



UNIVERSITE HASSIBA BENBOUALI CHLEF

**FACULTE DES SCIENCES & SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL**

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Génie Civil

Option: Structures et Géotechnique

Présenté par : M^{elle} AIT YAHIA Siham

Sujet de mémoire :

**Analyse de la stabilité et des vibrations libres
d'une plaque en matériau composite sur
fondations élastiques**

Soutenu le, 17 Mars 2011, devant le jury composé de :

BRANCI Taieb	MCA	Université de Chlef	Président
ADDA BEDIA El Abess	Pr	Université de sidi BelAbbès	Examineur
KASSOUL Amar	MCA	Université de Chlef	Examineur
MAKHELOUF Ali	MCA	Université de Chlef	Directeur de mémoire
AIT ATMANE Hassen.	MAA	Université de Chlef	Co-Directeur de mémoire

Remerciements

Ce travail a été réalisé à l'Université Hassiba Benbouali Chlef, sous la supervision d'Ali MAKHLOUF, maître de conférences à l'UHBC de Chlef et de Hassen AIT ATMANE, maître assistant à l'UHBC.

Je remercie profondément mes encadreurs qui ont été attentifs à l'évolution de mes recherches et ont apporté toute leur contribution pour mener à bien ce travail. Leurs qualités humaines et scientifiques, leurs conseils ainsi que leur enthousiasme m'ont été très bénéfiques durant ces années d'études.

J'exprime également ma gratitude à Monsieur Taieb BRANCI Maître de conférences classe A à l'université de Chlef, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance je voudrais vivement remercier Messieurs El Abbas ADDA BEDIA Professeur à l'université de Sidi Bel Abbès et Amar KASSOUL Maître de conférences classe A à l'université de Chlef qui ont accepté d'examiner mon travail.

Je voudrais aussi adresser mes remerciements à tous les membres du Laboratoire de matériaux et hydrologie (LMH) de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbès et aux enseignants du département des mathématiques de l'université de Chlef, doctorants, permanents ou stagiaires avec qui les échanges scientifiques, techniques ou amicaux ont été très formateurs pour ma vie professionnelle et ont fait de ces années une belle étape de ma vie.

À toute ma famille et à tous mes collègues des départements de Génie Civil et de mathématique de l'Université de Chlef, je dirai merci pour les encouragements et le soutien dont ils n'ont cessé de me donner.

Résumé

Ce travail consiste à une étude mathématique d'un problème complexe, de vibration et de stabilité des plaques composites, basé sur une approche monocouche équivalente où un champ de déplacement bien défini est imposé.

L'objectif est d'analyser la stabilité de ces plaques composites reposant sur une fondation élastique de type Winkler et Pasternak en utilisant la nouvelle théorie de cisaillement de déformation des plaques. Le modèle proposé est caractérisé par l'introduction d'une fonction de forme pour décrire le cisaillement transversal tout en respectant les conditions de nullité aux bords.

L'utilisation du principe des travaux virtuels nous a permis d'établir les conditions d'équilibre et les conditions aux limites. Les solutions sont obtenues, en utilisant la technique de Navier et ensuite les charges du flambement et les fréquences fondamentales sont trouvées, en résolvant un système d'équation de valeurs propres. Dans cette analyse, la fondation est modélisée comme un système de ressort à deux paramètres Winkler et Pasternak. Les résultats du présent modèle sont donnés et comparés avec d'autres approches disponibles dans la littérature.

Mots clés : Plaque composite, fondation élastique, stabilité, cisaillement, vibration libre.

Abstract

This work involves a mathematical study of a complex problem, vibration and stability of composite plates based on an approach or an equivalent monolayer field of well-defined movement was imposed.

The objective is to analyze the stability of these composite plates resting on an elastic foundation of Winkler and Pasternak type using the new theory of shear deformation of the plates. The new model is characterized by introducing a shape function to describe the transverse shear conditions while respecting the nullity of the edges.

Using the principle of virtual work has enabled us to establish the conditions of equilibrium and boundary conditions. The solutions are obtained using the technique of Navier and then buckling loads and fundamental frequencies are found by solving an equation system of eigenvalue. In this analysis, the foundation is modeled as a spring system with two parameters Winkler and Pasternak. The results of present model are given and compared with other available approaches in the literature.

Key words: Composite plate, elastic foundation, stability, shear, free vibration.

ملخص

هذا العمل يتضمن دراسة رياضية لمشكلة معقدة كالاhtزاز والاستقرار للوحات المركبة استنادا على نهج أحادي الطبقة بحيث حقل الحركة المفروض واضح المعالم . الهدف هو تحليل الاستقرار لهذه اللوحات المركبة التي تستند على أسس مرنة من نوع وينكلر وباسترنالك باستخدام نظرية جديدة من التشوه القصي للوحات. ويتميز هذا الطراز الجديد بتقديم شكل المعادلة لوصف ظروف القص العرضي مع احترام الشروط الحدية. استخدام مبدأ الأعمال الخيالية مكننا بتطبيق شروط التوازن وشروط الحدود ويتم الحصول على الحلول باستخدام تقنية نافيي. التواء الأحمال والترددات الأساسية وجدت عن طريق حل نظام المعادلة من القيم النقية. في هذا التحليل تم تمثيل الأساس كنظام نابض ذو معلمين وينكلر و باسترنالك و نتائج النموذج الحاضر تم تقديمها ومقارنتها مع نظريات موجودة في بحوث أخرى.

كلمات البحث: لوحة مركبة، أساس مرن، الاستقرار، القص، اهتزازات حرة.

Sommaire

	Liste des figures	viii
	Liste des tableaux	x
	Introduction.....	1
<i>Chapitre I : Propriétés des matériaux composites</i>		
I-1	Introduction.....	3
I-2	Définition.....	3
I-3	Les composants élémentaires des matériaux composites.....	4
	I-3-1 Matrice.....	4
	1-3-1-1 Les matrices organiques.....	4
	1-3-1-2 Les matrices métalliques.....	10
	1-3-2 Les Fibres.....	10
	I-3-2-1 Les fibres de verre.....	11
	I-3-2-2 Les fibres de carbone.....	13
	I-3-2-3 Les fibres de Kevlar.....	14
1-4	Architecture des renforts.....	14
1-5	Autres Fibres.....	16
I-6	Avantages et inconvénients des matériaux composites.....	17
I-7	Les matériaux composites structuraux.....	17
	I-7-1 Monocouches.....	17
	I-7-2 Stratifiés.....	18
	I-7-3 Sandwichs.....	18
I-8	Loi de mélange.....	19
I-9	Loi de comportement.....	21
	I-9-1 Matériau anisotrope.....	22
	I-9-2 Matériau monoclinique.....	22
	I-9-3 Matériau orthotropique.....	22
	I-9-4 Matériau transversalement isotrope.....	23
	I-9-5 Matériau isotrope.....	23
I-10	Conclusion.....	24

Chapitre II : Les différentes approches d'analyse des plaques

II- 1	Introduction.....	25
II- 2	Modèle monocouche équivalente.....	26
II-2-1	Modèle classique Love-Kirchhoff.....	26
II-2-2	Modèle Reissner-Mindlin.....	27
II-2-3	Synthèse bibliographique sur les théories d'ordre supérieur.....	28
II-2-4	Proposition d'une fonction de cisaillement.....	31
II- 3	Approche par couche.....	33
II- 4	Approche développement asymptotique.....	36
II-5	Modèle éléments finis de structure multicouche.....	37
II-6	Conclusion.....	41

Chapitre III : Etude analytique des vibrations libres des plaques

III-1	Théories et hypothèses.....	42
III-2	Equations constitutives.....	43
III-3	Équations gouvernantes de la vibration libre.....	45
III-4	Solution de NAVIER et valeur propre pour le problème d'une plaque simplement appuyée.....	49
III-5	Conclusion.....	51

Chapitre IV : Etude analytique de la stabilité des plaques

IV-1	Objectif	52
IV-2	Equations constitutives et la fonction de cisaillement transversal.....	52
IV-3	Équations gouvernantes du flambement.....	54
IV-4	Solution de NAVIER pour une plaque rectangulaire simplement appuyée.....	56
IV-5	Conclusion.....	58

Chapitre V : Validation des résultats et étude paramétrique

V-1	Introduction.....	59
V-2	Validation des résultats de la stabilité et la vibration libre d'une plaque simplement appuyée	59
V-3	Etude comparatif de la stabilité des plaques stratifiées	60
V-4	Solution pour les plaques isotrope	62
V-5	Etude paramétrique de la stabilité des plaques stratifiées.....	66
V-6	Etude comparatif de la vibration libre des plaques stratifiées.....	69
V-7	Vibration libre des plaques isotrope.....	71
V-8	Etude paramétrique de la vibration libre des plaques stratifiées.....	73
V-9	Conclusions	74

Conclusion générale	76
Références bibliographiques	78

Liste des Figures

Figure I-1	Matériau composite en général.....	4
Figure I-2	Les différentes familles de matrice.....	5
Figure I-3	Classification des fibres.....	11
Figure I-4	Architecture des fibres.....	16
Figure I-5	Matériau composite monocouche.....	17
Figure I-6	Matériau composite stratifié.....	18
Figure I-7	Matériau composite sandwich.....	19
Figure I-8	Profil S_{13}, S_{11} pour une poutre sandwich.....	19
Figure II-1	Cinématique de Love-Kirchhoff.....	26
Figure II-2	Cinématique de Reissner-Mindlin.....	27
Figure II-3	Variation de la fonction de gauchissement $f(z)=z$ et $f'(z)$ en fonction de l'épaisseur.....	28
Figure II-4	Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.....	29
Figure II-5	Variation de la fonction de gauchissement $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.....	32
Figure II-6	Variation de la fonction de gauchissement $f'(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.....	32
Figure II-7	Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique.....	33
Figure II-8	Champ de déplacement des modèles zig-zag, approche cinématique.....	34
Figure II-9	Champ de déplacement des modèles zig-zag du premier ordre.....	34
Figure II-10	Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur.....	35
Figure II-11	Élément « sinus » triangulaire 6 nœuds.....	38
Figure II-12	Élément quadrilatère de type Lagrange à 9 nœuds.....	38
Figure II-13	Élément quadrilatère de type Lagrange à 16 nœuds.....	39
Figure II-14	Éléments finis 3D à 20 nœuds pour déterminer les contraintes inter laminaires.....	39
Figure III-1	Modélisation d'une plaque sous fondation.....	43
Figure III-2	Élément d'un stratifié.....	43
Figure V-1 a	L'effet de a/h sur le flambement biaxial $1 = \bar{N}_x \frac{a^2}{E_2 h^3}$ critique sans dimension d'une plaque carrée symétrique ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$).....	67

Figure V-1 b	<i>L'effet de a/h sur le flambement biaxial $1 = \bar{N}_x \frac{a^2}{E_2 h^3}$ critique sans dimension d'une plaque carrée antisymétrique ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$).....</i>	67
Figure V-2	<i>L'effet de E_1/E_2 sur le flambement uniaxial $1 = \bar{N}_x \frac{a^2}{E_2 h^3}$ critique sans dimension d'une plaque carrée antisymétrique ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$) et $a/h=5$.....</i>	68
Figure V-3	<i>L'effet de E_1/E_2 sur le flambement biaxial $1 = \bar{N}_x \frac{a^2}{E_2 h^3}$ critique sans dimension d'une plaque carrée composite symétrique ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) sans appuis élastiques ($K_0 = K_1 = 0$).</i>	68
Figure V-5	<i>L'effet de E_1/E_2 sur les fréquences fondamentales sans dimension d'une plaque stratifiée sur appuis élastique (a) ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) et (b) ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$).....</i>	73
Figure V-6	<i>L'effet de E_1/E_2 sur les fréquences fondamentales sans dimension d'une plaque stratifiée ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$) sur appuis élastique (a) $k_1 = 10$ et (b) $k_0 = 100$.....</i>	74

Liste des tableaux

Tableau I-1	Propriétés physiques et mécaniques de plusieurs types de résines thermoplastiques	6
Tableau I-2	Propriétés des Résines thermodurcissables.....	6
Tableau I-3	Caractéristiques des deux types de résines les plus utilisées.....	7
Tableau I-4	Avantages et inconvénients des polyesters insaturés.....	8
Tableau I-5	Principales propriétés des matrices thermodurcissables (TD) et thermoplastiques (TP)	9
Tableau I-6	Propriétés physiques et mécaniques de plusieurs types de résines thermodurcissables...	9
Tableau I-7	Caractéristiques et applications de divers types de fibres de verre pour matériaux composites.....	12
Tableau I-8	Avantages et inconvénients des fibres de verre.....	12
Tableau I-9	Propriétés des fibres de carbone.....	13
Tableau I-10	Propriétés des fibres de Kevlar.....	14
Tableau I-11	Principales caractéristiques des fibres.....	16
Tableau V-1	Les facteurs des charges du flambement uniaxial $I = \bar{N}_x \frac{a^2}{E_2 h^3}$ sans dimension d'une plaque stratifiées symétrique (0°/90°/90°/0°) avec (a/h =10).....	60
Tableau V-2	Les facteurs des charges du flambement biaxial $I = \bar{N}_x \frac{a^2}{E_2 h^3}$ sans dimension d'une plaque carrée symétrique (0°/90°/0°) avec (b/h =10).....	61
Tableau V-3	Les facteurs des charges de flambage uniaxial $I = \bar{N}_x \frac{a^2}{E_2 h^3}$ sans dimension de deux plaques antisymétrique carrés.....	61
Tableau V-4	Comparaison du paramètre critique des charges de flambement uniaxial $I = \bar{N}_x \frac{b^2}{p^2 D}$ d'une plaque carrée isotrope ($\eta =1$; $\nu =0.3$).....	62
Tableau V-5	Comparaison du paramètre critique des charges de flambement uniaxial $I = \bar{N}_x \frac{b^2}{1.D}$ d'une plaque carrée isotrope ($\eta =1$; $\nu =0.3$ $K0= k1 =0$).....	63
Tableaux V-6	Comparaison du paramètre critique sans dimension des charges de flambement $I = \bar{N}_x \frac{b^2}{1.D}$ uniaxial d'une plaque isotrope ($\nu =0.3$; $h/a=0.001$).....	63
Tableaux V-7	Comparaison du paramètre critique sans dimension des charges de flambement $I = \bar{N}_x \frac{b^2}{1.D}$ uniaxial d'une plaque isotrope ($\nu =0.3$; $h/a=0.01$).....	64
Tableaux V-8	Comparaison du paramètre critique sans dimension des charges de flambement $I = \bar{N}_x \frac{b^2}{1.D}$ uniaxial d'une plaque isotrope ($\nu =0.3$; $h/a=0.1$).....	65
Tableaux V-9	Comparaison du paramètre critique sans dimension des charges de flambement $I = \bar{N}_x \frac{b^2}{1.D}$ uniaxial d'une plaque isotrope ($\nu =0.3$; $h/a=0.2$).....	66
Tableau V-10	Les fréquences fondamentales $v = w \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{r}{E_2}}$ sans dimension d'une plaque carrée antisymétrique avec variables rapports d'orthotropes.....	69
Tableau V-11	Les fréquences fondamentales $v = w \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{r}{E_2}}$ sans dimension d'une plaque carrée	

	<i>symétrique (0°/90°/90°/0°) pour différentes valeurs de a / h.....</i>	70
Tableau V-12	<i>Les fréquences fondamentales $\nu = \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{r}{E_2}}$ sans dimension d'une plaque carrée</i>	
	<i>symétrique avec pour différentes valeurs de a / h.....</i>	70
Tableau V-13	<i>Comparaison des fréquences fondamentales $\mathbf{V} = \mathbf{W} \cdot a^2 \cdot \sqrt{\frac{r \cdot h}{D}}$ sans dimension d'une plaque carrée isotope ($\eta = 1, \nu = 0.3$).....</i>	71
Tableau V-14	<i>Comparaison des fréquences fondamentales $\mathbf{V} = \mathbf{W} \cdot a^2 \cdot \sqrt{\frac{r \cdot h}{D}}$ sans dimension d'une plaque carrée isotope ($\eta = 1, \delta = 0.001, \nu = 0.3$).....</i>	71
Tableau V-15	<i>Comparaison des fréquences fondamentales $\mathbf{V} = \mathbf{W} \cdot a^2 \cdot \sqrt{\frac{r \cdot h}{D}}$ sans dimension d'une plaque carrée isotope ($\eta = 1, \delta = 0.12, \nu = 0.3$)</i>	72
Tableau V-16	<i>Comparaison des fréquences fondamentales $\mathbf{V} = \mathbf{W} \cdot a^2 \cdot \sqrt{\frac{r \cdot h}{D}}$ sans dimension d'une plaque rectangulaire isotope ($\nu = 0.3$).....</i>	73

Introduction

Introduction

Les matériaux composites avancés tels que ; les plaques stratifiées et les coques ont été utilisées dans différentes applications d'ingénierie ces dernières années.

L'utilisation des matières composites a augmenté considérablement pendant les deux dernières décennies, en particulier dans la construction aérospatiale, structures des véhicules et en génie civil (ponts en composites).

Les chercheurs essaient de concevoir des matériaux composites stratifiés sûrs et plus économiques.

Ce matériau est une combinaison de deux matériaux distincts que l'on appelle généralement la matrice et le renfort. Les propriétés physiques d'un matériau composite sont complètement différentes de celles de leurs composantes. La matrice a généralement pour rôle mécanique de fournir une certaine cohésion entre les différents éléments de renfort ; elle joue le rôle de « liant » en assurant un minimum d'homogénéité à l'ensemble.

La vibration et la stabilité des structures isotropes posées sur fondations élastiques ont été largement adoptées par plusieurs recherches pour modéliser divers problèmes constructifs pendant les décennies passées.

La théorie du premier ordre d'Euler-Bernoulli ne prend pas en compte des déformations de cisaillement transverse. Cette théorie est acceptable pour les poutres longues et plaques minces ou matériaux isotropes mais rendue inadmissible pour les poutres courtes et plaques épaisses ou les poutres stratifiées de plusieurs couches car les efforts de cisaillement interlaminaires causent le décollement et par conséquent rendent leurs déterminations obligatoires.

Timoshenko a prolongé la théorie d'Euler- Bernoulli en incorporant l'effet de cisaillement transverse. Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes dans chaque couche et discontinues entre les couches. Cette mauvaise description oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte les effets de cisaillement transverse dans l'écriture de l'énergie. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des structures complexes des coefficients correcteurs et l'étude du composite épais reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

Les théories d'ordre supérieur proposent un gauchissement de la section par l'introduction d'une forme cubique du déplacement. Elles sont plus réalistes puisqu'elles vérifient la nullité des contraintes de cisaillement sur les limites supérieures et inférieures de la structure contrairement à celles du premier ordre dans les poutres de Timoshenko et de Mindlin-Reissner dans les plaques. Elles donnent donc lieu à des déformations et des contraintes de cisaillement non homogènes dans l'épaisseur. Plus récemment, Touratier [Touratier 1991] a montré que cette forme cubique du déplacement pouvait être généralisée par un « sinus ».

Le but de ce travail est d'analyser la stabilité et la vibration libre des plaques composites se reposant sur une fondation de type Winkler-Pasternak en utilisant une nouvelle théorie de cisaillement de déformable des plaques ; est pour cela nous avons suivi le plan de mémoire suivant :

Le chapitre I est une définition sur les matériaux composites, leurs compositions matérielles et les propriétés mécaniques ainsi les différentes lois élastiques qui régissent ce matériau avec présentation de différentes hypothèses.

Le chapitre II est consacré à l'étude des différentes théories applicables aux plaques composites, avec les modèles bidimensionnels qui ont été développés pour la modélisation des structures multicouches en tenant compte du cisaillement transverse.

Par la suite, nous présentons dans les chapitres III et IV une analyse du flambement et des vibrations libres des plaques composites simplement appuyées se reposant sur une base élastique de type Winkler-Pasternak, avec une nouvelle fonction de forme. Cette fonction remplit exactement des conditions de frontière d'effort sur les deux facettes supérieure et inférieure de la plaque.

Le chapitre V est une application numérique et une étude comparative des résultats pour la vibration libre et le flambement des plaques stratifiées par une nouvelle théorie de déformation de cisaillement.

Le présent travail se termine par une conclusion générale où on souligne l'efficacité de la fonction utilisée dans les calculs des matériaux composites et des perspectives envisagées à l'avenir.

Chapitre I

Propriétés des matériaux composites

Propriétés des matériaux composites

I-1 Introduction

Depuis quelques décennies, le développement des matériaux composites dans nombreuses applications industrielles, telles que l'aérospatial, l'aéronautique et l'électronique, a été très rapide. La résistance des matériaux composites à la corrosion et aux attaques chimiques, leur contrainte spécifique élevée et leurs faibles propriétés électromagnétiques ont ouvert autres voies aux composites, depuis près d'un quart de siècle, dans les domaines des transports aériens et terrestres ainsi que les industries de récréation (sport, divertissement,...) et d'électronique. Des produits destinés au génie civil et plus particulièrement ceux destinés aux structures, n'ont cependant pas connu le même développement au cours de la période correspondante et leur croissance dans ce secteur est très récente.

I-2 Définition

Un matériau composite est défini d'une manière générale comme étant l'assemblage de deux ou plusieurs composants, qui se complètent et qui ont des caractéristiques différentes. Ce qui nous donne un matériau hétérogène et anisotrope. Le composé final aura des propriétés supérieures à celles de chacun des composés constitutifs. On appelle de façon courante matériaux composites ; des arrangements de fibres noyées dans une matrice, dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible ; que celle des renforts. Les matériaux composites structuraux sont principalement constitués de deux phases :

– Le renfort : son rôle est d'assurer la fonction mécanique. Il se présente généralement sous la forme de fibres dont l'orientation au sein du composite dépend de la sollicitation mécanique qu'elle-doit supporter.

– La matrice : son but est de réaliser la liaison entre les renforts, leurs protections vis-à-vis des agents agressifs et la prévention contre une rupture catastrophique.

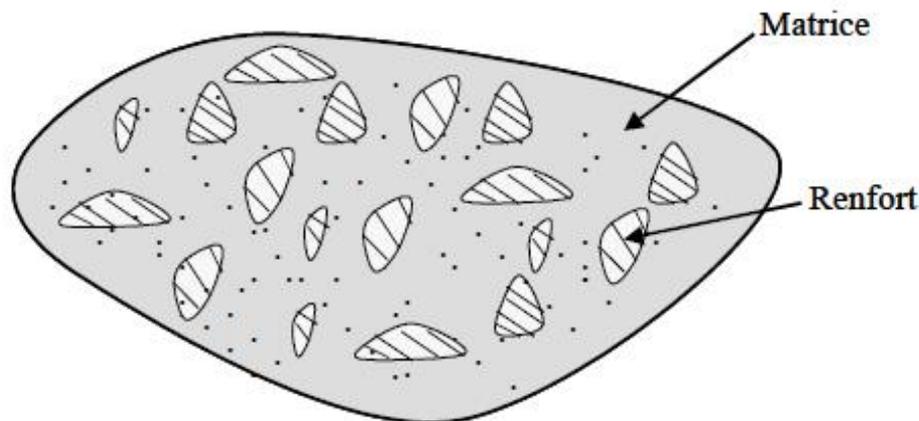


Figure I-1: Matériau composite [Mechab 2009]

I-3 Les composants élémentaires des matériaux composites

I-3-1 Matrices

La matrice a pour rôle de lier les fibres renforts, transmettre aux renforts les efforts extérieurs et de les répartir, apporter la tenue chimique de la structure et donner la forme désirée au produit. La matrice peut être de nature métallique, céramique ou polymère (Figure I-1). Les matrices les plus utilisées pour la fabrication des matériaux composites sont en matériaux résineux constitués de polymères, modifiés par différents adjuvants et additifs. Ces polymères ont habituellement de faibles propriétés mécaniques et leur comportement dépend de la durée, du taux, des cycles d'application de la charge ainsi que de la température.

I-3-1-1 Les matrices organiques

La matrice organique a pour rôle de lier les fibres renforts, d'assurer le transfert de charge entre elles, de les protéger des chocs, des frottements et de l'environnement extérieur. En outre, elle présente l'avantage d'être chimiquement réactive, ce qui permet l'établissement de liaisons fortes avec le renfort. Elle apporte aussi la tenue chimique de la structure et assure la forme de la structure. Cependant, la matrice ne doit pas être trop rigide pour ne pas contrarier le travail des fibres, ce qui fait de sa ductilité un paramètre important.

