

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Hassiba Benbouali de Chlef
Faculté des Sciences et Sciences de l'Ingénieur
Département de Génie Civil

Mémoire de Magister

Présenté par

Amina Sadouki

Ingénieur d'Etat en Génie Civil
Université de Chlef

Sous le Thème

Etude des effets du caractère stochastique des couches de sol sur la réponse sismique d'un site

Soutenu publiquement le :.../.../.....

Devant le jury composé de :

Dr. Karim EZZIANE	Maître de Conférences A, UHBB	Président
Dr. Zamila HARICHANE	Maître de Conférences A, UHBB	Directeur de thèse
Dr. Mohamed HADID	Maître de Conférences A, ENSTP	Examineur
Dr. Moussa LEBLOUBA	Maître de Conférences B, ENSTP	Examineur
Dr. Miloud TAHAR ABES	Maître de Conférences A, UHBB	Examineur

Remerciements

Je remercie en premier et en dernier lieu, ALLAH tout puissant, pour son aubaine de m'avoir gardée en bonne santé, en m'accordant le courage et la bonne volonté, et d'avoir guidé mes pas vers le bon chemin pour mener à terme ce modeste travail.

Mes sincères et chaleureux remerciements s'adressent à ma directrice de thèse, Madame Zamila HARICHANE, Maître de Conférences à l'Université Hassiba Benbouali de Chlef à qui je tiens à exprimer toute ma gratitude d'avoir assuré l'encadrement scientifique de ce travail. Je la remercie pour sa patience et sa confiance et tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance pour ses encouragements et ses précieux conseils.

Il m'est particulièrement agréable d'adresser mes vifs remerciements à Dr. Karim EZZIANE, Maître de Conférences à l'Université Hassiba Benbouali de Chlef, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury d'examen.

Ma profonde reconnaissance est aussi adressée à Messieurs Dr Mohamed HADID et Dr Moussa LEBLOUBA, Maîtres de Conférences à l'école Nationale Supérieure des Travaux Publics (ENSTP) de Kouba, d'avoir accepté d'examiner mon travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de mes sincères remerciements.

J'adresse également mes remerciements à Dr Miloud TAHAR ABES, Maître de Conférences à l'Université Hassiba Benbouali de Chlef, d'avoir accepté d'être membre du Jury.

J'adresse également mes vifs remerciements à l'ensemble des enseignants du Département de Génie Civil de l'Université Hassiba Benbouali de Chlef.

Je remercie du fond du cœur mes parents ainsi que tous les miens pour leurs encouragements, affection et soutien permanent.

Table des Matières

Introduction Générale

1. Introduction	2
2. Objectifs visés.....	3
3. Organisation du mémoire.....	4

Chapitre 1

Etude bibliographique sur les modèles de prise en comptes de l'aspect stochastique dans les sols

1.1. Introduction.....	7
1.2. Dynamique des sols stochastique.....	8
1.2.1. Chargement aléatoire.....	8
1.2.2. Propriétés de sol aléatoires	8
1.3. Vibrations dans les milieux géologiques aléatoires.....	9
1.4. Techniques stochastiques utilisées.....	9
1.4.1. Solutions analytiques.....	9
1.4. 2. Techniques approximatives.....	10
1.4. 3. Simulations de Monte-Carlo.....	10
1.4. 4. Méthodes numériques.....	10
1.4.4.1. Méthode des Éléments Finis Stochastiques.....	11
1.4.4.2 Méthodes non-paramétriques.....	12
1.5. Procédures Stochastique	12
1.5.1. Modèles de champs aléatoires pour les propriétés de sol.....	13
1.5.1.1. Représentation générale d'un champ aléatoire.....	14
1.5.1.2. Propriétés statistiques des champs aléatoires.....	15

1.5.1.3. Fonction de corrélation d'un champ aléatoire.....	17
1.5.1.4. Longueur de corrélation.....	19
1.5.1.5. Informations a priori pour différents types de sols.....	20
1.5.1.6. Distributions particulières.....	20
1.5.1.7. Types de distribution.....	22
1.6. Modèles analytiques et travaux antérieurs	23
1.6.1. Modèles unidimensionnel.....	23
1.4.2. Modèles plan.....	29
1.7. Approches numériques.....	30
1.8. Conclusion.....	30

Chapitre 2

Champ de Déplacements dans un Milieu Viscoélastique Aléatoire Soumis à des Ondes SH Inclinaées

2.1. Introduction.....	32
2.2. Équations de base.....	33
2.2.1. Equation de mouvement et équation d'onde.....	33
2.2.2. Calcul de la contrainte moyenne.....	44
2.2.3. Equation d'onde moyenne.....	47
2.2.4. Calcul des champs de déplacements et de contraintes.....	51
2.2.4.1. Solution de l'équation d'onde par la transformée de Laplace.....	51
2.2.4.2. Obtention du déplacement moyen par la transformée de Laplace inverse.....	55
2.2.4.3. Expression de la contrainte moyenne.....	58
2.3. Conclusion.....	61

Chapitre 3

Investigation Stochastique de la Fonction d'Amplification

3.1. Introduction.....	63
------------------------	----

3.2. Calcul de la fonction d'amplification.....	63
3.2.1 Cas d'un monocouche.....	63
3.2.2 Cas d'un multicouche.....	64
3.3. Validation numérique.....	68
3.4. Effets des variations stochastiques de la masse volumique et du module de cisaillement.....	69
3.4.1. Cas d'un monocouche.....	69
3.4.2. Cas d'un multicouche.....	71
3.4.2.1 Description du site choisi.....	71
3.4.2.2. Application	74
3.5. Influence de la longueur de corrélation verticale.....	75
3.6. Conclusion.....	78

Chapitre 4

Evaluation de la réponse sismique d'un site à paramètres de sol aléatoires

4.1. Introduction.....	80
4.2. Définition du mouvement incident.....	80
4.2.1. Lois d'atténuation.....	80
4.2.2. Application des lois d'atténuation au séisme de Boumerdes 2003.....	81
4.3. Procédure de calcul de la réponse du profil de sol du site étudié.....	82
4.4. Présentation du programme <i>STOCH10</i> élaboré.....	84
4.5. Application.....	85
4.5.1. Cas d'un monocouche.....	85
4.5.1. Cas d'un multicouche.....	89
4.6. Conclusion.....	96

Conclusions et Recommandations

1. Conclusions générales.....	99
2. Recommandations futures.....	100

References bibliographiques	103
------------------------------------	-----

Liste des Figures

N° de la Figure	Titre de la figure	Page
Fig.1.1	Variabilité des propriétés d'un monocouche : modèle de champs aléatoire.	15
Fig.1.2	Représentation des densités de Gauss, log-normale, uniforme et de Weibull de mêmes moyennes et écarts-types.	22
Fig.1.3	Représentation des fonctions de répartition de Gauss, log-normale, uniforme et de Weibull de mêmes moyennes et écarts-types.	22
Fig.1.4	la racine carrée de l'intensité des ondes pour un monocouche.	24
Fig.1.5	Effet de la stochasticité des paramètres de corrélations sur le déplacement moyen pour un monocouche.	25
Fig.1.6	Réponse d'un monocouche aux excitations gaussiennes.	26
Fig.1.7	Réponse d'un monocouche au excitation sismique.	27
Fig.1.8	Distribution de l'amplitude moyenne dans un semi-espace pour $\tilde{\beta} = 5, \kappa = 0.05, \alpha = \tilde{E} = 1.5, \tilde{h} = 10, \sigma_{22} = \sigma_{11} = \sigma, \sigma_{12} = 0$	28
Fig.1.9	Distribution d'amplitude moyenne dans le semi-espace pour $\tilde{\beta} = 5, \kappa = 0.09, \alpha = \tilde{E} = 1.5, \tilde{h} = 10, \sigma_{22} = \sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma$	28
Fig.1.10	Effet de la longueur de corrélation de l'amplitude moyenne.	29
Fig.2.1	Géométrie d'un problème unidimensionnel (cas d'un monocouche).	34
Fig.3.1	Profil de sol multicouche soumis à une onde SH.	65

N° de la Figure	Titre de la figure	Page
Fig.3.2	Fonction de transfert d'un monocouche pour une variation de la masse volumique.	69
Fig.3.3	Effets des paramètres stochastiques d'un monocouche sur la fonction d'amplification.	70
Fig.3.4	Vue d'ensemble du site étudié.	71
Fig.3.5	Principe de l'essai Down-hole.	72
Fig.3.6	Profil de la vitesses de l'onde de cisaillement du site (a), profil de sol (b).	74
Fig.3.7	Effets des paramètres stochastiques d'un multicouche sur la fonction d'amplification.	76
Fig.3.8	Effet de la longueur de corrélation verticale d'un monocouche sur la fonction d'amplification.	77
Fig.3.9	Effet de la longueur de corrélation verticale d'un multicouche sur la fonction d'amplification.	77
Fig.4.1	Comparaison des accélérations maximales enregistrées lors du séisme de Boumerdès avec les accélérations maximales prévues par des lois d'atténuation mondiales	82
Fig.4.2	Profil de sol soumis à la propagation verticale d'une onde de cisaillement de type SH.	83
Fig.4.3	Accélérations et spectre de Fourier enregistrés à la station rocheuse de keddara.	86

N° de la Figure	Titre de la figure	Page
Fig.4.4	Accélérations et spectres de Fourier calculés à la surface de la couche de sol.cas déterministe	87
Fig.4.5	Accélérations et spectres de Fourier calculés à la surface de la couche de sol. cas stochastique; $\sigma^2_{11} = \sigma^2_{22} = \sigma^2_{12} = 0.4, \beta = 5.$	88
Fig.4.6	Accélérations et spectre de Fourier enregistrés à la station de Dar El Beida.	90
Fig.4.7	Spectres de Fourier et accélérations calculés à la surface de la couche de sol de Bab-Ezzouar (a) cas déterministe	91
Fig.4.8	Spectres de Fourier et accélérations calculés à la surface de la couche de sol de Bab-Ezzouar (b) cas stochastique; $\sigma^2_{11} = \sigma^2_{22} = \sigma^2_{12} = 0.4, \beta = 5.$	92
Fig.4.9	Spectres de Fourier et accélérations calculés à la surface de la couche de sol de Bab-Ezzouar (c) cas stochastique; $\sigma^2_{11} = \sigma^2_{22} = \sigma^2_{12} = 0.6, \beta = 5.$	93
Fig.4.10	Spectres de Fourier et accélérations calculés à la surface de la couche de sol de Bab-Ezzouar (d) cas stochastique; $\sigma^2_{11} = \sigma^2_{22} = \sigma^2_{12} = 0.8, \beta = 5.$	94
Fig.4.11	Comparaison entre accélérations calculés a Bab Ezzouar pour le cas déterministe et stochastique et ceux enregistrés au site de Dar El Beida.	95
Fig.4.12	Comparaison Spectre de Fourier calculés a Bab Ezzouar pour le cas déterministe et stochastique et ceux enregistrés au site de Dar El Beida.	95

Liste des Tableaux

N° du Tableau	Titre du Tableau	Page
Tableau 1.1	Exemples de types admissibles de fonctions d'auto-covariance normalisée unidimensionnelle.	19
Tableau 3.1	Caractéristiques d'un monocouche utilisé par chu et all	68
Tableau 3.2	Lithologie du sondage dans le quel l'essai Down-hole est réalisé.	73
Tableau 4.1	Prédiction de l'accélération horizontale maximale du sol de la station de Keddara en utilisant les lois d'atténuation.	81

Introduction Générale

1. Introduction

Les tremblements de terre font partie des cataclysmes naturels qui ont un effet dévastateur sur les sols, les structures et les conséquences sur les vies humaines sont souvent désastreuses. Ils sont responsables de la destruction de villes entières et ont souvent des conséquences économiques lourdes pour les pays touchés. L'énergie libérée par les séismes est transportée du foyer à la surface par des ondes sismiques et le mouvement induit en surface est alors gouverné non seulement par la source mais aussi par le trajet parcouru par ces ondes. Ainsi, les conditions géotechniques et topographiques locales d'un site peuvent modifier le mouvement de celui-ci. Cette modification correspond souvent à une amplification importante et à une prolongation notable de la durée du séisme. Cela signifie que les effets de site sont souvent défavorables et peuvent accroître considérablement l'impact d'un séisme.

La prévision du comportement des structures durant un séisme nécessite la modélisation des composantes géotechniques de système sol-structure. Les propriétés géologiques et mécaniques des sols sous-jacents doivent aussi être évaluées pour le dimensionnement des structures. Ces propriétés varient grandement d'un point du milieu à un autre, ce qui a pour résultat que différents sites répondent différemment à des ondes incidentes pourtant similaires. De ce fait, la connaissance précise et la modélisation des propriétés du sol environnant, est requise pour décrire le comportement dynamique complet vis-à-vis d'une excitation donnée du sol.

Différentes études ont été conduites pour mettre en évidence les effets de site, la modélisation de la réponse du sol et la caractérisation des propriétés du sol. Ces études ont montré que trois propriétés du sol ont un effet significatif sur sa réponse. Ces propriétés sont la vitesse des ondes de cisaillement, l'amortissement et la fréquence fondamentale du système sol. Par conséquent, pour obtenir des estimations fiables de la réponse du sol, et en particulier des effets de site, il est nécessaire d'avoir des méthodes fiables d'estimation des valeurs des paramètres cités plus haut.

Les propriétés du sol peuvent être décrites en utilisant des modèles déterministes ou probabilistes. Les modèles déterministes utilisent un paramètre discret unique, alors que les modèles probabilistes décrivent ces propriétés en utilisant des paramètres statistiques discrets

ou des fonctions de densité de probabilité. Les études déterministes ont montré leur limite. En effet, celles-ci nécessitent la connaissance exacte (déterministe) des caractéristiques du sol, et donc un nombre élevé d'échantillons pour les caractériser, conduisant à un coût élevé. De ce fait, la recherche concernant la réponse d'un sol hétérogène à des excitations sismiques s'est naturellement orientée vers les techniques probabilistes, qui peuvent tenir compte de l'aspect aléatoire des caractéristiques du sol et peuvent en modéliser les fluctuations. En effet, négliger cet aspect aléatoire des propriétés géologiques et mécaniques du sol peut conduire à une sous-estimation de la sécurité des structures qui y sont implantées.

L'étude sismique nécessite de tenir compte des incertitudes dans les paramètres matériels d'une façon quantitative. L'application des méthodes stochastiques dans le génie parasismique a été généralement sous la forme d'entrée aléatoire dans un système déterministe. Toutefois, les configurations géologiques et les propriétés matérielles des dépôts de sol tels que la densité et le module d'élasticité ne sont pas toujours connus avec une précision suffisante pour justifier une analyse déterministe.

2. Objectifs visés

L'objectif de notre étude est la prise en compte de l'effet du caractère stochastique des paramètres matériels de sol sur la réponse sismique d'un milieu viscoélastique semi-infini. Le milieu considéré est un monocouche ou multicouche de sol avec des variations stochastiques dans les propriétés élastiques: masse volumique et module de cisaillement; tan dis que le coefficient d'amortissement est considéré déterministe. Le demi-espace sous-jacent est supposé homogène chargé harmoniquement à sa base et libre de contrainte à la surface. Le régime physique le plus simple est celui dans lequel les contraintes dépendent d'une seule coordonnée cartésienne, soit la profondeur z . La méthode analytique pour l'étude de la propagation des ondes harmoniques à partir d'une source ponctuelle à travers un sol aléatoire utilisée est celle de Karal et Keller et se base sur l'idée de la matrice fondamentale.

Les propriétés des ondes se propageant dans un milieu viscoélastique nonhomogène aléatoire sont régies par des équations différentielles dont les coefficients sont des fonctions des variables aléatoires spatiales. Les équations Intégré-différentielles résultantes pour les déplacements moyens sont résolues par la transformée de Laplace. La fonction

d'amplification de la couche en surface est formulée est étudiée. Ensuite, par convolution, nous avons déterminé la réponse en surface du sol en termes d'accélération où elle est comparée à des enregistrements.

3. Organisation du mémoire

Ce mémoire est constitué de quatre chapitres qui sont organisés de la manière suivante :

Le premier chapitre, est consacré à une étude bibliographique, dévissé en trois parties principales. La première partie présente une synthèse succincte des travaux réalisés dans le domaine de la dynamique des sols stochastique et plus particulièrement celui de la réponse sismique aléatoire des sols. La deuxième partie est consacrée à la présentation des différents modèles pour la caractérisation des propriétés aléatoires des sols. Comme nous nous sommes intéressés aux modèles analytiques une synthèse sur les modèles analytiques disponibles dans la littérature est présentée en dernier lieu.

Ainsi, *le deuxième chapitre* concerne la formulation d'une méthode analytique pour l'évaluation de la réponse sismique d'un site dont les propriétés varient stochastiquement suivant la méthode de Karal et Keller. Les propriétés des ondes se propageant dans un milieu viscoélastique aléatoirement nonhomogène sont régies par des équations différentielles dont les coefficients sont des fonctions des variables aléatoires spatiales. Les équations Intégro-différentielles résultantes pour les déplacements moyens sont résolues par la transformée de Laplace. La formulation est étendue à des systèmes multicouches à travers des matrices de transfert.

Le troisième chapitre porte sur l'application de la formulation développées au chapitre 2 pour le calcul la fonction d'amplification d'un profil de sol hétérogène, composé d'un ensemble de couches superposées se prolongeant horizontalement à l'infini, et ayant des propriétés aléatoires. L'objectif étant de montrer que la variation stochastique des paramètres du profil de sol, peut engendrer un comportement différent du cas homogène et montrer la nécessité de tenir en compte de ces variations dans la pratique.

Le quatrième chapitre est consacré à l'évaluation de la réponse sismique d'un profil de sol aléatoirement hétérogène, d'une étendue latérale infinie, dans le présent travail seule les effets de la variabilité des caractéristiques géologiques sont considérés, la charge sismique est considérée comme déterministe.

Ayant déterminé la fonction d'amplification stochastique, nous déterminons par convolution la réponse de ce site à une excitation à sa base (mouvement de référence) sous forme d'un accélérogramme. Pour cela, nous calculons d'abord le spectre de Fourier de l'accélérogramme. Puis, en le multipliant par la fonction de transfert, nous obtenons le spectre de Fourier en surface. Au moyen de la transformée inverse de Fourier, nous obtenons l'accélérogramme en surface de sol. En dernier lieu, la réponse du site étudié, en termes d'accélérations de sol et spectres de réponse, est comparée à celle enregistrée sur un site à proximité, en vue d'une validation expérimentale. A la fin du mémoire, des conclusions générales et des recommandations futures sont données.

Chapitre 1

Etude bibliographique sur les
modèles de prise en comptes
de l'aspect stochastique
dans les sols

1.1. Introduction

Les conditions locales de sol, telles que la profondeur au rocher à partir de la surface de sol et les propriétés des couches de sol adjacentes ont un effet important sur les mouvements en surface de sol lors de secousses sismiques. D'autre part, les mesures au laboratoire sont menées sur des échantillons petits et plutôt homogènes donnant l'impression que le milieu duquel ont été prélevés est macroscopiquement homogène. Ainsi, partant du fait que l'information concernant les dépôts de sol et les formations rocheuses n'est pas connue avec une précision suffisante et qu'une variation de leurs propriétés sur une faible épaisseur est parfois dramatique, la représentation des matériaux géologiques comme des variables aléatoires (stochastiques) provient de la complexité de leur structure intrinsèque, et donne une meilleure description.

Cependant les ondes sismiques se propagent dans un milieu qui est naturellement stochastique. Cette stochasticité pourrait se manifester par l'introduction d'incertitudes et de questions de fiabilité dans le modèle. Ces considérations échappent aux analyses déterministes. Dans le traitement des problèmes concernant les milieux stochastiques, on est d'abord confronté à la caractérisation des fluctuations des propriétés, les distances de corrélation et les distributions de probabilité. La solution exacte et générale du problème de propagation d'onde dans n'importe quel milieu est loin d'être complète. L'effort en génie parasismique a été minime par rapport à d'autres domaines tels que l'acoustique et l'électromagnétique. Un effort concerté est nécessaire dans des études de corrélation espace-temps des données de séismes et les simulations d'onde dans les milieux aléatoires. Les deux domaines de caractérisation des sols stochastiques et l'utilisation de ces paramètres pour prédire la réponse du sol seront à la fois bénéfiques et complémentaires.

Ce chapitre est dévisé en trois parties principales. La première partie présente une synthèse succincte des travaux réalisés dans le domaine de la dynamique des sols stochastique. La deuxième partie est réservée à la présentation des différents modèles pour la caractérisation des propriétés aléatoires des sols. Comme nous nous sommes intéressés aux modèles analytiques, une synthèse sur les modèles analytiques utilisés dans des travaux antérieurs est présentée.

1.2. Dynamique des sols stochastique

La dynamique des sols stochastiques, où le sol est considéré comme un matériau dont les propriétés sont des fonctions aléatoires de l'espace et du temps, est un concept relativement nouveau, qui est apparu dans les années 1960 dans l'étude des ondes acoustiques dans l'océan et les ondes électromagnétiques dans l'atmosphère. En général, le travail a été concentré sur des milieux géologiques ayant des propriétés aléatoires [1].

1.2.1. Chargement aléatoire

Le cas où la seule composante aléatoire est le chargement est le cas le plus couramment considéré et le plus simple. Plusieurs applications possibles de la théorie des vibrations aléatoires en dynamique des sols, y compris la détermination de la réponse non-linéaire des sols et de l'évaluation du potentiel de liquéfaction existent dans la littérature. Nous pouvons citer les travaux de Gazetas et al. [2] sur la réponse hystérétique des barrages en terre à une excitation stochastique non stationnaire, de Luco et Wong [3] sur l'analyse de la réponse dynamique d'une fondation rigide carrée à des excitations sismiques aléatoires, de Pais et Kausel [4] sur la réponse stochastique des fondations enterrées et de Hao [5] sur la réponse d'une plaque rigide à supports multiples aux mouvements de sol.

1.2.2. Propriétés de sol aléatoires

Plusieurs méthodes pour incorporer l'incertitude dans l'évaluation de la fiabilité globale de la performance géotechnique sont proposées dans la littérature [6]. Deux groupes de base d'incertitude sont identifiés, à savoir, l'incertitude dans les propriétés du sol [6-11] et l'incertitude dans la conception. Le deuxième cas, concerne l'incertitude dans les calculs de fiabilité [12-13].

La théorie de Markov est également employée [14] pour comprendre le rôle des incertitudes dans le comportement dynamique des sols. Des travaux plus récents incluent l'identification des systèmes des propriétés de sol in-situ [15].

Des modèles tenant en compte l'incertitude dans le dimensionnement des fondations et dans les propriétés du sol sont aussi étudiés [15,16].

1.3. Vibrations dans les milieux géologiques aléatoires

L'un des problèmes les plus importants en dynamique des sols est la détermination des mouvements de sol à une charge sismique [17]. Nous pouvons mentionner le travail de Hryniewicz et Hermans [9] sur la réponse du champ libre produite par des ondes dans un milieu continu viscoélastique et aléatoire, et de Hryniewicz [18] sur la réponse moyenne due à des charges réparties sur une couche aléatoire soumise à des conditions de déformation anti-planes. La méthode des fonctions de Green fut aussi utilisée par des chercheurs [6,19] pour les ondes SH se propageant à travers un demi-espace stochastique ayant des paramètres de matériau dépendants de la profondeur.

Zerva et al [20] ont étudié les effets de l'aspect stochastique des couche de sol sur la variation spatiale résultant des mouvements sismiques du sol et les contraintes sismiques.

Nour [21,22] a étudié la stochasticité sur les milieux hétérogènes en quantifiant les effets induits et leurs impacts sur le comportement des constructions. l'analyse de l'aspect aléatoire profondeur du rocher et ses effets sur la réponse sismique d'un profile de sol ainsi que sur l'interaction sol-structure est ont été menées [23,24].

1.4. Techniques stochastiques utilisées

1.4.1. Solutions analytiques

Plusieurs méthodes concernant les problèmes fondamentaux posées par la propagation des ondes en milieu aléatoire ont été proposées et appliquer à divers problèmes physiques et astrophysiques [25,26].

Pour les sols ; la solution analytique pour la propagation des ondes harmoniques à partir d'une source ponctuelle à travers un sol aléatoire la plus connue est celle de Karal et Keller [28].

Dans cette formulation, le module de cisaillement et la densité sont décrits par des perturbations autour de ses valeurs moyennes.

1.4.2. Techniques approximatives

La méthode des perturbations est une technique couramment utilisée pour le traitement des problèmes à caractère aléatoire. Pour de faibles fluctuations des propriétés du milieu autour de leur valeur déterministe. A partir du développement en séries de Taylor de la variable, on peut citer le travail de zerva et al [20]. D'autres techniques pour les systèmes à paramètres discrets utilisent les transformées de Fourier couplées à une analyse modale [28]. D'autres études sur la propagation des ondes élastiques dans les milieux géologiques hétérogène, existe [29-31].

1.4.3. Simulations de Monte-Carlo

Les simulations de Monte Carlo sont très utilisées dans plusieurs domaines scientifiques et sont considérées comme une méthode efficace pour les analyses concernant les milieux hétérogènes. Elles conviennent aussi pour les cas impliquant plusieurs variables aléatoires corrélées, cependant, celles-ci sont numériquement coûteuses. Les simulations Monte Carlo utilisent un nombre très important d'échantillons pour approcher convenablement la distribution de probabilité de la fonction étudiée. En effet, c'est une approche statistique où la détermination des caractéristiques stochastiques de la réponse du système passe par le calcul d'un grand nombre de réalisations du phénomène étudié (expériences numériques). C'est un outil mathématique souple, puissant et capable de résoudre des problèmes qui n'ont pas de solution analytique [1].

En génie civil, ils sont largement utilisés dans l'analyse des structures non linéaires soumises à des mouvements sismiques. Une application typique en géomécanique où les Simulations de Monte Carlo sont efficaces, est le tassement des systèmes de fondation composé de plusieurs semelles isolées tels que les groupes de pieux [32 dans 1].

1.4.4. Méthodes numériques

Les approches numériques qui ont été utilisées pour les problèmes impliquant des milieux aléatoires sont basées soit sur des solutions de type éléments aux frontières des équations

intégrales stochastiques ou sur des solutions de type éléments finis des opérateurs différentiels stochastiques. Les deux classes des approches numériques sont invariablement reliées à la méthode de perturbation des propriétés du milieu. En général, les analyses avec la méthode des éléments aux frontières (BEM) stochastiques est plus appropriée pour les problèmes impliquant un milieu continu, alors que la méthode des éléments finis (FEM) convient mieux aux problèmes de systèmes structuraux. La méthode des éléments finis stochastique a de nos jours largement utilisé [21,11].

1.4.4.1. Méthode des éléments finis stochastiques

C'est dans l'idée de mêler plus intimement la méthode des éléments finis, telle qu'elle existe pour les problèmes déterministes, avec les outils probabilistes que s'est développée la méthode des Éléments Finis Stochastiques (Stochastic Finite Elements Method ou SFEM). L'idée est de considérer l'aléa comme une dimension supplémentaire du problème traité, tout en employant la discrétisation spatiale proposée par le concept des Éléments Finis [33]. On peut alors traiter la dimension associée à l'aléa de deux façons générales, ce qui nous conduit aux deux grandes orientations suivantes.

- **Méthode des éléments finis stochastiques par perturbation**

La première méthode utilise une méthode de perturbation entre les caractéristiques de la réponse aléatoire et les paramètres incertains du modèle : il s'agit de la méthode des éléments finis par perturbation (ou Perturbation SFEM).

La première étape concerne la discrétisation spatiale des champs stochastiques utilisés ; pour cela, de nombreuses techniques existent. La seconde étape consiste à approximer les fonctions des variables aléatoires par leur développement en série de Taylor autour de leur valeur moyenne, à l'ordre un ou deux, en supposant que les variables aléatoires varient peu autour de leurs valeurs moyennes [33].

- **Méthode Spectrale des Éléments Finis Stochastiques**

La seconde méthode il s'agit de la méthode Spectrale des Éléments Finis Stochastiques (Spectral SFEM en anglais) [33].

1.4.4.2 Méthodes non-paramétriques

Dans toutes les méthodes stochastiques que nous venons de passer en revue, le choix des paramètres incertains du modèle, à savoir le type de données (variables aléatoires ou champs stochastiques) et les lois de probabilité associées, se révèle crucial pour l'étude de la variabilité de la réponse. Dans ce cas, on suppose que le modèle est parfaitement connu, les incertitudes ne portant en effet que sur les paramètres de ce modèle, or pour des systèmes mécaniques suffisamment complexes, cette hypothèse peut être excessive ; certaines zones, comme les liaisons par exemple, mettent en jeu des phénomènes qui souvent ne sont pas pris en compte en détail, et sont donc représentées par des modèles simplifiés, pour lequel le choix des paramètres incertains se révèle un peu artificiel. Il faut dans ces cas pouvoir prendre en compte des incertitudes de modélisation [33].

1.5. Procédures Stochastique

Les Problèmes concernant un milieu aléatoire, sont régis par une équation différentielle stochastique du type général suivant [11]:

$$L(\gamma)[u(x, \gamma)] = f(x, \gamma) \quad (1.1)$$

où L est un opérateur différentiel linéaire d'ordre n avec coefficients aléatoires qui dépend des propriétés du système, f l'excitation, u la réponse et l'argument γ désigne une quantité aléatoire. Dans la plupart des cas, u peut être identifié comme une composante du déplacement et x une variable spatiale. Si soit l'opérateur L , l'excitation f , ou les deux sont aléatoires alors cette incertitude a un impact sur la réponse u grâce à l'équation (1.1). Le cas où un système déterministe représenté par un opérateur L déterministe est soumis à une excitation aléatoire f a été largement étudié. Le cas où l'opérateur L n'est pas déterministe est plus compliqué.

Le processus de modélisation mathématique-mécanique qui conduit à l'équation différentiel (1.1) ou un système équivalent d'équations algébriques introduit deux types d'incertitudes: incertitudes sur les données et les incertitudes des modèles.

Les incertitudes des données sont liées aux paramètres du modèle, comme la géométrie et le tenseur d'élasticité. Ces incertitudes peuvent être modélisées en utilisant l'approche paramétrique probabiliste classique où ils sont représentés par des variables ou processus aléatoires. Cette approche ne permet pas de tenir compte des incertitudes de modèle.

Dans le présent travail, l'approche paramétrique classique est suivie et les incertitudes du modèle ne sont pas prises en compte.

1.5.1. Modèles de champs aléatoires pour les propriétés de sol

Naturellement les sols sont des milieux hétérogènes, leurs propriétés mécaniques et physiques présentent une variation souvent considérable d'un point à un autre du milieu géotechnique étudié. Il est donc nécessaire de reconnaître que les propriétés des sols sont des fonctions aléatoires spatiales. Ainsi, plus les points sont rapprochés les uns des autres, plus grandes sont les relations entre les événements dont elles sont le siège. Les mesures expérimentales nécessaires pour obtenir des valeurs caractéristiques des événements, sont couramment réalisées à des positions discrètes dans l'espace. Le coût élevé de ces expérimentations et la difficulté de mesurer un événement en tous points nécessite que les valeurs mesurées (échantillons) puissent caractériser la représentation "exacte" de l'évènement en tous points du milieu continu avec une précision satisfaisante.

Les techniques utilisées pour l'analyse de la variabilité naturelle des sols sont très variées, La panoplie des méthodes statistiques étant très étendue à l'heure actuelle, il est donc possible de déterminer des moyennes et des écarts types, rechercher la forme des lois de répartition des paramètres, tester leur signification, analyser les lois de variations spatiales, etc.

Les champs aléatoires ont été utilisés dans la modélisation et l'analyse des propriétés du sol. Un champ aléatoire peut être défini comme une famille de variables aléatoires spatialement corrélées ou de processus aléatoires. La plupart de ces analyses se sont concentrées sur les champs aléatoires homogènes. Les propriétés du sol telles que la résistance au cisaillement, la pression interstitielle, la conductivité hydraulique, la perméabilité, la porosité, la vitesse des ondes de cisaillement et la densité ont été modélisées comme des champs aléatoires. Les

techniques d'estimation des paramètres des champs aléatoires, telle que la structure de corrélation ont été aussi développées [23,34].

1.5.1.1. Représentation générale d'un champ aléatoire

La théorie du champ aléatoire, utilisée en géotechnique [34] est une extension de l'analyse classique de la série chronologique. Elle est basée sur la statistique spatiale par la prise en considération de la position de l'échantillon.

