

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Hassiba Benbouali de Chlef
Faculté de Génie Civil et d'Architecture
Département de Génie Civil

Mémoire de Magister

Option : Géomatériaux

Présenté par

Mr. Azeddine CHEHAT

Ingénieur d'Etat en Travaux Publics

Sous le Thème

Modélisation du Comportement non Linéaire des
Géomatériaux sous Sollicitations Sismiques

Soutenu publiquement le : 19 / 09 / 2011

Devant le jury composé de :

Président	Dr. Karim EZZIANE	Maître de Conférences, UHBC
Directeur de thèse	Dr. Zamila HARICHANE	Maître de Conférences, UHBC
Examineur	Dr. Mohamed HADID	Maître de Conférences, ENSTP
Examineur	Dr. Moussa LEBLOUBA	Maître de Conférences, ENSTP
Examineur	Dr. Miloud TAHAR ABES	Maître de Conférences, UHBC

J'ai des tas d'idées brillantes et nouvelles,
mais les brillantes ne sont pas nouvelles,
et les nouvelles ne sont pas brillantes.

Marcel Achard

Remerciements

Je remercie en premier et en dernier lieu, DIEU tout puissant, de m'avoir gardé en bonne santé et accordé le courage et la bonne volonté pour réaliser ce modeste travail.

Je remercie vivement Dr Zamila Harichane, Maître de conférences à l'Université Hassiba Benbouali de Chlef, qui a été à l'origine du présent travail, pour sa disponibilité, son assistance et ses conseils tout au long de cette étude.

Je tiens à remercier également Dr. Karim EZZIANE, Maître de Conférences à l'Université Hassiba Benbouali de Chlef, d'avoir accepté de présider le jury.

Mes vifs remerciements sont aussi adressés à Messieurs Dr. Miloud TAHAR ABES, Maître de Conférences à l'Université Hassiba Benbouali de Chlef, Dr Mohamed HADID et Dr Moussa LEBLOUBA, Maîtres de Conférences à l'Ecole Nationale Supérieure des Travaux Publics (ENSTP) de Kouba, d'avoir accepté d'examiner mon travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma parfaite reconnaissance.

Je tiens aussi à remercier les enseignants du département de Génie Civil à l'Université Hassiba Benbouali de Chlef.

Je n'oublie pas de remercier aussi, les enseignants de l'Ecole Nationale des Travaux Publics ainsi, que les enseignants de la PGS de l'E.N.S.T.P de KOUBA.

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents, qui sans leur soutien et encouragement ce travail n'a pu avoir lieu.

A la joie de ma vie : Mohamed Sadak et Abdennour.

A ma femme.

A mes frères et sœurs.

A l'esprit de ma tante, toujours dans mon cœur.

تمثيل التصرف الاخطي للمواد الأرضية تحت حمولات زلزالية

ملخص

المهدف من هذا العمل هو دراسة التصرف الاخطي للمواد الأرضية المعرضة إلى حمولات زلزالية. من أجل حمولات ضعيفة إلى متوسطة، النماذج المبسطة برهنت على فعاليتها، غير أنّ لمستويات مرتفعة، من الضروري أن تستعمل نماذج لاخطية.

في هذا العمل، شكّل التصرف الانسيابي لبعض أنواع المواد الأرضية بقانون لدائنيّ - مرنّ وفقاً لمعيار فون ميزس. دمج علاقات التصرف لمعيار فون ميزس يقود إلى تعيين ترابط الجساءة المرنة - اللدائنيّ. سيكون هذا القاعدة في تطوير برنامج عددي، بعناصر محدودة، لغرض دراسة التصرف الاخطي للمواد الأرضية تحت تأثير حمولات غيرمعيّنة و بالأخص الحمولات الزلزالية.

Modeling of the nonlinear behavior of geomaterials under seismic excitations

ABSTRACT

The objective of this work is the study of the nonlinear behavior of geomaterials subjected to seismic excitations. For weak to moderate solicitations, the simplified models proved their effectiveness, but for higher levels of solicitations, it is necessary to use nonlinear models.

In the present study, the rheological behavior of some types of geomaterials is modeled by an elastoplastic behavior equation with isotropic work hardening according to the Von Misès criterion. The integration of the constitutive equation of Von Misès's criterion leads to the determination of the elastoplastic matrix of rigidity. This one will be at the base of the development of a computer program, in finite elements, intended to the study of the nonlinear behavior of geomaterials under the effect of unspecified excitations and in particular of seismic excitations.

Modélisation du comportement non linéaire des géomatériaux sous sollicitations sismiques

RESUME

L'objectif de ce travail est l'étude du comportement non linéaire des géomatériaux soumis à des sollicitations sismiques. Pour des sollicitations faibles à modérées, les modèles simplifiés prouvent leurs efficacités, mais pour des niveaux de sollicitations plus élevés, il est nécessaire d'utiliser des modèles non linéaires.

Dans le présent travail, le comportement rhéologique de quelques types de géomatériaux est modélisé par une loi de comportement élastoplastique avec écrouissage isotrope suivant le critère de Von Misès. L'intégration des relations de comportement du critère de Von Misès mène à la détermination de la matrice de rigidité élastoplastique. Celle-ci sera à la base de l'élaboration d'un programme numérique, en éléments finis, destiné à l'étude du comportement non linéaire des géomatériaux sous l'effet de sollicitations quelconques et en particulier des sollicitations sismiques.

TABLE DES MATIERES

Page

Introduction générale

1. Introduction	1
2. Problématique	1
3. Objectifs visés	2
4. Organisation du mémoire	2

Chapitre 1

Etude bibliographique sur le comportement non linéaire des géomatériaux

1.1. Introduction	4
1.2. Lois de comportement des géomatériaux	4
1.2.1. Les grandes classes de comportement	5
1.2.2. Lois de Comportement élastiques linéaires	8
1.2.3. Lois de Comportement élastique non linéaires.....	11
1.2.4. Lois de Comportement non linéaires évoluées	14
1.2.5. Modèles rhéologiques des sols et des roches	16
1.3. Modèles de comportement	23
1.3.1. Modèles unidimensionnels	23

1.3.2. Modèles tridimensionnelles face aux autres modèles	26
1.4. Modélisation par la méthode des éléments finis	27
1.4.1. Modélisation géométriques	27
1.4.2. Méthodes d'intégration des équations de mouvement	30
1.4.3. Synthèse des travaux sur la réponse sismique non linéaire des structures de sols	31
1.5. Conclusion	35

Chapitre 2

Intégration des relations de comportement élastoplastique de Von Misès

2.1. Introduction	36
2.2. Surface et fonction de charge	36
2.2.1. Convexité de La fonction de charge	37
2.2.2. Loi de normalité de la déformation plastique	38
2.2.3. Déformation plastique	39
2.3. Critère de Von Misès	40
2.3.1. Déformation plastique	40
2.3.2. Fonction d'écrouissage	41
2.4. Relations de comportement élastoplastique de Von Misès	43
2.5. Matrice élastoplastique	49
2.5.1 Matrice élastique isotrope	50
2.5.2 Matrice élastoplastique isotrope	51
2.6. Conclusion	57

1. Introduction

Les matériaux utilisés pour les constructions en Génie Civil ont été et sont encore très largement étudiés pour dimensionner les ouvrages et les structures, construites sur les géomatériaux ou avec l'apport de ces derniers, et pour prédire leur comportement à court ou à long terme. L'expérience quotidienne montre cependant que, sous l'effet des mêmes actions extérieures, des volumes identiques d'acier, de sable et d'eau, par exemple, ne se comportent pas de la même manière. Les lois générales de la physique ne permettent pas de distinguer le comportement de ces différents matériaux. Il convient donc de caractériser le comportement spécifique du milieu continu, équivalent au matériau étudié. C'est l'objet de **la loi de comportement**, associée à un matériau, qui doit caractériser son évolution sous l'effet d'actions extérieures données. D'autre part, la méthode des éléments finis connaît depuis plusieurs décennies un développement considérable dans l'étude du comportement des géomatériaux sous différents types de sollicitations.

2. Problématique

Avant d'atteindre les structures, les ondes sismiques se propagent de la source du séisme vers la surface en traversant les couches géologiques. Le mouvement engendré à la surface est très complexe, en particulier si on doit tenir compte du comportement réel du sol étudié et de la dissipation d'énergie sismique lors de son trajet.

Avec l'apparition de l'outil informatique, la résolution numérique s'est avérée comme un moyen incontournable pour les analyses post-sismiques. Elle constitue également un outil intéressant de simulation en vue de la prédiction de la réponse de dépôts de sol ou d'ouvrages en terre constitués avec l'apport des géomatériaux à des mouvements sismiques futurs.

Le premier modèle proposé par les chercheurs qui permet de quantifier l'effet de la variabilité spatio-temporelle est le modèle unidimensionnel en posant l'hypothèse d'une propagation verticale des ondes et une extension latérale infinie. La méthode la plus universelle est celle utilisant le modèle viscoélastique linéaire équivalente proposé par Seed et Idriss au début des années 70 qui a été largement utilisée pour sa simplicité et la qualité des résultats fournis. Cette méthode présente toutefois des limitations importantes surtout lorsque le sol se caractérise par de fortes non linéarités. De ce fait le recours aux méthodes non linéaires devient alors nécessaire.

3. Objectifs visés

L'objectif fixé par le présent thème est prendre en compte le comportement non linéaire des géomatériaux sous différents types de chargement entre autres, le chargement sismique. A cette foi, un modèle élastoplastique basé sur le critère de Von Misès a été développé pour pouvoir simuler de manière acceptable le comportement des géomatériaux sous sollicitations sismiques. La détermination de la matrice élastoplastique est l'étape la plus complexe, pour cela il fallait intégrer les relations du modèle de Von Misès. L'intégration est faite suivant la méthode de « retour radial ».

4. Organisation du mémoire

Ce mémoire est partagé en cinq chapitres, organisés comme ci-dessous :

Le **premier chapitre** fait l'objet d'une étude bibliographique consacrée, en premier lieu, à l'analyse des différents aspects de la loi de comportement des géomatériaux. Partons des notions des modèles analogiques qui sont souvent utilisés à des fins didactiques, pour donner une image concrète des équations de comportement, un aperçu sur les lois de comportement élastiques, élastiques parfaitement plastiques, élastoplastiques et viscoplastiques est donné.

On y distingue deux types de critères, les critères pour les matériaux cohérents tels que le modèle de Tresca et le modèle de Von Misès, et les critères pour les matériaux frictionnels tels que le plus ancien modèle, celui de Mohr-Coulomb et le modèle de Drucker-Prage. Un flash sur la modélisation géométrique par éléments finis est également donné. On y trouve également une synthèse des travaux antérieurs sur la modélisation non linéaire des profils de sols et particulièrement les barrages en terre, car ces derniers sont les plus susceptibles à un comportement non linéaire, vue leur hétérogénéité matérielle importante. La formulation élastoplastique a été proposée par plusieurs chercheurs avec la considération du modèle de Von Misès.

Le **deuxième chapitre** est consacré à l'intégration des relations de Von Misès, partant du principe de Hill sur la convexité de la fonction de charge et la normalité de la vitesse de déformation plastique qui vont faciliter la tâche d'intégration. La loi de normalité implique que le vecteur unitaire plastique perpendiculaire à la surface de charge est colinéaire au vecteur unitaire élastique. L'ellipse de Von Misès dans le plan de Mohr devient un cercle,

alors une prédiction élastique avec correction radiale plastique permet d'aboutir aux contraintes élastoplastiques. La matrice élastoplastique est élaborée à la fin de ce chapitre.

Le **troisième chapitre** est consacré à l'exposition de la méthode des éléments finis, et aux principes de détermination de l'équation élastoplastique du mouvement. Pour cela nous avons utilisé le principe de Hamilton. Pour résoudre l'équation du mouvement la méthode itérative de Newton a été utilisée.

Le **quatrième chapitre** traite la modélisation dynamique unidimensionnelle du profil de sol à base rigide. Des simplifications géométriques et mathématiques pour le cas unidimensionnel sont incorporées dans les équations du mouvement, pour aboutir à une équation simplifiée du mouvement, résolue numériquement.

Le **cinquième chapitre** fait l'objet de validations et des performances numériques du programme élaboré. Des applications différentes sont menées afin d'étudier les capacités du modèle de Von Misès dans le traitement des problèmes liés aux sollicitations sismiques.

Des conclusions générales suivies de recommandations pour des travaux futurs sont données à la fin du mémoire. Une annexe réservée aux détails qui ne sont pas données dans les chapitres est donnée également.

1.1. Introduction

Le travail proposé dans ce chapitre consiste d'abord à mener une recherche bibliographique sur le comportement des géomatériaux de façon générale et les sols en particulier sous l'effet de sollicitations quelconques. Afin de réaliser ce travail, nous commençons par exposer les lois de comportement les plus utilisées dans les travaux antérieurs sous ce type de sollicitations. Nous synthétisons ensuite quelques travaux qui ont été menés par des chercheurs sur la modélisation de dépôts de sol et des ouvrages en terre tels que les barrages et l'étude de leurs comportements lors de secousses sismiques. En dernier lieu, nous présentons en bref la modélisation de profils de sol par la méthode des éléments finis et une discussion sur les principales méthodes d'intégration des équations de mouvement en régime non linéaire.

1.2. Lois de comportement des géomatériaux

Les matériaux utilisés pour les constructions en Génie Civil ont été et sont encore très largement étudiés pour dimensionner les ouvrages et les structures, construites sur les géomatériaux ou avec l'apport de ces derniers, et pour prédire leur comportement à court ou à long terme. Dans ces calculs de dimensionnement, les matériaux (sols, bétons, roches, métaux, liquides, ...) sont assimilés à des milieux continus [Mestat, 1998].

L'expérience quotidienne montre cependant que, sous l'effet des mêmes actions extérieures, des volumes identiques d'acier, de sable et d'eau, par exemple, ne se comportent pas de la même manière. Les lois générales de la physique ne permettent pas de distinguer le comportement de ces différents matériaux [Mestat, 1998]. Il convient donc de caractériser le comportement spécifique du milieu continu, équivalent au matériau étudié. C'est l'objet de la loi de comportement, associées à un matériau, qui doit caractériser son évolution sous l'effet d'actions extérieures données.

La loi de comportement est propre à ce matériau et traduit, lorsque l'on passe d'un matériau à un autre, les différences de comportement observées dans la pratique. La connaissance de la loi de comportement est également indispensable pour rendre complet le système d'équations de n'importe quel problème de mécanique des milieux continus ou de calcul des structures. La recherche d'une telle loi de comportement ressort du domaine de la Rhéologie.

A ce titre, les Rhéologues étudient les propriétés de déformabilité et d'écoulement d'échantillons de matériau, en ce qu'elles ont d'intrinsèques, c-à-d de propres à l'élément de matière indifférencié, et indépendamment des conditions aux limites.

La mécanique des milieux continus offre un cadre théorique pour de tels développements à condition de respecter certains principes et règles mécaniques. Toutefois, la diversité et la complexité des comportements des matériaux ont amené les Rhéologues à distinguer un grand nombre de caractères de comportement tels : l'élasticité, la viscosité, la plasticité et leurs combinaisons (élastoplasticité, viscoélasticité, viscoplasticité).

Les caractères fluides ou solides, et ceux de linéarité ou non, de vieillissement, d'épaississement, les aspects thermiques et physico-chimiques, l'interaction entre les éléments constitutifs d'un matériau, les changements de phases peuvent également être pris en compte par une loi ou un ensemble de lois de comportement [Harichane, 2010].

1.2.1. Les grandes classes de comportement

1.2.1.1. Modèles analogiques

Les modèles analogiques sont des groupements d'éléments mécaniques dont les réponses à des sollicitations sont similaires à celles des matériaux. Ils sont souvent utilisés à des fins didactiques, pour donner une image concrète des équations de comportement. L'analogie se limite là et ne porte en aucun cas sur les mécanismes physiques eux même [Lemaitre et al, 1988].

Les éléments les plus utilisés sont les suivants (Fig. 1.1):

- a)- Le ressort, qui symbolise l'élasticité linéaire parfaite, pour laquelle la déformation est entièrement réversible lors d'une décharge, et où il existe une relation biunivoque entre les paramètres de charge et de déformation (Fig. 1.1-a).
- b)- L'amortisseur, qui schématise la viscosité, linéaire (Fig. 1.1-b) ou non linéaire (Fig. 1.1-c). La viscosité est dite pure s'il existe une relation biunivoque entre la charge et la vitesse de chargement. Si cette relation est linéaire, le modèle correspond à la loi de Newton.
- c)- Le patin, qui modélise l'apparition de déformations permanentes lorsque la charge est suffisante (Fig. 1.1-d). Si le seuil d'apparition de la déformation permanente n'évolue pas

avec le chargement, le comportement est dit plastique parfait. Si, de plus, la déformation avant écoulement est négligée, le modèle est rigide parfaitement plastique.

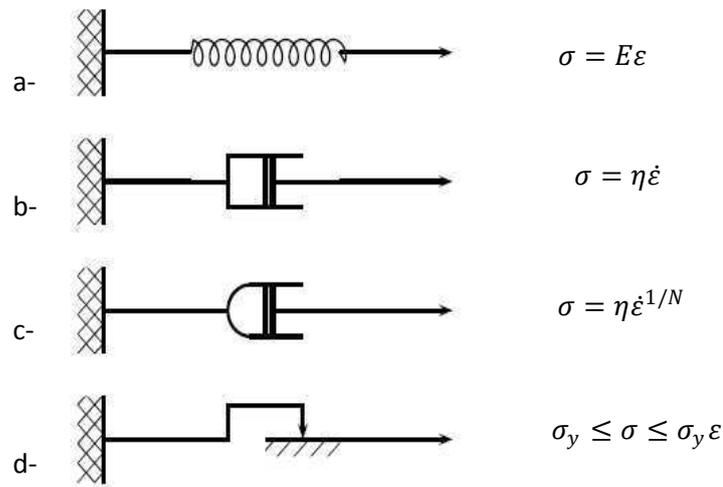


Fig. 1.1- Les briques de base pour la représentation des comportements

[Besson et al, 2005].

1.2.1.2. Modèle élastique parfaitement plastique

L'association d'un ressort et d'un patin en série (Fig. 1.2-a) produit un comportement élastique parfaitement plastique, modélisé en figure (1.2-b) (la partie plastique du comportement). Le système ne peut pas supporter une contrainte dont la valeur absolue est plus grande que σ_y .

Le modèle est sans écrouissage, susceptible d'atteindre des déformations infinies sous charge constante, conduisant à la ruine du système par déformation excessive.

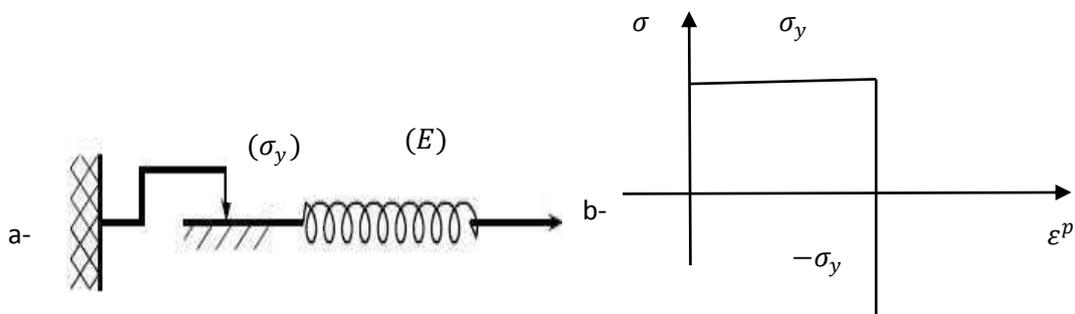


Fig. 1.2- Modèle analogue élastoplastique parfait [Besson et al, 2005].

1.2.1.3. Modèle élastoplastique

L'association en parallèle du ressort et du patin (Fig. 1.3-a), correspond au comportement illustré en figure (1.3-b), qui n'est que l'écroutissage linéaire. Il est dit cinématique, car il dépend de la valeur actuelle de la déformation plastique. Sous cette forme, le modèle est rigide-plastique. Il devient élastoplastique si l'on rajoute un ressort en série (Fig. 1.3-c), et la figure (1.3-d) schématise son comportement toujours avec un écroutissage linéaire.

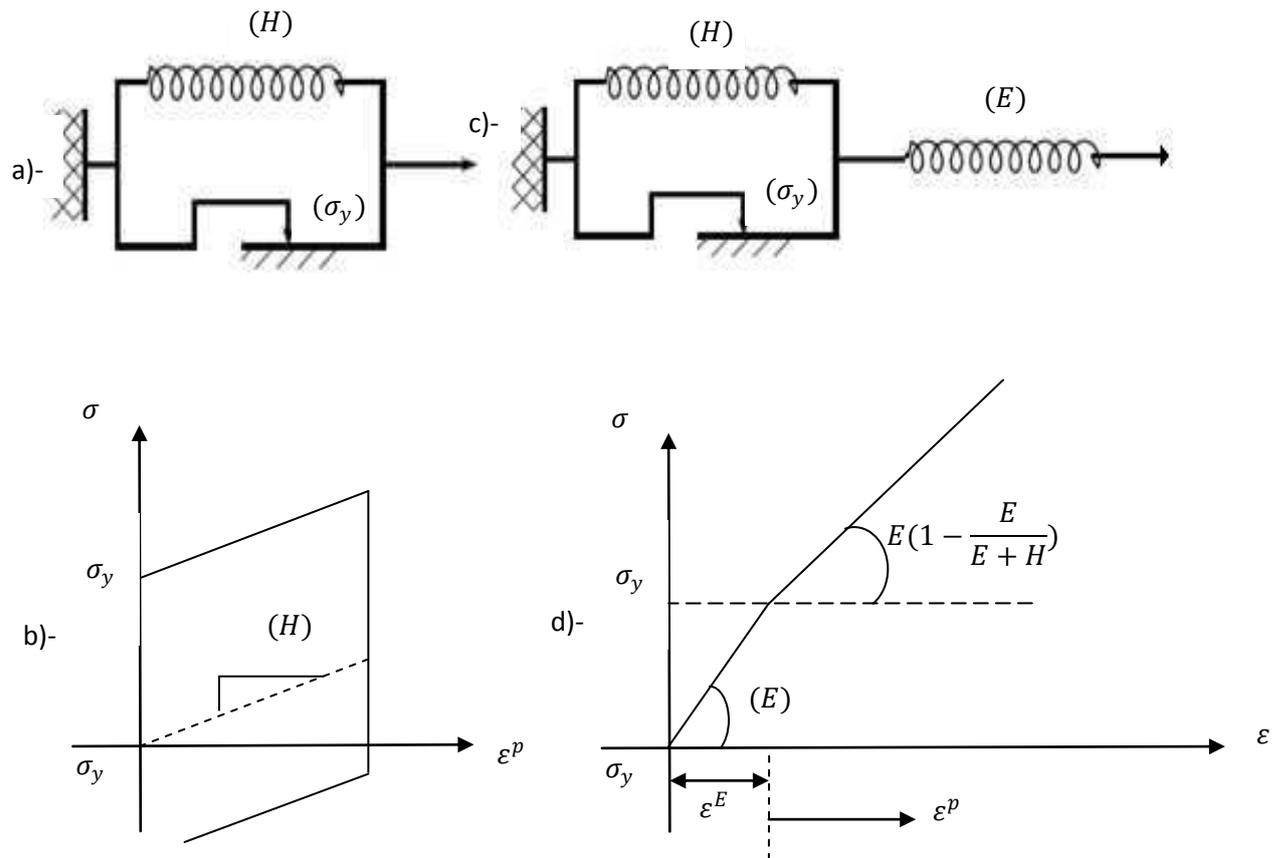


Fig. 1.3- Associations de patin et ressort (Modèle élastoplastique) [Besson et al, 2005].

1.2.1.4. Modèle Viscoélastique

Le plus simple modèle Rhéologique qui décrit le comportement viscoélastique est celui de Maxwell regroupe un amortisseur et un ressort en série (Fig. 1.4-a), celui de Voigt, un amortisseur et un ressort en parallèle (Fig. 1.4-b), tandis que les figures (1.4-c) et (1.4-d), schématisent le comportement de fluage et relaxation [Besson et al, 2005].

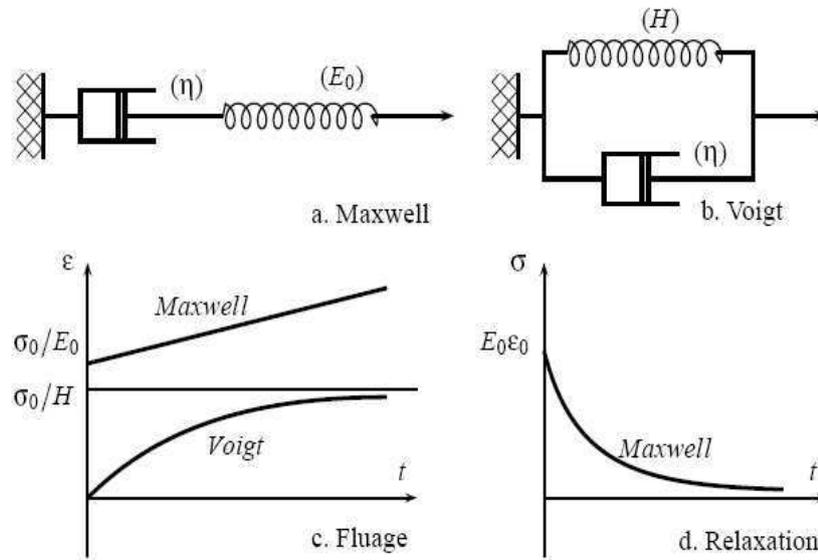


Fig. 1.4- Fonctionnement des modèles de Maxwell et Voigt [Besson et al, 2005].

1.2.1.5. Modèle Viscoplastique

Voici un exemple d'un modèle Viscoplastique de Bingham schématisé sur la figure (1.5), avec ϵ^{vp} correspond à la déformation viscoplastique.

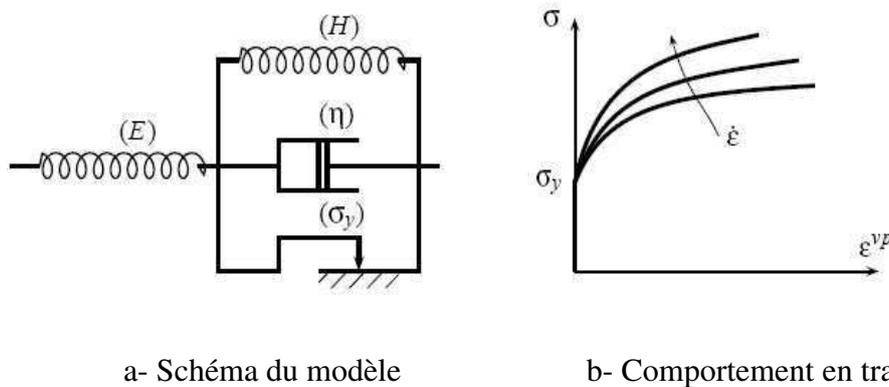


Fig. 1.5- Modèle de Bingham généralisé [Besson et al, 2005].

1.2.2. Lois de Comportement élastiques linéaires

Lorsque dans un essai, la courbe contrainte-déformation est la même au chargement et au déchargement, le comportement du matériau est dit élastique. D'une manière plus générale, le comportement est dit élastique lorsque l'histoire du chargement n'intervient pas et qu'à un état de contraintes correspond un état de déformations et un seul.

Le comportement élastique peut être linéaire (Fig. 1.6), le tenseur des déformations est alors proportionnel au tenseur des contraintes au cours des sollicitations. Ce type de comportement a été découvert par Robert Hooke, qui publia la loi qui porte son nom en 1678.

La plupart des solides présentent un comportement réversible, au moins sous des sollicitations suffisamment faibles. L'étendue du domaine des déformations élastiques, ou réversibles, est cependant très différente d'un matériau à un autre. Pour les métaux, la limite d'élasticité est atteinte pour des déformations de l'ordre de 0.1% tandis que, pour les sols, la limite d'élasticité peut être mise en évidence seulement pour de très faibles déformations.

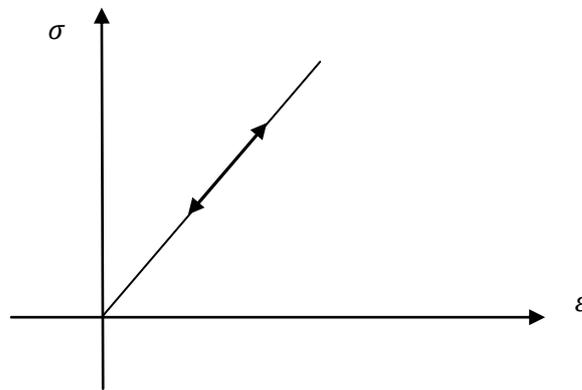


Fig. 1.6- Schématisation du comportement élastique linéaire réversible.

La simplicité du comportement élastique fait qu'il est encore très souvent utilisé pour analyser le comportement des massifs de sols et des ouvrages. Par ailleurs, la partie élastique de la déformation ne peut pas être négligée dans la formulation d'une loi élastoplastique.

En effet, la présence de l'élasticité est nécessaire à l'inversion du tenseur de comportement reliant les incréments de contraintes aux incréments de déformations. L'élasticité linéaire est la loi de comportement la plus couramment employée. D'une part elle reflète bien le comportement à faible déformation de nombreux matériaux, d'autre part de nombreuses lois de comportement sont numériquement traitées comme étant localement linéaires. On approche ainsi la loi réelle par une suite de segments de droite [Harichane, 2010].

1.2.2.1. Élasticité anisotrope

La plupart des matériaux sont anisotropes et, par souci de simplification, le mécanicien essaie d'apporter une loi de comportement isotrope. Une erreur systématique est commise, mais suivant le matériau, cette erreur est plus ou moins élevée. En général, le comportement sera considéré comme isotrope, mais il existe des cas où l'erreur associée à cette hypothèse est beaucoup trop élevée pour quelle soit acceptable [Mestat, 1998].

1.2.2.2. Élasticité isotrope

L'hypothèse d'isotropie impose que la loi de comportement soit indépendante du repère choisi pour l'exprimer. En d'autre terme, le tenseur de raideur doit être invariant pour tout changement de base. Avec cette forme de relation, on constate que les directions principales de contraintes sont confondues avec les directions principales de déformations.

1.2.2.3. Élasticité linéaire orthotrope

Un milieu est dit orthotrope pour une propriété donnée si cette propriété est invariante par changement de direction obtenue par symétrie relative à deux plans orthogonaux. On remarque alors que la symétrie par rapport au troisième plan orthogonal est automatiquement acquise. Ce mode de comportement est relativement bien réalisé pour le bois dans certains cas, les composites unidirectionnels et les produits métalliques laminés [Mestat, 1998].

1.2.2.4. Élasticité linéaire transverse

Beaucoup de matériaux de par leur origine, ou leur fabrication industrielle, présentent une certaine anisotropie, c'est-à-dire que leur comportement montre une direction privilégiée selon laquelle la réponse du matériau à une sollicitation dans cette direction est différente de celle observée dans les autres directions.

C'est le cas, en particulier, des sols qui ont été déposés par couches successives horizontales. Ces couches ont subi dans le passé un même état de contraintes, il est donc normal que ces couches possèdent des caractéristiques élastiques équivalentes dans toutes les directions de leur plan de stratification, ou plan d'isotropie, et que ces caractéristiques soient distinctes des caractéristiques dans les plans contenant l'axe de révolution perpendiculaire au plan d'isotropie. Dans les terrains, il est en général raisonnable de supposer que l'axe de symétrie, noté (Oz), est vertical. Cette hypothèse est valable à moins

que la couche de sol ne soit inclinée ou que des forces tectoniques aient joué significativement de manière à déplacer l'axe de symétrie par rapport à la verticale. Les deux axes horizontaux Ox et Oy définissent le plan de stratification ou plan d'isotropie [Mestat, 1998].

Dans le cas d'une symétrie par rapport à un axe, l'anisotropie est dite orthotrope de révolution. Cinq coefficients caractérisent alors le comportement du matériau.

La figure (1.7), récapitule le degré de symétrie pour différents cas d'élasticité linéaire.