La satisfaction simultanée de tous ces critères étant difficiles. Car les matrices sont choisies selon le domaine d'utilisation du matériau composite. Cela a donné différentes matrices utilisées selon la fonction pour laquelle le composite est destiné. Ce qui a donné naissance à un matériau nouveau, modulable et adaptable aux caractéristiques mécaniques exigées. Elle est à base de polymères.

On distingue deux grandes familles de résines polymères :

- Les résines thermodurcissables (polyester, époxy, vinylite,...) ;
- Les résines thermoplastiques (polychlorure de vinyle, polyamide, polyéthylène,...).

Il y a aussi les élastomères, qui sont utilisés dans l'industrie automobile. Il est important de bien situer les différences fondamentales de ces deux types de matrices (Figure I-2).

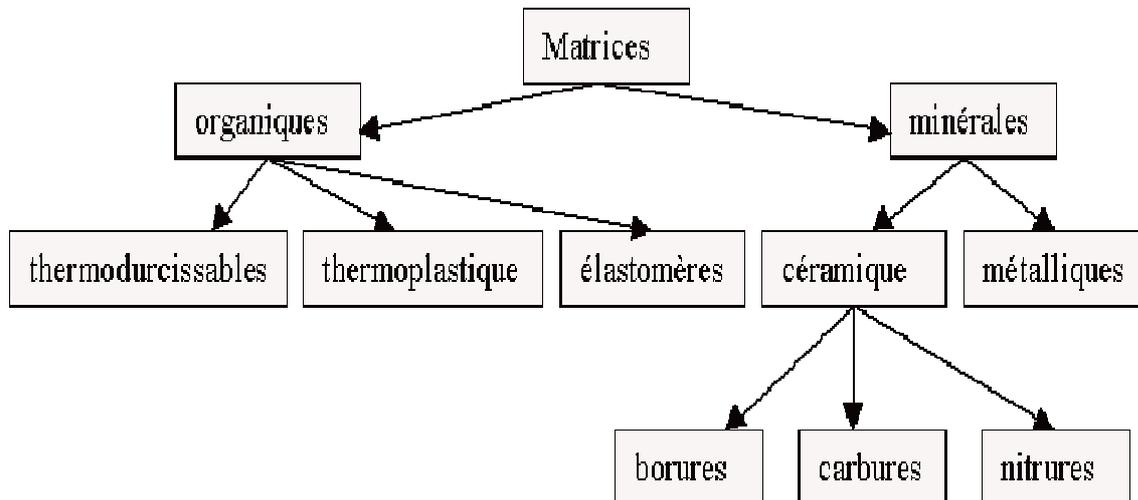


Figure I-2 : Les différentes familles de matrice

On utilise actuellement surtout des résines thermodurcissables (TD) que l'on associe à des fibres longues, mais l'emploi de polymères thermoplastiques (TP) renforcés de fibres courtes se développe fortement.

▼ Les polymères thermoplastiques (TP)

Ils se présentent sous forme de chaînes linéaires, il faut les chauffer pour les mettre en forme (les chaînes se plient alors) et les refroidir pour les fixer (les chaînes se bloquent).

Cette opération est réversible et ces polymères sont recyclés par simple chauffage. Ils sont de loin les plus employés du fait de leur faible coût et de leur facilité d'utilisation.

Le changement d'état solide/liquide ou pâteux peut se faire plusieurs fois avec une perte de caractéristiques à chaque cycle.

Les principales résines thermoplastiques utilisées dans les composites sont :

- le polypropylène (PP);
- les polyamides (PA) 6, 6-6, 12 ;
- le polyéther-éther-cétone (PEEK) ;
- Polyéther-imide (PEI) ;
- Polysulfure de phénylène (PPS) ; Polyéther-sulfone (PES).

Tableau I-1 : Propriétés physiques et mécaniques de plusieurs types de résines thermoplastiques [Gay 1997]

Matrice TP	Masse volumique (kg.m-3)	Module d'élasticité longitudinal (Mpa)	Coefficient de Poisson	Contrainte de rupture (traction) MPa	Allongement à rupture %	Coefficient de dilatation thermique °C-1
PP	900	1200	0.4	30	20 à 40	9×10^{-5}
PPS	1300	4000	/	65	100	5×10^{-5}
PA	1100	2000	0.35	70	200	8×10^{-5}
PES	1350	3000	/	85	60	6×10^{-5}
PEI	1150	3300	/	105	60	6×10^{-5}
PEEK	1300	4000	/	90	50	5×10^{-5}

▼ Résines thermodurcissables (TD)

- Les résines thermodurcissables sont employées comme matrice des matériaux composites structuraux. Comme leurs noms le laissent indiquer, ces produits durcissent après un cycle de chauffage appelé « cycle de polymérisation ». A l'issue de celui-ci, le matériau est un solide relativement rigide, qui ne fond pas et ne se ramollit pas en température.
- De ce fait, les résines thermodurcissables ne peuvent être mis en forme qu'une seule fois et ceci avant qu'ils ne durcissent, donc avant l'accomplissement du cycle de polymérisation.
- Les résines thermodurcissables les plus répandues sont les polyesters, les époxydes, les polyamides et les phénoliques. Les composites à matrice thermodurcissables représentent 70% des composites utilisés en Europe.

Le tableau I-2 présente les propriétés physiques et mécaniques de ces résines après polymérisation.

Tableau I-2: Propriétés des Résines thermodurcissables.

Propriétés en traction	Polyester	Epoxyde	Polyamide	Phénolique	Silicone
E_{oT} (MPa)	30 à 90	30 à 100	Environ 90	20 à 60	20 à 60
A_R (%)	2000 à 3000	2500 à 4000	Environ 3000	1000 à 5000	Environ 3000
Densité (g / cm ³)	1.1 à 1.3	1.1 à 1.3	Environ 1.3	1.2 à 1.4	1 à 1.1

Où :

E_{oT} : Module de Young ;

A_R : l'allongement à la rupture.

1- Avantages

- une bonne résistance aux agents chimiques,
- une mise en forme facile,
- une densité faible.

2- Inconvénients

- des propriétés mécaniques faibles, sauf pour les composites à matrice organique,
- une limitation de l'utilisation à une température réduite (100 à 200°C).

Les caractéristiques des polymères se dégradent quand la température s'élève. Il existe une ou des températures de transition de phase qui correspondent à des changements d'arrangement moléculaire et les caractéristiques sont alors sensiblement modifiées (tableau I-3 et tableau I-5).

Tableau I-3 : Caractéristiques des deux types de résines les plus utilisées

Matrices TD	Masse volumique (kg.m-3)	Module d'élasticité longitudinal (MPa)	Module de Cisaillement (MPa)	Coefficient de Poisson	Contrainte de rupture (traction)MPa	Allongement à rupture %
Epoxyde	1 200	4 500	1 600	0.4	130	2
Polyester	1 200	4 000	1 400	0.4	80	2.5

- Les polyesters insaturés

C'est la résine la plus utilisée dans l'application composite de grande distribution. Une résine de polyester insaturé contenant un monomère (généralement le styrène) est réticulée à température ambiante par addition d'un catalyseur, de type peroxyde organique et d'un accélérateur. Elle passe successivement de l'état liquide visqueux initial à l'état de gel, puis à l'état de solide infusible.

La réaction est exothermique et la température de la résine augmente progressivement depuis le gel jusqu'à un maximum pour redescendre ensuite lentement à la température ambiante. Le durcissement sera d'autant plus rapide ou, si l'on préfère, le temps nécessaire dans le moule sera d'autant plus court que la courbe de température en fonction du temps se rapprochera davantage de la verticale.

On résume dans le tableau suivant les avantages et les inconvénients essentiels des polyesters insaturés (tableau 1-4).

Tableau I-4 : Avantages et inconvénients des polyesters insaturés

Avantages	Inconvénients
Bonne accroche sur fibres de verre ; Translucidité ; Bonne résistance chimique ; Mise en œuvre facile ; Tenue en température (> 150 °C) ; Prix réduit.	Inflammabilité (sauf résines chlorées) ; Tenue vapeur et eau bouillante ; Retrait important (6 à 15 %) ; Durée de conservation en pot limitée ; Emission de styrène.

-Les résines époxydes

Les résines époxydes sont des résines thermodurcissables qui réticulent de façon irréversible. Elles polymérisent à l'aide d'un durcisseur et d'un accélérateur. La polymérisation a lieu à une température ambiante également.

La faible absorption d'eau et l'absence de post-retrait assurent au polymère une bonne résistance aux divers agents chimiques. Ces deux propriétés permettent d'obtenir une protection importante contre la corrosion chimique.

Les principales caractéristiques des époxydes sont :

- une adhérence remarquable sur tous les types de support,
- une bonne résistance à la chaleur,
- une relative neutralité vis-à-vis de l'organisme,
- une bonne propriété en traction, en flexion, en compression,
- une excellente résistance chimique aux huiles, aux hydrocarbures, à l'eau.

De plus, les polymères époxy montrent une mauvaise résistance chimique à l'acide nitrique et à l'acide sulfurique, aux cétones et une faible reprise d'humidité mais une excellente tenue à la fatigue. Pour cela, les époxydes constituent un type des composites à hautes performances. Seule la résistance aux chocs est un point faible.

-Les phénoliques

Elles sont issues de la polycondensation du phénol et du formol et se caractérisent par une bonne tenue au feu, sans fumée. Les phénoliques restent fragiles, sensibles à l'humidité et difficiles à colorer ou à mettre en œuvre.

Tableau I-5 : Principales propriétés des matrices thermodurcissables (TD) et thermoplastiques (TP)

[Rey1995]

Matrices	Thermodurcissables TD	Thermoplastiques TP
Etat de base	Liquide visqueux à polymériser	Solide prêt à l'emploi
Stockage	Réduit	Illimité
Mouillabilité des renforts	Aisée	Difficile
Moulage	Chauffage continu	Chauffage + refroidissement
Cycle (polymérisation)	Long	Court
Tenue au choc	Limitée	Assez bonne
Tenue thermique	Meilleure	Réduite (sauf nouveau TP)
Chutes et déchets	Perdus ou utilisés en charges	Recyclables
Conditions de travail	Emanations de solvants	Propreté

Le tableau I-6 regroupe les caractéristiques physiques et mécaniques de différents types de résines thermodurcissables :

Tableau I-6 : Propriétés physiques et mécaniques de plusieurs types de résines thermodurcissables

[Berthelot 2005]

Matrice TD	Masse volumique (kg.m ⁻³)	Module d'élasticité longitudinal (MPa)	Module de cisaillement (MPa)	Coefficient de Poisson	Contrainte de rupture (traction) MPa	Allongement à rupture %	Coefficient de dilatation thermique °C ⁻¹
Epoxyde	1200	4500	1600	0.4	130	2	10 x 10 ⁻⁵
Phénolique	1300	3000	1100	0.4	70	2.5	1 x 10 ⁻⁵
Polyester	1200	4000	1400	0.4	80	2.5	8 x 10 ⁻⁵
Polycarbonate	1200	2400	/	0.35	60	/	6 x 10 ⁻⁵
Vinylester	1150	3300	/	/	75	4	5 x 10 ⁻⁵
silicone	1100	2200	/	0.5	35	/	/
Uréthane	1100	700à 7000	/	/	30	100	/
Polyimide	1400	4000à19000	1100	0.35	70	/	8 x 10 ⁻⁵

1-3-1-2 Les matrices métalliques

L'utilisation de matériaux composites à des températures supérieures à 3000°C interdit pratiquement l'usage des matrices organiques et suppose donc que l'élément de renforcement soit noyé au sein d'une matrice métallique. Les plus employées sont les métaux légers et leurs alliages en particulier l'aluminium, le titane et le nickel.

1-3-2 Les Fibres

Les renforts, de part leur nature chimique et leur géométrie, confèrent aux composites de meilleures caractéristiques mécaniques. Ils contribuent à la rigidité de ces matériaux et se présentent sous forme filamentaire, allant de la particule de forme allongée à la fibre continue, qui donne au matériau un effet de résistance orientée. Ces renforts permettent d'améliorer en même temps certaines propriétés physiques: comportement thermique, tenue au feu et en température, résistance à l'abrasion, propriétés électriques, etc.

En fonction de leur utilisation, les renforts peuvent être d'origines et de formes diverses. Toutefois, les renforts les plus utilisés se présentent sous forme de fibres ou formes dérivées et constituent une fraction volumique du matériau composite généralement comprise entre 30% et 70%.

Les renforts filamenteux classiques ont deux origines:

- ◆ Organique : Fibres d'aramide.
- ◆ Minérale : Fibre de carbone,

Fibre de verre.

Le rôle principal des fibres est d'assurer la résistance du matériau composite ;

Elles ont une gamme de propriétés mécaniques incluant des résistances en traction de 700 à 4200 MPa et des modules d'élasticité de 50 GPa à 400 GPa.

Les renforts sont caractérisés par :

- la nature de la fibre, minérale ou organique (Figure I-3),
- l'architecture du renfort.

Les principaux type de renfort se distinguent par leur géométrie (particules, billes, fibres courtes, fibres longues), leur disposition, notamment pour 3D, feutres, nappe de mat 2D, nappes unidirectionnelles, tissages 2D, tissage 3D) ou par leur nature.

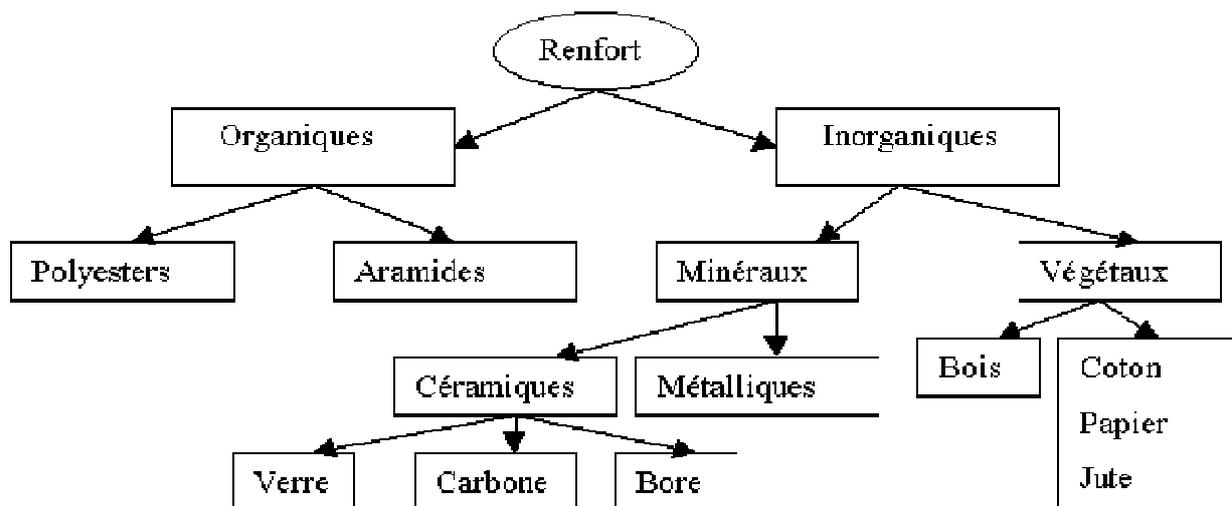


Figure I-3 : Classification des fibres

I-3-2-1 Les fibres de verre

Les fibres de verre sont obtenues à partir de silice (SiO_2) et d'additifs. Le verre est coulé jusqu'à la fusion à 1250°C à travers une filière en platine-rhodium ; après refroidissement, les filaments sont étirés pour obtenir des fibres continues.

Actuellement, trois types de fibres de verre sont commercialisés sous forme de files. (Tableau I-7)

- fibres E pour les composites grande diffusion (GD) ;
- fibres D pour les applications dans la construction électrique (circuits imprimés) ;
- fibres R et S pour les composites haute performance (HP).

Les fibres de verre constituent le principal renfort, utilisé dans plus de 95% des matériaux composites et plus particulièrement pour les produits de grande diffusion (GD). Elles offrent:

- une bonne adhérence entre fibres et résines (matrices) ;
- de bonnes propriétés mécaniques, mais inférieures à celles de la fibre de carbone ;
- des propriétés d'isolation électrique acceptables pour la plupart des applications.

L'utilisation des fibres de verre dans les composites est principalement limitée par :

- une rigidité insuffisante pour certaines applications comme les pièces de structure primaire en aéronautique;
- un vieillissement accéléré au contact prolongé de l'eau, des rayonnements UV ou de températures élevées.

Les fibres de verre utilisées dans les composites ont un diamètre de l'ordre de 10 micromètres, nettement supérieur au diamètre critique (de l'ordre de 3 micromètres) pour que la fibre ne présente pas de risque respiratoire et ne puisse engendrer des maladies telles que les cancers.

Tableau I-7 : Caractéristiques et applications de divers types de fibres de verre pour matériaux composites [Menail 2009].

Fibres	Verre E	Verre R et S	Verre D
Caractéristiques principales	Qualité courante	Hautes performances mécaniques et thermiques	Rigidité diélectrique
Masse volumiques (Kg/m³)	2,6	2,53	2,14
Résistance à la traction	2400	3600	2800
Module de Young	73	86	55
Allongement à la rupture (%)	4,5	5,2	4,8
Température maximale d'utilisation	500	650	450
Coefficient de dilatation thermique	5	4	3,5
Application	Composites à grande diffusion	Armement aéronautique, spatial	Radomes, capot perméables aux ondes électromagnétiques

Les avantages et les inconvénients essentiels des fibres de verre sont donnés dans le tableau I-8

Tableau I-8 : Avantages et inconvénients des fibres de verre [Berthelot 2005].

Avantages	Inconvénients
Excellente adhérence Bon rapport de performances mécanique/prix Bonne propriété diélectrique Tenue en température élevée Incombustibilité Dilatation thermique faible	Faible module Vieillessement au contact de l'eau

I-3-2-2 Les fibres de carbone

- Suivant les conditions de fabrication, il existe toute une variété de fibres de carbone. Mais, actuellement trois sortes sont commercialisées :
- Les fibres à haute résistance classique (HR) (types : As4, As6, T300 et X635).pour une température de combustion de 1000 à 1500 °C ;
 - Les fibres à haute résistance module intermédiaire (types : IM6, X636).
 - Les fibres à haut module (HM) : (types : M40 et HM5).pour une température de combustion de 1800 à 2000 °C.

Les propriétés mécaniques varient suivant les propriétés physiques et mécaniques. Elles sont données dans le tableau ci - dessous:

Tableau I-9 : Propriétés des fibres de carbone [Berthelot 2005].

Propriétés en traction	HR		IM	HM	
	R_t (MPa)	3000 à 5000	4000 à 4500	47000 à 52000	2000 à 2500
E_{oT} (MPa)	220000 à 240000	235000 à 250000	275000 à 300000	350000 à 400000	450000 à 500000
A_R (%)	1.2 à 1.5	1.6 à 1.8	1.4 à 1.6	0.5 à 0.7	0.3 à 0.5
Masse volumique (g / cm ³)	1.75 à 1.8	1.75 à 1.8	1.7 à 1.8	1.8 à 1.85	1.9 à 1.95

Où :

R_T : Résistance à la rupture ;

E_{oT} : Module de Young ;

A_R : l'allongement à la rupture.

Une particularité importante de ces fibres est leurs coefficients de dilatation thermique négatif ou quasi nul dans le sens de la fibre, c'est-à-dire que les fibres se raccourcissent quand on les chauffe et s'allongent quand on les refroidit.

I-3-2-3 Les fibres de Kevlar

Les fibres de Kevlar sont des fibres synthétiques à base de polyamide aromatique (les aramides). L'élaboration des fibres est effectuée par synthèse à basse température (-10°C), puis par filage en solution. Les fibres sont ensuite étirées et traitées thermiquement pour augmenter leur module d'élasticité.

Le module d'Young de ces fibres est égal ou supérieur à celui du verre [Berthelot 1999].

Actuellement, il existe deux types de produits :

Les fibres de Kevlar 49.

Les fibres de Kevlar 29.

Les premiers sont principalement utilisées pour la confection des composites, alors que les secondes entrent essentiellement dans la constitution des cordes, des cordages et des câbles.

Les propriétés physiques et mécaniques de ces deux types de fibres sont représentées dans le tableau I-10.

Tableau I-10 : Propriétés des fibres de Kevlar [Menail 2009].

Propriétés en traction	Kevlar 49	Kevlar 29
R _t (MPa)	3000	2700
E _{σT} (MPa)	120000 à 130000	60000
A _R (%)	2.1	4
Masse volumique (g / cm ³)	1.45	1.44

Concernant la dilatation, le Kevlar présente la même particularité dans le sens des fibres que celle du carbone.

I-4 Architecture des renforts

Les structures composites sont anisotropes. La plupart des renforts travaillent bien en traction, mais offrent de moins bonnes performances en compression et cisaillement. Il est donc impératif de jouer sur la texture et la géométrie des renforts pour créer une architecture adaptée. Les tissus se composent de fils de chaîne et de trame perpendiculaires entre eux. Le mode d'entrecroisement ou armure les caractérise. Il existe différentes géométries et textures de renforts. (Figure I-4)

▼ Architectures textiles

Il existe différentes technologies permettant de produire des architectures textiles, dont les propriétés dépendent essentiellement de l'orientation des fils ou des fibres de constitution. On parle de surfaces textiles ou d'étoffes lorsque les fils constitutifs sont disposés dans un

plan ou de textiles 3D (volumiques) lorsque les fils sont disposés dans les trois directions de l'espace. Dans chacune de ces catégories (surfaces textiles et textiles 3D), la direction des fils dans un plan peut être axiale, biaxiale ou multiaxiale.

-Unidirectionnels (UD)

Dans une nappe UD, les fibres sont assemblées parallèlement les unes par rapport aux autres à l'aide d'une trame très légère. Le taux de déséquilibre est très grand.

-Toile ou taffetas

Chaque fil de chaîne passe au-dessus puis en dessous de chaque fil de trame et réciproquement. Bien que le tissu présente une bonne planéité et une relative rigidité, sa mise en œuvre reste délicate à cause de sa déformabilité, qui n'est pas commode.

Les nombreux entrecroisements successifs génèrent un embuvage important et réduisent les propriétés mécaniques.

-Sergé

Chaque fil de chaîne passe au-dessus de plusieurs (n) fils de trame et chaque fil de trame passe au-dessus de (m) fils de chaîne. Son armure a une plus grande souplesse que celle du taffetas. Il a une bonne densité de fils.

-Satin

Chaque fil de chaîne passe au-dessus de plusieurs (n-1) fils de trame et réciproquement (Figure I-4). Ces tissus ont des aspects différents de chaque côté. Ces tissus sont assez souples et adaptés à la mise en forme de pièces à surfaces complexes. Ce type de tissus présente une forte masse spécifique. Comme un tissu est difficilement déformable sur une surface gauche, on réalise des armures bi ou tridimensionnelles.

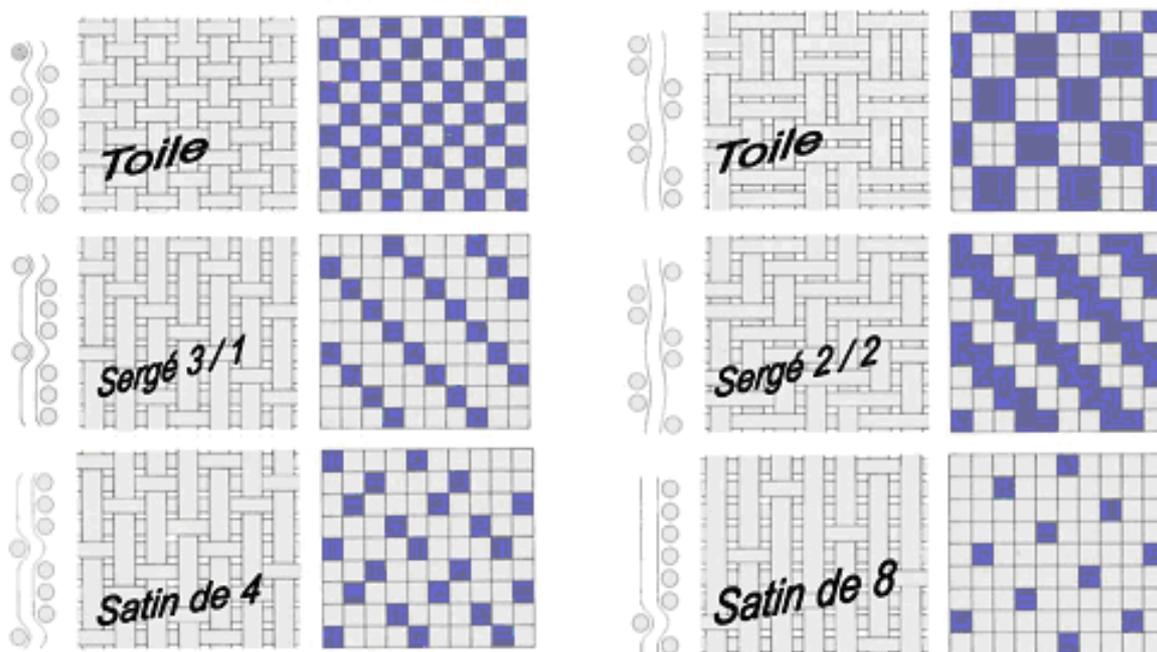


Figure I-4 : Architecture des fibres

1-5 Autres Fibres

D'autres fibres peuvent être utilisées pour applications spécifiques comme :

- Les fibres minérales (silice) ;
- Les fibres végétales (sisal, jute, lin) ;
- Les fibres synthétiques (polyester, polyéthylène, polypropylène) ;
- Les fibres métalliques (acier, aluminium, cuivre).