La technique d'analyse la plus courante pour les variations spatiales des propriétés du sol consiste à décomposer les variations observées de chaque propriété en une fonction déterministe appelée tendance (ou moyenne) et une composante aléatoire de moyenne nulle. Dans une telle décomposition, la tendance représente l'effet de phénomènes qui influencent la

formation du sol pendant de longues périodes, tandis que la composante aléatoire décrit les fluctuations de courte durée des états de formation du sol.

Pour la description probabiliste des propriétés du sol comme un champ aléatoire homogène $X(x)$ (Figure 1.1), où x est la variable espace, trois paramètres sont indispensables :

- la valeur moyenne $m_x(x)$.
- l'écart type de la fluctuation $\sigma_x(x)$, qui mesure le degré de déviation de la valeur actuelle $X(x)$ par rapport à la valeur moyenne $m_x(x)$.
- L'échelle de fluctuation, δ , qui mesure la distance dans laquelle $X(x)$ montre une corrélation relativement grande d'un point à autre. De faibles valeurs de δ impliquent une fluctuation rapide autour de la moyenne, alors que de larges valeurs de ce paramètre suggèrent une variation lente.

La variation de la propriété du sol $X(x)$ peut être représentée comme suit [6-8,34] :

$$X(x) = m_x(x) + \varepsilon(x) \quad (1.2)$$

où $\varepsilon(x)$ représente la fluctuation autour de la moyenne.

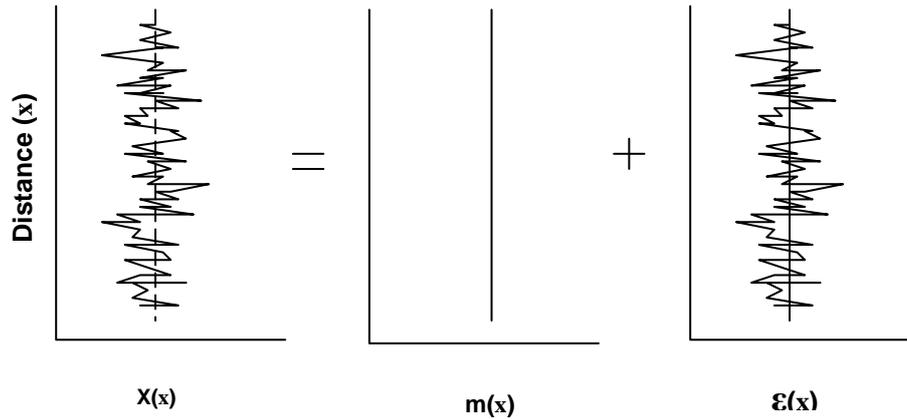


Fig. 1.1- Variabilité des propriétés d'un monocouche : modèle de champs aléatoire.

1.5.1.2. Propriétés statistiques des champs aléatoires

Les propriétés statistiques sont des valeurs représentatives d'un champ sur la base d'un ensemble de réalisations. Pour la description probabiliste des propriétés du sol, trois paramètres sont indispensables : la moyenne, la variance et l'auto-covariance ou la fonction de corrélation.

- La moyenne m_x est la mesure de la tendance donnée par :

$$m_x = E[X(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y(x))dy \quad (1.3)$$

ou $f(y)$ est la fonction de densité de probabilité caractérisant une variable aléatoire qui permet le calcul de la probabilité que X prend une valeur inférieure à y :

$$P(X \leq y) = F(y) = \int_{-\infty}^y f(y)dy$$

- La variance est une quantité importante qui donne une indication de la façon dont la variable aléatoire est distribuée autour de la moyenne. Si la variance est petite, la variable aléatoire prendra presque toujours des valeurs proches de la moyenne; sinon elle peut s'en écarter souvent. La variance est donc une mesure de la concentration de la probabilité autour de la moyenne, définie par :

$$\sigma_x^2 = \text{var}[X] = E[(X - m_x)^2] = \text{var}[\varepsilon(x)] \quad (1.4)$$

La racine carrée de la variance s'appelle dispersion ou écart-type.

- L'auto-covariance (Cov) ou la fonction de corrélation (r) décrivent les dépendances moyennes des valeurs du champ aléatoire en deux positions différentes.

$$\begin{cases} \text{cov}(X_i, X_j) = E[(X_i - m_{X_i}) \cdot (X_j - m_{X_j})] \\ r(X_i, X_j) = \frac{\text{cov}(X_i, X_j)}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}} \end{cases} \quad (1.5)$$

La moyenne et la variance décrivent les propriétés statistiques à un point donné dans le champ, et sont communément appelées "propriétés de point". L'auto-covariance (Cov) ou la fonction de corrélation présentent les moments croisés entre deux points dans le champ et sont généralement appelés "propriétés croisés entre points". Un champ aléatoire est totalement défini par ses moments de point et ses moments croisés entre points. Les propriétés de point et croisés entre points sont utilisés pour classer un champ comme soit homogène ou non homogène [23].

- **Champ aléatoire homogène**

Un champ aléatoire est dit homogène lorsque les valeurs statistiques de point sont constantes et les valeurs statistiques croisées entre points dépendent uniquement de la distance entre les points.

$$\begin{cases} E[X] = m \\ \text{Var}[X] = \sigma^2 \\ \text{Cov}(X_i, X_j) = \sigma^2 r(\xi) \end{cases} \quad (1.6)$$

ξ étant la distance entre les deux points X_i et X_j . Lorsque les propriétés croisées entre points, i.e. l'auto-covariance et la fonction de corrélation sont fonction de la valeur absolue de la distance des points, le champ est dit isotrope. Dans ce cas

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \sigma^2 r(|\xi|) \quad (1.7)$$

- **Champ aléatoire non homogène**

Un champ aléatoire est dit non homogène lorsque les valeurs des propriétés statistiques de point ou croisées entre points dépendent de la position. En particulier, ces valeurs sont données par :

$$\begin{cases} E[X] = E[X(x)] = m(x) \\ Var[X] = E[(X(x) - m(x))^2] = \sigma^2(x) \\ Cov(X(x_i), X(x_j)) = E[(X(x_i) - m(x_i))(X(x_j) - m(x_j))] = \sigma^2 r(x_i, x_j) \end{cases} \quad (1.8)$$

Un champ aléatoire non homogène peut être décomposé en une série de champs homogènes. Dans une classification suivant la dimension du champ, quatre possibilités existent : champ unidimensionnel, champ bidimensionnel, champ tridimensionnel et champ spatio-temporel.

1.5.1.3. Fonction de corrélation d'un champ aléatoire

La fonction de corrélation ou l'auto-covariance ou encore les propriétés croisées entre points est une mesure de la similitude entre les valeurs du champ en deux positions. C'est le reflet de l'effet de la distance de séparation sur les valeurs du champ en deux positions. Cette fonction indique que les valeurs d'un champ à deux points rapprochés sont susceptibles d'être semblables tandis que les valeurs pour des points éloignés sont susceptibles d'être indépendantes. La fonction d'auto-corrélation est une caractéristique qui doit être caractérisée pour le champ. Certains concepts de modélisation importants concernant la structure de l'auto-covariance seront discutés brièvement.

- **Séparabilité**

La structure d'auto-covariance d'un champ aléatoire est dite séparable si la fonction d'auto-covariance peut être écrite comme le produit des fonctions d'auto-covariance pour chacune des directions spatiales du champ (x , y et z), i.e.

$$r(\xi_x, \xi_y, \xi_z) = r_x(\xi_x) \cdot r_y(\xi_y) \cdot r_z(\xi_z) \quad (1.9)$$

où ξ_x , ξ_y et ξ_z sont les distances relatives entre deux points du champ.

La structure d'auto-covariance peut être partiellement séparable, par exemple en fonction des directions horizontale et verticale, i.e.

$$r(\xi_x, \xi_y, \xi_z) = r_{xy}(\xi_x, \xi_y) \cdot r_z(\xi_z) \quad (1.10)$$

- **Isotropie**

La structure d'auto-covariance est dite isotrope si l'auto-covariance dépend des distances Euclidiennes entre les points du champ, au lieu des coordonnées, i.e.

$$r(\xi_x, \xi_y, \xi_z) = r\left(\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}\right) \quad (1.11)$$

La structure d'auto-covariance peut être aussi partiellement isotrope, par exemple en fonction des directions horizontales du champ

$$r(\xi_x, \xi_y, \xi_z) = r\left(\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}, \xi_z\right) \quad (1.12)$$

L'isotropie implique que la fonction d'auto-covariance est invariante vis-à-vis d'une transformation orthonormée des coordonnées du champ.

- **Ergodicité**

Un concept de modélisation important concernant les statistiques d'un champ aléatoire est l'ergodicité. L'ergodicité implique la stationnarité. Un champ aléatoire est ergodique (dans un sens général) si chacun des paramètres statistiques peut être déduit à partir d'une seule réalisation du champ. Usuellement, seuls certains paramètres statistiques sont requis. Le concept d'ergodicité peut, ainsi, être défini en fonction de ces paramètres. Pour exemple, on peut citer l'ergodicité dans la valeur moyenne et l'ergodicité dans l'auto-covariance. Parler d'ergodicité dans la moyenne ou d'ergodicité en fonction des coefficients de tendance moyenne implique que la fonction d'auto-covariance doit tendre vers zéro pour de larges valeurs de la distance. Cependant, cette condition n'est pas suffisante.

La fonction d'auto-corrélation peut être unidimensionnelle, bidimensionnelle ou tridimensionnelle. Plusieurs fonctions ont été utilisées pour modéliser la corrélation et sont en générale de forme exponentielle décroissante (tableau 1.1).

Tableau 1.1- Exemples de types admissibles de fonctions d'auto-covariance normalisée unidimensionnelle [35].

Types	Fonction d'autocorrélation normalisée	échelle de fluctuation
Exponentiel	$e^{-\frac{ \xi }{l_{corr}}}$	$2l_{corr}$
Gaussien	$e^{-\pi\left(\frac{ \xi }{l_{corr}}\right)^2}$	l_{corr}
Bilinéaire	$\begin{cases} \left(1 - \frac{ \xi }{l_{corr}}\right) & \xi \leq l_{corr} \\ 0 & \xi > l_{corr} \end{cases}$	l_{corr}

1.5.1.4. Longueur de corrélation

La longueur de corrélation est définie comme la distance pour laquelle la fonction de corrélation normalisée diminue jusqu'à atteindre e^{-1} (correspondant au fait que $\frac{|\xi|}{l_{corr}} = 1$).

- **l'échelle de fluctuation**

l'échelle de fluctuation (ou le rayon de corrélation) δ , est défini comme [35]

$$\delta = 2 \int_0^{\infty} r(\xi) d\xi \quad (1.13)$$

C'est une mesure de la distance dans laquelle le champ aléatoire montre de similitude relativement forte. Ainsi, un petit δ , implique une fluctuation rapide autour de la tendance et une large réduction dans la variance.

1.5.1.5. Informations à priori pour différents types de sols

En général, les paramètres tels que la moyenne, l'écart type et les paramètres de corrélation du sol considéré doivent être déterminés à partir des essais in situ simultanément avec des informations à priori si la classification du sol en plusieurs types est possible. Fondamentalement, la classification est une fonction des propriétés mécaniques plutôt que géologiques. Son but est de permettre l'utilisation d'informations collectées à partir d'investigations déjà réalisées sur des sites de même classe.

En général, la longueur de corrélation pour les sols naturels dans la direction horizontale est 5 à 50 fois plus grande que celle dans la direction verticale en présence d'une déposition horizontale prédominante (superposition de couches). La longueur de corrélation verticale est estimée entre moins de 0,5 m et rarement plus de 10 m [23].

L'application de la modélisation en théorie du champ aléatoire sera fortement simplifiée si les données sont stationnaires, i.e. si la distribution de probabilité qui gouverne la série des données est indépendante de la position des échantillons. Les données sont dites stationnaires au sens strict du terme, si la moyenne est constante avec la distance, i.e. que les données ne présentent ni une tendance ni une direction préférentielle: la variance est constante avec la distance et en l'absence de fluctuations irrégulières [23].

1.5.1.6. Distributions particulières

Voici quelques distributions de probabilités que l'on rencontre le plus souvent dans le traitement des signaux aléatoires.

- **Distribution uniforme**

Une variable aléatoire X est dite uniformément distribuée sur $[a,b]$ si sa densité de probabilité a pour expression:

$$f_x(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.14)$$

Ses caractéristiques sont les suivantes :

$$m_x = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \sigma_x = \frac{\sqrt{3}}{6}(b-a) \quad (1.15)$$

- **Distribution normale (de Gauss)**

Un des exemples les plus importants de distributions continues de probabilité est la distribution normale ou distribution de Gauss. La densité de probabilité de cette distribution a pour expression:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-(x-m_x)^2 / 2\sigma_x^2} \quad -\infty < x < +\infty \quad (1.16)$$

Où m_x et σ_x sont respectivement la moyenne et l'écart type. Elle est notée $N(m_x, \sigma_x)$.

- **Distribution log-normale**

La densité de probabilité de la distribution loi log-normale, définie pour tout réel positif, notée $LN(m_x, \sigma_x)$, a pour expression:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x - \ln \bar{m}_y)^2 / 2\sigma_y^2} \quad x \geq 0 \quad (1.17)$$

m_y et σ_y étant respectivement la moyenne et l'écart type de la variable $Y = \ln X$ distribuée suivant la loi normale $N(m_y, \sigma_y)$. Ses caractéristiques sont les suivantes :

$$m_x = e^{m_y + \sigma_y^2 / 2} \quad \text{et} \quad \sigma_x = e^{m_y + \sigma_y^2} \sqrt{1 - e^{-\sigma_y^2}} \quad (1.18)$$

- **Autres distributions**

On retrouve aussi dans la littérature «autres distributions ». On peut citer:

- la distribution de Poisson,
- la distribution de Weibull et
- la distribution de valeurs extrêmes,

Les figures 1.2 et 1.3 représentent les densités et fonctions de répartition, respectivement, pour les différentes lois de distributions.

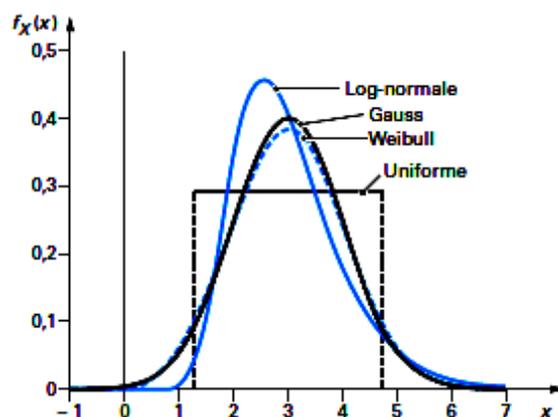


Fig. 1.2- Représentation des densités de Gauss, log-normale, uniforme et de Weibull de mêmes moyennes et écarts-types [36].

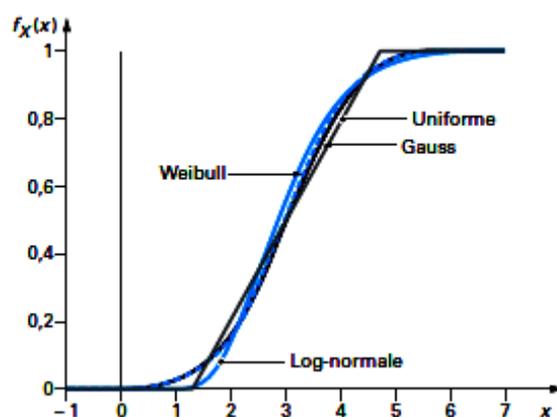


Fig. 1.3 - Représentation des fonctions de répartition de Gauss, log-normale, uniforme et de Weibull de mêmes moyennes et écarts-types [36].

1.5.1.7. Types de distribution

L'hypothèse de distributions de probabilité normale (gaussienne) pour les propriétés du sol est la plus courante dans l'analyse géotechnique. En pratique, cela est confirmé par des essais expérimentaux, indiquant que la distribution normale ne peut pas être rejetée pour une grande variété de propriétés de sols; cependant, afin d'éviter les incohérences, il est recommandé de prendre des distributions log-normales pour les propriétés de sol qui sont strictement positives [35].

1.6. Modèles analytiques et travaux antérieurs

Pour l'étude des problèmes de propagation d'onde dans un milieu aléatoire, il existe deux principales problématiques. La première concerne la caractérisation de la stochasticité du sol en termes d'estimation des fluctuations dans les propriétés, les longueurs de corrélation et les lois de distribution probabilistes. Deuxièmement, pour une détermination raisonnablement satisfaisante, la solution des équations ainsi obtenues nécessite une étude attentive. Mis à part les solutions numériques et approximatives, le modèle analytique le plus utilisé est celui de Karal et Keller [27], qui ont étudié les ondes élastiques, les ondes électromagnétiques et les problèmes de diffusion dans un milieu aléatoire s'étendant à l'infini. Les équations de champ résultant de la dynamique de la propagation d'onde sont des équations Intégré-différentielles. Les équations pour les déplacements moyens sont résolues par la méthode de la transformée de Laplace.

1.6.1. Modèles unidimensionnels

L'effet du caractère aléatoire des paramètres de sol sur la propagation des ondes de cisaillement harmoniques dans un milieu viscoélastique stratifié surmontant un semi-espace homogène chargé harmoniquement à sa base et libre de contrainte à la surface, est le cas le plus étudié [6,7,9].

Dans ces travaux les propriétés des ondes se propageant dans un milieu viscoélastique aléatoire nonhomogène sont régies par des équations différentielles dont les coefficients sont des fonctions des variables aléatoires spatiales, où le champ de déplacement est lié à un champ de contraintes par le biais de l'équation du mouvement, l'équation constitutive et les conditions au frontières.

L'équation intégré-différentielle d'onde de cisaillement moyenne résultante pour la dynamique du milieu est formulée et elle est de type convolutionnel. Ensuite la transformée de Laplace est utilisée solutionner le problème. Des cas de milieux de sol mono et multicouches à aspect aléatoires sont étudiés.

À partir d'une application sur un monocouche Hryniewicz [7] a montré que l'effet des variations stochastiques sur l'intensité moyenne des ondes de cisaillement est significative (Fig. 1.4). D'autre part Chu [6] a montré lorsque l'amortissement est nul, l'effet de l'inhomogénéité peut être plus accentué lorsque la fréquence augmente et l'incertitude est plus large pour les fréquences de résonance. Il a également montré que les variations stochastiques dans le module de cisaillement déplacent le spectre à droite et les variations dans la densité déplacent le spectre à la gauche, par rapport au modèle homogène (Fig. 1.5).

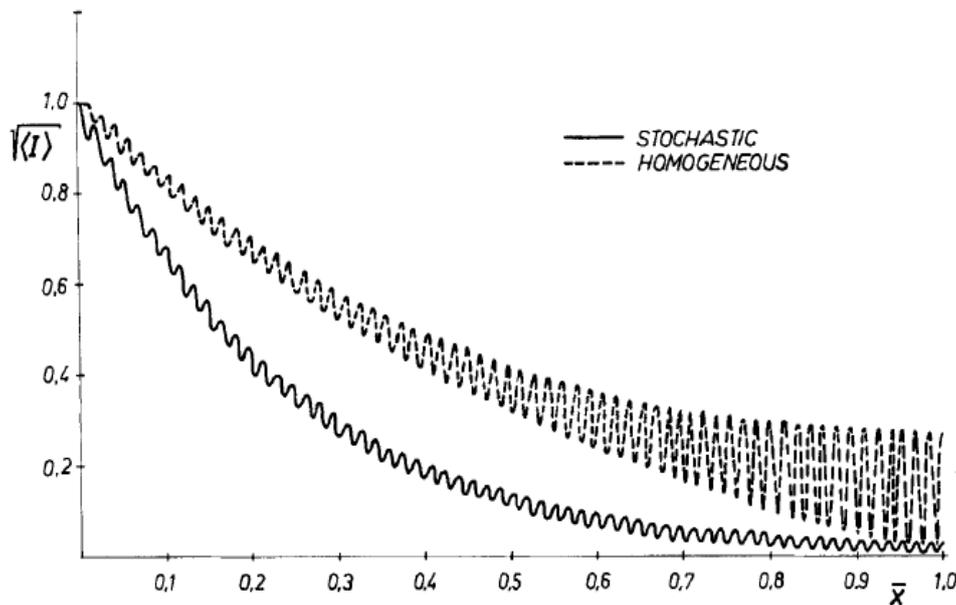


Fig. 1.4- la racine carrée de l'intensité des ondes pour un monocouche

$$\sigma_{22}^2 = \sigma_{12}^2 = 0, \sigma_{11}^2 = 0.9, \kappa = 0.02, \beta = 4, \bar{d} = 200 [7].$$

La méthode exposée pour un monocouche a été tendue au cas d'un dépôt de sol multicouche en suivant le formalisme de la matrice de transfert [6,7]. Une application numérique montrant l'effet des variations stochastiques dans la diminution des caractéristiques d'amortissements (figures 1.6 à 1.8) à été fait par Chu [6]. Ces figures montrent la réponse en déplacement à la surface libre d'un dépôt de sol sous l'effet d'une excitation sismique et gaussienne à la base. Il est clair que les ondes dans le cas stochastique sont amorties rapidement par rapport au cas déterministe [6].

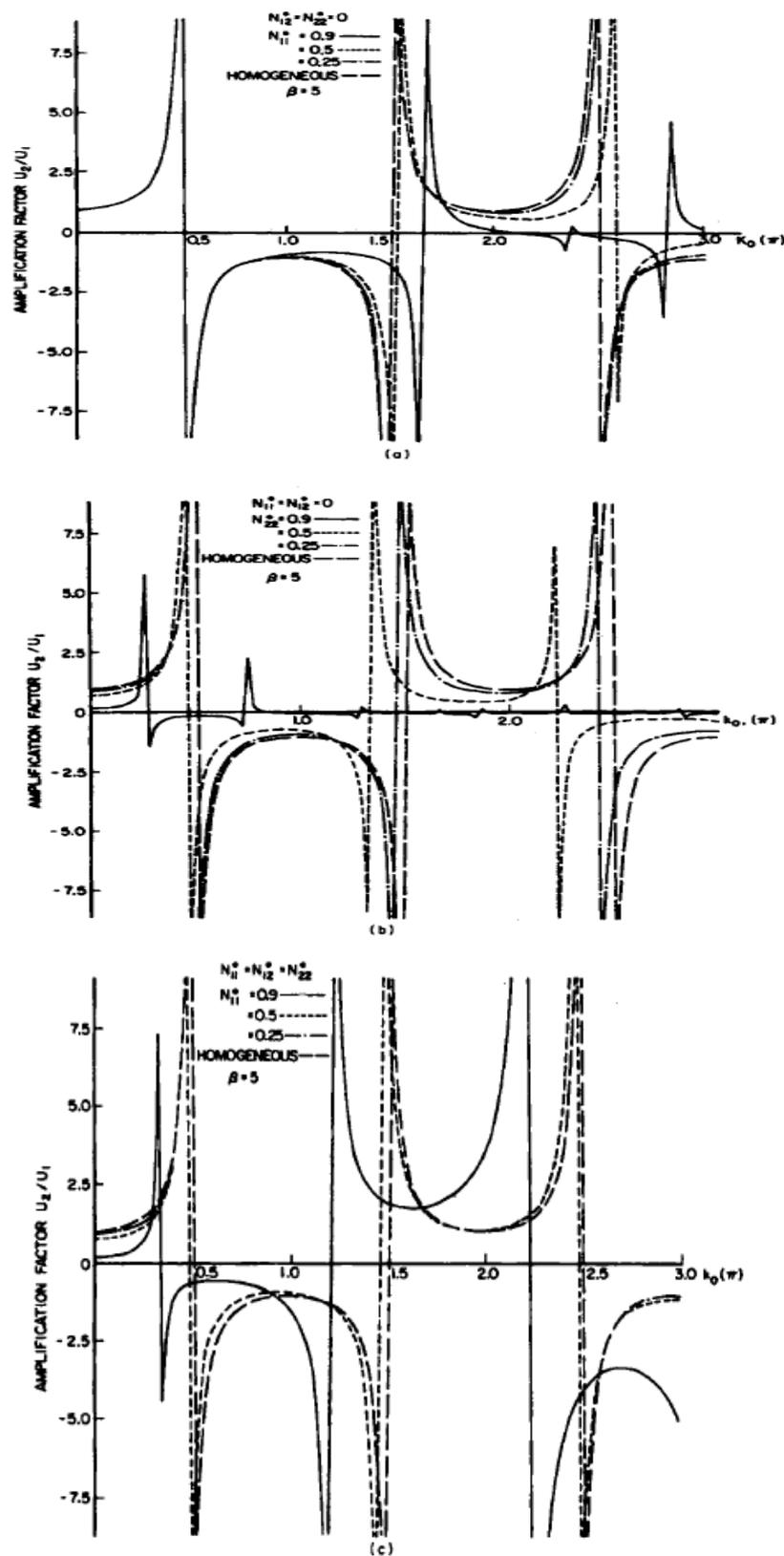


Fig. 1.5- Effet de la stochasticité des paramètres de corrélations sur le déplacement moyen pour un monocouche $N_{22}^0 = N_{12}^0 = 0, \beta = 5$; (b) $N_{11}^0 = N_{12}^0 = 0, \beta = 5$; (c) $N_{11}^0 = N_{12}^0 = N_{22}^0, \beta = 5$ [6].

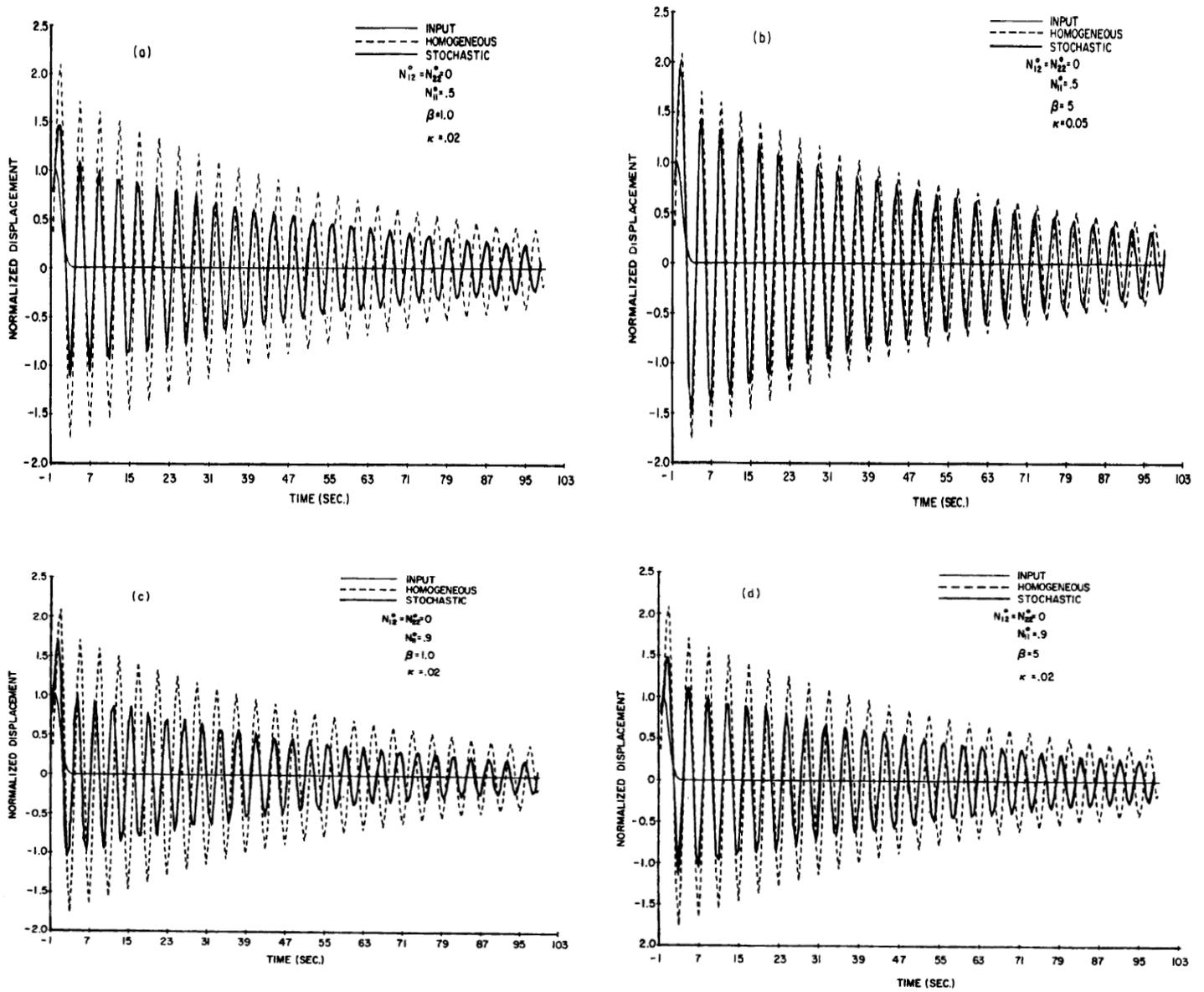


Fig. 1.6- Réponse d'un monocouche aux excitations gaussiennes :

- (a) $N_{11}^0 = 0.5, \beta = 1, \kappa = 0.02$; (b) $N_{11}^0 = 0.5, \beta = 5, \kappa = 0.05$; (c) $N_{11}^0 = 0.9, \beta = 1, \kappa = 0.02$;
 (d) $N_{11}^0 = 0.9, \beta = 5, \kappa = 0.02$ [6].

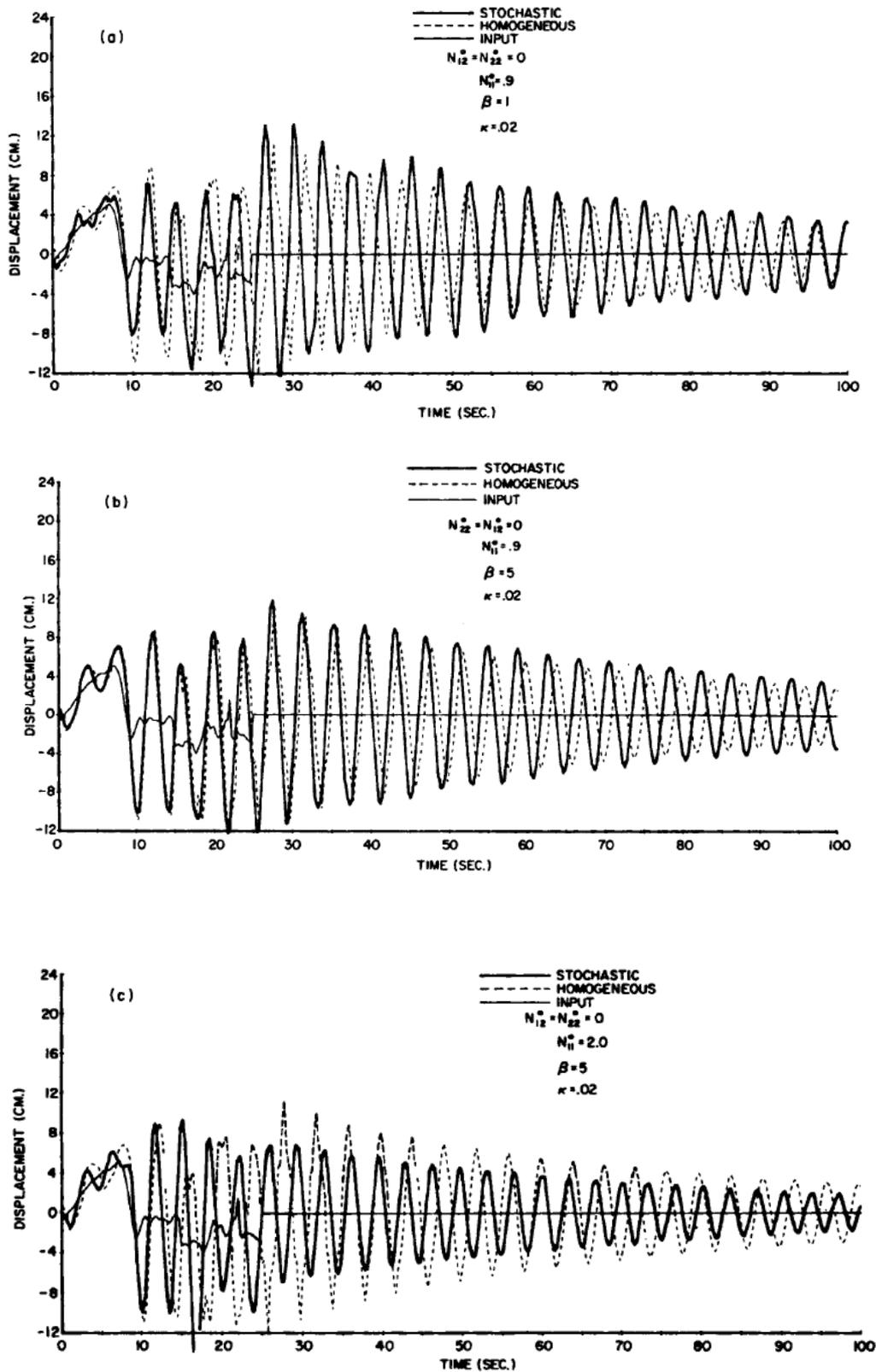


Fig. 1.7- Réponse d'un monocouche au excitation sismique

(a) $N_{11}^0 = 0.9, \beta = 1, \kappa = 0.02$; (b) $N_{11}^0 = 0.9, \beta = 5, \kappa = 0.02$; (c) $N_{11}^0 = 2.0, \beta = 5, \kappa = 0.02$ [6].

