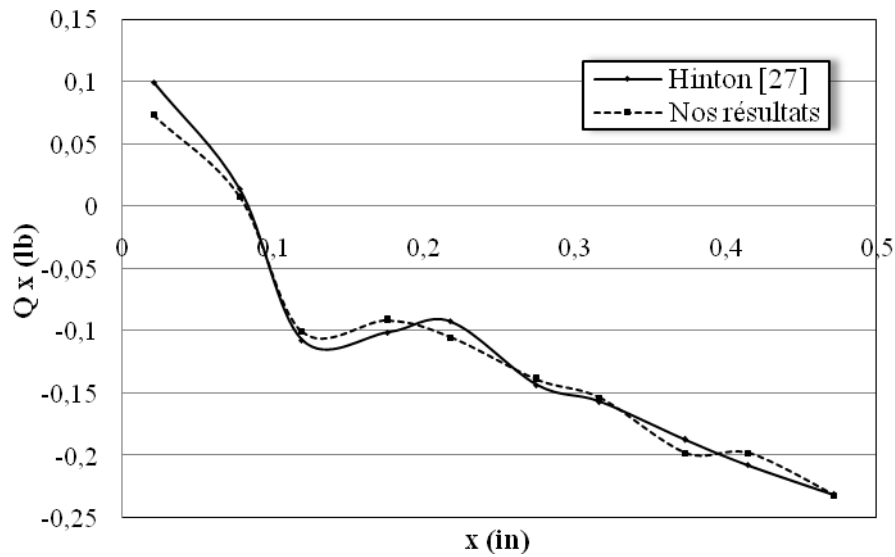


Fig. 6.3- Déflexion de la plaque circulaire encastée à la ligne centrale due à une charge uniforme.



(a)



(b)

Fig. 6.4- La distribution des contraintes sur la ligne centrale de plaque circulaire encadrée due à la charge uniforme : (a) Moment de flexion, (b) Les forces de cisaillements.

D'après *Szilard* [2] la solution analytique en termes de déflexion et moment est calculée avec les équations 6.1 et 6.2, respectivement.

$$w = \frac{q_0 r_0^2}{64.D} = 976.56 \text{ in} \quad (6.1)$$

$$m_r = \frac{q_0}{16} \left((1+\nu)r_0^2 - (3+\nu)r^2 \right) = 0,0203 \text{ lb} \quad (6.2)$$

On constate une parfaite concordance entre les trois résultats. L'erreur effective calculée pour la déflexion entre les résultats de *Hinton* et *Szilard* et notre résultat est 0,15 % et 0,89 %, respectivement. Pour le moment -figure 6.4 a- l'erreur est de 0,52 % et 5,73 %, respectivement. Et la même remarque pour la courbe des forces de cisaillement, notre courbe -figure 6.4 b- présente la même allure de la courbe de *Hinton*.

Une analyse de ces exemples montre que l'élément parabolique isoparamétrique à huit nœuds est un bon élément de flexion, qui a donné des résultats satisfaisants avec les plaques isotropes en statique.

El-Zafarany et al [26] ont introduit la théorie du Kirchhoff modifiée avec la considération des contraintes transversales normales pour étudier des plaques minces par la méthode des éléments de frontière.

Le premier exemple est une plaque circulaire encastree sous charge uniforme, avec les propriétés suivantes:

$$r_0 = 0,5 \text{ m}$$

$$h = 0,05 \text{ m}$$

$$\text{module de Young } E = 2,1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{coef de Poisson } \nu = 0,3$$

$$q = 1200 \text{ kN/m}^2$$

Les résultants en déflexion et moment (figure 6.5 et 6.6) sont présentés par des paramètres adimensionnels,

$$w_0 = \frac{q \cdot r_0^4}{D}, \quad M_0 = q \cdot r_0^2,$$

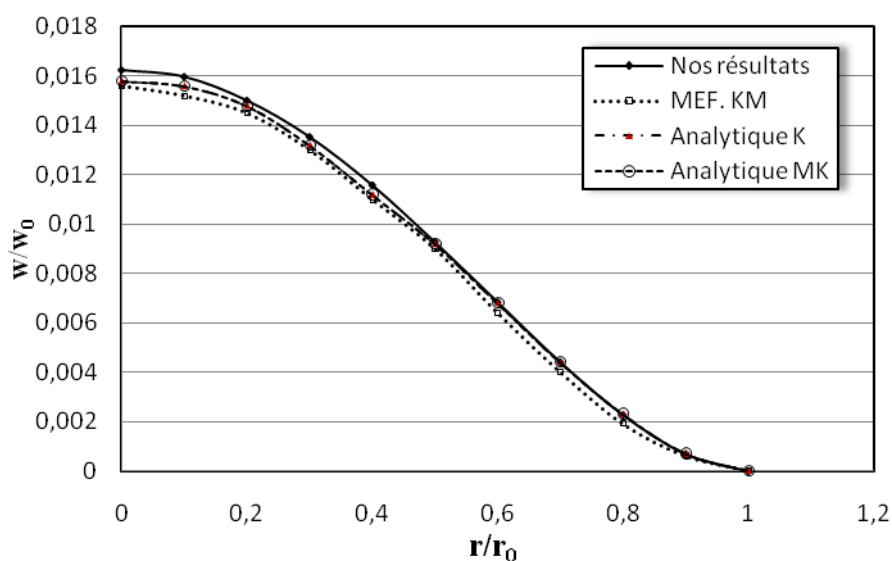


Fig. 6.5- Déflexion de la plaque circulaire encastree sous charge uniforme.

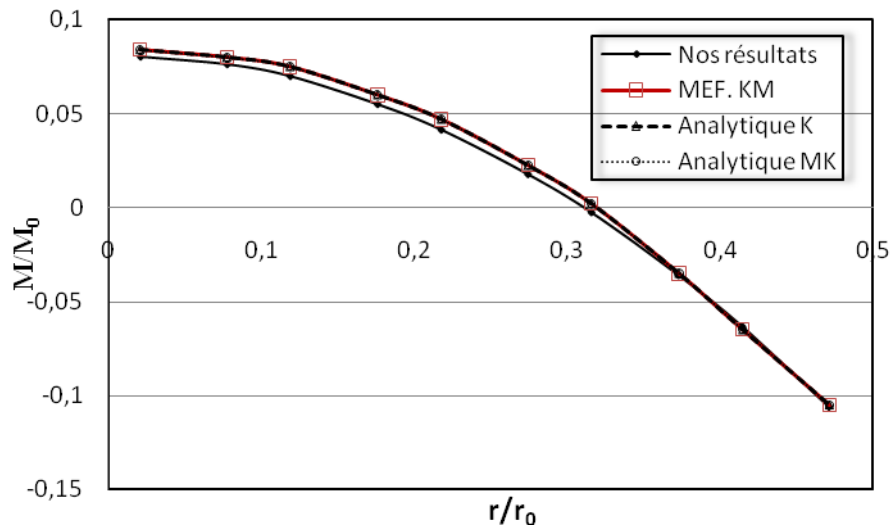


Fig. 6.6- Moment de la plaque circulaire encadrée sous charge uniforme.

Comme il est montré dans les figures 6.5 et 6.6, les résultats obtenus sont identiques ce qui prouve la convergence, l'écart maximal par rapport à la solution analytique et de référence est de 3,84 % et 1,88 % pour la déflexion et 1,39 % et 0,92 % pour le moment, respectivement, au centre de la plaque (tableau 6.8).

Tableau 6.8- Déflexions et moments adimensionnels de la plaque circulaire encadrée.

	Kirchhoff analytique	Kirchhoff modifier analytique	MEF Kirchhoff	MEF modifier Kirchhoff	Nos Résultats
w/w_0	0.0156	0.0156	0.0165	0.0159	0.0162
M/M_0	0.8125	0.8168	0.8245	0.8087	0.8012

D'autres exemples sont traités par *El-Zafrany* et al, pour une plaque circulaire simplement appuyée sous charge concentrée, avec des propriétés sont similaires sauf que le chargement est

remplacé par une charge concentrée au centre ($P = 300 \text{ kN}$). Les paramètres adimensionnels radiaux sont :

$$w_0 = \frac{P \cdot r_0^2}{D}, \quad M_0 = P,$$

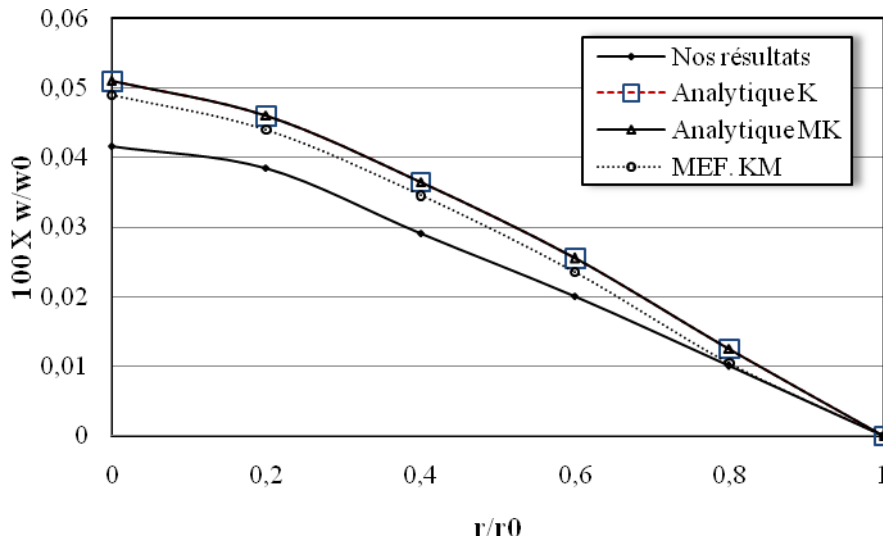


Fig. 6.7- Déflexion de la plaque circulaire simplement appuyée sous charge uniforme.