Les principales caractéristiques de ces fibres sont données dans le tableau I-11 :

Tableau I-11 : Principales caractéristiques des fibres [Menail 2009].

Fibre	Diamètre mono-filament (micron)	Masse spécifique (Kg/dm ³)	Résistance traction (MPa)	Résistance compression (MPa)	Résistance flexion (MPa)	Module flexion (GPa)	Choc Charpy (J/cm ³)	Elongation (%)
Verre E	4-13	2.54-2.55	3200-3500	900	1100	73-74	9.8	3-4.8
Verre R	9-10	2.48	3700-4500	1100	1300	86-87	10.6	5.4
Carbone HR	7-8	1.75-1.78	2700-3500	900-1100	1200	230-250	2.2	1.5-1.8
Carbone HM	5-7	1.81-1.96	2700-3500	1300	/	370-430	/	0.5-0.6
Aramide	12-19	1.45	2700-2900	190-280	600	130-135	9.1	2.1-2.5
Silice	2.2	/	3200-3900	/	/	62-72	/	5.1-5.4
Polyester	12	1.38	800-1200	/	/	13.4	/	14-16

I-6 Avantages et inconvénients des matériaux composites

a) Avantages

- Gain de masse ;
- Mise en forme de pièces complexes (principe du moulage) et réduction du nombre d'interface (boulonnage, rivetage et soudure sur structures métalliques) ;
- Grande résistance à la fatigue ;
- Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf en cas de contact entre l'aluminium et des fibres de carbone) ;
- Insensibles aux produits chimiques « mécaniques » comme la graisse, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole, etc.

b) Inconvénients

- Vieillissement sous l'action de l'eau et de la température,
- Attention aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes,
- Tenue à l'impact moyen par rapport aux matrices métalliques,
- Coût parfois prohibitifs (temps, coût, étude et mise en œuvre),
- Grande concentration de contraintes dans les composites stratifiés et les sandwichs.

I-7 Les matériaux composites structuraux

I-7-1 Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes (Figure I-5).

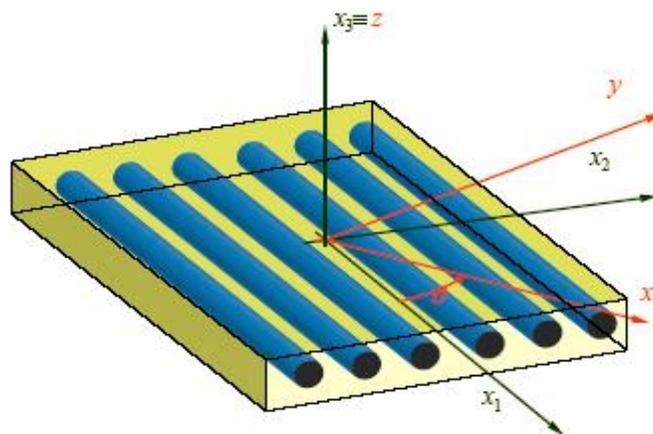


Figure I-5: Matériau composite monocouche.

I-7-2 Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié (Figure I-6).

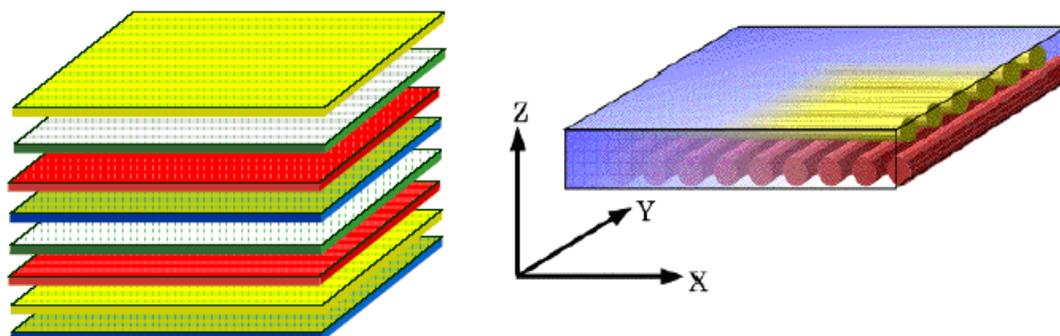


Figure I-6: Matériau composite stratifié [Mechab 2009].

Le choix de l'empilement est plus particulièrement, des orientations permettront d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques. Notation " composite ". Un stratifié possédant l'empilement $(0, +45, +90, -45)$ 2s est un stratifié avec 4 couches dans les directions 0° , $+45^\circ$, 90° et -45° . L'orientation 0° coïncide avec la direction 1 du repère principal du composite. Ces plans seront répartis symétriquement par rapport au plan moyen du stratifié. On pourra avoir des stratifiés de type :

-Équilibré : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ que de couches orientées suivant la direction $-\theta$.

-Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.

-Orthogonal : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90° .

I-7-3 Sandwichs

Matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grandes rigidités et de faibles épaisseurs enveloppant une âme (ou cœur) de forte épaisseur et faible résistance (Figure I-7). L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion, c'est un excellent isolant thermique. La figure I-8 montre la variation des contraintes.

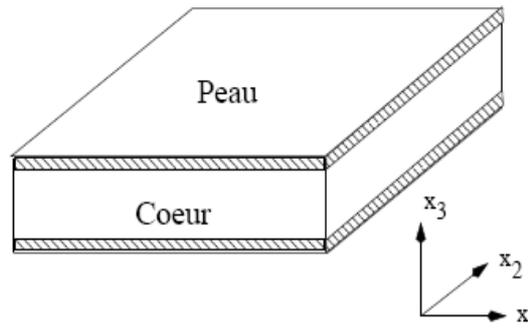


Figure I-7: Matériau composite sandwich [Gay 1997].

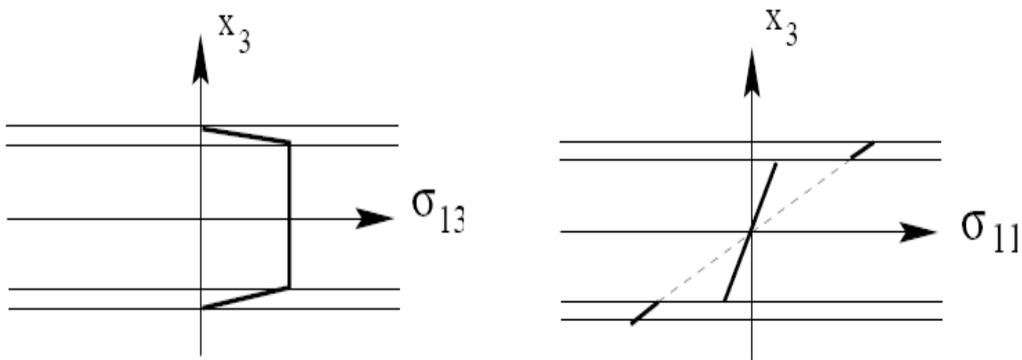


Figure I-8: Profil S_{13}, S_{11} pour une poutre sandwich.

I-8 Loi de mélange

Dans le cas d'un matériau où les fibres sont continues (enroulements, plaques) [Berthelot 2005], il est raisonnable d'imaginer que l'approximation "en parallèle" dans laquelle les déformations sont uniformes d'une phase à l'autre est bien respectée. Si les effets latéraux sont négligés, on peut évaluer le module de Young équivalent dans la direction des fibres par une approximation de déformation uniforme. Si au contraire la sollicitation s'applique en sens transversal, les phases seront "en série", dans une configuration bien adaptée pour appliquer l'approximation de contrainte uniforme [Decolon 2000]. En désignant par des indices m et f la matrice et la fibre, il vient alors:

$$E_L : \text{en sens longitudinal} \quad E_L = V_m E_m + V_f E_f \quad (\text{I-1})$$

$$E_T : \text{en sens transversal} \quad \frac{1}{E_T} = \frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f} \quad (\text{I-2})$$

V_m : Fraction volumique de matrice

V_f : Fraction volumique de fibre

$$V = V_m + V_f = 1 \quad (\text{I-3})$$

A l'échelle locale, les hypothèses sont les suivantes :

Fibres: comportement élastique linéaire fragile isotrope de coefficients E_f et ν_f .

Matrice: comportement élastique non-linéaire, isotrope de coefficients E_m et ν_m .

Lors d'une traction en sens longitudinal, les déformations latérales de chaque phase se combinent :

$$\varepsilon_T = V_m \varepsilon_{Tm} + V_f \varepsilon_{Tf} \quad (\text{I-4})$$

Chacune des déformations latérales ε_{Tm} et ε_{Tf} s'expriment en fonction de la déformation longitudinale ε_L , qui est supposée être la même pour les deux phases, $\varepsilon_{Tm} = \nu_{LTm} \varepsilon_L$ et $\varepsilon_{Tf} = \nu_{LTf} \varepsilon_L$. Le coefficient de Poisson équivalent est donc obtenu par une moyenne directe.

$$n_{LT} = V_m n_m + V_f n_f \quad (\text{I-5})$$

Pour le terme de cisaillement transverse, l'hypothèse simple la plus réaliste consiste à considérer que la contrainte de cisaillement sera conservée. La moyenne s'applique donc sur les inverses des modules :

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{V_m}{G_m} + \frac{V_f}{G_f} \quad (\text{I-6})$$

On suppose que les dilatations longitudinales des fibres et de la matrice sont identiques, c'est-à-dire que l'on a :

$$e_1 = e_1^f = e_1^m \quad (\text{I-7})$$

La différence des contraintes longitudinales thermiques [Decolon 2000], pour le coefficient de dilatation des fibres a_f et de la matrice a_m ne sont pas nulles.

Les contraintes longitudinales dans les fibres et dans la matrice sont :

$$s_1^f = E_f (e_1 - a_f \Delta T) \quad (\text{I-8})$$

$$s_1^m = E_m (e_1 - a_m \Delta T) \quad (\text{I-9})$$

La résultante des efforts de traction, étant nulle, on a la relation :

$$V_f \sigma_1^f + V_m \sigma_1^m = 0 \quad (\text{I-10})$$

En reportant dans cette relation les valeurs des contraintes σ_1^f et σ_1^m on obtient :

$$(V_f E_f + V_m E_m) \epsilon_1 = (V_f a_f E_f + V_m a_m E_m) \Delta T \quad (\text{I-11})$$

Le coefficient de dilatation longitudinale a_1 est :

$$a_1 = \frac{\epsilon_1}{\Delta T} \quad (\text{I-12})$$

On obtient la relation suivante :

$$a_1 = \frac{V_f a_f E_f + (1 - V_f) a_m E_m}{V_f E_f + (1 - V_f) E_m} \quad (\text{I-13})$$

Le coefficient de dilatation thermique transverse a_2 est :

$$a_2 = V_f a_f + V_m a_m + \frac{n_m E_f - n_f E_m}{\frac{V_f E_f}{1 - V_f} + \frac{E_m}{V_f}} (a_m - a_f) \quad (\text{I-14})$$

I-9 Loi de comportement

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées lois de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés. La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme condensée [Decolon 2000].

$$\sigma = C \epsilon \quad (\text{I-15})$$

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \quad (\text{I-16})$$

Cette loi, généralement appelée loi de HOOKE généralisée, introduit la matrice de rigidité C , symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général à l'aide de 21 coefficients indépendants, ici les 21 constantes de rigidité C_{ij} .

I-9-1 Matériau anisotrope

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau qui ne possède aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique.

I-9-2 Matériau monoclinique

Ce matériau possède un plan de symétrie. L'expression de la matrice de passage ne change pas pour tout changement de repère symétrique par rapport à ce plan. Supposons le plan (e1, e2) plan de symétrie du matériau. La loi de Hooke se résume comme suit :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{I-17})$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 13.

I-9-3 Matériau orthotropique

Le matériau orthotrope est un matériau à 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère. La même démarche que précédemment conduite aux expressions dans un repère défini par les axes d'orthotropes.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{I-18})$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 9.

I-9-4 Matériau transversalement isotrope

Le matériau unidirectionnel est un matériau qui possède un axe de symétrie ; par exemple l'axe e1. C'est le cas pour un ensemble de fibres unidirectionnelles dans un substrat. Par géométrie le matériau unidirectionnel est orthotrope, Il est souvent appelé orthotrope de révolution. Dans le repère d'orthotropie, la matrice s'écrit :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{I-19})$$

La matrice de rigidité d'un matériau transversalement isotrope à 5 constantes d'ingénieur.

I-9-5 Matériau isotrope

Si le matériau possède un nombre infini de plan de symétrie, on dit qu'il est isotrope. Dans ce cas le nombre de constantes indépendantes vaut seulement deux (02) :

$$C_{11} = C_{22}, C_{12} = C_{23}, C_{66} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2} = \frac{C_{11} - C_{22}}{2} \quad (\text{I-20})$$

La matrice de rigidité d'un tel matériau est donnée par :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{I-21})$$

I-10 Conclusion

Nous avons exposé dans ce chapitre les principaux éléments constituant le matériau composite structural (matrice et fibre), leurs définitions et leurs compositions matérielles, les différents types de matrices (organiques, métalliques) et de renforts les plus utilisées pour la fabrication des matériaux composites.

Ainsi les propriétés mécaniques et physiques des fibres. Les lois élastiques qui régissent le matériau composite en tenant compte des différentes hypothèses (matériau isotrope, orthotrope, anisotrope, etc).

Chapitre II

*Les différentes approches d'analyse des
plaques*

Les différentes approches d'analyse des plaques

II- 1 Introduction

Une structure composite multicouche peut être considérée comme un corps hétérogène constitué d'un nombre fini de couches homogènes anisotropes collées. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions.

La modélisation des structures multicouches modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans [Noor1989], [Kapania 1989], [Kant 2000] et [Carrera 2000] des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque.

L'intérêt d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention de résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toutefois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple [Pagano 1969], [Srinivas 1973].

De même, la prise en compte des endommagements spécifiques aux stratifiées (délaminage, fissure transverse,...) exige une bonne description des champs au voisinage des interfaces, sites privilégiés de ces endommagements. Là encore, une approche 3D peut fournir des informations dans certains cas (bord libre droit, plaque trouée ...), mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque plus opératoires. Dans la suite, ce sont ces approches 2D qui seront mentionnées.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses ou des endommagements. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adoptée :

Approche monocouche équivalente

Approche par couche

Approche développement asymptotique.

II- 2 Modèle monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches car, la plaque multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés ; les principaux modèles sont :

II-2-1 Modèle classique Love-Kirchhoff

Les modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur [Reissner 1961], [Yang 1966]. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff [Kirchhoff 1850] de contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale reste droite perpendiculaire à la surface moyenne après déformation (Figure II-1).

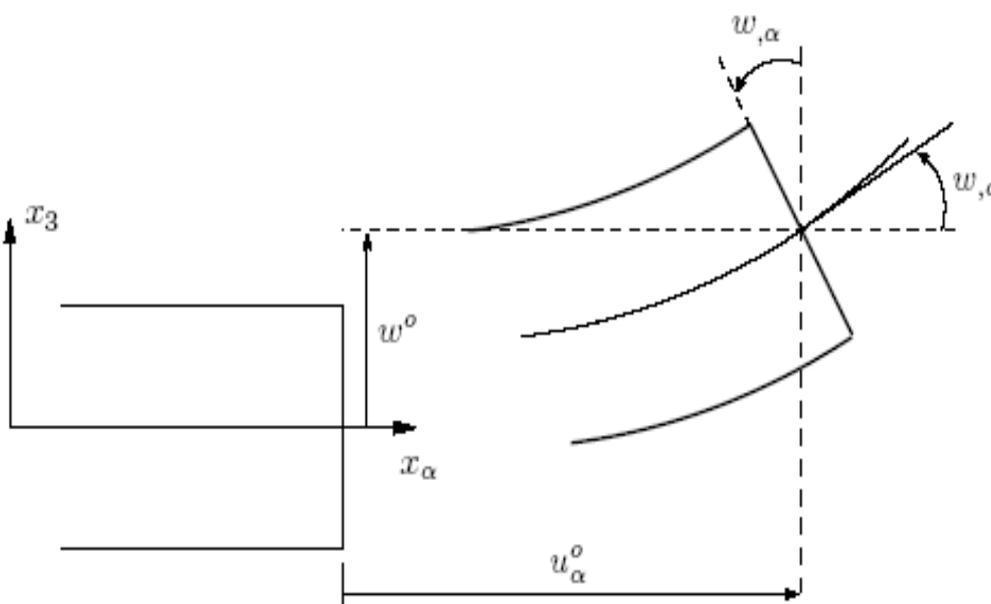


Figure II-1 : Cinématique de Love-Kirchhoff.

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_a(x_1, x_2, x_3 = z) = \mathbf{u}_a^0(x_1, x_2) - z w_{,\alpha}(x_1, x_2) & , a = 1, 2 \\ \mathbf{u}_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{II-1})$$

Avec,

u_a^0 : Le déplacement de membrane dans la direction a ,

w : La flèche de la plaque,

$w_{,a}$: La rotation due a la flexion (sans cisaillement).

II-2-2 Modèle Reissner-Mindlin

Pour introduire l'effet du cisaillement transverse, l'hypothèse cinématique Mindlin [Mindlin 1951] est adoptée : la normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Figure II-2). Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u_a(x_1, x_2, x_3 = z) = u_a^0(x_1, x_2) - z f_{,a}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{II-2})$$

Avec,

f_a : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes x_a ,

$g_a^0 = (w_{,a} + f_a)$: La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

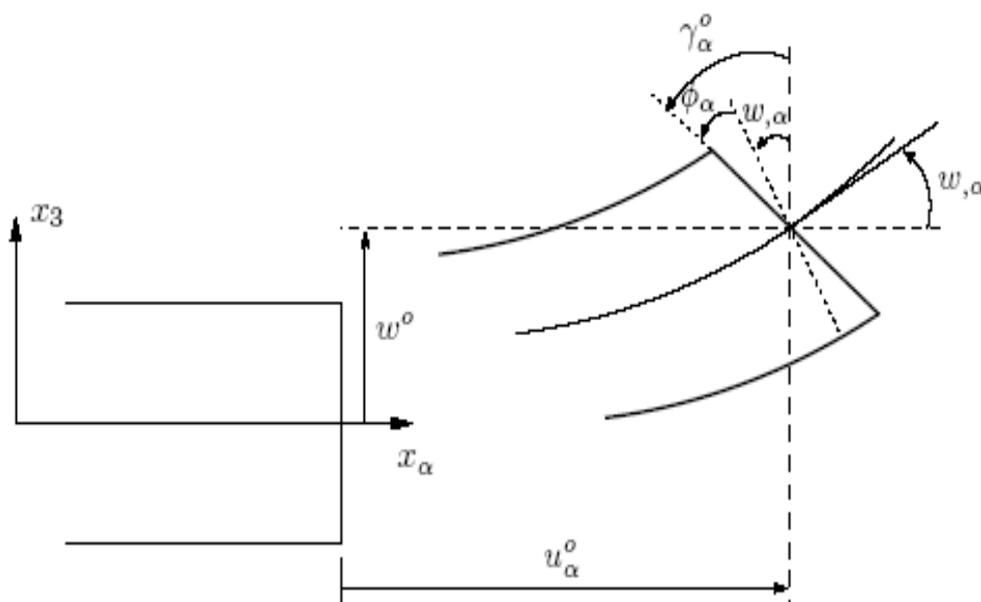


Figure II-2 : Cinématique de Reissner-Mindlin.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales sont constantes en z (Figure II-3). Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes dans chaque couche discontinue entre les couches. Cette mauvaise description oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte dans l'écriture de l'énergie. Les effets de cisaillement transverse [Whitney 1973]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude du composite épais reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

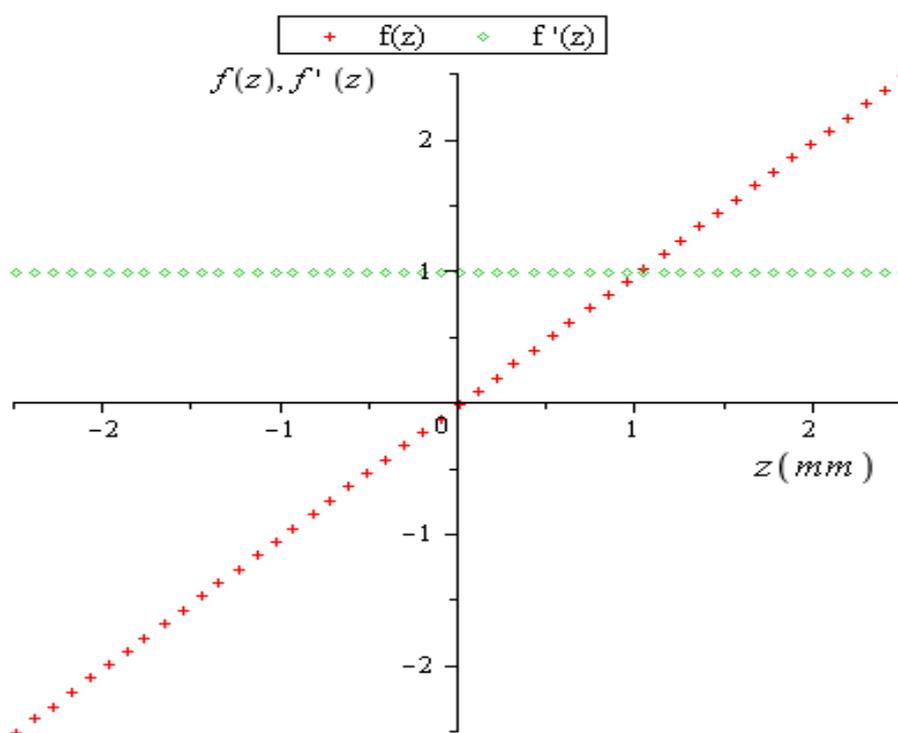


Figure II-3 : Variation de la fonction de gauchissement $f(z)=z$ et $f'(z)$ en fonction de l'épaisseur.