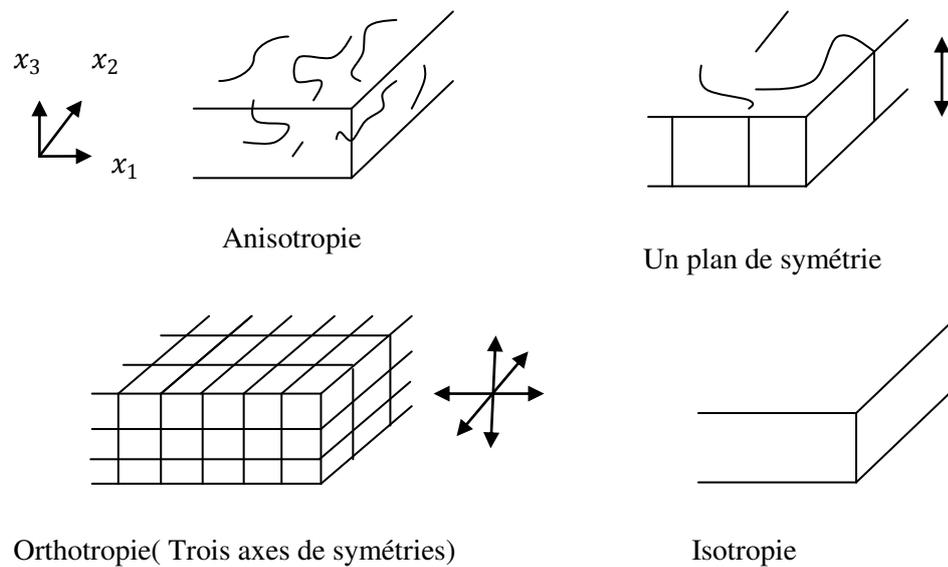


Fig. 1.7- Illustration du degré de symétrie [Ottoseu, 2005].

1.2.3. Lois de Comportement élastiques non linéaires

En comportement élastique, la réponse du matériau est indépendante de l'histoire du chargement. Ainsi, les contraintes sont uniquement fonction des déformations ($\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl})$). La forme la plus générale de l'élasticité est celle nommée élasticité de Cauchy en honneur à Cauchy, 1789-1857, qui en 1822 formula la loi de comportement pour des matériaux élastiques linéaires isotropes [Ottoseu, 2005].

Cependant, il y'a une forme légèrement restreinte de l'élasticité et appelée hyperélasticité. La forme générale de l'hyperélasticité linéaire est [Ottoseu, 2005]:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} , D_{ijkl} = D_{ijkl} (x_i) \quad (1.1)$$

Le tenseur de raideur $D_{ijkl}(x_i)$, est indépendant du chargement, mais dépend de la position x_i en cas d'un matériau inhomogène (Fig. 1.8).

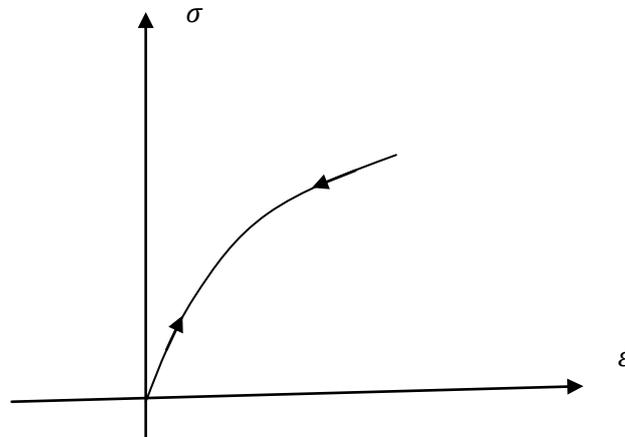


Fig. 1.8- Comportement élastique non linéaire [Ottoseu, 2005].

Les modules de compressibilité K et de cisaillement G qui sont en fonction des invariants I_1 et J_2 ne peuvent pas prendre n'importe quelles expressions de ces deux invariants, mais doivent vérifier la condition limite suivante [Ottoseu, 2005]:

$$\frac{\sigma_{kk}}{3} \frac{\partial}{\partial J_2} \left(\frac{1}{3K(I_1, J_2)} \right) = \frac{\partial}{\partial I_1} \left(\frac{1}{2G(I_1, J_2)} \right) \quad (1.2)$$

Si on suppose que K soit constant, le module de cisaillement $G(I_1, J_2)$ aura la forme graphique suivante (Fig. 1.9).

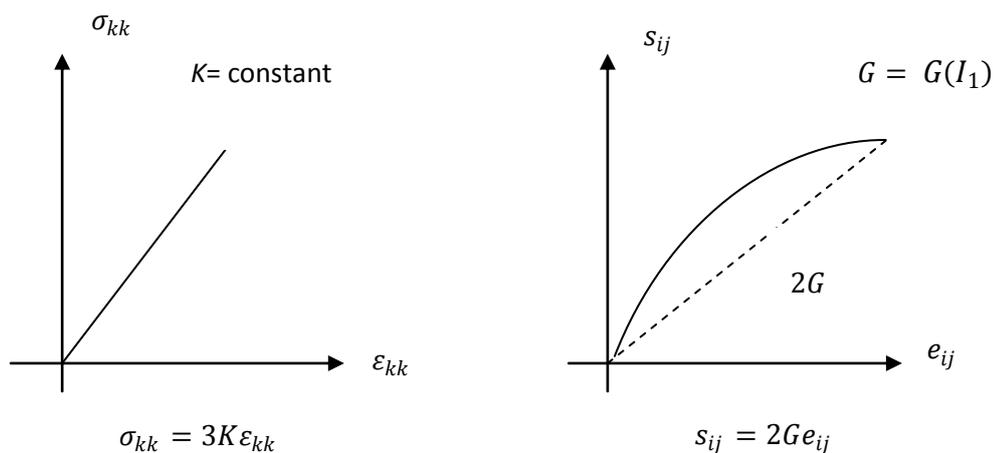


Fig. 1.9- Comportement élastique non linéaire suivant la théorie hyperélasticité [Ottoseu, 2005].

L'élasticité de Cauchy est un type d'élasticité plus général que l'hyperélasticité. Mais maintenant on ne suppose pas que l'énergie de déformation ou complémentaire est indépendante de l'histoire du chargement. Le tenseur de déformation s'écrit cette fois par la relation [Ottoseu, 2005]:

$$\varepsilon_{ij} = g_{ij}(\sigma_{kl}) \quad (1.3)$$

La fonction tenseur $g_{ij}(\sigma_{kl})$ est appelée fonction réponse et détermine les opérations qui doivent être menées sur le tenseur des contraintes σ_{kl} pour déterminer le tenseur des déformations ε_{ij} .

Nous pouvons écrire la forme la plus générale de l'élasticité isotrope de Cauchy par l'expression [Ottoseu, 2005]:

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_1(I_1, I_2, I_3) \delta_{ij} + \alpha_2(I_1, I_2, I_3) \sigma_{ij} + \alpha_3(I_1, I_2, I_3) \sigma_{ik} \sigma_{kj} \quad (1.4)$$

Le tenseur des contraintes s'écrit de la même façon que le tenseur de déformation.

$$\sigma_{ij} = B_1(I_1, I_2, I_3) \delta_{ij} + B_2(I_1, I_2, I_3) \varepsilon_{ij} + B_3(I_1, I_2, I_3) \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj} \quad (1.5)$$

où I_1, I_2 et I_3 sont des invariants des contraintes globales et J_1, J_2 et J_3 sont des invariants des contraintes. Le tableau (1.1) récapitule les expressions des différents invariants.

Tableau 1.1- Expressions des invariants des contraintes [Modaressi, 2004].

Invariant	Expression
I_1	$\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$
I_2	$\frac{1}{2}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2)$
I_3	$\frac{1}{3}(\sigma_{11}^3 + \sigma_{22}^3 + \sigma_{33}^3)$
J_1	0
J_2	$I_2 - \frac{I_1^2}{6}$
J_3	$I_3 - 2\frac{I_1 I_2}{3} + \frac{I_1^3}{27}$

Le troisième terme de la relation (1.4) doit s'annuler, donc $\alpha_3 = 0$, pour avoir une formulation similaire à l'élasticité non linéaire Houkienne.

Il sort donc :

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G}\right) \text{ et } \alpha_2 = \frac{1}{2G} \quad (1.6)$$

Avec $K(I_1, J_2, J_3)$ et $G(I_1, J_2, J_3)$ des fonctions arbitraires des invariants de contrainte. De plus, contrairement qu'en hyperélasticité, K et G dépendent du 3^{ème} invariant de contraintes J_3 , ce qui est avantageux à la modélisation des géomatériaux (sol, roche, béton).

1.2.4. Lois de comportement non linéaires évoluées

La notion centrale caractérisant le comportement plastique d'un matériau est celle d'irréversibilité et non pas celle de non linéarité, même si les deux notions coïncident dans le cas où l'élasticité du matériau est linéaire dans le cadre de la transformation infinitésimale. Bien que les mécanismes physiques microscopiques qui sont à l'origine de la plasticité des matériaux observés à l'échelle macroscopique, soient parfois très différents (propagation de défauts dans le réseau cristallin pour les métaux, réarrangement des grains dans le cas des sols), le point de vue du mécanicien adopté ici va permettre de développer une présentation unifiée de ce comportement en termes de contraintes et déformations dans le cadre de la modélisation du milieu continu tridimensionnel [Mestat, 1998].

1.2.4.1. Lois de Comportement élastiques parfaitement plastiques

Un cas particulier important de comportement élastoplastique est celui du matériau élastique parfaitement plastique pour le quel la courbe contrainte-déformation comporte un palier horizontal (Fig. 1.10).

Dans la représentation schématique d'un tel comportement, le seuil d'élasticité σ_0 demeure constant, c-à-d que l'écroutissement du matériau disparaît. Donc en se place dans le cas de la plasticité parfaite qui correspond à la situation où le domaine d'élasticité est fixe, de sorte qu'il n'y a plus lieu de distinguer les domaines d'élasticité initial et actuel, pour cette raison la fonction de charge n'est plus alors argumentée par des paramètres d'écroutissement.

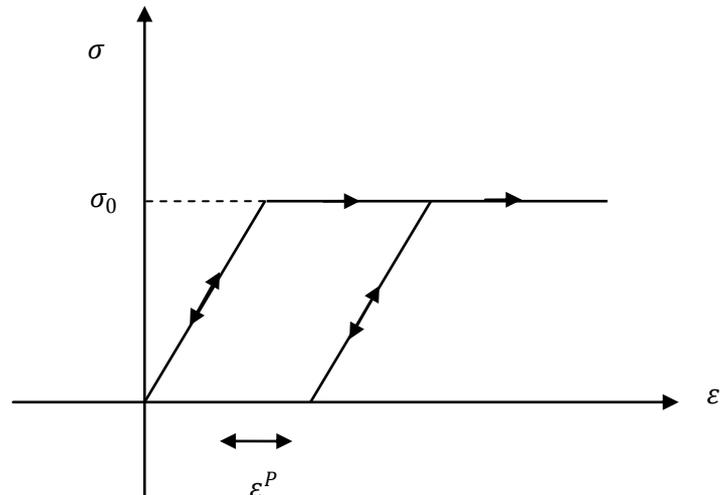


Fig. 1.10- Schématisation du comportement élastoplastique parfait [Dunne et al, 2005]

Ce modèle idéal du matériau élastoplastique parfait est souvent associé à la notion de ductilité par opposition à celle de fragilité qui évoque l'idée de rupture brutale de l'élément de matière lorsque le seuil d'élasticité est atteint.

1.2.4.2. Lois de Comportement élastoplastiques

L'hypothèse fondamentale du comportement élastoplastique, est que la déformation totale est la superposition d'une déformation élastique réversible, et d'une déformation plastique irréversible [Crestecu, 2007].

La figure (1.11), traduit deux types du comportement élastoplastique, l'un avec un écrouissage positif et l'autre avec un écrouissage négatif.

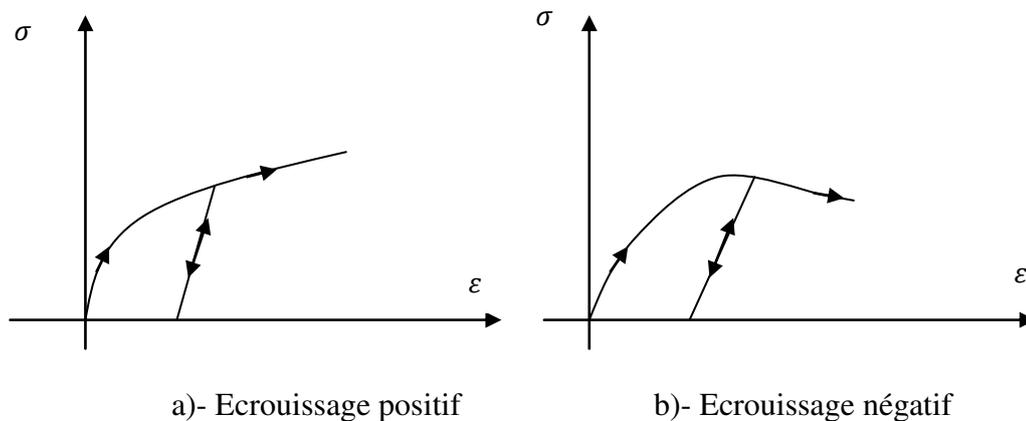


Fig. 1.11- Schématisation du comportement élastoplastique [Crestecu, 2007].

1.2.5. Modèles rhéologiques des sols et des roches

Un grand nombre de critères limites a été proposé pour décrire le comportement des géomatériaux (sol et roche) en condition de chargement général. Basé sur ces critères, des théories de plasticité parfaite, d'élastoplasticité, viscoplasticité et hypoélasticité ont été développées. Nous nous concentrerons sur ceux qui ont été appliqués le plus largement dans l'étude des géomatériaux. Ils incluent des modèles basés sur les critères limites proposés par Tresca (1864), Von Mises (1913), Coulomb (1773), Drucker & Prager (1952), Lade & Duncan (1975), Hoek & Brown (1980) et le modèle Cam Clay développé par Roscoe & Schofield (1963) [Harichane, 2010].

1.2.5.1. Modèles plastiques pour les sols cohérents

Pour les sols cohérents, les deux modèles de plasticité les plus couramment employés sont ceux proposés par Tresca (1864) et Von Mises (1913) initialement établis pour des métaux.

Il a été montré que sous conditions non drainées, les sols cohérents entièrement saturés (c-à-d l'argile) peuvent être convenablement modélisés par la théorie de plasticité de Tresca ou de Von Mises [Ottoseu, 2005].

1.2.5.1.1. Modèles de Tresca

Après une série d'expériences sur des métaux, Tresca (1864) a conclu que la limite (limite d'élasticité) se produit quand la contrainte de cisaillement maximum a atteint une certaine valeur. En proposant ceci, Hill (1950) a avancé que Tresca ait été probablement influencé par une loi plus générale pour la rupture des sols, proposé plus antérieurement par Coulomb (1773). Le critère limite de Tresca s'écrit:

$$f = \sigma_1 - \sigma_3 - 2S_u \quad (1.7)$$

où S_u est la résistance au cisaillement non drainée, σ_1 et σ_3 les contraintes principales.

En conséquence, il convient d'adopter une règle d'écoulement plastique associée en traitant la fonction de charge ci-dessus également comme potentiel plastique. Par conséquent,

$$g = f = \sqrt{J_2} \cos \theta_l - S_u \quad (1.8)$$

où J_2 est le deuxième invariant du déviateur de contrainte et θ_l l'angle de Lode.

Pour déterminer la relation complète contrainte-déformation pour les matériaux de Tresca, nous devons déterminer $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$, qui peut être obtenus en utilisant la règle [Modaressi, 2004]:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial \theta_l} \frac{\partial \theta_l}{\partial \sigma_{ij}} = \sqrt{J_2} \sin \theta_l \frac{\partial \theta_l}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.9)$$

$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$, est indépendant de la forme des fonctions de charge et des potentiels plastiques car il dépend seulement des définitions du deuxième invariant du déviateur de contrainte et de l'angle de Lode.

La matrice de rigidité élastoplastique D_{ijkl}^{EP} est définie par:

$$D_{ijkl}^{EP} = D_{ijkl}^E - \frac{1}{H} D_{ijnm}^E \frac{\partial g}{\partial \sigma_{nm}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} D_{pqkl}^E \quad (1.10)$$

avec, D_{ijnm}^E la matrice de rigidité élastique.

H est donné par la relation :

$$H = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^E \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \quad (1.11)$$

1.2.5.1.2. Modèles de Von Misès

Une alternative légèrement meilleure au critère de Tresca est le critère proposé par Von Misès (1913). Von Misès a suggéré que la limite se produit quand le deuxième invariant du déviateur de contrainte a atteint une valeur critique, le critère limite de Von Misès est exprimé comme suit:

$$f = \sqrt{J_2} - K \quad (1.12)$$

Où K est la résistance au cisaillement du sol non drainée en cisaillement pur.

La surface de charge de Von Misès est un cercle sur un plan déviatoire. Comme la surface de charge de Tresca, le critère limite de Von Misès ne dépend pas de la contrainte moyenne.

En choisissant convenablement la valeur du paramètre de résistance K (relation 1.12), nous pouvons faire passer le cercle de Von Misès par les coins de l'hexagone de Tresca (Fig. 1.12).

$$K = \frac{S_u}{\cos \theta_l} = \frac{2}{\sqrt{3}} S_u \quad (1.13)$$

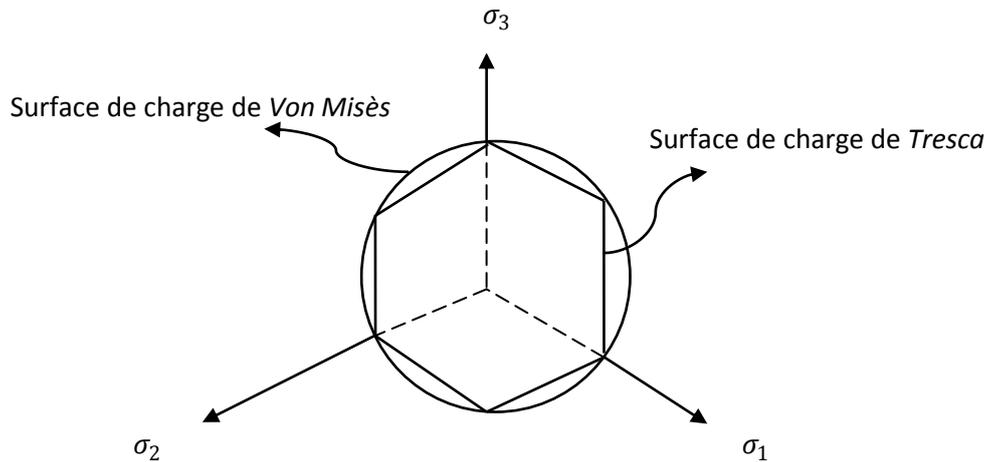


Fig. 1.12- Surfaces de charge de Tresca et Von Misès [Ottoseu, 2005].

En comparant les critères de Tresca et de Von Mises, il est évident que le critère de Von Mises implique généralement une résistance au cisaillement non drainée légèrement supérieure. La différence dépend de l'angle de Lode qui indique la direction de la contrainte de cisaillement. Pour un chargement non drainé, la déformation volumétrique plastique est nulle.

Pour le critère de Von Misès, $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ est donné par :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.14)$$

1.2.5.2. Modèles plastiques pour les matériaux frictionnels

Nous citerons ci-dessous les principaux modèles qui sont utilisés pour les matériaux frictionnels [Harichane, 2010].

1.2.5.2.1. Modèles de Mohr-Coulomb

À cet égard, le plus ancien et le plus utile critère limite pour les matériaux cohérents frictionnels est toujours celui empirique proposé par Coulomb (1773) dans ses études sur les murs de soutènement.

Le critère limite ou fonction de charge proposée par Coulomb (1773) est exprimé en termes de la contrainte de cisaillement τ et la contrainte normale σ_n agissant sur un plan. Il est suggéré que la limite commence tant que la contrainte de cisaillement et la contrainte normale satisfont l'équation suivante:

$$\tau = c + \sigma_n \tan \phi \quad (1.15)$$

où c et ϕ sont la cohésion et l'angle de frottement (ou de friction) interne pour le sol, respectivement.

En termes des contraintes principales, le critère limite de Coulomb peut être exprimé par:

$$f = (\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - 2 \cos \phi c = 0 \quad (1.16)$$

En termes des invariants de contrainte et de l'angle de Lode, le critère limite de Mohr-Coulomb peut être écrit comme:

$$f = \sqrt{J_2} - \frac{m(\theta_l, \phi) \sin \phi}{3} I_1 - m(\theta_l, \phi) c \cos \phi = 0 \quad (1.17)$$

En termes de la contrainte de cisaillement q et la contrainte moyenne p généralisées, le critère limite de Mohr-Coulomb peut s'exprimer comme suit:

$$f = q - \sqrt{3} p m(\theta_l, \phi) \sin \phi - \sqrt{3} m(\theta_l, \phi) c \cos \phi = 0 \quad (1.18)$$

avec :

$$m(\theta_l, \phi) = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3} \cos \theta_l + \sin \theta_l \sin \phi)} \quad (1.19)$$

Avec le modèle de Mohr-Coulomb, il est souvent supposé que le potentiel plastique prend la même forme que la fonction de charge mais l'angle de frottement est remplacé par l'angle de dilatation (qui est un angle plus petit). Par conséquent :

$$g = q - \sqrt{3} p m(\theta_l, \psi) \sin \phi - \sqrt{3} m(\theta_l, \psi) c \cos \phi = 0 \quad (1.20)$$

1.2.5.2.2. Modèles de Drucker-Prager

En raison de sa simplicité, le critère limite de Drucker-Prager a été largement appliqué dans l'analyse géotechnique. Cependant, des recherches expérimentales suggèrent que sa forme circulaire sur un plan déviatoire ne concorde pas bien aux données expérimentales. Pour cette raison il est nécessaire de prendre le soin en utilisant le modèle de plasticité de Drucker-Prager en analyse géotechnique.

La fonction de charge est légèrement différente de la fonction limite de Von Misès et a comme expression :

$$f = \sqrt{J_2} - \alpha I_1 - K \quad (1.21)$$

où α et K sont des constantes matérielles. Sur un plan déviatoire, l'équation ci-dessous trace un cercle comme c'est le cas pour la surface de charge de Von Misès (Fig 1.13).

Toutefois dans l'espace des contraintes principales, la surface de charge de Drucker-Prager est un cône tandis que la surface de charge de Von Misès est un cylindre infiniment long. Pour choisir les constantes matérielles α et K en analyse, la surface limite (ou surface de charge) de Drucker-Prager est souvent assortie avec la surface de charge de Mohr-Coulomb en utilisant un certain critère. La figure (1.13) montre un tel aperçu aux sommets principaux.

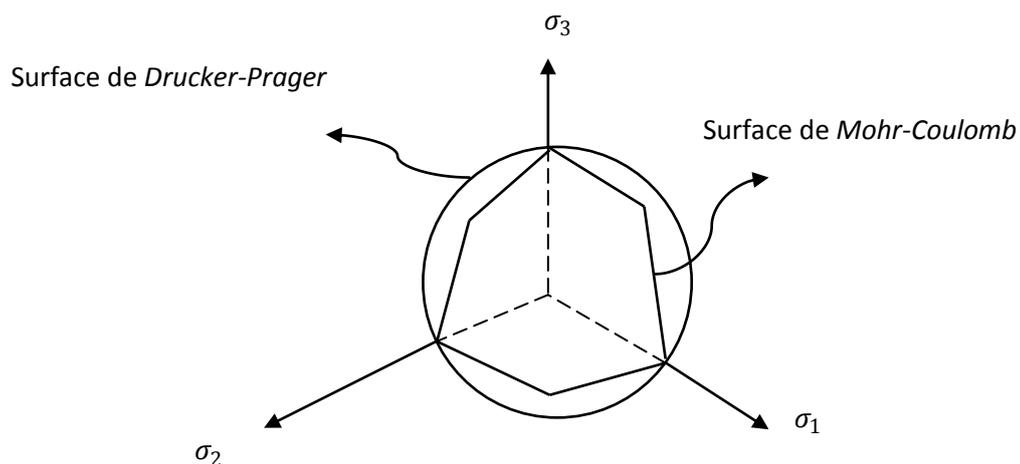


Fig. 1.13- Surfaces de charge de Drucker-Prager et Mohr-Coulomb dans le plan déviatoire [Ottoseu, 2005].

Mathématiquement, cette condition exige les relations suivantes [Ottoseu, 2005]:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \\ K = \frac{2c}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}} \end{cases} \quad (1.22)$$

Si les critères de Drucker-Prager et de Mohr-Coulomb sont faits pour donner une charge limite identique pour un problème de déformation plane, alors les relations suivantes doivent se tenir:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\tan \phi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}} \\ K = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}} \end{cases} \quad (1.23)$$

Comme pour le modèle de plasticité de Mohr-Coulomb, nous pouvons adopter un potentiel plastique de même forme que la fonction limite, à savoir:

$$g = \sqrt{J_2} - \alpha' I_1 - K \quad (1.24)$$

L'expression de α' est identique à α , mais l'angle de frottement doit être remplacé par l'angle de dilatation.

1.2.5.2.3. Modèle de Lade-Duncan et Matsuoka-Nakai

L'inconvénient majeur du modèle de Mohr-Coulomb est qu'il contient les coins qui exigent quelques traitements numériques spéciaux.

D'un point de vue numérique, il serait donc plus avantageux d'avoir une surface de charge lisse. Pour cette raison, les surfaces de charge proposées par Lade et Duncan (1975) et Matsuoka et Nakai (1974, 1982) ont également été employées dans l'analyse géotechnique.

Le critère limite proposé par Lade et Duncan (1975) peut être écrit en termes du premier et troisième invariant de contrainte comme suit [Harichane, 2010]:

$$f = \frac{I_1^3}{I_3} - K_1 = 0 \quad (1.25)$$

où K_1 est une constante de sol dépendant de la densité. La comparaison de la surface de charge de Lade et Duncan avec celle de Mohr-Coulomb sur le plan déviatoire est montrée par la figure (1.14).

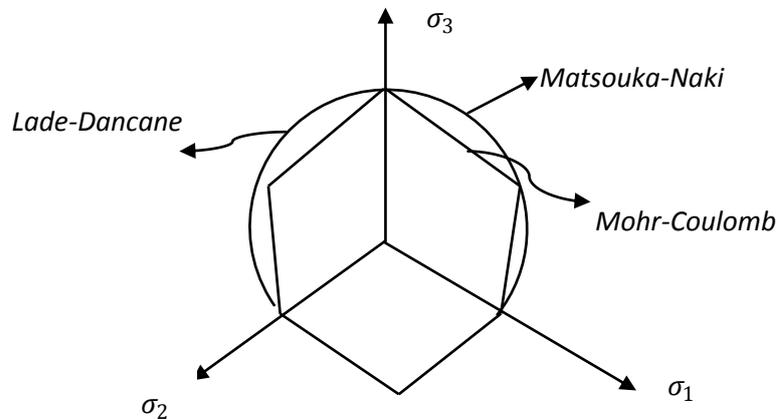


Fig. 1.14- Surfaces de charge de Lade-Duncan et Matsuoka-Nakai et celle de Mohr-Coulomb dans le plan déviatoire [Ottoseu, 2005].

D'autre part, le critère limite proposé par Matsuoka et Nakai (1974) est écrit sous la forme suivante en termes des trois invariants I_1 , I_2 et I_3 .

$$f = \frac{I_1 I_2}{I_3} - (9 + 8 \tan^2 \phi) = 0 \quad (1.26)$$

1.2.5.2.4. Modèle de Hoek-Brown

En plus du critère limite de Mohr-Coulomb linéaire, un certain nombre de chercheurs ont également employé des critères limites non linéaires pour analyser des problèmes de mécanique des roches.

Le critère le plus populaire a été le critère non linéaire empirique proposé par Hoek et Brown (1980) pour décrire le comportement limite et de rupture des masses de roche. La fonction de charge des roches supposée gouvernée par le critère Hoek et Brown prend la forme:

$$f = \sigma_1 - \sigma_3 - \sqrt{mY\sigma_3 + sY^2} \quad (1.27)$$

Où σ_1 et σ_3 sont les contraintes principales maximale et minimale, Y la résistance de compression uniaxiale du matériau roche intact, m et s sont des constantes dépendant de la nature de la masse de roche et de l'étendue à laquelle est fracturée avant d'être soumise aux contraintes principales σ_1 et σ_3 .

Le critère de Hoek- Brown offre quelques avantages par rapport à d'autres approches en déterminant la résistance globale in-situ des masses de roche parce qu'il est basé sur une propriété matérielle simple Y , et la qualité des données de la masse de roche qui peuvent être systématiquement rassemblées et évaluées pendant l'investigation de site.

Pour la convenance d'applications numériques, le critère de Hoek- Brown peut également être exprimé en termes des invariants de contrainte par l'équation suivante:

$$\begin{cases} f = 4J_2 \cos^2 \theta_l + g(\theta_l)\sqrt{J_2} - \alpha I_1 - K = 0 \\ g(\theta_l) = mY \left(\cos \theta_l + \frac{\sin \theta_l}{\sqrt{3}} \right) \\ K = sY^2 \end{cases} \quad (1.28)$$

La règle d'écoulement non-associée peut être obtenue en adoptant un critère de Hoek- Brown simplifié comme potentiel plastique:

$$g = 3J_2 + \frac{\sqrt{3}m'Y}{2}\sqrt{J_2} - \frac{m'Y}{3}I_1 = 0 \quad (1.29)$$

où m' est un paramètre de Hoek- Brown.

1.2.5.2.5. Exemples de lois de comportement évoluées

L'analyse expérimentale a permis l'élaboration de lois de comportement plus ou moins complexes, aptes à rendre compte des principaux phénomènes mécaniques observés sur des échantillons de sol. Parmi l'ensemble des lois élastoplastiques avec écrouissage proposées, certaines sont très intéressantes par leur relative simplicité et leur faible nombre de paramètres à identifier.

Il s'agit, pour les argiles, des lois Cam-Clay, développées dans les années 1960 par Roscoe à l'université de Cambridge, et de la loi de Mélanie, et pour les sables, de la loi de Nova et de la loi de Vermeer.

1.3. Modèles de comportement

1.3.1. Modèles unidimensionnels

Parmi les modèles utilisés pour l'étude de comportement de dépôts de sol ou des milieux incluant des géomatériaux tels que les barrages en terres, on cite un modèle populaire simple connu sous le nom du modèle poutre console en cisaillement (PCC). Ce modèle a

été employé intensivement au cours des 30 dernières années pour estimer la réponse sismique latérale des profils et dépôt de sol. Un certain nombre d'études ont prouvé que le modèle (PCC) rapporte des périodes naturelles et des formes modales qui sont tout à fait réalistes [Gazetas et al, 1985].

1.3.1.1. Equation de mouvement

Le modèle de poutre console en cisaillement (PCC), est essentiellement fondé sur les deux hypothèses simplificatrices suivantes :

- Seulement les déformations de cisaillement ont lieu
- La résultante des contraintes de cisaillements horizontaux est uniformément distribuée.

L'équation de mouvement est déduite de l'équilibre dynamique et les conditions aux limites, qui s'expriment par l'annulation des déplacements et de la contrainte de cisaillement à la base et à la surface libre, respectivement. La non linéarité apparaît dans l'expression de la contrainte de cisaillement et dépend du module et de la déformation de cisaillement.

Une autre formulation de l'équation de mouvement est prise dans le programme SHAKE, qui utilise la méthode en contraintes totales, le comportement non linéaire du sol est pris en compte par la procédure linéaire équivalente. La réponse non linéaire est approchée par un modèle viscoélastique linéaire. Les propriétés de la relation contrainte-déformation du sol sont définies aux moyens des relations de dépendance du module de cisaillement et du coefficient d'amortissement visqueux équivalent de la déformation de cisaillement.

Ce modèle a aussi été utilisé dans l'étude des comportements sismiques des barrages en terre par Chaug, 1981, où la largeur finie des couches est incorporée dans la formulation si la compatibilité de la contrainte de cisaillement est remplacée par la compatibilité de la force de cisaillement, à l'interface de deux couches consécutives.