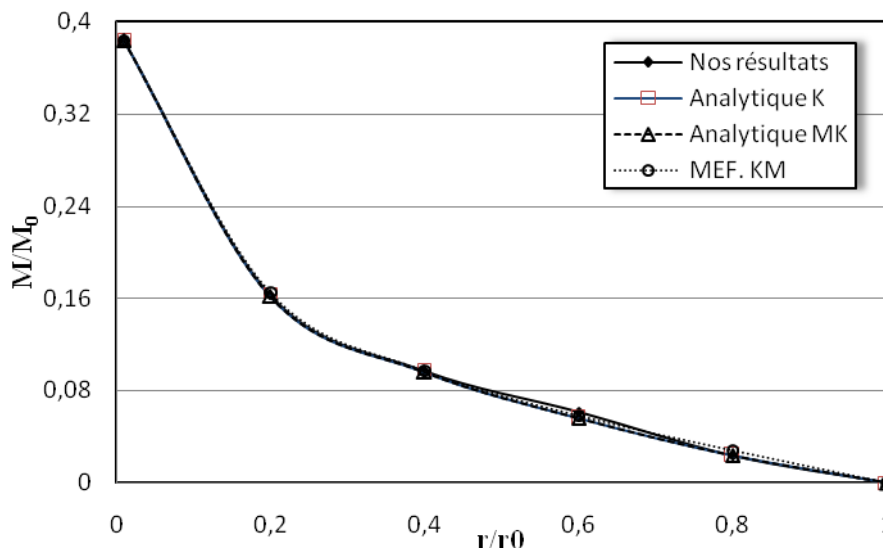


Fig. 6.8- Moment de la plaque circulaire simplement appuyée sous charge uniforme.

Les résultats obtenus sont presque identiques, ce qui prouve que la convergence est atteinte, l'écart maximal au centre par rapport à la solution de référence est de 15,1 % pour la déflexion

(figure 6.7), et pour le moment (figure 6.8). On observe un très bon accord avec les solutions de référence avec un écart négligeable.

6.3 Comportement d'une plaque reposant sur sol élastique

6.3.1 Modèle de *Winkler*

Dans cet exemple, on analyse le comportement d'une plaque carrée reposant sur fondation élastique de type *Winkler*, chargée par des forces concentrée et uniforme.

Nous avons pris un exemple traité par *Eratil* [27] avec nouvelle fonction du *Reissner* basée sur l'équation différentielle de Gâteaux. La plaque a une longueur de 10 m, est une épaisseur de 0.5 m, et un module de *Young* et un coefficient de *Poisson* égaux à $2.E07 \text{ KN/m}^2$ et 0.167, respectivement. Les charges appliquées sont de $3. \text{ KN/m}^2$ et 1.0 KN pour la charge uniforme et concentrée, respectivement. Le sol a un module de fondation $K = 562 \text{ KN/m}^3$.

Les résultats concernant les tassements des plaques par rapport au deux chargements sont illustrés dans le tableau 6.9. La comparaison par rapport deux auteurs est également présentés.

Tableau 6.9- Comparaison de la déflexion pour une plaque sur sol élastique type *Winkler*.

	Charge Uniforme $w_{\max} \times 10^{-4}$	Charge concentrée $w_{\max} \times 10^{-4}$
Eratil [20]	5.2660	5.1070
T.Arman (1965) in [20]	5.3558	4.4880
S.Timoshenko(1956) in [20]	5.4514	4.5339
Nos résultats	5.5051	4.519

Les résultats obtenus sont en bon corrélation entre les quatre solutions avec un écart maximal égal à 4.57 % et 13.01 % pour la charge uniforme et la charge concentré, respectivement. Ceci montre la bonne convergence de notre méthode en éléments finis.

Une autre méthode a été utilisée par **Abdella** [28] basée sur l'équation classique de **Kirchhoff** pour une plaque mince (Eq. 6.3). D'après cette équation, l'auteur a utilisé une nouvelle méthode pour calculer la déflexion pour les deux types de plaque mince et épaisse reposant sur sol élastique de type **Winkler** (Eq. 6.4).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} - \frac{kw}{D} \quad (6.3)$$

L'équation de la déflexion pour la charge répartie est:

$$w = \frac{16q_0}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)$$

$$w_{mn} = \frac{-\left\{ \frac{c^2}{D} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] + \frac{1}{D} \right\}}{mn \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \right] + \frac{kc^2}{D} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] + \frac{k}{D}} \quad (6.4)$$

Le même exemple de **Eratil** [27] a été traité par cette équation et comparé par rapport à notre résultat précédent (Tableau 6.10).

Tableau 6.10- Comparaison de la déflexion pour une plaque sur sol élastique type **Winkler**.

	Charge Uniforme $w_{\max} \times 10^{-4} m$
Abdalla et Ibrahim [21]	5.659
Notre résultat	5.5051

Le tableau 6.10 présente un résultat très convergent avec une erreur effective obtenue par rapport à *Abdalla* et *Ibrahim* [28] égale à 2.71 %.

Finalement, le troisième exemple est déterminé par *Hua* et al [29] pour une plaque carrée simplement appuyée chargée uniformément. La déflexion sur la ligne centrale de la plaque est montrée dans la figure 5.9, avec une déflexion au centre égale à $2.0 \times 10^{-5} m$.

Les caractéristiques géométriques et mécaniques de plaque et du sol sont comme suite,

Longueur : $a = b = 1 m$;

Charge $q_0 = 1 \text{ KN/m}^2$;

Module de Young et coefficient de Poisson: $E = 21000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$, et

Réaction de sol: $k = 49000 \text{ KN/m}^3$.

Epaisseur : $h = 0.01 m$;

De même que l'exemple de *Eratil* [27], notre programme donne des résultats en bonne corrélation avec ceux du *Hua* (tableau 6.11).

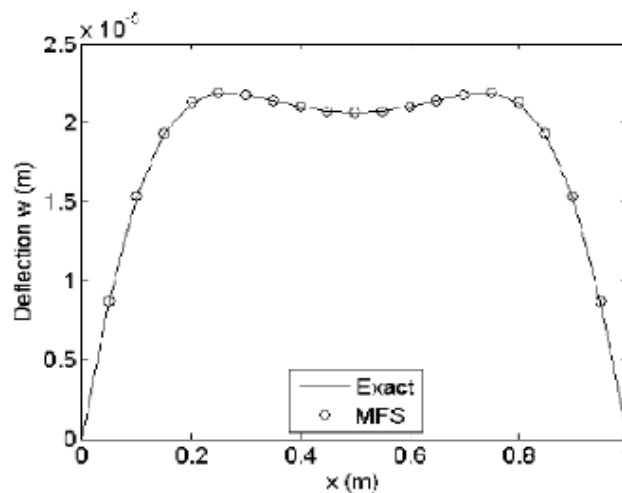


Fig. 6.9- Distribution de la déflexion.

Tableau 6.11- Comparaison de la déflexion pour une plaque sur sol élastique type *Winkler*.

	10x10
Hua,Wong et Kompis [23]	$2.0 \times 10^{-5} m$
Notre résultat	$2.03 \times 10^{-5} m$

6.3.2 Modèle de *Vlasov*

D'après le modèle *Winkler*, la plaque avec charge uniforme se déforme comme un corps rigide (déplacement cts) $w = q/k$, mais avec le modèle *Vlasov*, on inclut l'effet de cisaillement du sol. La déformation de la plaque prend la forme de balle (concave) figure 6.10, ce qui représente l'amélioration du modèle de *Vlasov* par rapport au *Winkler*.

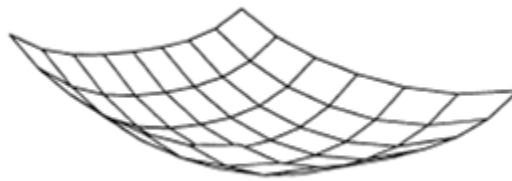


Fig. 6.10- Déflexion de la plaque sur sol élastique
(Modèle de *Vlasov*) sous charge uniforme.

Pour déterminer le comportement de la plaque reposant sur sol élastique le modèle de *Vlasov*, calcule les valeurs de k et $2t$ (module de réaction et de cisaillement de sol respectivement). Ce problème a été étudié en 1990 par *Straughan* [16], mais résolu par la méthode des différences finies.

L'exemple traité est une plaque rectangulaire, subissant une charge uniforme et une charge concentrée pour différentes profondeurs de sol 3.048, 6.096, 9.144 et 15.240 m, et les résultats sont comparés en même temps avec différents auteurs (différentes méthodes).

Le module d'élasticité de la plaque et le coefficient de Poisson sont :

$$E_p = 20\,685\,000 \text{ KN/m}^2, \quad \nu = 0.20.$$

Le module d'élasticité du sol et le coefficient de Poisson sont :

$$E_s = 68\,950 \text{ KN/m}^2, \quad \nu = 0.25.$$

La plaque a une longueur de 9,144 m, une largeur de 12,192 m et une épaisseur de 0,1524 m. Les charges sont représentées dans la figure 6.11.