II-2-3 Synthèse bibliographique sur les théories d'ordre supérieur

Les facteurs de correction du CT dépendent du nombre de couches ou de stratifications présentes dans une plaque ou une coque composite. Pour éviter d'utiliser ces facteurs, certains auteurs ont adopté des théories dites d'ordre supérieur qui sont basées sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure II-4). La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor du champ de déplacement de la forme [Nguyen 2004] :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z f_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2 f_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3 f_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4 f_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{II-3})$$

A Partir de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur $\phi_j^{0(i)}$ détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : $\phi_j^{0(i)} = 0$ pour $j= 2, 3, 4 \dots$

En principe, les modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre (Figure II-4). La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est-à-dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacements indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacements, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieures et inférieures de la plaque. Le développement de (II-3) est utilisé avec $\phi_i^{0(4)} = \phi_i^{0(2)} = 0$. Le champ de déplacement devient :

$$\begin{aligned} \hat{u}_a(x_1, x_2, x_3 = z) &= u_a^0(x_1, x_2) - z w_{,a} + f(z) g_a^0(x_1, x_2) \\ \hat{u}_3(x_1, x_2, x_3 = z) &= w(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (\text{II-4})$$

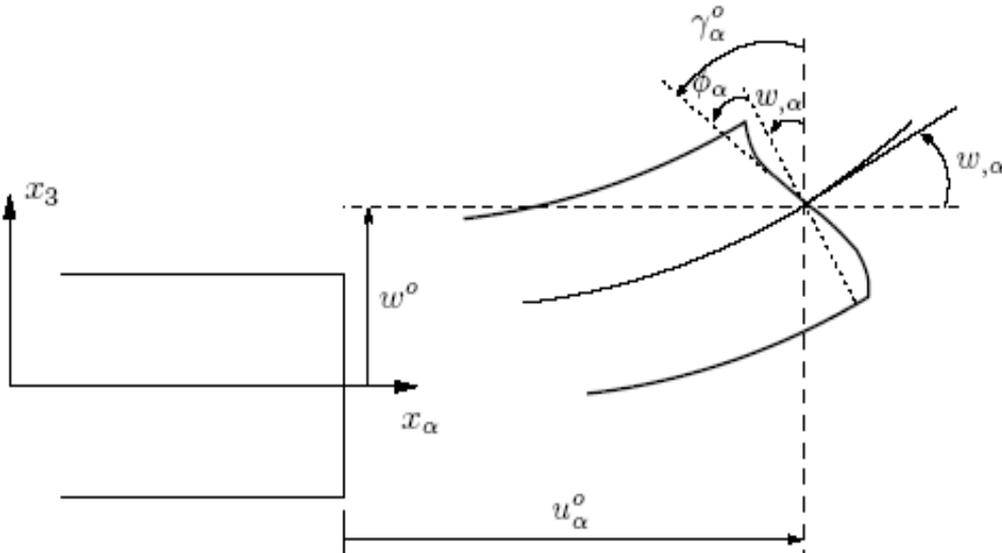


Figure II-4 : Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

Selon l'expression de la fonction de gauchissement $f(z)$, quelques modèles d'ordre supérieur se sont distingués dans la littérature, comme :

- L'approche d'Ambartsumyan [Ambartsumyan 1969] avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \frac{\alpha h^2}{\xi} - \frac{z^2}{3} \frac{\ddot{\theta}}{\theta} \quad (\text{II-5})$$

- L'approche de Reissner [Reissner 1945], Panc et Kaczkowski, avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4} \frac{\alpha}{\xi} z - \frac{4z^2}{3h^2} \frac{\ddot{\theta}}{\theta} \quad (\text{II-6})$$

- L'approche de Levinson, Murthy [Murthy 1981] et Reddy avec ;

$$f(z) = \frac{\alpha}{\xi} z - \frac{4z^2}{3h^2} \frac{\ddot{\theta}}{\theta} \quad (\text{II-7})$$

Dans le modèle de Reddy [Reddy 1984], les champs de déplacements membranaires est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

-L'approche de Touratier [Touratier 1991] avec ;

$$f(z) = \frac{h}{p} \sin\left(\frac{zp}{h}\right) \quad (\text{II-8})$$

Touratier [Touratier 1991], propose le modèle "sinus", qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{p} \sin\left(\frac{z}{h}\right) = \frac{h}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{pz}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left(1 - \frac{p^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{p^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{p^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{II-9})$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près). Les contraintes de cisaillement transverse déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [Reddy 1984].

Récemment, Afaq et al [Afaq 2003] proposent un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II-10})$$

-L'approche de Aydogdu avec [Aydogdu 2005] ;

$$f(z) = za^{-\frac{2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(a)}} \quad a > 1 \quad (\text{II-11})$$

-L'approche de Ait Atmane et al [Ait Atmane 2010] ;

$$f(z) = \frac{\cosh(p/2)}{[\cosh(p/2)-1]} z - \frac{(h/p)\sinh\left(\frac{p}{h}z\right)}{[\cosh(p/2)-1]} \quad (\text{II-12})$$

h : étant l'épaisseur du multicouche.

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" de Touratier ne permet qu'un développement en puissance impair.

II-2-4 Proposition d'une fonction de cisaillement transversal

En collaboration avec des chercheurs mathématiques de l'Université Hassiba Benbouali de Chlef; on a essayé d'en tirer une fonction de gauchissement qui satisfait les conditions suivantes :

- Une fonction qui vérifie les conditions de nullité à $z = h/2$ et $z = -h/2$.
- La dérivée de cette fonction à la surface médiane égale à 1 $f'(0) = 1$.

Cette fonction à la forme suivante :

$$f(z) = \frac{3}{26} z \cdot \cos\left(\frac{2p}{h} z\right) + \frac{1}{13} + 10 \cdot z \left(1 - \frac{16z^4}{5h^4}\right) \quad (\text{II-13})$$

Nous avons tracé les différentes fonctions par le logiciel Maple Figure II-5et Figure II-6. Les deux graphes ci-dessous regroupent les fonctions ainsi leurs dérivées.

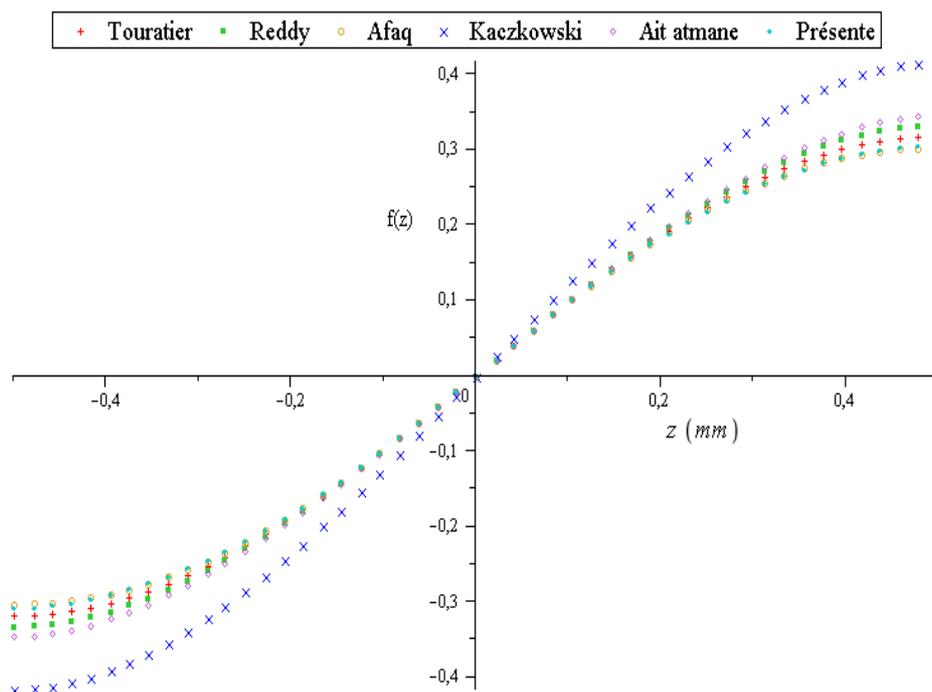


Figure II-5 : Variation de la fonction de gauchissement $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur

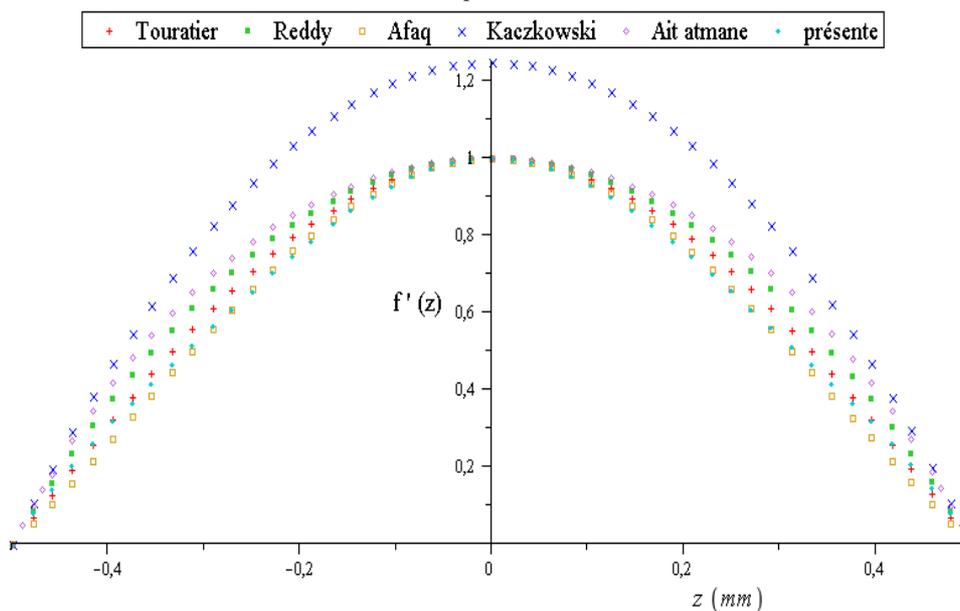


Figure II-6 : Variation de la fonction de gauchissement $f'(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur

II- 3 Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés [Chabot 1997, Carrera 2000, Afaq 2003, Reddy 1984, Di Sciuva, 1987]. Le multicouche est subdivisé en sous-structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes : les modèles couches discrètes où chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces et les modèles zig-zag où la cinématique satisfait a priori les conditions de contact sont indépendantes du nombre de couche. (Figs II-7et II-8).

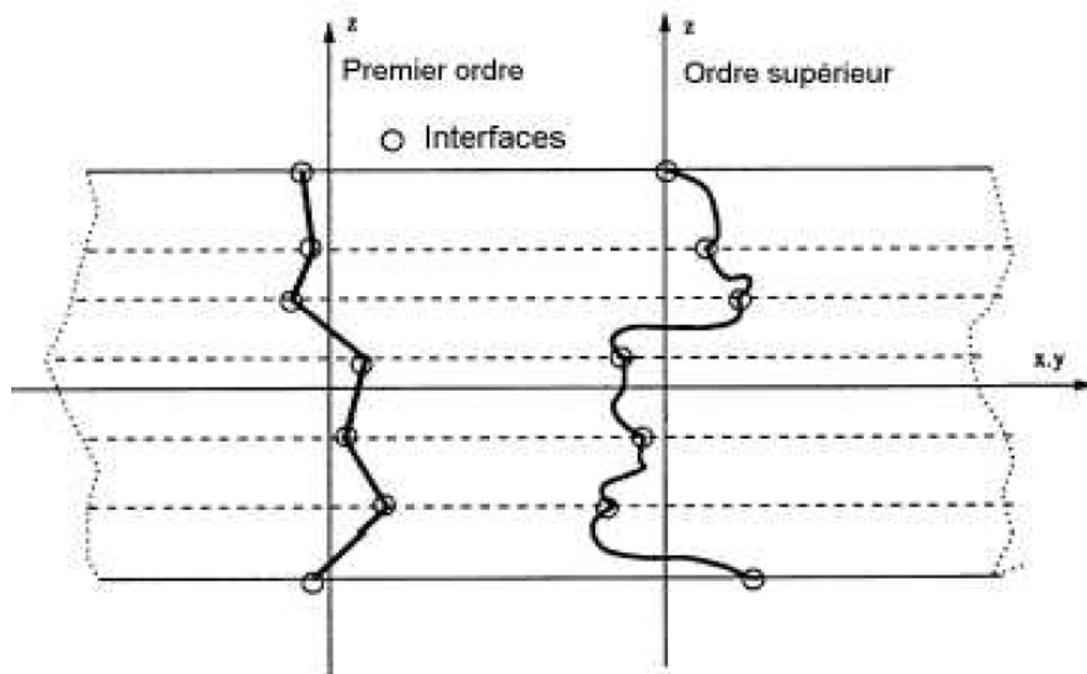


Figure II-7 : Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique.

[Nguyen 2004]

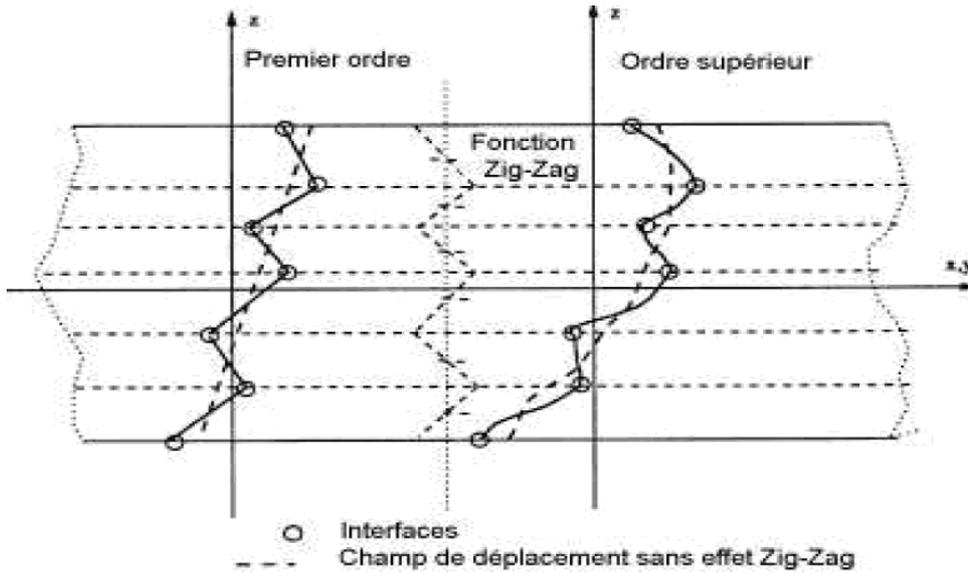


Figure II-8 : Champ de déplacement des modèles zig-zag, approche cinématique
[Nguyen 2004]

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre [Di Sciuva 1984], [Di Sciuva 1987]. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside).

La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en Z mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (Figure II-9). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

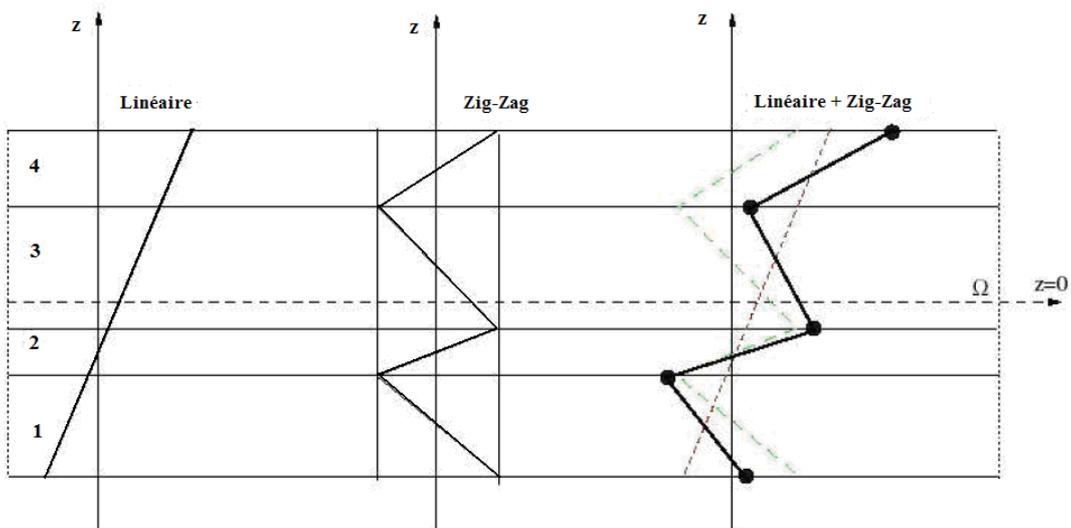


Figure II-9 : Champ de déplacement des modèles zig-zag du premier ordre [Nguyen 2004].

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité.

En se basant sur le concept de [Di Sciuva 1984], plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zig [Icardi 2001a, Icardi 2001b, Carrera 2004]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique), (Figure II-10).

Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

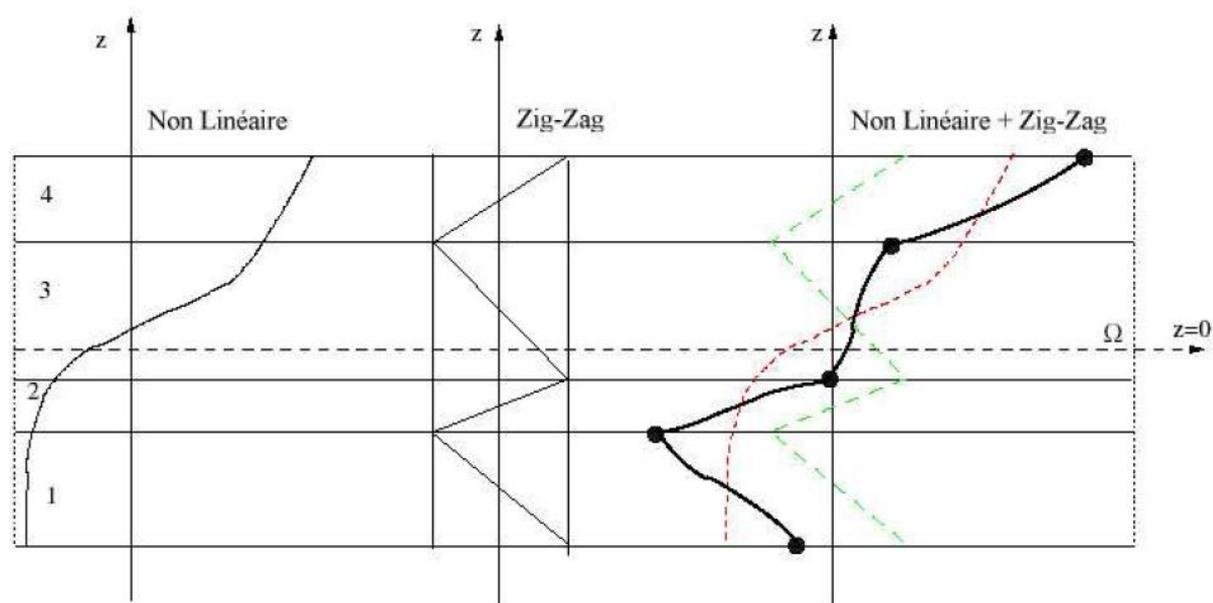


Figure II-10 : Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur.

Dans les travaux de [Karama 1998, Ossadzow 2001], la fonction "sinus" de [Touratier1991] est combinée avec la fonction zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement. Récemment, Afaq et al. [Afaq 2003] combinent le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le coût de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique

ne pousse à penser que ces modèles quelque peu "artificiels" peuvent prévoir les délaminages, par exemple. Le calcul des contraintes de cisaillement transverse par les équations constitutives des modèles zig-zag devient moins précis quand le rapport d'élançement diminue [Icardi 1995]. Un autre inconvénient des modèles zig-zag, tout comme pour les modèles d'ordre supérieur est la continuité de type C^1 demandée qui complique leur implémentation numérique.

II- 4 Approche développement asymptotique

Le développement asymptotique est appliqué à des structures a priori peu épaisses ou le rapport entre l'épaisseur et la plus grande dimension est petit. Il est donc naturel d'envisager un développement asymptotique suivant ce rapport. Ce développement intervient au niveau de l'intégration des équations de l'élasticité (équations constitutives, équations de mouvements).

L'état caractérisant les déformations de la structure est donc constitué par la réunion des parties respectivement situées à l'intérieur et aux frontières, ce qui explique le procédé classique pour résoudre ce type de problème, à savoir la construction d'intégrales dites intérieures, qui correspondent à des solutions variant faiblement à l'intérieur du domaine, que l'on estime déterminées avec une erreur asymptotique (très petite). Un deuxième type d'intégrales, à fortes variations, caractérisant la solution près des bords (couche limite) est également construit [Fredrichs 1961, Johnson 1971, Allix 1989, Lecuyer 1991]. Le travail le plus complet et intéressant semble celui de [Ladeveze 1988, Allix 1989]. Dans un premier temps, ils utilisent les résultats de la théorie classique des plaques. Puis, au voisinage du bord, ils posent le problème tridimensionnel de la détermination des champs (contraintes et déplacements) correcteurs. Ce problème est décomposé en problème bidimensionnels (couches limites perpendiculaires au bord). Ensuite, on fait une approche mixte en contrainte – déplacement résolue par exemple, par des développements en séries de Fourier. L'endommagement dans les couches et à la fois aux interfaces est pris en compte.

Approche tridimensionnelle

L'intérêt d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention de résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence.

L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toutefois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. L'utilisation de telle théories conduit en général à des systèmes complexes, ou le nombre

élevé d'inconnues et les éventuels couplages entre les diverses variables, rendent la résolution possible.

II-5 Modèle éléments finis de structure multicouche

Les solutions analytiques fournies par les approches décrites précédemment ne concernent que des cas de géométrie, chargement et empilement simples. Pour les cas complexes plusieurs méthodes numériques ont été développées. Les éléments finis sont généralement classés suivant le type de description géométrique (2D, 3D). La méthode de construction et le choix du type d'inconnues principales du modèle (déplacements, contraintes, mixtes, hybrides).

Les premiers éléments finis multicouches sont construits en se basant sur les théories du premier ordre, notamment les modèles Reissner-Mindlin avec facteurs de correction. Ces éléments finis possèdent 5 degrés de liberté par noeuds.

$$\begin{aligned} \mathbb{I} \mathbf{u}_a(x_1, x_2, x_3 = z) &= \mathbf{u}_a^0(x_1, x_2) - z f_{,a}(x_1, x_2) \\ \mathbb{I} \mathbf{u}_3(x_1, x_2, x_3 = z) &= w(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (\text{II-14})$$

Un large volume consacré au développement des éléments finis multicouches concerne des éléments finis d'ordre supérieur. Les théories d'ordre supérieur impliquent souvent la dérivée seconde des déplacements transversaux. Cela demande une continuité pour des fonctions de déplacement des éléments finis correspondants.

En se basant sur le modèle "sinus" de Touratier [Touratier 1991], différents éléments finis quadrilatères et triangulaires. L'élément triangulaire développé par [Polit 1997] est capable d'étudier divers problèmes linéaires et non linéaires. L'élément possède 6 noeuds, la continuité des champs aux interfaces et les conditions limites aux surfaces supérieures et inférieures sont assurées. La géométrie de l'élément est présentée sur la (Figure II-11).

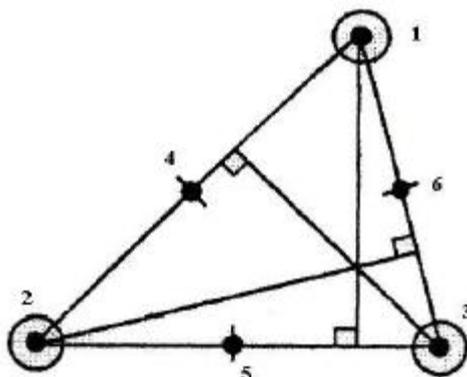


Figure II-11 : Élément « sinus » triangulaire 6 noeuds [Polit 1997].

Les travaux de Shankara [Shankara 1996] et Khare [Khare 2004], ont pour objectif de développer une famille d'éléments d'ordre supérieur. Plusieurs éléments quadrilatères de type Lagrange à 9 et 16 noeuds sont proposés (Figures II-12 et II-13). Ils diffèrent par l'ordre du développement de série de Taylor adopté pour le champ de déplacement.

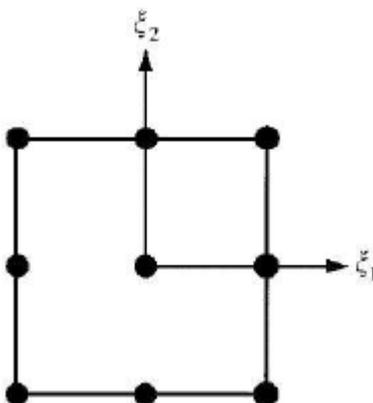


Figure II-12 : Élément quadrilatère de type Lagrange à 9 noeuds [Nguyen 2004].

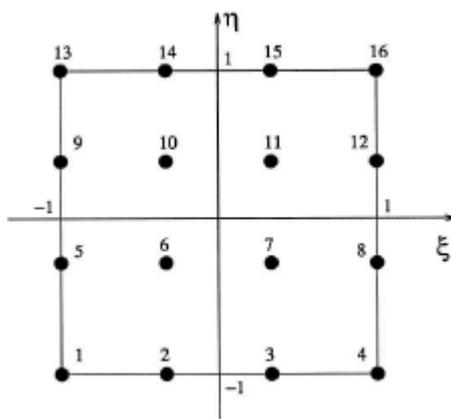


Figure II-13 : Élément quadrilatère de type Lagrange à 16 nœuds [Nguyen 2004].

Les analyses 3D conduisent à un large système d'équations. Cela nécessite donc un grand espace de stockage qui réserve la modélisation 3D pour l'étude locale des champs dans les zones critiques. Les éléments briques isoparmétriques 20 noeuds de Raju [Raju, 1981] sont couramment utilisés pour étudier les champs près des bords libres. Un maillage typique pour l'analyse des contraintes d'interface est présenté sur la (Figure II-14).