Hryniewicz et Hermans [8] ont étudié le cas d'une couche de sol mais cette fois avec une excitation harmonique à la surface supérieure où le module d'élasticité et la densité sont des fonctions stationnaires aléatoires. Les résultats obtenus montrent que l'amplification moyenne des ondes dans le cas stochastique $\sigma \neq 0$, est amortie plus rapidement avec le profondeur \tilde{z} ($\tilde{z} = z/d$) que le cas du milieu déterministe $\sigma = 0$, dans le cas où les paramètres de fluctuations ne sont pas corrélées, $\sigma_{12} = 0$ (Fig.1.8). Pour le cas où les fluctuations corrélées, $\sigma_{12} \neq 0$, l'amplification moyenne d'onde peut différer considérablement (Fig.1.9). Hryniewicz a étudié aussi l'effet de la longueur de corrélation sur l'amplitude de déplacement moyen (Fig.1.10).

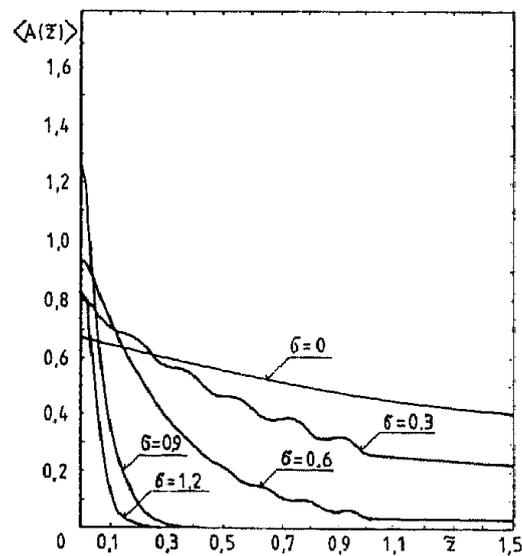


Fig.1.8- Distribution de l'amplitude moyenne dans un semi-espace, pour $\tilde{\beta} = 5$, $\kappa = 0.05$, $\alpha = \tilde{E} = 1.5$, $\tilde{h} = 10$, $\sigma_{22} = \sigma_{11} = \sigma$, $\sigma_{12} = 0$ [8].

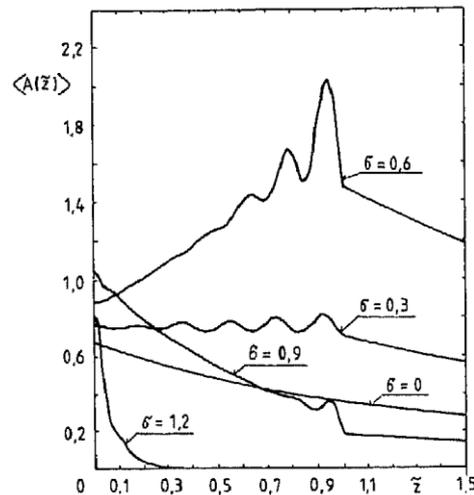


Fig.1.9- Distribution d'amplitude moyenne dans le semi-espace pour $\tilde{\beta} = 5$, $\kappa = 0.09$, $\alpha = \tilde{E} = 1.5$, $\tilde{h} = 10$, $\sigma_{22} = \sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma$ [8].

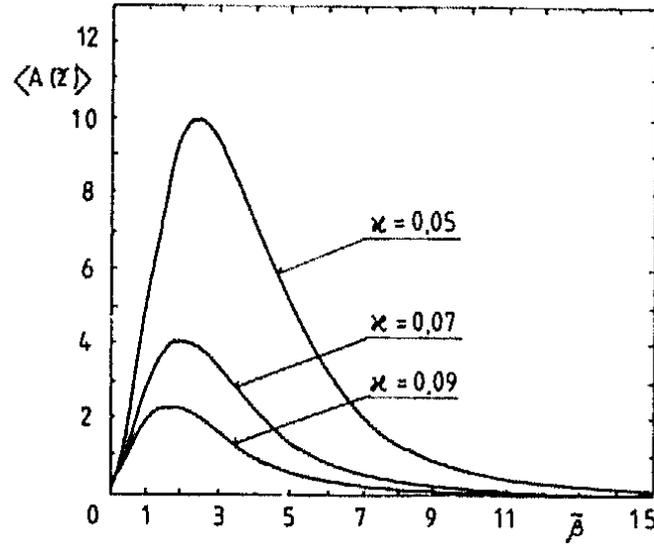


Fig.1.10-Effet de la longueur de corrélation de l'amplitude moyenne pour $\tilde{z} = 0.5$, $\alpha = \tilde{E} = 1.5$, $\tilde{h} = 10$, $\sigma_{22} = \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0.9$ [8].

1.6.2. Modèles plans

La réponse en champ libre à deux dimensions résultant de la combinaison des ondes P et SV incidentes inclinées a été examinée par Hryniewicz et Hermans [9]. L'amplification des ondes dans une couche viscoélastique avec des changements stochastiques dans les propriétés élastiques et la densité est étudiée. La méthode utilisée est celle de Karal et Keller et se fonde sur l'idée de la matrice fondamentale. Les corrélations de troisième ordre sont négligées. Les équations Intégré-différentielles résultantes pour les déplacements moyens sont résolues par la transformée de Laplace. Généralement, l'analyse indique que les inhomogénéités stochastiques dans le module de cisaillement et la densité du sol augmente et plus l'accélération maximale à la surface libre est atténuée comparée au cas homogène. Toutefois, l'amplification des ondes peut surgir dans le cas d'une fort fréquence adimensionnelle

($\bar{\omega} = \frac{\omega d}{v_s}$) et changements stochastiques non corrélés des paramètres matériel.

1.7. Approches numériques

L'étude des milieux de sol à hétérogénéité important ne peut être fait avec des modèles analytiques. Dans ce cas le recours aux méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis est inévitable.

Parmi beaucoup de travaux qui sont réalisés dans ce cadre, citons les deux études de Nour [21,22] et celle de Schevenels [11].

1.8. Conclusion

Plusieurs méthodes traitant de l'hétérogénéité des milieux ont été exposées dans le présent chapitre. Des rappels sur les champs aléatoires et les processus stochastiques adoptés au traitement des incertitudes des caractéristiques des milieux, sont brièvement revus.

A partir de cette présentation, nous pouvons déduire que les études déterministes ne suffisent pas pour caractériser le comportement du milieu "sol", vu les incertitudes affectant ces caractéristiques géologiques et mécaniques. Ainsi, la nécessité d'une étude plus objective, i.e. utilisant une méthodologie probabiliste tenant compte des fluctuations des différentes variables impliquées dans le comportement du sol s'avère inévitable.

Chapitre 2

Champ de Déplacements dans un Milieu Viscoélastique Aléatoire Soumis à des Ondes SH Inclinées

2.1. Introduction

Le formalisme pour étudier la propagation des ondes de cisaillements inclinés dans un milieu composé d'une couche surmontant un semi-espace a été présenté en détail dans la littérature. Une étude paramétrique vaste a été réalisée. Dans ces études, la réponse en champ libre est étudiée dans la majorité des cas pour un système déterministe. L'étude sismique nécessite de tenir compte des incertitudes dans les paramètres matériels d'une façon quantitative. L'application des méthodes stochastiques dans le génie parasismique a été généralement sous la forme d'entrée aléatoire dans un système déterministe. Toutefois, les configurations géologiques et les propriétés matérielles des dépôts de sol tels que la densité et le module d'élasticité ne sont pas toujours connus avec une précision suffisante pour justifier une analyse déterministe.

L'objet du présent chapitre est d'étudier la propagation des ondes de cisaillement dans un milieu de sol viscoélastique à aspect aléatoire et de formuler le champ de déplacement moyen. Le milieu de sol étudié est supposé, composé d'une couche de sol, à masse volumique et module d'élasticité à variation stochastique, mais qui s'apprête pour une généralisation au cas d'un multicouche. Le coefficient d'amortissement est supposé déterministe. Le milieu de sol ainsi décrit surmonte un semi-espace homogène chargé harmoniquement à sa base et libre de contrainte à la surface. Le régime physique le plus simple est celui dans lequel les contraintes dépendent d'une seule coordonnée cartésienne, soit la profondeur z (Figure 2.1). La méthode utilisée est celle de Karal et Keller et se base sur l'idée de la matrice fondamentale et les fonction de Green.

Les propriétés des ondes se propageant dans un milieu viscoélastique nonhomogène aléatoire sont régies par des équations différentielles dont les coefficients sont des fonctions des variables aléatoires spatiales. Les équations Intégro-différentielles résultantes pour les déplacements moyens sont résolues par la transformée de Laplace. La formulation est étendue à des systèmes multicouches à travers des matrices de transfert soumis à des excitations arbitraire en utilisant la Transformée de Fourier.

2.2. Équations de base

2.2.1. Equation de mouvement et équation d'onde

Le champ de déplacement est lié au champ de contraintes par le biais de l'équation de mouvement, l'équation constitutive et les conditions aux frontières. D'où l'équation de mouvement d'une onde se propageant dans une couche de sol non homogène viscoélastique à paramètres stochastiques est [6,8]:

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \rho(z, p) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

avec la loi de comportement [6,8]:

$$\tau = E(z, p) \frac{\partial v}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z} \quad (2.2)$$

où v désigne le déplacement, τ le tenseur des contraintes, t le temps, p la variable de probabilité, η la viscosité et $z \geq 0$ la variable spatiale. Le coefficient d'amortissement ξ est supposé constant et déterministe. La densité du milieu ρ et le module d'élasticité, E , sont des fonctions stochastiques de l'espace. La technique d'analyse la plus courante pour les variations spatiales des propriétés du sol consiste à décomposer les variations observées de chaque propriété en une fonction déterministe appelée tendance (ou moyenne) et une composante aléatoire de moyenne nulle. Dans une telle décomposition, la tendance représente l'effet de phénomènes qui influencent la formation du sol pendant de longues périodes, tandis que la composante aléatoire décrit les fluctuations de courte durée des états de formation du sol. Donc la densité du milieu ρ , et le module d'élasticité E , peuvent être exprimés comme la somme de leur valeur moyenne et la fluctuation [6,8] :

$$\rho(z, p) = \rho_0 (1 + \varepsilon_1(z, p)) \quad (2.3-a)$$

$$E(z, p) = E_{01} (1 + \varepsilon_2(z, p)) \quad (2.3-b)$$

où $\langle \rho \rangle = \rho_0$, $\langle E \rangle = E_{01}$, $\langle \varepsilon_1 \rangle = \langle \varepsilon_2 \rangle = 0$.

Les crochets $\langle \cdot \rangle$ sont utilisés pour désigner la valeur moyenne des propriétés de sol avec une densité de probabilité P définis par :

$$P : f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z, p) P(p) dp \quad (2.4)$$

Il est à noter que, en supposant que le coefficient de Poisson $\nu = 0.25$, nous avons $E_{01} = \mu_0$ pour les ondes de cisaillement (S) et $E_{01} = 3\mu_0$ pour les ondes de compression (P), où μ_0 désigne la valeur moyenne du module de cisaillement du milieu [8].

La figure 2.1 représente la schématisation d'une couche de sol à paramètres, module d'élasticité et masse volumique, stochastiques reposant sur un demi-espace homogène. Le système est soumis à sa base ($z = d$), où d est l'épaisseur de la couche, à une excitation harmonique de type sismique représentant une onde de cisaillement SH.

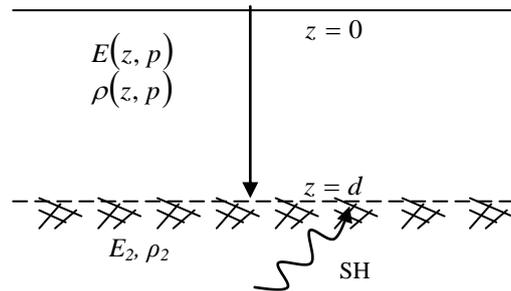


Fig.2.1- Géométrie d'un problème unidimensionnel (cas d'un monocouche).

Sous l'hypothèse d'un mouvement harmonique exciteur à la base du profil de sol (Fig. 2.1), le déplacement s'écrit:

$$v(z, t) = u(z) e^{i\omega t} \quad (2.5)$$

La substitution des équations (2.2), (2.3) et (2.5) dans l'équation (2.1) donne :

$$\frac{d}{dz} \left(E_{01} (1 + \varepsilon_2(z, p)) \frac{du}{dz} \right) + i\eta\omega \frac{d^2 u}{dz^2} + \omega^2 \rho_{01} (1 + \varepsilon_1(z, p)) u = 0 \quad (2.6)$$

divisons l'équation (2.6) par E_{01}

$$\frac{d}{dz} \left((1 + \varepsilon_2(z, p)) \frac{du}{dz} \right) + \frac{i\eta\omega}{E_{01}} \frac{d^2u}{dz^2} + \omega^2 \frac{\rho_{01}}{E_{01}} (1 + \varepsilon_1(z, p)) u = 0 \quad (2.7)$$

posons

$$\frac{\eta\omega}{E_{01}} = \kappa = 2\xi \quad (2.8)$$

avec ξ le coefficient d'amortissement, alors nous obtenons :

$$\frac{d}{dz} \left((1 + \varepsilon_2(z, p)) \frac{du}{dz} \right) + i2\xi \frac{d^2u}{dz^2} + \omega^2 \frac{\rho_{01}}{E_{01}} (1 + \varepsilon_1(z, p)) u = 0 \quad (2.9)$$

Si $E_{01} = \mu_{01}$ alors $V_s = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}} \equiv \sqrt{\frac{E_{01}}{\rho_{01}}} \Rightarrow \frac{\rho_{01}}{E_{01}} = \frac{1}{V_s^2}$ et $\omega^2 \frac{\rho_{01}}{E_{01}} = \frac{\omega^2}{V_s^2} = k^2$

ou k est le nombre d'onde, donc :

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{k^2}{1 + 2i\xi} u + \frac{1}{1 + 2i\xi} \frac{d}{dz} \left(\varepsilon_2(z, p) \frac{du}{dz} \right) + \frac{k^2}{1 + 2i\xi} \varepsilon_1(z, p) u = 0 \quad (2.10)$$

nous avons

$$k^2 = \frac{\omega^2}{V_s^2} \Leftrightarrow \frac{k^2}{1 + 2i\xi} = \frac{\omega^2}{(1 + 2i\xi)V_s^2} \quad (2.11)$$

mais l'amortissement peut être incorporé dans l'expression de la vitesse selon Wolf comme [37]:

$$V_s^* = V_s \sqrt{1 + 2i\xi} \quad \text{ou} \quad V_s^{*2} = V_s^2 (1 + 2i\xi) \quad (2.12)$$

d'où nous avons le nombre d'onde complexe :

$$k^{*2} = \frac{\omega^2}{V_s^{*2}} \Rightarrow k^* = \frac{\omega}{V_s^*} \quad (2.13)$$

donc l'équation (2.10) devient :

$$\frac{d^2u}{dz^2} + k^{*2}u + \frac{1}{1+i\kappa} \frac{d}{dz} \left(\varepsilon_2(z, p) \frac{du}{dz} \right) + k^{*2} \varepsilon_1(z, p)u = 0 \quad (2.14)$$

est l'équation de propagation d'une onde de cisaillement dans un milieu viscoélastique stochastiquement non homogène.

et, pour des ondes harmoniques de cisaillement l'équation (2.2) devient :

$$\tau(z) = \mu_0 (1 + \varepsilon_2(z, p)) \frac{\partial u(z)}{\partial z} + i\omega\eta \frac{\partial u(z)}{\partial z} \quad (2.15)$$

où encore :

$$\tau(z) = \mu_0 \left[1 + \varepsilon_2(z, p) + \frac{i\omega\eta}{\mu_0} \right] \frac{\partial u(z)}{\partial z} \quad (2.16)$$

posons $q = \frac{1}{1+i\kappa}$ alors :

$$\tau(z) = \mu_0 \left[\frac{1}{q} + \varepsilon_2(z, p) \right] \frac{du(z)}{dz} \quad (2.17)$$

L'équation (2.14) est une équation différentielle du second ordre. Pour la résoudre nous allons faire le changement de variables suivant :

$$u(z) = y_1(z) \quad (2.18-a)$$

$$\frac{du(z)}{dz} = y_2(z) \quad (2.18-b)$$

d'où l'équation (2.14) devient :

$$\frac{d}{dz} y_2(z) + k^{*2} y_1(z) + q \frac{d}{dz} (\varepsilon_2(z, p) y_2(z)) + k^{*2} \varepsilon_1(z, p) y_1(z) = 0 \quad (2.19)$$

que nous allons écrire sous forme matricielle :

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} 0 \cdot y_1(z) \\ y_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^{*2} & 0 \end{bmatrix} \underline{Y} = \begin{bmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(y) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Avec

$$g_2(y) = -q \frac{d}{dz} (\varepsilon_2(z, p) y_2(z)) - k^{*2} \varepsilon_1(z, p) y_1(z) \quad (2.21)$$

donc l'équation (2.14) peut être écrite sous la forme :

$$\frac{dy_2(z)}{dz} = -k^{*2} y_1(z) + g_2(y) \quad (2.22)$$

qui peut être réduite à l'équation matricielle différentielle du premier ordre de la forme [38]:

$$\frac{d\underline{Y}}{dz} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{Y} + \underline{g}(y(z)) \quad (2.23)$$

avec :

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^{*2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{Y} = \begin{bmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \end{bmatrix}, \quad \underline{g}(y) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(y) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

L'équation (2.23) est une équation différentielle du 1^{er} ordre sous forme matricielle que nous allons résoudre par la méthode ou l'approche matricielle et comme $\underline{g}(y)$ est variable, notre système différentiel linéaire est de la forme :

$$\underline{y}'(z) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{y}(z) + \underline{b}(z) \quad (2.25)$$

avec :

$$\underline{b}(z) = \underline{g}(y(z)) \quad (2.26)$$

qui se résout en 2 étapes

- recherche de la solution homogène $y_c(z)$
- recherche de la solution particulière $y_p(z)$

la solution générale du système non homogène est :

$$\underline{y}(z) = \underline{y}_c(z) + \underline{y}_p(z) \quad (2.27)$$

il existe plusieurs méthode de résolution du système (2.25)[38].

- **Solution homogène**

Nous pouvons utiliser la méthode de la matrice fondamentale [38]. Soit $\underline{\Phi}(z)$ une matrice fondamentale pour le système linéaire homogène du premier ordre :

$$\underline{y}'(z) = \underline{A} \cdot \underline{y}(z) \quad (2.28)$$

si on définit un vecteur

$$\underline{y}(z) = e^{z \cdot \underline{A}} \cdot \underline{v} \quad (2.29)$$

avec

$$e^{z \cdot \underline{A}} = \underline{I} + z \underline{A} + \frac{z^2}{2!} \underline{A}^2 + \frac{z^3}{3!} \underline{A}^3 + \dots \quad (2.30)$$

où \underline{I} la matrice unitaire

Alors

$$\frac{d\underline{y}(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \left(e^{z \cdot \underline{A}} \right) \cdot \underline{v} = \underline{A} \cdot e^{z \cdot \underline{A}} \cdot \underline{v} = \underline{A} \cdot \underline{y} \quad (2.31)$$

qui est donc une solution

Posons $a^2 = -k^{*2}$

Et

$$z \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & z \\ a^2 z & 0 \end{bmatrix} = \underline{B} \quad (2.32)$$

D'où :

$$\underline{B}^2 = \begin{bmatrix} a^2 z^2 & 0 \\ 0 & a^2 z^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}}^3 = \begin{bmatrix} 0 & a^2 z^3 \\ a^4 z^3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}}^4 = \begin{bmatrix} a^4 z^4 & 0 \\ 0 & a^4 z^4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}}^5 = \begin{bmatrix} 0 & a^4 z^5 \\ a^6 z^5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}}^6 = \begin{bmatrix} a^6 z^6 & 0 \\ 0 & a^6 z^6 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

selon les équations (2.30) et (2.32) on a :

$$\begin{aligned} e^{z \cdot \underline{\underline{A}}} &= e^{\underline{\underline{B}}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{B}} + \frac{\underline{\underline{B}}^2}{2!} + \frac{\underline{\underline{B}}^3}{3!} + \dots & (2.33) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & z \\ a^2 z & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} a^2 z^2 & 0 \\ 0 & a^2 z^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} 0 & a^2 z^3 \\ a^4 z^3 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{4!} \begin{bmatrix} a^4 z^4 & 0 \\ 0 & a^4 z^4 \end{bmatrix} + \frac{1}{5!} \begin{bmatrix} 0 & a^4 z^5 \\ a^6 z^5 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6!} \begin{bmatrix} a^6 z^6 & 0 \\ 0 & a^6 z^6 \end{bmatrix} + \dots \end{aligned}$$

D'où :

$$e^{z \cdot \underline{\underline{A}}} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{a^2 z^2}{2!} + \frac{a^4 z^4}{4!} + \frac{a^6 z^6}{6!} + \dots & 0 + z + 0 + \frac{a^2 z^3}{3!} + \frac{a^4 z^5}{5!} + \dots \\ 0 + a^2 z^2 + \frac{a^4 z^3}{3!} + \frac{a^6 z^5}{5!} + \dots & 1 + \frac{a^2 z^2}{2!} + \frac{a^4 z^4}{4!} + \frac{a^6 z^6}{6!} + \dots \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

posons

$$\begin{aligned} \phi_{11} = \phi_{22} &= 1 + \frac{a^2 z^2}{2!} + \frac{a^4 z^4}{4!} + \frac{a^6 z^6}{6!} + \dots \\ &= 1 + \frac{(az)^2}{2!} + \frac{(az)^4}{4!} + \frac{(az)^6}{6!} + \dots & (2.35) \\ \Rightarrow \phi_{11} = \phi_{22} &= \cosh(az) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{12} &= z + \frac{a^2 z^3}{3!} + \frac{a^4 z^5}{5!} + \dots \\
&= \frac{1}{a} \left[az + \frac{a^3 z^3}{3!} + \frac{a^5 z^5}{5!} + \dots \right] = \frac{1}{a} \left[az + \frac{(az)^3}{3!} + \frac{(az)^5}{5!} + \dots \right] \\
\Rightarrow \phi_{12} &= \frac{\sinh(az)}{a}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{12} &= z + \frac{a^2 z^3}{3!} + \frac{a^4 z^5}{5!} + \dots \\
&= \frac{1}{a} \left[az + \frac{a^3 z^3}{3!} + \frac{a^5 z^5}{5!} + \dots \right] = \frac{1}{a} \left[az + \frac{(az)^3}{3!} + \frac{(az)^5}{5!} + \dots \right] \\
\Rightarrow \phi_{12} &= \frac{\sinh(az)}{a}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{21} &= a^2 z^2 + \frac{a^4 z^3}{3!} + \frac{a^6 z^5}{5!} + \dots \\
&= a \left(az^2 + \frac{a^3 z^3}{3!} + \frac{a^5 z^5}{5!} + \dots \right) = a^2 \left(\frac{1}{a} \left(az + \frac{(az)^3}{3!} + \frac{(az)^5}{5!} + \dots \right) \right) \\
\Rightarrow \phi_{21} &= a^2 \cdot \frac{\sinh(az)}{a}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Alors la matrice fondamentale s'écrit :

$$\phi(z) = \begin{bmatrix} \cosh(az) & \frac{\sinh(az)}{a} \\ a \sinh(az) & \cosh(az) \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

La résolution de l'équation différentielle et faite selon l'approche matriciel [38], ce pendant cette équation est aussi généralement résolu par la méthode de variation des paramètre on utilisons la fonction de Green, qui l'on note G, donc si on pose :

$$G(z) = \phi_{12} = \frac{\sinh(az)}{a} = \frac{1}{a} \left[\frac{e^{az} - e^{-az}}{2} \right] \tag{2.40}$$

Alors :

$$\frac{dG(z)}{dz} = \frac{1}{a} \left[\frac{a \cdot e^{az} + a \cdot e^{-az}}{2} \right] = \frac{e^{az} + a \cdot e^{-az}}{2} = \cosh(az) \tag{2.41}$$

Donc

$$\underline{\phi}(z) = \begin{bmatrix} \frac{dG(z)}{dz} & G(z) \\ a^2 G(z) & \frac{dG(z)}{dz} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

qui satisfait la condition :

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

D'où la solution homogène

$$\underline{y}_c(z) = e^{z \cdot \underline{A}} \cdot \underline{c} = \underline{\phi}(z) \cdot \underline{c} \quad (2.44)$$

où

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Sont les constantes d'intégration.

- **Solution particulière**

Cherchons la solution particulière donnée sous la forme [38] :

$$\underline{y}_p(z) = e^{z \cdot \underline{A}} \cdot \underline{u}_p(z) \quad (2.45)$$

Donc :

$$\underline{y}'_p(z) = \underline{A} \cdot e^{z \cdot \underline{A}} \cdot \underline{u}_p(z) + e^{z \cdot \underline{A}} \cdot \underline{u}'_p(z) \quad (2.46)$$

et

$$\underline{u}'_p(z) = e^{-z \cdot \underline{A}} \cdot \underline{b}(z) \quad (2.47)$$

D'où $\underline{u}_p(z)$ est obtenue par intégration de chaque élément pour obtenir l'intégral particulière

$$\underline{u}_p(z) = \int e^{-z \cdot \underline{A}} \cdot \underline{b}(z) \quad (2.48)$$

alors la solution particulière est :

$$\underline{y}_p(z) = e^{z \cdot A} \cdot \underline{u}_p(z) = e^{z \cdot A} \int e^{-z \cdot A} \cdot \underline{b}(z) \cdot dz \quad (2.49)$$

donc la solution générale selon l'équation (2.27) étant :

$$\underline{y}(z) = \underline{\phi}(z) \cdot \underline{c} + e^{z \cdot A} \int e^{-z \cdot A} \cdot \underline{b}(z) \cdot dz \quad (2.50)$$

qui est une intégrale indéfinie.

Si cette intégrale est définie pour $\alpha \leq z \leq \beta$, soit a un point quelconque de l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

L'intégrale indéfinie (2.50) peut être rendue définie en prenant une variable z' et une intégrale

$$\int_a^z e^{-z' \cdot A} \cdot \underline{b}(z') \cdot dz' \quad (2.51)$$

tel que :

$$\begin{aligned} e^{z \cdot A} \int e^{-z \cdot A} \cdot \underline{b}(z) \cdot dz &= e^{z \cdot A} \int_a^z e^{-z' \cdot A} \cdot \underline{b}(z') \cdot dz' \\ &= \int_a^z e^{(z-z') \cdot A} \cdot \underline{b}(z') \cdot dz' = \int_a^z \underline{\phi}(z-z') \cdot \underline{b}(z') \cdot dz' \end{aligned} \quad (2.52)$$

en prenant $a = 0$ alors l'équation (2.50) devient :

$$\underline{y}(z) = \underline{\phi}(z) \cdot \underline{c} + \int_0^z \underline{\phi}(z-z') \cdot \underline{b}(z') \cdot dz' \quad (2.53)$$

avec

$$\underline{b}(z') = \underline{g}(\underline{y}(z'))$$

donc

$$\underline{y}(z) = \underline{\phi}(z) \cdot \underline{c} + \int_0^z \underline{\phi}(z-z') \cdot \underline{g}(\underline{y}(z')) \cdot dz' \quad (2.54)$$

on substituant les conditions initiales :

$$\underline{Y}_0 = \underline{y}(0) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) \\ \frac{du}{dz}(0) \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Dans l'équation (2.54) on obtient :

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\phi}}(0) \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

D'où :

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \underline{Y}_0 \quad (2.57)$$

Donc l'équation (2.54) devient :

$$\underline{Y}(z) = \underline{\underline{\phi}}(z) \cdot \underline{Y}_0 + \int_0^z \underline{\underline{\phi}}(z-z') \cdot \underline{g}(y(z')) \cdot dz' \quad (2.58)$$

avec :

$$\underline{\underline{\Phi}}(z) = \begin{bmatrix} \frac{dG(z)}{dz} & G(z) \\ -k^{*2}G(z) & \frac{dG(z)}{dz} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

et $G(z)$ est la fonction de Green définie par [38].

On a :

$$\begin{aligned} \underline{Y}(z) = \begin{bmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u(z) \\ \frac{du}{dz}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dG(z)}{dz} & G(z) \\ -k^{*2}G(z) & \frac{dG(z)}{dz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \\ &+ \int_0^z \begin{bmatrix} \frac{dG(z-z')}{dz} & G(z-z') \\ -k^{*2}G(z-z') & \frac{dG(z-z')}{dz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -q \frac{d}{dz'} \varepsilon_2 \frac{du}{dz'} - k^{*2} \varepsilon_1 u \end{bmatrix} \cdot dz' \end{aligned} \quad (2.60)$$

qui donne :

$$\begin{bmatrix} u(z) \\ \frac{du}{dz}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dG(z)}{dz} Y_1 + G(z) Y_2 \\ -k^{*2} G(z) Y_1 + \frac{dG(z)}{dz} Y_2 \end{bmatrix} + \int_0^z \begin{bmatrix} G(z-z') \left[-q \frac{d}{dz'} \varepsilon_2 \frac{du}{dz'} - k^{*2} \varepsilon_1 u \right] \\ \frac{dG}{dz}(z-z') \left[-q \frac{d}{dz'} \varepsilon_2 \frac{du}{dz'} - k^{*2} \varepsilon_1 u \right] \end{bmatrix} \cdot dz' \quad (2.61)$$

En vertu de l'intégration par parties dans l'équation (2.61), on obtient :

$$u(z) = \frac{dG(z)}{dz} Y_1 + G(z) Y_2 - \left[G(z-z') q \varepsilon_2(z') \frac{du(z')}{dz'} \right]_0^z - \int_0^z \frac{dG}{dz} (z-z') \varepsilon_2(z') \frac{du(z')}{dz'} dz' - k^{*2} \int_0^z G(z-z') \varepsilon_1(z') u(z') dz' \quad (2.62)$$

et

$$\frac{du(z)}{dz} = -k^{*2} G(z,0) Y_1 + \frac{dG(z,0)}{dz} Y_2 - \left[q \frac{dG(z,z')}{dz} \varepsilon_2(z') \frac{du(z')}{dz} \right]_0^z + q \int_0^z \frac{d}{dz'} \frac{dG(z,z')}{dz} \varepsilon_2(z') \frac{du(z')}{dz'} dz' - k^{*2} \int_0^z \frac{dG(z,z')}{dz} \varepsilon_1(z') u(z') dz' \quad (2.63)$$

ce qui donne :

$$u(z) = \frac{\partial G(z,0)}{\partial z} Y_1 + [1 + q \varepsilon_2(0)] G(z,0) Y_2 - q \int_0^z \left[\frac{\partial G(z-z')}{\partial z} \varepsilon_2(z') \frac{du(z')}{dz'} + \frac{k^{*2}}{q} G(z-z') \varepsilon_1(z') u(z') \right] dz' \quad (2.64)$$

et

$$\frac{du(z)}{dz} = -k^{*2} G(z,0) Y_1 + [1 + q \varepsilon_2(0)] \frac{\partial G(z,0)}{\partial z} Y_2 - q \varepsilon_2(z) \frac{du(z)}{dz} + k^{*2} \int_0^z \left[q \cdot G(z-z') \varepsilon_2(z') \frac{du(z')}{dz'} - \frac{\partial G(z-z')}{\partial z} \varepsilon_1(z') u(z') \right] dz' \quad (2.65)$$

2.2.2. Calcul de la contrainte moyenne

Pour une excitation harmonique, l'équation constitutive est donnée par l'équation (2.17).