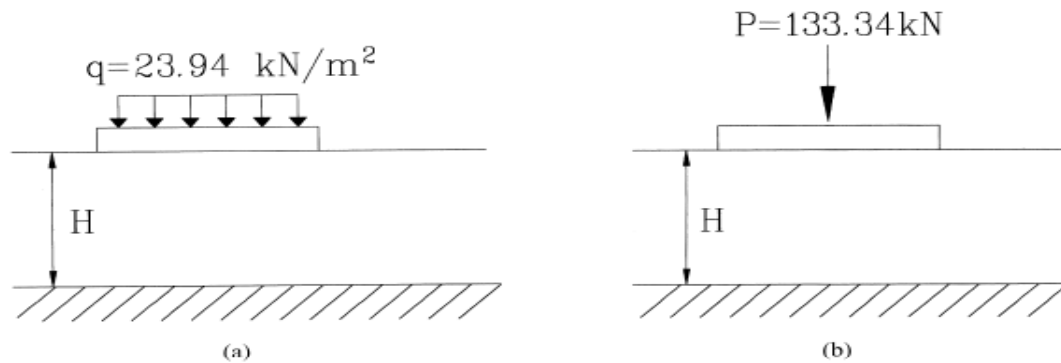


Fig. 6.11- Type de Chargement : (a) Charge distribuée uniformément,
(b) Charge concentrée.

Tableau 6.12- Déplacement maximum de la plaque reposant sur fondation élastique due à la charge uniforme.

H(m)	Références	k (kN/m³)	$2t$ (kN/m)	w (cm)	M_x (kN.m/m)
3.048	Vallabhan.S.D	27206	26904	0.0872	0.0529
	Celik et Saygun	27192	26826	0.0853	0.0445
	Buczowski et Torbacki	27207	26852	0.0871	-
	Ozgan et Daloglo	27208	26839	0.0874	0.0490
	Nos résultats	27145	27991	0.0877	0.0730
6.096	Vallabhan.S.D	13757	50282	0.1524	0.3113
	Celik et Saygun	13757	50410	0.1526	0.2882
	Buczowski et Torbacki	13758	50411	0.1530	-
	Ozgan et Daloglo	13744	50620	0.1533	0.2794
	Nos résultats	13576	55247	0.1510	0.3134
9.144	Vallabhan.S.D	9430	69506	0.1890	0.4224
	Celik et Saygun	9377	70586	0.1893	0.4109
	Buczowski et Torbacki	9378	50587	0.1896	-
	Ozgan et Daloglo	9337	71390	0.1918	0.3917
	Nos résultats	9050	83241	0.1810	0.4210
15.24	Vallabhan.S.D	6366	94732	0.2070	0.4892
	Celik et Saygun	5964	104664	0.2212	0.4671
	Buczowski et Torbacki	5964	104664	0.2205	-
	Ozgan et Daloglo	5924	105889	0.2238	0.4311
	Nos résultats	5430	139111	0.2001	0.4225

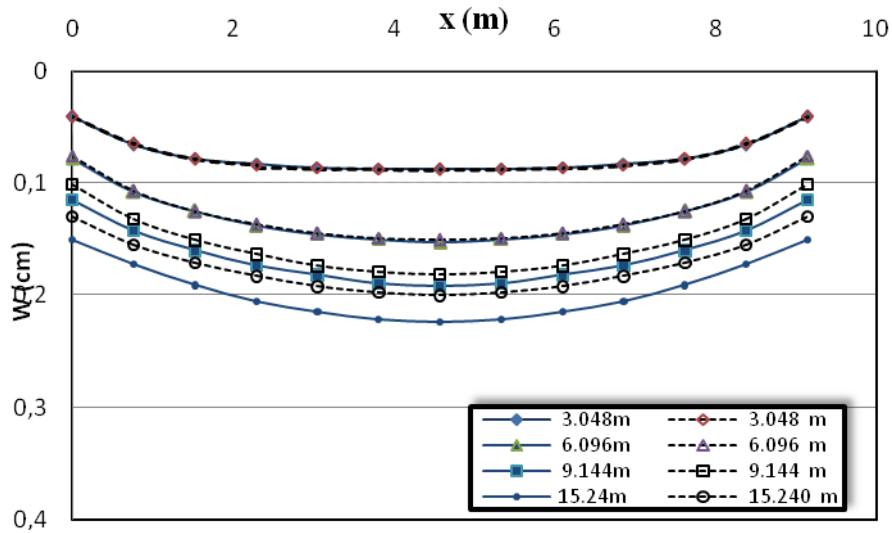


Fig. 6.12- Déflexion de la plaque due à la charge répartie.
 (— : Ozgan[5], :Nos résultats).

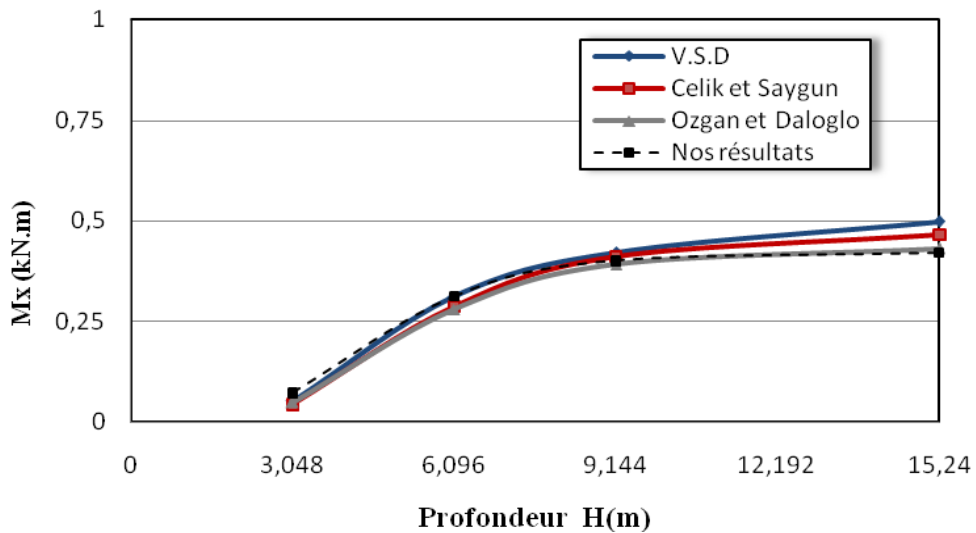


Fig. 6.13- Variation de moment maximum de la plaque due à la charge répartie par rapport à la profondeur H.

Tableau 6.13- Déplacement maximum d'une plaque reposant sur fondation élastique due à la charge concentrée.

H(m)	Références	k (kN/m ³)	$2t$ (kN/m)	w (cm)	M_x (kN.m/m)
3.048	Vallabhan.S.D	31610	19130	0.0480	12.544
	Celik et Saygun	31898	18912	0.0818	15.047
	Buczowski et Torbacki	31898	18913	0.0894	-
	Ozgan et Daloglo	31804	18990	0.0857	17.633
	Nos résultats	29710	20540	0.1130	17.790
6.096	Vallabhan.S.D	23918	23918	0.0975	12.544
	Celik et Saygun	24256	23596	0.0845	14.563
	Buczowski et Torbacki	24256	23598	0.0912	-
	Ozgan et Daloglo	24092	23763	0.0884	17.128
	Nos résultats	22890	25900	0.1030	15.597
9.144	Vallabhan.S.D	23376	24386	0.0975	12.544
	Celik et Saygun	23737	24034	0.0846	14.510
	Buczowski et Torbacki	23738	24036	0.0912	-
	Ozgan et Daloglo	23557	24221	0.0885	17.073
	Nos résultats	21100	30230	0.0916	14.121
15.24	Vallabhan.S.D	23350	24410	0.0975	12.544
	Celik et Saygun	23710	24060	0.0846	-
	Buczowski et Torbacki	23717	24054	0.0912	17.070
	Ozgan et Daloglo	23530	24245	0.0885	12.789
	Nos résultats	20890	31010	0.0760	

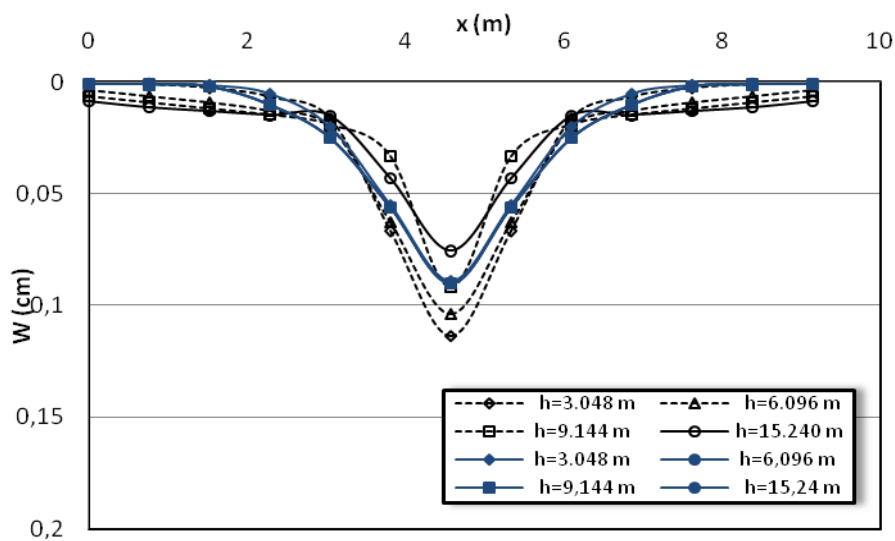


Fig. 6.14- Déflexion de la plaque due à la charge concentrée.
(— : Ozgan [5], :Nos résultats).