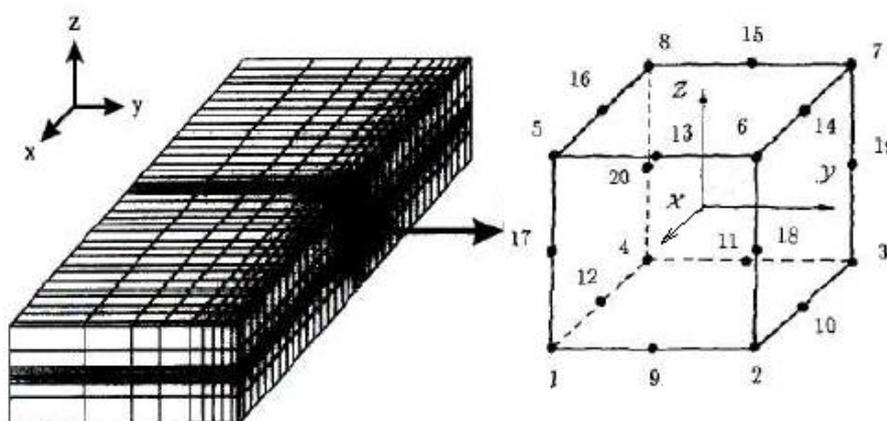


Figure II-14 : Éléments finis 3D à 20 nœuds pour déterminer les contraintes interlaminaires [Nguyen 2004]

- M. José Simoes Moita a proposé un élément quadrilatère à 9 noeuds et 10 degrés de liberté par noeuds. Le champ de déplacements u et v est cubique par rapport à l'épaisseur et w est constant. Il est particulièrement efficace pour calculer le flambage des plaques épaisses et minces. Le nombre de paramètres étant important, rendant le calcul assez lourd.

- M.B.P. Petel et al ont traité une structure de coque assez compliquée géométriquement au 3ème ordre, afin d'améliorer l'état de déformation. Ils ont introduit l'effet de zig-zag qui amène la continuité sur les interfaces (le nombre de paramètres augmente avec le nombre de couches).

- M .T.Kant et al ont développé un élément basé sur la théorie d'ordre supérieur raffiné (surtout sur les plaques sandwich). Ils ont défini un champ de déplacement de telle façon que u , v , w soient cubiques par rapport à l'épaisseur. Chaque ensemble de 2 couches successives est divisé en un certain nombre de sous-couches pour améliorer l'état de contrainte de cisaillement et avoir une continuité aux interfaces.

- Semedo-Garçao et al ont utilisé une méthode particulière d'ordre élevé qui consiste à prendre beaucoup de paramètres. Elle est habituellement utilisée pour les matériaux composites comprenant beaucoup de couches, où chacune ayant des propriétés différentes de l'autre, en imposant une continuité sur les interfaces pour les champs de déplacement et ceux des contraintes. Ils ont développé les champs de déplacements en termes de deux fonctions (fonction d'interpolation et fonction polynôme de Lagrange $f_i(z)$) qui changent d'une couche à autre. Cette théorie est très précise au niveau des résultats mais elle est très compliquée à mettre en œuvre.

- Zen Wu et al ont proposé une théorie intéressante du point de vue des résultats sur les contraintes. Celle-ci assure la continuité sur les interfaces et les conditions nulles (en bas et en haut). Elle définit sur chaque couche un champ de déplacement différent et utilise 11 degrés de libertés par noeud. Elle est communément appelée « high order shear refined theory».

- Toutes ces théories sont très intéressantes, d'une part pour traiter le problème de discontinuité des contraintes sur les interfaces et, d'autre part pour éviter l'utilisation des facteurs de correction de CT. Les résultats obtenus sont globalement satisfaisants. Le seul reproche à faire à ce type de théories est qu'elles sont gourmandes en temps de calcul.

II-6 Conclusion

A partir des différentes méthodes envisagées pour la conception des plaques composites, nous déduisons que les modèles zig-zag d'ordre supérieur permettent d'obtenir des résultats plus précis que les modèles du premier ordre. Ce modèle choisi est basé sur l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements qui exige un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches.

Chapitre III

*Etude analytique des vibrations libres
des plaques*

Etude analytique des vibrations libres des plaques

III-1 Théories et hypothèses

La théorie classique des plaques, basée sur l'hypothèse de Kirchhoff, permet de décrire avec une bonne précision les champs des contraintes et des déformations dans les plaques peu épaisses, excepté dans les régions peu étendues près des bords des plaques. La validité de la théorie des plaques a pu être établie en comparant les résultats obtenus à partir de cette théorie aux solutions exactes des équations d'élasticité.

Par contre, dans le cas des plaques épaisses, la théorie classique devient assez mal adaptée à la description du comportement mécanique (la flèche de la plaque, répartition des contraintes). Une première amélioration consiste à tenir compte du cisaillement transverse avec une théorie des plaques du premier ordre.

Les déformations du cisaillement transversal sont l'un des intérêts principaux des plaques stratifiées épaisses composites. Il existe plusieurs théories des plaques et des plaques stratifiées qui incluent des contraintes de cisaillement transversales ; Une des théories bien connues est le modèle de Reissner [Reissner 1945], qui est connue comme la théorie des ordres première déformation de cisaillement (FSDT) et prend le champ de déplacement comme variations linéaires de déplacements plan moyen. Beaucoup de théories de plaques d'ordre plus hautes ont été développées pour évaluer les déformations de cisaillement transversal des plaques stratifiées [Levy 1877],[Nelson 1974]. Une de ces théories, [Reddy 1984], a prouvé une théorie simple d'ordre supérieur.

La variation des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur, et il n'est pas nécessaire d'utiliser des coefficients de correction de cisaillement dans le calcul des contraintes de cisaillement. l'analyse des vibrations libres des plaques composite stratifiées a fait l'objet d'importants travaux de recherche [Phan 1985],[Matsunaga 2000] .

Il y a eu un nombre considérable d'études sur les plaques qui se repose sur des fondations élastique ; Dans certaines des analyses, un paramètre simple k_0 est utilisé pour décrire le comportement de fondation [Utku 2000], [El-Zafrany 1995].

Dans cette méthode, il est supposé qu'il y a une proportionnalité d'interaction entre la contrainte et la déformation d'un point appliqué dans la fondation.

Cette fondation est modélisée aux ressorts verticaux discrets et ne prend pas en compte les déformations de cisaillement transverse dans la fondation (modèle linéaire Winkler Figure III-1).

Certains chercheurs ont modélisé la fondation à deux paramètres différents. L'un de ces modèles est celui de la fondation de Pasternak. ce deuxième paramètre (modèle de Pasternak) prend en compte l'effet de l'interaction entre les points de cisaillement dans la fondation [Omurtag 1998],[Jones 1975].

Si le second paramètre est nul, la fondation Pasternak est réduite au type Winkler.

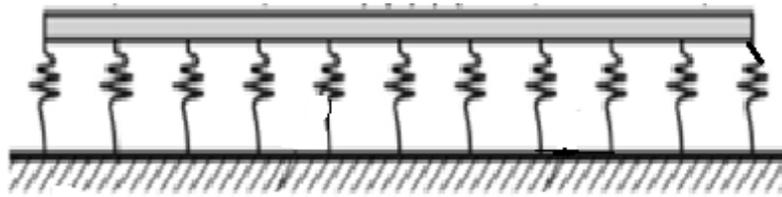


Figure III-1 : modélisation d'une plaque sous fondation

L'objectif de ce travail est d'analyser un nouveau modèle de déplacement pour des plaques stratifiées composites sur fondation élastique. Les solutions analytiques pour la vibration libre des stratifiés symétrique et antisymétrique sont présentés en utilisant la présente théorie. L'utilisation du principe d'Hamilton tire les équations gouvernantes. Les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant des équations aux valeurs propres.

Les résultats obtenus avec la méthode actuelle ont été comparés avec les solutions provenant des autres modèles de la littérature et trouvées pour être dans le bon accord.

III-2 Equations constitutives et la fonction de cisaillement transversal

Considérons une plaque rectangulaire stratifiée, composée de N couches élastique orthotrope, de longueur a , de largeur b , et d'épaisseur uniforme total h .

Le système de coordonnées (x, y, z) , est choisi et placé au milieu de la plaque, les équations constitutives de k^{th} couche de la plaque stratifiée peuvent être exprimées comme suit (Figure III-2)

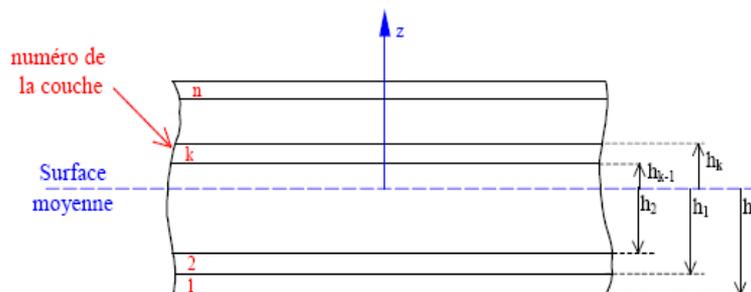


Figure III-2 : élément d'un stratifié

$$\begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ g_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Et} \quad \begin{Bmatrix} t_{yz} \\ t_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_{yz} \\ g_{zx} \end{Bmatrix} \quad (\text{III-1})$$

Où $(s_x, s_y, t_{xy}, t_{yz}, t_{zx})$ sont les contraintes et $(e_x, e_y, g_{xy}, g_{yz}, g_{zx})$ les composants de déformations dans le repère global ; et Q_{ij} sont les constantes de transformées matériel et définis dans [Jones 1975] .

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - n_{12}n_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - n_{12}n_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{n_{21} E_1}{1 - n_{12}n_{21}},$$

$$Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}, \quad Q_{66} = G_{12}.$$

Les constantes $E_1 = E_x$ et $E_2 = E_y$ sont les modules de Young dans les directions respectivement principales x_1 et x_2 , v_{12} et v_{21} sont les coefficients de Poisson; G_{12} , G_{23} et G_{13} sont les modules de cisaillement suivant les plans.

Sur la base de la théorie des plaques épaisses, le champ de déplacement supposé peut être exprimés dans unifiée formulaire comme suit:

$$\begin{aligned} u &= u_0(x, y) - z w_{,x} + f(z) q_x \\ v &= v_0(x, y) - z w_{,y} + f(z) q_y \\ w &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III-2})$$

Où u, v, w sont les déplacements dans les directions x, y, z ; u_0, v_0 et w_0 sont les déplacements au plan moyen, q_x et q_y sont les rotations des normales au plan moyen par rapport aux axes y et x , respectivement, $f(z)$ est la fonction de cisaillement transversal.

$(\)_{,x}$ et $(\)_{,y}$ sont les dérive partielles par rapport à x et y , respectivement. La fonction de forme $f(z)$ est choisie comme suite:

$$f(z) = \frac{3}{13} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot z \cdot \cos \cdot \frac{(2p \cdot z)}{h} + 1 \right) + \frac{10}{13} \cdot z \cdot \left(1 - \frac{16z^4}{5h^4} \right) \quad (\text{III-3})$$

Sachant que les autres fonctions trouvées dans la littérature ; et qui peut nous servir pour la validation sont :

-L'approche de Reddy [Reddy 1984] avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{III-4})$$

-L'approche de Touratier [Touratier 1991] avec ;

$$f(z) = \frac{h}{p} \sin\left(\frac{zp}{h}\right) \quad (\text{III-5})$$

-L'approche de Akavci [Akavci 2009] avec ;

$$f(z) = \frac{3p}{2} h \text{Tanh}\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{3p}{2} z \text{Sech}^2\left(\frac{1}{2}\right) \quad (\text{III-6})$$

-L'approche de Ait Atmane [Ait Atmane 2010] avec ;

$$f(z) = \frac{\cosh(p/2)}{[\cosh(p/2)-1]} z - \frac{(h/p) \sinh\left(\frac{p}{h} z\right)}{[\cosh(p/2)-1]} \quad (\text{III-7})$$

La fonction proposée, tous comme les autres fonctions, permet de satisfaire le cisaillement transversal nul à la surface supérieure et inférieure de la plaque. La distribution à ordre élevé des contraintes du cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque est prise en compte dans cette analyse, par les moyens de la fonction (III-2) du champ de déplacement supposé.

En remplaçant les relations de déplacement (III-2) dans les équations élastiques de déformation-déplacement, les composantes normales et déformations transversale sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned} e_{xx} &= u_{0,x} - zw_{,xx} + f(z)q_{x,x} \\ e_{yy} &= v_{0,y} - zw_{,yy} + f(z)q_{y,y} \\ g_{xy} &= u_{0,y} + v_{0,x} - 2z w_{,xy} + f(z)(q_{x,y} + q_{y,x}) \\ g_{yz} &= f'(z)q_y \\ g_{xz} &= f'(z)q_x \end{aligned} \quad (\text{III-8})$$

Où

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III-9})$$

III-3 Équations gouvernantes de la vibration libre

En utilisant le principe d'énergie de Hamilton ; l'équation de mouvement pour une plaque stratifiée composite s'écrit comme suit:

$$d \int_{t_1}^{t_2} (U + U_F - K) dt = 0 \quad (\text{III-10})$$

Où U est l'énergie de déformation et K est l'énergie cinétique de la plaque, U_F est l'énergie de déformation de la fondation.

Employant le minimum du principe d'énergie totale qui conduit à une équation générale du mouvement et aux conditions limites.

Prenant la variation de l'équation ci-dessus et en intégrant par parties:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V \left[s_{xx} de_{xx} + s_{yy} de_{yy} + t_{xy} dg_{xy} + t_{yz} dg_{yz} + t_{zx} dg_{zx} - r(\dot{u} + \dot{v} + \dot{w}) \right] dv + \int_A [f_e dw] dA \Big] dt = 0 \quad (III-11)$$

Où $(\dot{\cdot})$ représente la dérivée seconde par rapport au temps et f_e est la densité de force de réaction de la fondation. Pour le modèle de la fondation Pasternak :

$$f_e = k_0 w - k_1 \nabla^2 w. \quad (III-12)$$

k_0 : Coefficient de Winkler

k_1 : Coefficient de Pasternak

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Si la fondation est modélisée comme une fondation linéaire Winkler, le coefficient k_1 de l'équation (III-12) est égal à zéro.

En utilisant les équations (III-8), l'équation (III-11) prend la forme suivante:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_A \left\{ d u N_{x,x} + d v N_{y,y} + d u N_{xy,y} + d v N_{xy,x} + d w M_{x,xx} + d w M_{y,yy} + 2 d w M_{xy,xy} \right. \\ & + d q_x P_{x,x} + d q_y P_{y,y} + d q_x P_{xy,y} + d q_y P_{xy,x} + d q_y (-R_y) + d q_x (-R_x) \Big\} dA \\ & + \int_A f_e d w dA - \int_A \left\{ d u (I_1 \ddot{u} - I_2 \ddot{u}_{,x} + I_4 \ddot{u}_{,x}) + d v (I_1 \ddot{v} - I_2 \ddot{v}_{,y} + I_4 \ddot{v}_{,y}) \right. \\ & + d w (I_1 \ddot{w} + I_2 \ddot{w}_{,x} - I_3 \ddot{w}_{,x} + I_5 \ddot{w}_{,x,x} + I_2 \ddot{w}_{,y} - I_3 \ddot{w}_{,y} + I_5 \ddot{w}_{,y,y}) + d q_x (I_4 \ddot{q}_x - I_5 \ddot{q}_{x,x} + I_6 \ddot{q}_{x,x}) \\ & \left. + d q_y (I_4 \ddot{q}_y - I_5 \ddot{q}_{y,y} + I_6 \ddot{q}_{y,y}) \right\} dA \Big] dt = 0 \end{aligned} \quad (III-13)$$

III-3 a Le travail des efforts internes

$$U = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_V (se) dv \Big] dt$$

La variation de l'énergie de déformation

$$dU = \frac{1}{2} \int_V s_{ij} de_{ij} dv$$

$$dU = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left\{ s_{xx} de_{xx} + s_{yy} de_{yy} + t_{xy} dg_{xy} + t_{yz} dg_{yz} + t_{zx} dg_{zx} \right\} dz \right] ds dt$$

En remplaçant les relations de déplacement (III-8) dans les équations élastiques.

$$dU = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_S \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left\{ s_{xx} d(u_{0,x} - zw_{,xx} + f(z)q_{x,x}) + s_{yy} d(v_{0,y} - zw_{,yy} + f(z)q_{y,y}) \right. \right. \\ \left. \left. + t_{xy} d(u_{0,x} + v_{0,y} - 2zw_{,xy} + f(z)(q_{x,y} + q_{y,x})) + t_{yz} f' dq_y + t_{zx} f' dq_x \right\} dz \right] ds dt \quad (III-14)$$

$$N_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} s_{xx} \cdot dz \quad M_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} s_{xx} \cdot z \cdot dz \quad P_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} s_{xx} \cdot f \cdot dz \quad R_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} s_{zx} \cdot f' \cdot dz \quad (III-15)$$

$$dU = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_S \left\{ N_{xx} du_{0,x} - M_{xx} dw_{,xx} + P_x dq_{x,x} + N_{yy} dv_{0,y} - M_{yy} dw_{,yy} + P_y dq_{y,y} \right. \\ \left. + N_{xy} du_{0,y} + N_{xy} dv_{0,x} - 2M_{xy} dw_{,xy} + P_{xy} dq_{x,y} + P_{xy} dq_{y,x} + R_x dq_x + R_y dq_y \right\} ds dt$$

On dérive par partie

- $N_{xx} du_{,x} = (N_{xx} du)_{,x} - N_{xx,x} du$.
- $M_{xx} dw_{,xx} = (M_{xx} dw_{,x})_{,x} - M_{xx,xx} dw_{,x} = (M_{xx} dw_{,x})_{,x} - (M_{xx,x} dw)_{,x} + M_{xx,xx} dw$.
- $P_x dq_{x,x} = (P_x dq_x)_{,x} - P_{x,x} dq_x$.
- $N_{yy} dv_{,y} = (N_{yy} dv)_{,y} - N_{yy,y} dv$.
- $M_{yy} dw_{,yy} = (M_{yy} dw_{,y})_{,y} - M_{yy,yy} dw_{,y} = (M_{yy} dw_{,y})_{,y} - (M_{yy,y} dw)_{,y} + M_{yy,yy} dw$.
- $P_y dq_{y,y} = (P_y dq_y)_{,y} - P_{y,y} dq_y$.
- $N_{xy} du_{,y} = (N_{xy} du)_{,y} - N_{xy,y} du$.
- $N_{xy} dv_{,x} = (N_{xy} dv)_{,x} - N_{xy,x} dv$.
- $M_{xy} dw_{,xy} = (M_{xy} dw_{,y})_{,x} - M_{xy,xx} dw_{,y} = (M_{xy} dw_{,y})_{,x} - (M_{xy,x} dw)_{,y} + M_{xy,xy} dw$.
- $P_{xy} dq_{x,y} = (P_{xy} dq_x)_{,y} - P_{xy,y} dq_x$.
- $P_{xy} dq_{y,x} = (P_{xy} dq_y)_{,x} - P_{xy,x} dq_y$.

$$dU = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_S \left\{ N_{xx,x} du + M_{xx,xx} dw + P_{x,x} dq_x + N_{yy,y} dv + M_{yy,yy} dw + P_{y,y} dq_y \right. \\ \left. + N_{xy,y} du + N_{xy,x} dv + 2M_{xy,xy} dw + P_{xy,y} dq_x + P_{xy,x} dq_y - R_x dq_x - R_y dq_y \right\} ds dt \quad (III-16)$$

III-3 b L'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} \int_V r \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dv$$

Variation de L'énergie cinétique :

$$dK = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_V r (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{w}) dv dt \quad (III-17)$$

Tel que:

r : Masse volumique de la plaque.

$$dK = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_s \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r (u du + v dv + w dw) dz \right] ds \right] dt$$

$$u = u_{0(x,y)} - zw_{,x} + f(z)q_x$$

Avec :

$$v = v_{0(x,y)} - zw_{,y} + f(z)q_y$$

$$w = w_{0(x,y)}$$

$$u du = (u_{,x} - zw_{,xx} + f(z)q_{x,x})(du - zw_{,x} + f(z)q_x) \quad (III-18)$$

$$= u_{,x} du - u_{,x} dz w_{,x} + u_{,x} f(z) dq_x - zw_{,xx} du + z^2 w_{,xx} dw_{,x} - z f(z) dz dq_x + f(z) q_x du - z f(z) dz w_{,x} + f^2(z) q_x dq_x$$

$$v dv = (v_{,y} - zw_{,xy} + f(z)q_{y,y})(dv - zw_{,y} + f(z)q_y)$$

$$= v_{,y} dv - v_{,y} dz w_{,y} + v_{,y} f(z) dq_y - zw_{,xy} dv + z^2 w_{,xy} dw_{,y} - z f(z) dz dq_y + f(z) q_y dv - z f(z) dz w_{,y} + f^2(z) q_y dq_y$$

En remplaçant les relations de déplacement (III-18) dans les équations (III-17) on trouve ;

$$dK = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_A \left\{ du (I_1 u_{,x} - I_2 u_{,xx} + I_4 q_{x,x}) + dv (I_1 v_{,y} - I_2 v_{,yy} + I_4 q_{y,y}) + dw (I_1 w_{,x} + I_2 w_{,xx} - I_3 w_{,xx} + I_5 q_{x,x} + I_2 w_{,y} - I_3 w_{,yy} + I_5 q_{y,y}) \right. \right. \\ \left. \left. + dq (I_4 u_{,x} - I_5 u_{,xx} + I_6 q_{x,x}) + dq (I_4 v_{,y} - I_5 v_{,yy} + I_6 q_{y,y}) \right\} dA \right] dt = 0 \quad (III-19)$$

L'écriture matricielle des contraintes et les moments résultants sont définis comme suit:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} & C_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} & E_{ij} \\ C_{ij} & E_{ij} & G_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e \\ k \\ q \end{Bmatrix} \quad (i, j = 1, 2, 6), \quad (III-20)$$

$$\{R\} = \{F_{ij}\} \{q\} \quad (i, j = 4, 5)$$

Dans laquelle:

$$e = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix}, \quad k = - \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix}, \quad k_q = \begin{Bmatrix} q_{x,x} \\ q_{y,y} \\ q_{x,y} + q_{y,x} \end{Bmatrix}, \quad q = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} \quad (III-21)$$

Les composants de rigidité et inerties sont donnés comme :

$$\{A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, G_{ij}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{1, z, f(z), z^2, z f(z), [f(z)]^2\} Q_{ij} dz \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$\{F_{ij}\} = \int_{-h/2}^{h/2} [f'(z)]^2 Q_{ij} dz \quad (i, j = 4, 5) \quad (III-22)$$

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \int_{-h/2}^{h/2} r \left(1, z, z^2, f(z), z f(z), [f(z)]^2 \right) dz$$

En regroupant les coefficients du, dv, dw, dq_x et dq_y dans l'équation(III-13) ,les équations du mouvement sont obtenus comme suit:

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} &= I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - I_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + I_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ N_{xy,x} + N_{y,y} &= I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - I_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + I_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + f_e &= I_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + I_2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) - I_3 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + I_5 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \\ P_{x,x} + P_{xy,y} - R_x &= I_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - I_5 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + I_6 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ P_{xy,x} + P_{y,y} - R_y &= I_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - I_5 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + I_6 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \end{aligned} \quad (III-23)$$

Les conditions aux limites, qui doivent être prescrit sur les bords de la plaque, sont obtenues comme suit:

à $x =$ bords constants	à $x =$ bords constant	
u ou N_x	v ou N_{xy}	
v ou N_{xy}	u ou N_{xy}	
w ou $(M_{x,x} + 2M_{xy,x})$	w ou $(M_{y,y} + 2M_{xy,x})$	(III-24)
$w_{,x}$ ou M_x	$w_{,y}$ ou M_y	
q_x ou P_x	q_x ou P_{xy}	
q_y ou P_{xy}	q_y ou P_y	

III-4 Solution de NAVIER et valeur propre pour le problème d'une plaque simplement appuyée

Les conditions aux limites sur les bords de la plaque simplement appuyée peuvent être obtenues en tant que:

$$\begin{aligned} N_x = v = w = M_x = P_x = q_y = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0, a \\ N_y = u = w = M_y = P_y = q_x = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0, b \end{aligned} \quad (III-25)$$

Pour la solution analytique des équations d'équilibres (III-23) , la méthode de Navier est utilisée dans des conditions limites spécifiées.