En substitution l'équation (2.65), l'équation (2.17) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\tau(z) &= \mu_0 \left[(1 + 2i\xi) \frac{du(z)}{dz} + \varepsilon_2(z, p) \frac{du(z)}{dz} \right] \\
&= \mu_0 \left\{ \frac{1}{q} \frac{du(z)}{dz} + \varepsilon_2(z, p) \left[-k^{*2} G(z, 0) Y_1 + [1 + q\varepsilon_2(0)] \frac{\partial G(z, 0)}{\partial z} Y_2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - q\varepsilon_2(z) \frac{du(z)}{dz} + k^{*2} \int_0^z \left[q \cdot G(z - z') \varepsilon_2(z') \frac{du(z')}{dz'} - \frac{\partial G(z - z')}{\partial z} \varepsilon_1(z') u(z') \right] dz' \right\} \quad (2.66)
\end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}
\tau(z) &= \mu_0 \left\{ \frac{1}{q} \frac{du(z)}{dz} - k^{*2} \varepsilon_2(z) G(z, 0) Y_1 + \varepsilon_2(z) \frac{\partial G(z, 0)}{\partial z} Y_2 \right. \\
&\quad \left. + q\varepsilon_2(0) \varepsilon_2(z) \frac{\partial G(z, 0)}{\partial z} Y_2 - q\varepsilon_2(z) \varepsilon_2(z) \frac{du(z)}{dz} \right. \\
&\quad \left. + k^{*2} \int_0^z \left[q \cdot G(z - z') \varepsilon_2(z') \varepsilon_2(z') \frac{du(z')}{dz'} - \frac{\partial G(z - z')}{\partial z} \varepsilon_2(z') \varepsilon_1(z') u(z') \right] dz' \right\} \quad (2.67)
\end{aligned}$$

Pour obtenir les équations pour le déplacement et la contrainte moyenne l'approximation suivante est adoptée [6-9]:

$$\langle \varepsilon_i(z) \varepsilon_j(z') u(z) \rangle \approx N_{ij}(z - z') \langle u(z) \rangle \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.68)$$

où

$$N_{ij}(z - z') = \langle \varepsilon_i(z) \varepsilon_j(z') \rangle \quad (2.69)$$

et $\varepsilon_j(z)$ sont des fonctions stationnaires aléatoires. Cette approximation est équivalente à l'hypothèse de «indépendance locale » de Bourret [39].

La moyenne statistique de l'équation (2.67), donne [27,38] :

$$\begin{aligned}
\langle \tau(z) \rangle = & \mu_0 \left\{ \frac{1}{q} \frac{d\langle u(z) \rangle}{dz} - k^{*2} \langle \varepsilon_2(z) \rangle G(z,0) Y_1 + \langle \varepsilon_2(z) \rangle \frac{\partial G(z,0)}{\partial z} Y_2 \right. \\
& + q \langle \varepsilon_2(0) \varepsilon_2(z) \rangle \frac{\partial G(z,0)}{\partial z} Y_2 - q \langle \varepsilon_2(z) \varepsilon_2(z) \rangle \frac{d\langle u(z) \rangle}{dz} \\
& \left. + k^{*2} \int_0^z \left[q \cdot G(z-z') \langle \varepsilon_2(z') \varepsilon_2(z') \rangle \frac{d\langle u(z') \rangle}{dz'} - \frac{\partial G(z-z')}{\partial z} \langle \varepsilon_2(z') \varepsilon_1(z') \rangle \langle u(z') \rangle \right] dz' \right\}
\end{aligned} \tag{2.70}$$

avec les définitions des fluctuations centrés [6,8,25]

$$\langle \varepsilon_1(z) \rangle = \langle \varepsilon_2(z) \rangle = 0 \tag{2.71}$$

et l'approximation (2.69), la contrainte moyenne est donnée par :

$$\begin{aligned}
\langle \tau(z) \rangle = & \mu_0 \left\{ \frac{1}{q} [1 - q^2 N_{22}(0)] \frac{d\langle u(z) \rangle}{dz} + q N_{22}(z) \frac{\partial G(z,0)}{\partial z} Y_2 \right. \\
& \left. + k^{*2} \int_0^z \left[q \cdot G(z-z') N_{22}(z-z') \frac{d\langle u(z') \rangle}{dz'} - \frac{\partial G(z-z')}{\partial z} N_{12}(z-z') \langle u(z') \rangle \right] dz' \right\}
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Pour déterminer l'équation différentielle relative aux déplacements moyens, on doit dériver $\langle \tau(z) \rangle$ par rapport à z conformément à l'équation de mouvement (2.1).

En substituant les équations (2.5) et l'équation

$$\tau(z, t) = \tau(z) \cdot e^{i\omega t} \tag{2.73}$$

dans l'équation (2.1) on obtient :

$$\frac{\partial [\tau(z) \cdot e^{i\omega t}]}{\partial z} = \rho(z, p) \frac{\partial^2}{\partial t^2} [u(z) \cdot e^{i\omega t}]$$

d'où :

$$\frac{\partial \tau(z)}{\partial z} + \omega^2 \rho(z, p) u(z) = 0$$

donc l'équation d'onde relative aux déplacement moyen peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \langle \tau(z) \rangle}{\partial z} + \omega^2 \langle \rho(z, p) u(z) \rangle = 0 \quad (2.74)$$

En introduit l'expression de ρ (Eq.2.3-a) on obtient :

$$\frac{\partial \langle \tau(z) \rangle}{\partial z} + \omega^2 \rho_0 [\langle u(z) \rangle + \langle \varepsilon_1(z) u(z) \rangle] = 0 \quad (2.75)$$

2.2.3. Equation d'onde moyenne

La dérivée partielle de la contrainte moyenne (Eq.2.72) par rapport à z donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \tau(z) \rangle}{\partial z} = & \mu_0 \left\{ \frac{1}{q} [1 - q^2 N_{22}(0)] \frac{d^2 \langle u(z) \rangle}{dz^2} + q \frac{\partial}{\partial z} \left[N_{22}(z) \frac{\partial G(z, 0)}{\partial z} \right] Y_2 \right. \\ & \left. + k^{*2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\int_0^z \left[q \cdot G(z - z') N_{22}(z - z') \frac{d \langle u(z') \rangle}{dz'} - \frac{\partial G(z - z')}{\partial z} N_{12}(z - z') \langle u(z') \rangle \right] dz' \right] \right\} \quad (2.76) \end{aligned}$$

posons

$$I(z) = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^z \left[q \cdot G(z - z') N_{22}(z - z') \frac{d \langle u(z') \rangle}{dz'} - \frac{\partial G(z - z')}{\partial z} N_{12}(z - z') \langle u(z') \rangle \right] dz' \quad (2.77)$$

Puisque $I(z)$ ne dépend que de z alors $\frac{\partial}{\partial z}$ et remplacé par $\frac{d}{dz}$, puis nous utilisons la règle de Leibnitz [38]:

$$\frac{d}{dz} \int_{A(z)}^{B(z)} F(z, z') dz' = \int_{A(z)}^{B(z)} \frac{\partial F(z, z')}{\partial z} dz' + F(z, z') \Big|_{z'=B(z)} \frac{dB}{dz} - F(z, z') \Big|_{z'=A(z)} \frac{dA}{dz} \quad (2.78)$$

L'équation (2.77) devient :

$$\begin{aligned} I(z) = & q \frac{\partial}{\partial z} \int_0^z G(z - z') N_{22}(z - z') \frac{d \langle u(z') \rangle}{dz'} dz' \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \int_0^z \frac{\partial G(z - z')}{\partial z} N_{12}(z - z') \langle u(z') \rangle dz' \quad (2.79) \end{aligned}$$

d'où :

$$I(z) = q \cdot I_1(z) - I_2(z) \quad (2.80)$$

avec :

$$I_1(z) = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^z G(z-z') N_{22}(z-z') \frac{d\langle u(z') \rangle}{dz'} dz' \quad (2.81-a)$$

et

$$I_2(z) = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^z \frac{\partial G(z-z')}{\partial z} N_{12}(z-z') \langle u(z') \rangle dz' \quad (2.81-b)$$

posons :

$$K_{22}(z-z') = G(z-z') N_{22}(z-z') \quad (2.82-a)$$

et

$$K_{12}(z-z') = \frac{\partial G(z-z')}{\partial z} N_{12}(z-z') \quad (2.82-b)$$

les propriétés suivantes en découlent:

$$K_{22}(0) = 0, \quad K_{12}(0) = N_{12}(0)$$

$$\frac{\partial K_{22}}{\partial z'} = -\frac{\partial K_{22}}{\partial z}, \quad \frac{\partial K_{12}}{\partial z'} = -\frac{\partial K_{12}}{\partial z}$$

avec :

$$\frac{d}{dz} \int_{z'=0}^z K_{22} \frac{d\langle u(z') \rangle}{dz'} dz' = - \int_{z'=0}^z \frac{\partial K_{22}}{\partial z'} \frac{\partial \langle u(z') \rangle}{\partial z'} dz' \quad (2.83-a)$$

$$\frac{d}{dz} \int_{z'=0}^z K_{12} \langle u(z') \rangle dz' = N_{12}(0) \langle u(z) \rangle - \int_{z'=0}^z \frac{\partial K_{12}}{\partial z'} \langle u(z') \rangle dz' \quad (2.83-b)$$

selon les équations (2.83), les équation (2.81) devient :

$$I_1(z) = - \int_0^z \frac{\partial}{\partial z} [G(z-z') N_{22}(z-z')] \frac{d\langle u(z') \rangle}{dz'} dz' \quad (2.84-a)$$

et

$$I_2(z) = N_{12}(0) \langle u(z) \rangle - \int_0^z \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{\partial G(z-z')}{\partial z} N_{12}(z-z') \right] \langle u(z') \rangle dz' \quad (2.84-b)$$

Puis intégrons par partie on obtient:

$$I_1(z) = G(z)N_{22}(z)Y_2 + \int_0^z G(z-z')N_{22}(z-z')\frac{d^2\langle u(z') \rangle}{dz'^2} dz' \quad (2.85-a)$$

et

$$I_2(z) = \frac{\partial G(z)}{\partial z} N_{12}(z)Y_1 + \int_0^z \frac{\partial G(z-z')}{\partial z} N_{12}(z-z')\frac{d\langle u(z') \rangle}{dz'} dz' \quad (2.85-b)$$

En substituant les équations (2.85) dans l'équation (2.80) donne :

$$\begin{aligned} I(z) = & -\frac{\partial G(z)}{\partial z} N_{12}(z)Y_1 + qG(z)N_{22}(z)Y_2 \\ & + \int_0^z \left[qG(z-z')N_{22}(z-z')\frac{d^2\langle u(z') \rangle}{dz'^2} - \frac{\partial G(z-z')}{\partial z} N_{12}(z-z')\frac{d\langle u(z') \rangle}{dz'} \right] dz' \end{aligned} \quad (2.86)$$

alors la dérivée de la contrainte moyenne est obtenu par la substituant de l'équation (2.86) dans l'équation (2.76), qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \tau(z) \rangle}{\partial z} = & \mu_0 \left\{ \frac{1}{q} [1 - q^2 N_{22}(0)] \frac{d^2\langle u(z) \rangle}{dz^2} - k^{*2} \frac{\partial G(z)}{\partial z} N_{12}(z)Y_1 \right. \\ & + q \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(N_{22}(z) \frac{\partial G(z)}{\partial z} \right) + k^{*2} G(z)N_{22}(z) \right] Y_2 \\ & \left. + k^{*2} \int_0^z \left[q \cdot G(z-z')N_{22}(z-z')\frac{d^2\langle u(z') \rangle}{dz'^2} - \frac{\partial G(z-z')}{\partial z} N_{12}(z-z')\frac{d\langle u(z') \rangle}{dz'} \right] dz' \right\} \end{aligned} \quad (2.87)$$

Calculons maintenant :

$$Q(z) = \rho_0 [\langle u(z) \rangle + \langle \varepsilon_1(z)u(z) \rangle] \quad (2.88)$$

Remplaçons $u(z)$ par son expression (Eq.2.64), $Q(z)$ s'exprime

$$Q(z) = \rho_0 \langle u(z) \rangle + qG(z)N_{12}(z)Y_2 - q \int_0^z \left[\frac{\partial G(z-z')}{\partial z} N_{12}(z-z') \frac{d\langle u(z') \rangle}{dz'} + \frac{k^{*2}}{q} G(z-z') N_{11}(z-z') \langle u(z') \rangle \right] dz' \quad (2.89)$$

En substituant les équations (2.87) et (2.89) dans l'équation (2.75) on peut obtenir l'équation Intégré-différentielle suivante pour le déplacement moyen:

$$\begin{aligned} & (1 - q^2 N_{22}(0)) \frac{d^2 \langle u(z) \rangle}{dz^2} + k^{*2} \langle u(z) \rangle - k^{*2} q N_{12}(z) \frac{\partial G(z)}{\partial z} Y_1 \\ & + \left[q^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(N_{22}(z) \frac{\partial G(z,0)}{\partial z} \right) + k^{*2} q N_{12}(z) G(z) + k^{*2} q^2 N_{22}(z) G(z) \right] Y_2 \\ & + k^{*2} q \cdot \int_0^z \left[q \cdot N_{22}(z-z') G(z-z') \frac{d^2 \langle u(z') \rangle}{dz'^2} \right. \\ & \left. - 2N_{12}(z-z') \frac{\partial G(z-z')}{\partial z} \frac{d\langle u(z') \rangle}{dz'} - \frac{k^{*2}}{q} N_{11}(z-z') G(z-z') \langle u(z') \rangle \right] dz' = 0 \end{aligned} \quad (2.90)$$

La meilleure fonction de corrélation qui a été utilisée dans un bon nombre d'investigations et d'ajustements de données expérimentales, est la fonction exponentielle [6,8].

$$N_{ij}(z-z') = \sigma_{ij}^2 e^{-\left(\frac{|z-z'|}{\alpha}\right)}, \quad (i,j = 1, 2) \quad (2.91)$$

où $\sigma_{ij}^2 = N_{ij}(0)$ représente la variance, α la longueur de corrélation et $\beta = 1/\alpha > 0$ est le rayon de corrélation.

2.2.4. Calcul des champs de déplacements et de contraintes

2.2.4.1. Solution de l'équation d'onde par la transformée de Laplace

L'équation Intégré-différentielle obtenue (Eq-2.90) peut être résolue par la méthode de la transformée de Laplace qui est définie par [38]:

$$\mathbf{U}(s) = \int_0^{\infty} \langle u(z) \rangle e^{-sz} dz \quad (2.92)$$

L'équation (2.90) peut se mettre sous la forme :

$$A \frac{d^2 \langle u(z) \rangle}{dz^2} + k^{*2} \langle u(z) \rangle = g^*(z) \quad (2.93)$$

avec :

$$g^*(z) = -B_1(z)Y_1 - B_2(z)Y_2 - k^{*2} q \int_0^z f(z-z') dz' \quad (2.94)$$

où :

$$A = 1 - q^2 N_{22}(0) \quad (2.95-a)$$

$$B_1(z) = -k^{*2} q N_{12}(z) \frac{\partial G(z)}{\partial z} \quad (2.95-b)$$

$$B_2(z) = \left[q^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(N_{22}(z) \frac{\partial G(z,0)}{\partial z} \right) + k^{*2} q N_{12}(z) G(z) + k^{*2} q^2 N_{22}(z) G(z) \right] \quad (2.95-c)$$

$$f(z-z') = q \cdot N_{22}(z-z') G(z-z') \frac{d^2 \langle u(z') \rangle}{dz'^2} - 2N_{12}(z-z') \frac{\partial G(z-z')}{\partial z} \frac{d \langle u(z') \rangle}{dz'} - \frac{k^{*2}}{q} N_{11}(z-z') G(z-z') \langle u(z') \rangle \quad (2.95-d)$$

La transformé de Laplace de l'équation (2.93) est :

$$A \cdot \mathcal{L} \left\{ \langle u(z) \rangle'' \right\} + k^{*2} \mathcal{L} \left\{ \langle u(z) \rangle \right\} = \mathcal{L} \{ g(z) \} \quad (2.96)$$

où \mathcal{L} est le symbole de la transformée de Laplace. Sachant que [38]:

$$\mathcal{L}\{\langle u(z) \rangle\} = \langle u(s) \rangle = \int_0^{\infty} \langle u(z) \rangle e^{-sz} dz \quad (2.97)$$

et

$$\mathcal{L}\{\langle u(z) \rangle''\} = s^2 \langle u(s) \rangle - s \langle u(0) \rangle - \langle u(0) \rangle' = s^2 \langle u(s) \rangle - s Y_1 - Y_2 \quad (2.98)$$

soit $\mathcal{L}\{g^*(z)\} = R(s)$ l'équation (2.96) devient :

$$A \cdot (s^2 \langle u(s) \rangle - s Y_1 - Y_2) + k^{*2} \langle u(s) \rangle = R(s) \quad (2.99)$$

d'où :

$$\langle u(s) \rangle = \frac{A \cdot (s Y_1 - Y_2) + R(s)}{A s^2 + k^{*2}} \quad (2.100)$$

Posons :

$$S_1(z) = N_{12}(z)G(z) = \sigma_{12}^2 e^{-\beta \cdot z} \cdot \frac{\sinh[ik^{*2}z]}{ik^{*2}} \quad (2.101-a)$$

$$S_2(z) = N_{22}(z) \frac{\partial G(z)}{\partial z} = \sigma_{22}^2 e^{-\beta \cdot z} \cdot \cosh[ik^{*2}z] \quad (2.101-b)$$

$$S_3(z) = N_{12}(z) \frac{\partial G(z)}{\partial z} = \sigma_{12}^2 e^{-\beta \cdot z} \cdot \cosh[ik^{*2}z] \quad (2.101-c)$$

$$S_4(z) = N_{22}(z)G(z) = \sigma_{22}^2 e^{-\beta \cdot z} \cdot \frac{\sinh[ik^{*2}z]}{ik^{*2}} \quad (2.101-d)$$

$$K_{11}(z - z') = N_{11}(z - z')G(z - z') = \sigma_{11}^2 e^{-\beta(z-z')} \cdot \frac{\sinh[ik^{*2}(z - z')]}{ik^{*2}} \quad (2.101-e)$$

$$K_{12}(z - z') = N_{12}(z - z') \frac{\partial G(z - z')}{\partial z} = \sigma_{12}^2 e^{-\beta(z-z')} \cdot \cosh[ik^{*2}(z - z')] \quad (2.101-f)$$

$$K_{22}(z-z') = N_{22}(z-z')G(z-z') = \sigma_{22}^2 e^{-\beta(z-z')} \cdot \frac{\sinh\left[ik^{*2}(z-z')\right]}{ik^{*2}} \quad (2.101-g)$$

donc :

$$B_1(z) = -k^{*2} q \cdot S_3 \quad (2.102-a)$$

$$B_2(z) = q^2 \left[-\beta \cdot S_2 - k^{*2} S_4 \right] + k^{*2} q S_1 + k^{*2} q^2 S_4 \quad (2.102-b)$$

$$f(z-z') = q \cdot K_{22}(z-z') \frac{d^2 \langle u(z') \rangle}{dz'^2} - 2K_{12}(z-z') \frac{d \langle u(z') \rangle}{dz'} - \frac{k^{*2}}{q} K_{11}(z-z') \langle u(z') \rangle \quad (2.102-c)$$

avec :

$$S_1 = \mathcal{L}\{S_1(z)\} = \frac{\sigma_{12}^2}{d(s)} \quad (2.103-a)$$

$$S_2 = \mathcal{L}\{S_2(z)\} = \frac{\sigma_{22}^2(s+\beta)}{d(s)} \quad (2.103-b)$$

$$S_3 = \mathcal{L}\{S_3(z)\} = \frac{\sigma_{12}^2(s+\beta)}{d(s)} \quad (2.103-c)$$

$$S_4 = \mathcal{L}\{S_4(z)\} = \frac{\sigma_{22}^2}{d(s)} \quad (2.103-d)$$

$$K_{11} = \mathcal{L}\{K_{11}(z)\} = \frac{\sigma_{11}^2}{d(s)} \quad (2.103-e)$$

$$K_{12} = \mathcal{L}\{K_{12}(z)\} = \frac{\sigma_{12}^2(s+\beta)}{d(s)} \quad (2.103-f)$$

$$K_{22} = \mathcal{L}\{K_{22}(z)\} = \frac{\sigma_{22}^2}{d(s)} \quad (2.103-g)$$

$$d(s) = (s+\beta)^2 + k^{*2} \quad (2.103-h)$$

on a :

$$R(s) = \mathcal{L}\{g(z)\} = \mathcal{L}\left\{-B_1(z)Y_1 - B_2(z)Y_2 - k^{*2}q \int_0^z f(z-z')dz'\right\} \quad (2.104)$$

d'où :

$$R(s) = \mathcal{L}\{g(z)\} = -Y_1\mathcal{L}\{B_1(z)\} - Y_2\mathcal{L}\{B_2(z)\} - k^{*2}q\mathcal{L}\left\{\int_0^z f(z-z')dz'\right\} \quad (2.105)$$

Par utilisation du théorème de convolution [38] :

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s) \cdot G(s) \quad (2.106)$$

et en substituant les équations (2.102) et (2.103) dans l'équation (2.105) on obtient :

$$\begin{aligned} R(s) = & Y_1 k^{*2} q \mathbf{S}_3 - Y_2 \left[-q^2 \beta \mathbf{S}_2 + k^{*2} q \mathbf{S}_1 \right] \\ & - k^{*2} q \left(q s^2 \mathbf{K}_{22} - 2s \mathbf{K}_{12} - \frac{k^{*2}}{q} \mathbf{K}_{11} \right) \langle u(s) \rangle \\ & - k^{*2} q Y_1 \left(-q s \mathbf{K}_{22} + 2 \mathbf{K}_{12} \right) + k^{*2} q Y_2 q \mathbf{K}_{22} \end{aligned} \quad (2.107)$$

alors l'équation (2.99) devienne :

$$\begin{aligned} & \left[(1 - q^2 \sigma_{22}^2) s^2 + k^{*2} + k^{*2} q^2 s^2 \mathbf{K}_{22} - 2k^{*2} q s \mathbf{K}_{12} - k^{*4} \mathbf{K}_{11} \right] \langle u(s) \rangle \\ & = Y_1 \left[(1 - q^2 \sigma_{22}^2) s + k^{*2} q \mathbf{S}_3 + k^{*2} q^2 s \mathbf{K}_{22} - 2k^{*2} q \mathbf{K}_{12} \right] \\ & - Y_2 \left[(1 - q^2 \sigma_{22}^2) + q^2 (s \mathbf{S}_2 - \sigma_{22}) + k^{*2} q \mathbf{S}_1 + k^{*2} q^2 \mathbf{S}_4 + k^{*2} q^2 \mathbf{K}_{22} \right] \\ & \Rightarrow \mathbf{D}(s) \langle u(s) \rangle = \mathbf{F}_1(s) Y_1 + \mathbf{F}_2(s) Y_2 \end{aligned} \quad (2.108)$$

donc :

$$\langle u(s) \rangle = \frac{\mathbf{F}_1(s) Y_1 + \mathbf{F}_2(s) Y_2}{\mathbf{D}(s)} \quad (2.109)$$

avec :

$$\mathbf{D}(s) = (1 - q^2 \sigma_{22}^2) s^2 + k^{*2} + k^{*2} q^2 s^2 \mathbf{K}_{22} - 2k^{*2} q s \mathbf{K}_{12} - k^{*4} \mathbf{K}_{11} \quad (2.110-a)$$

$$\mathbf{F}_1(s) = (1 - q^2 \sigma_{22}^2) s + k^{*2} q \mathbf{S}_3 + k^{*2} q^2 s \mathbf{S}_{22} - 2k^{*2} q \mathbf{K}_{12} \quad (2.110-b)$$

$$\mathbf{F}_2(s) = 1 + q \left[-s q \mathbf{S}_2 - k^{*2} (\mathbf{S}_1 + q \mathbf{S}_4 - q \mathbf{K}_{22}) \right] \quad (2.110-c)$$

Maintenant, en substituant $(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4)$ et $(\mathbf{K}_{11}, \mathbf{K}_{12}, \mathbf{K}_{22})$ dans les équations (2.110) en obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(s) = & \left[(1 - q^2 \sigma_{22}^2) s^4 + 2\beta (1 - q^2 \sigma_{22}^2) s^3 + \left[\beta^2 (1 - q^2 \sigma_{22}^2) + 2k^{*2} (1 - q \sigma_{12}^2) \right] s^2 \right. \\ & \left. + 2\beta k^{*2} (1 - q \sigma_{12}^2) s + \beta^2 k^{*2} + k^{*4} (1 - \sigma_{11}^2) \right] \frac{1}{d(s)} \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1(s) = & \left[(1 - q^2 \sigma_{22}^2) s^3 + 2\beta (1 - q^2 \sigma_{22}^2) s^2 + \left[\beta^2 (1 - q^2 \sigma_{22}^2) + k^{*2} (1 - q \sigma_{12}^2) \right] s \right. \\ & \left. - \beta q k^{*2} \sigma_{11}^2 \right] \frac{1}{d(s)} \end{aligned} \quad (2.112)$$

$$\mathbf{F}_2(s) = \left[(1 - q^2 \sigma_{22}^2) s^2 + \beta (2 - q^2 \sigma_{22}^2) s + k^{*2} (1 - q \sigma_{12}^2) + \beta^2 \right] \frac{1}{d(s)} \quad (2.113)$$

2.2.4.2. Obtention du déplacement moyen par la transformée de Laplace inverse

La transformée de Laplace de l'équation intégral-différentielle a permis d'obtenir le déplacement moyen sous la forme de l'équation (2.109), en terme de la variable s .

où $\mathbf{D}(s)$, $\mathbf{F}_1(s)$ et $\mathbf{F}_2(s)$ sont des polynômes de degrés 4, 3 et 2 de s , respectivement, et sont donnés par les expressions (2.111), (2.112) et (2.113).

si s peut être complexe, alors la transformée de Laplace inverse pour l'obtention du déplacement moyen est définie par [38].

$$\langle u(z) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \langle u(s) \rangle e^{sz} ds \quad (2.114)$$

où $c > 0$ est une constante réelle

- **Inversion de la transformée de Laplace par les résidus**

soit :

$$u(s) = \mathcal{L}\{u(z)\}$$

si $u(s)$ possède un nombre fini de poles et ces poles sont situés sur la droite

$$\text{Res}(s) = c : \text{ligne droite}$$

où "Res" le résidu.

donc la transformée de Laplace inverse est obtenue par le théorème des résidus sous la forme [38].

$$\langle u(z) \rangle = \mathcal{L}^{-1}\{\langle u(s) \rangle\} = \sum \{ \text{Résidus à chacun des poles de } e^{sz} \langle u(s) \rangle \} \quad (2.115)$$

- **Expression du résidu à un pole d'une fonction rationnelle**

si $f(z)$ est une fonction analytique de la forme :

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \quad (2.116)$$

et possédant un simple pole en un point z_0 , si $h(z_0) = 0$, le résidu de $f(z)$ est donnée par la formule [38] :

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \quad (2.117)$$

- **Résidus de la fonction $e^{sz} \langle u(s) \rangle$**

La fonction du déplacement moyen $\langle u(s) \rangle$ possède 4 poles s_k ($k = 1, 2, 3, 4$) qui sont les racines de $\mathbf{D}(s)$ (eq.2.111), nous utiliserons les résidus pour obtenir le déplacement moyen $\langle u(z) \rangle$ conformément à l'équation (2.115).

ainsi, nous obtenons :

$$e^{sz} \langle u(s) \rangle = Y_1 \left(\frac{\mathbf{F}_1(s)}{\mathbf{D}(s)} e^{sz} \right) + Y_2 \left(\frac{\mathbf{F}_2(s)}{\mathbf{D}(s)} e^{sz} \right) \quad (2.118)$$

qui est la somme de deux fonctions rationnelles de la forme (2.116) possédant les mêmes poles. Alors le déplacement moyen s'écrit :

$$\langle u(z) \rangle = \sum_{k=1}^4 \left\{ \text{Res} \left[\langle u(s) \rangle e^{sz}, s_k \right] \right\} \quad (2.119)$$

où encore ;

$$\begin{aligned} \langle u(z) \rangle &= \sum_{k=1}^4 \left\{ \text{Res} \left[Y_1 \left(\frac{\mathbf{F}_1(s)}{\mathbf{D}(s)} e^{sz} \right), s_k \right] \right\} + \sum_{k=1}^4 \left\{ \text{Res} \left[Y_2 \left(\frac{\mathbf{F}_2(s)}{\mathbf{D}(s)} e^{sz} \right), s_k \right] \right\} \\ &= \sum_{k=1}^4 \left\{ Y_1 \frac{\mathbf{F}_1(s_k)}{\mathbf{D}'(s_k)} e^{s_k z} \right\} + \sum_{k=1}^4 \left\{ Y_2 \frac{\mathbf{F}_2(s_k)}{\mathbf{D}'(s_k)} e^{s_k z} \right\} \\ &= Y_1 \sum_{k=1}^4 \frac{\mathbf{F}_1(s_k)}{\mathbf{D}'(s_k)} e^{s_k z} + Y_2 \sum_{k=1}^4 \frac{\mathbf{F}_2(s_k)}{\mathbf{D}'(s_k)} e^{s_k z} \end{aligned} \quad (2.120)$$

Donc $u(z)$ peut se mettre sous la forme:

$$\langle u(z) \rangle = Y_1 f_1(z) + Y_2 f_2(z) \quad (2.121)$$

avec :

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^4 A_k e^{s_k z}, \quad f_2(z) = \sum_{k=1}^4 B_k e^{s_k z}$$

$$A_k = \frac{\mathbf{F}_1(s_k)}{\mathbf{D}'(s_k)}, \quad B_k = \frac{\mathbf{F}_2(s_k)}{\mathbf{D}'(s_k)}$$

$$\mathbf{D}'(s_k) = \left. \frac{d\mathbf{D}(s)}{ds} \right|_{s_k}$$

où : s_k ($k = 1, 2, 3, 4$) sont les racines de $\mathbf{D}(s)$ avec des coefficients complexes. Le calcul de ces racines est facilité par l'utilisation du logiciel Mathematica 7¹.

Les conditions aux limites Y_1 et Y_2 définies ultérieurement (Eq.2.55), conduisent à, selon l'équation (2.121) :

$$f_1(0) = \sum_{k=1}^4 A_k = 1 \quad , \quad f_2(0) = \sum_{k=1}^4 B_k = 0$$

$$f_1'(0) = \sum_{k=1}^4 s_k A_k = 0 \quad , \quad f_2'(0) = \sum_{k=1}^4 s_k B_k = 1$$

Ces conditions aux limites permettent d'exprimer les fonctions de transfert (ou d'amplification) de la couche.