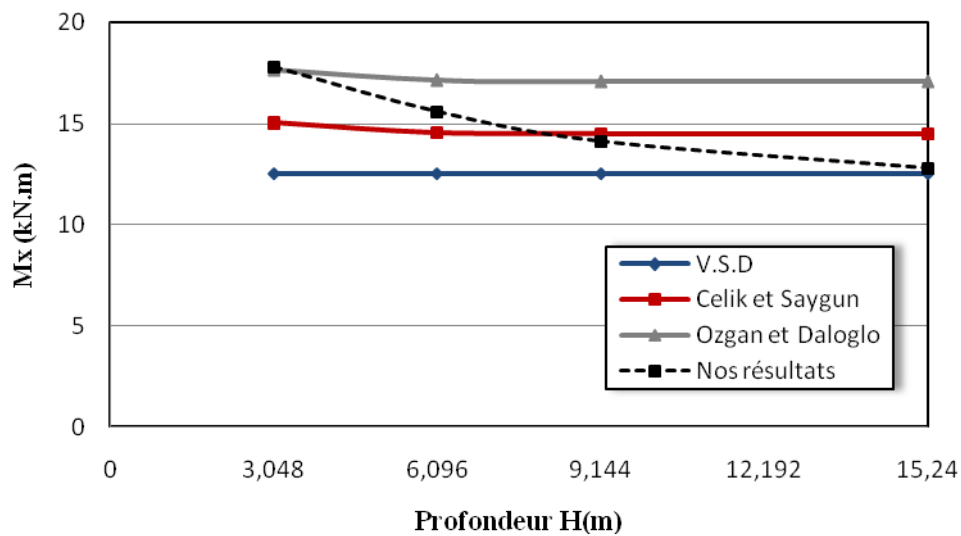


Fig. 6.15- Variation de moment maximum de la plaque due à la charge concentrée par rapport à la profondeur H.

Les résultats de l'élément à huit nœuds, considéré ici, présentent un bon accord avec les résultats données par *Celik- Saygun* [30], *Buczowski-Torbacki* [31] et *Ozgan-Daloglo*[5]. Pour les profondeurs 3.048, 6.096, 9.144 et 15.24 m, les erreurs effectifs de la déflexion par rapport aux auteurs sont 0.34%, 1.52%, 5.96% et 11.9% pour la charge uniforme, tandis que pour la charge concentrée les erreurs sont 24.15%, 14.17%, 3.38 et 16.44%. Cela montre que notre programme présente une bonne convergence pour certaine profondeur, pour la charge répartie.

Les moments de flexion sont très proches par rapport aux résultats des auteurs [21, 30, 05] dans le cas de la charge uniforme, tandis que pour le cas de la charge concentrée les résultats du moment sont dans l'intervalle des moments des auteurs.

Ainsi, on observe que le moment augmente par rapport à la profondeur pour le cas de la charge uniforme, et par contre dans le cas de charge concentrée, le moment diminue et après certain profondeur il devient constant.

Le même exemple est considéré avec trois différents types de conditions de frontière. Les propriétés de la plaque et le sol sont les mêmes. Le rapport entre l'épaisseur et la longueur du petit coté de la plaque est 0.05, 0.10, 0.15 et 0.20.

L'exemple est résolu par *Ozgan* par un élément à huit (08) nœuds basé sur la théorie des plaques épaisses avec l'intégrale sélective et l'élément MZC basé sur la théorie des plaques minces pour présenter l'effet de la déformation de cisaillement.

Les déplacements de la plaque pour différentes profondeurs du sol, épaisseur de la plaque et conditions de frontière sont illustré dans les tableaux 6.14 à 6.16.

Tableau 6.14- Déplacement maximum de plaque encastree.

H(m)	h/L	w(cm)									
		Charge Uniforme					Charge Concentree				
		MZC	Ozgan	% Diff	Nos rés	% Diff	MZC	Ozgan	% Diff	Nos rés	% Diff
3.048	0.05	0.06804	0.06835	0.46	0.06775	-0.87	0.02087	0.02247	7.67	0.02333	3.83
	0.10	0.01991	0.02179	9.44	0.02175	-0.18	0.00482	0.00608	26.14	0.00632	3.94
	0.15	0.00677	0.00851	25.70	0.00850	-0.11	0.00159	0.00253	59.12	0.00264	4.34
	0.20	0.00296	0.00438	47.94	0.00437	-0.22	0.00069	0.00142	105.80	0.00148	4.22
6.096	0.05	0.08347	0.08422	0.90	0.08130	-3.46	0.02330	0.02492	6.95	0.0250	1.39
	0.10	0.02094	0.02308	10.22	0.02290	-0.78	0.00499	0.00628	25.85	0.00649	3.34
	0.15	0.00688	0.00870	26.45	0.00870	0.0	0.00161	0.00256	59.01	0.00266	1.03
	0.20	0.00298	0.00443	48.66	0.00443	0.0	0.00069	0.00143	107.25	0.00149	4.19
9.144	0.05	0.08652	0.08741	1.03	0.08138	-6.89	0.02369	0.02531	6.84	0.02429	-4.03
	0.10	0.02111	0.02330	10.37	0.02295	-1.50	0.00501	0.00631	25.95	0.00645	2.21
	0.15	0.00690	0.00874	26.67	0.00871	-3.43	0.00161	0.00257	59.63	0.00266	3.5
	0.20	0.00298	0.00444	48.99	0.00443	-0.22	0.00069	0.00143	107.25	0.00149	4.19
15.24	0.05	0.08723	0.08817	1.08	0.07735	-12.3	0.02337	0.02537	6.78	0.02245	-11.5
	0.10	0.02114	0.02335	10.45	0.02274	-2.61	0.00502	0.00632	25.90	0.00634	0.31
	0.15	0.00690	0.00874	26.67	0.00871	-0.34	0.00161	0.00257	59.63	0.00265	3.11
	0.20	0.00298	0.00444	48.99	0.00444	0.0	0.00069	0.00143	107.25	0.00149	4.19

Tableau 6.15- Déplacement maximum de plaque simplement appuyée.

H(m)	h/L	w(cm)									
		Charge Uniforme					Charge Concentrée				
		MZC	Ozgan	% Diff	Nos rés	% Diff	MZC	Ozgan	% Diff	Nos rés	% Diff
3.048	0.05	0.08991	0.08973	-0.20	0.0889	-0.92	0.02339	0.02397	2.48	0.0249	3.87
	0.10	0.04728	0.04788	1.27	0.0495	3.38	0.00761	0.00873	14.72	0.00926	6.07
	0.15	0.01992	0.02102	5.52	0.0227	7.99	0.00300	0.00387	29.00	0.00421	8.78
	0.20	0.00935	0.01045	11.76	0.0117	11.96	0.00138	0.00208	50.72	0.00229	10.09
6.096	0.05	0.12421	0.12405	-0.13	0.118	-4.87	0.02650	0.02807	5.92	0.0281	0.10
	0.10	0.05411	0.05496	1.57	0.0562	2.25	0.00844	0.00959	13.63	0.01009	5.21
	0.15	0.02101	0.02226	5.95	0.0240	7.81	0.00313	0.00402	28.43	0.00437	8.70
	0.20	0.00958	0.01075	12.21	0.0120	11.62	0.00141	0.00211	49.65	0.00234	10.9
9.144	0.05	0.13290	0.13273	-0.13	0.1182	-10.9	0.02740	0.02896	5.69	0.02741	-5.35
	0.10	0.05550	0.05641	1.64	0.0561	-0.55	0.00861	0.00976	13.36	0.01004	2.86
	0.15	0.02121	0.02248	5.99	0.024	6.76	0.00316	0.00404	27.85	0.00437	8.17
	0.20	0.00962	0.01080	12.27	0.012	11.11	0.00141	0.00212	50.35	0.00234	10.37
15.24	0.05	0.13538	0.13520	-0.13	0.105	77.66	0.02662	0.02917	9.58	0.02457	8.42
	0.10	0.05587	0.05680	1.66	0.0531	-6.51	0.00865	0.00981	13.41	0.00958	-2.34
	0.15	0.02127	0.02255	6.02	0.0235	4.21	0.00316	0.00405	28.16	0.00429	5.92
	0.20	0.00963	0.01082	12.36	0.0119	9.98	0.00142	0.00212	49.30	0.00232	9.43

Tableau 6.16- Déplacement maximum de plaque libre.

H(m)	h/L	w(cm)									
		Charge Uniforme					Charge Concentrée				
		MZC	Ozgan	% Diff	Nos rés	% Diff	MZC	Ozgan	% Diff	Nos rés	% Diff
3.048	0.05	0.08989	0.08989	0.07	0.0878	-2.32	0.02248	0.02409	7.16	0.0251	4.19
	0.10	0.07885	0.07890	0.06	0.0879	11.4	0.00934	0.01044	11.78	0.0113	8.23
	0.15	0.07046	0.07064	0.26	0.0881	24.71	0.00578	0.00659	14.01	0.00759	15.17
	0.20	0.06658	0.06679	0.32	0.0881	31.9	0.00442	0.00506	14.48	0.00624	23.32
6.096	0.05	0.15065	0.15046	0.13	0.1758	16.84	0.02725	0.02883	5.80	0.03048	5.72
	0.10	0.12464	0.12660	0.11	0.1758	38.86	0.01234	0.01345	9.00	0.01614	20.0
	0.15	0.11008	0.11047	0.35	0.1758	59.14	0.00801	0.00883	10.24	0.01223	38.50
	0.20	0.10264	0.10308	0.43	0.1758	70.55	0.00634	0.00699	10.25	0.0108	54.50
9.144	0.05	0.18442	0.18414	0.15	0.263	42.82	0.02889	0.03043	5.33	0.03104	2.00
	0.10	0.15442	0.15467	0.14	0.2627	80.34	0.01387	0.01497	7.93	0.0205	36.94
	0.15	0.13357	0.13416	0.44	0.263	96.03	0.00927	0.01011	9.06	0.0167	65.18
	0.20	0.12368	0.12432	0.52	0.263	111.55	0.00745	0.00811	8.86	0.0153	88.65
15.24	0.05	0.21337	0.21319	0.08	0.4291	101.27	0.02967	0.03118	5.09	0.03992	28.03
	0.10	0.18117	0.18612	0.25	0.426	128.8	0.1512	0.01620	7.14	0.0285	75.92
	0.15	0.15713	0.15807	0.60	0.425	168.86	0.1049	0.01133	8.01	0.02505	121.1
	0.20	0.14465	0.14566	0.70	0.424	191.08	0.00855	0.00923	7.95	0.02368	156.5

Le déplacement de la plaque diminue toujours avec l'augmentation du rapport h/L pour une valeur constante de H pour tout cas de chargement et conditions de frontière.