Les fonctions de déplacement qui satisfont les équations aux conditions limites (III-25) sont choisies comme la série suivante de Fourier:

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}$$

$$v(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{mp x}{a} \cos \frac{np y}{b} e^{i\omega t} \quad (\text{III-26})$$

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{mp x}{a} \sin \frac{np y}{b} e^{i\omega t}$$

$$q_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{xmn} \cos \frac{mp x}{a} \sin \frac{np y}{b} e^{i\omega t}$$

$$q_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{ymn} \sin \frac{mp x}{a} \cos \frac{np y}{b} e^{i\omega t}$$

Ou A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} , T_{xmn} , T_{ymn} sont des paramètres arbitraires à déterminer et ω est la fréquence propre ou le facteur de charge du flambement associée à $(m, n)^{\text{ième}}$ mode propre.

Quelques composants de rigidité de la plaque sont :

$$A_{16} = A_{26} = F_{45} = 0, \quad D_{16} = D_{26} = 0, \quad E_{16} = E_{26} = 0, \quad G_{16} = G_{26} = 0$$

$$B_{ij} = C_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (\text{III-27})$$

Pour une plaque symétrique stratifiée à plis croisé composites et :

$$A_{16} = A_{26} = F_{45} = 0, \quad D_{16} = D_{26} = 0, \quad E_{16} = E_{26} = 0, \quad G_{16} = G_{26} = 0$$

$$B_{12} = B_{16} = B_{26} = B_{66} = 0, \quad C_{12} = C_{16} = C_{26} = C_{66} = 0$$

$$A_{11} = A_{22}, \quad B_{11} = -B_{22}, \quad C_{11} = -C_{22} \quad (\text{III-28})$$

Pour une plaque antisymétrique stratifiée à plis croisé composites.

En remplaçant les équations (III-22) et (III-26)- (III-28) dans les équations du mouvement (III-23) nous obtenons les équations aux valeurs propres ci-dessous pour toute valeur fixe de m et n , pour le problème de vibration libre:

$$([K] - \omega^2 [M])\{\Delta\} = \{0\} \quad (\text{III-29})$$

Ou

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix}, \quad [M] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & -a I_2 & I_4 & 0 \\ 0 & I_1 & -b I_2 & 0 & I_4 \\ -a I_2 & -b I_2 & I_3(a^2 + b^2) + I_1 & -a I_5 & -b I_5 \\ I_4 & 0 & -a I_5 & I_6 & 0 \\ 0 & I_4 & -b I_5 & 0 & I_6 \end{bmatrix}$$

Et

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \\ T_{xmn} \\ T_{ymn} \end{Bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= A_{11} a^2 + A_{66} b^2 \\
 a_{12} &= a b (A_{12} + A_{66}) \\
 a_{13} &= -B_{11} a^3 \\
 a_{14} &= C_{11} a^2 + C_{66} b^2 \\
 a_{15} &= a b (C_{12} + C_{66}) \\
 a_{22} &= A_{66} a^2 + A_{22} b^2 \\
 a_{23} &= -B_{22} b^3 \\
 a_{24} &= a b (C_{12} + C_{66}) \\
 a_{25} &= C_{66} a^2 + C_{22} b^2 \\
 a_{33} &= D_{11} a^4 + 2D_{12} a^2 b^2 + 4D_{66} a^2 b^2 + D_{22} b^4 + k_0 + k_1 (a^2 + b^2) \\
 a_{34} &= -E_{11} a^3 - E_{12} a b^2 - 2E_{66} a b^2 \\
 a_{35} &= -E_{12} a^2 b - 2E_{66} a^2 b - E_{22} b^3 \\
 a_{44} &= F_{55} + G_{11} a^2 + G_{66} b^2 \\
 a_{45} &= a b (G_{12} + G_{66}) \\
 a_{55} &= F_{44} + G_{66} a^2 + G_{22} b^2
 \end{aligned}
 \tag{III-30}$$

Et $a = m p / a$, $b = n p / b$.

Pour les solutions non-triviales, pour l'équation (III-29), le déterminant suivant doit être égal à zéro:

$$|[K] - w^2 [M]| = 0
 \tag{III-31}$$

L'équation (III-31) donne les fréquences naturelles de la plaque.

III-5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons, démontré les étapes à suivre pour la résolution d'un problème plane de vibration libre sur fondation élastique en utilisant le principe d'Hamilton qui conduit à une équation générale du mouvement et aux conditions limites. Les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant des équations aux valeurs propres. Les résultats numériques avec validation sont présentés dans le chapitre V.

Chapitre IV

*Etude analytique de la stabilité
des plaques*

Etude analytique de la stabilité des plaques

IV-1 Objectif

Le phénomène de stabilité des plaques est un cas d'étude très étudiés de nos jours ; donc l'intérêt de ce chapitre repose sur une recherche théorique sur la stabilité des plaques épaisses assises sur appuis élastiques de type Winkler-Pasternak. Cette plaque est soumise aux efforts de compression suivant le plan moyen de la plaque.

Pour prendre en compte le phénomène de la stabilité, il est donc nécessaire d'écrire les équations des plaques en tenant compte de la déformation latérale, c'est-à-dire en considérant pour chaque point de la structure les coordonnées après déformation.

Le but de ce travail est d'utiliser une nouvelle théorie de cisaillement de déformable des plaques pour se cas d'instabilité de forme.

IV-2 Equations constitutives et la fonction de cisaillement transversal

Considérons une plaque rectangulaire stratifiée, composée de N couches élastique orthotrope, de longueur a, de largeur b et d'épaisseur uniforme totale h.

Le système de coordonnées (x, y, z), est choisi et placé au milieu de la plaque, Les équations constitutives de kth couche de la plaque stratifiée peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ g_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Et} \quad \begin{Bmatrix} t_{yz} \\ t_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_{yz} \\ g_{zx} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-1})$$

Où $(s_x, s_y, t_{xy}, t_{yz}, t_{zx})$ sont les contraintes et $(e_x, e_y, g_{xy}, g_{yz}, g_{zx})$ les composants de déformations dans le repère global et Q_{ij} sont les constantes de transformées matériel qui sont définis dans [Jones, 1975] .

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - n_{12}n_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - n_{12}n_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{n_{21} E_1}{1 - n_{12}n_{21}},$$

$$Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}, \quad Q_{66} = G_{12}.$$

Les constantes $E_1 = E_x$ et $E_2 = E_y$ sont les modules de Young dans les directions respectivement principales x_1 et x_2 , ν_{12} et ν_{21} sont les coefficients de Poisson; G_{12} , G_{23} et G_{13} sont les modules de cisaillement suivant les plans.

Sur la base de la théorie des plaques épaisses, le champ de déplacement supposé peut être exprimé dans unifiée formulaire comme suit:

$$\begin{aligned} u &= u_0(x, y) - z w_{,x} + f(z) q_x \\ v &= v_0(x, y) - z w_{,y} + f(z) q_y \end{aligned} \quad (IV-2)$$

$$w = w_0(x, y)$$

Où u , v , w sont les déplacements dans les directions x , y , z ; u_0 , v_0 et w_0 sont les déplacement au plan moyen, q_x et q_y sont les rotations des normales au plan moyen par rapport aux axes y et x , respectivement, $f(z)$ est la fonction de cisaillement transversal.

$(\)_{,x}$ et $(\)_{,y}$ sont les dérive partielles par rapport à x et y , respectivement. La fonction de forme, $f(z)$ est choisie comme suit:

$$f(z) = \frac{3}{13} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot z \cdot \cos \cdot \frac{(2p \cdot z)}{h} + 1 \right) + \frac{10}{13} \cdot z \cdot \left(1 - \frac{16z^4}{5h^4} \right) \quad (IV-3)$$

Sachant que les autres fonctions trouvées dans la littérature et qui peut nous servir pour la validation sont :

-L'approche de Reddy [Reddy 1984] avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (IV-4)$$

-L'approche de Touratier [Touratier 1991] avec ;

$$f(z) = \frac{h}{p} \sin \left(\frac{zp}{h} \right) \quad (IV-5)$$

-L'approche de Akavci [Akavci 2009] avec ;

$$f(z) = \frac{3p}{2} h \operatorname{Tanh} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{3p}{2} z \operatorname{Sech}^2 \left(\frac{1}{2} \right) \quad (IV-6)$$

-L'approche d'Ait Atmane [Ait Atmane 2010] avec ;

$$f(z) = \frac{\cosh(p/2)}{[\cosh(p/2)-1]} z - \frac{(h/p) \sinh \left(\frac{p}{h} z \right)}{[\cosh(p/2)-1]} \quad (IV-7)$$

La fonction proposée, tous comme les autres fonctions, permet de satisfaire le cisaillement transversal nul à la surface supérieure et inférieure de la plaque. La distribution à ordre élevé des contraintes du cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque est prise en compte dans cette analyse, par les moyens de la fonction (IV-3) du champ de déplacement supposé.

En remplaçant les relations de déplacement (IV-2) dans les équations élastiques de déformation-déplacement, les composantes normales et déformations transversale sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned}
 e_{xx} &= u_{0,x} - zw_{,xx} + f(z)q_{x,x} \\
 e_{yy} &= v_{0,y} - zw_{,yy} + f(z)q_{y,y} \\
 g_{xy} &= u_{0,y} + v_{0,x} - 2z w_{,xy} + f(z)(q_{x,y} + q_{y,x}) \\
 g_{yz} &= f'(z)q_y \\
 g_{xz} &= f'(z)q_x
 \end{aligned} \tag{IV-8}$$

Où

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \tag{IV-9}$$

IV-3 Équations gouvernantes du flambement

En utilisant le principe d'énergie de Hamilton, l'équation de mouvement pour une plaque stratifiée composite s'écrit comme suit:

$$d \int_{t_1}^{t_2} (U + U_F - W) dt = 0 \tag{IV-10}$$

Où U est l'énergie de déformation et U_F est l'énergie de déformation de la fondation et w est le travail des forces externes.

Employant le minimum du principe d'énergie totale qui conduit à une équation générale du mouvement et aux conditions limites.

Prenant la variation de l'équation ci-dessus et on intégrant par parties:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_V [s_{xx} de_{xx} + s_{yy} de_{yy} + t_{xy} dg_{xy} + t_{yz} dg_{yz} + t_{zx} dg_{zx} + \int_A [f_e dw + \bar{N}_x w_{,xx} dw + \bar{N}_y w_{,yy} dw] dA \right] dt = 0 \tag{IV-11}$$

Où $\overline{N_x}$ et $\overline{N_y}$ sont les charges de compression sur les côtés de plaque, (\cdot) représente la dérivée seconde par rapport au temps et f_e est la densité de force de réaction de la fondation.

Pour le modèle de la fondation Pasternak :

$$f_e = k_0 w - k_1 \nabla^2 w. \quad (\text{IV-12})$$

Si la fondation est modélisée comme une fondation linéaire Winkler, le coefficient k_1 de l'équation (IV-12) est égal à zéro.

En utilisant les équations (IV-8), l'équation (IV-11) prend la forme suivante:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_A \{ d u N_{x,x} + d v N_{y,y} + d u N_{xy,y} + d v N_{xy,x} + d w M_{x,xx} + d w M_{y,yy} + 2 d w M_{xy,xy} \right. \\ & + d q_x P_{x,x} + d q_y P_{y,y} + d q_x P_{xy,y} + d q_y P_{xy,x} + d q_y (-R_y) + d q_x (-R_x) \} dA \\ & \left. + \int_A f_e d w dA - \int_A \{ N_x w_{,xx} + N_y w_{,yy} \} d w dA \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-13})$$

Où les contraintes et les moments résultants sont définis comme suit:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} & C_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} & E_{ij} \\ C_{ij} & E_{ij} & G_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e \\ k \\ k_q \end{Bmatrix} \quad (i, j = 1, 2, 6), \quad (\text{IV-14})$$

$$\{R\} = \{F_{ij}\} \{q\} \quad (i, j = 4, 5)$$

Dans laquelle:

$$e = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix}, \quad k = - \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix}, \quad k_q = \begin{Bmatrix} q_{x,x} \\ q_{y,y} \\ q_{x,y} + q_{y,x} \end{Bmatrix}, \quad q = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-15})$$

Les composants de rigidité sont donnés comme :

$$\{A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, G_{ij}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{1, z, f(z), z^2, z f(z), [f(z)]^2\} Q_{ij} dz \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$\{F_{ij}\} = \int_{-h/2}^{h/2} [f'(z)]^2 Q_{ij} dz \quad (i, j = 4, 5) \quad (\text{IV-16})$$

Collecte les coefficients du, dv, dw, dq_x et dq_y dans l'équation(III-13) , les équations du mouvement sont obtenus comme suit:

$$\begin{aligned}
 N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0 \\
 N_{xy,x} + N_{y,y} &= 0 \\
 M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + \overline{N}_x w_{,xx} + \overline{N}_y w_{,yy} + f_e &= 0 \\
 P_{x,x} + P_{xy,y} - R_x &= 0 \\
 P_{xy,x} + P_{y,y} - R_y &= 0
 \end{aligned} \tag{IV-17}$$

Les conditions aux limites, qui doivent être prescrit sur les bords de la plaque, sont obtenues comme suit:

<p>à $x =$ bords constants</p> <p>u ou N_x</p> <p>v ou N_{xy}</p> <p>w ou $(M_{x,x} + 2M_{xy,x})$</p> <p>$w_{,x}$ ou M_x</p> <p>q_x ou P_x</p> <p>q_y ou P_{xy}</p>	<p>à $x =$ bords constant</p> <p>v ou N_{xy}</p> <p>u ou N_{xy}</p> <p>w ou $(M_{y,y} + 2M_{xy,x})$</p> <p>$w_{,y}$ ou M_y</p> <p>q_x ou P_{xy}</p> <p>q_y ou P_y</p>
--	--

$$\tag{IV-18}$$

IV-4 Solution de NAVIER pour une plaque rectangulaire simplement appuyée

Les conditions aux limites sur les bords de la plaque simplement appuyée peuvent être obtenues en tant que:

$$N_x = v = w = M_x = P_x = q_y = 0 \quad \text{pour } x = 0, a \tag{IV-19}$$

$$N_y = u = w = M_y = P_y = q_x = 0 \quad \text{pour } y = 0, b$$

Pour la solution analytique des équations (IV-17), la méthode de Navier est utilisée dans des conditions limites spécifiées.

Les fonctions de déplacement qui satisfont les équations aux conditions limites (IV-19) sont choisies comme la série suivante de Fourier:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{mp x}{a} \sin \frac{np y}{b} e^{i\omega t} \\
 v(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{mp x}{a} \cos \frac{np y}{b} e^{i\omega t} \\
 w(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{mp x}{a} \sin \frac{np y}{b} e^{i\omega t} \\
 q_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{xmn} \cos \frac{mp x}{a} \sin \frac{np y}{b} e^{i\omega t} \\
 q_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{ymn} \sin \frac{mp x}{a} \cos \frac{np y}{b} e^{i\omega t}
 \end{aligned} \tag{IV-20}$$

Ou $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, T_{xmn}, T_{ymn}$ sont des paramètres arbitraires à déterminer et W est la fréquence propre ou le flambement facteur de charge associée à (m, n) ième mode propre.

Quelques composants de rigidité de la plaque sont :

$$\begin{aligned} A_{16} = A_{26} = F_{45} = 0, \quad D_{16} = D_{26} = 0, \quad E_{16} = E_{26} = 0, \quad G_{16} = G_{26} = 0 \\ B_{ij} = C_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 6 \end{aligned} \quad (IV-21)$$

Pour une plaque symétrique stratifiés à plis croisé composites et :

$$\begin{aligned} A_{16} = A_{26} = F_{45} = 0, \quad D_{16} = D_{26} = 0, \quad E_{16} = E_{26} = 0, \quad G_{16} = G_{26} = 0 \\ B_{12} = B_{16} = B_{26} = B_{66} = 0, \quad C_{12} = C_{16} = C_{26} = C_{66} = 0 \\ A_{11} = A_{22}, \quad B_{11} = -B_{22}, \quad C_{11} = -C_{22} \end{aligned} \quad (IV-22)$$

Pour une plaque antisymétrique stratifiée à plis croisé composites.

En remplaçant les équations (IV-16) et (IV-20) -(IV-21) dans les équations du mouvement (IV-17) nous obtenons les équations aux valeurs propres ci-dessous pour toute valeur fixe de m et n , pour le problème de flambement :

$$([K] - w[N])\{\Delta\} = \{0\} \quad (IV-23)$$

Ou

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix}, \quad [N] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \overline{N}_x + b^2 \overline{N}_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Et } \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \\ T_{xmn} \\ T_{ymn} \end{Bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= A_{11}a^2 + A_{66}b^2 \\
 a_{12} &= ab(A_{12} + A_{66}) \\
 a_{13} &= -B_{11}a^3 \\
 a_{14} &= C_{11}a^2 + C_{66}b^2 \\
 a_{15} &= ab(C_{12} + C_{66}) \\
 a_{22} &= A_{66}a^2 + A_{22}b^2 \\
 a_{23} &= -B_{22}b^3 \\
 a_{24} &= ab(C_{12} + C_{66}) \\
 a_{25} &= C_{66}a^2 + C_{22}b^2 \\
 a_{33} &= D_{11}a^4 + 2D_{12}a^2b^2 + 4D_{66}a^2b^2 + D_{22}b^4 + k_0 + k_1(a^2 + b^2) \\
 a_{34} &= -E_{11}a^3 - E_{12}ab^2 - 2E_{66}ab^2 \\
 a_{35} &= -E_{12}a^2b - 2E_{66}a^2b - E_{22}b^3 \\
 a_{44} &= F_{55} + G_{11}a^2 + G_{66}b^2 \\
 a_{45} &= ab(G_{12} + G_{66}) \\
 a_{55} &= F_{44} + G_{66}a^2 + G_{22}b^2
 \end{aligned} \tag{IV-24}$$

Et $a = mp/a$, $b = np/b$.

Pour les solutions non-triviales, pour l'équation (IV-23), le déterminant suivant doit être égal à zéro:

$$|[K] - w[N]| = 0 \tag{IV-25}$$

L'équation (IV-25) donne les charges de flambement de la plaque

IV-5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons, démontré les étapes à suivre pour la résolution d'un problème plane de la stabilité des plaques composites sur appuis élastique et soumise aux efforts de compression suivant le plan moyen de la plaque.

Les solutions analytiques présentées dans le Chapitre -V- pour le flambement et vibration libre des plaques composites symétrique et antisymétrique, sont présentées en utilisant le principe d'Hamilton qui conduit à une équation générale du mouvement et aux conditions limites et les charges critique du flambement.

Chapitre V

*Validation des résultats et étude
paramétrique*

Validation des résultats et étude paramétrique

V- 1 Introduction

Dans cette étude, nous considérons les différentes formes de fonction de gauchissement $f(z)$ qui permet d'une part de prendre en compte le cisaillement transverse, et d'autre part d'en approcher la forme de distribution dans l'épaisseur. Pour les fonctions d'ordre supérieur, on utilisera une forme cubique telle que celle employée dans la théorie des plaques de Reddy [Reddy 1984], une fonction des déformations sinusoïdales de Touratier [Touratier 1991] et une fonction exponentielle développée par Afaq et al [Afaq 2003] et la fonction logarithmique d'Aydogdu [Aydogdu 2005].

Nous essayons de comparer les résultats de ces fonctions à celle qu'on a proposée et qui est donnée par (V- 1d) :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{V-1a})$$

$$f(z) = z a^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(a)}} \quad a > 1 \quad (\text{V-1b})$$

$$f(z) = \frac{h}{p} \sin\left(\frac{p z}{h}\right) \quad (\text{V-1c})$$

$$f(z) = \frac{3}{26} z \cdot \cos\left(\frac{2p}{h} z\right) + \frac{1}{13} + 10 \cdot z \left(1 - \frac{16z^4}{5h^4} \right) \quad (\text{V-1d})$$

Où h représente l'épaisseur de la plaque.

V-2 Validation des résultats de la stabilité et la vibration libre d'une plaque simplement appuyée

Dans cette étude, l'analyse de la vibration libre et le flambement des plaques stratifiées symétrique et antisymétrique composites, sur fondation élastique, par la nouvelle théorie de déformation de cisaillement des plaques stratifiées a été proposée pour cette recherche.

Les solutions de Navier pour les vibrations libres et analyse du flambage des plaques stratifiées composites sont présentées en résolvant les équations aux valeurs propres. Des comparaisons sont faites avec des solutions disponibles dans la littérature.

Afin de vérifier l'exactitude de la présente analyse, quelques exemples numériques sont résolus. Il est supposé que l'épaisseur et les propriétés des matériaux pour tous les stratifiés sont les mêmes. Dans l'analyse, les propriétés élastiques du stratifié sont supposées être:

$$\frac{E_1}{E_2} = 40, \quad \frac{G_{12}}{E_2} = \frac{G_{13}}{E_2} = 0.6, \quad \frac{G_{23}}{E_2} = 0.5, \quad n_{12} = n_{13} = 0.25.$$

Les relations suivantes sont utilisées pour la présentation de la fréquence fondamentale sans dimension, la charge de flambement sans dimension et les paramètres de fondation linéaire sans dimension de Winkler et Pasternak, respectivement:

$$v = w \cdot \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{r}{E_2}}, \quad I = \overline{N}x \cdot \frac{a^2}{E_2 H^3}, \quad k_0 = \frac{K_0 L^4}{E_2 h^3}, \quad k_1 = \frac{K_1 L^2}{E_2 H^3}.$$

Les facteurs de charge de flambement du système sont calculés par l'équation de la stabilité (IV-22) comme un problème de valeurs propres. Les différents facteurs de charges de flambage pour les plaques stratifiées symétrique et antisymétrique à plis croisés sont présentés pour évaluer l'exactitude de la nouvelle théorie de déformation du cisaillement.

V-3 Etude comparative de la stabilité des plaques stratifiées

Le tableau V-1, représente une étude comparative du nouveau modèle en fonction du rapport E_1/E_2 , pour une plaque rectangulaire simplement appuyée constituée de quatre couches symétrique ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) ; soumis à une charge de compression sur le côté de la plaque.

Les facteurs de charges du flambement sans dimension sont indiqués par rapport aux différentes théories de déformation de cisaillement.

Tableau V-1 : Les facteurs des charges du flambement uniaxial $I = \overline{N}x \cdot \frac{a^2}{E_2 h^3}$ sans dimension

d'une plaque stratifiées symétrique ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) avec ($a/h = 10$).

Théories	E_1/E_2				
	3	10	20	30	40
[Aydogdu 2009]	5.394576165	9.948027328	15.32205293	19.71735659	23.40266418
[Akavci 2009]	5.393276941	9.941176074	15.30153994	19.68067897	23.34956133
Présent	5.393984426	9.945454242	15.31437032	19.70305117	23.38092282

D'après la comparaison nous constatons que les résultats de la théorie actuelle sont proches des résultats d'autres théories de déformation du cisaillement.

Dans le tableau V-2, les facteurs de charges du flambement sans dimension biaxial d'une plaque stratifiées symétriquement constituée de trois couches (0°/90°/0°) sur une fondation élastique sont indiquées par la méthode actuelle, en comparaison avec d'autres théories de [Setoodeh 2004] et [Aydogdu 2009] pour différents valeurs de paramètres de fondation.

Tableau V-2 : Les facteurs des charges du flambement biaxial $I = \bar{N}_x \cdot \frac{a^2}{E_2 \cdot h^3}$ sans dimension d'une plaque carrée symétrique (0°/90°/0°) avec (b/h = 10).

Théories	K0, k1		
	0,0	100, 0	100,10
[Setoodeh 2004]	9.942	11.923	21.866
[Aydogdu 2009]	9.926597058	11.95302073	21.95302073
[Akavci 2009]	9.954532049	11.98095574	21.98095573
Présent	9.923491552	11.94991522	21.94991523

Le tableau V-3 : montre les facteurs de charges de flambage uniaxial sans dimension de deux plaques carrés antisymétrique à plis croisé sur une fondation élastique pour différents degré d'orthotropie.

Tableau V-3 : Les facteurs des charges de flambage uniaxial $I = \bar{N}_x \cdot \frac{a^2}{E_2 \cdot h^3}$ sans dimension de deux plaques antisymétrique carrées.

K0, k1	Théories	(0°/90°) uni axial a/ h =10		
		E1/E2=20	E1/E2=30	E1/E2=40
0,0	[Aydogdu 2009]	8.138535360	9.911118265	11.62615051
	[Akavci 2009]	8.122317145	9.882606020	11.58282092
	Présent	8.132976161	9.901522441	11.61168396
100, 0	[Aydogdu 2009]	15.61507139	18.42485036	20.98541573
	[Akavci 2009]	15.53536499 ²	18.28622939 ²	20.78001000 ²
	Présent	15.58726832	18.37677424	20.91400855
100,10	[Aydogdu 2009]	28.11507142	30.92485034	33.48541576
	[Akavci 2009]	28.03536501	30.78622937	33.28000996
	Présent	28.08726827	30.87677427	33.41400850

Ces tableaux montrent que les résultats de la théorie actuelle sont également en bon accord avec d'autres théories de déformation de cisaillement dans la présence de la base élastique. Les chiffres présentent l'augmentation des valeurs de la rigidité de la fondation et le rapport d'orthotropie qui produit une augmentation de la charge de flambement de la plaque.