2.2.4.3. Expression de la contrainte moyenne

La contrainte moyenne a été obtenue sous la forme de l'équation (2.72)

De l'équation (2.121), on obtient :

$$\frac{d\langle u(z) \rangle}{dz} = Y_1 \frac{df_1(z)}{dz} + Y_2 \frac{df_2(z)}{dz} \quad (2.122)$$

où encore :

$$\frac{d\langle u(z) \rangle}{dz} = Y_1 \sum_{k=1}^4 s_k A_k e^{s_k z} + Y_2 \sum_{k=1}^4 s_k B_k e^{s_k z} \quad (2.123)$$

posons

$$J(z) = \int_0^z \left[q \cdot K_{22}(z-z') \frac{d\langle u(z') \rangle}{dz'} - K_{12}(z-z') \langle u(z') \rangle \right] dz' \quad (2.124)$$

et

$$J(z) = J_{11}(z) - J_{22}(z) \quad (2.125)$$

¹ Mathematica est un logiciel propriétaire de calcul formel édité par Wolfram Research, la société de Stephen Wolfram.

avec :

$$J_{11}(z) = \int_0^z q \cdot K_{22}(z-z') \frac{d\langle u(z') \rangle}{dz'} dz' \quad (2.126-a)$$

et

$$J_{22}(z) = \int_0^z q \cdot K_{12}(z-z') \langle u(z') \rangle \frac{d\langle u(z') \rangle}{dz'} dz' \quad (2.126-b)$$

Substituons les équations (2.123) dans les équations (2.126) on obtient :

$$J_{11}(z) = Y_1 \sum_{k=1}^4 q \cdot s_k \left(\int_0^z K_{22}(z-z') e^{s_k z'} dz' \right) A_k \quad (2.127)$$

$$+ Y_2 \sum_{k=1}^4 q \cdot s_k \left(\int_0^z K_{22}(z-z') e^{s_k z'} dz' \right) B_k$$

$$J_{22}(z) = Y_1 \sum_{k=1}^4 \left(\int_0^z K_{12}(z-z') e^{s_k z'} dz' \right) A_k + Y_2 \sum_{k=1}^4 \left(\int_0^z K_{12}(z-z') e^{s_k z'} dz' \right) B_k \quad (2.128)$$

Multiplions et divisons par $e^{-s_k z}$ nous obtenons

$$J_{11}(z) = Y_1 \sum_{k=1}^4 q \cdot s_k \left(e^{-s_k z} \int_0^z K_{22}(z-z') e^{s_k z'} dz' \right) A_k e^{s_k z} \quad (2.129)$$

$$+ Y_2 \sum_{k=1}^4 q \cdot s_k \left(e^{-s_k z} \int_0^z K_{22}(z-z') e^{s_k z'} dz' \right) B_k e^{s_k z}$$

$$J_{22}(z) = Y_1 \sum_{k=1}^4 \left(e^{-s_k z} \int_0^z K_{12}(z-z') e^{s_k z'} dz' \right) A_k e^{s_k z} + \quad (2.130)$$

$$Y_2 \sum_{k=1}^4 e^{-s_k z} \left(\int_0^z K_{12}(z-z') e^{s_k z'} dz' \right) B_k e^{s_k z}$$

Appelons :

$$J_{1k}(z) = e^{-s_k z} \int_0^z K_{22}(z-z') e^{s_k z'} dz' = \int_0^z K_{22}(z-z') e^{-s_k(z-z')} dz' \quad (2.131-a)$$

$$J_{2k}(z) = e^{-s_k z} \int_0^z K_{12}(z-z') e^{s_k z'} dz' = \int_0^z K_{12}(z-z') e^{-s_k(z-z')} dz' \quad (2.131-b)$$

En introduisant les expressions de K_{12} et K_{22} on trouve :

$$J_{1k}(z) = \frac{\sigma_{22}^2}{((s+\beta)^2 + k^{*2})} \left\{ 1 - e^{-(s_k+\beta)z} \left[\frac{(s_k+\beta)}{ik^{*2}} sh(ik^{*2}z) + ch(ik^{*2}z) \right] \right\} \quad (2.132-a)$$

et

$$J_{2k}(z) = \frac{\sigma_{22}^2}{((s+\beta)^2 + k^{*2})} \left\{ (s_k+\beta) - e^{-(s_k+\beta)z} \left[(s_k+\beta)ch(ik^{*2}z) - ik^{*2} sh(ik^{*2}z) \right] \right\} \quad (2.132-b)$$

En introduisant les expressions de $J_{1k}(z)$ et $J_{2k}(z)$ dans les équations (2.129) et (2.130), nous obtenons :

$$J_{11}(z) = Y_1 \sum_{k=1}^4 q \cdot s_k J_{1k}(z) A_k e^{s_k z} + Y_2 \sum_{k=1}^4 q \cdot s_k J_{1k}(z) B_k e^{s_k z} \quad (2.133)$$

et

$$J_{22}(z) = Y_1 \sum_{k=1}^4 J_{2k}(z) A_k e^{s_k z} + Y_2 \sum_{k=1}^4 J_{2k}(z) B_k e^{s_k z} \quad (2.134)$$

En substituant les équations (2.133) et (2.134) dans l'équation (2.125) puis avec l'équation (2.132) dans l'équation (2.72) nous donne :

$$\begin{aligned} \langle \tau(z) \rangle = \mu_0 \left\{ Y_1 \left[\frac{1}{q} [1 - q^2 \sigma_{22}^2] \frac{df_1(z)}{d(z)} + k^{*2} \sum_{k=1}^4 [q s_k J_{1k}(z) - J_{2k}(z)] A_k e^{s_k z} \right] \right. \\ \left. + Y_2 \left[\frac{1}{q} [1 - q^2 \sigma_{22}^2] \frac{df_2(z)}{d(z)} + k^{*2} \sum_{k=1}^4 [q s_k J_{1k}(z) - J_{2k}(z)] B_k e^{s_k z} + q \sigma_{22}^2 e^{-z\beta} ch(ik^{*2}z) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.135)$$

ainsi la contrainte moyenne est donnée par :

$$\langle \tau(z) \rangle = \mu_0 \{ Y_1 \phi_1(z) + Y_2 \phi_2(z) \} \quad (2.136)$$

avec :

$$\phi_1(z) = \frac{1}{q} [1 - q^2 \sigma_{22}^2] \frac{df_1(z)}{d(z)} + k^{*2} \sum_{k=1}^4 [q s_k J_{1k}(z) - J_{2k}(z)] A_k e^{s_k z} \quad (2.137)$$

et

$$\begin{aligned} \phi_2(z) = & \frac{1}{q} [1 - q^2 \sigma_{22}^2] \frac{df_2(z)}{d(z)} + k^{*2} \sum_{k=1}^4 [q s_k J_{1k}(z) - J_{2k}(z)] B_k e^{s_k z} \\ & + q \sigma_{22}^2 e^{-z\beta} ch(ik^{*2} z) \end{aligned} \quad (2.138)$$

avec :

$$J_{1k}(0) = 0, \quad J_{2k}(0) = 0$$

$$\phi_1(0) = 0, \quad \phi_2(0) = \frac{1}{q}$$

2.3. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une formulation analytique pour déterminer les déplacements et contraintes moyens dans une couche de sol dont les propriétés varient stochastiquement. Le modèle analytique utilisé est basé sur la formulation de Karal et Keller et utilise l'idée de la matrice fondamentale et l'approximation de Bourret.

La formulation menée dans ce chapitre, dans le cas d'une couche de sol va être étendue dans le chapitre suivant au cas d'un multicouche et va être appliqué à des profils de sol monocouche et multicouche pour étudier la fonction d'amplification.

Chapitre 3

Investigation Stochastique de la Fonction d'Amplification

3.1. Introduction

L'étude de l'amplification des ondes sismiques, implique la prise en compte de plusieurs incertitudes. Ces incertitudes sont principalement liées aux données du séisme, aux propriétés de sol qui changent d'un point à l'autre dans le dépôt, aux conditions aux limites (base rigide ou affleurement), ainsi qu'aux caractéristiques géologiques, notamment la hauteur du profil de sol (ou la profondeur au rocher). Dans ce contexte, les approches déterministes semblent être insuffisantes, parce que le sol est hétérogène de nature, même sur de petites portions, et le recours aux techniques probabilistes permet de modéliser les incertitudes et analyser leurs effets. Plusieurs travaux de recherches liés à la dynamique des sols stochastique ont été réalisés. La réponse sismique en champ libre d'un profil de sol est la première étape dans la résolution de tout problème relatif au génie parasismique.

Il est bien connu que les conditions géologiques du profil de sol peuvent causer de fortes anomalies locales du mouvement en surface. Généralement, pour des dépôts de sols multicouches, sans irrégularités latérales, il suffit d'utiliser des modèles unidimensionnels pour prendre en compte les effets de site.

Dans ce chapitre on va calculer la fonction d'amplification d'un profil de sol hétérogène, composé d'un ensemble de couches superposées se prolongeant horizontalement à l'infini, et ayant des propriétés aléatoires. L'objectif étant de montrer que la variabilité des paramètres du profil de sol, peut engendrer un comportement différent du cas homogène. ceci en vue de mettre en évidence la nécessité de tenir en compte ces variabilités dans la pratique.

3.2. Calcul de la fonction d'amplification

3.2.1 Cas d'un monocouche

Les conditions aux limites pour une couche de sol excitée harmoniquement à sa base par un mouvement de la forme ($u(z,t) = a e^{i\omega.t}$) est libre de contrainte à la surface s'écrivent :

$$\langle \tau(0) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle u(d) \rangle = a \quad (3.1)$$

où d est l'épaisseur de la couche (Fig.2.1) et a l'amplitude du mouvement exciteur.

En substitution les équations (3.1) dans les équations (2.121) et (2.136), nous pouvons obtenir les coefficients arbitraires Y_1 et Y_2 définis dans le chapitre précédent (eq.2.55)

$$Y_2 = Y_0 = 0, \quad Y_1 = X_0 = \frac{a}{f_1(d)} \quad (3.2)$$

Ainsi, la solution satisfaisant les conditions aux limites est :

$$\langle u(z) \rangle = a \frac{f_1(z)}{f_1(d)}, \quad (3.3)$$

$$\langle \tau(z) \rangle = \mu_0 a \frac{\phi_1(z)}{f_1(d)} \quad (3.4)$$

La fonction d'amplification qui est définie comme le rapport entre l'amplitude du déplacement à la surface du sol et celle à l'interface sol-roches [40] est exprimée par (Fig.2.1):

$$T_{1,R} = \frac{\langle u(0) \rangle}{\langle u(d) \rangle} = \frac{1}{f_1(d)} \quad (3.5)$$

3.2.2 Cas d'un multicouche

La formulation présentée ci-dessus pour le cas d'un monocouche est étendue à des systèmes multicouches à travers des matrices de transfert. Notons la face supérieure de la couche (j) par l'indice (j-1) et la face inférieure par l'indice (j) (Fig. 3.1).

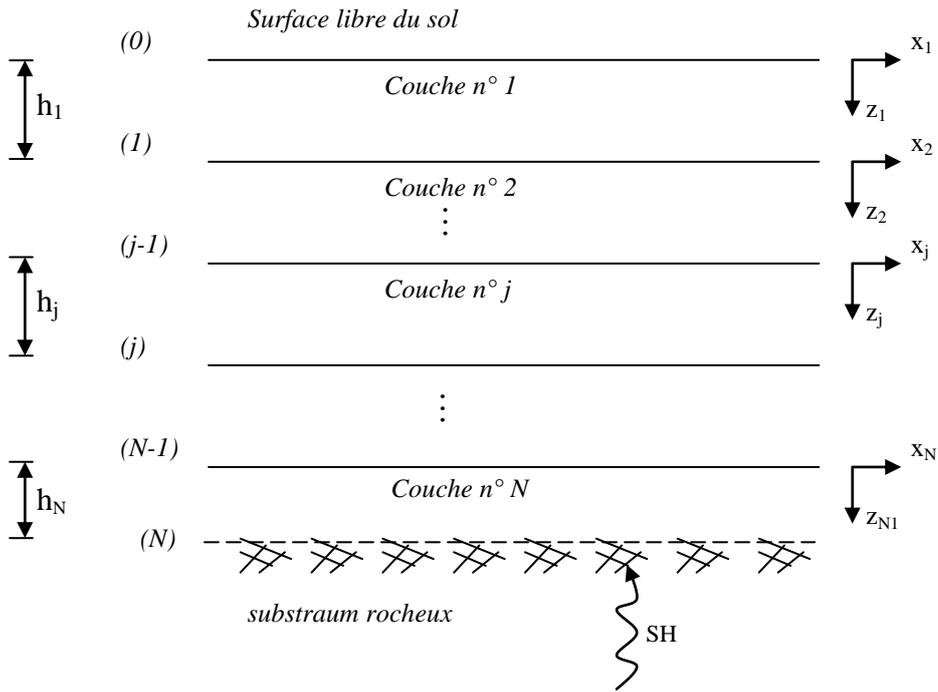


Fig. 3.1- Profil de sol multicouche soumis à une onde SH.

- à la face supérieure de la couche j (notée j-1) on a :

$$\langle u_j(0) \rangle = \langle u_{j-1} \rangle = X_{j-1} f_{1j}(0) + Y_{j-1} f_{2j}(0) \tag{3.6}$$

$$\langle \tau_j(0) \rangle = \langle \tau_{j-1} \rangle = \mu_0 (X_{j-1} \phi_{1j}(0) + Y_{j-1} \phi_{2j}(0)) \tag{3.7}$$

- et à la face inférieure ($z_j = h_j$) de la couche j (notée j) :

$$\langle u_j(z_j) \rangle = \langle u_j \rangle = X_{j-1} f_{1j}(h_j) + Y_{j-1} f_{2j}(h_j) \tag{3.8}$$

$$\langle \tau_j(z_j) \rangle = \langle \tau_j \rangle = \mu_0 (X_{j-1} \phi_{1j}(h_j) + Y_{j-1} \phi_{2j}(h_j)) \tag{3.9}$$

En utilisant les conditions de constructions de la solution :

$$\langle u_j(z_j) \rangle \Big|_{z_j=0} = X_{j-1} \tag{3.10}$$

$$\left. \frac{d\langle u_j(z_j) \rangle}{dz} \right|_{z_j=0} = Y_{j-1} \quad (3.11)$$

La substituant des équations (3.10) et (3.11) dans les équations (3.6) et (3.7), respectivement, nous donnent :

$$\langle u_{j-1} \rangle = X_{j-1} \quad (3.12)$$

$$\langle \tau_{j-1} \rangle = \mu_{0j} \frac{1}{q} Y_{j-1} \quad (3.13)$$

et la substituant des équations (3.12) et (3.13) dans les équations (3.8) et (3.9), respectivement, nous donnent :

$$\langle u_j \rangle = f_{1j}(h_j) \langle u_{j-1} \rangle + \frac{q_j}{\mu_{0j}} f_{2j}(h_j) \langle \tau_{j-1} \rangle \quad (3.14)$$

$$\langle \tau_j \rangle = \mu_{0j} \phi_{1j}(h_j) \langle u_{j-1} \rangle + q_j \phi_{2j}(h_j) \langle \tau_{j-1} \rangle \quad (3.15)$$

avec : $q_j = \frac{1}{1 + 2i\xi_j}$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \langle u_j \rangle \\ \langle \tau_j \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1j}(h_j) & q_j \frac{f_{2j}(h_j)}{\mu_{0j}} \\ \mu_{0j} \phi_{1j}(h_j) & q_j \phi_{2j}(h_j) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle u_{j-1} \rangle \\ \langle \tau_{j-1} \rangle \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Ou :

$$\begin{Bmatrix} \langle u_j \rangle \\ \langle \tau_j \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11}(j) & R_{12}(j) \\ R_{21}(j) & R_{22}(j) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle u_{j-1} \rangle \\ \langle \tau_{j-1} \rangle \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Notons :

$$\underline{V}_j = \begin{Bmatrix} \langle u_j \rangle \\ \langle \tau_j \rangle \end{Bmatrix} \text{ et } \underline{M}_j = \begin{bmatrix} f_{1j}(h_j) & q_j \frac{f_{2j}(h_j)}{\mu_{0j}} \\ \mu_{0j} \phi_{1j}(h_j) & q_j \phi_{2j}(h_j) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Donc l'équation (3.17) est écrite sous la forme suivante :

$$\underline{V}_j = \underline{M}_j \underline{V}_{j-1} \quad (3.19)$$

Suite à des multiplications matricielles successives de la condition de nullité de la contrainte à la surface libre $\langle \tau_1(z_1 = 0) \rangle = \langle \tau_0 \rangle = 0$ et les conditions de construction définies par les équations (3.10) et (3.11) on obtient l'équation ci-dessous :

$$\underline{V}_j = \underline{M}_j \underline{M}_{j-1} \dots \underline{M}_1 \underline{V}_0 X_0 ; \quad 1 \leq j \leq N \quad (3.20)$$

où N est le nombre de couches et

$$\underline{V}_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

L'équation (3.20) peut être écrite sous la forme :

$$\underline{V}_j = \underline{B}_j \underline{V}_0 X_0 \quad (3.22)$$

Avec :

$$\underline{B}_j = \prod_{k=j}^1 (\underline{M}_k) \quad (3.23)$$

En utilisons les équations (3.22) et (3.23), la fonction d'amplification définie comme le rapport de l'amplitude du déplacement en surface du sol ($\langle u_0 \rangle$, $j = 1$) à l'amplitude du déplacement à l'interface N ($\langle u_N \rangle$) est :

$$T_{1,R}(\omega) = \frac{\langle u_0 \rangle}{\langle u_N \rangle} = \frac{X_0}{X_0 \underline{B}_N(1,1)} \quad (3.24)$$

D'où :

$$T_{1,R}(\omega) = \frac{1}{\underline{B}_N(1,1)} \quad (3.25)$$

3.3. Validation numérique

le modèle analytique formulé dans le chapitre 2 et appliqué dans le présent chapitre pour le calcul de la fonction d'amplification est écrit en langage Fortran en un programme numérique nommé « STOCH10 ».

Afin de valider numériquement notre formulation, nous avons calculé la fonction de transfert d'un monocouche, déjà traité par Chu et Askar [6].

Les caractéristiques du monocouche sont montrées dans le tableau 3.1. La fonction de transfert (ou d'amplification) est montrée sur la figure 3.2. En examinant cette figure, nous constatons qu'elle concorde totalement avec la figure 1.5-a.

Tableau- 3.1. Caractéristiques d'un monocouche utilisé par chu et all [6].

Epaisseur de la couche (m)	Poids volumique (kg/m ³)	Vitesse des ondes de cisaillement Vs(m/s)	Amortissement estimé (%)
1,00	2000	120	0,0

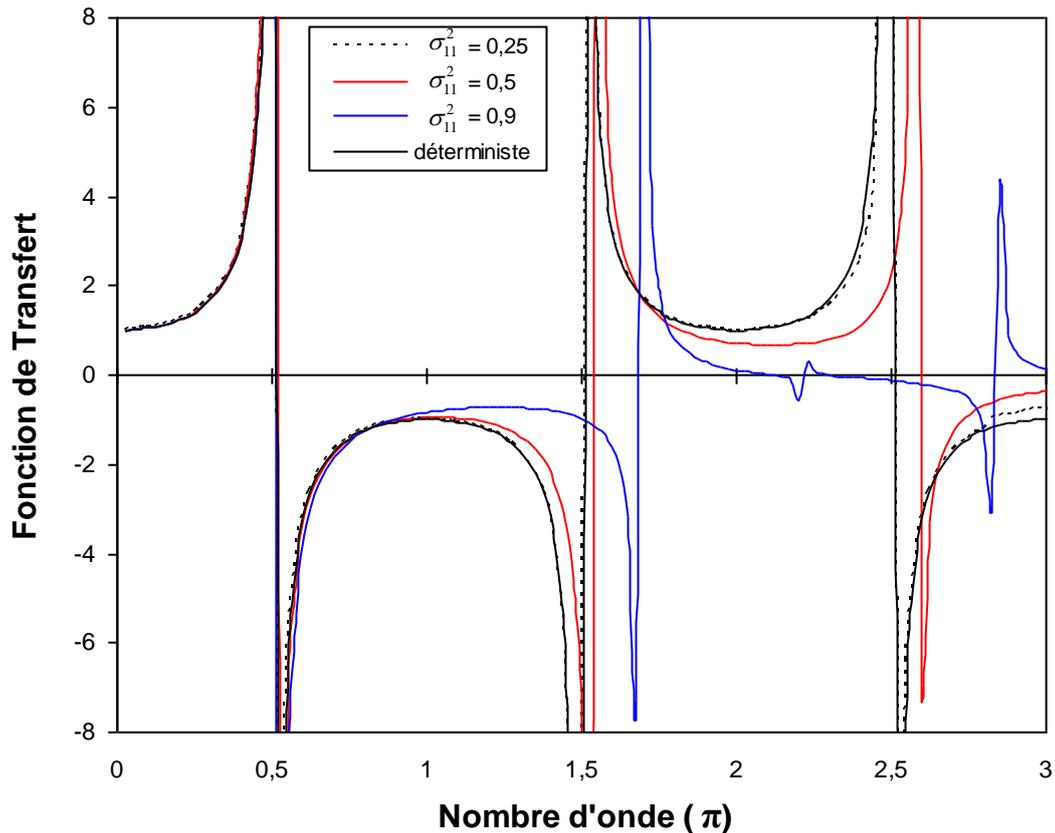


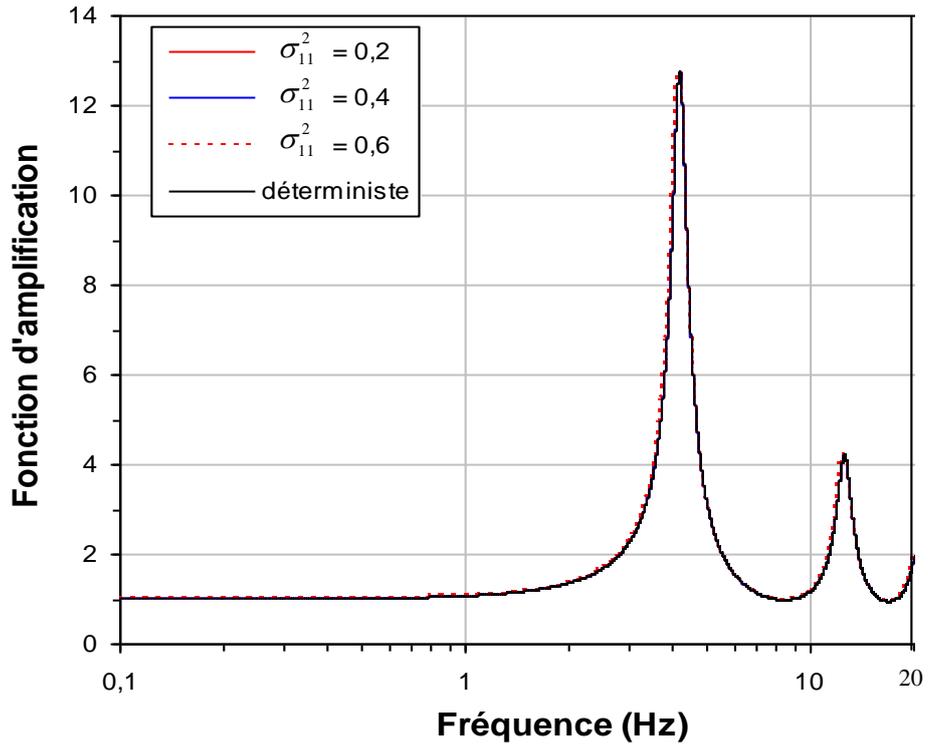
Fig. 3.2. Fonction de transfert d'un monocouche pour une variation de la masse volumique.

3.4. Effets des variations stochastiques de la masse volumique et du module de cisaillement

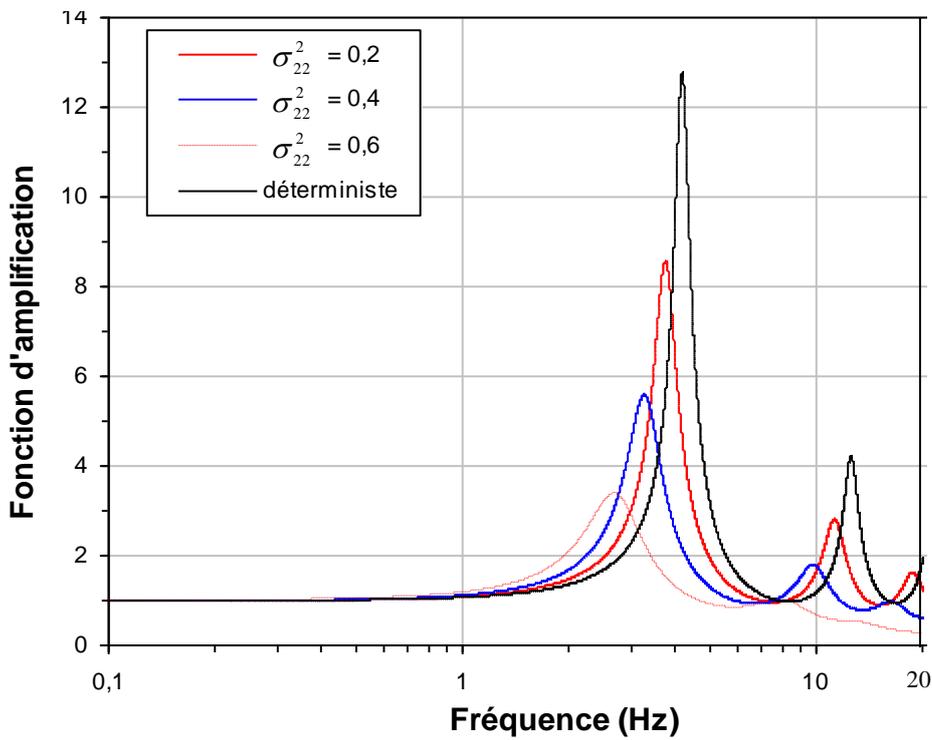
3.4.1. Cas d'un monocouche

Dans cette section, nous étudions en utilisant la procédure décrite ci-dessus, la fonction d'amplification d'un monocouche reposant sur une base rigide. L'aspect unidimensionnel du problème étant supposé, la variabilité spatiale des propriétés mécaniques du sol est considérée uniquement dans la direction verticale. La couche de sol est supposée avoir une masse volumique moyenne ρ_0 égale à 2000 kg/m^3 , une vitesse moyenne de l'onde de cisaillement V_S égale à 500 m/s . l'amortissement et la hauteur du profil de sol sont supposés déterministes et valent 5% et 30 m, respectivement.

Des fluctuations de la masse volumique, σ^2_{11} et du module de cisaillement, σ^2_{22} , sont considérées, variant entre 20% à 60%. L'influence de la variabilité du module de cisaillement et par conséquent la vitesse de l'onde de cisaillement et de la masse volumique du sol sur la fonction d'amplification est étudiée, les résultats obtenus sont montrés dans les figures 3.3.



(a) Variation de la masse volumique



(b) Variation du module de cisaillement

Fig. 3.3- Effets des paramètres stochastiques d'un monocouche sur la fonction d'amplification

(a) $\sigma_{22}^2 = \sigma_{12}^2 = 0, \beta = 5$; (b) $\sigma_{11}^2 = \sigma_{12}^2 = 0, \beta = 5$.

3.4.2. Cas d'un multicouche

Nous allons appliquer ici notre modèle à un système multicouche. Pour cela, nous choisissons un site dont les propriétés de son profil de sol sont connues.

3.4.2.1 Description du site choisi

Nous avons choisi un site pour lequel les données géotechniques sont disponibles. Les investigations géotechniques du site ont été menées entre novembre 2005 et janvier 2006. Le site a été destiné à la construction du siège de la société CMA CGM ALGERIE [41].

- **Situation géographique et topographique du site**

Le site choisi, d'une superficie de 4050 m² (75m x 54m), se trouve à Bab-Ezzouar à une vingtaine de kilomètres de la capitale Alger et à l'intérieur d'une zone d'aménagement (Fig.3.4).



Fig.3.4 - Vue d'ensemble du site étudié [41].

- **Les essais géotechniques pour la reconnaissance du site**

Dans le cadre d'un programme complet d'enquête géotechnique du site entre Novembre 2005 et Janvier 2006 [41], des sondages et des échantillonnages ont été réalisés. La synthèse des résultats des sondages carottés ont permis de révéler que sous une couche de remblai d'épaisseur variable de 1,0 à 6.0 m, le site destiné à recevoir le siège de CMA CGM est constitué d'une formation d'alluvions représentées par des argiles brunâtres à beiges, graveleuses, limoneuses, marneuses en profondeur surmontant un horizon de grès et sables fins consolidés et parfois grésifiés. La formation argileuse est compacte, de consistance raide en générale.

L'essai Down Hole a été réalisé en décembre 2005, selon la norme ASTM D4428/D4428M [41]. Cet essai permet la détermination des vitesses des ondes de cisaillement pour une tranche de terrain localisée au voisinage du sondage, et pour une direction verticale de propagation des ondes, par la méthode Down-Hole (Fig.3.5).

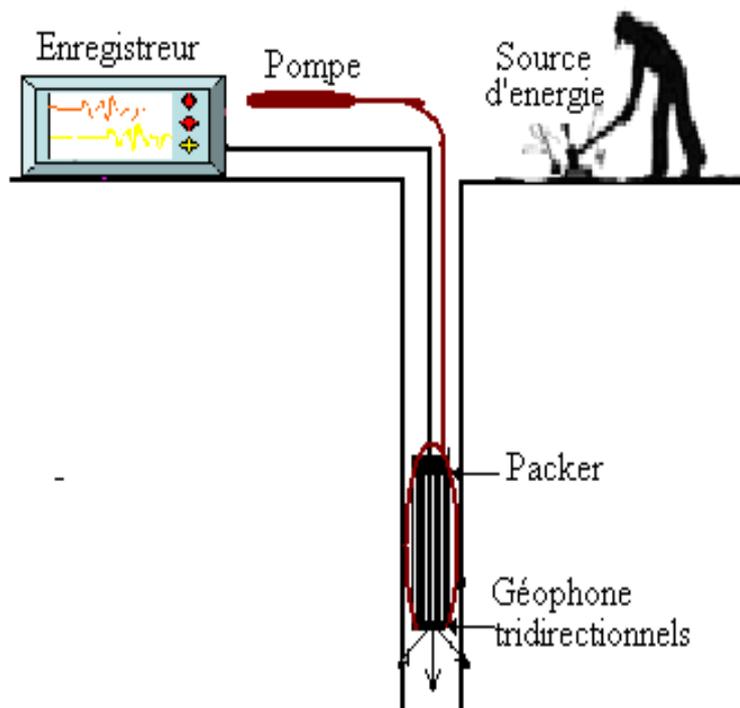


Fig. 3.5 - Principe de l'essai Down-hole.

L'essai down-hole est réalisé dans un sondage jusqu'à la profondeur de 46 mètres avec un pas de 1 mètre. Les signaux sont de bonne qualité. Les résultats obtenus sont en termes de vitesse des ondes de cisaillement (S) et des ondes de compression (P).

La distribution des vitesses des ondes de cisaillement, en fonction de la profondeur à partir de la surface du sol est montrée sur la figure 3.6.

La lithologie du sondage dans lequel l'essai Down-hole est réalisé et présentée dans le tableau 3.2.

Tableau.3.2- Lithologie du sondage dans le quel l'essai Down-hole est réalisé.

N° Couche	Profondeur H (m)	Epaisseur de la couche (m)	Désignation de la couche	Poids volumique (kg/m^3)	Vitesse des ondes de cisaillement $V_s(\text{m/s})$	Amortissement estimé (%)
1	3,00	3,00	Remblai (argile, blocs, herbe et brique)	2000	0300,00	5,0
2	6,00	3,00	Argile brune graveleuse et présence de galets	2170	0352,17	5,0
3	13,80	7,80	Argile beige compacte marneuse	2100	0540,00	5,0
4	16,30	2,50	Limon argileux rougeâtre	2115	0801,59	5,0
5	24,00	-	rocher	2215	1450,00	00,0

Les vitesses des ondes de cisaillement V_s varient entre 300 et 1400 m/s jusqu'à la profondeur de 49 mètres. Ces valeurs reflètent la nature stratigraphique des formations attribuées par le carottage et traduisent une amélioration relative des caractéristiques élastiques des sols en allant de plus en plus en profondeur. Selon le RPA 99 [42], La formation de grès et de sables consolidés est classée dans la catégorie S_1 , site rocheux. Les investigateurs [41] ont recommandé de classer le terrain dans la catégorie S_2 à cause de la présence d'une couche d'argiles.

Connaissant, donc, le type de ce site, nous allons procéder à des études paramétriques sur la fonction d'amplification pour examiner l'effet des différentes variations stochastiques sur le type de site.

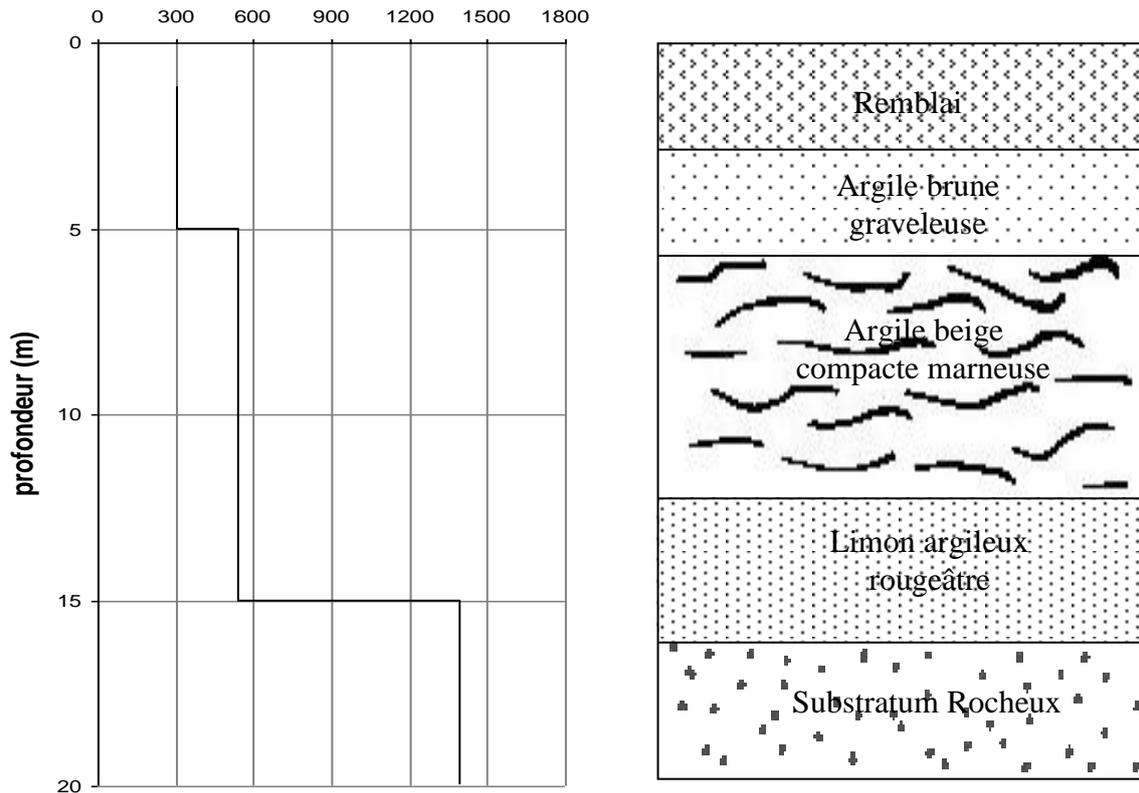


Fig.3.6- Profil de la vitesse de l'onde de cisaillement du site (a), profil de sol (b).