1.3.1.2. Variation spatiale du module de cisaillement

Dans les milieux à hétérogénéité importante tels que les barrages en terres, le module de cisaillement peut être considéré en tant qu'une augmentation en puissance de la

profondeur z $G(y) = G_b \left(\frac{y}{H}\right)^B$ (Fig. 1.15), G_b est le module de cisaillement à la base du barrage, B peut prendre des valeurs dans la gamme $0.40 \leq B \leq 0.75$. [Gazetas et al, 1985].

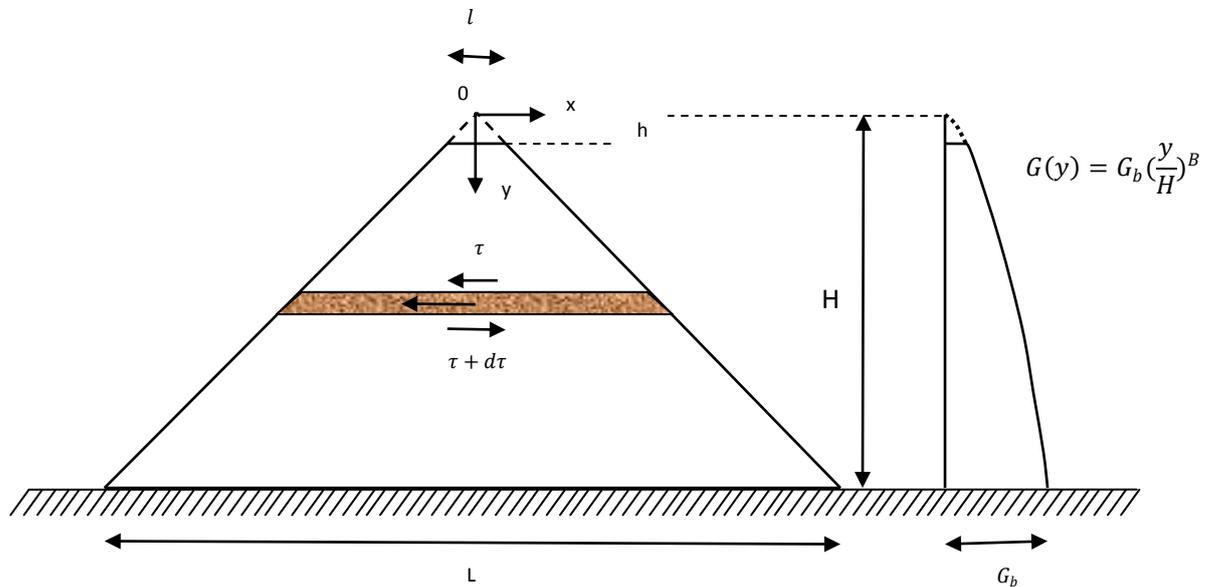


Fig. 1.15- Section transversale d'un barrage et distribution du module de cisaillement avec la profondeur [Gazetas et al, 1985].

1.3.1.3. Variation spatial de la vitesse de l'onde de cisaillement

Des mesures faites par Gazetas et Abdel-Ghaffar [Gazetas, 1982] sur douze barrages au Japon, aux États-Unis et en Yougoslavie, ont montré une bonne concordance entre les variations enregistrées de la vitesse avec la profondeur et la distribution préconisée selon la puissance de $(1/3)$ de la hauteur. La figure (1.16), montre les résultats obtenus sur la distribution de la vitesse en fonction de la profondeur.

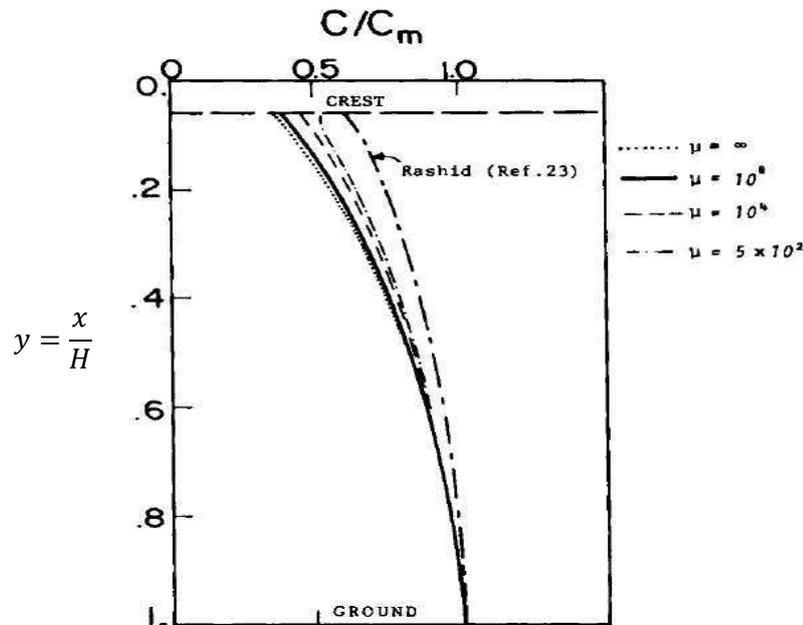


Fig. 1.16- Profils des vitesses [Gazetas, 1982].

1.3.2. Modèles tridimensionnels face aux autres modèles

Dans les analyses sismiques sur des dépôts de sol, des investigations antérieures ont employé beaucoup de modèles simplifiés, en considérant que les matériaux sont linéaires avec des propriétés homogènes ou avec des propriétés variant [Abdelghaffar et al, 1982]. Les modèles bidimensionnels de cisaillement de poutre ont été souvent employés pour modéliser un barrage en terre, bien que dans des cas où des effets de pente, qui sont petits pour la plupart des barrages en terre, puissent être incorporés en aval et en amont. Dans les modèles de poutre en cisaillement, les contraintes et les déformations sur les faces de n'importe quelle bande d'un élément horizontal en aval et en amont, ont été supposées uniformément distribuées. Ces modèles ont fourni des informations utiles mais il ya toujours le manque de capacité d'incorporer les effets tridimensionnels qui se sont avérés significatifs dans les essais pratiques [Abdelghaffar et al, 1982].

Quelques efforts ont été fournis pour étendre ces modèles analytiques dans le sens tridimensionnel. Martinez et Bielak [Abdelghaffar et al, 1982] ont employé une discrétisation en élément finis bidimensionnels de la section transversale du barrage ainsi qu'une expansion de Fourier dans la direction longitudinale. Ils ont conclu que le comportement tridimensionnel de déformation rapporte des caractéristiques de rigidité plus que le fait l'idéalisation bidimensionnelle. Ohmachi [Abdelghaffar et al, 1982] à également

conclu que l'analyse tridimensionnelle a un effet important sur la réponse sismique des barrages.

1.4. Modélisation par la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (MEF) est une méthode efficace et souple pour le traitement des problèmes de dimensions finies et infinies, en raison de sa manipulation efficace de géométries arbitraires et de l'hétérogénéité et la non-linéarité des matériaux. Le progrès informatique puissant a rendu cette méthode plus populaire.

1.4.1. Modélisation géométriques

1.4.1.1. Modélisation géométrique unidimensionnelle

L'un des principes de la modélisation par éléments finis est que le modèle soit géométriquement un prototype réduit de la structure réelle. Etant donné que le modèle est unidimensionnel, alors l'élément fini prend une dimension de l'ouvrage étudié.

La modélisation géométrique unidimensionnelle d'un profil ou dépôt de sol est faite par une colonne de sol ayant la même hauteur du profil de sol comme l'indique les figures (1.17) et (1.18).

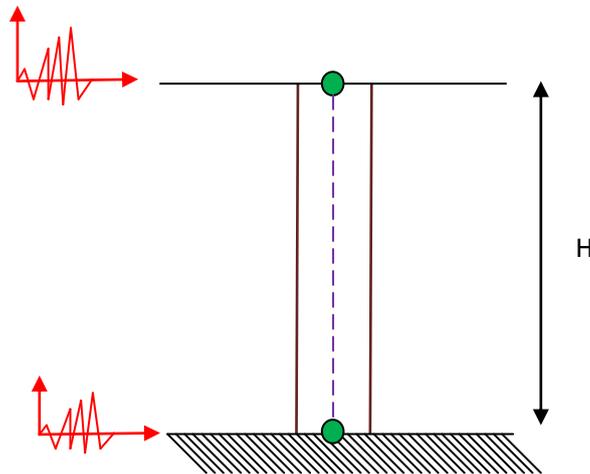


Fig. 1.17- Représentation 1-D d'un dépôt de sol [Ernesto et al, 2003].

Cette modélisation a été utilisée dans beaucoup de travaux antérieurs. Nous citons l'étude qui a été menée par Elgamal et al, 1985 où le barrage de Santa Félicia a été représentée par une colonne verticale (Fig. 1.18)

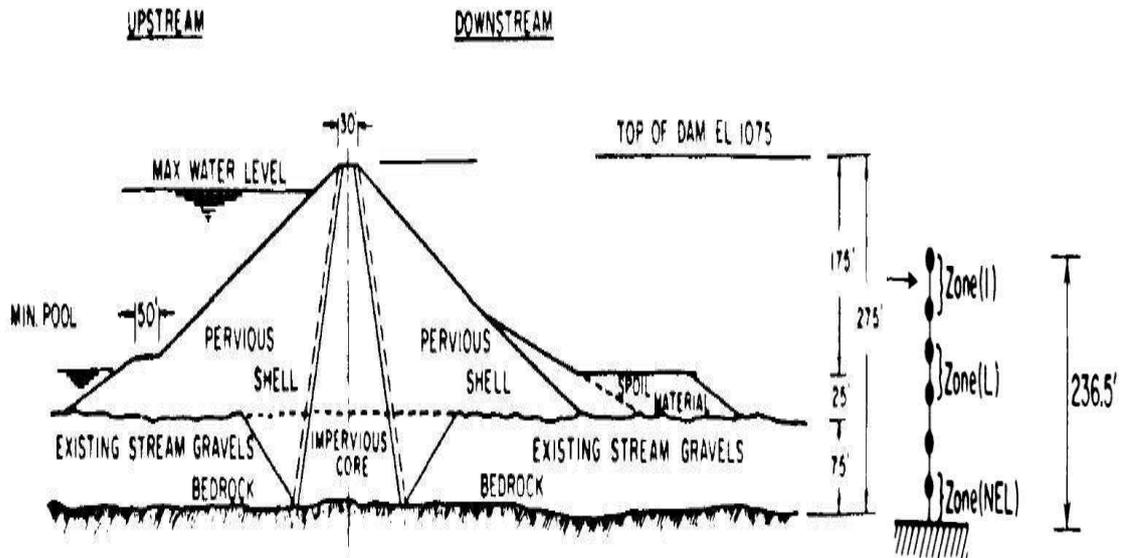


Fig. 1.18- Représentation 1-D de la réponse du barrage en terre de Santa Felicia [Elgamal et al, 1985].

1.4.1.2. Modélisation géométrique bidimensionnelle

C'est une représentation plus réaliste que celle auparavant, car elle représente un prototype plan réel de l'ouvrage étudié. Le profil ou dépôt de sol est modélisé suivant deux directions par différents éléments finis plans.

La famille d'éléments finis plans se compose généralement des éléments triangulaires à trois ou six nœuds, et des éléments quadratiques à quatre ou à huit nœuds.

La figure (1.19), montre le maillage en élément finis utilisé dans l'analyse du barrage de la vallée en Californie par Woodward et al, 1996. Le maillage se compose de 448 nœuds, 131 éléments quadratiques à huit (08) nœuds et de 778 degré de liberté. Le problème traité dans cette analyse est un problème de déformation-plane. La figure (1.19), montre aussi, les endroits des neuf groupes des matériaux du barrage.

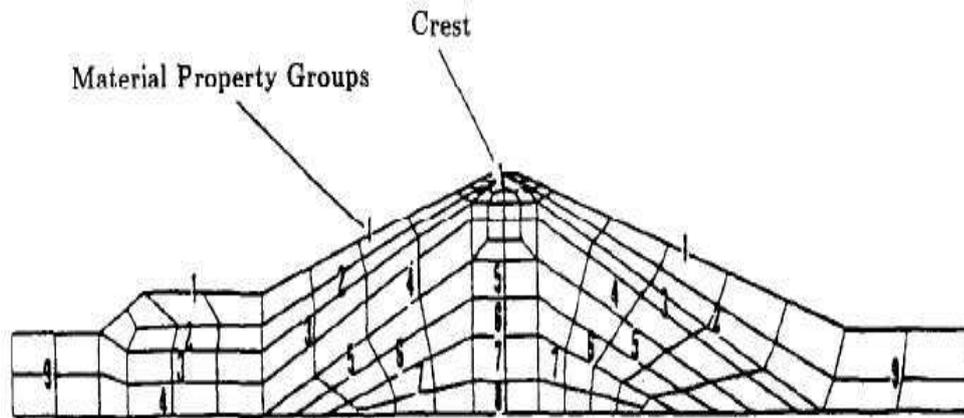


Fig. 1.19- Modélisation par élément finis du barrage de la vallée de Californie [Woodward et al, 1996].

1.4.1.3. Modélisation géométriques tridimensionnelle

C'est le cas le plus réaliste, car il donne l'allure la plus approchée de la structure à étudier. La représentation géométrique se fait suivant les trois axes.

La figure (1.20), montre une configuration tridimensionnelle idéalisée d'un barrage qui peut être analysée par des procédures simplifiées ou sophistiquées.

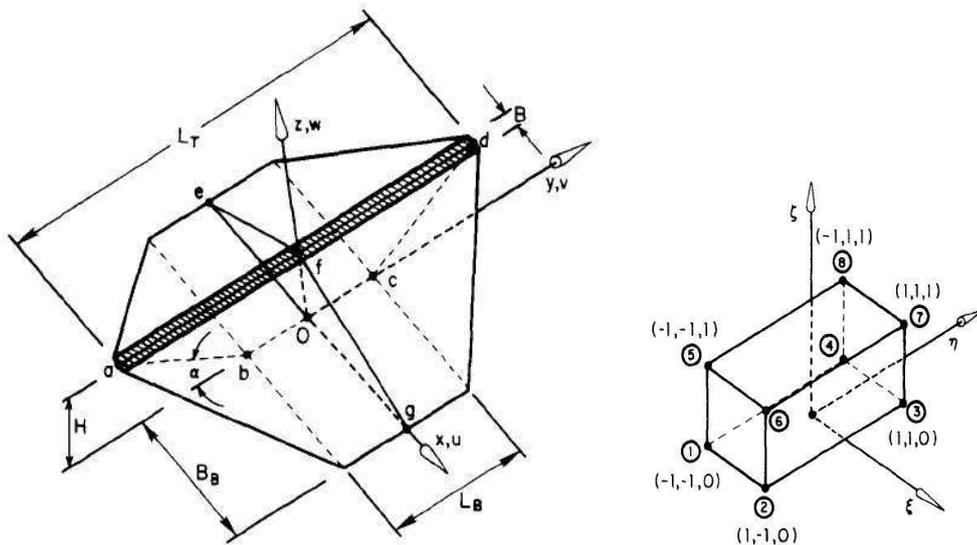


Fig. 1.20- Géométrie et élément finis du modèle tridimensionnel d'un barrage [Abdelghaffar, 1982].

1.4.2. Méthodes d'intégration des équations de mouvement

1.4.2.1 . Schéma temporel de Newmark

La résolution temporelle de l'équation de mouvement dynamique par la méthode des éléments finis impose le choix d'un algorithme temporel qui se présente sous la forme de trois équations permettant le calcul des champs nodaux des accélérations, vitesses et déplacements. La première équation, dans sa forme générale, assure l'équilibre dynamique et permet le calcul du champ nodal des accélérations. Les deux autres équations assurent respectivement le calcul des champs nodaux des vitesses et déplacements. La littérature scientifique enveloppe de nombreuses études sur un grand nombre de schémas. Parmi les plus populaires, le schéma temporel de Newmark. Le tableau (1.2) récapitule les caractéristiques de la méthode de Newmark.

Tableau 1.2-Caractéristiques des schémas temporels de la méthode de Newmark [Mahéo, 2006].

Schéma Newmark	γ	β	Nature	Précision	Limite de stabilité
Explicite	0	0	Explicite	Ordre 2	0
CFD	1/2	0	Explicite	Ordre 2	2
Accélération moyenne	1/2	1/4	Implicite	Ordre 2	∞
Accélération linéaire	1/2	1/6	Implicite	Ordre 2	3.46
Fox-Goodwin	1/2	1/12	Implicite	Ordre 3	2.45
Ordre 1	$> 1/2$	-	Implicite	Ordre 1	-

La stabilité du schéma de Newmark peut se résumer dans la figure (1.21), exprimant β en fonction de γ .

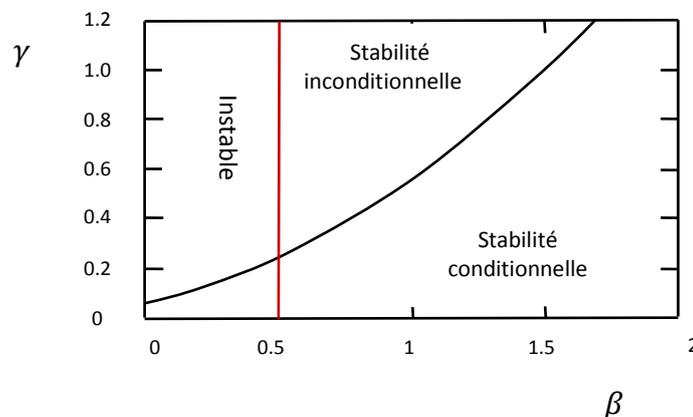


Fig. 1.21- Stabilité du schéma de Newmark [Mahéo, 2006].

1.4.2.2. Schéma des différences finies centrées

Le schéma temporel des différences finies centrées (DFC), qui peut être mis sous la forme du schéma de Newmark avec les coefficients $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = 0$ peut être considéré comme le schéma d'intégration temporel explicite de base [Mahéo, 2006].

Le schéma des DFC peut s'introduire plus classiquement. L'idée est d'approcher les vitesses calculées à l'instant $(n + \frac{1}{2})$ (respectivement $(n - \frac{1}{2})$) par les valeurs du déplacement calculé aux instants n et $n+1$ (respectivement n et $n-1$). Le calcul de l'accélération à l'instant n se fait ensuite grâce aux vitesses calculées aux instants $(n - \frac{1}{2})$ et $(n + \frac{1}{2})$.

1.4.2.3. Schéma de Runge-Kutta

L'équation du mouvement temporelle initiale du second ordre est transformée en un couple d'équations du premier ordre. Le nombre d'inconnues du problème est ainsi doublé, cependant ces équations peuvent être traitées dans la pratique séquentiellement ce qui minimise l'inconvénient.

Lorsque l'on applique un schéma de type Runge-Kutta, il est possible d'utiliser deux ordres successifs de précision, dont les solutions respectives par soustraction permettent d'obtenir une estimation de l'erreur d'intégration. Les opérations intermédiaires pour le calcul des deux ordres successifs sont mutualisées (utilisées deux fois) pour minimiser le coût de calcul [Mahéo, 2006].

1.5. Synthèse des travaux sur la réponse sismique non linéaire des structures de sols

Des études antérieures [Gazetas, 1982, Abdelghaffar, 1982, Elgamal et al, 1985, Succarieh et al, 1993, Abouseeda et al, 1996, Woodward et al, 1996, Ernesto et al, 2003, Siyahi et al, 2007] ont montré que les matériaux constituant les barrages en terre se comportent non linéairement une fois excités par des mouvements sismiques forts. Pour cette raison, le besoin d'une véritable analyse non linéaire est particulièrement grand quand les barrages en terre éprouvent de grandes amplitudes de vibrations et grandes déformations.

Gazetas, 1982 a présenté une rigoureuse solution au problème de la réponse dynamique de cisaillement des barrages bidimensionnels, des vibrations libres et forcées sont étudiées. Les résultats sont présentés sous forme de fréquences naturelles, de formes modales et de coefficients sismiques simultanés.

Dans la pratique, afin de déterminer des valeurs représentatives des vitesses d'ondes dans les barrages en terre existants, aussi bien que pour étudier la variation de telles vitesses avec la profondeur, des mesures de vitesse d'onde peuvent être effectuées à travers la largeur ou le long de la crête d'un barrage. De telles mesures géophysiques complètes ont été récemment rapportées par Abdel-Ghaffar et Scott, en enregistrant les temps d'arrivée d'onde S à plusieurs stations de sismomètre situées sur les pentes et la crête du barrage de Santa Felicia en Californie, des vitesses d'onde de cisaillement ont été estimées à diverses hauteurs [Gazetas, 1982]. Les ondes sont déclenchées artificiellement par des coups de marteau à plusieurs endroits sur la pente ascendante et la crête du barrage. L'analyse de leurs données permet de représenter la vitesse de l'onde de cisaillement avec la profondeur en puissance de $(1/3)$.

Dans la pratique, en matière géotechnique, tout procédé analytique nécessite d'être validé expérimentalement [Gazetas, 1982]. Cependant, dû à la nature du phénomène de secousse sismique (l'endroit et le temps de l'occurrence ne peuvent pas être prédéterminés), l'utilisation des diverses méthodes analytiques employées dans la dynamique des sols était justifiée. L'inhomogénéité le long du barrage semblait être un facteur important en déterminant la réponse et en évaluant la sûreté d'un barrage en terre.

Il ya aussi des chercheurs qui ont appliqué des techniques aléatoires non linéaires de vibration en calculant la réponse sismique des systèmes continus qui sont d'intérêt pour la dynamique des sols. Par exemple, Faccioli [Gazetas, 1982] a développé une formulation aléatoire de vibration de linéarisation équivalente pour étudier l'amplification unidimensionnelle des ondes sismiques pour des dépôts de sol obéissant à l'équation constitutive de Ramberg-Osgood-Masing, tandis que Singh et Khatua [Gazetas, 1982] ont essayé d'évaluer la sûreté sismique des barrages en terre en employant la linéarisation stochastique et en exécutant une analyse itérative en liaison avec une discrétisation en éléments finis (EF) du barrage, alors que Vanmarcke [Gazetas, 1982] a suggéré plusieurs applications possibles de théorie aléatoire de vibration pour résoudre des problèmes de dynamique des sols, avec la détermination de la réponse de sol et de l'évaluation non linéaires du potentiel de liquéfaction.

Bien que la méthodologie aléatoire de vibration puisse accepter n'importe quel modèle dynamique sophistiqué de la structure en terre, le modèle relativement simple "PCC non-homogène" a été extensivement utilisé par rapport aux modèles "EF en déformation plane". Le choix a été basé non simplement sur des considérations économiques mais, aussi sur la qualité des résultats en interprétant le comportement observé des barrages réels pendant les secousses sismiques et les vibrations expérimentales forcées [Cascone et al, 2003].

Très souvent une analyse viscoélastique linéaire simple est mise pour estimer la réponse non linéaire d'une structure en terre à une forte secousse sismique. Le succès d'une telle analyse dépend du choix approprié (basé sur des données expérimentales disponibles) des modules G et des constantes d'amortissement ξ qui sont compatibles à l'intensité globale de la secousse. La figure (1.22), montre à quel point il est difficile de prévoir toutes les quantités non linéaires de réponse avec une analyse linéaire [Gazetas et al, 1982].

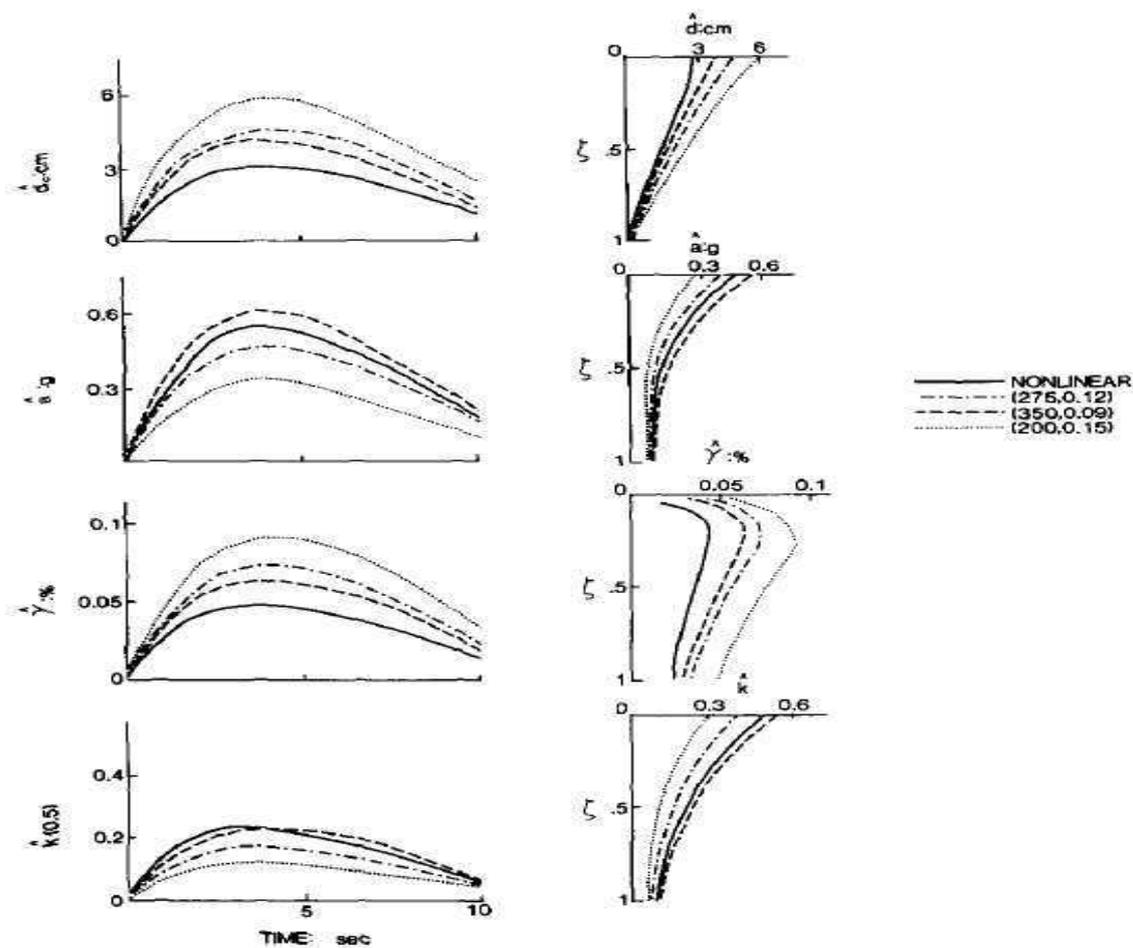


Fig. 1.22- Réponse non linéaire contre la réponse linéaire d'un barrage en terre de 90 m de hauteur [Gazetas et al, 1982].

Elgamal et al. 1985, ont développé un procédé analytique-numérique simplifié, efficace et rentable pour estimer la réponse aux séismes par hystérésis linéaire des barrages en terres. Le barrage est modélisé dans un seul sens qui donne seulement la déformation horizontale de cisaillement. Ce modèle simplifié, donne de bonnes approximations pour les barrages en terre qui ont un rapport (longueur/hauteur) supérieur ou égale à 4. La technique proposée est basée sur une formulation de Galerkin pour les équations du mouvement. Le comportement contraint déformation par hystérésis des matériaux du barrage en terre est modélisé par des équations constitutives élastoplastiques basées sur la théorie cinématique multi-surface. Finalement, la technique est appliquée pour analyser la réponse sismique non linéaire d'un barrage en terre.

De même, en 1991 avec le même modèle, Elgamal a développé une approche analytique numérique simple pour représenter la réponse dynamique des sols. La discrétisation spatiale et temporelle sont discutées, en employant un modèle élastoplastique. Des exemples numériques sont inclus et la réponse calculée est comparée à d'autres modèles et à la réponse réelle enregistrée. Dans cette application, la réponse est déterminée avec deux types de secousses sismiques, le premier séisme est modéré tandis que le second est fort et sa réponse est fortement non linéaire avec présence de liquéfaction.

Woodward et al, 1996 ont employé un simple modèle élastique parfaitement plastique pour décrire la réponse en contrainte-déformation des matériaux constituant le barrage. L'effet du coefficient d'amortissement et la distribution initiale des contraintes sont considérés dans l'analyse dynamique du barrage en terre. Les résultats des analyses par le modèle élastique parfaitement plastique sont comparés à la réponse mesurée du barrage et aux résultats présentés par Griffiths et Prevost [Woodward et al, 1996].

Les résultats obtenus par Griffiths ont montré une très bonne concordance entre la réponse horizontale calculée et celle enregistrée, tandis qu'il y'avait un désaccord suivant la direction verticale, dû en partie à la discrétisation quadratique à 04 nœud de l'élément finis. Pour la direction horizontale, les constantes d'amortissement supérieures à 9% ont été nécessaires pour réduire l'accélération maximale calculée. Le coefficient d'amortissement réel du barrage basé sur la contrainte dynamique induite pour ce séisme ne dépassait pas la valeur de 6%.

Les résultats des travaux de Woodward et al, 1996 montrent que la réponse calculée en crête dans la direction horizontale comparée à la réponse mesurée pour une constante d'amortissement de 9% a une très bonne concordance globale, à mentionner que les valeurs calculées donnent des amplitudes légèrement plus élevées.

1.6. Conclusion

De cette étude bibliographique, il ressort que les modèles linéaires fournissent des résultats tout à fait acceptables pour les mouvements sismiques de faible amplitude. Par contre ces modèles sont totalement inadaptés pour l'analyse des mouvements forts des géomatériaux.

Le développement des modèles de comportement élastoplastiques a ouvert un nouvel horizon pour les études de dynamiques des géomatériaux. D'autre part, l'outil informatique et la capacité de la méthode des éléments finis permettent de solutionner des problèmes qui étaient auparavant difficiles à traiter.

2.1. Introduction

Les relations entre contraintes et déformation sont vastes, et comme il n'existe pas une relation universelle, chacune des expressions données est déterminée dans un domaine d'emploi bien défini. Ce domaine peut être défini par de nombreux paramètres (temps, contraintes, température ...).

La relation d'élasticité n'est valable que pour un état de sollicitation faible. Des critères tels que ceux de Von Misès, Tresca, Mohr Coulomb ..., permettent de vérifier la légitimité de l'emploi de cette formule. Dans le cas de non vérification du critère, il convient d'utiliser une autre loi de comportement.

Les résultats d'un essai de traction montrent que le dépassement de la limite élastique fait apparaître des déformations permanentes, c'est à dire des déformations résiduelles après suppression des charges. Expérimentalement, on constate souvent que la courbe de décharge est une droite parallèle à la droite correspondante au domaine élastique. On peut ainsi affirmer que la déformation effective est la somme d'une déformation élastique et d'une déformation purement plastique [Maya, 2008].

2.2. Surface et fonction de charge

On appelle surface de charge, la surface qui, à l'instant (t) va délimiter le domaine élastique dans l'espace des contraintes. L'ensemble des points tel que le comportement soit encore élastique est délimité par une surface qui est la surface de charge. La relation permettant de décrire cette surface est la fonction de charge, on constate d'après la figure (2.1), que la surface de charge est évolutive. L'équation d'une telle surface est de la forme :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \alpha) \leq 0 \quad (2.1)$$

D'après le principe de Hill (Hill, 1950) appelé le principe du travail plastique maximal, on peut tirer deux remarques très importantes :

- 1- Convexité de la fonction de charge
- 2- Normalité de la déformation plastique

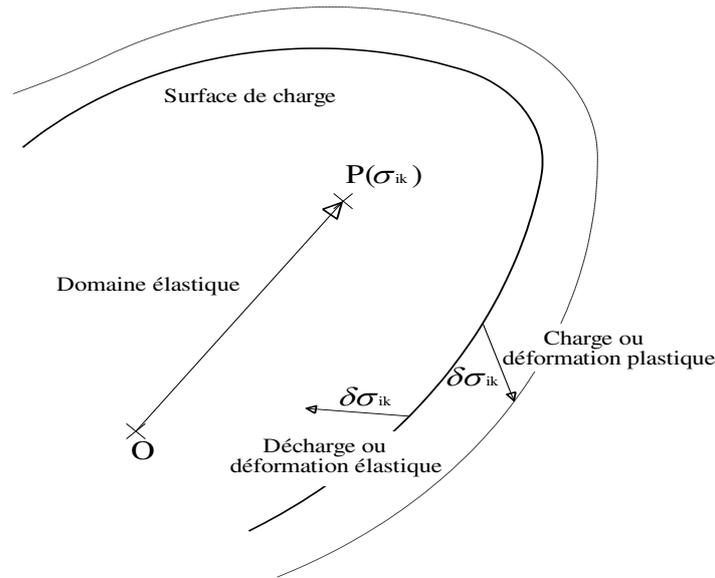


Fig. 2.1- Représentation de la surface de charge [Maya, 2008].