V-4 Solution pour les plaques isotrope

Les facteurs de charges de flambement sans dimension calculées, pour une plaque carrée épaisse isotrope sur appuis simples dont le rapport $E_1/E_2=1$ et le rapport entre l'épaisseur h et la longueur a est variable avec différents valeurs de coefficients élastiques de winkler et pasternak, sont présentées sur les tableaux ci-dessous. Les résultats obtenus par notre analyse sont en excellent accord avec les solutions proposées par les autres théories.

Tableaux V-4: Comparaison du paramètre critique sans dimension des charges de flambement $I = \bar{N}_x \cdot \frac{b^2}{p^2 \cdot D}$ uniaxial d'une plaque carrée isotrope ($\eta = 1; \nu = 0.3$).

K0, k1	Théories	h/a=0.001
0,0	[Lam 2000]	4.000
	[Ait atmane 2010]	3.999977460
	[Akavci 2009]	3.999977455
	[Akhavan 2009b]	3.99998
	Présent	3.999977513
0,100	[Lam 2000]	18.92
	[Ait atmane 2010]	18.91505990
	[Akavci 2009]	18.91505989
	[Akhavan 2009b]	18.9151
	Présent	18.91506013
100,0	[Lam 2000]	5.027
	[Ait atmane 2010]	5.026575686
	[Akavci 2009]	5.026575677
	[Akhavan 2009b]	5.02658
	Présent	5.026575741
100,100	[Lam 2000]	19.17
	[Ait atmane 2010]	19.17170946
	[Akavci 2009]	19.17170944
	[Akhavan 2009b]	19.1717
	Présent	19.17170969

Tableau V-5: Comparaison du paramètre critique des charges de flambement uniaxial $I = \bar{N}_x \cdot \frac{b^2}{1.D}$ d'une plaque carrée isotrope ($\eta = 1$; $\nu = 0.3$; $K_0 = k_1 = 0$).

Théories	h/a=0.001
[Akhavan 2009b]	39.4782
[Ait atmane 2010]	39.47819517
[kang2005]	39.48
[Akavci 2009]	39.47819511
Présent	39.47819568

Les résultats présentés ci-dessous sous forme de tableaux représentent une validation du présent model avec ceux d'autres auteurs.

Tableaux V-6: Comparaison du paramètre critique sans dimension des charges de flambement $I = \bar{N}_x \cdot \frac{b^2}{1.D}$ uniaxial d'une plaque isotrope ($\nu = 0.3$; $h/a = 0.001$).

K0, k1	Théories	a /b		
		0.5	1	2
0,0	[Akhavan 2009b]	61.6848	39.4782	39.4776 ²
	[Ait atmane 2010]	61.68481029	39.47819517	39.47752789
	[Akavci 2009]	61.68481021	39.47819511	39.47752763
	Présent	61.68481082	39.47819568	39.47753009
100,10	[Akhavan 2009b]	152.213	69.6103	45.1108 ²
	[Ait atmane 2010]	152.2132838	69.61031360	45.11078525
	[Akavci 2009]	152.2132837	69.61031349	45.11078501
	Présent	152.2132843	69.61031406	45.11078752
1000,100	[Akhavan 2009b]	704.589 ²	212.014 ²	85.2563 ³
	[Ait atmane 2010]	704.5887792	212.0144545	85.25620122
	[Akavci 2009]	704.5887780	212.0144543	85.25620078
	Présent	704.5887840	212.0144568	85.25620078

Tableaux V-7: Comparaison du paramètre critique sans dimension des charges de flambement $I = \bar{N}_x \cdot \frac{b^2}{1.D}$ uniaxial d'une plaque isotrope ($\nu = 0.3$; $h/a = 0.01$).

K0, k1	Théories	a /b		
		0.5	1	h/a=0.01 2
0,0	[Akhavan 2009b]	61.6641	39.4570	39.3930 ²
	[Ait atmane 2010]	61.66331248	39.45618615	39.38964338
	[Akavci 2009]	61.66330767	39.45618126	39.38962445
	Présent	61.66336679	39.45624179	39.38986581
100,10	[Akhavan 2009b]	152.193	69.5891	45.0262 ²
	[Ait atmane 2010]	152.1917860	69.58830450	45.02290075
	[Akavci 2009]	152.1917812	69.58829964	45.02288185
	Présent	152.1918402	69.58836011	45.02312323
1000,100	[Akhavan 2009b]	704.386 ²	210.161 ²	85.0952 ³
	[Ait atmane 2010]	704.3777232	211.9285561	85.08883506
	[Akavci 2009]	704.3776773	211.9285372	85.08879998
	Présent	704.3782563	211.9287732	85.08925951

Tableaux V-8: Comparaison du paramètre critique sans dimension des charges de flambement $1 = \bar{N}_x \cdot \frac{b^2}{1.D}$ uniaxial d'une plaque isotrope ($\nu = 0.3$; $h/a = 0.1$).

K0, k1	Théories	a /b		
		0.5	1	h/a=0.1 2
0,0	[Akhavan 2009b]	59.6629	37.4477	32.4414 ²
	[Ait atmane 2010]	59.58735732	37.37377106	32.23049806
	[Akavci 2009]	59.58718580	37.37376738	32.23439633
	Présent	59.59284370	37.37941613	32.25319985
100,10	[Akhavan 2009b]	150.191	67.5798	37.5182 ³
	[Ait atmane 2010]	150.1158308	67.50588936	37.83767268
	[Akavci 2009]	150.1156592	67.50588570	37.84862880
	Présent	150.1213171	67.51153451	37.88005276
1000,100	[Akhavan 2009b]	686.171 ²	204.651 ²	72.8290 ⁴
	[Ait atmane 2010]	685.5487184	204.4083760	72.36665040
	[Akavci 2009]	685.5529064	204.4105688	72.39464703
	Présent	685.6033129	204.4306190	72.44944734

Tableaux V-9: Comparaison du paramètre critique sans dimension des charges de flambement $I = \bar{N}_x \cdot \frac{b^2}{1.D}$ uniaxial d'une plaque isotrope ($\nu = 0.3$; $h/a = 0.2$).

K0, k1	Théories	a / b		
		0.5	1	h/a=0.2 2
0,0	[Akhavan 2009b]	54.3207	32.4414	19.2255 ³
	[Ait atmane 2010]	54.07807998	32.23049806	18.95741721
	[Akavci 2009]	54.08027284	32.23439635	19.01821197
	Présent	54.10032310	32.25319988	19.08159422
100,10	[Akhavan 2009b]	150.191	55.0289 ²	22.7476 ⁴
	[Ait atmane 2010]	144.6065533	54.56653648	22.53223999
	[Akavci 2009]	144.6087461	54.59453318	22.64347772
	présent	144.6287964	54.64933345	22.73891949
1000,100	[Akhavan 2009b]	643.500 ³	174.976 ³>15
	[Ait atmane 2010]	640.8714672 ³	174.2319849	52.08206911 ⁴
	[Akavci 2009]	641.2294259	174.3451360	52.19330683
	Présent	641.6815225	174.4814800	52.28874861

D'après les tableaux V-5 ; V-6 ; V-7 ; V-8 et V-9, nous constatons que les résultats de la théorie actuelle corroborent parfaitement aux résultats d'autres théories de déformation du cisaillement pour différents rapports de h/a.

Que ce soit pour les plaque carrés ou rectangulaires, l'augmentation des facteurs de fondation impliquent l'augmentation de la charge critique du flambement.

V-5 Etude paramétrique de la stabilité des plaques stratifiées

Dans les figures V-1a et V-1b, on donne les facteurs de charge de flambement sans dimension des plaques minces stratifiés symétrique et antisymétrique sur une fondation. Il peut être vu de la figure que la fondation élastique a un effet significatif sur la charge de flambage de la plaque. Les facteurs de charge critique augmentent lorsque les paramètres de la base augmentent est cela pour différentes valeurs de E_1/E_2 .

L'effet de la rigidité de la fondation et le rapport d'orthotropie sur le flambage des plaques épaisses antisymétrique est montré dans les figures V-2a et V-2b. On voit que le facteur de charge critique de la plaque augmente avec l'augmentation des paramètres de fondation.

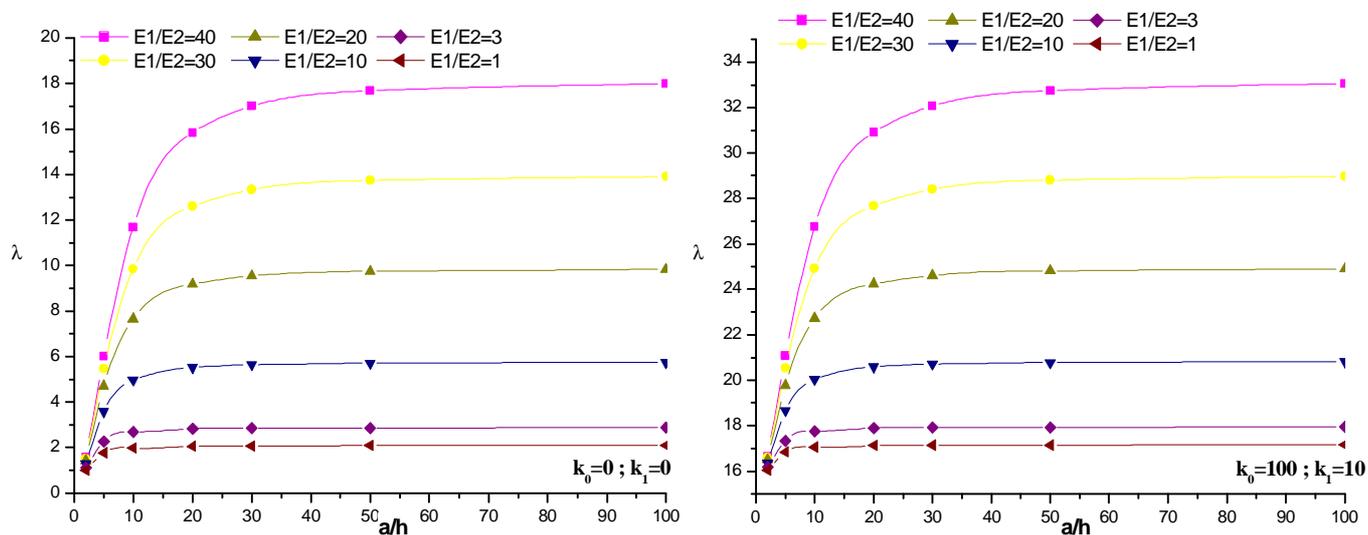


Figure V-1 a : L'effet de a/h sur le flambement biaxial $I = \bar{N}_x \cdot \frac{a^2}{E_2 \cdot h^3}$ critique sans dimension d'une plaque carrée symétrique ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$).

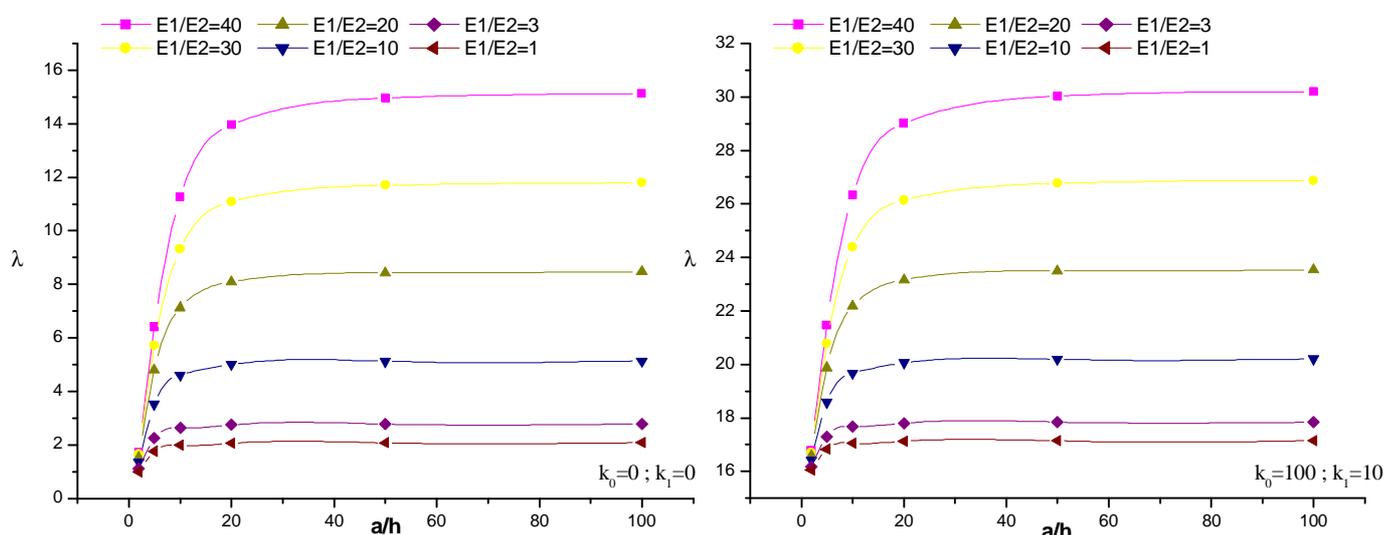


Figure V-1 b : L'effet de a/h sur le flambement biaxial $I = \bar{N}_x \cdot \frac{a^2}{E_2 \cdot h^3}$ critique sans dimension d'une plaque carrée antisymétrique ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$).

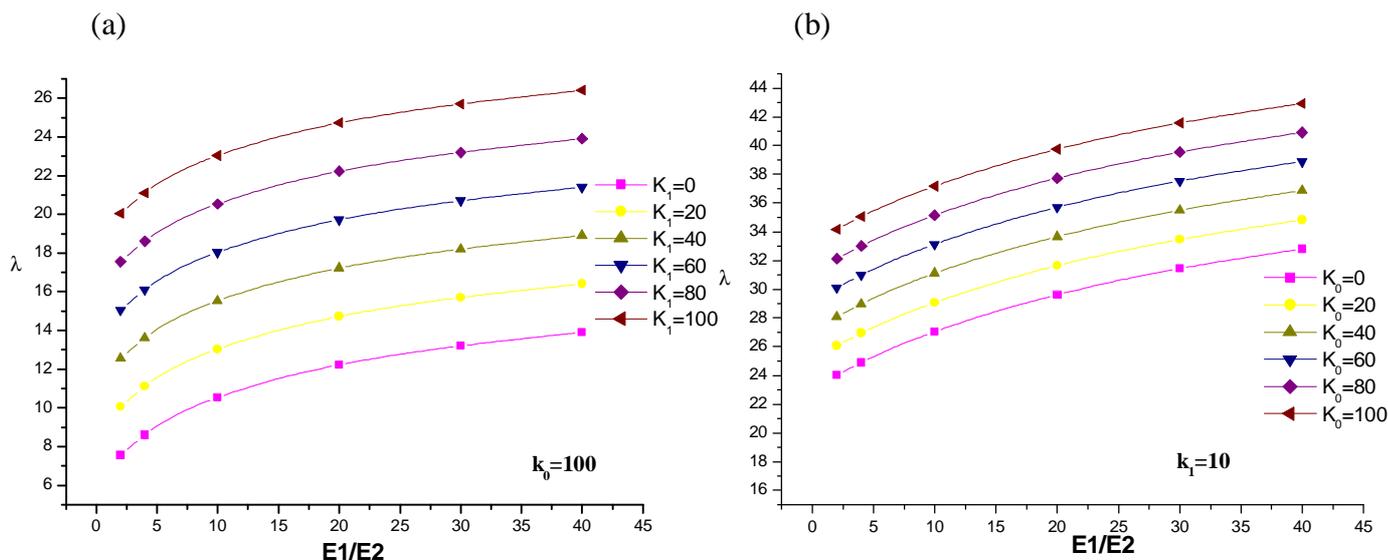


Figure V-2 : L'effet de E_1/E_2 sur le flambement uniaxial $I = \bar{N}_x \cdot \frac{a^2}{E_2 \cdot h^3}$ critique sans dimension d'une plaque carrée antisymétrique ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$) et $a/h=5$.

L'effet du rapport orthotropie sur le facteur de la charge critique du flambement des plaques épaisses est montré dans la figure V-3. La figure montre que facteur de charge critique de la plaque étudié augmentent quand le rapport orthotropie augmentent. Le facteur de charge critique varie linéairement avec le rapport d'orthotropie et cela pour différentes valeurs de a/h .

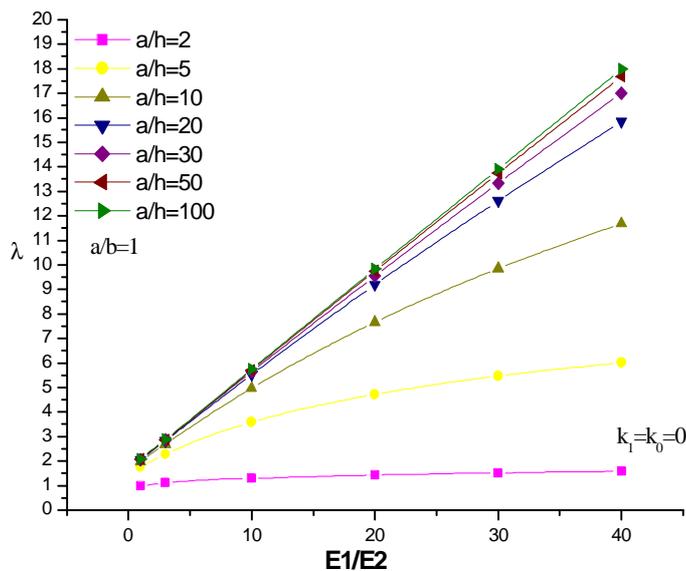


Figure V-3 : L'effet de E_1/E_2 sur le flambement biaxial $I = \bar{N}_x \cdot \frac{a^2}{E_2 \cdot h^3}$ critique sans dimension d'une plaque carrée composite symétrique ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) sans appuis élastiques ($K_0 = K_1 = 0$).

V-6 Etude comparatif de la vibration libre des plaques stratifiées

Les fréquences fondamentales du système sont calculées par l'équation de la vibration libre (III-28) comme problème de valeurs propres.

Les fréquences fondamentales sans dimension des plaques symétriques et antisymétriques à plis croisés stratifiés sont présentées ici pour estimer l'exactitude de la théorie actuelle de déformation de cisaillement.

Les tableaux V-10 et V- 11, représentent les fréquences fondamentales sans dimension des plaques stratifiés symétrique et antisymétrique simplement appuyée constituée de quatre couches en comparaison avec différent théories de déformation de cisaillement pour différentes valeurs de a / h et les rapports d'orthotropes.

Tableau V-10 : Les fréquences fondamentales $\nu = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{r}{E_2}}$ sans dimension d'une plaque carrée antisymétrique avec variables rapports d'orthotropes.

Degré d'orthotrope	(a /h=5)	E1/E2				K1=0; k0=0
	Théories	3	10	20	30	40
(0/90) ₁	[Akavci 2009]	6.218111481	6.993942909	7.832701708	8.523453748	9.112452343
	[Aydogdu 2009]	6.222390589	7.006583706	7.858420558	8.562954541	9.166098921
	[Reddy 1984]	6.2169	6.9887	7.8210	8.5050	9.0871
	présent	6.220550786	7.001943222	7.849369728	8.549178782	9.147387961
(0/90) ₂	[Akavci 2009]	6.500921091	8.193271712	9.621578240	10.52822974	11.16424794
	[Aydogdu 2009]	6.503428219	8.193907037	9.620081929	10.52611678	11.16282898
	[Reddy 1984]	6.5008	8.1954	9.6265	10.534	11.171
	présent	6.501889590	8.191232541	9.615337714	10.51881734	11.15262681
(0/90) ₃	[Akavci 2009]	6.556240474	8.405789823	9.919519985	10.85776999	11.50647980
	[Aydogdu 2009]	6.559551579	8.412161994	9.931256763	10.87579491	11.53140231
	[Reddy 1984]	6.5552	8.4041	9.9175	10.854	11.500
	présent	6.558064391	8.409884079	9.927420509	10.86986110	11.52297831

Tableau V-11 : Les fréquences fondamentales $\nu = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{r}{E_2}}$ sans dimension d'une plaque carrée symétrique (0°/90°/90°/0°) pour différentes valeurs de a / h.

Théories	E1/E2=40					
	a/h					
	2	4	10	20	50	100
[Akavci 2009]	5.519819544	9.326363053	15.11040464	17.64805925	18.67209624	18.83569313
[Aydogdu 2009]	5.558616299	9.347002739	15.12757012	17.65558198	18.67356487	18.83607166
[Reddy 1984]	5.5065	9.3235	15.1073	17.6457	18.6718	18.8356
Présent	5.523115559	9.329533098	15.12058832	17.65309205	18.67310966	18.83595547

Le tableau V-12 : montre la méthode actuelle par rapport aux autres théories de déformation du cisaillement d'ordre élevé pour les fréquences fondamentale sans dimension d'un stratifié symétrique (0°/90°/0°) et pour les plaques sur fondation élastique, avec différentes valeurs du rapport longueur – épaisseur (a / h) et les coefficients de la base élastique.

Tableau V-12 : Les fréquences fondamentales $\nu = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{r}{E_2}}$ sans dimension d'une plaque carrée symétrique pour différentes valeurs de a / h.

K0, k1	Théories	a / h			
		5	10	20	50
0,0	[Touratier 1991]	10.27389321	14.70195278	17.48164646	18.64039281
	[Akavci 2009]	10.26939382	14.70114047	17.48166363	18.64041803
	Présent	10.27591557	14.70244623	17.48166131	18.64038250
100,0	[Touratier 1991]	14.25192493	17.75255992	20.13115257	21.15184417
	[Akavci 2009]	14.24872112	17.75188631	20.13116694	21.15186636
	Présent	14.25341878	17.75298346	20.13116732	21.15183514
100,10	[Touratier 1991]	19.88458424	22.59590225	24.53517581	25.39028940
	[Akavci 2009]	19.88230723	22.59537114	24.53518673	25.39030785
	Présent	19.88580799	22.59625934	24.53519090	25.39028198

On peut voir dans les tableaux que les résultats actuels de la théorie présente ramènent à des résultats très proches de celles d'autres théories de déformations du cisaillement, même avec la présence de la base élastique.

V-7 Vibration libre des plaques isotrope

Les fréquences propres sans dimension calculées, pour une plaque épaisse isotrope sur appuis simples dont le rapport $E_1/ E_2=1$ et le rapport entre l'épaisseur h et la longueur a est variable avec différents valeurs de coefficients élastiques de winkler et pasternak, sont présentées sur les tableaux ci-dessous. Les résultats obtenus par notre analyse sont en excellent accord avec les solutions proposées par les autres théories.

Tableau V-13 : Comparaison des fréquences fondamentales $\nu = w.a^2 .\sqrt{\frac{r.h}{D}}$ sans dimension d'une plaque carrée isotope ($\eta =1, \nu =0.3$).

K0, k1	Théories	$\delta = h/a$		
		0.001	0.1	0.2
0,0	[Akhavan 2009a]	19.7391	19.0840	17.5055
	[Ait atmane 2010]	19.73913696	19.06570149	17.45307936
	[Akavci 2009]	19.73913694	19.06569891	17.45398046
	Présent	19.73913711	19.06709719	17.45861185
100,10	[Akhavan 2009a]	26.2112	25.6368	24.3074
	[Ait atmane 2010]	26.21116417	25.62347792	24.27271473
	[Akavci 2009]	26.21116414	25.62347506	24.27326793
	Présent	26.21116427	25.62449035	24.27630037
1000,100	[Akhavan 2009a]	57.9961	57.3969	56.0359
	[Ait atmane 2010]	57.99611637	57.39218197	45.52600276
	[Akavci 2009]	57.99611639	57.39217782	45.52600270
	Présent	57.99611645	57.39253585	45.52600273

Tableau V-14 : Comparaison des fréquences fondamentales $\nu = w.a^2 .\sqrt{\frac{r.h}{D}}$ sans dimension d'une plaque carrée isotope ($\eta =1, \delta = 0.001, \nu =0.3$).