3.4.2.2. Applications

Les courbes des figures 3.7 montrent l'effet de la variation du module de cisaillement, σ_{22}^2 , et de la masse volumique, σ_{11}^2 , sur la fonction d'amplification du profil de sol du site décrit ci-dessus.

Nous constatons que pour toutes les valeurs de σ_{22}^2 (Fig.3.7-b), l'amplitude de la fonction de transfert est sensiblement atténuée avec une extension du contenu fréquentiel.

D'autre part, lorsque ces fluctuations augmentent, la fréquence fondamentale est décalée vers la gauche, l'amplitude correspondante diminue avec un élargissement du contenu fréquentiel et une atténuation sensible de la fonction de transfert pour les fréquences les plus élevées. Ce résultat indique qu'à mesure que l'hétérogénéité du milieu augmente, le contenu fréquentiel est dominé par les fréquences les plus basses et le sol simulé semble plus lâche.

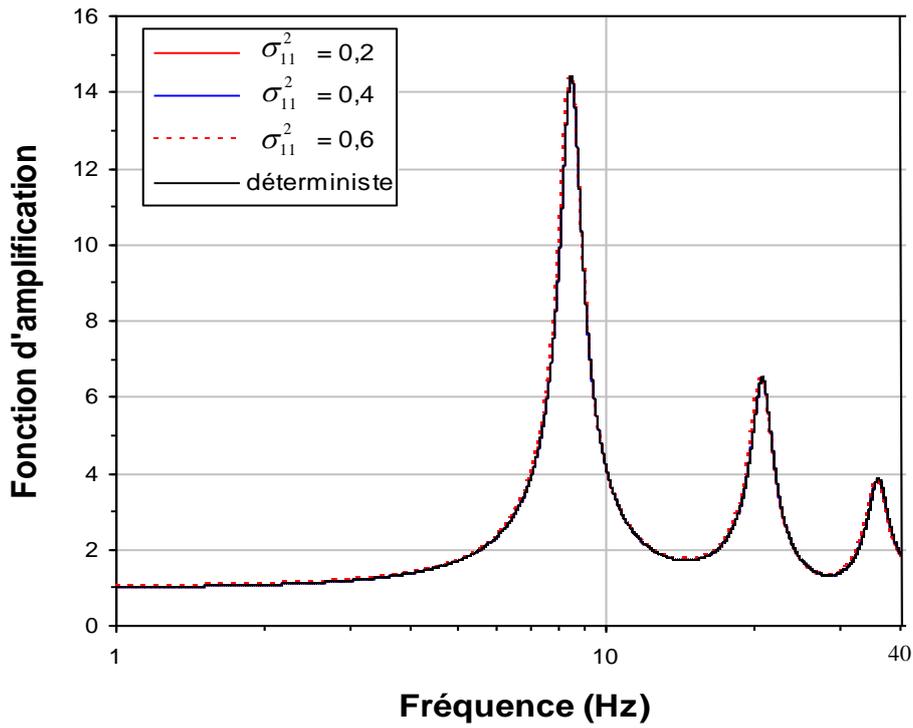
Ce phénomène a également été observé par d'autres chercheurs [6,21,23] et interprété par les diffractions aléatoires des ondes sismiques. En conséquence, les milieux élastiques aléatoires peuvent changer les mouvements du sol d'une manière semblable à celle des milieux non linéaires.

En outre, l'effet de la variation de la masse volumique du sol est négligeable (Fig.3.7-a) et interprété par le fait que l'effet de la variation statistique de ce facteur est relativement faible comparé à celui d'autres propriétés du sol [10].

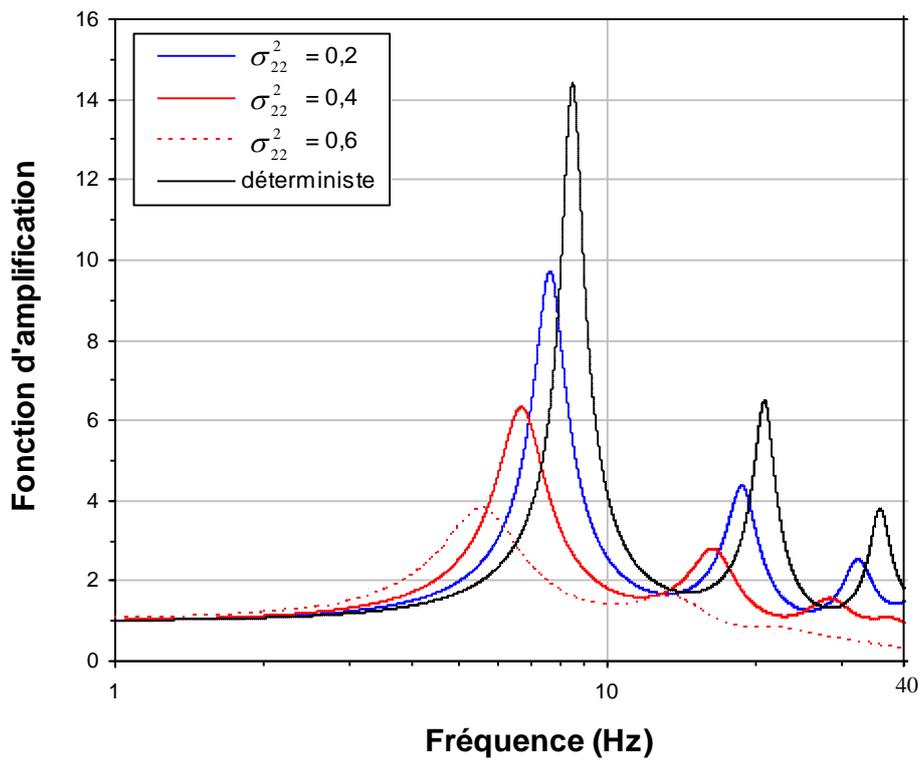
3.5. Influence de la longueur de corrélation verticale

L'influence de la longueur de corrélation verticale sur la fonction de transfert ou d'amplification est traitée dans cette section. Badaoui [23, 24] rapporte qu'en général, la longueur de corrélation pour les sols naturels dans la direction horizontale est 5 à 50 fois plus grande que celle dans la direction verticale en présence d'une déposition horizontale prédominante (superposition de couches). La longueur de corrélation verticale est estimée entre moins de 0.5 m et rarement plus de 10 m.

Les figures 3.8 et 3.9 illustrent l'influence de la longueur de corrélation verticale sur la fonction d'amplification. Nous constatons que l'amplitude est sensiblement influencée pour tous les cas. La même figure indique qu'à mesure où la longueur de corrélation verticale augmente, l'amplitude de la fonction d'amplification diminue.



(a) Variation de la masse volumique



(b) Variation du module de cisaillement

Fig. 3.7- Effets des paramètres stochastiques d'un multicouche sur la fonction d'amplification

(a) $\sigma_{22}^2 = \sigma_{12}^2 = 0, \beta = 5$;(b) $\sigma_{11}^2 = \sigma_{12}^2 = 0, \beta = 5$.

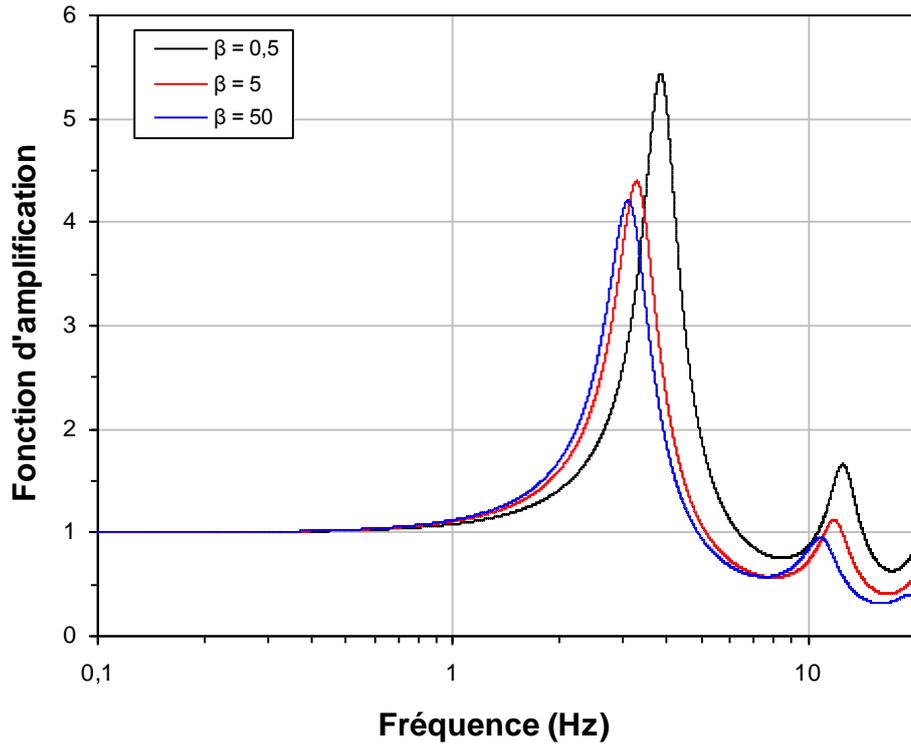


Fig. 3.8- Effet de la longueur de corrélation verticale d'un monocouche sur la fonction d'amplification $\sigma^2_{11} = \sigma^2_{22} = \sigma^2_{12} = 0,4$.

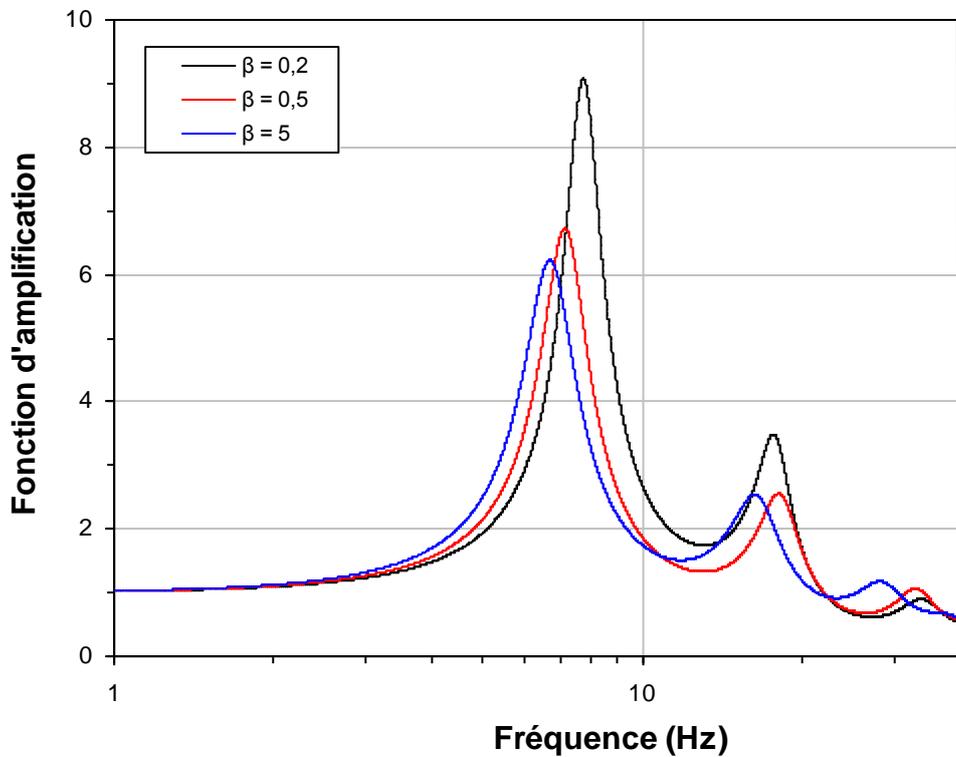


Fig. 3.9- Effet de la longueur de corrélation verticale d'un multicouche sur la fonction d'amplification $\sigma^2_{11} = \sigma^2_{22} = \sigma^2_{12} = 0,4$.

3.6. Conclusion

Nous avons utilisé dans le présent chapitre l'application du modèle analytique formulé dans le chapitre précédent pour calculer la fonction d'amplification stochastique pour un monocouche et un multicouche.

Les propriétés de sol étudiées sont la masse volumique du sol et le module de cisaillement. Ceux-ci sont modélisés comme un champ aléatoire spatial. L'amplitude moyenne de la fonction d'amplification est sensiblement atténuée avec une extension du contenu fréquentiel. D'autre part, à mesure que le coefficient de variation du module de cisaillement augmente, la fréquence fondamentale est décalée vers la gauche. L'effet de la variation de la masse volumique du sol est négligeable comparé à celui du module de cisaillement.

La longueur de corrélation verticale exerce une grande influence sur la fonction d'amplification. L'augmentation de cette longueur cause une diminution de l'amplitude de la fonction d'amplification.

Chapitre 4

Evaluation de la réponse sismique d'un site à paramètres de sol aléatoires

4.1. Introduction

Dans le présent chapitre nous allons évaluer la réponse sismique d'un profil de sol aléatoirement hétérogène décrit dans le chapitre 3, d'une étendue latérale infinie. Ayant déterminé la fonction d'amplification stochastique, nous déterminons par convolution la réponse de ce site à une excitation à sa base (mouvement de référence) sous forme d'un accélérogramme. Pour cela, nous calculons d'abord le spectre de Fourier de l'accélérogramme. Puis, en le multipliant par la fonction de transfert, nous obtenons le spectre de Fourier en surface. Au moyen de la transformée de Fourier inverse, nous obtenons l'accélérogramme en surface de sol. Cependant, nous ne disposons pas d'enregistrement d'accélération de sol au niveau de la base du profil de sol (substratum rocheux) que nous voulons étudier. Pour cela nous allons procéder à un transfert du mouvement de référence d'un autre site où il est disponible vers le site étudié.

Pour mettre en œuvre cette procédure, nous avons excité le profil de sol à sa base par l'accélérogramme qui a été enregistré à la station rocheuse de Keddara lors du tremblement de terre du 21 Mai 2003 qui a secoué la région Alger-Boumerdes.

En dernier lieu, nous procéderons à une comparaison de la réponse du site étudié, en termes d'accélération, à celles calculée dans le cas déterministe d'une part et à celles enregistrée à proximité, d'autre part.

4.2. Définition du mouvement incident

Dans cette partie, nous présentons les différentes étapes du transfert du mouvement de référence d'un site à un autre.

4.2.1. Lois d'atténuation

Basées sur l'analyse statistique des enregistrements de mouvements sismiques, les lois d'atténuation permettent de déterminer un des paramètres caractéristiques du mouvement sismique (grandeur maximale : a_{\max} , v_{\max} , d_{\max}) en fonction des paramètres affectant le mouvement sismique (magnitude (M) ou intensité (I), distance du site à la source (R), conditions locales (G)). La plupart des relations prennent la forme [43] :

$$\log y = A + f(M) + g(R) + h(G) \quad (4.1)$$

Où y est le paramètre recherché (accélération, vitesse,...) et A une constante.

Notons que les lois d'atténuation sont nombreuses et l'ingénieur se doit de rechercher, parmi toutes les lois d'atténuation disponibles, la mieux adaptée à son problème. Il doit également avoir à l'esprit que les lois d'atténuations sont en développement continu. A cet effet, il est prudent de revoir la littérature courante et sélectionner la relation ou les relations les plus appropriées au site étudié en tenant compte de leur développement, spécialement le régime tectonique pour lequel la loi a été développée, la gamme de magnitude et la distance pour laquelle elle est limitée et les conditions locales du sol pour les quelles elle est appliquée [44].

En Algérie, aucune loi d'atténuation n'a été développée jusqu'à présent. à l'exception de la loi proposée par Laouami [45], applicable seulement à des mouvements faibles et à une région très limitée. Les études récentes restent au stade d'étude préliminaires.

4.2.2. Application des lois d'atténuation au séisme de Boumerdes 2003

Pour transférer le mouvement de référence (mouvement excitateur) de la station d'enregistrement du choc à un autre site (site projet), nous devons appliquer une ou plusieurs lois d'atténuations.

Pour la présente application, nous avons appliqué les lois d'Embrassey (1996), de Boore et al (1994) et d'Idriss (1994) [46], aux données de la station de Keddara (rocher) d'enregistrement du choc principal du séisme de Boumerdes 2003 ($M = 6,8$). Les accélérations maximales au sol (PGA) prédites par ces lois sont comparées dans le tableau 4.1 à celles enregistrée lors du choc principal.

Tableau .4.1. Prédiction de l'accélération horizontale maximale du sol de la station de Keddara en utilisant les lois d'atténuation.

Station	Distance épical (km)	Classe du Site	Accélération horizontale maximale (g)			
			Ambraseys et al	Boore et.al (1994)	Idriss (1994)	Enregistrée
Keddara	20	rocheux	0.29g	0.127g	0.196g	0,34g

D'autres lois d'atténuation ont été appliquées par des auteurs aux différentes stations d'enregistrements du séisme de Boumerdes [45,47]. Celles utilisées par Laouami [45] sont présentées sur la figure 4.1. Sur cette figure on compare les accélérations maximales (PGA) prédites par ces lois d'atténuation à celles enregistrées lors du choc principal pour différentes stations du Réseau National d'accélérographes du CGS. Le tableau 4.1 ainsi que la figure 4.1 montrent clairement que toutes les lois d'atténuation appliquées aux données du séisme de boumerdes sous-estiment les accélérations enregistrées.

En conséquence, nous avons opté à transférer l'accélérogramme enregistré à la station rocheuse de Keddara à la base du profil de sol du site étudié.

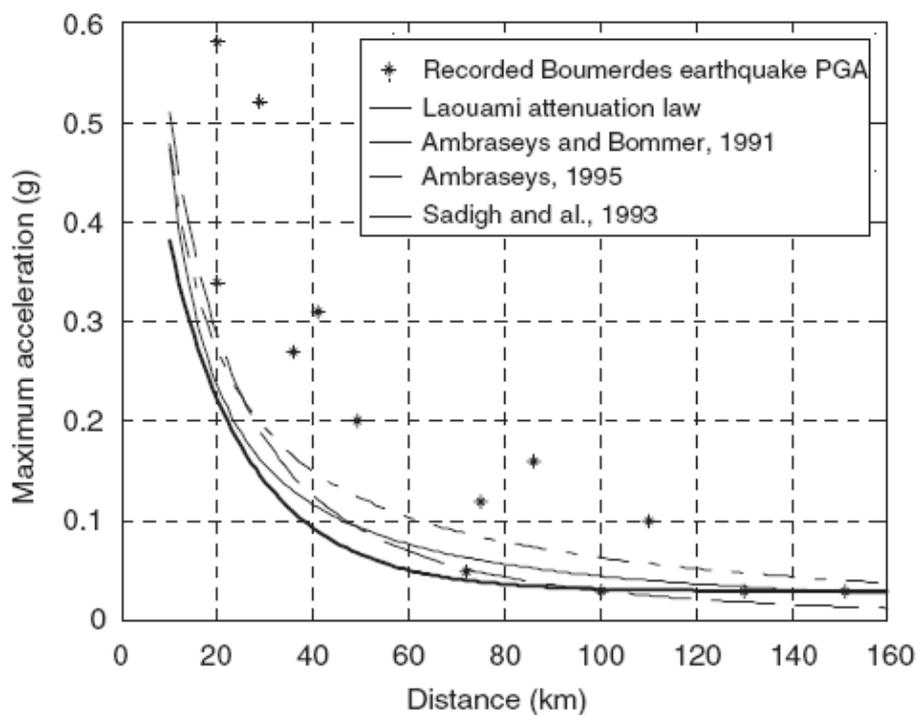


Fig. 4.1 - Comparaison des accélérations maximales enregistrées lors du séisme de Boumerdès avec les accélérations maximales prévues par des lois d'atténuation mondiales[45].

4.3. Procédure de calcul de la réponse du profil de sol du site étudié

Dans cette partie, le mouvement de référence transféré de la station d'enregistrement de Keddara vers le site étudié, est appliqué à la base du profil de sol de ce dernier. La réponse du profil de sol du site étudié en termes d'accélérations et spectres de réponse peut être obtenue en utilisant la théorie de la propagation des ondes dans les milieux stratifiés. L'hypothèse couramment admise en génie parasismique est que le mouvement imposé à la base d'une structure dans le calcul dynamique de celle-ci est dû à la propagation verticale ascendante

d'une onde de cisaillement de type SH (figure 4.2) dans le dépôt de sol sur lequel se pose la structure. Cette théorie de propagation d'onde a été traduite numériquement par plusieurs programmes, citons particulièrement le programme *SHAKE91* [48].

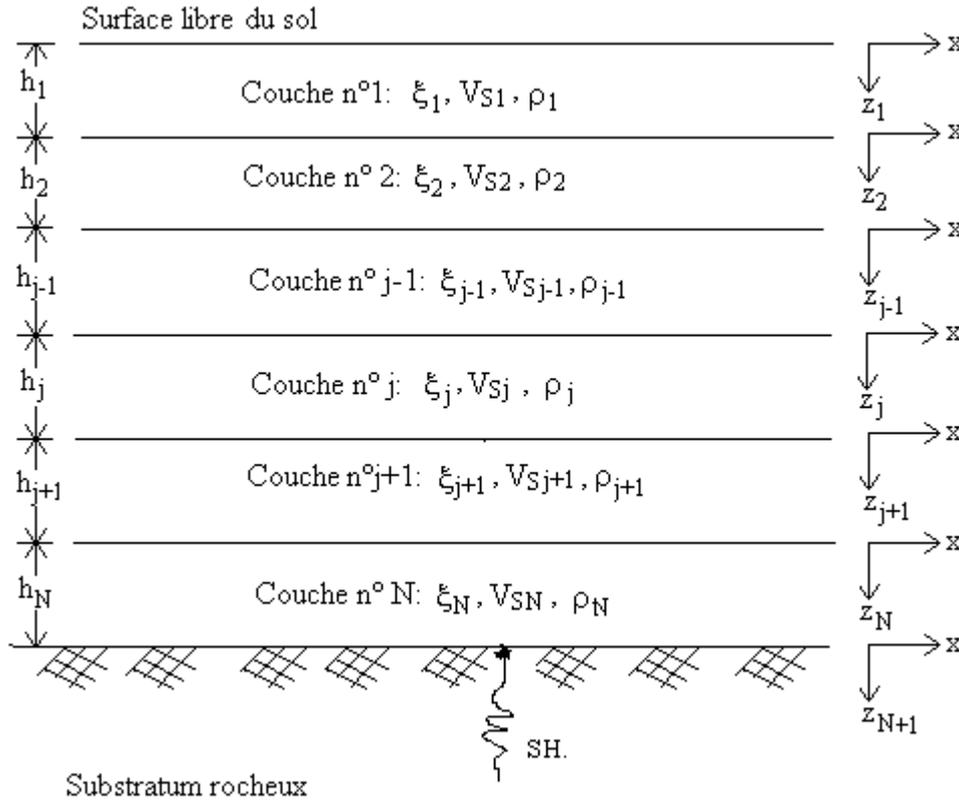


Fig. 4.2- Profil de sol soumis à la propagation verticale d'une onde de cisaillement de type SH.

En effet, Ayant obtenu le spectre de Fourier de l'accélérogramme au niveau du substratum rocheux $\ddot{y}_{N+1}(\omega)$, au moyen de la transformée rapide [49] on peut obtenir celui au toit de n'importe quelle couche $\ddot{y}_j(\omega)$ par la relation de convolution suivante :

$$\ddot{y}_j(\omega) = \ddot{y}_{N+1}(\omega) T_{j,N+1}(\omega) \quad (4.2)$$

L'accélérogramme dans la couche (j) $\ddot{y}(z_j, t)$ et éventuellement à la surface libre $\ddot{y}(0, t)$, est obtenu par la transformée de Fourier inverse telle que :

$$\ddot{y}(z_j, t) = \text{Re} \left(\sum_{n=0}^{N/2} \ddot{y}_j(\omega) e^{i\omega_n t} \right) \quad (4.3)$$

Cette équation permet de connaître en tout point du profil de sol l'accélération, la vitesse et le déplacement.

4.4. Présentation du programme *STOCH10* élaboré

Nous présentons, ci-dessous, le programme numérique qui a été développé en vue de l'investigation stochastique qui est menée. Le programme a été utilisé et validé dans le chapitre 3.

STOCH10 est un programme de calcul de la réponse sismique d'un profil de sol à stratification horizontale dont les propriétés du sol sont à variation stochastique ; il a été développé par l'utilisation du langage informatique *FORTRAN*. Les hypothèses fondamentales du programme *STOCH10* sont décrites ci dessous:

- Le profil du sol est supposé infini horizontalement.
- Chaque couche du profil de sol est définie par son module de cisaillement moyen G , sa masse volumique moyenne ρ , son coefficient d'amortissement ξ et son épaisseur h .
- le module de cisaillement G , la masse volumique ρ sont considérés comme des paramètres stochastiques définis par une valeur moyenne plus des fluctuations.
- La réponse sismique du profil de sol est due à la propagation verticale d'ondes de cisaillement.
- L'onde de cisaillement excitatrice est introduite sous forme d'un accélérogramme.

Les différentes opérations permises par le programme *STOCH10* sont les suivantes:

- Lecture du mouvement d'excitation.
- Lecture des données relatives au profil de sol et calcul de sa fréquence fondamentale de vibration pour le cas déterministe et stochastique.
- Calcul de la fonction d'amplification entre deux points quelconques du profil de sol.
- Calcul du mouvement sismique en tout point du profil à partir d'une excitation générée au niveau du substratum rocheux ou calcul de l'excitation sismique au niveau du substratum rocheux par déconvolution de la réponse sismique enregistrée à n'importe quel point du profil.
- Calcul des spectres de Fourier des mouvements sismiques en tout point du profil, en fonction de la fréquence.

- Histoire des mouvements sismiques (accélération en fonction du temps) en tout point du profil.
- Calcul du spectre de réponse en accélération, vitesse ou déplacement.

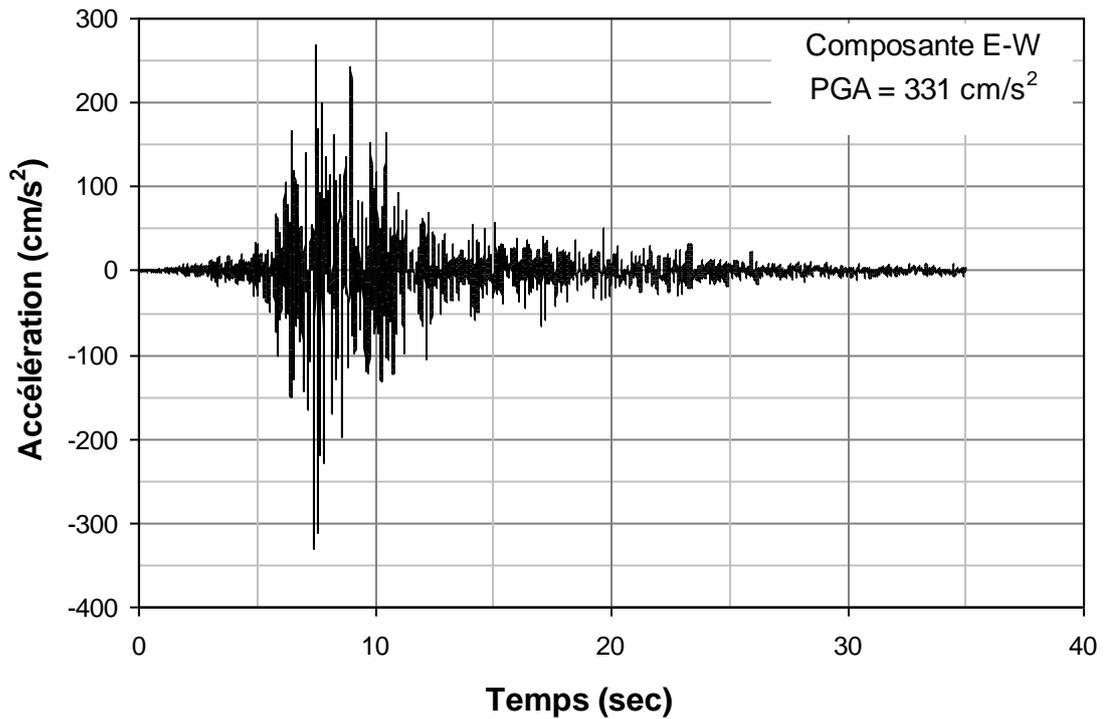
La subroutine de calcul du spectre de réponse la plus universellement utilisée est celle écrite par Idriss à l'université de Berkeley en 1969 [50] en langage fortran. Elle est basée sur les techniques présentées par Nigam et al (1968) [51]. Cette subroutine a été utilisée dans plusieurs programmes numériques entre autres, le programme *SHAKE91* [48].

4.5. Applications

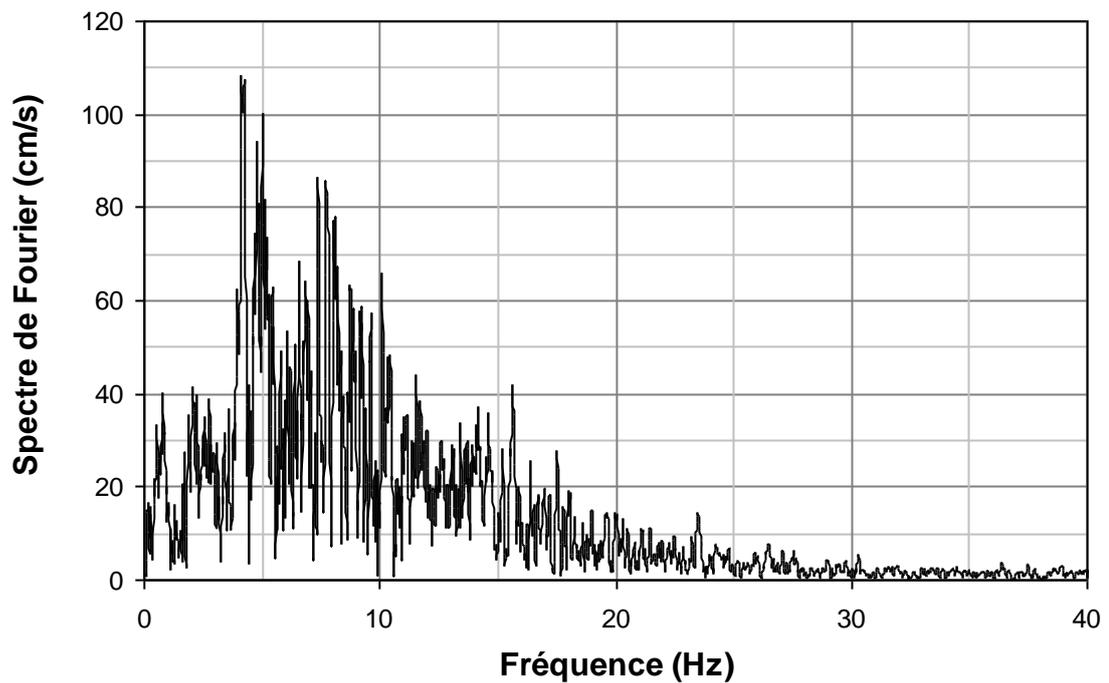
4.5.1. Cas d'un monocouche

Cette application traite le comportement sismique d'un monocouche aléatoirement hétérogène, d'une étendue latérale infinie. Ayant déterminé la fonction d'amplification, nous déterminons par convolution la réponse de ce monocouche à une excitation à sa base sous forme d'un accélérogramme. Pour cela, nous calculons d'abord le spectre de Fourier de l'accélérogramme. Puis, en le multipliant par la fonction de transfert, nous obtenons le spectre de Fourier en surface. Au moyen de la transformée inverse de Fourier [49], nous obtenons l'accélérogramme en surface de sol.