Le déplacement de la plaque est augmenté toujours quand H augmente pour une valeur constante du rapport h/L, pour tout cas de chargement et conditions de frontière. On peut aussi

citer que le déplacement pour une plaque simplement appuyée est grand par rapport à celui d'une plaque encastree.

L'effet de la deformation de cisaillement sur le déplacement est grand pour le cas de la charge concentree que pour le cas de la charge uniforme, et l'effet augmente avec augmentation de h/L pour n'importe quel type de conditions de frontiere. Ceci indique que l'effet de la deformation de cisaillement sur le déplacement de la plaque est toujours grand pour la plaque simplement appuyee que pour la plaque libre.

6.4 Effet de l'amélioration des sols sur la deflexion d'une plaque

L'etude experimentale a pour objectif principal de determiner le module de deformation (E) ainsi que le coefficient de Poisson (ν) par des essais triaxiaux de cisaillement. De plus l'evaluation des effets des ajouts minéraux tels que la chaux, la pouzzolane naturelle ainsi que leurs combinaisons sur ces valeurs a été examinee. Enfin, l'effet de l'amélioration des sols sur la deflexion d'une plaque est etudie et analyse.

6.4.1 Sols utilises

Le premier sol utilise (Fig. 6.16) dans cette etude a été obtenu à partir d'un site (projet de remblai), situe approximativement à 18 km au Nord-Est de la ville de Chlef. Le deuxieme sol (Fig. 6.17) a été obtenu à partir d'un site (projet de l'autoroute Est-Ouest) situe approximativement à 25 km à l'Est de la ville de Chlef .



Fig. 6.16- Sol fin gris.



Fig. 6.17- Sol fin rouge.

Ces deux sols ont été extraits à une profondeur d'environ 4 à 5 m. Après leur extraction, les sols ont été placés dans des sachets en plastique et transportés au laboratoire de la mécanique des sols de l'université Hassiba Ben Bouali de Chlef.

Les différentes caractéristiques physiques et mécaniques ainsi que leur classification suivant l'*USCS* (Unified Soil Classification System), ont été déterminées au niveau du laboratoire selon les normes américaines *ASTM*. Les propriétés géotechniques des deux sols sont rapportées dans le tableau 6.17.[33]

Tableau 6.17- Caractéristiques géotechniques des sols étudiés.

Caractéristiques	Sol fin 1	Sol fin 2
Couleur	gris	Rouge
Teneur en eau naturelle (%)	32.87	13.77
Densité spécifique	2.71	2.84
Éléments <80µm (%)	85	97.5
Limite de liquidité (%)	78.81	47.7
Limite de plasticité(%)	36.16	23.1
Indice de plasticité(%)	42.52	24.6
Classification USCS	CH	CL
Propriétés de compactage	Proctor standard	
ω_{opt}	28.3	15.3
Y_{max}	13.8	16.9

6.4.2 Détermination du module de déformation et du coefficient de poisson des sols améliorés

Des essais triaxiaux de cisaillement ont été effectués selon la norme américaine *ASTM D 2850* [33]. On distingue trois types d'essais suivant qu'il ya drainage ou non, consolidation ou non, à savoir : essai UU (Unconsolidated Undrained), essai CU+u (Consolidated Undrained avec mesure de la pression interstitielle) et essai CD (Consolidated Drained). Pour les sols argileux, le critère de rupture est choisi comme le maximum du déviateur des contraintes. Ce maximum de déviateur correspond donc à la notion de résistance au cisaillement.

Les quantités de matériaux nécessaires pour la confection des éprouvettes sont séchées, broyées et réduites à des moutures 0/2. Après cela des ajouts minéraux (chaux et/ou pouzzolane naturelle) sont additionnées en quantités bien calculées par poids sec du sol. Ces quantités sont ensuite malaxées avec des teneurs en eau optimales de façon à obtenir les densités requises (densité sèche maximale). Après malaxage et homogénéisation des matériaux, ils sont stockés dans des sachets hermétiques pour éviter d'éventuelles évaporations d'eau. Les échantillons ainsi préparés seront compactés statiquement dans un moule à la presse. Le diamètre intérieur du moule étant égal au diamètre de l'éprouvette.

Les éprouvettes sont ensuite montées entre disques pleins sans drain en papier filtre. Autrement dit, sont disposer autour de l'éprouvette, la membrane préalablement trempée pendant au moins une demi-journée et égouttée en utilisant un tendeur de membrane. Poser, après l'avoir mouillée, l'embase supérieure sur l'éprouvette et fixer la membrane autour de l'embase avec un bracelet élastique au minimum. Mettre en place l'enceinte cylindrique et vérifier d'une part le bon alignement de l'éprouvette, de l'embase supérieure et du piston et d'autre part le libre coulissement du piston. Remplir, sans remous, la cellule d'eau désaérée en laissant s'échapper l'air par le système de purge placé sur le couvercle.

L'essai consiste à cisailier toutes les éprouvettes à la même teneur en eau initiale (optimale), sans consolidation préalable avec différentes pressions de confinement (25kPa, 50 kPa) dans la cellule qui sont d'ailleurs données par des contrôleurs de pression/volume (Fig. 5.18).

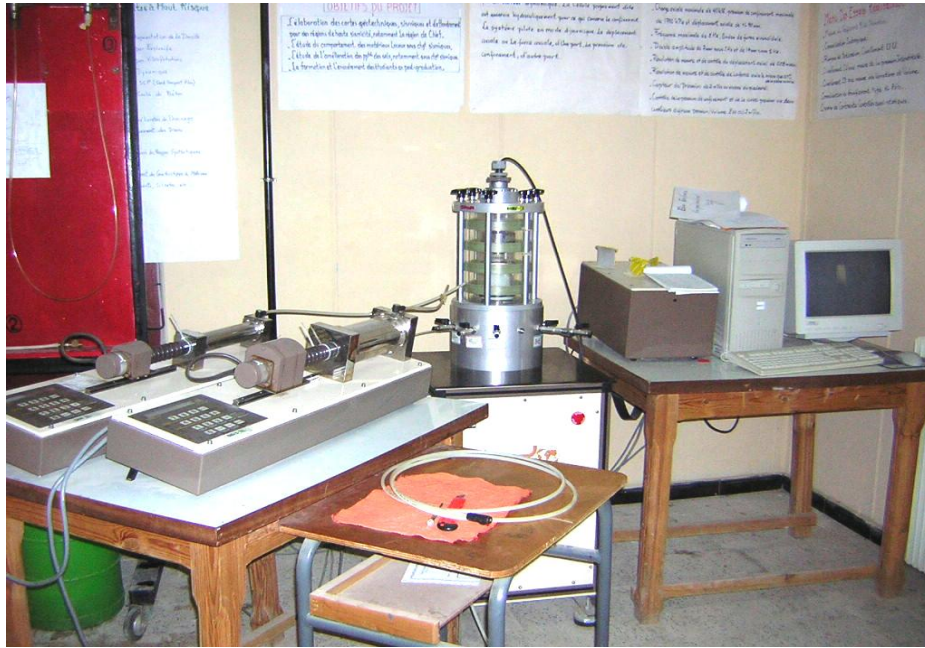


Fig. 6.18- Dispositif complet de triaxial.

La réalisation d'un essai non consolidé, non drainé, non saturé (UUU) comporte le cisaillement d'au moins deux éprouvettes provenant du même échantillon. Après le montage et l'application de la pression dans la cellule, les circuits de drainage étant toujours fermés, le cisaillement commence aussitôt avec une vitesse de déformation de 1mm/min. Toutes les éprouvettes sont cisailées à la même vitesse de déformation. La prise des mesures (force axiale, déplacement axial, pression de confinement...) est effectuée par le biais d'un dispositif digital (convertisseur de signaux, micro-ordinateur muni d'une carte IEEE d'acquisition de données). L'essai est arrêté lorsque la déformation désirée est atteinte. Si un pic du déviateur est observé, l'essai peut également être arrêté lorsque le pourcentage de la déformation dépasse de cinq points celui qui correspond à ce pic.

Après annulation de la force axiale et de la pression de confinement, la cellule est vidée, l'éprouvette est rapidement retirée des embases puis pesée. Ensuite on observe le mode de rupture (Fig. 6.19)



Fig. 6.19- Mode de rupture.

Le logiciel de pilotage de l'essai, installé sur l'ordinateur nous permet d'avoir pour chaque éprouvette la contrainte axiale totale, la contrainte radiale, le déviateur et la déformation axiale. On trace ensuite, pour l'ensemble des éprouvettes, les graphiques du déviateur en fonction de la déformation axiale.