2.2.1. Convexité de la fonction de charge

D'après la figure (2.2), soit σ_{ik} un état de contrainte sur la surface de charge (point Q) et soit $\delta\sigma_{ik}$ un accroissement de contrainte qui crée une déformation plastique $(\delta\varepsilon)_{ik}^p$. Pour un état de contrainte élastique σ_{ik}^* (point P), le travail plastique associé est inférieur au travail plastique associé à l'état de contrainte σ_{ik} .

$$\sigma_{ik} (\delta\varepsilon)_{ik}^p \geq \sigma_{ik}^* (\delta\varepsilon)_{ik}^p \quad (2.2)$$

La relation (2.2), peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(\sigma_{ik} - \sigma_{ik}^*) (\delta\varepsilon)_{ik}^p \geq 0 \quad (2.3)$$

Or, dans l'espace des contraintes, $(\sigma_{ik} - \sigma_{ik}^*)$ représente les composantes du vecteur \overrightarrow{PQ} .

La relation (2.3), devient :

$$\overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{\delta\varepsilon})^p \geq 0 \quad (2.4)$$

Cette inégalité conduit à la convexité de la surface de charge (Fig. 2.2).

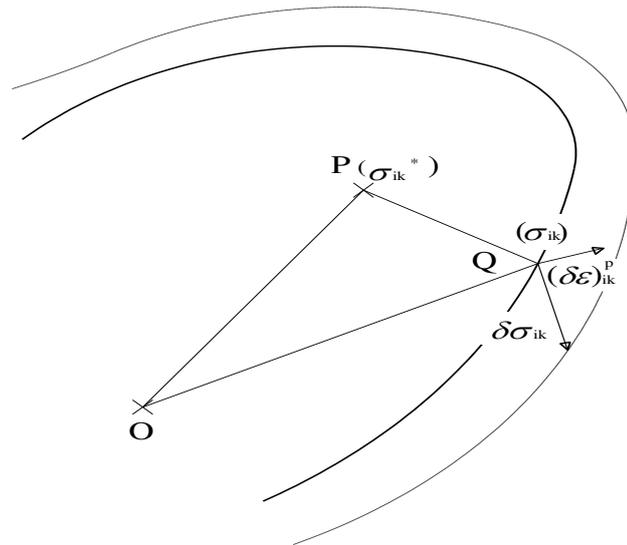


Fig. 2.2- Convexité de la surface de charge [Maya, 2008].

2.2.2. Loi de normalité de la déformation plastique

Considérons le cas où l'on tend vers le point Q (situé sur la surface de charge) sur la figure (2.3), par deux directions opposées. On désigne par (π) le plan tangent en Q à la surface de charge. Les points P et P', étant infiniment proches du point Q, on peut associer des composantes infiniment petites aux vecteurs :

$$\overrightarrow{PQ} \Rightarrow d\sigma_{ik} \text{ et } \overrightarrow{P'Q} \Rightarrow d\sigma'_{ik} \quad (2.5)$$

Si on considère, que ces deux points P et P' sont symétriques par rapport au point Q, à savoir que ces deux points appartiennent au plan tangent à la surface de charge (π) au point Q, il vient alors :

$$d\sigma'_{ik} = -d\sigma_{ik} \quad (2.6)$$

D'après le principe de Hill et plus exactement, d'après la relation (2.3), il vient :

$$\pm d\sigma_{ik} \cdot (\delta\varepsilon)_{ik}^p \geq 0 \quad (2.7)$$

D'où, il sort :

$$d\sigma_{ik} \cdot (\delta\varepsilon)_{ik}^p = 0 \quad (2.8)$$

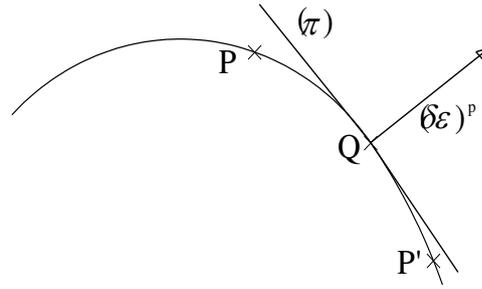


Fig. 2.3- Règle de normalité de la déformation plastique [Maya, 2008].

Cette relation devant être vraie quelque soit le point P appartenant au plan tangent (π) , on en déduit que le vecteur de composante $(\delta\varepsilon)_{ik}^p$ est perpendiculaire à (π) en Q et est dirigé vers l'extérieur. C'est la loi de normalité de la déformation plastique, et on peut écrire à priori que :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^p} = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (2.9)$$

$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^p}$: est la vitesse de déformation plastique à la surface seuil

$\dot{\gamma}$: est le multiplicateur plastique, qui vérifie l'équation (2.10) :

$$\dot{\gamma} f(\underline{\underline{\sigma}}, \alpha) = 0 \quad (2.10)$$

2.2.3. Déformation plastique

Pour un comportement élastoplastique, la déformation totale est une somme de deux types de déformation :

- Une déformation élastique réversible, noté ε^e
- Une déformation plastique irréversible, noté ε^p

Pour une évolution purement élastique d'un matériau, la déformation plastique est nulle ($\varepsilon^p = 0$). Dans le cas contraire, une remarque très importante se pose et que pour un niveau de contrainte donné, peut correspondre une infinité de valeurs de déformation plastique, pour cette raison l'état actuel d'un matériau dépend de l'histoire de son chargement.

Pour mesurer le trajet de la déformation plastique, on doit calculer la déformation cumulée, qui est donnée par la relation suivante:

$$p(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \|\underline{\underline{\varepsilon}}^p(\tau)\| d\tau \quad (2.11)$$

où :

$p(t)$: est la déformation cumulée au cours du temps de chargement

$\underline{\underline{\varepsilon}}^p(\tau)$: est la vitesse de déformation plastique

2.3. Critère de Von Misès

Nous l'avons déjà remarqué, qu'il y a une relation évidente entre la fonction de charge et le critère de limite d'élasticité. Examinons plus précisément le cas du critère de Von-Misès.

Le critère de Von-Misès revient en fait à limiter la contrainte octaédrique, c'est à dire J_2 le deuxième invariant du tenseur déviateur des contraintes.

2.3.1. Déformation plastique

Généralement la forme de la fonction de charge utilisée de Von Misès est :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \alpha) = \sigma^{eq} - R(p) \leq 0 \quad (2.12)$$

avec,

σ^{eq} : Contrainte équivalente

α : Paramètre d'écrouissage

La contrainte équivalente de Von Misès est définie par l'expression suivante :

$$\sigma^{eq} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{\underline{s}}\| \quad (2.13)$$

Dans cette expression, $\underline{\underline{s}}$ désigne le tenseur des contraintes déviatoriques défini par la relation suivante :

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3}(\underline{\underline{\sigma}}:I)I \quad (2.14)$$

D'après la relation (2.9), qui décrit la loi de normalité de déformation plastique, on peut réécrire cette relation comme suit :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p &= \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\gamma} \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} (\sigma^{eq} - R(p)) = \dot{\gamma} \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{\underline{s}}\| \right) \\ \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p &= \dot{\gamma} \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \left(\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \right)^{1/2} = \dot{\gamma} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \right)^{-1/2} \left[\frac{3}{2} \frac{\partial \underline{\underline{s}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{s}} + \frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \frac{\partial \underline{\underline{s}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right] \\ \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p &= \dot{\gamma} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \right)^{-1/2} \left(\frac{3}{2} [2\underline{\underline{s}}] \right)\end{aligned}$$

Finalement on trouve :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \dot{\gamma} \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma^{eq}} \quad (2.15)$$

Il reste maintenant à déduire la relation qui existe entre la déformation plastique cumulée $p(t)$ et le multiplicateur plastique $\dot{\gamma}$.

D'après la relation (2.11), on a :

$$p(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \|\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p(\tau)\| d\tau \Rightarrow \dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma} \frac{3}{2\sigma^{eq}} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma^{eq}$$

On trouve que :

$$\dot{p} = \dot{\gamma} \quad (2.16)$$

L'équation (2.15), devient alors :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \dot{p} \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma^{eq}} \quad (2.17)$$

2.3.2. Fonction d'écrouissage

Les variables d'écrouissage permettent de décrire l'évolution de la surface de charge au cours de la sollicitation. Dans le cas général, ces variables d'écrouissage peuvent être de nature scalaire, vectorielle et/ou tensorielle.

2.3.2.1. Ecroissage linéaire

Généralement la fonction d'écrouissage est déduite d'un essai simple monotone et isotherme. La figure (2.4), montre la courbe de la contrainte et déformation avec écroissage linéaire.

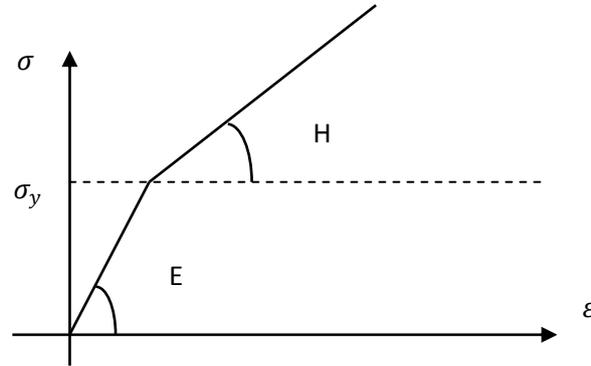


Fig. 2.4- Comportement élastoplastique avec écroissage linéaire [Dunne, 2005].

L'équation (2.18), décrit les relations entre la contrainte et la déformation :

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon, \text{ si } \varepsilon \leq \frac{\sigma_y}{E} \\ \sigma = \sigma_y + H\left(\varepsilon - \frac{\sigma_y}{E}\right), \text{ si } \varepsilon \geq \frac{\sigma_y}{E} \end{cases} \quad (2.18)$$

Lorsque le critère de Von Misès est atteint, la fonction d'écrouissage prend la relation:

$$R(p) = \frac{HE}{E-H}p + \sigma_y \quad (2.19)$$

2.3.3.2. Ecroissage en puissance

La relation qui relie les contraintes aux déformations prend la forme suivante :

$$\sigma = \frac{\sigma}{E} + a \frac{\sigma_y}{E} \left(\frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right)^n, \text{ si } \varepsilon \geq \frac{\sigma_y}{E} \quad (2.20)$$

L'expression de la fonction d'écrouissage sera :

$$R(p) = \sigma_y + \sigma_y \left(\frac{E}{a\sigma_y} p \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.21)$$

La figure (2.5), schématise la fonction $R(p)$ pour différentes valeurs de n

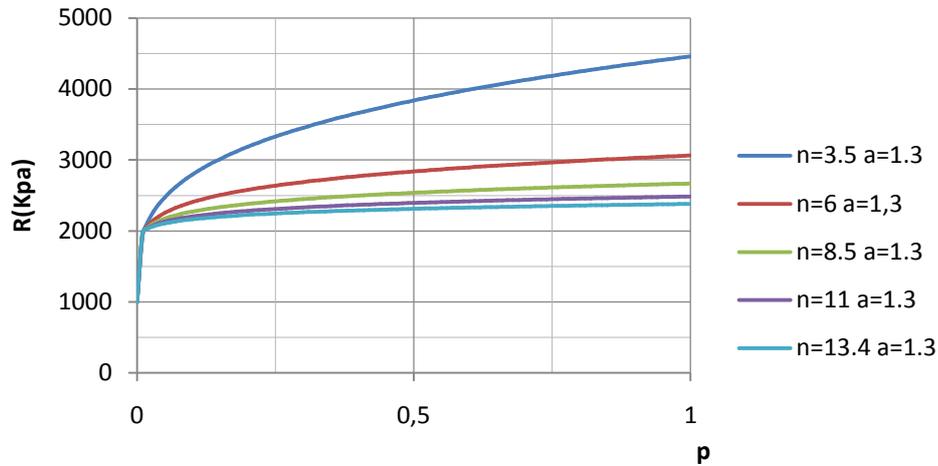


Fig. 2.5- Courbe d'écroissage en puissance.

2.4. Relations de comportement élastoplastiques de Von Misès

La figure (2.6), montre une schématisation de l'intégrale implicite des relations de comportement de Von Misès, connue aussi sous le nom de la méthode de retour radiale. L'ellipse de Von Mises des contraintes déviatoriques plane devient un cercle, et d'après la notion de la normalité de la vitesse de déformation plastique, qui est perpendiculaire sur la surface de chargement, les contraintes de prédictions élastiques seront corrigées par la déformation plastique radiale, d'où le nom de la méthode [Dune, 2005].

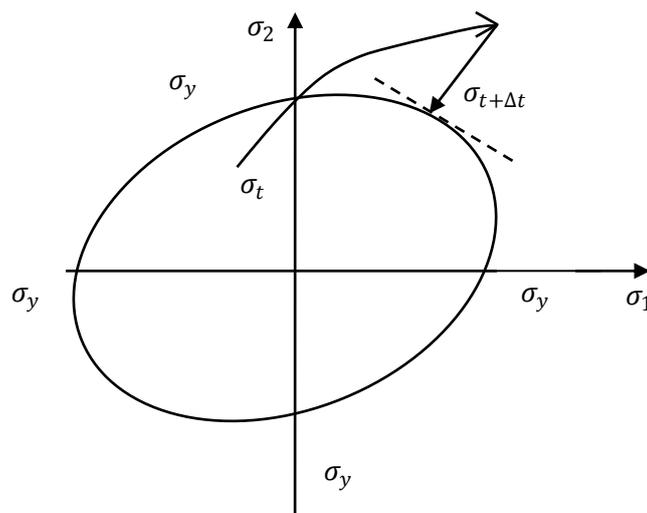


Fig. 2.6- Intégrale implicite (Méthode de retour radiale) des équations élastoplastiques de Von Misès [Dunne, 2005].

La relation d'élasticité de Hooke entre la contrainte et la déformation s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2G \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \lambda Tr(\underline{\underline{\varepsilon}}^e) \underline{\underline{I}} \quad (2.22)$$

Comme la déformation élastoplastique est une somme des déformations élastique et plastique, il vient :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\varepsilon}}_f^e + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\varepsilon}}_f^e + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} - \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p$$

Donc, on aura :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2G(\underline{\underline{\varepsilon}}_f^e + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} - \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p) + \lambda Tr(\underline{\underline{\varepsilon}}_f^e + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} - \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p) \underline{\underline{I}}$$

Ce qui donne :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underbrace{2G(\underline{\underline{\varepsilon}}_f^e + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}) + \lambda Tr(\underline{\underline{\varepsilon}}_f^e + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}}}_{\text{Prédicteur élastique}} - \underbrace{2G \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p}_{\text{Correction plastique}} \quad (2.23)$$

Il faut signaler que : $Tr(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p) = 0$, car elle est déviatorique.

Le tenseur de prédiction élastique, dénoté par $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{élas}}$ a donc comme expression :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{élas}} = 2G(\underline{\underline{\varepsilon}}_f^e + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}) + \lambda Tr(\underline{\underline{\varepsilon}}_f^e + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} \quad (2.24)$$

D'après l'équation (2.24), l'équation (2.23) devient :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^{\text{élas}} - 2G \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p = \underline{\underline{\sigma}}^{\text{élas}} - 2G \Delta p \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma^{\text{eq}}} \quad (2.25)$$

Si on exprime le tenseur de contrainte en fonction du tenseur des contraintes déviatoriques, il sort :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{s}} + \frac{1}{3} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{I}} \quad (2.26)$$

L'équation (2.25), aura comme expression :

$$\underline{\underline{s}} + \frac{1}{3} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{\sigma}}^{\text{élas}} - 3G \Delta p \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma^{\text{eq}}} \quad (2.27)$$

Après réarrangement de l'équation (2.27), il vient :

$$(1 + 3G \frac{\Delta p}{\sigma^{eq}}) \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}}^{elas} - \frac{1}{3} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{I}} \quad (2.28)$$

Notre premier but est de rechercher une relation qui relie le tenseur des contraintes élastique (prédicteur élastique) ou son équivalent à celui du tenseur des contraintes équivalent.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}^{elas} - \frac{1}{3} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{I}} &= 2G(\underline{\underline{\varepsilon}}_t^e + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}) + \lambda I(\underline{\underline{\varepsilon}}_t^e + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}) : \underline{\underline{I}} - K \underline{\underline{\varepsilon}}_t^e : \underline{\underline{I}} \underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{\sigma}}^{elas} - \frac{1}{3} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{I}} &= 2G(\underline{\underline{\varepsilon}}_t^e + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}) + \lambda I(\underline{\underline{\varepsilon}}_t^e + \underline{\underline{\varepsilon}}) : \underline{\underline{I}} - K(\underline{\underline{\varepsilon}}_t^e + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} - \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p) : \underline{\underline{I}} \underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{\sigma}}^{elas} - \frac{1}{3} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{I}} &= 2G(\underline{\underline{\varepsilon}}_t^e + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}) + \lambda I(\underline{\underline{\varepsilon}}_t^e + \underline{\underline{\varepsilon}}) : \underline{\underline{I}} - K(\underline{\underline{\varepsilon}}_t^e + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}) : \underline{\underline{I}} \underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{\sigma}}^{elas} - \frac{1}{3} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{I}} &= 2G(\underline{\underline{\varepsilon}}_t^e + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}) + (\lambda - K) I(\underline{\underline{\varepsilon}}_t^e + \underline{\underline{\varepsilon}}) : \underline{\underline{I}} \equiv \underline{\underline{s}}^{elas} \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation (2.28) devient :

$$(1 + 3G \frac{\Delta p}{\sigma^{eq}}) \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{s}}^{elas} \quad (2.29)$$

On peut écrire aussi :

$$(1 + 3G \frac{\Delta p}{\sigma^{eq}}) \underline{\underline{s}} : (1 + 3G \frac{\Delta p}{\sigma^{eq}}) \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{s}}^{elas} : \underline{\underline{s}}^{elas}$$

D'après le critère de Von Misès, la contrainte élastique équivalente est donnée par :

$$\sigma^{elas,eq} = \sqrt{\frac{3}{2}} (\underline{\underline{s}}^{elas} : \underline{\underline{s}}^{elas})^{1/2}$$

Ce qui donne :

$$(1 + 3G \frac{\Delta p}{\sigma^{eq}}) \sigma^{eq} = \sigma^{elas,eq} \quad (2.30)$$

Donc, notre premier but est atteint, car on a pu exprimer la contrainte équivalente par celle de la contrainte élastique équivalente.

La relation (2.30) peut être réécrite de la façon suivante :

$$\sigma^{eq} + 3G\Delta p = \sigma^{elas,eq} \quad (2.31)$$

On peut aboutir à l'équation (2.31), d'une autre manière et voici les démarches ci-dessous.

La règle de normalité peut s'exprimer d'une autre façon, par utilisation de la notion du vecteur unitaire qui indique le sens de la direction de la normale à la surface de plasticité.

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma^{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}}, (\|\underline{\underline{N}}\| = 1) \quad (2.32)$$

où, $\underline{\underline{N}}$ est le vecteur normal unitaire à la surface de charge plastique.

L'équation (2.17), sera réécrite par une approche implicite par :

$$\begin{cases} \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p = \Delta p \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma^{eq}} = \Delta p \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}} \\ \Delta p \geq 0, \text{ et } \underbrace{\Delta p(\sigma^{eq} - R(p + \Delta p))}_{\text{Règle de normalité}} = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

La partie déviatorique du comportement élastique, est donnée par :

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{s}}^{elas} - 2G \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p \Rightarrow \underline{\underline{s}}^{elas} = \underline{\underline{s}} + 2G \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p$$

De plus :

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta p \underline{\underline{N}}, (\text{Règle de normalité})$$

$$\underline{\underline{s}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma^{eq} \underline{\underline{N}}, (\text{Expression de la normale pour le critère de Von Misès})$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma^{eq} \underline{\underline{N}} + 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta p \underline{\underline{N}} = \underline{\underline{s}}^{elas}$$

$$\underline{s}^{elas} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma^{eq} + 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta p \right) \underline{N} \quad (2.34)$$

Une remarque importante déduite de la relation (2.34), est que la normale finale à la surface de plasticité est colinéaire à \underline{s}^{elas} .

D'après cette remarque, et suivant la notion du vecteur unitaire, on peut écrire que :

$$\underline{N} = \frac{1}{\|\underline{s}^{elas}\|} \underline{s}^{elas} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\underline{s}^{elas}}{\sigma^{elas,eq}} = \underline{N}^{elas} \quad (2.35)$$

De ce qui suit, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma^{eq} + 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta p \right) \underline{N} &= \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma^{eq} + 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta p \right) \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\underline{s}^{elas}}{\sigma^{elas,eq}} = \underline{s}^{elas} \\ \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma^{eq} + 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta p \right) \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\underline{s}^{elas}}{\sigma^{elas,eq}} &= \left(\sigma^{eq} + 2G \frac{3}{2} \Delta p \right) \frac{\underline{s}^{elas}}{\sigma^{elas,eq}} = \underline{s}^{elas} \end{aligned}$$

On aura :

$$\left(\sigma^{eq} + 2G \frac{3}{2} \Delta p \right) \underline{s}^{elas} = \underline{s}^{elas} \sigma^{elas,eq} \Rightarrow \sigma^{elas,eq} = \sigma^{eq} + 3G \Delta p$$

C'est la même expression de la relation (2.31), qui est démontrée par une autre démarche.

L'équation (2.31) de la condition de cohérence (évolution plastique par hypothèse), qui est une équation non linéaire scalaire d'inconnue Δp , est en général, résolue par la méthode de Newton.

On écrit :

$$f = \sigma^{eq} + R(p + \Delta p) - \sigma^{elas,eq} - 3G \Delta p - R(p + \Delta p) = 0 \quad (2.36)$$

$$f + \frac{\partial f}{\partial \Delta p} d\Delta p + \dots = 0$$

$$\Rightarrow \sigma^{elas,eq} - 3G\Delta p - R(p + \Delta p) + \frac{\partial(\sigma^{elas,eq} - 3G\Delta p - R(p + \Delta p))}{\partial \Delta p} d\Delta p + \dots = 0$$

Ce qui conduit à :

$$d\Delta p = \frac{\sigma^{elas,eq} - 3G\Delta p - R(p + \Delta p)}{3G + \frac{\partial R(p + \Delta p)}{\partial \Delta p}} \quad (2.37)$$

Avant de détailler le paragraphe suivant, qui traitera la détermination de la matrice Jacobéenne c-à-d la détermination de la matrice élastoplastique ou le tenseur des raideurs, il est nécessaire de justifier une inégalité très importante, et cela pour faciliter la tâche de programmation numérique du comportement élastoplastique suivant le critère de Von Misès :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}^{elas}, p) \geq f(\underline{\underline{\sigma}}, p + \Delta p) \quad (2.38)$$

On sait que :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}^{elas}, p) = \sigma^{elas,eq} - R(p) \text{ et } f(\underline{\underline{\sigma}}, p + \Delta p) = \sigma^{eq} - R(p + \Delta p)$$

d'où :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}^{elas}, p) - f(\underline{\underline{\sigma}}, p + \Delta p) = (\sigma^{elas,eq} - R(p)) - (\sigma^{eq} - R(p + \Delta p))$$

$$f(\underline{\underline{\sigma}}^{elas}, p) - f(\underline{\underline{\sigma}}, p + \Delta p) = (\underline{\underline{\sigma}}^{elas,eq} - \sigma^{eq}) + (R(p + \Delta p) - R(p))$$

Et, d'après la relation de la cohérence (2.31), il sort :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{elas,eq} - \sigma^{eq} = 3G\Delta p \quad (2.39)$$

Le développement au premier ordre de Taylor donne :

$$R(p + \Delta p) - R(p) = [(p + \Delta p) - (p)]R'(p) = (\Delta p)R'(p)$$

On trouve que :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}^{elas}, p) - f(\underline{\underline{\sigma}}, p + \Delta p) = 3G\Delta p + \Delta p R(p)' = (3G + R(p)')\Delta p$$

D'après la règle de la convexité de la surface de charge ($R(p)' \geq 0$), et la règle de la normalité ($\Delta p \geq 0$), il vient immédiatement :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}^{elas}, p) \geq f(\underline{\underline{\sigma}}, p + \Delta p)$$

La solution de l'équation (2.39) varie suivant l'évolution de la fonction de chargement :

- Si $\sigma^{eq} - R(p + \Delta p) < 0$, Evolution élastique, $\Delta p = 0$
- Si $\sigma^{eq} - R(p + \Delta p) = 0$, Evolution élastoplastique, $\Delta p \geq 0$ (par hypothèse)

Pour cette raison, il est commode de commencer par tester l'hypothèse d'une évolution purement élastique.

$$si f(\underline{\underline{\sigma}}^{elas}, p) < 0 \Rightarrow f(\underline{\underline{\sigma}}, p + \Delta p) < 0 \quad (2.40)$$

Dans le cas où la prédiction n'est pas correcte ($f(\underline{\underline{\sigma}}^{elas}, p) > 0$), alors la déformation totale n'est pas identique à la déformation élastique ($\Delta \underline{\underline{\varepsilon}} \neq \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^e$), il faut donc supposer que la déformation plastique et non nulle ($\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p \neq 0$, et $\Delta p > 0$).

D'après la règle de normalité, il sort :

$$\Delta p f(\underline{\underline{\sigma}}, p + \Delta p) = 0, \text{ et comme } \Delta p > 0, \text{ implique que : } f(\underline{\underline{\sigma}}, p + \Delta p) = 0$$

On constate que cette inégalité va faciliter la tâche plus loin pour la résolution numérique.

2.5. Matrice élastoplastique

Le but de ce paragraphe est de déterminer la matrice élastoplastique ou tenseur des raideurs suivant le comportement élastoplastique à écrouissage isotrope (linéaire ou non linéaire).

La méthode d'intégration utilisée dans le paragraphe précédent se base sur une formulation implicite directe. A partir de l'état initial, ou à partir de l'instant de calcul précédent, on calcule le champ de contraintes résultant d'un incrément de déformation.

Dans ce qui suit, on calcule l'opérateur tangent ou plus précisément la matrice élastoplastique.

2.5.1. Matrice élastique isotrope

La loi de Hook peut s'écrire incrémentale sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\Delta\sigma}} = 2G\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}^e + \lambda I \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}^e : I \quad (2.41)$$

Où plus succinctement, la relation (2.42) devient [Dune, 2005]:

$$\underline{\underline{\Delta\sigma}} = (2G\underline{\underline{I}} + \lambda I) : \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}^e \quad (2.42)$$

Où, $\underline{\underline{I}}$ et le tenseur d'identité de quatrième ordre avec les propriétés suivantes :

- $\underline{\underline{I}} : I = I : \underline{\underline{I}} = I$
- $\underline{\underline{I}} : \underline{\underline{\Delta\varepsilon}} = \underline{\underline{\Delta\varepsilon}} : \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}$

L'opérateur tangent ou la matrice élastique est le résultat du rapport de la dérivée partielle des contraintes et déformation. Dans notre programme en éléments finis, on utilisera les notations suivantes :

$$d\underline{\underline{\Delta\sigma}} = \frac{\partial \underline{\underline{\Delta\sigma}}}{\partial \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}} d\underline{\underline{\Delta\varepsilon}} \quad (2.43)$$

Ainsi, pour le calcul de la dérivée par rapport, cette fois, à la déformation de cisaillement, on écrit:

$$\frac{\partial \underline{\underline{\Delta\sigma}}_{11}}{\partial \underline{\underline{\Delta\gamma}}_{12}} = \frac{\partial \underline{\underline{\Delta\sigma}}_{11}}{\partial \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_{12}} \frac{\partial \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_{12}}{\partial \underline{\underline{\Delta\gamma}}_{12}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \underline{\underline{\Delta\sigma}}_{11}}{\partial \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_{12}}$$

La matrice élastique isotrope, pour un état de déformation plane ($\underline{\underline{\Delta\gamma}}_{13} = \underline{\underline{\Delta\gamma}}_{13} = 0$) est donnée par la relation (2.44).

$$\frac{\partial \Delta \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\sigma}}_{11}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{11}} & \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\sigma}}_{11}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{22}} & \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\sigma}}_{11}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{33}} & \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\sigma}}_{11}}{\partial \Delta \underline{\underline{\gamma}}_{12}} \\ \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\sigma}}_{22}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{11}} & \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\sigma}}_{22}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{22}} & \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\sigma}}_{22}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{33}} & \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\sigma}}_{22}}{\partial \Delta \underline{\underline{\gamma}}_{12}} \\ \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\sigma}}_{33}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{11}} & \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\sigma}}_{33}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{22}} & \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\sigma}}_{33}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{33}} & \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\sigma}}_{33}}{\partial \Delta \underline{\underline{\gamma}}_{12}} \\ \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\sigma}}_{12}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{11}} & \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\sigma}}_{12}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{22}} & \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\sigma}}_{12}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{33}} & \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\sigma}}_{12}}{\partial \Delta \underline{\underline{\gamma}}_{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2G + \lambda) & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & (2G + \lambda) & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & (2G + \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\frac{1}{2} 2G) \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

2.5.2. Matrice élastoplastique isotrope

Partons de l'équation (2.29), qui a comme expression :

$$(1 + 3G \frac{\Delta p}{\sigma^{eq}}) \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{s}}^{\text{élas}} \Rightarrow \delta \left[(1 + 3G \frac{\Delta p}{\sigma^{eq}}) \underline{\underline{s}} \right] = \delta \left[\underline{\underline{s}}^{\text{élas}} \right]$$

On trouve :

$$(1 + 3G \frac{\Delta p}{\sigma^{eq}}) \delta(\underline{\underline{s}}) - 3G \frac{\Delta p}{\sigma^{eq}{}^2} \underline{\underline{s}} \delta(\sigma^{eq}) + \frac{3G}{\sigma^{eq}} \underline{\underline{s}} \delta(\Delta p) = \delta(\underline{\underline{s}}^{\text{élas}}) \quad (2.45)$$

De la même manière pour l'équation (2.31) :

$$\delta(\sigma^{eq}) + 3G \delta(\Delta p) = \delta(\sigma^{\text{élas}, eq}) \quad (2.46)$$

Pour l'équation de la fonction de charge, il vient de même :

$$\delta f(\underline{\underline{\sigma}}, p + \Delta p) = \delta(\sigma^{eq}) - \delta R(p + \Delta p) = 0$$

or :

$$\delta R(p + \Delta p) = \frac{\partial R(p + \Delta p)}{\Delta p} \delta \Delta p$$

Qui donne :

$$\delta(\sigma^{eq}) = R' \delta(\Delta p) \quad (2.47)$$

$$\text{avec : } R'(p + \Delta p) = R' = \frac{\partial R(p + \Delta p)}{\Delta p}$$

Remplaçons l'expression de $\delta(\sigma^{eq})$ dans l'équation (2.46), donc:

$$R' \delta(\Delta p) + 3G\delta(\Delta p) = \delta(\sigma^{\text{élas},eq}), \text{ et on obtient :}$$

$$\delta(\Delta p) = \frac{\delta(\sigma^{\text{élas},eq})}{R' + 3G} \quad (2.48)$$

L'équation (2.47) combinée avec l'équation (2.48), donne l'égalité suivante :

$$\delta(\sigma^{eq}) + 3G\delta(\Delta p) = \delta(\sigma^{eq}) + 3G \frac{\delta(\sigma^{\text{élas},eq})}{R' + 3G} = \delta(\sigma^{\text{élas},eq})$$

d'où:

$$\delta(\sigma^{eq}) = \delta(\sigma^{\text{élas},eq}) \left[1 - \frac{3G}{R' + 3G} \right] \quad (2.49)$$

Et comme :

$$\sigma^{\text{élas},eq} = \sigma^{eq} + 3G\Delta p \Rightarrow 3G \frac{\Delta p}{\sigma^{eq}} = \frac{\sigma^{\text{élas},eq}}{\sigma^{eq}} - 1 \Rightarrow 3G \frac{\Delta p}{\sigma^{eq}} + 1 = \frac{\sigma^{\text{élas},eq}}{\sigma^{eq}}$$

Il sort :

$$\left(1 + 3G \frac{\Delta p}{\sigma^{eq}} \right) = \frac{\sigma^{\text{élas},eq}}{\sigma^{eq}} \quad (2.50)$$

$$\text{D'après l'équation (2.50) : } \left(1 + 3G \frac{\Delta p}{\sigma^{eq}} \right) = \frac{\sigma^{\text{élas},eq}}{\sigma^{eq}}$$

$$\text{D'après l'équation (2.49) : } 3G \frac{\Delta p}{\sigma^{eq}{}^2} \underline{s} \delta(\sigma^{eq}) = 3G \frac{\Delta p}{\sigma^{eq}{}^2} \underline{s} \left[1 - \frac{3G}{R' + 3G} \right] \delta(\sigma^{\text{élas},eq}), \text{ et :}$$

$$\text{D'après l'équation (2.48) : } \frac{3G}{\sigma^{eq}} \underline{s} \delta(\Delta p) = \frac{3G}{\sigma^{eq}} \underline{s} \frac{1}{R' + 3G} \delta(\sigma^{\text{élas},eq})$$

L'équation (2.45), devient :

$$\frac{\sigma^{\text{élas},eq}}{\sigma^{eq}} \delta(\underline{s}) + \frac{3G\Delta p}{\sigma^{eq}{}^2} \underline{s} \left[\frac{R'}{R' + 3G} \right] \delta(\sigma^{\text{élas},eq}) + \frac{3G}{\sigma^{eq}} \underline{s} \frac{1}{R' + 3G} \delta(\sigma^{\text{élas},eq}) = \delta(\underline{s}^{\text{élas}})$$

$$\frac{\sigma^{\text{élas},eq}}{\sigma^{eq}} \delta(\underline{s}) + \frac{3G}{\sigma^{eq}{}^2} \underline{s} \left[\frac{1}{R' + 3G} \right] [\sigma^{eq} - R' \Delta p] \delta(\sigma^{\text{élas},eq}) = \delta(\underline{s}^{\text{élas}})$$

Il reste à déterminer l'expression de $[\sigma^{eq} - R' \Delta p]$.