Pour mettre en œuvre cette procédure, nous avons excité la couche de sol à sa base par l'accélérogramme qui a été enregistré à la station rocheuse de Keddara lors du tremblement de terre du 21 Mai 2003 qui a secoué la région Alger-Boumerdes. La figure 4.3 montre l'accélérogramme représentant les accélérations des particules de sol, enregistrées à la station rocheuse du site de keddara. Celles-ci sont appliquées à la base rocheuse de la couche de sol. La réponse de la couche, exprimée en termes d'accélérations et spectres de Fourier à sa surface libre, est présentée sur les figures 4.4 et 4.5, qui correspond au cas homogène, aussi bien qu'une réalisation typique qui correspond au cas hétérogène, pour lequel une atténuation importante comparée au cas homogène.

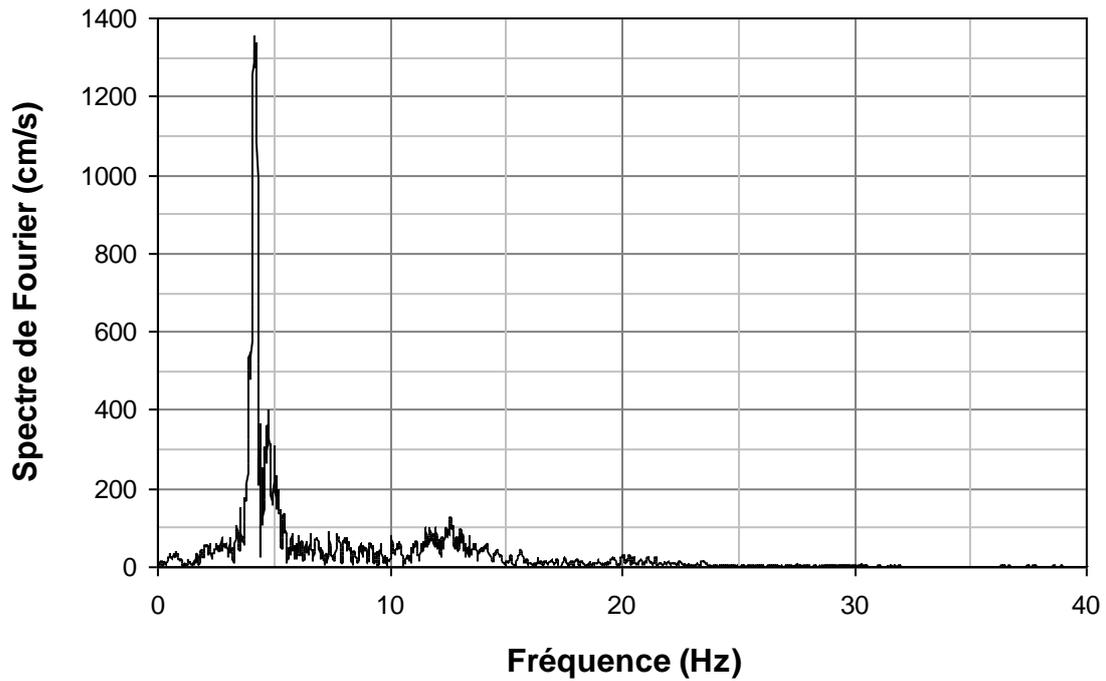


(a)- Accélérogramme

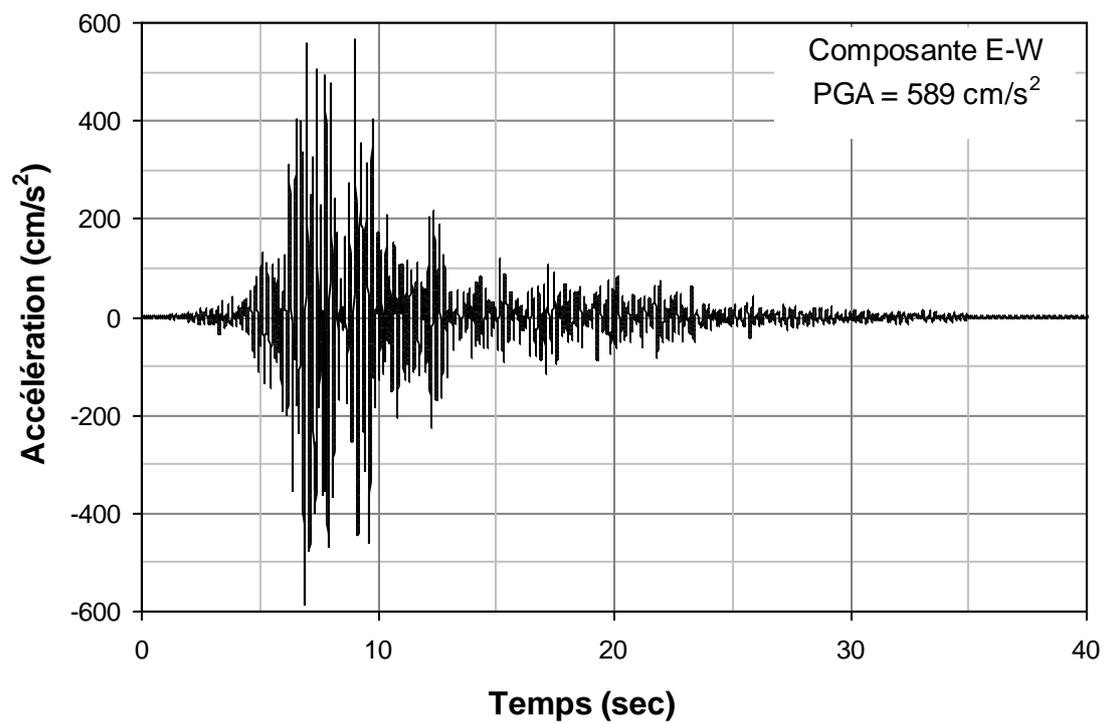


(b)- Spétre de Fourier

Fig. 4.3- Accélérations et spétre de Fourier enregistrés à la station rocheuse de keddara.

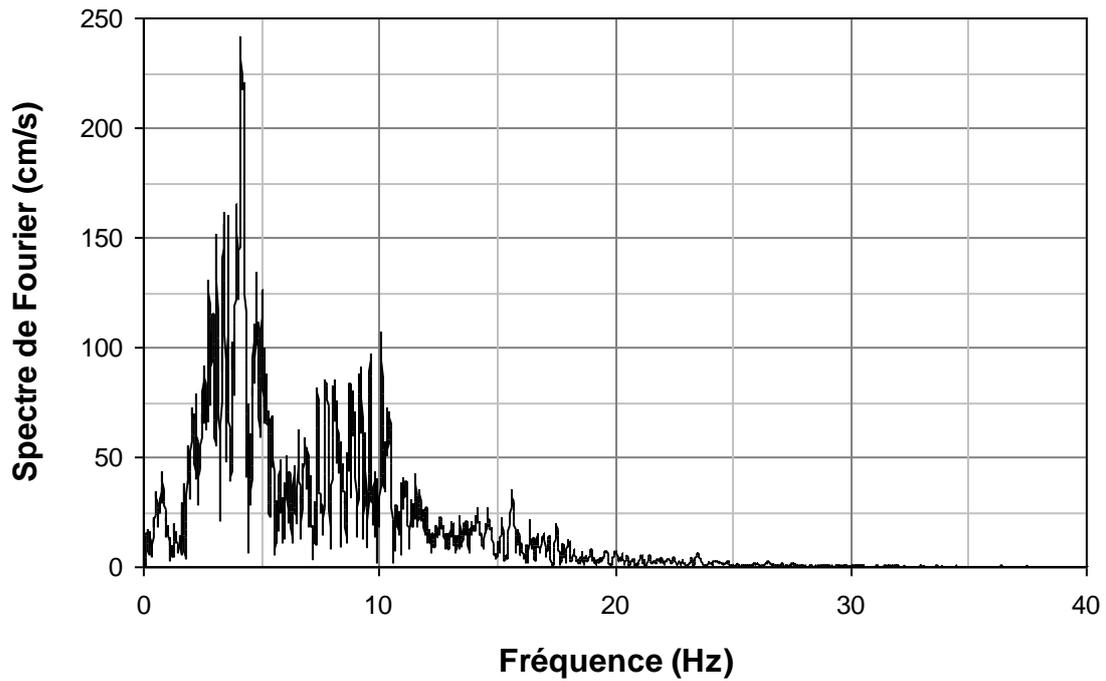


(a)- Spectre de Fourier.

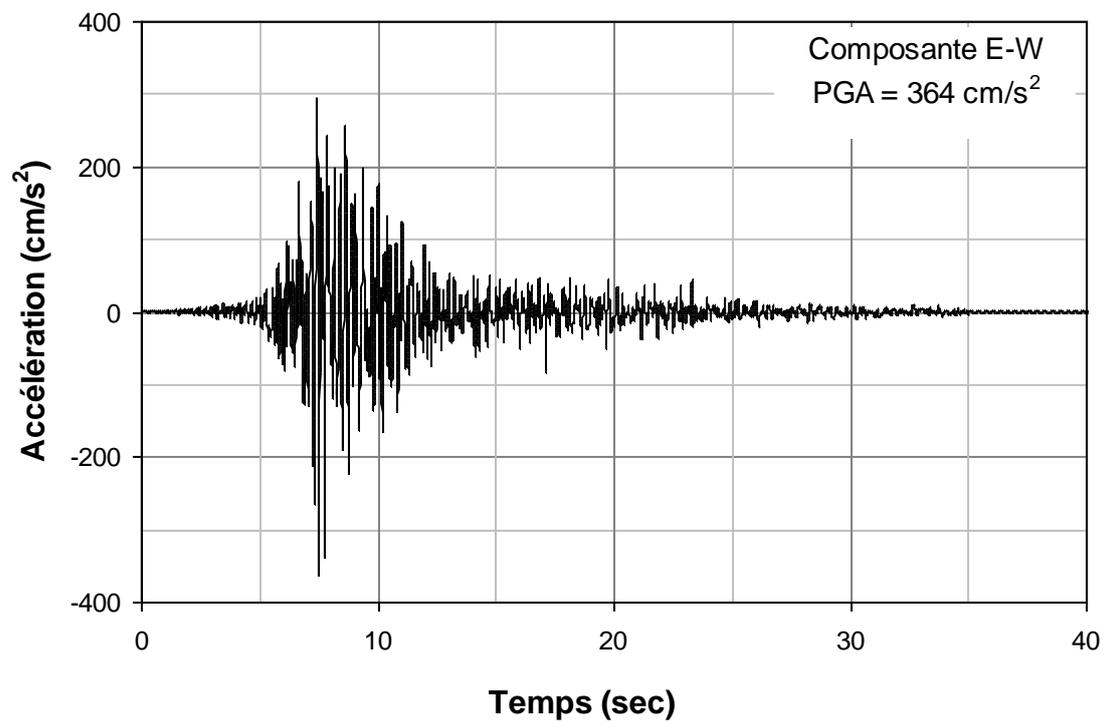


(b)- Accélérogramme.

Fig. 4.4- Accélérations et spectres de Fourier calculés à la surface de la couche de sol.
cas déterministe; $\sigma_{11}^2 = \sigma_{22}^2 = \sigma_{12}^2 = 0$, $\beta = 0$.



(a)- Spectre de Fourier.



(b)- Accélérogramme

Fig. 4. 5- Accélérations et spectres de Fourier calculés à la surface de la couche de sol.
cas stochastique; $\sigma_{11}^2 = \sigma_{22}^2 = \sigma_{12}^2 = 0.4$, $\beta = 5$.

4.5.2. Cas d'un multicouche

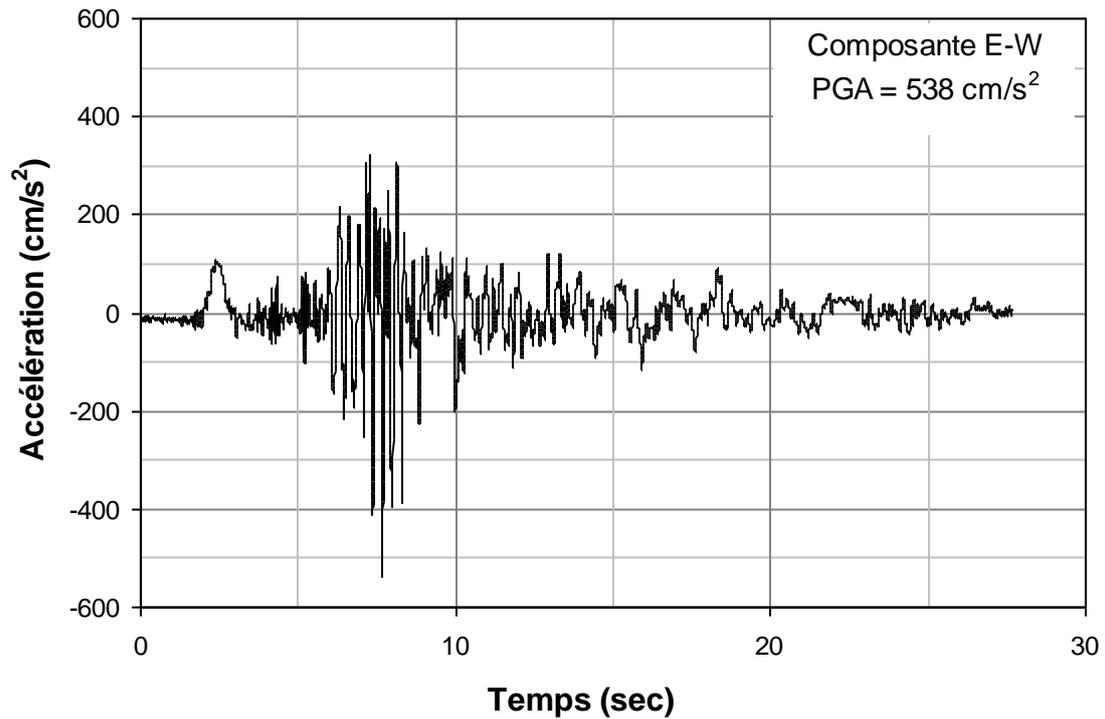
Dans le but d'obtenir la réponse du profil de sol étudié, en termes d'accélération de sol, nous avons excité le profil de sol dont les propriétés varient stochastiquement par le mouvement de référence, c-à-d l'accélérogramme enregistré à la station rocheuse de Keddara (rocher) (Fig.4.3-a) transféré de la station d'enregistrement vers le site étudié.

Les accélérations de sol en surface libre du site projet (réponse) sont obtenues en utilisant le programme *STOCH10*.

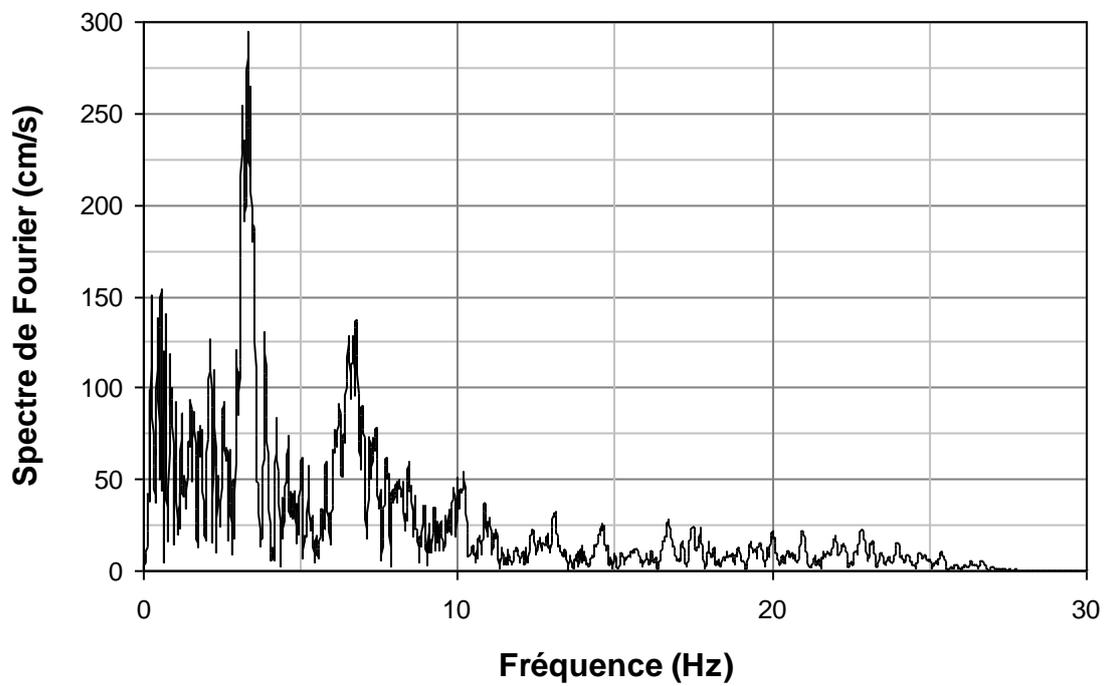
Le site étudié avoisine un site expérimental (Dar El Beida) d'environ une dizaine de kilomètres. Les accélérations enregistrées lors du choc principale dans les directions (E-W), (V) et (N-S) sont, respectivement 0.54g, 0.16g et 0.50 g. Nous comparons dans les figures 4.7, 4.8, 4.9 et 4.10 les accélérogrammes calculées à la surface du site projet (Bab Ezzouar) dont les propriétés varient stochastiquement et le cas déterministe, d'une part, et les accélérogrammes enregistrés au site de Dar El Beida pour la composantes E-W (Fig.4.6) ,d'autre part.

A partir des figures 4.7, 4.8, 4.9 et 4.10, on peut observer que plus le degré d'hétérogénéité du sol augmente et plus l'accélération maximale à la surface libre diminue en comparaison avec le cas homogène. Ceci est interprété par les multiples réflexion réfraction (diffraction) du mouvement causées par le caractère non homogène du sol [21].

Les résultats présentés dans le domaine fréquentiel en termes de spectre de Fourier montre que l'augmentation de degré d'hétérogénéité du sol provoque un effet de filtrage qui fait glisser la fréquence fondamentale du système vers les basses fréquences, et provoque l'atténuation des fréquences élevées. Dans ce cas, le sol hétérogène simulé devient plus mou comparé au sol homogène.

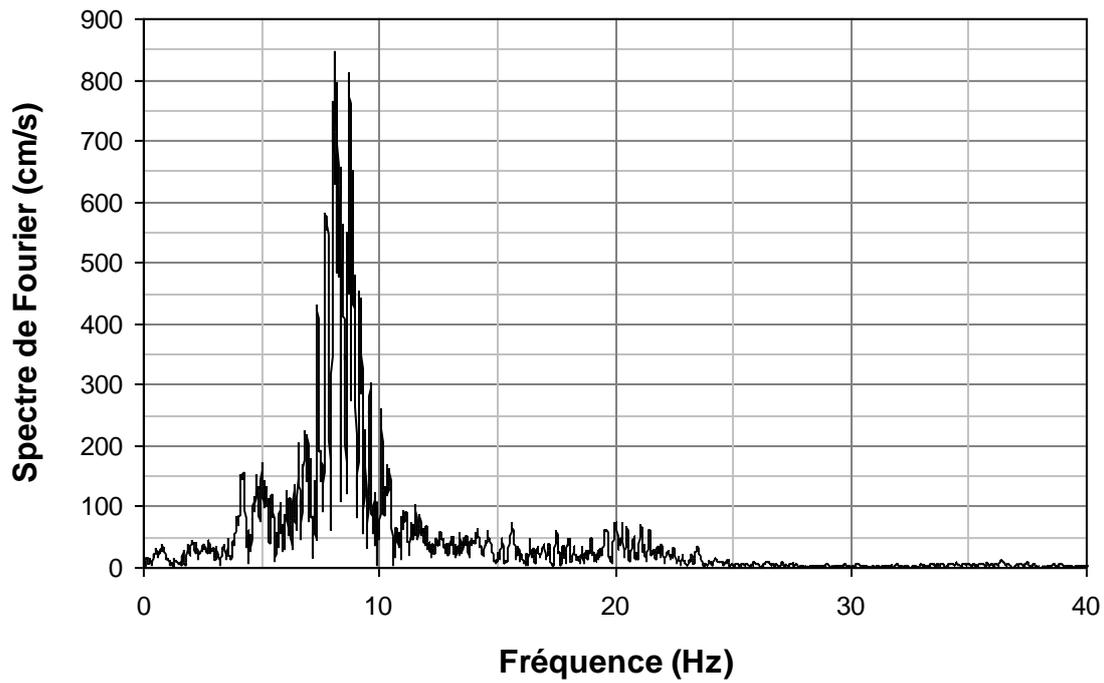


(a)- Accélérogramme

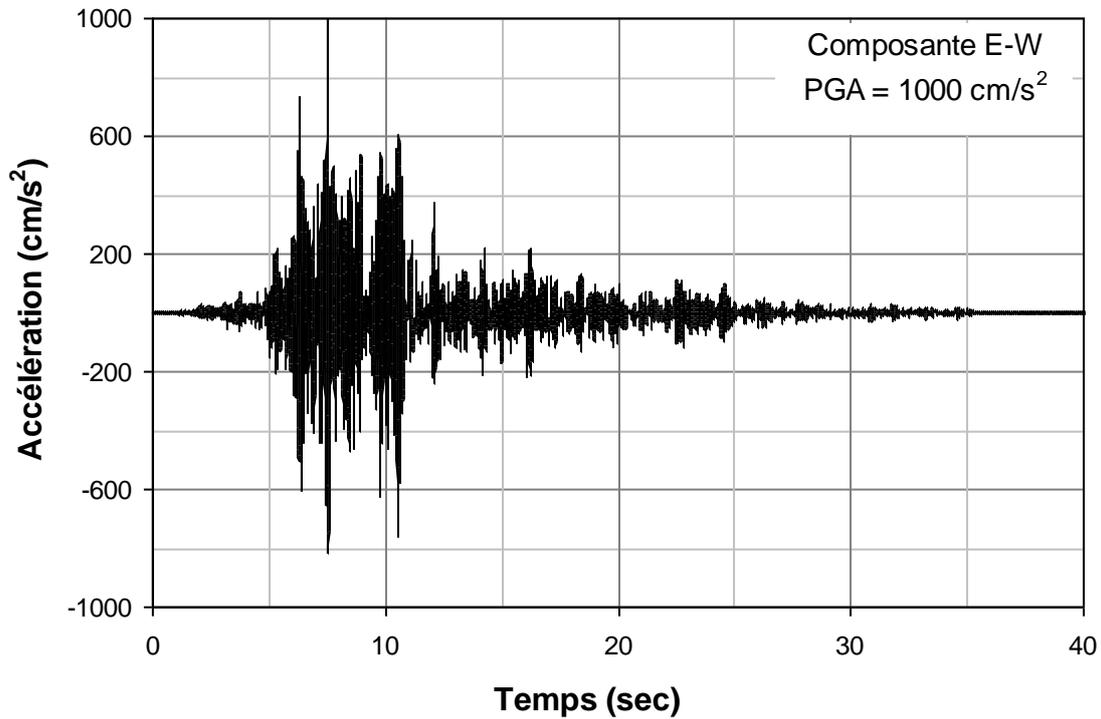


(b)- Spectre de Fourier.

Fig. 4.6 - Accélérations et spectre de Fourier enregistrés à la station de Dar El Beida .

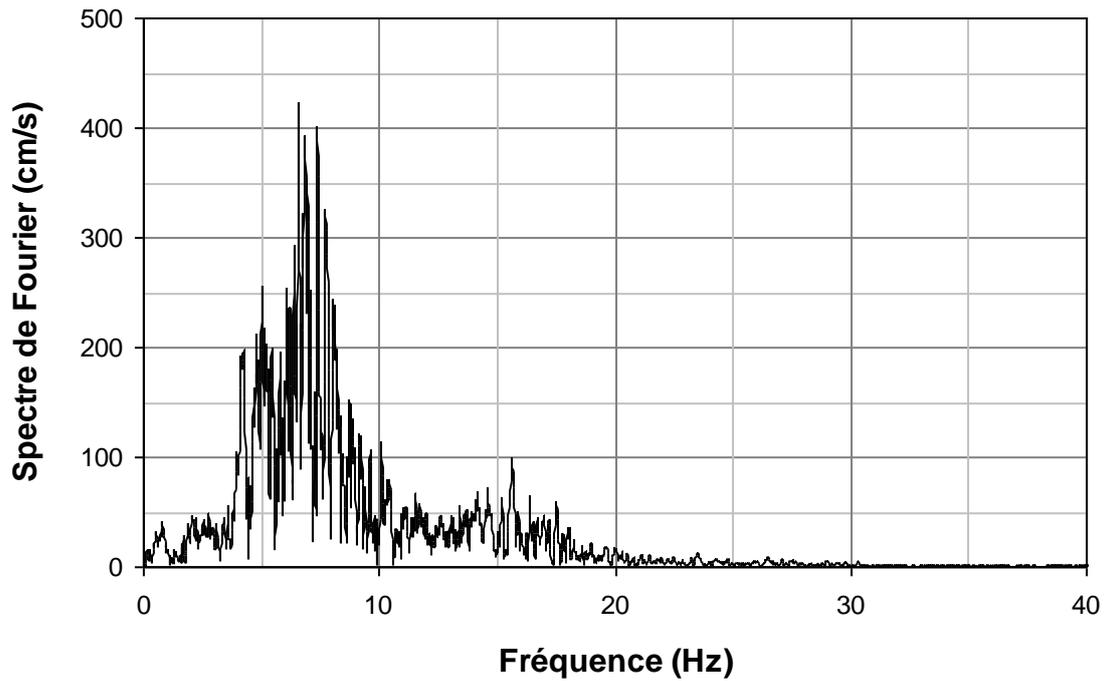


(a)- Spectre de Fourier.

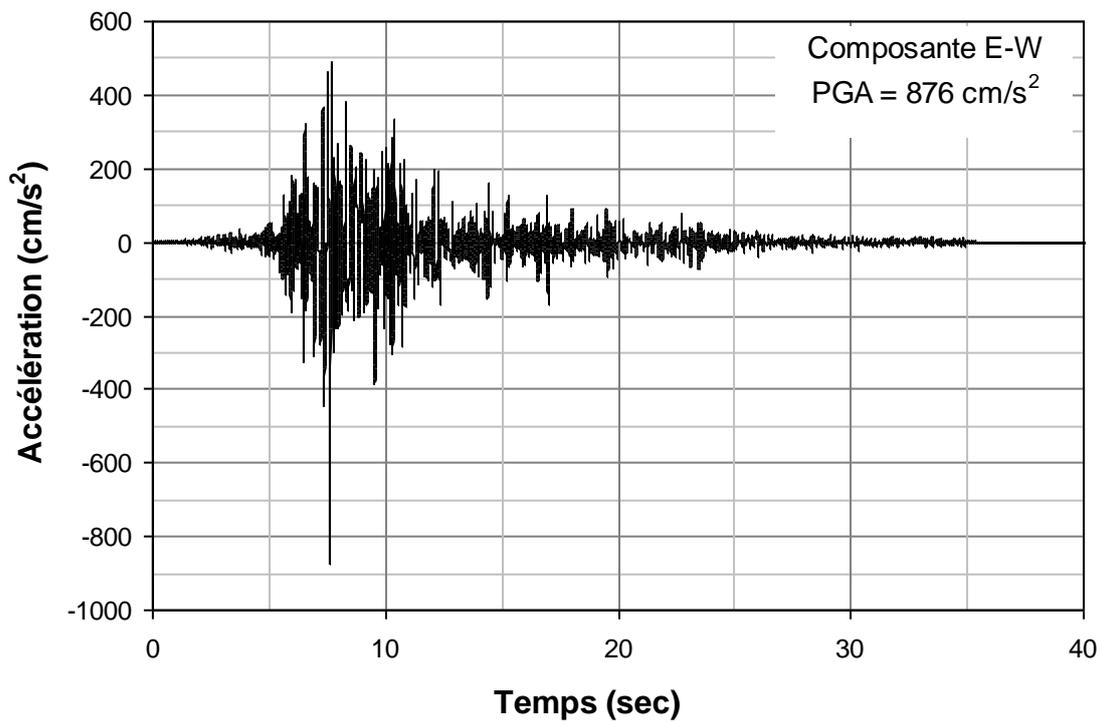


(b)- Accélérogramme

Fig. 4.7 - Spectres de Fourier et accélérations calculés à la surface de la couche de sol de Bab-Ezzouar (a) cas déterministe; $\sigma_{11}^2 = \sigma_{22}^2 = \sigma_{12}^2 = 0$, $\beta = 0$.

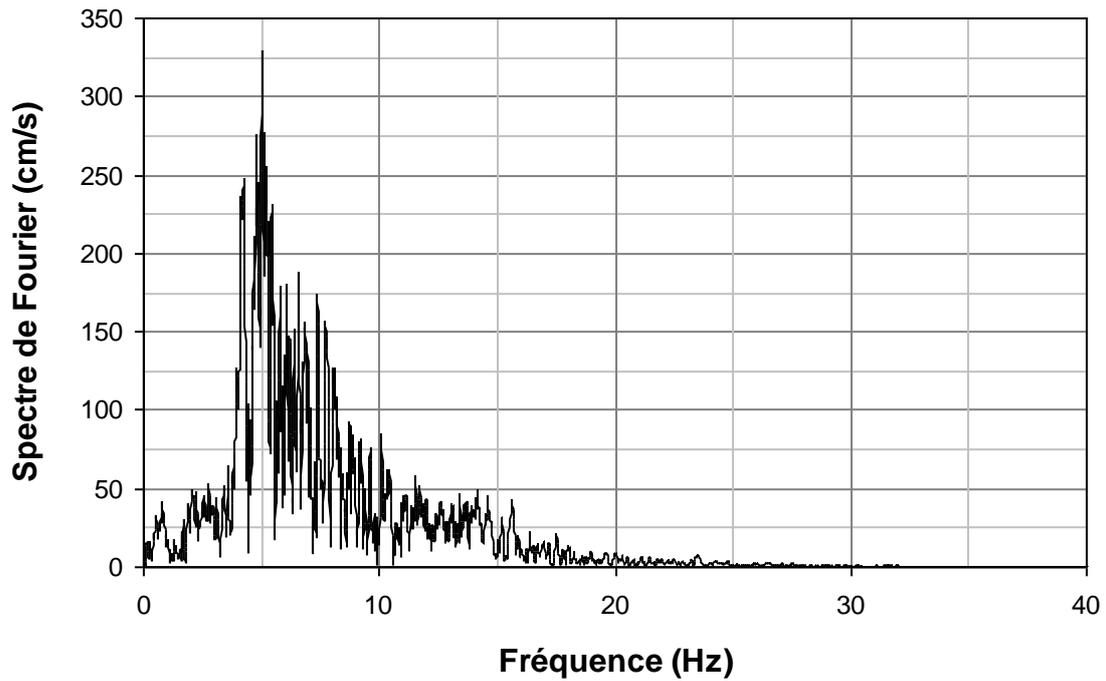


(a)- Spectre de Fourier.