Pour le calcul des tassements des sols et la distribution des contraintes dans la masse du sol, on doit connaître les valeurs du module d'élasticité et le coefficient de poisson du sol. Ces valeurs peuvent être déterminées à partir des essais triaxiaux (Fig. 6.20).

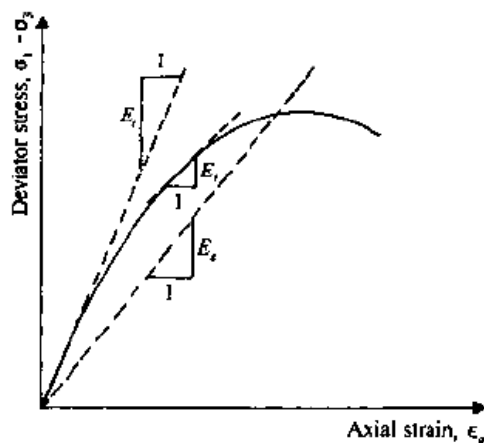


Fig. 6.20- Détermination du module de déformation [34].

Le coefficient de Poisson peut être calculé par la mesure de la déformation axiale (compression) et la déformation latérale durant l'essai triaxial.

Les éprouvettes étudiées sont confectionnées à partir de différentes formulations de combinaisons sol-ajouts minéraux et sont données dans le tableau 6.18.

Tableau 6.18- Formulation des éprouvettes étudiées.

Désignation	Sol (%)	Chaux (%)	Pouzzolane naturelle (%)
P0L0	100	0	0
P0L8	92	8	0
P20L0	80	0	20
P10L4	86	4	10
P10L8	82	8	10

Les résultats du module de Young et du coefficient de Poisson de ces combinaisons sont illustrés dans le tableau 6.19.

Tableau 6.19- Valeurs de **E** et **ν** pour différentes combinaisons des deux sols.

Désignation	Sol gris		Sol rouge	
	E (kN/m ²)	ν	E (kN/m ²)	ν
P0L0	1073	0.35	3421	0.30
P0L8	7097	0.30	18407	0.25
P20L0	2571	0.35	5735	0.30
P10L4	9073	0.30	13736	0.25
P10L8	8173	0.30	23547	0.25

6.4.3 Déflexion d'une plaque reposée sur un sol amélioré

Dans cette partie on va déterminer l'effet de l'amélioration des sols sur la déflexion d'une plaque rectangulaire libre.

Tableau 6.20- Déflexion de la plaque pour différentes combinaisons des sols.

Désignation	Déflexion w (cm)			
	Charge uniforme		Charge concentrée	
	Sol Gris	Sol Rouge	Sol Gris	Sol Rouge
P0L0	4.282	1.6425	0.9845	0.5718
P0L8	0.7851	0.3310	0.3830	0.2346
P20L0	1.8556	0.9759	0.6190	0.4309
P10L4	0.6111	0.4459	0.3349	0.2767
P10L8	0.6797	0.2578	0.3548	0.2045

Le tableau 6.20 montre la meilleure combinaison de sol par rapport aux sols naturel gris et rouge. Pour le sol gris la combinaison P10L4 est la plus satisfaisante, et pour le sol rouge la combinaison P10L8 (voir figures 6.21 et 6.22). Cela correspond à leur module de Young, la combinaison P10L4 est plus de 88 % et plus de 85 % pour la combinaison P10L8 par rapport au sol naturel gris et rouge respectivement.

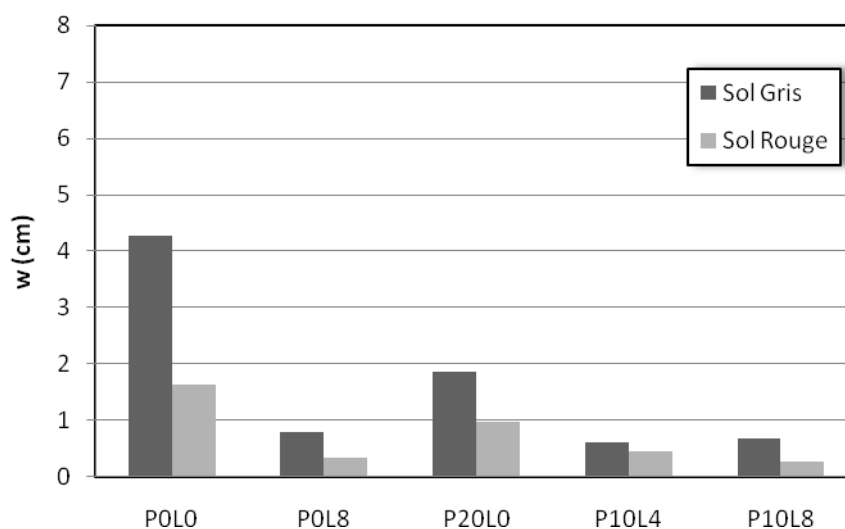


Fig. 6.21- Déflexion de plaque sous charge uniforme pour une profondeur de 3.048 m.

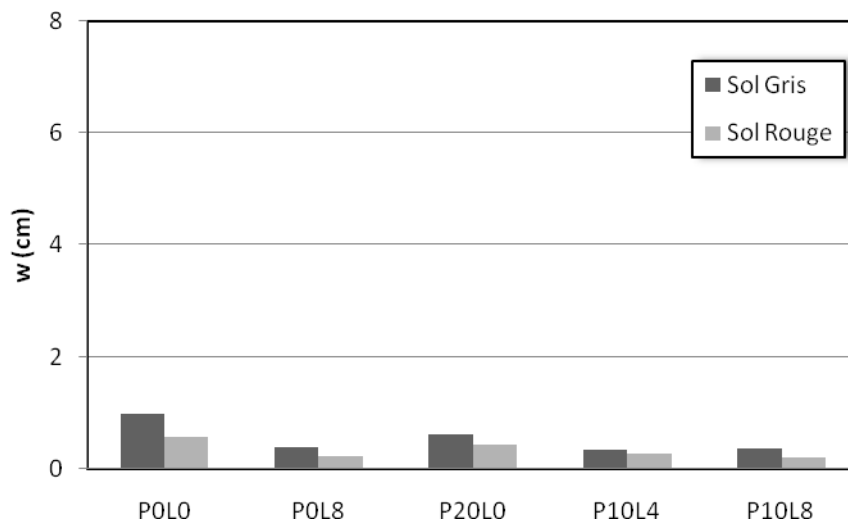


Fig. 6.22- Déflexion de plaque sous charge concentrée pour une profondeur de 3.048 m.

6.4.4 Effet de l'épaisseur de la couche améliorée sur la déflexion d'une plaque.

En pratique dans le chantier on ne peut pas renforcer le sol pour une grande épaisseur, serait économiquement, une mauvaise solution.

A ce stade, il faut renforcer la couche supérieure pour une épaisseur bien déterminée pour avoir une meilleure résistance.

Au début, et dans l'ordre pour estimer la précision du programme dans le cas de sol bicouche, un exemple est étudié par *L.Sadecka* [35]. Elle a étudié une plaque épaisse repose sur sol élastique (modèle de **Kolar-Nemec**) par la méthode des éléments finis/infinis (utiliser des éléments isoparamétrique).

Le sol de **Kolar-Nemec** a une généralisation directe de modèle de **Vlasov**. Le sol compose de plusieurs couches d'épaisseur variables et les contraintes cinématique pour chacune des couches sont semblables à ceux présentées par Vlasov.

L'exemple est une plaque carrée à une épaisseur de 0,26 m et longueur de 10 m repose sur un sol stratifié (bicouche), présenté dans la figure 6.23. La première couche à une épaisseur de 04 m et la deuxième de 06 m. Le module d'élasticité est 21000 MPa et 9,1 MPa, et le coefficient de Poisson sont 0,15 et 0,3 pour la plaque et le sol respectivement. La plaque support une charge uniforme de 0,01 MPa les résultats sont illustrés dans le tableau 6.21.

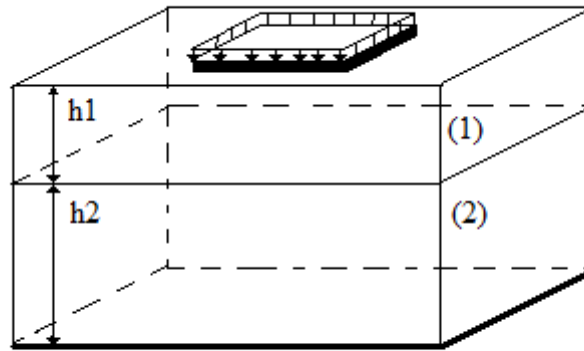


Figure 6.23 – Plaque épaisse sur une fondation bicouche.

Tableau 6.21- La déflexion maximum de plaque carrée sur sol stratifié.

Modèles	Demi-espace	Kolar-Nemec	L.Sadecka	Notre résultat
Déflexions $w \times 10^{-3}$ (m)	7.30	5.36	6.18	8.04

Le résultat du notre programme est plus proche à la solution du modèle **demi-espace** que le modèle de **Kolar-Nemec**, et ces la même remarque trouvé par *Sadecka*.

Et, après justification, dans notre étude on a choisit trois types d'épaisseur pour les améliorés 0.2, 0.4 et 0.8 m avec ces deux type de combinaison, respectivement, par rapport au 3 m (figure 6.24).