K0,k1	Théories	$h/a=0.001$
0,0	[Akhavan 2009a]	19.7391
	[Ait atmane 2010]	19.73913696
	[Akavci 2009]	19.73913694
	Présent	19.73913711
0,1000	[Akhavan 2009a]	141.876
	[Ait atmane 2010]	141.8760370
	[Akavci 2009]	141.8760369
	Présent	141.8760370
1000,0	[Akhavan 2009a]	37.2778
	[Ait atmane 2010]	37.27776659
	[Akavci 2009]	37.27776659
	Présent	37.27776667
1000,1000	[Akhavan 2009a]	145.358
	[Ait atmane 2010]	145.3575186
	[Akavci 2009]	145.3575186
	Présent	145.3575186

D'après la comparaison que les résultats présentées sur les tableaux V-13 et V-14 de la nouvelle théorie sont également en bon accord avec les autres théories en présence de la base élastique.

Tableau V-15: Comparaison des fréquences fondamentales $\omega = \mathbf{w}.a^2 \cdot \sqrt{\frac{r.h}{D}}$ sans dimension

d'une plaque carrée isotope ($\eta = 1, \delta = 0.12, \nu = 0.3$).

Ks=10	K_w	Théories	ω
10 ²		[Ait atmane 2010]	25.39100302
		[Akavci 2009]	25.39104312
		Présent	25.39243755
250		[Ait atmane 2010]	28.13723352
		[Akavci 2009]	28.13726783
		Présent	28.13850392
500		[Ait atmane 2010]	32.19777303
		[Akavci 2009]	32.19780043
		Présent	32.19884852
750		[Ait atmane 2010]	35.80053432
		[Akavci 2009]	35.80055675
		Présent	35.80147085
10 ³		[Ait atmane 2010]	39.07235448
		[Akavci 2009]	39.07237308
		Présent	39.07318491
2.10 ³		[Ait atmane 2010]	50.06416101
		[Akavci 2009]	50.06417005
		Présent	50.06472624
4.10 ³		[Ait atmane 2010]	66.82380994
		[Akavci 2009]	66.82381114
		Présent	66.82412227
5.10 ³		[Ait atmane 2010]	73.78785011
		[Akavci 2009]	73.78785097
		Présent	73.78808807
10 ⁴		[Ait atmane 2010]	75.87667121
		[Akavci 2009]	75.87667120
		Présent	75.87667130

Tableau V-16: Comparaison des fréquences fondamentales $\nu = w.a^2 \cdot \sqrt{\frac{r.h}{D}}$ sans dimension

d'une plaque rectangulaire isotope ($\nu = 0.3$).

$\eta = a/b$	Théories	$\delta = h/a$	
		0.1	0.2
2/3	[Akhavan 2009a]	13.9085	13.0250
	[Ait atmane 2010]	13.89864539	12.99435593
	[Akavci 2009]	13.89862812	12.99468578
	[Hosseini-hashemi 2005]	13.91	13.025
	présent	13.89937288	12.99725898
3/2	[Akhavan 2009a]	30.4080	26.7944
	[Ait atmane 2010]	30.36318943	26.68457145
	[Akavci 2009]	30.36334455	26.68807532
	[Hosseini-hashemi 2005]	30.408	26.7944
	présent	30.36687616	26.69890752

On remarque que les résultats de la théorie actuelle sont très proches des résultats d'autres théories de déformation de cisaillement.

V-8 Etude paramétrique de la vibration libre des plaques stratifiées

Dans les figures V-5a et V-5b, les variations des fréquences fondamentales sans dimension d'une plaque stratifiée symétriquement et antisymétriquement, sur la base élastique sont donnés avec variables rapport d'orthotropie.

Les figures montrent que l'augmentation du degré d'orthotropie produit une augmentation des valeurs de fréquence fondamentale.

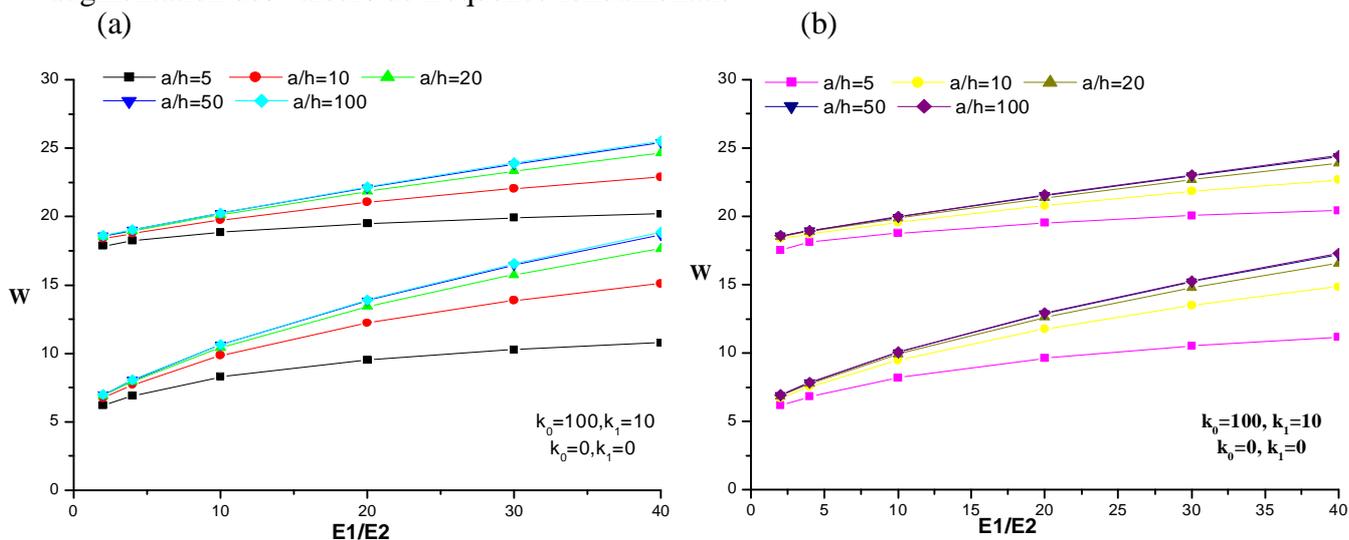


Figure V-5 : L'effet de E_1/E_2 sur les fréquences fondamentales sans dimension d'une plaque stratifiée sur appuis élastique (a) $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$ et (b) $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)$.

On présente dans les figures V-6 a et V-6 b, l'effet de la rigidité de fondation sur la vibration des plaques épaisses stratifiées.

Les figures montrent que les fréquences fondamentales sans dimension du stratifiés augmentent lorsque les paramètres de la fondation augmentent (Winkler k_0 et Pasternak k_1).

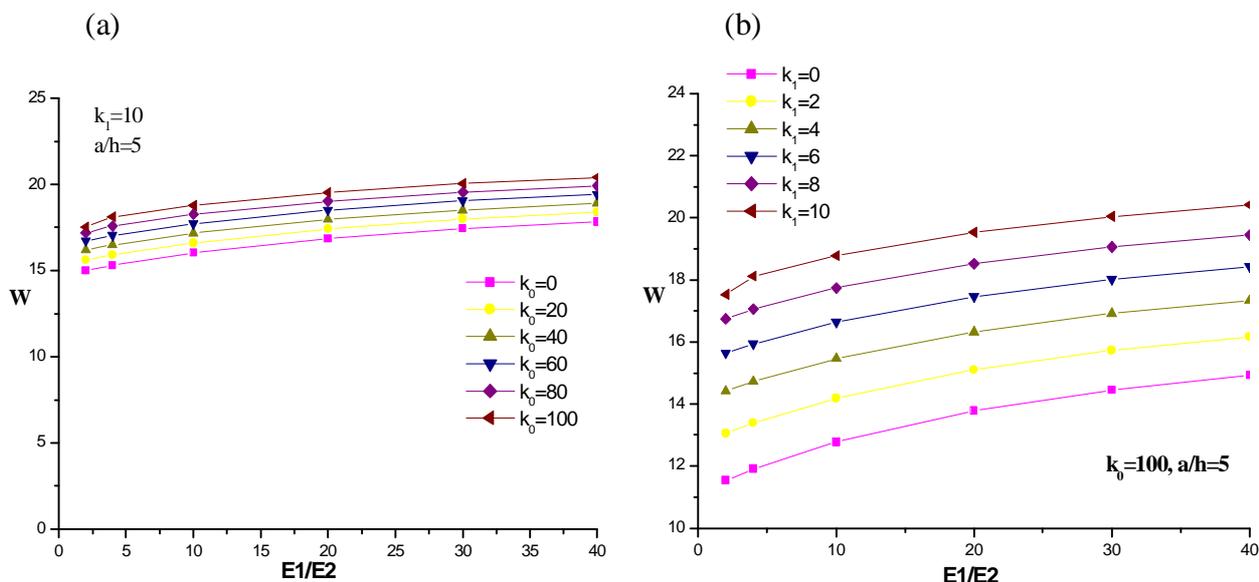


Figure V-6 : L'effet de E_1/E_2 sur les fréquences fondamentales sans dimension d'une plaque stratifiée ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$) sur appuis élastique (a) $k_1=10$ et (b) $k_0=100$.

V-9 Conclusions

Les résultats pour la vibration libre et flambement des plaques orthotrope stratifiées, sont développés en supposant que les déplacements de cisaillement transversal sont variables dans l'épaisseur de la plaque. Pour les plaques rectangulaires stratifiées symétriques et antisymétriques à plis croisés, les équations d'équilibre et les conditions associées de frontière sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton. La méthode de Navier est utilisée pour les solutions analytiques avec conditions de frontière sur appuis simples. Alors les facteurs de charge du flambement et les fréquences fondamentales sont trouvés en résolvant le problème des valeurs propres, pour vérifier l'exactitude de la théorie présente.

On peut constater d'après les figures que le facteur de charge critique de la plaque (carrés ou rectangulaires), augmente avec l'augmentation des paramètres de fondation.

Ainsi que la charge critique varie linéairement avec le rapport d'orthotropie et cela pour différentes valeurs de a/h .

Les fréquences fondamentales sans dimension du stratifiés augmentent lorsque les paramètres de la fondation augmentent (Winkler k_0 et Pasternak k_1).

D'après les comparaisons nous constatons que les résultats de la théorie actuelle ramènent à des résultats très proches de celles d'autres théories de déformations du cisaillement, même avec la présence de la base élastique.

Il est conclu, à travers les exemples numériques, que la théorie présente de déformation de cisaillement peut fournir des résultats précis pour les fréquences fondamentales et des charges de flambage pour les plaques symétrique et antisymétrique stratifiés composites sur une fondation élastique.

Conclusion générale

Conclusion générale

Dans le cadre de ce travail, nous avons développé une méthode analytique directe qui détermine les valeurs des fréquences naturelles et des charges de flambement des plaques en matériaux composites sous charge de compression au plan moyen. Comparée aux issues de la littérature, notre méthode analytique a montré sa précision pour la détermination des caractéristiques vibratoires et de stabilité du flambement.

Les solutions exactes pour les problèmes des plaques qui dépendent de la fondation de gauchissement sont très limitées ; ceci nous a conduits à évaluer le nouveau modèle par rapport aux modèles analytiques existants basés sur des approximations du champ de déplacements.

Des solutions de forme close pour l'analyse de la stabilité et de la vibration libre des plaques composites sont développées. Pour les plaques composites, les équations d'équilibre et les conditions de frontières associées sont obtenues en utilisant le principe de Hamilton. La méthode de Navier est utilisée pour trouver les solutions analytiques de la plaque avec des conditions aux frontières sous formes d'appuis simples sur tous les cotés.

Successivement ont été testés, les modèles à couche équivalente (Love_Kirchoff, Reissner_Mindlin, Reddy, Aydogdu, sinus de Touratier et le présent modèle). La comparaison de ces modèles avec des solutions exactes (Akhvan, Akavci,...) a permis de dégager plusieurs points :

- Le modèle étudié est plus riche que les autres modèles et permet de traiter à la fois les structures minces et épaisses sans introduire d'inconnues supplémentaires, ni de coefficients correcteurs. De plus le nouveau modèle prédit les fréquences propres et les charges de stabilité avec une bonne précision.

- Les effets des paramètres élastiques de la base sur la performance des paramètres de fréquences naturelles et aussi sur la charge de flambement des plaques composites sont étudiés ; ils ont une grande influence sur les sollicitations étudiées.

- L'effet du rapport d'orthotropie sur le facteur de la charge critique du flambement et les vibrations naturelles des plaques épaisses est étudié. On conclut que le facteur de charge critique de la plaque étudiée augmente quand le rapport orthotropie augmente. On remarque

que le facteur de charge critique varie linéairement avec le rapport d'orthotropie et cela pour différentes valeurs de a/h .

En perspective à cette partie analytique, des points peuvent être développés comme le gauchissement pour les cas suivants :

- validation de cette fonction pour le cas des poutres ;
- Il s'avère indispensable de recourir à la méthode des éléments finis qui permet de résoudre des problèmes plus compliqués. Cette méthode permettra donc de traiter des problèmes plus complexes comparativement à la méthode analytique.
L'objectif à l'avenir est de développer un outil éléments finis opératoire et efficace pour l'analyse locale des multicouches ;
- La prise en compte de l'effet de la température dans l'étude du flambement et de la vibration ;
- Etude des plaques sous différents types de chargements statiques (uniforme, sinusoidale...);
- Etude de nouveaux matériaux composites fonctionnellement gradués ;

Finalement, on peut dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre université dans le domaine des matériaux composites et précisément leurs comportements vis-à-vis la vibration et le flambement.

Référence bibliographiques

Références bibliographiques

- [Afaq 2003] K.S. Afaq, M. Karama & S. Mistou. Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches. In Comptes-rendus des 13 emes Journées Nationales sur les Composites, pages 289-292. Strasbourg, March 2003.
- [Ait Atmane 2010] H.Ait atmane & I .Mechab. Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory, 6 :113-121,2010.
- [Akavci 2009] S.S.Akavci. Buckling and Free Vibration Analysis of Symmetric and Antisymmetric Laminated Composite Plates on an Elastic Foundation, Journal of Reinforced Plastics and Composites ; pages 1907-1919, 2009.
- [Akhavan 2009a] H. Akhavan, Sh.Hosseini Hashemi, H. Rokni Damavandi Taher, A. Alibeigloo, Sh. Vahabi. Exact solutions for rectangular Mindlin plates under in-plane loads resting on Pasternak elastic foundation. Part II: Frequency analysis. Computational Materials Science, 44: 951-961,2009.
- [Akhavan 2009b] H. Akhavan, Sh.Hosseini Hashemi, H.Rokni Damavandi Taher, A. Alibeigloo, Sh .Vahabi. Exact solutions for rectangular Mindlin plates under in-plane loads resting on Pasternak elastic foundation. Part I: Buckling analysis.Computational Materials Science 44: 968-978,2009.
- [Allix1989] O. Allix. Modélisation du comportement des composites stratifié : application à analyse du délaminage. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1989.
- [Ambartsumyan 1969] S.A. Ambartsumyan. Theory of anisotropic plate. Technomic Publishing Co, 1969.
- [Aydogdu 2009] M. Aydogdu. A new shear deformation theory for laminated composite plates.Composite Structures 89 ,94–101, 2009.
- [Aydogdu 2005] M. Aydogdu,Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, International Journal of Mechanical Sciences 47 ,1740–1755, 2005.
- [Berthelot 2005] Jean-Marie.Berthelot. « Matériaux composites,comportement mécanique et analyse des structures ».4^{ème} Edition, Lavoisier,2005.
- [Carrera 2000] E. Carrera. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. Composite structures, vol. 50, pages 183,198, 2000.
- [Decolon 2000] C.Decolon.Structures composites ,Calcul des plaques et des poutres multicouches, 2000.
- [Di Sciuva 1984] M. Di Sciuva. A refined transverse shear deformation theory for multilayered anisotropic plates. Atti. Accad. Sci. Torino, vol. 118, pages 279-295, 1984.
- [Di Sciuva 1987] M. Di Sciuva. An improved shear-deformation theory for moderately thick mul-tilayered anisotropic shells and plates. Journal of Applied Mechanics, vol. 54, pages 589-596, 1987.
- [El-Zafrany 1995] A.El-Zafrany, S.Fadhil, and K.Al-Hosani. A New Fundamental Solution for Boundary Element Analysis of Thick Plates on Winkler Foundation, Int. J. Numer. Meth. Eng., 38: 887–903,1995.
- [Fredrichs 1961] K.O. Fredrichs & R.F. Dressler. A boundary layer theory for elastic plates.Comm. On Pure Applied Mathematics, vol. 14, pages 1-33, 1961.
- [Gay 1997] Daniel Gay. « Matériaux composites». 4^{ème} Edition ,1997.

- [Hosseini 2005] S.Hosseini-hashemi and M.Arsanjani. *Int.J.Solids Struct.* 42 : 819–853,2005.
- [Hui-Shen 2003] S. Hui-Shen , J. J. Zheng, and X.L. Huang. Dynamic Response of Shear Deformable Laminated Plates under Thermomechanical Loading and Resting on Elastic Foundations, *Composite Structures*, 60: 57–66,2003.
- [Icardi 1995] U. Icardi & A.M. Bertetto. An evaluation of the influence of geometry and of material properties at free edges and at corners of composite laminates. *Comput. Struct.*, vol. 57, no. 4, pages 555-571, 1995.
- [Icardi 2001a] U. Icardi. Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations. *Composites : Part B*, vol. 32, pages 343-354, 2001.
- [Icardi 2001b] U. Icardi. A three-dimensional zig-zag theory for analysis of thick laminated beams. *Composite Structures*, vol. 52, pages 123-135, 2001.
- [Idlbi 1997] A. Idlbi, M. Karama & M. Touratier. Comparison of various laminated plate theories. *Composite Structures*, vol. 37, pages 173-784, 1997.
- [Johnson 1971] M.W. Johnson & O.E. Widera. An asymptotic theory for the vibration of non-homogeneous plates. *Acta. Mech.*, vol. 12, no. 1, pages 131-142, 1971.
- [Jones 1975] R.M Jones. *Mechanics of Composite Materials*, New York: McGraw-Hill,1975.
- [Kant 2000] T. Kant & K. Swaminathan. Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites - a selective review and survey of current developments. *Composite structures*, vol. 49, pages 65,75, 2000.
- [Kang 2005] J.H.Kang and A.W.Leissa. *Int.J.Solids Struct.*42: 4220–4238, 2005.
- [Kapania 1989] R. K. Kapania & S. Raciti. Recent advances in analysis of laminated beams and plates, Part I : Shear effects and buckling. *AIAA Journal*, vol. 27, no. 7, pages 923,934, 1989.
- [Karama 1998] M. Karama, B. Abou Harb, S. Mistou & S. Caperaa. Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model. *Composite Part B*, vol. 29, no. 3, pages 223-234, 1998.
- [Khare 2004] R.K. Khare, T. Kant & A.K. Garg. Free vibration of composite and sandwich laminates with a higher-order facet shell element. *Composite Structures*, vol. 65, pages 405-418, 2004.
- [Kirchhoff 1850] G. Kirchhoff. Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheinbe. *Journal fur reine und angewandte Mathematik*, vol. 40, pages 51, 88, 1850.
- [Ladeveze 1988] P. Ladeveze. Les modèles classiques et leurs extension pour le calcul des plaques, volume 2 of *Calcul de Structures et Intelligence Artificielle*. Pluralis, 1988.
- [Lam 2000] K.Y.Lam & C.M.Wang.X.Q.He, *Eng.Struct.*22: 364-378,2000
- [Lecuyer 1991] F. Lecuyer. Etude des effets de bord dans les structures minces multicouches. PhD thesis, Universités Pierre et Marie Curie, 1991.
- [Levy 1877] M. Levy. Mémoire sur la Théorie des Plaques Elastiques Planes, *J. Math. pures et Appl.*, 3: 219–306,1877.
- [Matsunaga 2000] H.Matsunaga. Vibration and stability of Cross-ply Laminated Composite Plates According to a Global Higher-order Plate Theory, *Composite Structures*, 48: 231–244,2000.
- [Mechab 2009] I.Mechab. Etude des structures composites en utilisant les théories d'ordre élevé sous chargement thermomécanique. Thèse de doctorat , Université de Sidi Bel abbès ,2009.
- [Menail 2009] Y.Menail. Analyse de l'effet du vieillissement à l'air, dans l'eau douce et dans l'eau salée, sur la tenue en fatigue de composites à matrice organique, renforcée par des fibres de verre, thèse de doctorat Université Badji Mokhtar-Annaba, 2009.

- [Mindlin 1951] R.D. Mindlin. Influence of rotary inertia and shear on exural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pages 31-38, 1951.
- [Murthy 1981] M.V.V. Murthy. An improved transverse shear deformation theory for lami- nated anisotropic plate. *Rapport technique, NASA*, 1981.
- [Nelson 1974] R. B.Nelson. and D. R. Lorch,. A Refined Theory of Laminated Orthotropic Plates, *J. Appl. Mech.*, 41: 177–183 ,1974.
- [Nguyen 2004] Viet.Tung. Nguyen. Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques. *Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées* ,2004.
- [Noor 1989] K. Noor & W. S. Burton. Assesment of shear deformation theories for multilayered composite plates. *Appl Mech Rev*, vol. 42, no. 1, pages 1-12, 1989.
- [Omurtag 1997] M.H. Omurtag, A .Ozutok, AY. Akoz. Free vibration analysis of Kirchhoff plates resting on elastic foundation by mixed finite element formulation based on Gateaux differential. *Int J Numer Methods Eng*; 40(2):295–317, 1997.
- [Omurtag 1998] M.H. Omurtag, and F. Kadioglu. Free Vibration Analysis of Orthotropic Plates Resting on Pasternak Foundation by Mixed Finite Element Formulation, *Computers and Structures*, 67: 253–265,1998.
- [Ossadzow 2001] C. Ossadzow & M. Touratier. An improved shear-membrane theory for multi-layered shells. *Composite Structures*, vol. 52, pages 85-95, 2001.
- [Pagano 1969] N.J. Pagano. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *J. Comp. Mat.*, vol. 3, pages 398-411, 1969.
- [Phan 1985] N. D.Phan, and J. N. Reddy. Analysis of Laminated Composite Plates using a Higher-order Shear Deformation Theory, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 21: 2201–2219,1985.
- [Polit 1997] O. Polit & M. Touratier. A new laminated triangular finite element assuring interface continuity for displacements and stresses. *Composite Structures*, vol. 38, pages 37-44, 1997.
- [Raju 1981] I.S. Raju & J.H. Crews. Interlaminar stress singularities at a straight free edge in composite laminates. *Comput. Struct.*, vol. 14, page 21, 1981.
- [Reddy 1984] J.N. Reddy. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Jornal of Applied Mechanics*, vol. 51, pages 745-752, 1984.
- [Reissner 1961] E. Reissner & Y. Stavsky. Bending and stretching of certain types of hetero-geneous aeotropic elastic plate. *J. Appl. Mech.*, vol. 28, pages 402-408, 1961.
- [Reissner 1945] E. Reissner. The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, *J. Appl. Mech.*, 12: 69–77, 1945.
- [Setoodeh 2004] A. R. Setoodeh. and G.Karami, Static. Free Vibration and Buckling Analysis of Anisotropic Thick Laminated Composite Plates on Distributed and Point Elastic Supports using a 3-D Layer-wise FEM, *Engineering Structures*, 26: 211–220,2004.
- [Shankara 1996] C.A. Shankara & N.G.R. Iyengar. A Co element for the free vibration analysis of laminated composite plates. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 191, no. 5, pages 721-738, 1996.
- [Srinivas 1973] S. Srinivas. A refined analysis of composite laminates. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 30, no. 4, pages 495,507, 1973.
- [Touratier 1991] M. Touratier. An efficient standard plate theory. *Engng Sci*, vol. 29, no. 8, pages 901-916, 1991.
- [Utku 2000] M. Utku ,E.Citipitioglu, and Inceleme, I. Circular Plates on Elastic Foundations Modelled with Annular Plates, *Computers and Structures*, 78: 365–374,2000.

- [Whitney 1973]** J.M. Whitney. Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads . *J.Applied Mechanics, Vol.40*, pages 302-304, 1973.
- [Wu 1993]** C.P. Wu & H.C. Kuo. An interlaminar stress mixed finite element method for the analysis of thick laminated composite plates. *Composites and Structures*, vol. 24, no.1, pages 29-42, 1993.
- [Yang 1966]** P.C. Yang, C.H. Norris & Y. Stavsky. Elastic wave propagation in heteroge-neous plate. *Int. J. Sol. Struct.*, vol. 2, pages 665-684, 1966.