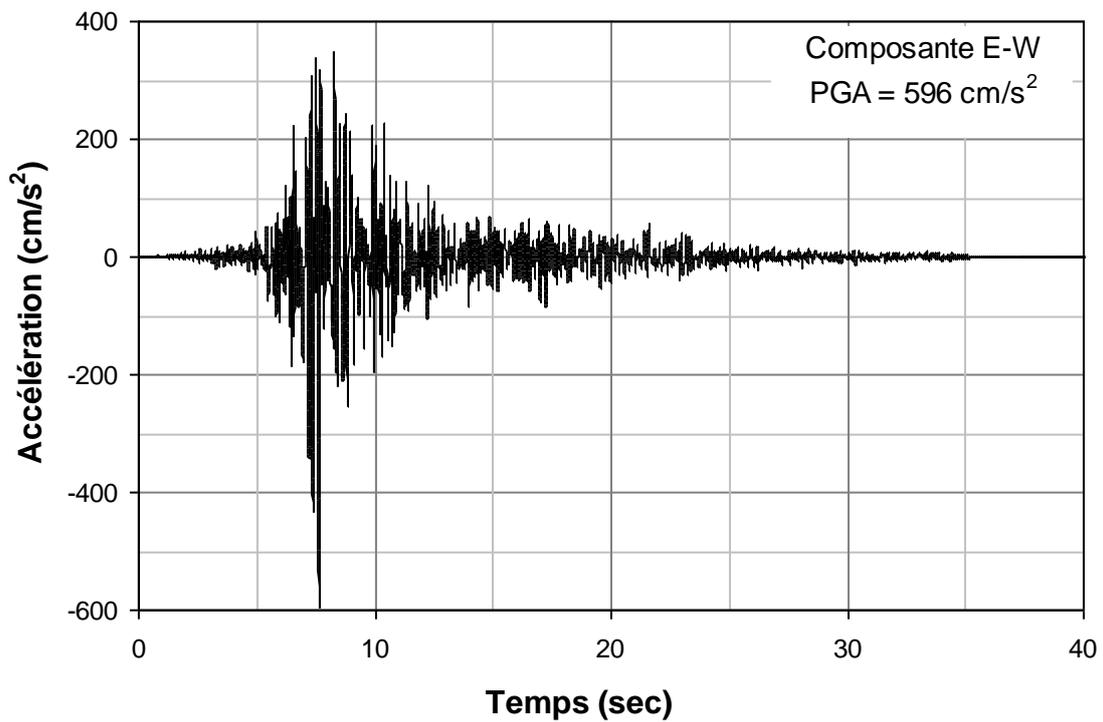


(b)- Accélérogramme

Fig. 4.8 - Spectres de Fourier et accélérations calculés à la surface de la couche de sol de Bab-Ezzouar (b) cas stochastique; $\sigma_{11}^2 = \sigma_{22}^2 = \sigma_{12}^2 = 0.4$, $\beta = 5$.

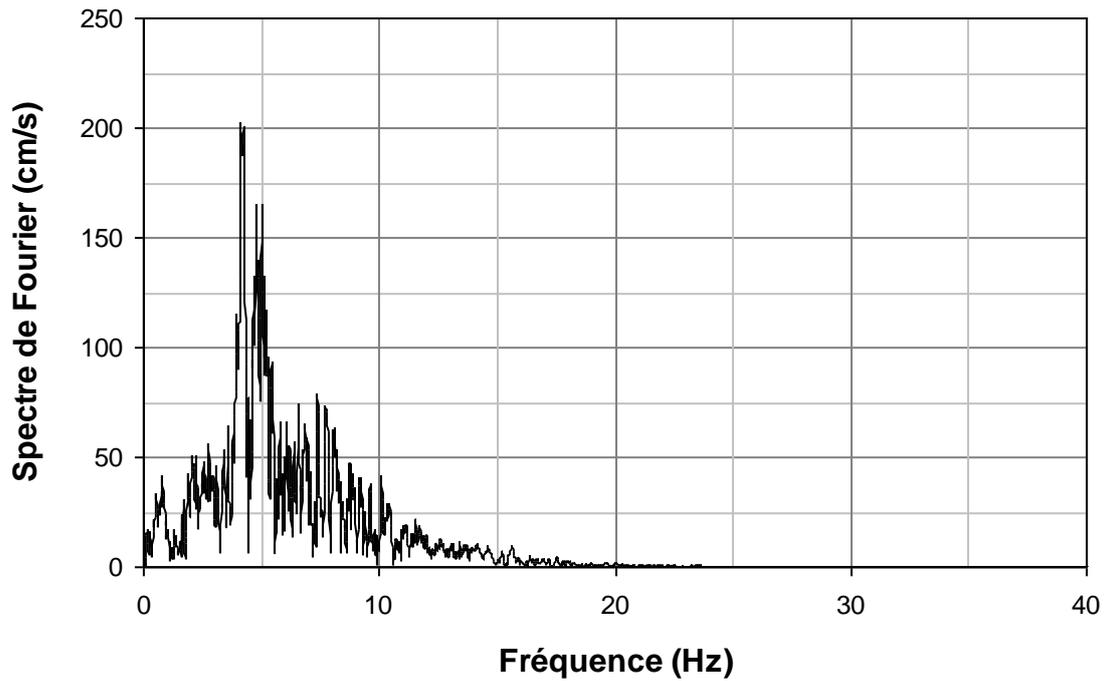


(a)- Spectre de Fourier.

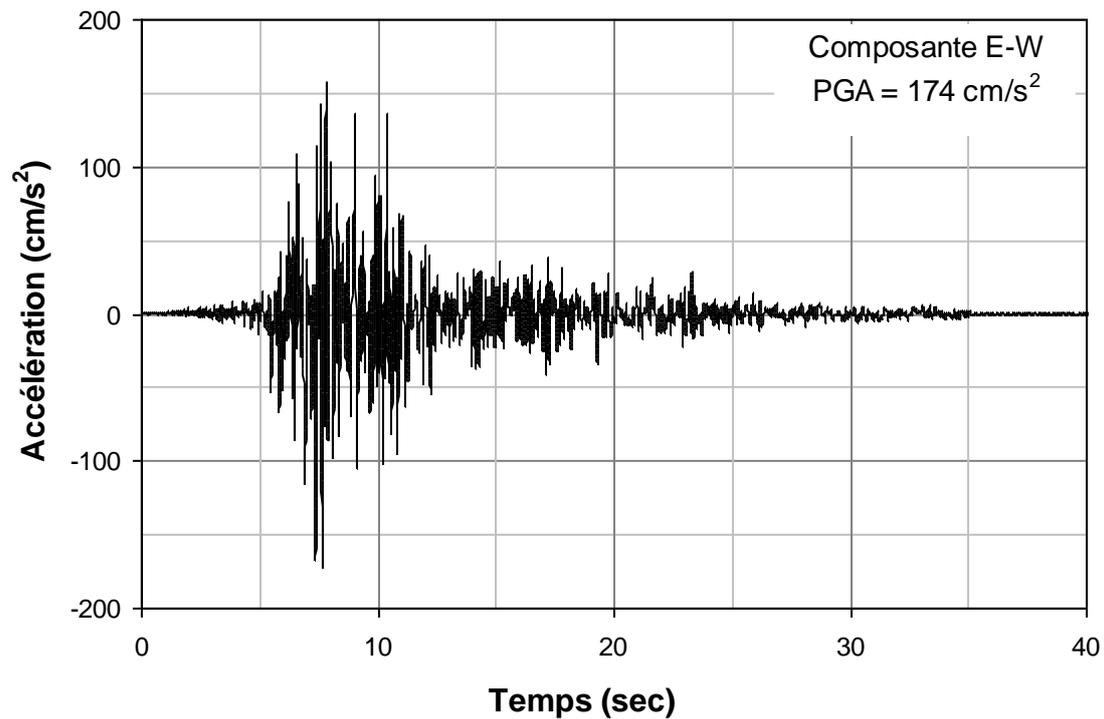


(b)- Accélérogramme

Fig. 4.9 - Spectres de Fourier et accélérations calculés à la surface de la couche de sol de Bab-Ezzouar (c) cas stochastique; $\sigma_{11}^2 = \sigma_{22}^2 = \sigma_{12}^2 = 0.6$, $\beta = 5$.



(a)- Spectre de Fourier.



(b)- Accélérogramme

Fig. 4.10 - Spectres de Fourier et accélérations calculés à la surface de la couche de sol de Bab-Ezzouar (d) cas stochastique; $\sigma_{11}^2 = \sigma_{22}^2 = \sigma_{12}^2 = 0.8$, $\beta = 5$.

Pour mieux montrer les effets de variation des propriétés de sol sur la réponse sismique, on compare dans une même figure, d'une part l'accélération déterministe, enregistrée et

l'accélération stochastique (Fig.4.11) et d'autre part les spectres de Fourier correspondants (Fig.4.12).

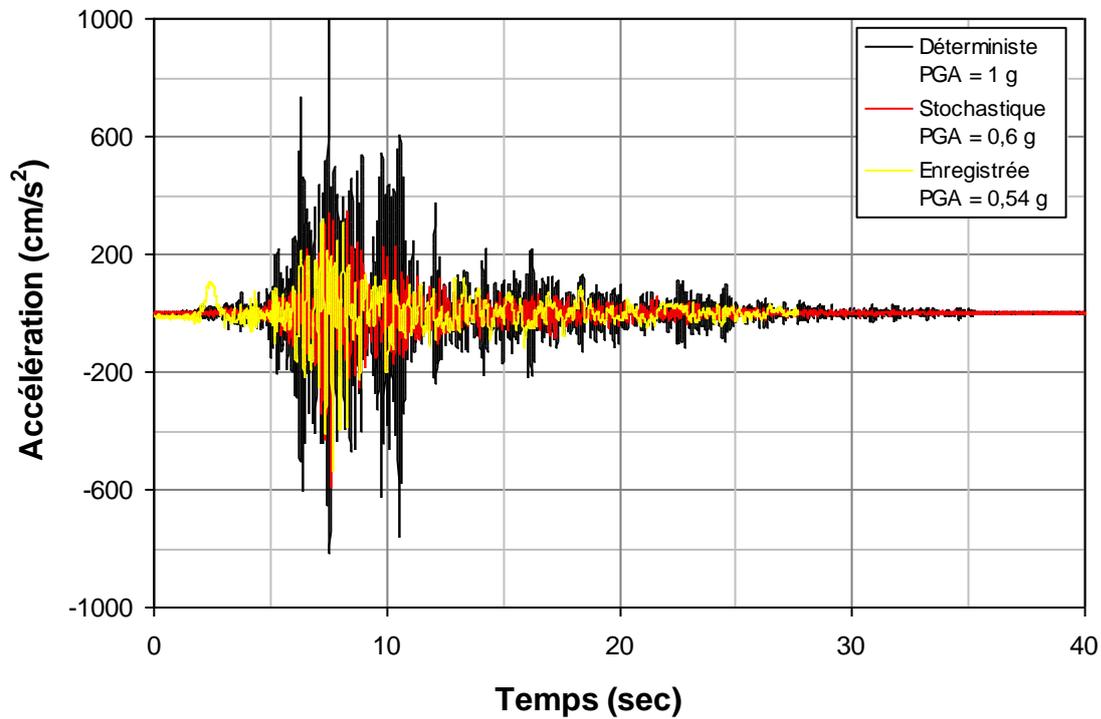


Fig. 4.11 - Comparaison entre accélérations calculés a Bab Ezzouar

Pour le cas déterministe et stochastique et ceux enregistrés au site de Dar El Beida.

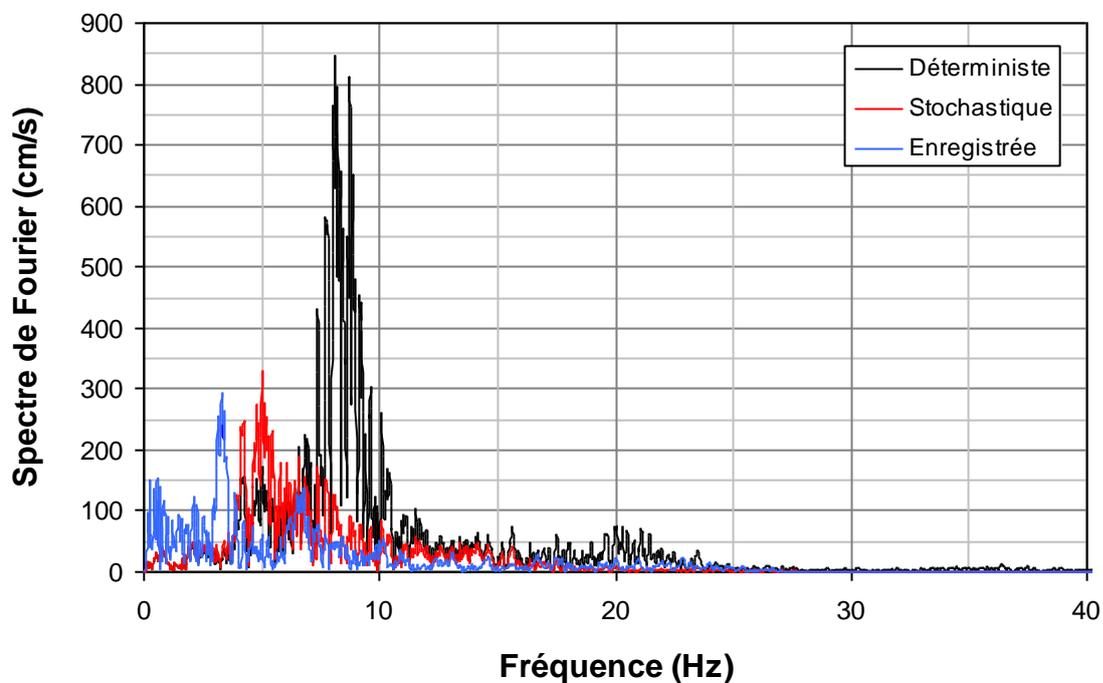


Fig. 4.12 - Comparaison Spectre de Fourier calculés a Bab Ezzouar

Pour le cas déterministe et stochastique et ceux enregistrés au site de Dar El Beida.

4.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la réponse d'un profil de sol unidimensionnel, hétérogène sous l'effet d'une excitation sismique uniforme. L'aspect hétérogène du sol est pris en compte à travers une variation stochastique du module de cisaillement et la densité de sol. La réponse sismique d'un site situé à Bab-Ezzouar et effectué au moyen de l'analyse de Fourier.

L'analyse sismique stochastique du profil de sol est effectuée par l'intermédiaire de la formulation présentée dans ce mémoire et le programme *STOCH10* élaboré dans le cas unidimensionnel (ondes SH).

Il ressort de résultats obtenus que plus le degré d'hétérogénéité du sol augmente et plus l'accélération maximale à la surface libre diminue en comparaison avec le cas homogène. Ceci est interprété par les multiples réflexion réfraction (diffraction) du mouvement causées par le caractère non homogène du sol.

Dans le domaine fréquentiel en termes de spectre de Fourier, il ressort des résultats obtenus que l'augmentation de variation du module de cisaillement provoque un effet de filtrage qui fait glisser la fréquence fondamentale du système vers les basses fréquences, et provoque l'atténuation des fréquences élevées. Dans ce cas, le sol hétérogène simulé devient plus mou comparé au sol homogène.

L'application menée dans ce chapitre consiste en une validation expérimentale de notre méthode. en variant la vitesse des ondes de cisaillement, nous avons obtenu une réponse au niveau du site de Bab-Ezzouar, présumé ferme, concorde convenablement à la réponse enregistrée au site avoisinant de Dar Elbeida. ce dernier, sur lequel des accélérations de 0.54g, 0.16g et 0.50g dans les directions E-W ,V et N-S, respectivement, ont été enregistrés lors du séisme de Boumerdes 2003, laissent croire à un type de sol meuble, en l'absence des données géotechniques surplace. Cela signifie qu'ont variant la vitesse des ondes de cisaillement à une valeur de $\sigma_{22}^2 = 0.6$ et la longueur de corrélation $\beta = 5$, le site étudié, par hypothèse ferme, est devenu meuble.

Comme une synthèse, on peut conclure des résultats obtenus, que le module de cisaillement a un effet important sur l'analyse sismique des profils de sol hétérogènes, qui met en évidence l'importance de la prise en compte dans n'importe quelle investigation dynamique stochastique de sol.

Conclusions et Recommandations

1. Conclusions générales

L'effet de site est une composante significative du mouvement du sol lors d'un séisme, qui dépend des propriétés du matériau, de la topographie en surface et de l'input sismique. Les effets de site les plus importants sont l'amplification due au contraste d'impédance et le filtrage du contenu fréquentiel. Ces phénomènes altèrent les caractéristiques sismiques du site et causent une concentration des dommages lors d'un séisme. Ces paramètres doivent, donc, être estimés pour l'évaluation des risques sismiques à une échelle locale. Les conditions locales telles que la variation des propriétés des couches de sol, ont des effets importants sur les mouvements en surface, donc sur les structures.

Le travail contenu dans ce mémoire a visé, essentiellement, la mise en évidence des effets des variations stochastiques du module de cisaillement et la masse volumique des couches de sol sur la fonction d'amplification obtenue à travers une formulation analytique. Le modèle analytique utilisé est basé sur celui de Karal et Keller et utilise l'idée de la matrice fondamentale et l'approximation de Bourret.

Ensuite, par convolution nous avons obtenu la réponse de ce dépôt de sol à une excitation sous forme d'un accélérogramme, en termes de spectres de Fourier, accélérations et spectre de réponse en surface libre.

Nous avons utilisé dans la présente étude une formulation analytique pour déterminer la réponse d'un dépôt de sol dont les propriétés varient stochastiquement.

Les propriétés de sol étudiées sont la masse volumique du sol et le module de cisaillement. Ceux-ci sont modélisés comme un champ aléatoire spatial. L'amplitude moyenne de la fonction d'amplification est sensiblement atténuée avec une extension du contenu fréquentiel. D'autre part, à mesure que le coefficient de variation du module de cisaillement augmente, la fréquence fondamentale est décalée vers la gauche. L'effet de la variation de la masse volumique du sol est négligeable comparé à celui du module de cisaillement.

La longueur de corrélation verticale exerce une grande influence sur la fonction d'amplification. L'augmentation de cette longueur cause une diminution de l'amplitude de la fonction d'amplification.

L'analyse sismique stochastique du profil de sol est effectuée par l'intermédiaire de la formulation présentée dans ce mémoire et le programme *STOCHIO* élaboré dans le cas unidimensionnel (ondes SH).

Il ressort de résultats obtenus que plus le degré d'hétérogénéité du sol augmente et plus l'accélération maximale à la surface libre diminue en comparaison avec le cas homogène. Ceci est interprété par les multiples réflexion réfraction (diffraction) du mouvement causées par le caractère non homogène du sol.

Dans le domaine fréquentiel en termes de spectre de Fourier, il ressort des résultats obtenus que l'augmentation de variation du module de cisaillement provoque un effet de filtrage qui fait glisser la fréquence fondamentale du système vers les basses fréquences, et provoque l'atténuation des fréquences élevées. Dans ce cas, le sol hétérogène simulé devient plus mou comparé au sol homogène.

L'application menée dans ce chapitre consiste en une validation expérimentale de notre méthode, en variant la vitesse des ondes de cisaillement, nous avons obtenu une réponse au niveau du site de Bab-Ezzouar, présumé ferme, concorde convenablement à la réponse enregistrée au site avoisinant de Dar Elbeida. ce dernier, sur lequel des accélérations de 0.54g, 0.16g et 0.50g dans les directions E-W ,V et N-S, respectivement, ont été enregistrés lors du séisme de Boumerdes 2003, laissent croire à un type de sol meuble, en l'absence des données géotechniques sur place. Cela signifie qu'en variant la vitesse des ondes de cisaillement avec une variance de $\sigma_{22}^2 = 0.6$ et la longueur de corrélation $\beta = 5$, le site étudié, par hypothèse ferme, est devenu meuble en raison du contenu fréquentiel.

A travers cette étude, nous avons pu mettre en évidence l'importance de la prise en compte de l'incertitude sur les propriétés des profils de sol dans n'importe quelle investigation dynamique stochastique de sol.

2. Recommandations futures

Nous avons étudié ici que les variations stochastiques sur la masse volumique et le module de cisaillement. D'autres paramètres peuvent également être étudiés.

D'autre part, si le dépôt de sol présente des irrégularités importantes, une étude telle que celle présentée ici, ne peut être convenable. A cet effet, la méthode des éléments finis stochastiques prend place.

Aussi, si nous voudrions que l'étude soit plus complète, il faudra introduire une excitation aléatoire en faisant appel aux concepts de la mécanique et vibration aléatoires.

Références Bibliographiques

Références Bibliographiques

- [01] Manolis G. D., *Stochastic soil dynamics*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2002, Vol. 22, pp. 3-15.
- [02] Gazetas G., Debchaudhury A., Gasparini D. A., *Stochastic estimation of the nonlinear response of dams to strong earthquakes*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1982, Vol. 1, pp. 10-9.
- [03] Luco J.E., Wong H.L., *Response of a rigid foundation to a spatially random ground motion*, Earthquake Engineering Structural Dynamics, 1986, Vol. 14, pp. 891-908.
- [04] Pais AL., Kausel E., *Stochastic response of rigid foundations*, Earthquake Engineering Structural Dynamics, 1990, Vol. 19, pp. 611-22.
- [05] Hao H., *Response of multiply supported rigid plate to spatially conelated seismic excitations*, Earthquake Engineering Structural Dynamics, 1991, Vol. 2, pp. 821-38.
- [06] Chu L., Askar, A. Cakmak A.S., *Earthquake waves in a random medium*, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 5, 1981, pp.79-96.
- [07] Hryniewicz Z., Hermans A.J., *Intensity of waves in a randomly non homogeneous Layered Medium*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 12, 1984, pp.1-8.
- [08] Hryniewicz Z., Hermans A.J., *Response of a randomly inhomogeneous layer overlying a homogeneous half-space to surface harmonic excitation*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 16, 1988, pp. 735-744.
- [09] Hryniewicz Z., Hermans AJ., *Free-field response from inclined body waves in a viscoelastic random medium*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1989, Vol. 18, pp.1025-40.

- [10] Wang S., Hao H., *Effect of random variations of soil properties on site amplification of seismic ground motions*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2002, Vol. 22, pp.551-564.
- [11] Schevenels M., *The impact of uncertain dynamic soil characteristics on the prediction of ground vibrations*, PhD thesis, Department of Civil Engineering, K.U.Leuven, Mei 2007, 279 p.
- [12] Der Kiureghian A., *Structural reliability methods for seismic safety assessment: a review*, Engineering Structures, 1996, Vol. 18, pp. 412-424.
- [13] Der Kiureghian A., Haukaas T., Fujimura K., *Structural reliability software at the University of California, Berkeley*, Structural Safety, Vol. 28, pp. 44-67.
- [14] Lacroix J., *Chaînes de Markov*, Technique de l'ingénieur, 2008, AF 612, 16 p.
- [15] Glaser S., *System identification and its application to estimating soil properties*, Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering (GT) - ASCE , 1995, Vol. 121, pp. 553-60.
- [16] Saha O., Berrah M.K., Hadid M. , Boutaleb A., *Réponse sismique déterministe et stochastique des fondations superficielles*, 1st International Conference on Sustainable Built Environment Infrastructures in Developing Countries ENSET Oran (Algeria), 2009, 8 p.
- [17] Hanyga A., *Seismic wave propagation in the earth*, Physics and Evolution of the earth's interior, Amsterdam: Elsevier, 1985, Vol.2, 478 p.
- [18] Hryniewicz Z., *Mean response to distributed dynamic loads across the random layer for anti-plane shear motion*, Acta Mechanica, 1991, Vol. 90, pp. 81-9.
- [19] Manolis G.D., Shaw R.P., *Harmonic wave propagation through viscoelastic heterogeneous media exhibiting mild stochasticity - I. Fundamental solution*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1996, Vol. 15, pp. 119- 27.

- [20] Zerva A., Harada T., *Effect of surface layer stochastically on seismic ground motion coherence and strain estimates*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1997, Vol. 16, pp. 445-457.
- [21] Nour A., *Investigation stochastique sur les milieux heterogenes par la methode des éléments finis*. Thèse de Doctorat, USTHB, Alger, 2003, 144p.
- [22] Nour A., Slimani A., Laouami N., Afra H., *Finite element model for the probabilistic seismic response of heterogeneous soil profile*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2003, Vol. 23, pp. 331-348.
- [23] Badaoui M., *Influence de l'heterogeneite géologique et mécanique sur la réponse des sols multicouches*, Phd Thèses, Ecole Nationale Polytechnique (Algerie), Département de Génie Civi, 2008, 147p.
- [24] Badaoui M., Berrah M. K., Mebarki A., *Influence of the soil profile randomness on the seismic response of multilayered soils with a rigid inclusion*, Communications In Numerical Methods In Engineering, 2008, Vol. 24, pp. 321–334.
- [25] Frisch U., *La propagation des ondes en milieu aléatoire et les équations stochastiques, première partie*, Institut d'Astrophysique, Paris, 1966, Vol.29, pp. 645-682.
- [26] Frisch U., *La propagation des ondes en milieu aléatoire et les équations stochastiques, deuxième partie*, Institut d'Astrophysique, 1967, Vol.30, pp. 565-601.
- [27] Karal F.C., Keller J.B., *Elastic, Electromagnetic and other waves in a random medium*, Journal of Mathematical Physics, 1964, Vol. 5, pp. 537-49.
- [28] Nigam NC., *Introduction To Random Vibrations*, Cambridge, MA: MTT Press, 1983.
- [29] Badaoui M., Berrah M. K., Mebarki A., *Soil height randomness influence on seismic response: case of an algiers site*, Computers and Geotechnics, 2009, Vol. 36, pp. 102-112.
- [30] Manolis G.D., Bagtzoglou AC., *A numerical comparative study of wave propagation in random and inhomogeneous media*, Computational Mechanics, 1992, Vol. 10, pp. 397-413.

- [31] Belayev AK., Ziegler F., *Uniaxial waves in randomly heterogeneous elastic media*, Probabilistic Engineering Mechanics, 1998, Vol. 13, pp. 27-38.
- [32] Madhav MR., Ramakrishna K.S., *Probabilistic prediction of pile group capacity*. In: Spanos PD, editor. Probabilistic methods in civil engineering. New York: ASCE Publication, 1988, pp. 5-8.
- [33] Puel G., *La prise en compte des incertitudes dans la validation des modeles*, Laboratoire MSSMat, 2007, 27 p.
- [34] Vanmarcke E., *Random Fields: Analysis and synthesis*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1983.
- [35] Rackwitz R., Denver H., Calle E., *JCSS Probabilistic Model Code, Section 3.7: Soil properties 5th (final) version* , 2002, 27 p.
- [36] Blanzé C., *Incetitudes et probabilites dans le calcul des structures*, Rapport Interne, Laboratoire De Mécanique Et Technologie, Université Paris 6, 2000, 83 p.
- [37] Wolf JP., *Dynamic soil-structure interaction*. New Jersey: Prentice-Hall, 1985.
- [38] Jeffrey A., *Advanced engineering mathematics*, University of Newcastle-upon-Tyne, 2002, 1155 p.
- [39] Bourret R.C., *Stochastically perturbed fields with applications to wave propagation in random media*, nuovo cimento , 1962, Vol. 26.
- [40] Roesset J.M., *soil amplification of earthquake*. In c. S. Desai and j. T. Christian, editors, Numerical Methods in Geotechnical Engineering, Chapter 19, John Wiley, 1977, pp.639-682.
- [41] Bahar R., *Rapport Geotechnique: CMA CGM Algerie, D-Geot 20/05*, Département Géotechnique, Société de Construction et d'Engineering, Janvier 2006. 84p.
- [42] RPA 99. *Règles Parasismiques Algériennes, Document Technique Réglementaire DTR BC 2 48*, Centre National de Recherche Appliquée en Génie Parasismique (C.G.S), Alger, 2000, 89p.

- [43] Pecker A., *Dynamique des sols*. Ed. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1984, 262p.
- [44] Harichane Z., *Reponse sismique d'un profil de sol, in cours de dynamique des sols, chapitre 3*, Cours de Magister en Génie Civil, Novembre 2007, 27p.
- [45] Laouami N., Slimania A., Bouhadada Y., Chatelain G.L., Nour A., *Evidence for fault-related directionality and localized site effects from strong motion recordings of the 2003 Boumerdes (Algeria) earthquake: consequences on damage distribution and the Algerian seismic code*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 26, 2006, pp.991–1003.
- [46] Douglas J., *A Comprehensive worldwide summary of strong-motion attenuation relationships for peak ground acceleration and spectral ordinates (1969 To 2000)*. ESEE Report N° 01-1, Imperial College of Science, London, January 2001. 144p.
- [47] Bendimerad F., The Boumerdes, Algeria, *earthquake of may 21, 2003*, *EERI Learning from Earthquakes Reconnaissance Report*, October 2003, 71p.
- [48] Idriss I.M., Sun, J.I. **Shake91**: *A computer program for conducting equivalent linear seismic response analysis of horizontally layered soil deposits*. Centre of Geotechnical Modelling Department of Civil & Environmental Engineering, University of California Davis, California, 1992.
- [49] Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., *Numerical recipes*. The Art of Scientific Computing (Fortran Version), Cambridge University Press, 1989, 702p.
- [50] Idriss I.M., *Using the technique presented by Nigam and Jennings (1968). in "Calculation of Response Spectra from Strong-Motion Earthquake Records"*: Bulletin of the Seismological Society of America, vol. 59, 1969, pp. 909-922.
- [51] Nigam N.C., Jennings P.C., *Calculation of response spectra from strong-motion earthquake records*. Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 59, April 1968, pp.909-922.

Résumé

Les conditions locales de sol, telles que la profondeur au rocher à partir de la surface de sol et les propriétés des couches de sol adjacentes ont un effet important sur les mouvements en surface de sol lors de secousses sismiques. D'autre part, les mesures au laboratoire sont menées sur des échantillons petits et plutôt homogènes donnant l'impression que le milieu duquel ont été prélevés est macroscopiquement homogène. Ainsi, partant du fait que l'information concernant les dépôts de sol et les formations rocheuses n'est pas connue avec une précision suffisante et qu'une variation de leurs propriétés sur une faible épaisseur est parfois dramatique, la dynamique des sols stochastique a pris place, connu un essor considérable et continue de progresser.

L'objectif visé par le présent thème de magister est d'étudier les effets du caractère stochastique dans les propriétés des couches de sol sur la réponse sismique d'un site qu'elles constituent. Pour cela un modèle stochastique analytique est développé et implémenté numériquement. Le modèle approchera la stratigraphie du site par une ou plusieurs couches horizontales à aspect aléatoire surmontant un demi-espace (rocher) . Des études comparatives, d'une part, avec les résultats de modèles déterministes et, d'autre part, avec les enregistrements de mouvements sismiques en surfaces de sol sont menées.

Mots clés : Déterministe, stochastique, sol, mouvement sismique, équation intégral-différentielle, transformée de Laplace, amplification, réponse sismique.

Abstract

The local soil conditions, such as depth to rock from the soil surface and soil properties of adjacent soil layers have a significant effect on ground surface motions during earthquakes. On the other hand, laboratory measurements were conducted on samples of small and rather homogeneous, giving the impression that the medium of which were taken is macroscopically homogeneous. Thus, from the fact that information about soil deposits and rock formations is not known with sufficient accuracy and a change in their properties over a small thickness is sometimes dramatic, stochastic soil dynamics took place and progresses continuously.

The objective of the present theme of magister is to study the effects of stochastic properties of soil layers on the seismic response of a site. An analytical stochastic model is then developed and numerically implemented. The model will approach the stratigraphy of the site by one or more random horizontal layers overlying a half space (rock). Comparative studies on the one hand, with the results of deterministic models and on other hand, with recordings of surface seismic ground motions were conducted.

Keywords: Determinist, stochastic, soil, seismic ground motions, integro-differential equation, Laplace transform, amplification, seismic response.

ملخص

العوامل المحلية للتربة مثل عمق الصخرة عن سطح الأرض و خصائص الطبقات المجاورة من التربة لها تأثيرات مهمة على حركة التربة على السطح خلال الهزات الأرضية. من جهة أخرى القياسات في المخابر تتم على عينات صغيرة و متجانسة و تعطي الانطباع على أن الوسط الذي تم اخذ هذه العينات منه متجانس. على هذا المنوال، انطلاقاً من مبدأ أن المعلومات الخاصة بالترسبات و تكون الصخور غير معروفة بدقة لازمة و أن التغير في الخصائص على سمك ضئيل قد تكون له نتيحة وخيمة فان الديناميكا العشوائية للتربة أصبحت لها مكانة هامة و لازالت أهميتها تزداد.

الهدف من مذكرة الماجستير ه ذه دراسة آثارا لتغيرات العشوائية لخصائص طبقات التربة على الاستجابة الزلزالية للموقع. لهذا الغرض تم تطوير نموذج تحليلي و تطبيقه عمليا. النموذج يقارب المقطع التمثيلي للموقع بطبقة واحدة أو أكثر ذات طابع عشوائي المسنودة على الصخرة الأم. دراسات مقارنة، من ناحية مع نتائج النماذج المحددة، ومن ناحية أخرى، مع تسجيلات للحركة الزلزالية للتربة تم القيام بها.

الكلمات المفاتيح: محددة، عشوائية، تربة، حركة زلزالية، معادلة تفاضلية-تكاملية، تحويل لبلاص،

تضخيم، استجابة زلزالية.