De l'équation (2.31), on peut écrire que :

$$\sigma^{eq} = \sigma^{\acute{e}las,eq} - 3G\Delta p \Rightarrow \sigma^{eq} - R' \Delta p = \sigma^{\acute{e}las,eq} - 3G\Delta p - R' \Delta p$$

$$\sigma^{eq} - R' \Delta p = \sigma^{\acute{e}las,eq} - (3G + R')\Delta p = \sigma^{\acute{e}las,eq} - (3G + R')\left(\frac{\sigma^{\acute{e}las,eq} - \sigma^{eq}}{3G}\right)$$

Finalement on trouve :

$$\sigma^{eq} - R' \Delta p = \frac{-R' \sigma^{\acute{e}las,eq} + (3G + R')\sigma^{eq}}{3G}$$

d'où :

$$\frac{\sigma^{\acute{e}las,eq}}{\sigma^{eq}} \delta(\underline{s}) + \frac{3G}{\sigma^{eq}{}^2} \underline{s} \left[\frac{1}{R' + 3G} \right] \left[\frac{-R' \sigma^{\acute{e}las,eq} + (3G + R')\sigma^{eq}}{3G} \right] \delta(\sigma^{\acute{e}las,eq}) = \delta(\underline{s}^{\acute{e}las})$$

A la fin, on abouti à la relation suivante :

$$\frac{\sigma^{\acute{e}las,eq}}{\sigma^{eq}} \delta(\underline{s}) + \frac{\underline{s}}{(\sigma^{eq})^2} \left[\sigma^{eq} - \frac{\sigma^{\acute{e}las,eq}}{1 + \left(\frac{3G}{R'}\right)} \right] \delta(\sigma^{\acute{e}las,eq}) = \delta(\underline{s}^{\acute{e}las}) \quad (2.51)$$

Il reste à déterminer l'expression de $\delta(\sigma^{\acute{e}las,eq})$.

$$\begin{aligned} \delta(\sigma^{\acute{e}las,eq}) &= \delta\left(\frac{3}{2} \underline{\sigma}^{\acute{e}las} : \underline{\sigma}^{\acute{e}las}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \underline{\sigma}^{\acute{e}las} : \underline{\sigma}^{\acute{e}las}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2} \delta \underline{\sigma}^{\acute{e}las} : \underline{\sigma}^{\acute{e}las} + \frac{3}{2} \underline{\sigma}^{\acute{e}las} : \delta \underline{\sigma}^{\acute{e}las}\right) \\ \delta(\sigma^{\acute{e}las,eq}) &= \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma^{\acute{e}las,eq}} \underline{\sigma}^{\acute{e}las} : \delta \underline{\sigma}^{\acute{e}las} \end{aligned} \quad (2.52)$$

En reportant l'expression de l'équation (2.52), dans l'équation (2.51), on retrouve :

$$\delta(\underline{s}) = \frac{\sigma^{eq}}{\sigma^{\acute{e}las,eq}} \delta(\underline{s}^{\acute{e}las}) + \frac{3}{2} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{3G}{R'}\right)} - \frac{\sigma^{eq}}{\sigma^{\acute{e}las,eq}} \right] \frac{\underline{s}^{\acute{e}las}}{\sigma^{\acute{e}las,eq}} \frac{\underline{s}^{\acute{e}las}}{\sigma^{\acute{e}las,eq}} : \delta(\underline{s}^{\acute{e}las}) \quad (2.53)$$

On pose :

$$\Omega = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{3G}{R}\right)} - \frac{\sigma^{eq}}{\sigma^{\acute{e}las,eq}} \right] \text{ et } R = \frac{\sigma^{eq}}{\sigma^{\acute{e}las,eq}}$$

L'équation (2.53), devient :

$$\delta(\underline{\underline{s}}) = \left(\Omega \frac{\underline{\underline{s}}^{\acute{e}las}}{\sigma^{\acute{e}las,eq}} \frac{\underline{\underline{s}}^{\acute{e}las}}{\sigma^{\acute{e}las,eq}} + R\mathbb{I} \right) : \delta(\underline{\underline{s}}^{\acute{e}las}) \quad (2.54)$$

Mais, ce que nous cherchons en juste c'est la relation qui existe entre $(\delta\underline{\underline{\sigma}})$ et $(\delta\underline{\underline{\varepsilon}})$ pour atteindre notre objectif fondamental, et qui est la détermination de la matrice élastoplastique.

Pour cette raison nous suivrons les étapes suivantes :

$$\delta(\underline{\underline{s}}^{\acute{e}las}) = 2G(\delta(\underline{\underline{\varepsilon}}^e) - \frac{1}{3}II : \delta(\underline{\underline{\varepsilon}}^e))$$

Partant de la condition d'incompressibilité, il vient :

$$\delta\underline{\underline{\varepsilon}}^e \equiv \delta\underline{\underline{\varepsilon}}$$

Donc, on aura :

$$\delta(\underline{\underline{s}}^{\acute{e}las}) = 2G(\delta(\underline{\underline{\varepsilon}}) - \frac{1}{3}II : \delta(\underline{\underline{\varepsilon}})) \quad (2.55)$$

Remplaçons cette expression dans l'équation (2.54).

$$\begin{aligned} \delta(\underline{\underline{s}}) &= \left(\Omega \frac{\underline{\underline{s}}^{\acute{e}las}}{\sigma^{\acute{e}las,eq}} \frac{\underline{\underline{s}}^{\acute{e}las}}{\sigma^{\acute{e}las,eq}} + R\mathbb{I} \right) : \left(2G(\delta(\underline{\underline{\varepsilon}}) - \frac{1}{3}II : \delta(\underline{\underline{\varepsilon}})) \right) \\ \delta(\underline{\underline{s}}) &= 2G\Omega \frac{\underline{\underline{s}}^{\acute{e}las}}{\sigma^{\acute{e}las,eq}} \frac{\underline{\underline{s}}^{\acute{e}las}}{\sigma^{\acute{e}las,eq}} : \delta(\underline{\underline{\varepsilon}}) - \frac{1}{3}\Omega \frac{\underline{\underline{s}}^{\acute{e}las}}{\sigma^{\acute{e}las,eq}} \frac{\underline{\underline{s}}^{\acute{e}las}}{\sigma^{\acute{e}las,eq}} : (II : \delta(\underline{\underline{\varepsilon}})) + 2GR\delta(\underline{\underline{\varepsilon}}) \\ &\quad - \frac{2}{3}GR\mathbb{I} : (II : \delta(\underline{\underline{\varepsilon}})) \end{aligned}$$

Et comme, $\underline{\underline{s}}^{\acute{e}las}$ est un tenseur déviatorique, on aura donc :

$$\frac{\underline{\underline{s}}^{\acute{e}las}}{\sigma^{\acute{e}las,eq}} \frac{\underline{\underline{s}}^{\acute{e}las}}{\sigma^{\acute{e}las,eq}} : (II : \delta(\underline{\underline{\varepsilon}})) = \frac{\underline{\underline{s}}^{\acute{e}las}}{\sigma^{\acute{e}las,eq}} \frac{\underline{\underline{s}}^{\acute{e}las}}{\sigma^{\acute{e}las,eq}} : ITr\delta(\underline{\underline{\varepsilon}}) = 0$$

d'où :

$$\delta(\underline{\underline{s}}) = 2G\Omega \frac{\underline{\underline{s}}^{\text{élas}}}{\sigma^{\text{élas},eq}} \frac{\underline{\underline{s}}^{\text{élas}}}{\sigma^{\text{élas},eq}} : \delta(\underline{\underline{\varepsilon}}) + 2GR\delta(\underline{\underline{\varepsilon}}) - \frac{2}{3}GRII : (\underline{\underline{II}} : \delta(\underline{\underline{\varepsilon}})) \quad (2.56)$$

et, comme :

$$\delta(\underline{\underline{\sigma}}) = \delta(\underline{\underline{s}}) + \frac{1}{3}II : \delta(\underline{\underline{\sigma}}) = \delta(\underline{\underline{s}}) + KII : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \delta(\underline{\underline{s}}) + KII(\delta(\underline{\underline{\varepsilon}}) - \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^p)$$

et :

$KII\delta\underline{\underline{\varepsilon}}^p = 0$, la variation de la contrainte s'écrit :

$$\delta(\underline{\underline{\sigma}}) = \delta(\underline{\underline{s}}) + KII\delta(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

L'expression de l'équation (2.56), devient :

$$\delta(\underline{\underline{\sigma}}) = 2G\Omega \frac{\underline{\underline{s}}^{\text{élas}}}{\sigma^{\text{élas},eq}} \frac{\underline{\underline{s}}^{\text{élas}}}{\sigma^{\text{élas},eq}} : \delta(\underline{\underline{\varepsilon}}) + 2GR\delta(\underline{\underline{\varepsilon}}) + (K - \frac{2}{3}GR)II : \delta(\underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (2.57)$$

Ainsi, la contrainte s'écrit en fonction de la déformation, d'où le tenseur des raideurs est totalement identifié. L'équation (2.57) peut être réécrite sous la forme condensée suivante :

$$\delta(\underline{\underline{\sigma}}) = 2G\Omega \frac{\underline{\underline{s}}^{\text{élas}}}{\sigma^{\text{élas},eq}} \frac{\underline{\underline{s}}^{\text{élas}}}{\sigma^{\text{élas},eq}} : \delta(\underline{\underline{\varepsilon}}) + 2GR\delta(\underline{\underline{\varepsilon}}) + (K - \frac{2}{3}GR)II : \delta(\underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (2.58)$$

Finalement, à partir de l'équation (2.57), ou de l'équation (2.58), nous pouvons déterminer la matrice tangente élastoplastique. Voici les termes de notre matrice élastoplastique :

$$\begin{aligned} \delta\underline{\underline{\sigma}}_{11} = 2G\Omega \frac{\underline{\underline{s}}_{11}^{\text{élas}}}{(\sigma^{\text{élas},eq})^2} & \left[\underline{\underline{s}}_{11}^{\text{élas}} \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{11} + \underline{\underline{s}}_{22}^{\text{élas}} \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{22} + \underline{\underline{s}}_{33}^{\text{élas}} \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{33} + 2\underline{\underline{s}}_{12}^{\text{élas}} \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{12} \right. \\ & \left. + 2\underline{\underline{s}}_{13}^{\text{élas}} \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{13} + \underline{\underline{s}}_{23}^{\text{élas}} \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{23} \right] + 2GR\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{11} + (K - \frac{2}{3}GR)(\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{11} + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{22} + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{33}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\underline{\underline{\sigma}}_{22} = 2G\Omega \frac{\underline{\underline{s}}_{22}^{\text{élas}}}{(\sigma^{\text{élas},eq})^2} & \left[\underline{\underline{s}}_{11}^{\text{élas}} \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{11} + \underline{\underline{s}}_{22}^{\text{élas}} \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{22} + \underline{\underline{s}}_{33}^{\text{élas}} \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{33} + 2\underline{\underline{s}}_{12}^{\text{élas}} \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{12} \right. \\ & \left. + 2\underline{\underline{s}}_{13}^{\text{élas}} \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{13} + \underline{\underline{s}}_{23}^{\text{élas}} \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{23} \right] + 2GR\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{22} + (K - \frac{2}{3}GR)(\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{11} + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{22} + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{33}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \underline{\underline{\sigma}}_{33} = & 2G\Omega \frac{\underline{\underline{s}}_{33}^{\text{élas}}}{(\sigma^{\text{élas,eq}})^2} \left[\underline{\underline{s}}_{11}^{\text{élas}} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{11} + \underline{\underline{s}}_{22}^{\text{élas}} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{22} + \underline{\underline{s}}_{33}^{\text{élas}} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{33} + 2\underline{\underline{s}}_{12}^{\text{élas}} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{12} \right. \\ & \left. + 2\underline{\underline{s}}_{13}^{\text{élas}} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{13} + \underline{\underline{s}}_{23}^{\text{élas}} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{23} \right] + 2GR \delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{33} + \left(K - \frac{2}{3}GR \right) (\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{11} + \delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{22} + \delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{33}) \end{aligned}$$

Les termes de la matrice élastoplastique pour un état de déformation plane

$$\delta \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{11} \\ \delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{22} \\ (\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{33} = 0) \\ \delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{12} \end{pmatrix}, \text{ sont donnés par :}$$

$$\mathcal{A}_{11}^{EP} = \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{11}}{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{11}} = 2G\Omega \frac{(\underline{\underline{s}}_{11}^{\text{élas}})^2}{(\sigma^{\text{élas,eq}})^2} + 2GR + \left(K - \frac{2}{3}GR \right)$$

$$\mathcal{A}_{12}^{EP} = \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{11}}{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{22}} = 2G\Omega \frac{(\underline{\underline{s}}_{11}^{\text{élas}})(\underline{\underline{s}}_{22}^{\text{élas}})}{(\sigma^{\text{élas,eq}})^2} + \left(K - \frac{2}{3}GR \right)$$

$$\mathcal{A}_{13}^{EP} = \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{11}}{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{33}} = 2G\Omega \frac{(\underline{\underline{s}}_{11}^{\text{élas}})(\underline{\underline{s}}_{33}^{\text{élas}})}{(\sigma^{\text{élas,eq}})^2} + \left(K - \frac{2}{3}GR \right)$$

$$\mathcal{A}_{14}^{EP} = \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{11}}{\delta \underline{\underline{\gamma}}_{12}} = \frac{1}{2} \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{11}}{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{12}} = 2G\Omega \frac{(\underline{\underline{s}}_{11}^{\text{élas}})(\underline{\underline{s}}_{12}^{\text{élas}})}{(\sigma^{\text{élas,eq}})^2}$$

$$\mathcal{A}_{22}^{EP} = \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{22}}{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{22}} = 2G\Omega \frac{(\underline{\underline{s}}_{22}^{\text{élas}})^2}{(\sigma^{\text{élas,eq}})^2} + 2GR + \left(K - \frac{2}{3}GR \right)$$

$$\mathcal{A}_{21}^{EP} = \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{22}}{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{11}} = 2G\Omega \frac{(\underline{\underline{s}}_{22}^{\text{élas}})(\underline{\underline{s}}_{11}^{\text{élas}})}{(\sigma^{\text{élas,eq}})^2} + \left(K - \frac{2}{3}GR \right) = \mathcal{A}_{12}^{EP}$$

$$\mathcal{A}_{23}^{EP} = \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{22}}{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{33}} = 2G\Omega \frac{(\underline{\underline{s}}_{22}^{\text{élas}})(\underline{\underline{s}}_{33}^{\text{élas}})}{(\sigma^{\text{élas,eq}})^2} + \left(K - \frac{2}{3}GR \right)$$

$$\mathcal{A}_{24}^{EP} = \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{22}}{\delta \underline{\underline{\gamma}}_{12}} = \frac{1}{2} \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{22}}{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{12}} = 2G\Omega \frac{(\underline{\underline{s}}_{22}^{\text{élas}})(\underline{\underline{s}}_{12}^{\text{élas}})}{(\sigma^{\text{élas,eq}})^2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{33}^{EP} &= \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{33}}{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{33}} = 2G\Omega \frac{(\underline{\underline{s}}_{33}^{elas})^2}{(\sigma^{elas,eq})^2} + 2GR + \left(K - \frac{2}{3}GR\right) \\ \mathcal{A}_{31}^{EP} &= \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{33}}{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{11}} = 2G\Omega \frac{(\underline{\underline{s}}_{33}^{elas})(\underline{\underline{s}}_{11}^{elas})}{(\sigma^{elas,eq})^2} + \left(K - \frac{2}{3}GR\right) = \mathcal{A}_{13}^{EP} \\ \mathcal{A}_{32}^{EP} &= \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{33}}{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{22}} = 2G\Omega \frac{(\underline{\underline{s}}_{33}^{elas})(\underline{\underline{s}}_{22}^{elas})}{(\sigma^{elas,eq})^2} + \left(K - \frac{2}{3}GR\right) = \mathcal{A}_{23}^{EP} \\ \mathcal{A}_{34}^{EP} &= \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{33}}{\delta \underline{\underline{\gamma}}_{12}} = \frac{1}{2} \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{33}}{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{12}} = 2G\Omega \frac{(\underline{\underline{s}}_{33}^{elas})(\underline{\underline{s}}_{12}^{elas})}{(\sigma^{elas,eq})^2} \\ \mathcal{A}_{44}^{EP} &= \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{12}}{\delta \underline{\underline{\gamma}}_{12}} = \frac{1}{2} \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{12}}{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{12}} = \frac{1}{2} \left[4G\Omega \frac{(\underline{\underline{s}}_{12}^{elas})^2}{(\sigma^{elas,eq})^2} + 2GR \right] = 2G\Omega \frac{(\underline{\underline{s}}_{12}^{elas})^2}{(\sigma^{elas,eq})^2} + GR \end{aligned}$$

La matrice élastoplastique pour un état de déformation plane est donnée par :

$$[\mathcal{A}^{EP}] = \frac{\partial \delta \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \delta \underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{11}}{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{11}} & \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{11}}{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{22}} & \frac{1}{2} \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{11}}{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{12}} \\ \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{22}}{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{11}} & \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{22}}{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{22}} & \frac{1}{2} \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{22}}{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{12}} \\ \frac{1}{2} \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{11}}{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{12}} & \frac{1}{2} \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{22}}{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{12}} & \frac{1}{2} \frac{\delta \underline{\underline{\sigma}}_{12}}{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11}^{EP} & \mathcal{A}_{12}^{EP} & \mathcal{A}_{14}^{EP} \\ \mathcal{A}_{12}^{EP} & \mathcal{A}_{22}^{EP} & \mathcal{A}_{24}^{EP} \\ \mathcal{A}_{14}^{EP} & \mathcal{A}_{24}^{EP} & \mathcal{A}_{44}^{EP} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

2.6. Conclusion

La méthode de retour radial est une méthode d'intégration fiable des relations implicites de Von Misès, car partant d'une prédiction élastique linéaire isotrope avec une correction plastique nous aboutissons à une relation élastoplastique entre contraintes et déformations.

Ainsi, cette méthode va être utilisée dans la modélisation du comportement des géomatériaux utilisés dans le présent mémoire.

3.1. Introduction

La prévision du comportement statique ou dynamique des structures et géomatériaux a complètement changé depuis que la méthode des éléments finis (MEF) est pleinement opérationnelle, et dont l'emploi a été considérablement facilité par le développement de pré et de post processeurs de plus en plus efficace et intelligents.

La résolution par la méthode élément finis est l'une des méthodes les plus utilisées pour analyser le comportement des systèmes physiques. Elle consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations différentielles en équations algébriques. La réponse est obtenue par des méthodes de résolutions dynamiques non linéaires telles que la méthode de Newton avec l'utilisation d'un schéma d'intégration temporel de Newmark.

On présentera dans ce chapitre, une brève présentation de la méthode des éléments fins et son application. Nous exposerons les démarches pour la détermination des matrices de masses et de rigidité, et à la fin nous donnerons les méthodes de résolution des équations d'équilibres pour le cas non linéaire.

3.2. Modélisation géométrique

3.2.1. Aperçu général de la méthode des éléments finis

3.2.1.1. Eléments finis

La méthode des éléments finis est une technique particulière d'approximation qui consiste à transformer les équations différentielles du problème physique en un système linéaire fini d'équations algébriques, par l'application du principe des travaux virtuels.

Le milieu réel Ω est remplacé par un milieu supposé équivalent contenu dans un contour polygonal, le plus proche possible du contour réel (Fig. 3.1). Ce milieu équivalent Ω' est ensuite partagé en sous domaines Ω^e , appelés : éléments finis. L'inconnue du problème (champ de déplacement), dans chaque élément fini, est déterminée par une interpolation polynomiale entre les valeurs du champ en certains points de l'élément, appelés : *nœuds*. La position des nœuds et le degré des polynômes sont choisis de sorte que le champ inconnu soit suffisamment continu sur l'ensemble des éléments [Imbert, 1995].

Cette méthode tente de représenter une fonction dite exacte $\vec{u}(\vec{x}, t)$, sur une structure Ω , par une fonction approchée $\vec{u}_i^e(\vec{x}, t)$ sur un élément fini Ω^e souvent sous la forme, pour tout point de l'élément Ω^e :

$$\vec{u}_i^e(\vec{x}, t) = \sum_{j=1} P_{ij}^e(\vec{x}) \cdot a_j^e(t) \tag{3.1}$$

Où $P_{ij}^e(\vec{x})$ sont des fonctions connues, linéairement indépendantes, définies pour chaque élément fini, tels que des polynômes ou des fonctions trigonométriques. Les variables $a_j^e(t)$ sont des fonctions du temps, inconnues et appelées : variables généralisées

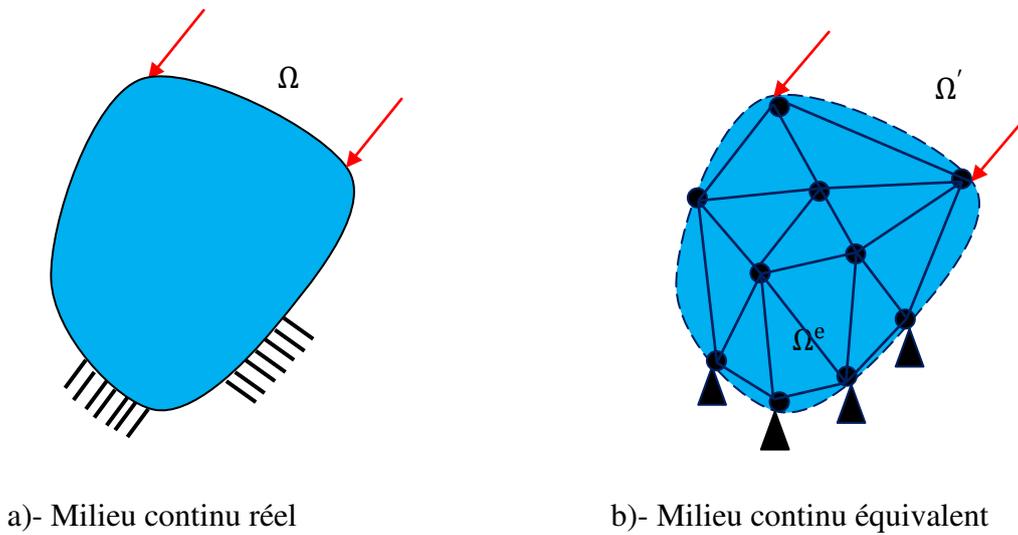


Fig. 3.1- Discretisation d'une structure.

En supposant que la fonction approchée coïncide avec la fonction exacte aux n nœuds, il sort :

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}^e(\vec{x}_1, t) &= \vec{U}_1^e(t) \\ \dots \dots \dots \\ \vec{u}^e(\vec{x}_i, t) &= \vec{U}_i^e(t) \\ \dots \dots \dots \\ \vec{u}^e(\vec{x}_n, t) &= \vec{U}_n^e(t) \end{aligned} \right\} \tag{3.2}$$

La relation (3.1), peut s'écrire sous une autre forme :

$$\vec{u}_i^e(\vec{x}, t) = \sum_{j=1} N_{ij}^e(\vec{x}) \cdot \vec{U}_j^e(t) \tag{3.3}$$

Cette approximation possède deux propriétés fondamentales :

$$N_{ij}^e(\vec{x}_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ 1 & \text{si } k = j \end{cases} \quad (3.4)$$

La fonction $N_{ij}^e(\vec{x})$, est appelée *fonction d'interpolation* définie pour chaque élément fini, tandis que la fonction $\vec{U}_j^e(t)$ est appelée variable nodale et représente la valeur de la fonction $\vec{u}(\vec{x}, t)$ en chaque nœud.

La relation (3.3), définit ce qu'on appelle une approximation nodale. Cette approximation présente les particularités suivantes :

- L'approximation nodale sur chaque élément Ω^e , ne fait intervenir que les variables nodales attachées à des nœuds situés sur l'élément Ω^e et sur sa frontière.
- Les fonctions approchées sont construites de manière à être continues sur chaque élément Ω^e et satisfaire les conditions de continuité entre les différents éléments finis.

3.2.1.2. Élément de référence

Le type d'élément utilisé, pour la subdivision de la structure, dépend en général de la géométrie de celle-ci. Il existe un grand nombre de types d'éléments, chacun ayant des avantages et des inconvénients. Pour l'analyse des structures bidimensionnelles, les éléments choisis sont souvent des éléments triangulaires ou quadratiques ou un élément unidimensionnel poutre. Nous retiendrons dans cette étude, l'éléments triangulaire linéaire isoparamétrique¹, et pour des simplifications de calculs l'élément poutre (Fig. 3.2). Ce choix est justifié par le fait que celui-ci peut être utilisé pour l'étude de structures de formes irrégulière (variées) en représentant mieux les déplacements aux frontières des éléments avec moins d'inconnus [Rockey et al, 1997], et pour l'élément unidimensionnel, l'élément poutre est l'élément le plus utilisé dans ce cas.

¹ Un élément isoparamétrique est un élément dont lequel les nœuds géométriques sont confondus avec les nœuds d'interpolation.

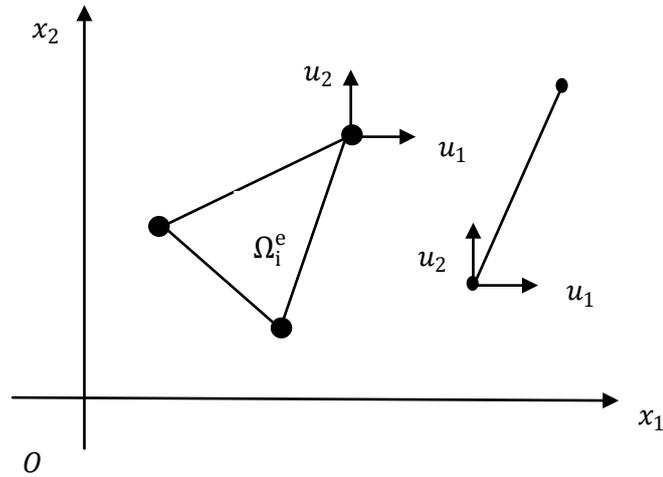
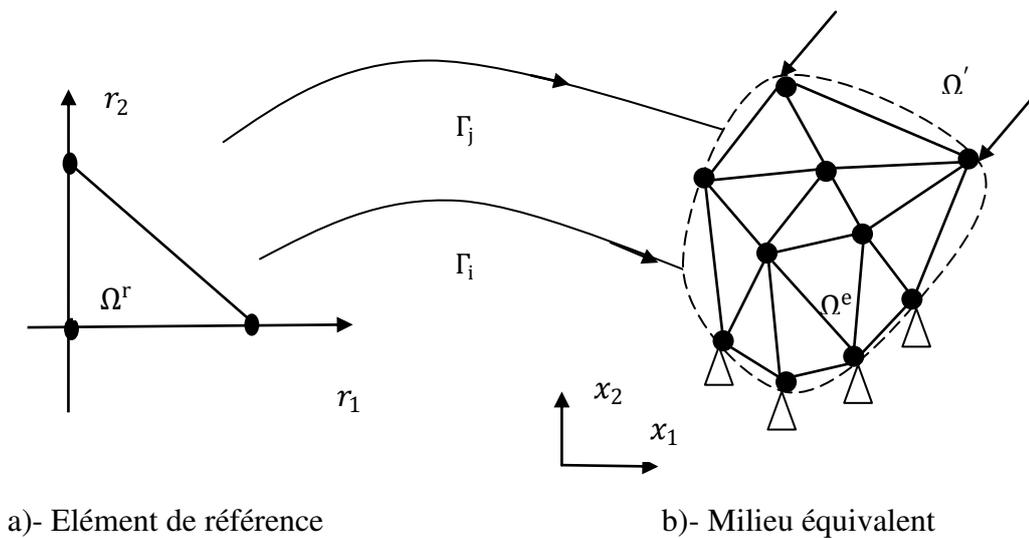


Fig. 3.2- Elément triangulaire et élément poutre linéaires isoparamétriques.

Pour simplifier la définition analytique de ces éléments, nous introduisons la notion d'élément de référence. Un élément de référence Ω^r , est un élément de forme simple (triangle ou poutre console dans notre cas), repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel Ω^e à l'aide d'une transformation géométrique Γ . Cette transformation dépend de la forme et de la position de l'élément réel, dans les coordonnées des nœuds géométriques qui le définissent, il ya donc une transformation Γ différente pour chaque élément réel (Fig. 3.3).

Grâce à cette transformation, on remplacera la définition des fonctions d'interpolations dans chaque élément par une définition générale et unique des fonctions d'interpolation dans l'élément de référence en effectuant un changement de variable.



a)- Elément de référence

b)- Milieu équivalent

Fig. 3.3- Approximation sur l'élément de référence.

3.2.1.3. Expression approchée des champs des déplacements

La méthode des éléments finis permet de définir, pour chaque élément Ω_i^e , une approximation nodale des champs $\vec{u}_i^e(\vec{x}, t)$ en fonction des fonctions d'interpolations $N_{ij}^e(\vec{x})$ et des déplacements nodaux $\vec{U}_j^e(t)$.

L'équation (3.3), peut être réécrite sous forme matricielle :

$$\vec{u}_i^e = \underline{N}_i^e \cdot \vec{U}_j^e \quad (3.5)$$

Avec \underline{N}_i^e étant la matrice d'interpolation définie dans l'élément Ω_i^e .

Dans l'élément de référence Ω^r , l'approximation (2.3) s'écrit :

$$\vec{u}^r = \underline{N}^r \cdot \vec{U}^e \quad (3.6)$$

Ou \underline{N}^r étant la matrice d'interpolation définie dans l'élément de référence Ω^r .