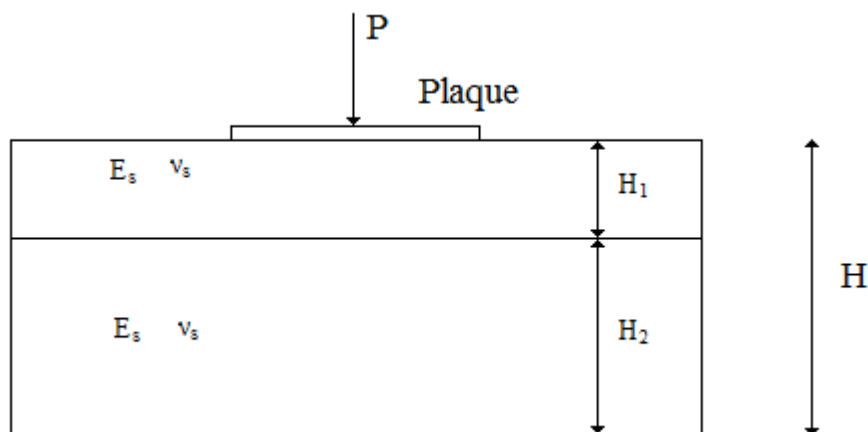


Fig. 6.24- Plaque reposant sur deux couches.

Les résultats sont illustrés dans le tableau 6.22 et tracés sur les figures 6.25 à 6.28.

Tableau 6.22- Effet de l'épaisseur de la couche améliorée sur la déflexion de la plaque.

H_1 (m)	Déflexion w (cm)			
	Sol gris		Sol rouge	
	Charge Uniforme	Charge Concentrée	Charge Uniforme	Charge Concentrée
0,0 m	4.227	0.979	1.620	0.569
0,2 m	4.053	0.953	1.544	0.554
0,4 m	3.870	0.930	1.464	0.537
0,8 m	3.471	0.871	1.295	0.502
3,0 m	0.602	0.333	0.254	0.204

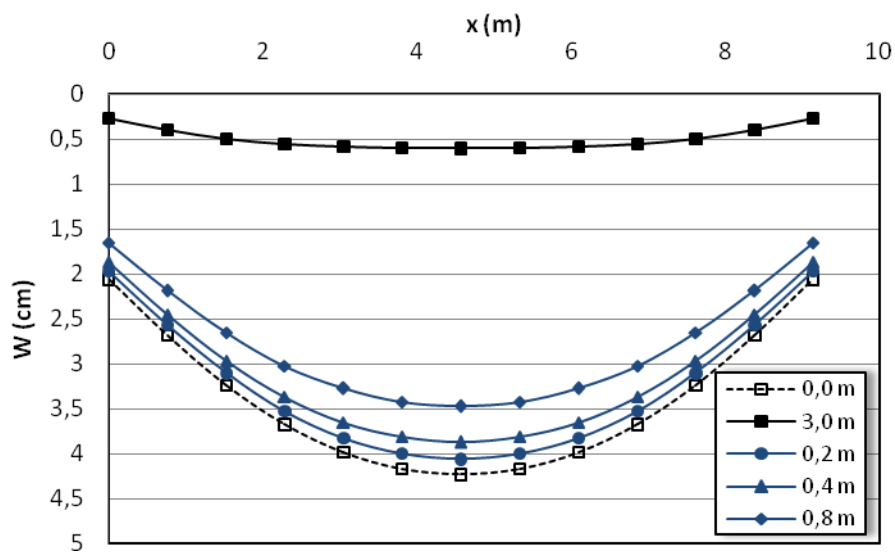


Fig. 6.25- Déflexion de la plaque pour différent profondeur de renforcement du sol gris sous charge uniforme.

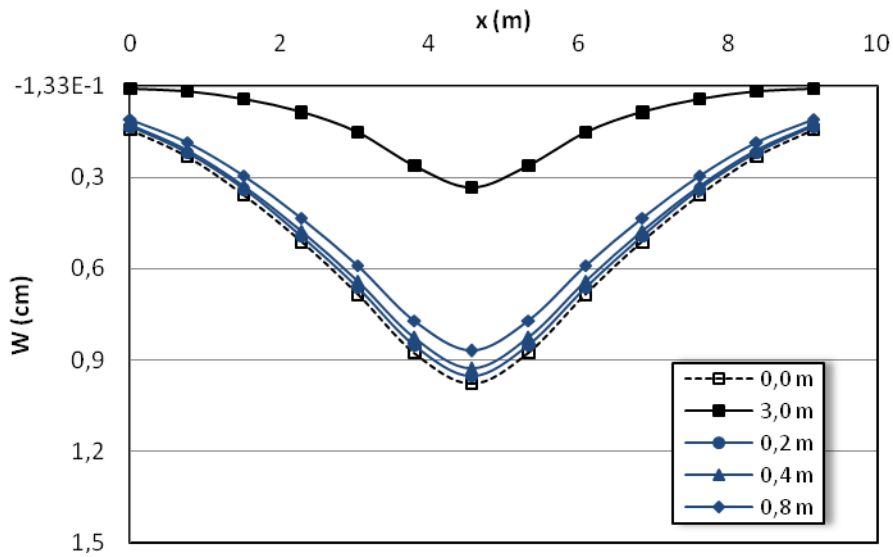


Fig. 6.26- Déflexion de la plaque pour différentes profondeurs de renforcement du sol gris sous charge concentrée.

La comparaison de la déflexion du sol naturel et du sol renforcé est très claire dans le tableau 6.14 et figures 6.10 et 6.11. L'amélioration du sol varie de 4.3% pour la première combinaison et augmente jusqu'à 21.8% pour la troisième combinaison pour la charge uniforme, tandis que pour la charge concentrée la grande amélioration est présentée par la troisième combinaison pour une valeur de 12%.

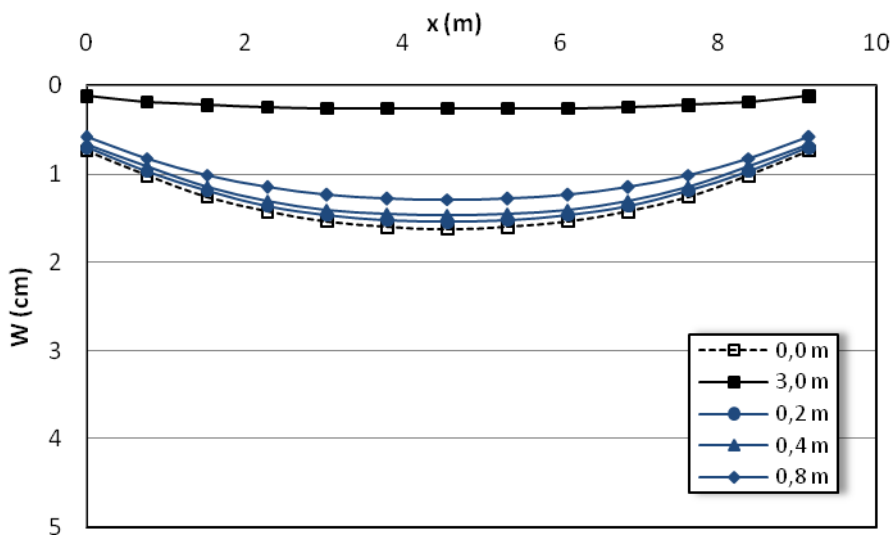


Fig. 6.27- Déflexion de la plaque pour différentes profondeurs de renforcement du sol rouge sous charge uniforme.

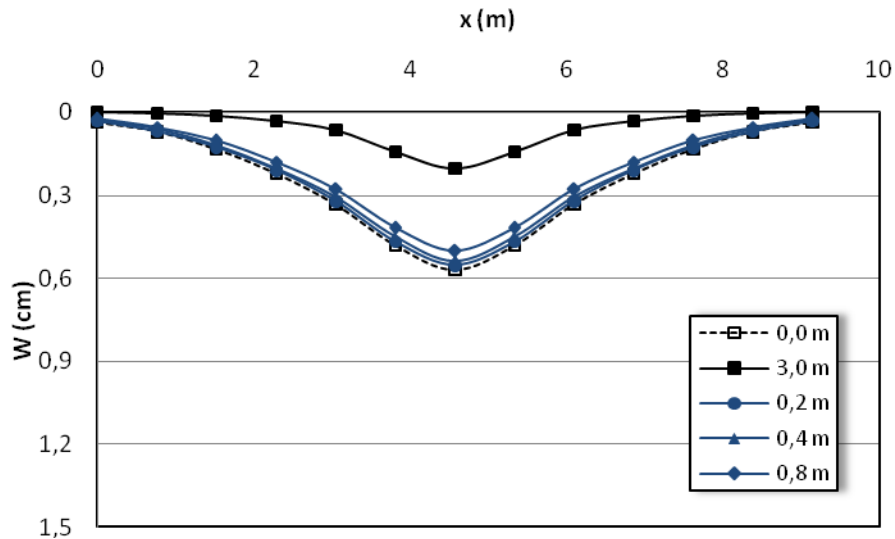


Fig. 6.28- Déflexion de la plaque pour différentes profondeurs de renforcement du sol rouge sous charge concentrée.

De la même manière, l'amélioration du sol naturel type rouge, pour la charge uniforme, est exprimée par la diminution de la déflexion de 4.7%, 10.6% et 25.58% par rapport à la profondeur (fig.6.12). Pour la charge concentrée, la même remarque est observée dans la figure 6.13, et l'amélioration augmente jusqu'à 13.54 % pour la dernière combinaison.

6-4 Conclusion

Nous avons élaboré un programme en élément finis pour étudier la déflexion des plaques. On a choisi un élément à 8 nœuds dans le but de faire de nombreux tests de validation en statique sur les plaques isotropes. Une analyse de ces tests permet de tirer un certain nombre de commentaires.