Dans un problème de déformation plane, l'élément possède deux degrés de liberté en chaque nœud, ce qui fait un total de 6 degrés de liberté par élément pour une représentation matricielle, la forme matricielle de la fonction d'interpolation sera :

$$\underline{N}_i^e = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

3.2.1.4. Expression approchée du champ des déformations

En déformations planes, le champ des déformations $\vec{\varepsilon}(\vec{x}, t)$ est constitué de trois composantes :

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

La relation entre la déformation et les déplacements dans chaque élément Ω_i^e , peut s'exprimer sous la forme matricielle suivante :

$$\vec{\varepsilon}_i^e = \underline{\Pi}_i^e \cdot \vec{u}_i^e \quad (3.9)$$

où :

$$\underline{\Pi}_i^e(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

En substituant (3.5) dans (3.9), on aura :

$$\vec{\varepsilon}_i^e = \underline{B}_i^e \cdot \vec{U}_i^e \quad (3.11)$$

avec

$$\underline{B}_i^e(\vec{x}) = \underline{\Pi}_i^e \cdot \underline{N}_i^e \quad (3.12)$$

3.2.1.5. Transformation d'une intégrale

Les équations du mouvement sont évaluées sur l'élément réel et font intervenir des intégrations en x_i . Comme l'approximation sur l'élément réel est souvent complexe, nous utiliserons systématiquement l'approximation (3.6) sur l'élément de référence.

L'intégration d'un champ \vec{A} sur l'élément réel peut s'effectuer par une intégration plus simple sur l'élément de référence en effectuant un changement de variables selon la relation [Piscounov, 1966] :

$$\int_{\Omega_i^e} \vec{A}(\vec{x}, t) \cdot dv = \int_{\Omega^r} \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \det J_i \, dv \quad (3.13)$$

où :

$$\int_{\Omega^r} \vec{A}(\vec{r}, t) \, dv = \int_0^1 \int_0^{1-r_1} \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot dr_1 dr_2 \quad (3.14)$$

et $\det J_i$, est le déterminant de la matrice Jacobienne dans l'élément i , tel que :

$$\det J_i = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \quad (3.15)$$

3.2.1.6. Intégration numérique – méthode de Gauss

Vue le nombre d'intégration à effectuer et la difficulté de les calculer analytiquement (pour des éléments de références de degrés de liberté plus élevés), une résolution numérique est préférée. La méthode de Gauss, à r points d'intégration, intègre exactement un polynôme d'ordre $m \leq 2r - 1$. Elle consiste à remplacer l'intégrale d'une fonction polynomiale $f(x_1, x_2)$ par une combinaison linéaire de ses valeurs aux points d'intégrations.

Dans l'élément de référence, la méthode de Gauss s'exprime :

$$\int_0^1 \int_0^{1-r_1} f(x_1, x_2) \cdot dx_1 dx_2 = \sum_{i=1}^r w_i f(x_{1i}, x_{2i}) \quad (3.16)$$

Dans laquelle w_i sont les coefficients de pondération donnés dans le tableau suivant [Dhatt et al, 1984].

Tableau 3.1- Coefficient de pondération - Méthode de Hamner [Dhatt et al, 1984].

m	r	x_{1i}	x_{2i}	w_i
1	1	1/3	1/3	1/2
2	3	1/2	1/2	1/6
		0	1/2	
		1/2	0	
2	3	1/6	1/6	1/6
		2/3	1/6	
		1/6	2/3	
3	4	1/3	1/3	-27/96
		1/5	1/5	25/96
		3/5	1/5	25/96
		1/5	3/5	25/96

3.3. Formulation des équations du mouvement

3.3.1. Principe des travaux virtuels

La loi de la dynamique qui peut être écrite sous sa forme vectorielle classique $\vec{F} = m\vec{a}$, généralisation de la formule de Newton, peut également être abordée en caractérisant les efforts par une quantité scalaire liée à la puissance développée par ces efforts.

L'idée donne naissance au principe des puissances virtuels (PPV), qui repose sur le principe de mécanique « un corps est un équilibre équivaut à dire que la puissance totale développée lors d'un mouvement test ou virtuels quelconque est nulle » [Maheo, 2006].

Si \vec{u} est le déplacement d'une particule, le travail particulaire dW de la force \vec{dF} qui lui est appliqué est donné par :

$$dW = \langle \vec{u} \rangle \cdot \vec{dF} \quad (3.17)$$

Pour le système matériel Ω , le travail total W est la somme des travaux individuels de toutes les particules qui le constituent, soit donc :

$$W = \int_{\Omega} \langle \vec{u} \rangle \cdot \vec{dF} \quad (3.18)$$

Ce principe exprime les relations existant entre l'ensemble des forces extérieures et les forces intérieures correspondantes satisfaisant ensemble la condition d'équilibre.

Le principe des travaux virtuels peut être posé de la façon suivante : le travail virtuel total W^* d'un système matériel Ω soumis à un déplacement virtuel \vec{u}^* est nul. Mathématiquement, ce principe aura la relation suivante :

$$W^* = \int_{\Omega} \langle \vec{u}^* \rangle \cdot \vec{dF} = 0 \quad (3.19)$$

D'après le principe des travaux virtuels, on a :

$$W^* \approx \sum_{i=1} W_i^* = 0 \quad (3.20)$$

Le travail virtuel élémentaire total W_i^* dans l'élément Ω_i^e , s'exprime par :

$$W_i^* = W_{i,Ext}^* + W_{i,Ine}^* + W_{i,Int}^* \quad (3.21)$$

avec :

$W_{i,Ext}^*$ est le travail virtuel élémentaire des forces extérieures, $W_{i,Ine}^*$ le travail élémentaire des forces d'inerties et $W_{i,Int}^*$ le travail virtuel élémentaire intérieur.

Ces derniers peuvent être évalués à l'aide des expressions suivante [Maheo, 2006] :

$$W_{i,Ine}^* = - \int_{\Omega_i^e} \langle \vec{u}_i^* \rangle \cdot \rho_i \vec{a}_i dv \quad (3.22)$$

$$W_{i,Int}^* = - \int_{\Omega_i^e} \langle \vec{\varepsilon}_i^* \rangle \cdot \vec{\sigma}_i dv \quad (3.23)$$

$$W_{i,Ext}^* = \int_{\Omega_i^e} \langle \vec{u}_i^* \rangle \cdot \rho_i \vec{f}_v dv + \int_{\partial\Omega_i^e} \langle \vec{u}_i^* \rangle \cdot \vec{T} ds \quad (3.24)$$

3.3.2. Principe de Hamilton

Le principe de Hamilton, qui résulte de la conservation de l'énergie, est l'un des principes les plus généraux de la mécanique. Il fournit des moyens pour trouver les équations d'équilibre (équations du mouvement) d'un système dynamique en déterminant la valeur stationnaire d'une intégrale scalaire. D'après ce principe, la variation de l'énergie cinématique et l'énergie potentielle plus la variation du travail effectué par les forces externes non conservatives agissant pendant n'importe quel intervalle de temps doivent être nulle [Dunne et al, 2005].

Le Lagrangien L est défini par la relation suivante :

$$L = T - U + W \quad (3.25)$$

Où T est l'énergie cinématique, U l'énergie potentielle et W le travail dû aux forces extérieures non conservatives.

$J(y)$, désigne l'intégrale sur l'intervalle $[t_1, t_2]$ de la fonction de Lagrange $L(y, y', t)$ continue, différentiable par rapport à t mais aussi par rapport à y et y' . Les dérivés partielles de F sont continues, au moins jusqu'à l'ordre 2. J est appelée une fonctionnelle.

$$J = \int_{t_1}^{t_2} (L) dt = \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W) dt \quad (3.26)$$

Le problème posé est le suivant : parmi toutes les fonctions y(t) qui vérifient les conditions limites, il faut trouver celle qui minimise J considérée comme une fonction de y.

Soit $y^*(t)$ la solution qui vérifie la problématique. Alors pour toute fonction $y(t)$ proche de $y^*(t)$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$J(y^*) \leq J(y) \quad (3.27)$$

La fonction $y(t)$ peut s'écrire en fonction de $y^*(t)$ de la manière suivante :

$$y(t) = y^*(t) + \epsilon \eta(t) \quad (3.28)$$

Où $\eta(t)$ est une fonction continue pourvue de dérivées continues telle que :

$$\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0 \quad (3.29)$$

Avec ϵ est un petit paramètre. Pour ϵ assez petit, il est claire que $y(t)$ est dans le voisinage de $y^*(t)$.

La fonctionnelle :

$$\bar{J}(\epsilon) = J(y^* + \epsilon \eta) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, y^*(t) + \epsilon \eta(t), y^{*'}(t) + \epsilon \eta'(t)) dt \quad (3.30)$$

doit vérifier l'inégalité pour tout ϵ assez petit :

$$\bar{J}(0) \leq \bar{J}(\epsilon) \quad (3.31)$$

\bar{J} est minimum pour $\epsilon = 0$, ou encore la dérivée de \bar{J} par rapport à ϵ est nulle pour $\epsilon = 0$.

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial \epsilon}(\epsilon = 0) = 0 \quad (3.32)$$

A partir de la relation (3.30), $\frac{\partial}{\partial \epsilon} \bar{J}$ est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \bar{J} &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \epsilon} \right) dt \\ \frac{\partial}{\partial \epsilon} \bar{J} &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \eta(t) + \frac{\partial L}{\partial y'} \eta'(t) \right) dt \end{aligned} \quad (3.33)$$

En intégrant la relation (3.33) par partie, il sort :

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \bar{J} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial y} \eta dt + \left[\frac{\partial L}{\partial y'} \eta \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \eta \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y'} dt$$

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \bar{J} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \eta(t) dt + \left[\frac{\partial L}{\partial y'} \eta(t) \right]_{t_1}^{t_2}$$

D'après l'hypothèse sur la fonction $\eta(t)$ suivant l'expression (3.29), il sort :

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \bar{J} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \eta(t) dt \quad (3.34)$$

Et comme, $\frac{\partial}{\partial \epsilon} \bar{J}(\epsilon = 0) = 0$, quelque soit la fonction choisie $\eta(t)$, il sort que :

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y'} = 0 \quad (3.35)$$

Cette équation est appelée équation *d'Euler-Lagrange* associée à la minimisation de la fonctionnelle $J(y)$.

Il est classique de poser :

$$\epsilon \eta(t) = \delta y(t) \quad (3.36)$$

Avec les mêmes conditions aux limites :

$$\delta y(t_1) = \delta y(t_2) = 0 \quad (3.37)$$

et de l'appeler variation de $y(t)$ (d'où aussi $\epsilon \eta'(t) = \delta y'(t)$)

Le développement de Taylor en ϵ de J donne :

$$\begin{aligned}
 J(y + \delta y) &= J(y) + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} (\delta y)' \right) dt \\
 &+ \frac{1}{2!} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} \delta y (\delta y)' + \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} (\delta y)'^2 \right) dt \\
 &+ \frac{1}{3!} \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta y \frac{\partial}{\partial y} + (\delta y)' \frac{\partial}{\partial y'} \right)^3 L(t, y, y') dt + \dots
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

La quantité :

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} (\delta y)' \right) dt \tag{3.39}$$

est la première variation de la fonctionnelle J , tandis que la deuxième variation de la fonctionnelle J s'écrit :

$$\frac{1}{2!} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} \delta y (\delta y)' + \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} (\delta y)'^2 \right) dt \tag{3.40}$$

Si la première variation de la fonctionnelle est égale à zéro pour une fonction admissible $y(t)$, la deuxième variation de la fonctionnelle admet une valeur stationnaire de cette fonction particulière.

3.3.3. Notation de Voigt

Pour développer des algorithmes numériques en vue de l'exécution de programmes informatiques, il est pratique de représenter les tenseurs en notation de Voigt.

Le tenseur de contrainte, s'écrit suivant la notation de Voigt par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

De même pour le tenseur de déformation :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

La norme de la contrainte notée par $|\underline{\underline{\sigma}}|$ est donnée par la relation suivante :

$$|\underline{\underline{\sigma}}| = \sqrt{\underline{\underline{\sigma}}^T S \underline{\underline{\sigma}}} \quad (3.43)$$

Celle du tenseur de déformation, sa norme est donnée par :

$$|\underline{\underline{\varepsilon}}| = \sqrt{\underline{\underline{\varepsilon}}^T S^{-1} \underline{\underline{\varepsilon}}} \quad (3.44)$$

Où S est exprimée par :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ et } S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

3.3.4. Equation d'équilibre

En l'absence des forces de volume, l'équation d'équilibre pour un milieu continu est déterminée par l'utilisation du principe de Hamilton. Les composantes du Lagrangien sont :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\vec{u}} \cdot \dot{\vec{u}} dV \\ U &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dV \\ W &= \int_{\partial\Omega} \vec{t} \cdot \vec{u} dA \end{aligned} \quad (3.46)$$

L'intégrale de surface peut se transformer en intégrale de volume, suivant la transformation de Green :

$$W = \int_{\partial\Omega} \vec{t} \cdot \vec{u} \, dA = \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} \cdot \vec{u} \, dA = \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}} \vec{u}) \, dV \quad (3.47)$$

Ici, \vec{t} désigne le vecteur de contrainte.

La fonctionnelle J s'exprime par :

$$J = \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W) \, dt = 0$$

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\vec{u}} \cdot \dot{\vec{u}} \, dV - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \, dV + \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}} \vec{u}) \, dV \right) dt$$

La première variation de la fonctionnelle J , est donc :

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U + W) \, dt$$

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} 2\rho \dot{\vec{u}} \cdot \delta \dot{\vec{u}} \, dV - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\delta \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}) \, dV + \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}} \delta \vec{u}) \, dV \right) dt$$

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \rho \dot{\vec{u}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{u} \, dV - \int_{\Omega} (\delta \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}) \, dV + \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}} \delta \vec{u}) \, dV \right) dt$$

A noter, que : $\overrightarrow{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}} \delta \vec{u}) = \overrightarrow{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) \cdot \delta \vec{u} + \underline{\underline{\sigma}} : \nabla \delta \vec{u}$ et : $\nabla \delta \vec{u} = \delta \underline{\underline{\varepsilon}}$.

Par intégration par partie, δJ aura la forme :

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \left(- \int_{\Omega} \rho \ddot{\vec{u}} \cdot \delta \vec{u} \, dV + \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}} \delta \vec{u}) \, dV \right) dt = 0$$

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \left(- \int_{\Omega} \rho \ddot{\vec{u}} + \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) \right) \delta \vec{u} \, dV dt = 0$$

et comme $\delta \vec{u}$ est arbitraire, il sort :

$$-\rho \ddot{\vec{u}} + \overrightarrow{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \quad (3.48)$$

3.3.5. Equation du mouvement élastoplastique

Les conditions d'équilibre ont été écrites de manière locale, c-à-d qu'elles ont été établies en tout point. Il existe une autre manière d'écrire cet équilibre, c'est la manière globale.

Par l'application du principe de Hamilton sur un élément fini, l'équation lagrangienne sera :

$$L_i^e = T_i^e - U_i^e + W_i^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i^e} \rho \dot{\vec{u}}^T \dot{\vec{u}} dV - \frac{1}{2} \int_{\Omega_i^e} \underline{\underline{\varepsilon}}^T : \underline{\underline{\sigma}} dV + \int_{\partial\Omega_i^e} \vec{u}^T \cdot \vec{t} dA$$

En substituant les équations (2.59), (3,5) et (3.11) par leurs valeurs, il vient [Dunne et al, 2005]:

$$L_i^e = \frac{1}{2} \vec{U}_j^{eT} \int_{\Omega_i^e} \rho \underline{N}_i^{eT} \underline{N}_i^e dV \dot{\vec{U}}_j^e - \frac{1}{2} \vec{U}_j^{eT} \int_{\Omega_i^e} \underline{B}_i^{eT} \mathcal{A}^{EP} \underline{B}_i^e dV \vec{U}_j^e + \vec{U}_j^{eT} \int_{\partial\Omega_i^e} \underline{N}_i^{eT} \cdot \vec{t} dA$$

On pose pour l'élément (i):

$$\begin{cases} m_i^e = \int_{\Omega_i^e} \rho \underline{N}_i^{eT} \underline{N}_i^e dV \\ k_i^e = \int_{\Omega_i^e} \underline{B}_i^{eT} \mathcal{A}^{EP} \underline{B}_i^e dV \\ f_i^e = \int_{\partial\Omega_i^e} \underline{N}_i^{eT} \cdot \vec{t} dA \end{cases} \quad (3.49)$$

Le Lagrangien devient :

$$L_i^e = \frac{1}{2} \vec{U}_j^{eT} m_i^e \dot{\vec{U}}_j^e - \frac{1}{2} \vec{U}_j^{eT} k_i^e \vec{U}_j^e + \vec{U}_j^{eT} f_i^e$$

La première variation de la fonctionnelle J , devient :

$$\delta J_i^e = \int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U + W) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta\left(\frac{1}{2} \vec{U}_j^{eT} m_i^e \dot{\vec{U}}_j^e - \frac{1}{2} \vec{U}_j^{eT} k_i^e \vec{U}_j^e + \vec{U}_j^{eT} f_i^e\right) dt$$

Dans le cas général où le mouvement de la base se produit dans les deux sens du repère absolu, la matrice Δ s'écrit :

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

La combinaison des deux équations (3.51) et (3.52) donne :

$$M\ddot{\vec{v}}(t) + F^{Int}(\vec{v}, \dot{\vec{v}}, t) = -M\Delta\ddot{\vec{u}}_g(t) \quad (3.55)$$

La formulation (3.55) est l'équation du mouvement qui sera prise dans la détermination de la réponse sismique non linéaire des profils de sols étudiés.

Les conditions aux limites (au niveau des appuis) influent sur la matrice de rigidité globale. Pour cette raison, il existe des techniques numériques pour les prendre en considérations.

3.4. Intégration numérique des équations différentielles

La méthode de Newmark est une méthode implicite permettant de construire la solution à l'instant $t + \Delta t$ à partir des vecteurs connus $\vec{v}(t)$, $\dot{\vec{v}}(t)$ et $\ddot{\vec{v}}(t)$. Elle utilise les développements limités suivant [Dhatt et al, 1984]:

$$\dot{\vec{v}}(t + \tau) = \dot{\vec{v}}(t) + \tau[(1 - a)\ddot{\vec{v}}(t) + a\ddot{\vec{v}}(t + \tau)] \quad (3.56)$$

et

$$\vec{v}(t + \tau) = \vec{v}(t) + \tau\dot{\vec{v}}(t) + \frac{\tau^2}{2}[(1 - b)\ddot{\vec{v}}(t) + b\ddot{\vec{v}}(t + \tau)] \quad (3.57)$$

Pour des considérations numériques, on suppose que pour un intervalle $[t_i, t_{i+\Delta t}]$ et pour une itération de calcul k (méthode itérative de Newton), la matrice élastoplastique ou tenseur de raideurs reste inchangeable. Pour ce cas, l'équation (3.55) après intégration de Newmark devient à l'instant m sous la forme suivante :

$$A_m^k x_m^k = b_m^k \quad (3.58)$$

Le tableau (3.2), récapitule l'expression de A_m^k et b_m^k pour l'itération de résolution k.

Tableau 3.2- Expressions de l'équation du mouvement non linéaire [Cavin, 2006].

$A_m^k x_m^k = b_m^k$			
Résolution en	x_m^k	A_m^k	b_m^k
Déplacement	\vec{v}_m^k	$\frac{M + \beta \Delta t^2 K_{tm}^k}{\beta \Delta t^2}$	$-M \Delta \vec{u}_g(t) + \frac{M \vec{v}_{pm-1}}{\beta \Delta t^2}$
Vitesse	$\dot{\vec{v}}_m^k$	$\frac{M + \beta \Delta t^2 K_m^k}{\beta \Delta t^2}$	$-M \Delta \vec{u}_g(t) - K_t^k \vec{v}_{pm-1} + \frac{M + \beta \Delta t^2 K_t^k}{\gamma \Delta t^2} \vec{v}_{pm-1}$
Accélération	$\ddot{\vec{v}}_m^k$	$M + \beta \Delta t^2 K_m^k$	$-M \Delta \vec{u}_g(t) - K_t^k \vec{v}_{pm-1}$

Les relations des champs des déplacements et des vitesses de prédictions \vec{v}_{pm-1} et $\dot{\vec{v}}_{pm-1}$ respectivement, sont données par les deux équations (3.59) et (3.60).

$$\vec{v}_{pm} = \vec{v}_m + \Delta t \dot{\vec{v}}_m + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\vec{v}}_m \quad (3.59)$$

et

$$\dot{\vec{v}}_{pm} = \dot{\vec{v}}_m + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\vec{v}}_m \quad (3.60)$$

Les corrections des champs de vitesse et déplacements à l'instant $(m + 1 = t + \Delta t)$ sont données par :

$$\vec{v}_{m+1} = \vec{v}_{pm} + \beta \Delta t^2 \ddot{\vec{v}}_{m+1} \quad (3.61)$$

et

$$\dot{\vec{v}}_{m+1} = \dot{\vec{v}}_{pm} + \gamma \Delta t \ddot{\vec{v}}_{m+1} \quad (3.62)$$

3.5. Méthode de résolution des équations de mouvement

Quel que soit le type des non linéarités prise en compte dans la modélisation par éléments finis (géométrique, matérielle ou liée à la présence de pièces en contacts,..) le système prend la forme (3.58) [Cavin, 2006].

Pour résoudre le système d'équations non linéaires de la relation (3.58) on fait recours à la méthode itérative de Newton, qui consiste à construire à chaque itération d'indice k, la solution x_m^k comme une suite de vecteur de la forme de l'équation (3.63).

$$x_m^{k+1} = x_m^k + \Delta x_m^{k+1} \quad (3.63)$$

avec des considérations sur l'état initial de déplacement, vitesse et accélération.

L'accroissement Δx_m^{k+1} est choisi de manière à annuler le développement limité au premier ordre de Taylor du résidu $R(x_m^{k+1})$ de l'équation (3.58). Le résidu à l'itération (k+1) de l'équation (3.58) s'écrit suivant l'équation (3.64) et son développement limité au premier ordre de Taylor suivant (3.65).

$$R(x_m^{k+1}) = b_m^k - A_m^k(x_m^{k+1}) \quad (3.64)$$

et

$$R(x_m^{k+1}) = R(x_m^k) + \Delta x_m^{k+1} \frac{\partial R(x)}{\partial x} \Big|_{(x=x_m^k)} \Delta x_m^{k+1}$$

$$R(x_m^{k+1}) \approx R(x_m^k) - \frac{\partial A_m^k(x)}{\partial x} \Big|_{(x=x_m^k)} \Delta x_m^{k+1} \quad (3.65)$$

Plusieurs stratégies sont possibles pour choisir la quantité $\frac{\partial A_m^k(x)}{\partial x}$ appelée matrice tangente, qui dépend essentiellement dans le cas de la non linéarité matérielle du tenseur de raideur élastoplastique. La quantité $\frac{\partial A_m^k(x)}{\partial x}$ peut être actualisée pour chaque itération k. Le calcul converge en peu d'itération mais le coût de chacune d'elles est important [Cavin, 2006]. Si elle est choisie constante, ce coût est considérablement réduit mais la convergence nécessite plus d'itérations.

3.6. Conclusion

La méthode des éléments finis est un outil très puissant pour l'analyse dynamique de structures variées. Cette méthode permet de surmonter toutes les contraintes géométriques que peut présenter la structure étudiée.

La formulation des équations de mouvements par le principe de Hamilton est possible pour le cas non linéaire. La passation d'une équation différentielle de deuxième ordre non linéaire à une équation empirique est faite suivant le schéma implicite de Newmark. Le système d'équations non linéaires obtenus est résolu par la méthode itérative de Newton qui est la partie la plus coûteuse du point de vue de temps de résolution, d'où la performance de l'outil informatique.

4.1. Introduction

L'étude du mouvement des terrains sous l'effet des séismes nécessite la description du profil de sol à étudier du point de vue de la géométrie. La modélisation du terrain doit alors prendre en compte les effets de la topographie, la présence de plusieurs couches de matériaux différents et du point de vue du comportement des matériaux, les caractéristiques de chaque couche doivent être convenablement décrites.

Le modèle que nous présentons dans ce chapitre tient compte de ces différents aspects avec, toutefois, des hypothèses simplificatrices justifiées par la nature du problème étudié.

4.2. Hypothèses

Le terrain est modélisé par un domaine infini latéralement et reposant sur un substratum rocheux parallèle à la surface du sol. Nous supposons que le sol est en condition totalement non drainée. Cette hypothèse est justifiée dans le cas des chargements rapides (séisme), où la pression interstitielle n'a pas le temps de se dissiper. La simplicité de la géométrie permet d'établir aisément les équations du mouvement.

Pour la résolution du problème, on tient compte des hypothèses suivantes :

- Petites déformations
- Conservation de la quantité de mouvement (équations d'équilibres)
- Loi de comportement elastoplastique suivant le critère de Von Misès
- Conditions aux limites (espace)
- Conditions initiales (temps)

4.3. Equations d'équilibre du mouvement

Les forces agissantes sur un élément élémentaire du profil de sol sont schématisées sur la figure (4.1).

- Force d'inertie

$$F_I = \rho_i \, dy \, dx \, \frac{\partial^2 u(y, t)}{\partial t^2} \quad (4.1)$$

- Force de cisaillement :

$$S_{xy} = \tau_{xy}(u, y, t) dy dx \quad (4.2)$$

- Force sismique :

$$F_{\ddot{u}_g} = \rho_i dy dx \ddot{u}_g \quad (4.3)$$

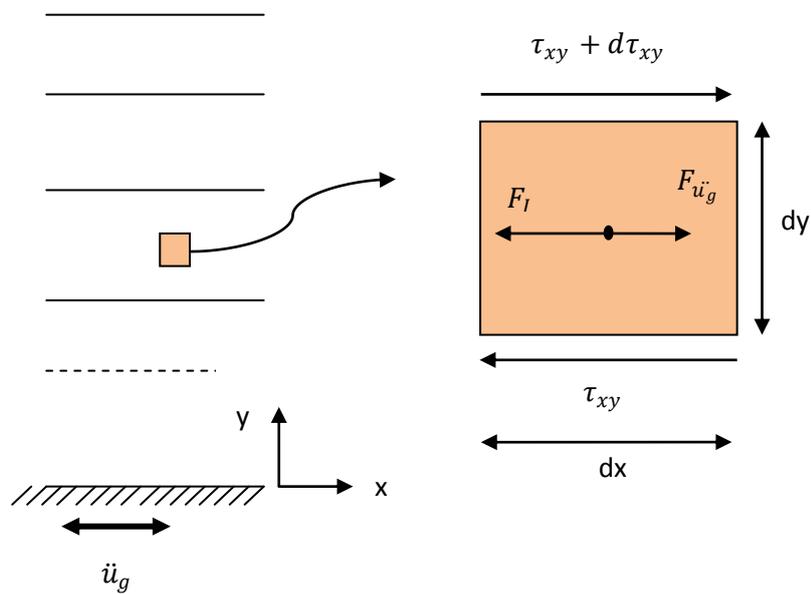


Fig. 4.1- Forces agissant sur un élément élémentaire d'un profil de sol.

L'équilibre de l'élément élémentaire d'après la figure (4.1) donne :

$$F_l = \frac{\partial}{\partial y} (S_{xy}) dy - F_{\ddot{u}_g} \Rightarrow \rho_i dy dx \frac{\partial^2 u(y, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy}(u, y, t)) dy dx - \rho_i dy dx \ddot{u}_g$$

On trouve l'équation du mouvement suivante :

$$\rho_i \frac{\partial^2 u(y, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy}(u, y, t)) - \rho_i \ddot{u}_g \quad (4.4)$$

4.4. vibrations libres de la partie latérale du profil de sol

Pour une modélisation unidimensionnelle, la relation de la contrainte de cisaillement est donnée par l'équation (4.5) :

$$\tau_{xy}(u, y, t) = G(y) \frac{\partial u(y, t)}{\partial y} \quad (4.5)$$

La relation (4.4) devient pour le cas de vibration libre :

$$\rho_i \frac{\partial^2 u(y, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(G(y) \frac{\partial u(y, t)}{\partial y} \right) \quad (4.6)$$

La variation du module de cisaillement dans le cas des petites déformations avec la profondeur pour les barrages en terre et profil de sol est donnée par la relation (4.7) [Gazetas-a, 1981, Gazetas-b, 1981, Abdel-Ghaffar et al, 1981, Gazetas et al, 1985, Elgamal et al, 1985, Pecker, 1995] :

$$G(y) = G_b \left(\frac{y}{h} \right)^B \quad (B = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, 1) \quad (4.7)$$

Dans cette expression, G_b désigne le module de cisaillement à la base du profil de sol.

La vitesse de propagation des ondes sismiques verticales à la base du barrage est donnée par la relation (4.8) :

$$V_b = \sqrt{G_b / \rho_b} \quad (4.8)$$

L'équation (4.6), devient en introduisons les expressions (4.7) et (4.8) :

$$\rho_i \frac{\partial^2 u(y, t)}{\partial t^2} = G_b \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{y}{h} \right)^B \frac{\partial u(y, t)}{\partial y} \right) \quad (4.9)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\left. \begin{array}{l} u(0, t) = 0 \\ G(y) \frac{\partial}{\partial x} u(y, t) \Big|_{y=h} = 0 \end{array} \right\} \quad (4.10)$$

La solution de l'équation (4.9) est de la forme $u(y, t) = \phi(y)e^{i\omega t}$. L'équation (4.9) devient après l'introduction des conditions aux limites :

$$y^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + By \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\rho_i \omega^2 h^B}{G_b} y^{2-B} \phi = 0 \quad (4.11)$$

l'équation (4.11) se ramène par l'introduction d'une nouvelle variable et une nouvelle fonction v à l'aide des formules [Krasnov et al, 1978]:

$$\left. \begin{array}{l} \phi = \left(\frac{t}{\theta}\right)^{-\alpha/\beta} v \\ y = \left(\frac{t}{\theta}\right)^{1/\beta} \end{array} \right\} \quad (4.12)$$

à l'équation de Bessel :

$$t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + t \frac{\partial v}{\partial t} + (t^2 - p^2) v = 0 \quad (4.13)$$

avec

$$\alpha = \frac{B-1}{2}, \beta = \frac{2-B}{2}, \theta = \frac{2\sqrt{\frac{\rho_i \omega^2 h^B}{G_b}}}{2-B} \text{ et } p = \frac{(1-B)}{(2-B)}$$

La solution générale de l'équation (4.13) est donnée par [Krasnov et al, 1978]:

$$v = C_1 J_p(t) + C_2 J_{-p}(t) \quad (4.14)$$

C_1 et C_2 sont des constantes qui se déterminent à partir des condition aux limites.

De l'équation (4.12), il sort que :

$$\left. \begin{aligned} \phi &= (y)^{-\alpha} v \\ t &= \frac{2}{(2-B)} \sqrt{\frac{\rho_i \omega^2 h^B}{G_b}} y^{\left(\frac{2-B}{2}\right)} \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

L'équation (4.14) devient :

$$\phi = (y)^{\frac{1-B}{2}} \left[C_1 J_{\frac{(1-B)}{(2-B)}} \left(\frac{2}{(2-B)} \sqrt{\frac{\rho_i \omega^2 h^B}{G_b}} y^{\left(\frac{2-B}{2}\right)} \right) + C_2 J_{-\frac{(1-B)}{(2-B)}} \left(\frac{2}{(2-B)} \sqrt{\frac{\rho_i \omega^2 h^B}{G_b}} y^{\left(\frac{2-B}{2}\right)} \right) \right] \quad (4.16)$$

La fonction $J_p(y)$ s'appelle la « fonction de Bessel » de première espèce d'ordre p , tandis que la fonction $J_{-p}(y)$, s'appelle la « fonction de Bessel » de première espèce d'ordre $-p$. Les deux fonctions sont définies par la relation suivante [Krasnov et al, 1978]:

$$\left. \begin{aligned} J_p(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(p+k+1)} \left(\frac{y}{2}\right)^{2k+p} \\ J_{-p}(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+1-p)} \left(\frac{y}{2}\right)^{2k-p} \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

$\Gamma(v)$ est la « fonction Gamma d'Euler », déterminée pour toutes les valeurs positives (ainsi que pour toutes les valeurs complexes à partie réelle positive) par la relation :

$$\Gamma(v) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{v-1} dx \quad (4.18)$$

La fonction gamma possède les propriétés importantes suivantes :

- $\Gamma(v+1) = v\Gamma(v)$
- $\Gamma(1) = 1$

Si k est un entier positif, alors :

- $\Gamma(v + k + 1) = (v + 1)(v + 2) \dots (v + 1 + k)\Gamma(v + 1)$
- $\Gamma(k + 1) = k!$

Pour une hauteur totale égale à h ($y=h$) du profil de sol, les fréquences naturelles ne sont que les racines de la fonction du premier ordre de Bessel ($J_{\frac{(1-B)}{(2-B)}}(a_i) = 0$). D'après la relation (4.16), et par remplacement de y par h , on définit les fréquences naturelles du profil de sol par :

$$a_i = \frac{2}{(2-B)} \sqrt{\frac{\rho_i \omega_i^2 h^B}{G_b}} y^{\left(\frac{2-B}{2}\right)} \Big|_{(y=h)} \quad (4.19)$$

Pour la couche inférieure (substratum), l'équation (4.19) devient :

$$a_i = \frac{2}{(2-B)} \frac{\omega_i}{V_b} h \quad (4.20)$$

Et, comme $\omega_i = 2\pi f_i$, les fréquences naturelles seront déterminées par la relation suivante :

$$f_i = \frac{V_b(2-B)}{4\pi h} a_i \quad (4.21)$$

V_b ¹ est la vitesse à la base du profil de sol. La relation (4.19), est identique à celle trouvée par [Pecker, 1995].

Dans le cas d'une couche de sol à module de cisaillement constant ($B=0$), la fréquence fondamentale est exprimée par la relation suivante [Cascone et al, 2003] :

$$f_1 = \frac{V_s}{4h} \quad (4.22)$$

¹ La vitesse élastique de cisaillement à la base du profil de sol est donnée par : $V_b = \sqrt{\frac{G_b}{\rho_b}}$

4.5. Modèle viscoélastoplastique

4.5.1. Formulation

Dans ce qui suit, nous présentons le modèle visco-élastoplastique utilisé pour l'étude du comportement dynamique unidimensionnel des profils de sols.

4.5.1.1. Modélisation du comportement élastique

Dans le domaine de très petites déformations, le comportement du sol est raisonnablement élastique, les déformations subies par le sol sont réversibles.

Avec l'hypothèse de géométrie unidimensionnelle et d'élasticité linéaire isotrope, le taux de déformation de cisaillements est relié au taux de contrainte de cisaillements par la relation suivante :

$$\dot{\tau} = G\dot{\gamma}^e \quad (4.23)$$

G est le module de cisaillement pour les très petites déformations.²

4.5.1.2. Modélisation du comportement plastique

Lorsque la limite d'élasticité est atteinte, le sol présente des déformations irréversibles. Par hypothèse, le sol est supposé avoir un comportement élastoplastique, c'est-à-dire que la déformation totale se décompose en une partie élastique réversible et une partie plastique irréversible :

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^e + \dot{\gamma}^p \quad (4.24)$$

D'après l'équation (4.24), l'équation (4.23) devient :

$$\dot{\tau} = G(\dot{\gamma} - \dot{\gamma}^p) \quad (4.25)$$

² Dans un milieu élastique, le module de cisaillement G est relié à la vitesse de propagation des ondes de cisaillement par la relation : $G = \rho V_s^2$.

4.5.2. Discrétisation en espace

La discrétisation en espace est faite en élément finis monodimensionnels linéaires à deux nœuds. La colonne de hauteur totale h est discrétisée en N éléments. Chaque élément élémentaire e_i est caractérisé par son épaisseur h_i , sa masse volumique ρ_i et son module de cisaillement G_i . Les masses sont supposées concentrées aux nœuds des éléments.

Chaque nœud reçoit la contribution des éléments ayant ce nœud en commun, par contre le nœud de la surface (extrémité de la colonne) reçoit uniquement la contribution de l'élément de la surface (Fig. 4.2) [Hashash et al, 2001].

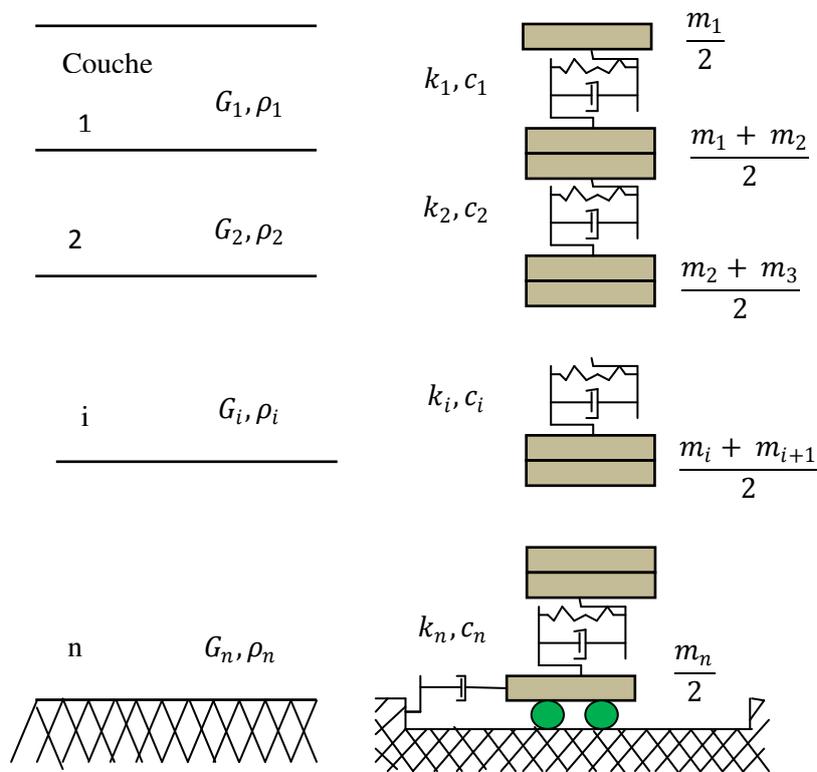


Fig. 4.2- Discrétisation spatiale du profil de sol [Hashash et al, 2001].

D'après l'équation (4.4) et d'après la figure (4.2), l'approximation par éléments finis du problème consiste à résoudre pour un nœud i , commun aux éléments e_i et e_{i+1} ce qui suit :

$$\rho_i \frac{h_i}{2} \frac{\partial^2 u(y, t)}{\partial t^2} + \rho_{i+1} \frac{h_{i+1}}{2} \frac{\partial^2 u(y, t)}{\partial t^2} = (\rho_i \frac{h_i}{2} \ddot{u}_g + \tau_{yx}(e_i)) + (\rho_{i+1} \frac{h_{i+1}}{2} \ddot{u}_g - \tau_{yx}(e_{i+1}))$$

Sous forme condensée, l'équation à résoudre pour chaque pas de temps s'écrit :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = -[M]\{I\}\ddot{u}_g \quad (4.26)$$

Pour la prise en compte de la matrice d'amortissement, il est très difficile de postuler comment la matrice d'amortissement $[C]$ est déterminée et avec quelles grandeurs mécaniques elle peut être mesurée. Par exemple la matrice d'amortissement de Rayleigh $[C]$, peut être calculée comme une combinaison linéaire des matrices de masse $[M]$ et de la rigidité $[K]$ suivant la relation (4.27) [Zienkiewicz et al 1999]:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (4.27)$$

Les constantes α et β peuvent être exprimées par [Muroso et al, 2001]:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \omega_1 \xi \\ \beta &= \frac{\xi}{\omega_1} \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

Où selon Woodward et al, (1995) par:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 2\omega_1\omega_2\xi \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right] \\ \beta &= 2\xi \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

[Hashash et al, 2001], propose l'expression suivante pour la matrice d'amortissement :

$$[C] = \frac{2\xi}{\omega} [K] \quad (4.30)$$

ξ est le coefficient d'amortissement pour chaque couche du profil de sol.

Pour chaque couche (i), la rigidité élémentaire correspondante à pour expression :

$$[K]_i = \begin{bmatrix} \frac{G_i}{h_i} & -\frac{G_i}{h_i} \\ -\frac{G_i}{h_i} & \frac{G_i}{h_i} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Les termes de la matrice de rigidité sont connus, on peut déterminer les termes de la matrice d'amortissement élémentaires suivant les relations (4.27), (4.28), (4.29) ou (4.30).

Si on prend en considération l'effet de l'amortissement, l'équation (4.26) devient :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = -[M]\{I\}\ddot{u}_g \quad (4.32)$$

Pour la résolution de l'équation du deuxième ordre, on fait recours à l'algorithme de Newmark avec l'utilisation de la méthode itérative de Newton.

4.6. Conclusion

Le modèle simplifié présenté dans ce chapitre permet d'analyser le comportement des sols soumis à des sollicitations complexes. La modélisation du comportement du sol, par une loi visco-élastoplastique avec écrouissage isotrope, permet de mettre en évidence les différents aspects du comportement non linéaire du sol lors d'un chargement cyclique tel que le séisme.

5.1. Introduction

La formulation par la méthode des éléments finis faite permet d'obtenir la réponse dynamique des profils de sols et des structures en terre. Dans ce qui suit, quelques exemples numériques sont élaborés afin de tenir compte des non linéarités de ces milieux sur leur réponse sismique.

A cet effet, un programme numérique en élément finis nommé « PLASTE », à été élaboré en utilisant le langage de programmation « FORTRAN 90 ». Ce programme qui calcule les réponses statique et dynamique du point de vue déplacements, vitesses et accélérations à n'importe quel point de la structure se base sur une formulation élastoplastique isotrope basée sur le critère de Von Misès dans le cas de problèmes de déformations ou contraintes planes et en conditions non drainées.

L'idée principale de la résolution numérique dans ce programme réside dans le principe de la méthode du « Retour Radial » utilisée pour la détermination des intégrales des relations de Von Misès. Nous partons d'une prédiction élastique isotrope linéaire (simple et connue) pour arriver à une formulation élastoplastique. La même similitude sera retenue dans la programmation numérique.

5.2. Démarche du programme « PLASTE »

5.2.1. Calcul incrémental itératif d'un solide élastoplastique

La formulation élastoplastique dans le programme admet les hypothèses de bases :

- Hypothèse de continuité
- Hypothèse des petites déformations
- Conditions totalement drainées
- Elasticité linéaire isotrope
- Critère de Von Misès, écoulement plastique obéissant à la règle de normalité
- Erouissage isotrope

5.2.1.1. Initialisation générale

Une attention particulière est faite concernant l'équation dynamique qui gouverne le mouvement (3.55), est que la non linéarité matérielle apparaît au niveau des forces internes. D'ailleurs cette force n'a pas une relation bien déterminée mais au contraire elle est fonction du temps et d'autre variable. Pour cette raison l'idée de la méthode de « Retour Radial » se pose elle-même.

Une initialisation des données se présente elle-même, à l'instant ($t=0$) la structure n'engendre aucun effort interne. La force interne $\vec{F}^{Int}(\vec{v}, \dot{\vec{v}}, t)$ sera pénalisée et la matrice élastoplastique sera identique à la matrice élastique :

$$\begin{cases} \vec{F}_{t=0}^{INT}(\vec{v}, \dot{\vec{v}}, t) = 0 \\ \mathcal{A}_{t=0}^{EP} = \mathcal{A}^{ELAS} \end{cases} \quad (5.1)$$

L'étape d'initialisation des données comprend aussi la connaissance des :

- Conditions aux limites
- Conditions initiales, généralement les déplacements, les vitesses et les accélérations à l'instant ($t=0$), sans oublier l'état initial du chargement ou de contraintes.
- géométrie de la structure à étudier où nous donne un aperçu sur la modélisation géométrique adéquate.

5.2.1.2. Incrémentation de chargement

Les données de cette étape sont les conditions aux limites, les conditions initiales et la matrice globale élastoplastique qui n'est que la matrice élastique globale.

Le champ de déplacement (incrément) dans la méthode de résolution de Newton s'actualise d'une itération à l'autre jusqu'à la convergence pour une certaine tolérance.

Pour chaque début d'itération sur le nombre de chargement statique ou dynamique, on a comme condition initiale primaire :

$$- \Delta \vec{v}_n = 0$$

$$- \text{Forces nodales : } \vec{F}^{Ext} = \vec{F}_{n+1}^{Vol} + \vec{F}_{n+1}^{Surf}$$

L'indice (n) dénote le numéro de chargement.

Les forces extérieures pour le cas sismique sont les forces sismiques, d'après l'équation (3.55) l'expression de ces forces sera :

$$\vec{F}_{n+1}^{Ext} = -M\Delta(\vec{\ddot{u}}_g)_{n+1} \quad (5.2)$$

Il reste maintenant à actualiser le résidu des forces, on a alors :

$$-\vec{R} = \vec{F}^{int} + \vec{F}^{ext}$$

D'après l'équation (5.1), le premier résidu calculé au niveau de chaque chargement prend la forme :

$$-\vec{R} = \vec{F}^{ext} = -M\Delta(\vec{\ddot{u}}_g)_1 \quad (5.3)$$

Pour une tolérance exigée afin d'estimer la convergence de la méthode itérative de Newton, la norme du résidu sera multipliée par cette dernière.

Avant de passer au calcul volumineux de la méthode itérative de Newton, on pose :

$$r^{ref} = \|\vec{R}\|, r = r^{ref} \quad (5.4)$$

L'expression (5.4), sera injectée dans la condition de convergence de la méthode de Newton.

L'équation incrémentale à résoudre dans le programme est donnée par :

$$\left(\frac{M + \beta\Delta t^2 K_t^k}{\beta\Delta t^2}\right)\vec{v}_m^k = (-M\Delta\vec{\ddot{u}}_g(t) + \frac{M\vec{v}_{pm-1}}{\beta\Delta t^2}) \quad (5.5)$$

L'indice m désigne le temps de chargement, Δt l'intervalle de temps de chargement.

La rigidité élastoplastique globale K_t^k est le seul terme qui varie dans l'intervalle de temps Δt , tandis que les autres termes tels que la matrice globale de masse M , l'accélération à la base de la structure et le vecteur de prédiction de déplacement au temps précédent (m-1) reste inchangeable.

L'objectif de la méthode itérative de Newton est de faire en sorte d'annuler le résidu pour satisfaire la condition d'équilibre, donc la variation du résidu par rapport au déplacement doit être nulle.

D'après l'équation incrémentale du mouvement (5.5) et d'après l'équation de la variation du résidé, il sort :

$$\vec{R}(\vec{v}_m^{k+1}) \approx \vec{R}(\vec{v}_m^k) - \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left(\frac{M + \beta \Delta t^2 K_t^k}{\beta \Delta t^2} \right) \Big|_{(\vec{v} = (\vec{v}_m^k))} \Delta(\vec{v}_m^{k+1}) \quad (5.6)$$

L'objectif est atteint lorsque l'équation (5.7) est satisfaite.

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left(\frac{M + \beta \Delta t^2 K_t^k}{\beta \Delta t^2} \right) \Big|_{(\vec{v} = (\vec{v}_m^k))} \approx 0 \quad (5.7)$$

La relation (5.7), n'est en faite que la notion de la matrice élastoplastique de rigidité cohérente (Fig. 5.1).

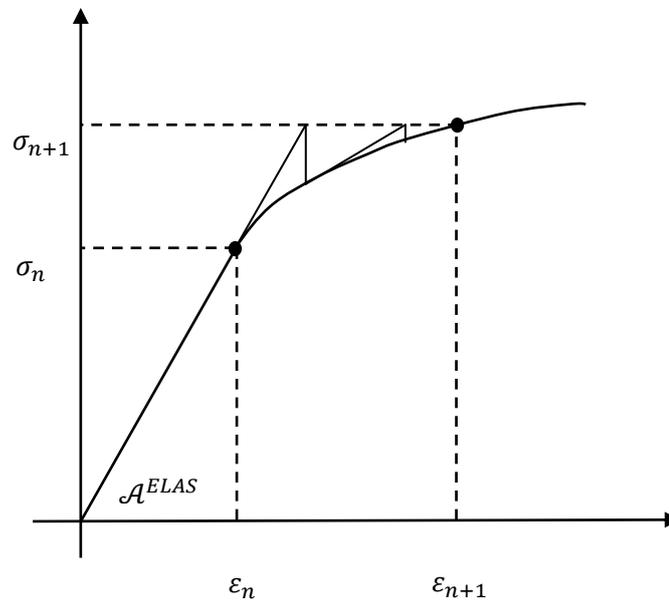


Fig. 5.1- Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent [Dhatt et al, 1984].

Tout résidu calculé dans la boucle itérative de Newton sera comparé au test de convergence pour satisfaire la condition de convergence.

La boucle d'itération de l'annulation du résidu global comprend en premier lieu la détermination de l'incrément de déplacement qui satisfait la relation suivante :

$$[K^{EP}] \delta \vec{v}_n = -\vec{R} \quad (5.8)$$

avec

$$\begin{cases} [K^{EP}] = \left[\frac{M + \beta \Delta t^2 K_t^k}{\beta \Delta t^2} \right] \\ \vec{R} = -M \Delta \vec{u}_g(t) + \frac{M \vec{v}_{pm-1}}{\beta \Delta t^2} \end{cases} \quad (5.9)$$

Pour la première itération la matrice de rigidité $[K_t^k]$ n'est que la matrice de rigidité élastique isotrope $[K^{Elas}]$. Il est à souligner que la rigidité élastique est une caractéristique intrinsèque du matériau ou de la structure globale.

La détermination de l'incrément de déplacement $\delta \vec{v}_n$ suivant l'équation (5.8) sera faite par la méthode de triangulation de Gauss, et d'actualiser la variation du déplacement par l'ajout des incréments de déplacements calculés suivant l'équation (5.10).

$$\Delta \vec{v}_n = \Delta \vec{v}_n + \delta \vec{v}_n \quad (5.10)$$

5.2.1.2.1. Détermination de la matrice élastoplastique globale

A cette étape de calcul, les données sont les déplacements globaux calculés à l'étape précédente $\Delta \vec{v}_n$ de la structure. Comme la matrice globale de rigidité n'est que l'ensemble des matrices élémentaires des matrices de rigidité élastoplastiques, il faut extraire les déplacements de la structure en (forme globale) en déplacements nodaux pour chaque élément (forme local) $\Delta \vec{v}_n^e$ et d'ailleurs cette philosophie de résolution est l'âme de la méthode des éléments finis.

Les matrices de rigidité et d'effort interne seront pénalisés au début de cette étape, donc $[K^{EP}] = 0$ et $\vec{F}^{Int} = 0$.

5.2.1.2.2. Détermination de la matrice élastoplastique élémentaire

Le calcul se fait pour chaque élément de la structure, pour cette raison on introduit une boucle sur l'ensemble des éléments de la structure pour déterminer, pour chaque élément, la matrice de rigidité élastoplastique et l'effort interne.

Une initialisation est faite sur la matrice de rigidité et l'effort interne, $K_e^{EP} = 0$ et $\vec{F}_e^{Int} = 0$. A cette étape, la déformation élémentaire $\Delta \varepsilon_n$ est calculée en fonction des déplacements nodaux.

Le calcul des contraintes et la matrice élastoplastique élémentaire sera dans l'étape suivante.

5.2.1.2.3. Résolution de l'équation de cohérence

C'est la dernière étape dans la démarche du programme « PLASTE ». Les étapes suivantes sont à suivre :

- Evaluer $\underline{\underline{S}}^{elas} = \underline{\underline{S}}_n + 2\mu k : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}$ (prédicteur élastique) et $\sigma^{elas,eq} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{\underline{S}}^{elas}\|$
- Calculer $f^{elas} = f(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{elas}, p_n) = \sigma^{elas,eq} - R(p_n)$. Deux cas :
 - Si $f^{elas} \leq 0$, évolution élastique :
$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} &= 3ktr(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{S}}^{elas} \\ \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p &= \underline{\underline{0}}, \mathcal{A}^{EP} = \mathcal{A} \end{aligned} \right\}$$
 - Si $f^{elas} > 0$, évolution élastoplastique (par hypothèse):
 - Résoudre par rapport à Δp : $\sigma^{elas,eq} - 3\mu\Delta p - R(p_n + \Delta p) = 0$
 - Evaluer les constantes β, γ : $\beta = \frac{3\mu\Delta p}{\sigma^{elas,eq}}$, $\gamma = \frac{3\mu}{3\mu + R(p_n + \Delta p)}$
- Contribution du point de Gauss à $[K_e^{EP}]$:

$$[K_e^{EP}] + [B(\underline{\underline{a}}_g)]^T [\mathcal{A}^{EP}(\underline{\underline{a}}_g)] [B(\underline{\underline{a}}_g)] J(\underline{\underline{a}}_g) w_g$$
- Contribution du point de Gauss à \vec{F}^{Int} :

$$\vec{F}_e^{Int} = \vec{F}_e^{Int} + [B(\underline{\underline{a}}_g)]^T \{\sigma_{n+1}(\underline{\underline{a}}_g)\} J(\underline{\underline{a}}_g) w_g$$

Ainsi, les résultats obtenus à cette étape sont : la matrice élémentaire élastoplastique et les forces internes élémentaires, qui seront des données pour l'étape précédente.

Pour l'étape précédente, qui concerne la détermination de la matrice élastoplastique globale ainsi que l'effort interne global, un procédé d'assemblage identique au cas linéaire sur les matrices de rigidité élémentaires et les forces internes élémentaires est à réaliser.

Les forces internes \vec{F}^{Int} sont à présent déterminées, il est donc possible de calculer le nouveau résidu.

Il reste à vérifier le test de convergence de la méthode de Newton, si le test n'est pas vérifié, on retourne à l'étape d'itération de Newton, mais cette fois le résidu prend en considération les efforts internes calculés précédemment.

Si le test est satisfait, il faut actualiser les déplacements, les vitesses, les accélérations et les déformations plastiques.

Toutes les étapes de calcul étant réalisées, il reste alors à procéder à des applications de vérification et de validation.

5.3. Chargement statique

L'objectif de ce paragraphe est de valider le programme « PLASTE » pour un cas statique. Pour un chargement statique symétrique ou antisymétrique (ponctuel ou réparti), et pour des conditions aux limites symétriques, la réponse sous forme de déplacement sera soit symétrique ou antisymétrique.

Les caractéristiques géométriques et dynamiques du profil de sol, sont données dans le tableau (5.1).

Tableau 5.1 - Caractéristiques du profil de sol mono couche.

Hauteur (m)	Largeur (m)	$E(MN/m^3)$	$\rho(kg/m^3)$	ν
4	100	2	2000	0.3

La fonction de chargement utilisée dans cette application est la plus simple, il s'agit d'une fonction de chargement linéaire. La figure (5.2) schématise la relation entre la contrainte et la déformation plastique.

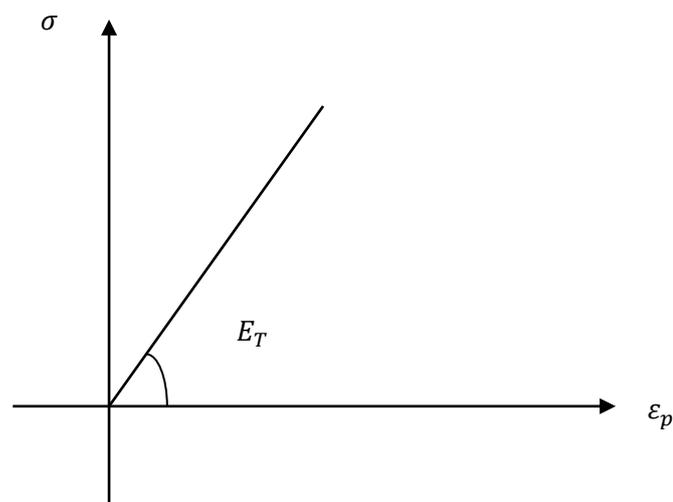


Fig. 5.2- Fonction d'écroutissage linéaire.

Le profil de sol est modélisé en éléments finis triangulaires à trois nœuds, comprend 189 nœuds et 320 éléments triangulaires.

En premier cas, on suppose que le profil de sol est encasturé des deux cotés avec la concentration d'une charge ponctuelle verticale à la surface libre du sol ($P1=100kg$). Pour la deuxième application, en garde les mêmes conditions aux limites, avec la prise de la même charge ponctuelle mais dans le sens opposé ($P2=-100kg$) (Fig. 5.3).

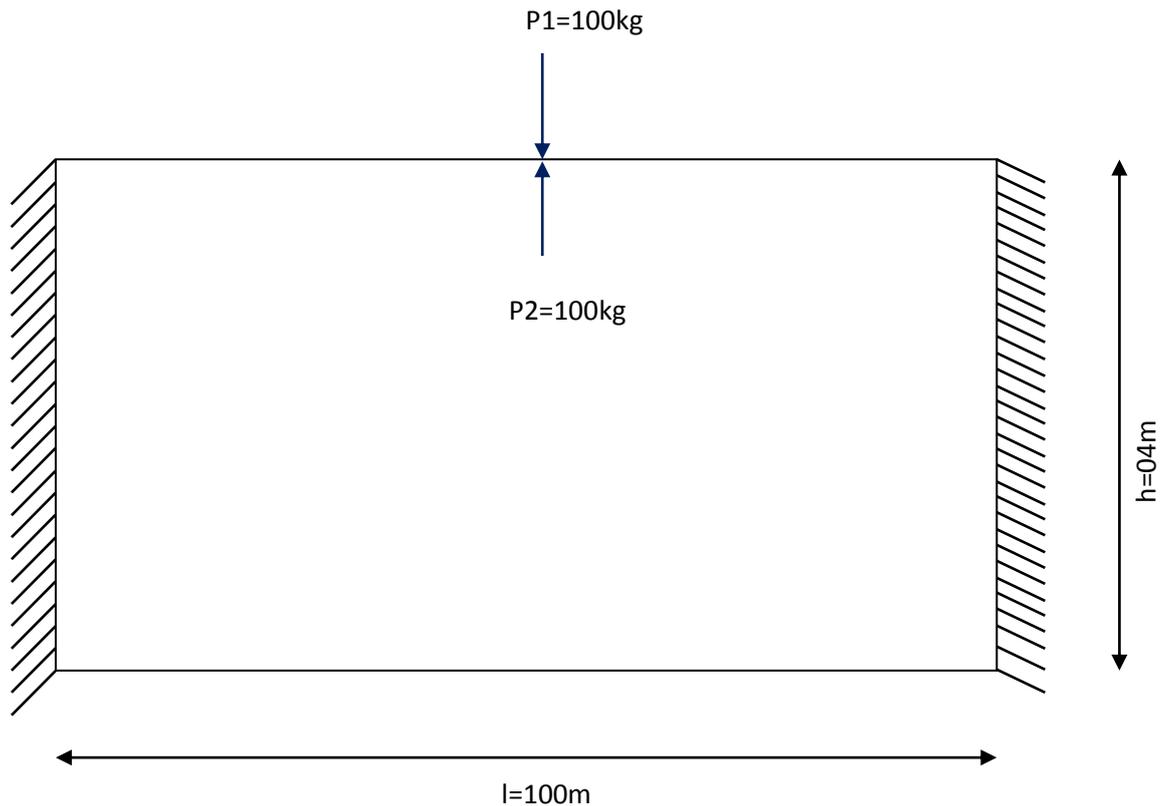


Fig. 5.3- Problème statique symétrique (force ponctuel) traité.

La figure (5.4), schématise la réponse sous forme de déplacements verticaux à la surface libre du profil de sol.

L'indice $UEP_P = 100kg$, indique le déplacement élastoplastique le long de la surface libre du profil de sol qui résulte de l'application de la charge ponctuel $P1=100kg$.

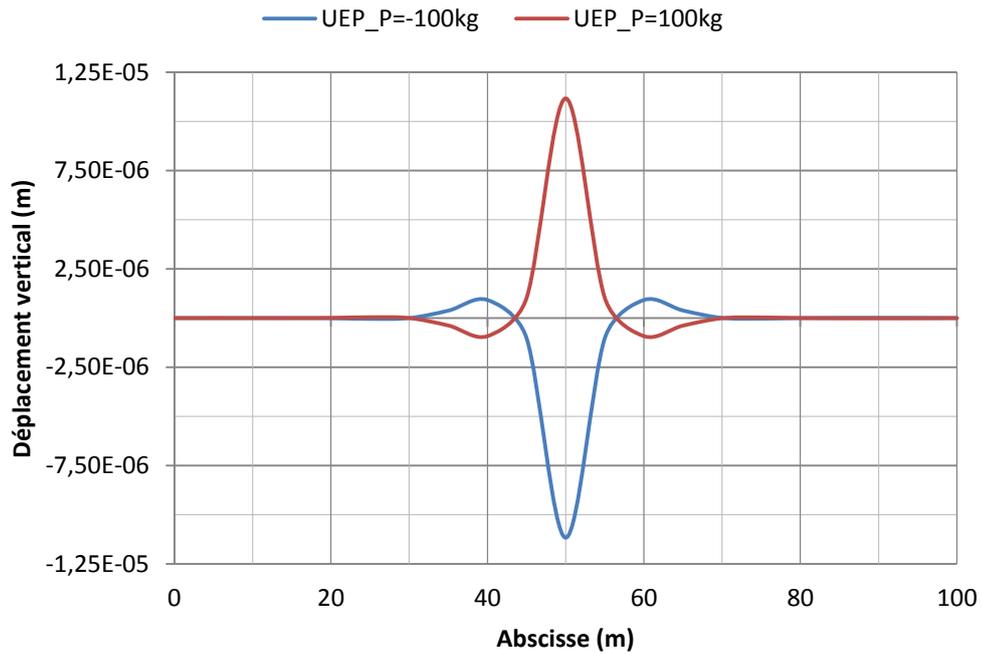


Fig. 5.4- Réponse élastoplastique à la surface libre du profil de sol, cas d'un chargement concentré.

Dans l'application ci-dessous, on garde les mêmes données, mais au lieu d'une seule charge, on applique deux charges ponctuelles de mêmes grandeurs ($P_1=P_2=100\text{kg}$), appliquées à 20m de l'extrémité du profil de sol symétriquement. Les résultats sont schématisés dans la figure (5.5).

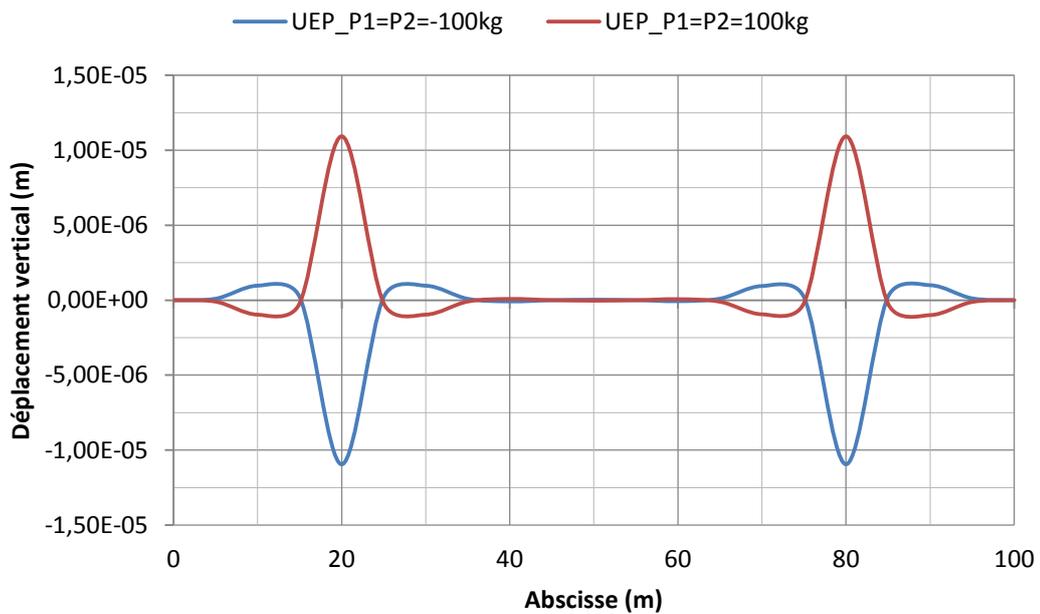


Fig. 5.5- Réponse élastoplastique du profil de sol, cas de deux charges concentrées.

L'application suivante est praticable pour déterminer la réponse statique d'un profil de sol soumis à un chargement uniforme à sa surface libre, qui peut présenter le cas de consolidation à court terme d'un sol à caractéristique médiocre (présence de nappe phréatique). La charge uniforme représente le remblai, qui sert à consolider le sol. Le problème traité ainsi que les conditions aux limites sont schématisés dans La figure (5.6).