Tout d'abord, l'élément quadrilatéral à 8 nœuds est un bon élément de flexion, qui donne des résultats satisfaisants pour les plaques isotropes sans aucun blocage en cisaillement. Ceci est attribué plutôt à une faible capacité de cet élément pour les plaques très épaisses.

Puis, le premier modèle de fondation élastique de *Winkler* choisi donne des résultats satisfaisants comparés aux autres modèles. Dans la deuxième étude de l'analyse de la plaque sur fondation élastique, le modèle *Vlasov* utilise une plaque de *Mindli*. L'exactitude et l'efficacité d'élément sont examinées pour différentes conditions de frontière et cas de charges. Les

résultats obtenus montrent que l'élément à 8 nœuds peut être employé effectivement et facilement pour analyser les plaques sur fondations élastiques sous n'importe quel type de charge et de conditions de frontière.

L'effet de la contrainte de cisaillement sur le déplacement est plus grand pour une charge concentrée que pour le cas d'une charge distribuée, et ces augmentations sont à fur et à mesure que le rapport h/L augmente pour n'importe quel type de conditions de frontière. Les observations indiquent que l'effet de la contrainte de cisaillement sur le comportement de la plaque est toujours plus faible pour les plaques libres que pour celles appuyées.

Chapitre 7

Conclusions et Perspectives

Références

- [1]- E.Ventsel & T.Krawthammer.”*Thin Plates and Shells*”, Theory, Analysis and Applications. USA.2001.
- [2]. R.Szilard. Dr.Ing. P.E, “*Theories and Applications of Plates Analysis-Classical, Numerical and Engineering Methods*”. Hoboken, USA.2004.
- [3]. S.Timoshenko & S.Woinowsky-Kreiger.” *Theory of Plates and Shells*”. McGraw.Hill Classic Text Book Reissue Series , Second Edition. USA.1959.
- [4]. Tahar abbes ,”*Analyse Numérique par Méthode des Différence Finis* “ , I Universitaire 2007.
- [5]. K.Ozgan. A.T.Daloglu, “*Effet of transverseshear strains on plates resting on elastic foundation using modified Vlasov model*”, Thin Walled Structures, pp.1236-1250, 2008.
- [6]. K.Al-Hosani. S.Fadhil. A.El-Zafrany,” *Fundamental solution and boundary element analysis of thick plates on Winkler foundation*”, Computers & Structures, pp.325-336 , 1998.
- [7]- « *Lois de comportement et modélisation du sol* », Technique de l’ingénieur,C118, pp 01-23.
- [8]- C.D. Sekhar and R. Roy, “*A critical review on idealization and modeling for interaction among soil–foundation–structure system*”. Computers and Structures ,pp.1579-1594,2002 .
- [9]- P.Maunu. “*Design of wind turbine foundation slabs*”. University Lulea de technologie, These du Master. 2008.

- [10]- R.Bulut.,” *Finite element method analysis of slabs on elastic half space expansive soil foundation*”. Université Aand M Texas. Ph-D thesis, 2001.
- [11]- L. Delattre. « *Un siècle de méthode de calcul d'écran de soutènement 1- L'approche par le calcul les méthodes classique et la méthde au coefficient de réaction* ». LCPC . pp 35-55, 2001.
- [12]- F. Hartmann and C. Katz,” *Structural Analysis with Finite Elements*”. Springer Berlin Heidelberg New York, 2007.
- [13]- T.Y.Yang,” *A Finite Element Analysis of Plates on a two Parameter Foundation Model*”, Computers et Structures, pp. 593-614,1972.
- [14]. L.Jaouen. « *Vibrations de flexion des plaques* », Département de génie mécanique, Faculté des sciences appliquées, Université de Sherbrooke. 2002.
- [15]- A.T .Daloglu., G.C.V. Vallabhan,”*values of k for slab on Winkler foundation*”. Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering ,2000 .
- [16]- W.T.STRAUGHAN ,B.S, and MS, “ *Analysis of plate on elastic foundation*” , Ph-D, Universities de Technologies du Texas,1990.
- [17]- A.TURHAN,B.S.C and M.S.C.E, “*A Consistent Vlasov Model for Analysis of Plates on Elastic Foundation using the Finite Element Method*”. Ph-D, Universities de Technologies du Texas.1991.
- [18]- M. Mofid And M. Noroozi, “*A Plate on Winkler Foundation with Variable Coefficient*”. Sharif University of Technology, Tehran, Iran
- [19]- R.Z Moayed and M .Janbaz ,”*Foundation size effect on modulus of subgrade reaction in Clayey soil*”, EJG, , pp.01-08 ,2008.
- [20]- J.L.Baroz,G.Dhatt, « *Modélisation des structures par éléments finis* », poutre et plaques Version 2, Hermès, paris 1990.

- [21]- G.C.V. Vallabhan.,Fellow,ASCE and T. Daloglu,” *Consistent FEM Vlasov Model for Plates on Layered Soil*”, Journal of Structural, pp .108-113, 1999.
- [22]- K.Harichen, « *Investigation Numérique du Comportement des PlaqueS Reposant sur Sol Elastique par la MEF* », Thèse Magister UHBC , 1995.
- [23]- T.Taki,” *Plate : Plate Bending Analysis by Finite Element Method*”, Logiciel.
- [24]- Y.J.Liu and H.R.Riggs,” *Developement of the Min N Family of triangular anisoparametric Mindlin plate elements*”. University of HAWAII College of Engineering, 2002.
- [25]- E.Hinton and D.R.Owen, « *Finite Element Programming* ». Academic Press, New York. 1977.
- [26]- A.El- Zafrany, M.Debbih and SFadhil , “ *A Modified Kirchhoff Theory for Boundary Element Bending Analysis of Thin Plates* “, j .Solids Structures . Elsevier Sciences , pp.2885-2899,1994.w0077
- [27]- N. Eratil , and A.Y.Akoz.”*The mixede finite element formulation for the thick plates on elastic foundation* “ , Computer et Structure , pp.515-529,1997.
- [28]- J.A.Abdalla and A.M.Ibrahim ,”*Development of adiscrete Reissner –Mindlin element on Winkler foundation* “ , Finite Element in Analysis and Design , pp.740-748,2006.
- [29]- Q.H. Qin , H.Wang and V. Kompis ,” *MFS with RBF for thin plate Bending problems on Elastic Foundation* “ , Springer Science + Business Media B V ,pp.367-378,2009.
- [30]- M.Braja . Das, “ *Shear strength of soils*”. In: Advanced soil mechanics. Taylor & Francis Group, London, pp. 373-476,2008.
- [31]- ASTM D2850 ,” *Annual book of ASTM Standards*”, Volume 04.08. American Society for Testing and Materials, Philadelphia,2003.
- [32]- R.Jones et J. Xenophontos, “*The VLASOV Foundation Model. Int.J.Mechanic et Science*”, pp. 317-323, 1977.
- [33]- M.Celik and A. Saygub,”*A method for the analysis of plates on a two-parameter foundation*”, International Journal of Solids and Structures, pp. 2891-2915, 1999.

[34]- R. Buczkowski and W. Torbacki, " *Finite element modelling of thick plates on two-parameter elastic foundation* ", International Journal for Numerical and Analytical methods in Geomechanics, pp.1409-1427, 2001.

[35]- L. Sadecka, " *A finite/infinite element analysis of thick plate on a layered foundation* ", Computer and Structure, Elsevier. pp. 603-610, 2000.

CHAPITRE 7

Conclusions & Perspectives

Conclusions

Une approche numérique itérative suite la méthode d'élément fini, elle a été présentée pour l'analyse des plaques sur des fondations élastiques.

L'un des buts principaux de cette étude est de développer un modèle de sol tridimensionnel des deux paramètres par l'utilisation des principes d'énergie.

Les points suivants présentent un résumé des conclusions importantes tirées en raison de cette étude.

- Un modèle mathématique a été développé pour l'analyse des plaques appuyées par un milieu fini de sol. Le module de la réaction de sol, k , et du paramètre de cisaillement de sol, t , sont calculé itérativement dans le cadre du programme. On lui a montré qu'il n'y a aucune valeur unique de module de la réaction de sol, k . La valeur de k dépend de la rigidité de sol, la rigidité de la plaque, la profondeur de la couche de sol, la dimension de la plaque, et le type et la distribution du chargement.
- Le modèle et le programme sont capables d'analyser des plaques appuyées par une fondation élastique avec l'exactitude satisfaisante pour la conception pratique.
- Il est possible de résoudre ce problème par un modèle de Winkler si la valeur de k est prévue correctement.

- Le sol sous la plaque a souvent des couches avec des propriétés matérielles variables. Si on peut assumer que ces propriétés ont une variation linéaire, un tel dispositif peut être manipulé par cette méthode.

Perspectives de recherches

Les points suivants devraient être considérés comme plus loin pour augmenter l'application de cette méthode pour une plaque sur une fondation élastique.

- Dans cette recherche, une profondeur constante de la couche de sol est assumée. Le modèle peut être développé pour envisager de varier la profondeur de sol.
- Une modélisation viscoplastique du sol peut être introduite pour représenter les caractéristiques de la consolidation d'un type de sol « argile ».
- Les effets du chargement dynamique peuvent être considérés par l'introduction des forces d'inertie dans le sol et la plaque.
- Le programme développé dans cette étude peut être augmenté par l'ajout des éléments finis triangulaires pour résoudre n'importe quelle géométrie de la plaque.