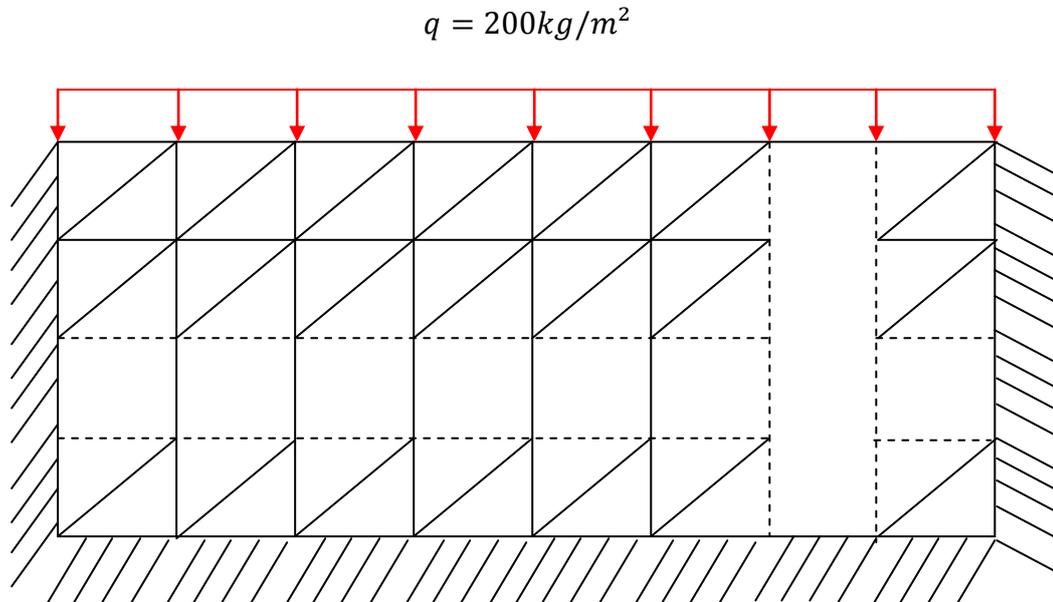


Fig. 5.6- Schématisation du problème statique pour un chargement uniforme.

Les tassements des particules le long de la surface libre du profil de sol, sont schématisés sur la figure (5.7).

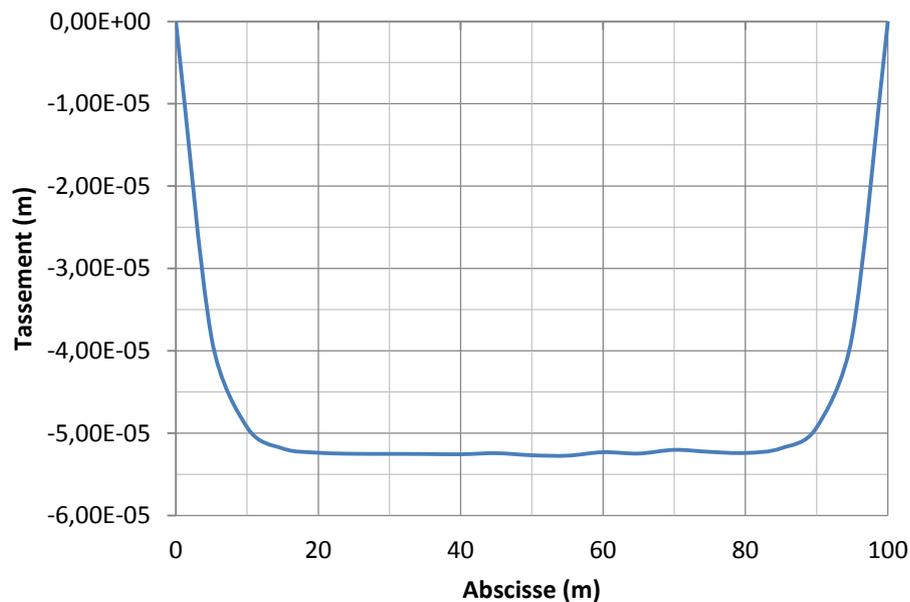


Fig. 5.7- Déplacements verticaux à la surface libre du profil de sol.

5.4. Courbe contrainte-déformation sous chargement sismique

Les enregistrements des mouvements du sol pendant un séisme montrent que les accélérations, et donc les contraintes et déformations induites sont cycliques et rapides. Afin de mettre en évidence ce phénomène, nous allons étudier une couche de sol homogène d'une épaisseur de 10m et de caractéristiques mécaniques montrées sur le tableau (5.2). La couche de sol est modélisée par un élément poutre. Nous avons choisi d'étudier deux géomatériaux, une argile molle et du calcaire.

Tableau 5.2- Caractéristiques dynamiques du profil de sol.

	Masse volumique $\rho \left(\frac{kg}{m^3}\right)$	Module de Young $E \left(\frac{MN}{m^2}\right)$	Coefficient de Poisson ν
Argile molle	2000	0.5	0.3
Calcaire	2000	2200	0.3

On exposera dans cette application, une étude paramétrique sur l'influence de la nature des géomatériaux sur la courbe qui décrit les contraintes de cisaillements en fonction des déformations de cisaillements par la variation du module de cisaillement.

Pour l'étude de cas, le profil de sol est modélisé par une colonne (Fig. 5.8), encastrée à la base et de hauteur égale à 10m (épaisseur du profil de sol). Ce monocouche est excité par l'accélérogramme enregistré à la station de Keddara (rocher) pendant le séisme de Boumerdes du 21 Mai 2003 (Fig. 5.9).

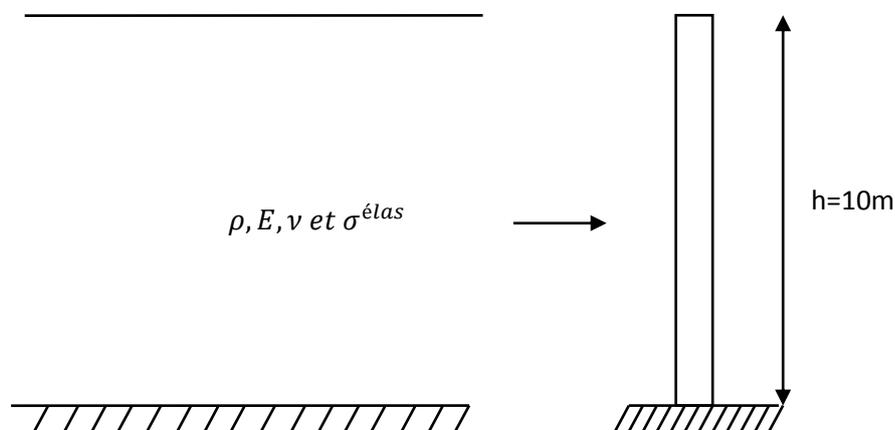


Fig. 5.8- Schématisation unidimensionnelle du profil de sol.

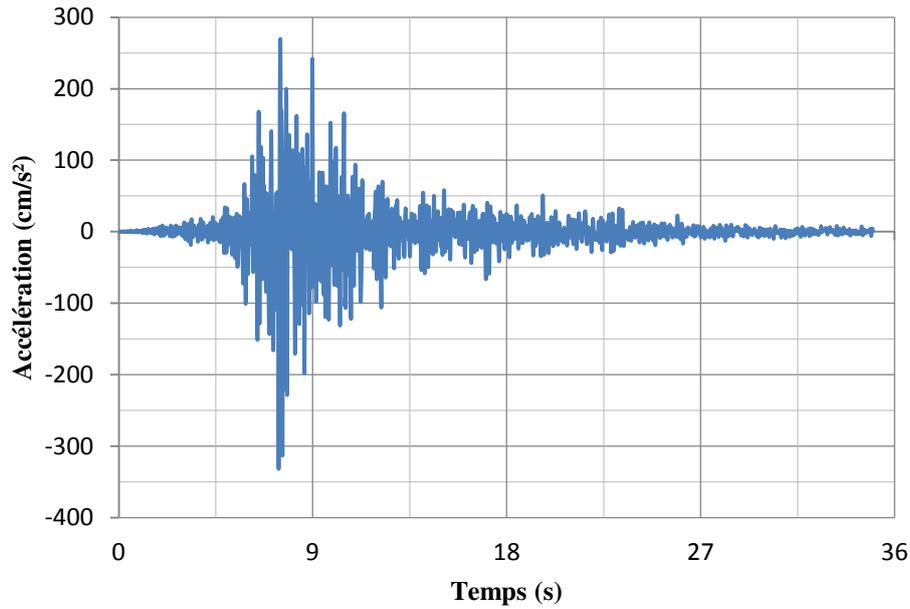


Fig. 5.9- Accélérogramme enregistré à la station de Keddara et appliqué à la base du profil de sol.

Nous allons choisir une fonction d'écroissage, donné par la relation générale suivante :

$$\tau = \frac{\varepsilon}{a + b\varepsilon} \quad (5.11)$$

La relation (5.11), peut s'écrire comme suit :

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{E_i} + \frac{R_f}{q_f} \varepsilon} \quad (5.12)$$

La contrainte de rupture est donnée par [Wulfsohn et al, 2002]:

$$q_f = \frac{2c \cos \phi + 2\sigma_3 \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (5.13)$$

La figure (5.10), schématise la fonction d'écroissage pour le modèle hyperbolique.

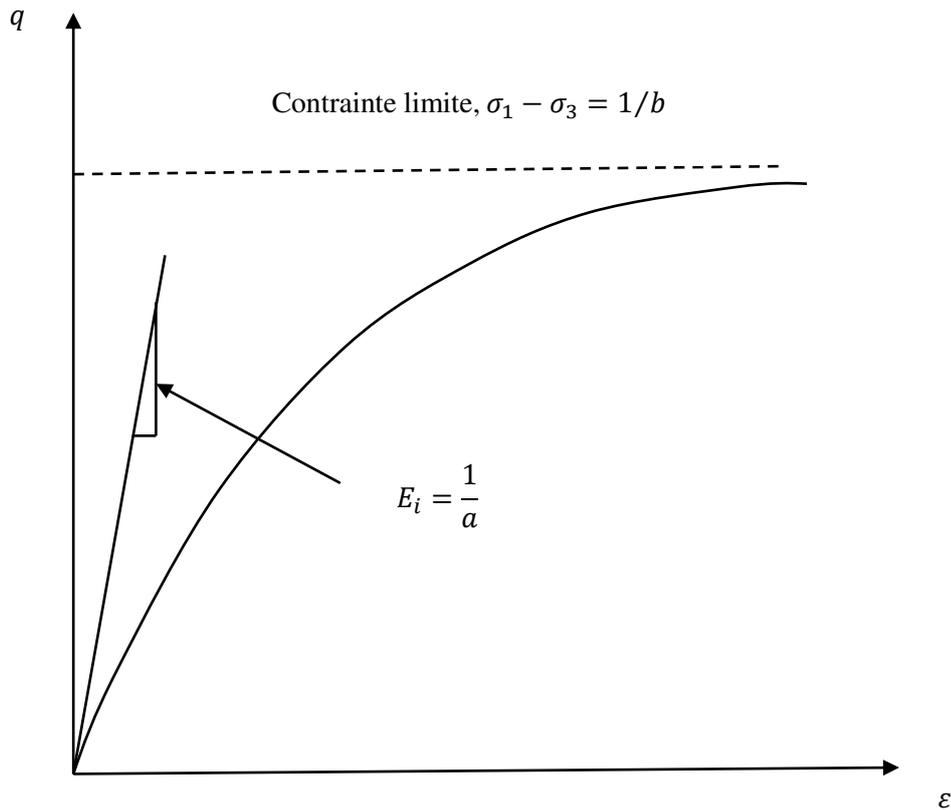


Fig. 5. 10- Fonction d'écrouissage parabolique [Wulfsohn et al, 2002]

On injecte le modèle hyperbolique comme une fonction d'écrouissage pour déterminer la réponse sismique des deux types de matériaux, l'argile molle et le calcaire.

5.4.1. Cas d'une argile molle

La figure (5.11), schématise le comportement $(\tau - \gamma)$ du matériau d'argile molle en fonction du temps d'excitation du séisme de Keddara.

La figure (5.11), exprime le fort comportement non linéaire du matériau d'argile molle, car on constate d'après cette figure, qu'il y'a un palier de contrainte qui peut correspondre à une infinité de déformations.

On constate que le comportement de l'argile molle est linéaire (pour des déformations très petites), ensuite il y'a une chute du module de cisaillement jusqu'à la ruine pour les grandes déformations de cisaillements.

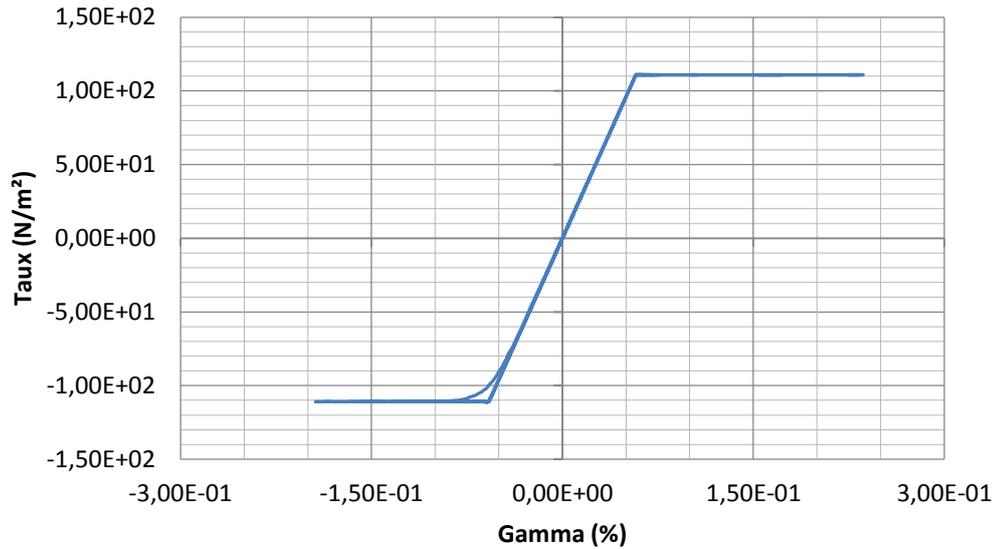


Fig. 5.11- Courbe ($\tau - \gamma$) du matériau d'argile molle.

5.4.2. Cas d'un calcaire

Pour le cas où le profil de sol est composé du matériau de calcaire, la figure (5.12) schématise la variation de la contrainte de cisaillement en fonction de la déformation du cisaillement.

D'après la figure (5.12), on constate que le module de cisaillement du calcaire garde sa valeur le long du temps d'excitation.

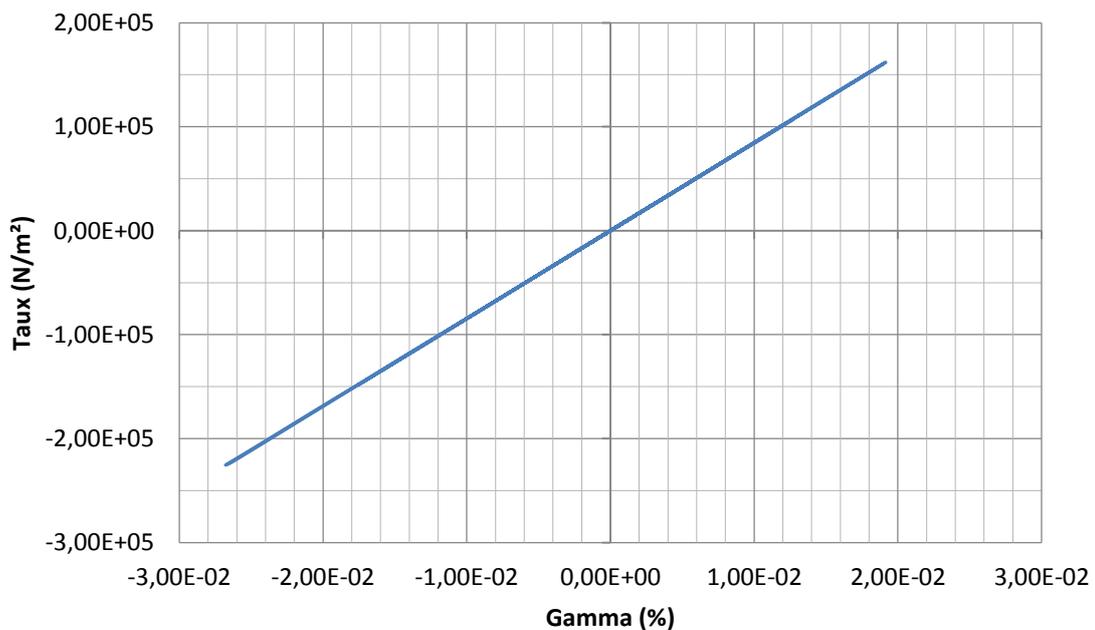


Fig. 5.12- Courbe ($\tau - \gamma$) du matériau du calcaire.

Pour un matériau qui a un module de cisaillement égal à $2 \times 10^{08} \text{ kg/m}^2$, la variation de ce dernier lors d'une excitation sismique est schématisée sur la figure (5.13).

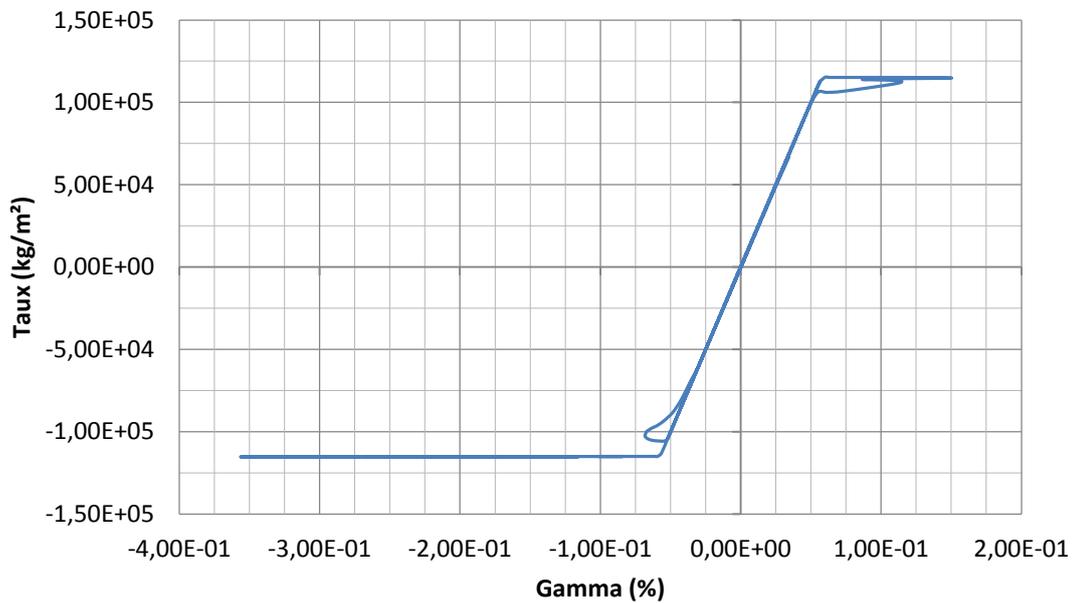


Fig. 5.13- Courbe ($\tau - \gamma$) d'un géomatériau.

5.4.3. Discussions

On remarque d'après les résultats trouvés, que le comportement du géomatériau calcaire lors d'une excitation sismique est fortement linéaire réversible (le parcours des contraintes-déformations est le même en chargement ou déchargement), c'est pour cette raison que le module de cisaillement garde sa valeur initiale au cours de l'excitation sismique.

Tandis que le comportement du géomatériau d'argile molle est fortement non linéaire, car ce dernier perd sa résistance (dégradation du module de cisaillement) jusqu'à la ruine (l'apparition du palier). Pour des géomatériaux compris entre la gamme d'argile et calcaire, ces géomatériaux auront un comportement élastoplastique (par hypothèse).

Le modèle élastoplastique décrit bien la relation d'hystérésis entre les contraintes et les déformations lors d'un mouvement sismique. Pour le modèle unidimensionnel la dégradation du module de cisaillement est bien présentée du fait que ce dernier pour une marge de déformation reste constant ou interchangeable (comportement élastique), mais dès que la déformation devient importante la prédiction élastique n'est pas correcte, le module de cisaillement se pénalise de plus en plus si la déformation est importante. Pour des

différentes applications, le module de cisaillement final peut prendre le $(\frac{1}{3})$ de sa valeur initiale, d'où une véritable menace de la structure. Avec l'existence des nappes phréatiques et une couche intermédiaire de sable en s'attend au phénomène de liquéfaction.

5.5. Réponse sismique d'un site

5.5.1. Cas de sollicitations élevées

Dans cette application, nous allons déterminer la réponse d'un site en termes d'accélération à la surface du profil de sol représentatif. Nous avons choisi un site qui avoisine un site expérimental, c-à-d au niveau duquel des accélérations enregistrées lors d'un séisme sont disponibles. Il s'agit d'un site situé dans la région de Bab Ezzouar dans la capitale Alger.

Le tableau (5.3), donne les valeurs des vitesses de l'onde de cisaillements en fonction de la profondeur du profil de sol multicouche (site de Bab Ezzouar). La base du profil de sol est excitée par l'accélérogramme enregistré à la station rocheuse de Keddara (séisme de Boumerdes). On suppose que le substratum est continu vers le site étudié. Les fréquences naturelles seront déterminées suivant la relation (4.21) avec $B=0.5$ et $V_b = 802 \text{ m/s}$. On trouve d'après cette relation que $f_1 = 10.96 \text{ Hz}$ et $f_2 = 29.29 \text{ Hz}$.

Pour chaque couche physique du profil étudié, le nombre d'éléments nécessaires a été déterminé de telle sorte que la longueur d'onde dans chaque couche soit supérieure à 10 fois la hauteur d'un élément de cette couche [Khellafi, 2002] (Tableau 5.4).

Tableau 5.3- Paramètres géotechniques du profil de sol de Bab Ezzouar.

Couche	Profondeur h(m)	Epaisseur de la couche (m)	Nature	$\rho(\frac{Kg}{m^3})$	$V_s(\frac{m}{s})$	ξ
01	3.00	3.00	Remblai de toute nature	2000	300	13%
02	6.00	3.00	Argile brune graveuse	2170	352	13%
03	13.80	7.80	Argile beige compacte	2100	540	23%
04	16.30	2.50	Limon argileux	2115	802	23%
05	24.00		rocher	-	-	-

Tableau 5.4- Maillage et caractéristique du profil de sol de Bab Ezzouar.

Couche	Matériaux	y(m)	h(m)	$V_s(\frac{m}{s})$	$\lambda = \frac{V_s}{f_{max}}$	$\Delta h(m)$	$\sigma^{élas}(\frac{Kg}{m^2})$
01	Remblai de toute nature	0.00 3.00	3.00	300	12	0.3	13589
02	Argile brune graveuse	3.00 6.00	3.00	352	14.08	0.3	6123
03	Argile beige compacte	6.00 13.80	7.80	540	21.6	0.78	2691
04	Limon argileux	13.80 16.3	2.50	802	32.04	0.25	1800

La hauteur (épaisseur) totale du profil de sol est divisée en 40 éléments, avec le choix d'une forme hyperbolique pour la fonction d'écroûissage. La tolérance exigée dans cette application pour la convergence des résultats et d'ordre $\epsilon = 10^{-5}$.

La figure (5.14), schématise la réponse relative calculée à la surface libre du site de Bab Ezzouar suivant les relations (4.28), (4.29) et (4.30), respectivement.

La figure (5.15), schématise la comparaison entre la réponse enregistrée et la réponse amortie calculée à la surface libre du site de Bab Ezzouar suivant la relation (4.29).

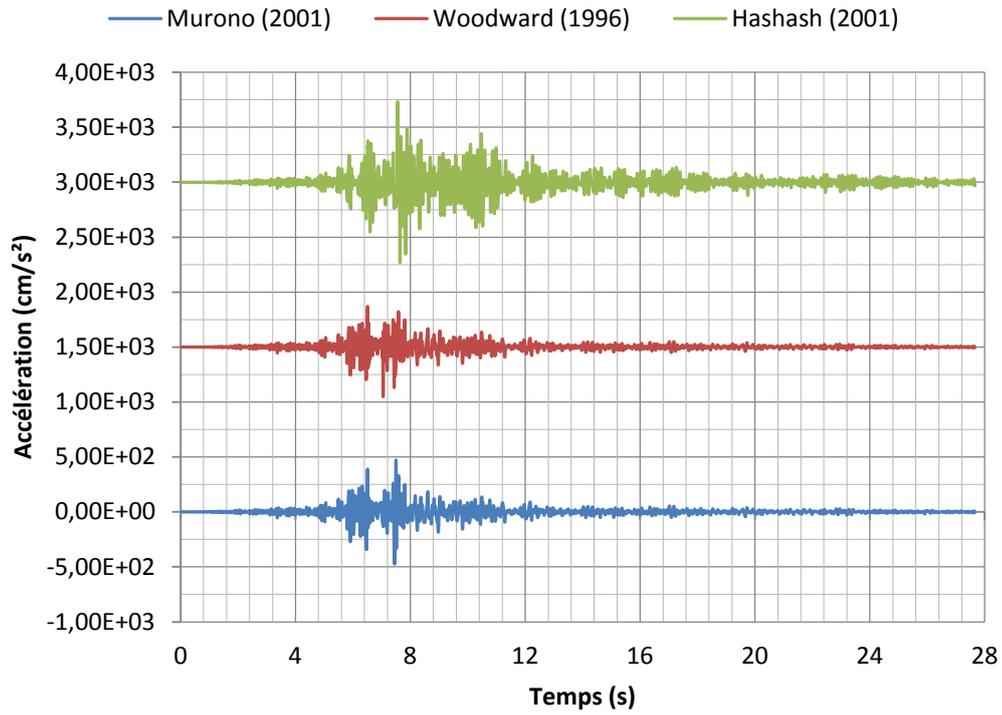


Fig. 5.14- Accélérations relatives calculées à la surface libre du site de Bab Ezzouar.

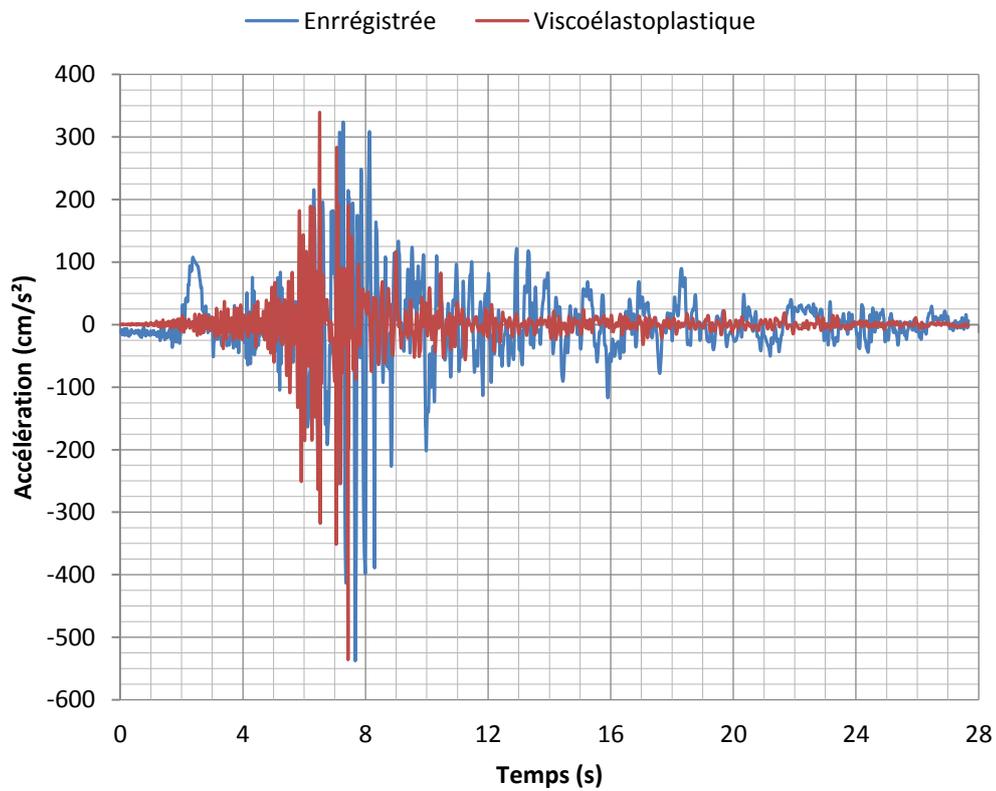


Fig. 5.15- Comparaison entre l'accélération calculée et l'accélération enregistrée à la surface libre du site de Bab Ezzouar.

Les résultats obtenus d'après la figure (5.15), montrent que le modèle viscoélastoplastique suivant le critère de Von Misès donne une réponse similaire et dans l'accord acceptable à celle enregistrée. Les accélérogrammes calculés en surface sont en bonne concordance avec ceux enregistrés à Bab Ezzouar. Il faut noter que l'amplitude de l'accélération maximum calculée est similaire à celle enregistrée.

Le sol se comporte fortement non linéaire, du fait de la différence des résultats entre le modèle viscoélastique et le modèle viscoélastoplastique (Fig. 5.16).

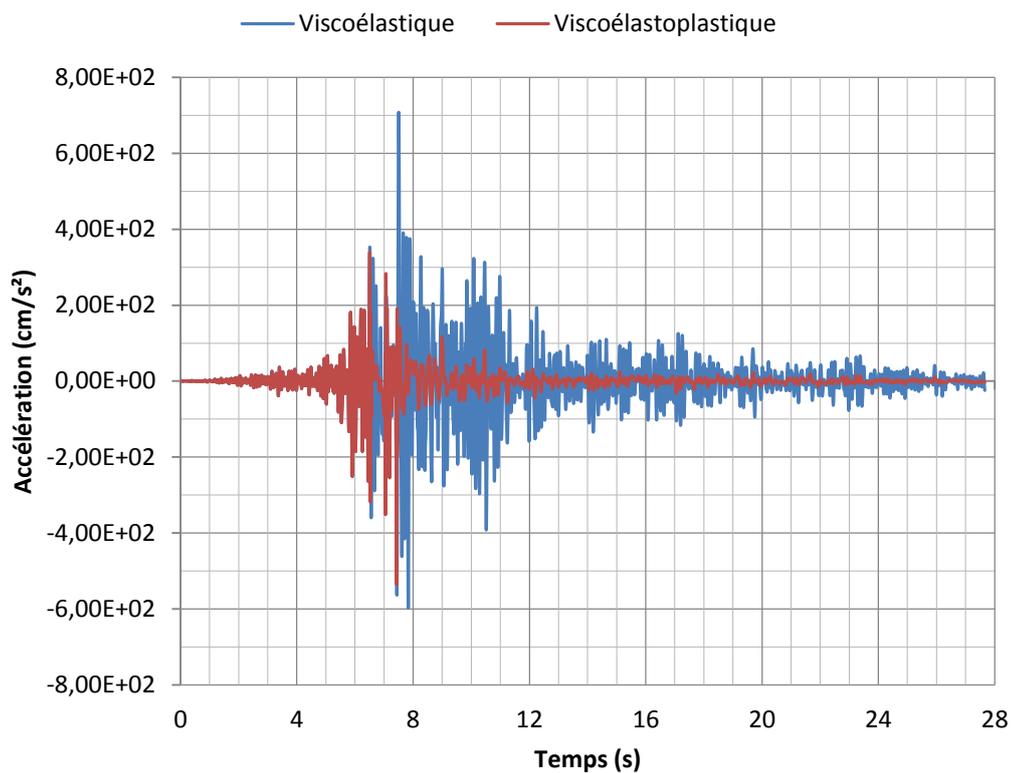


Fig. 5.16- Comparaison entre l'accélération calculée viscoélastique et l'accélération viscoélastoplastique à la surface libre du site de Bab Ezzouar.

Pour illustrer l'effet du coefficient d'amortissement sur la réponse sismique viscoélastoplastique à la surface libre du site de Bab Ezzouar, nous varions ce dernier de 2.5% à 15%.

La figure (5.17), représente la réponse sismique sous forme d'accélération pour un coefficient d'amortissement 2.5% et 5%, tandis que la figure (5.18) schématise la réponse sismique pour un coefficient d'amortissement 7.5% et 10% et finalement la figure (5.19) représente la réponse sismique pour un coefficient d'amortissement 13% et 15%.

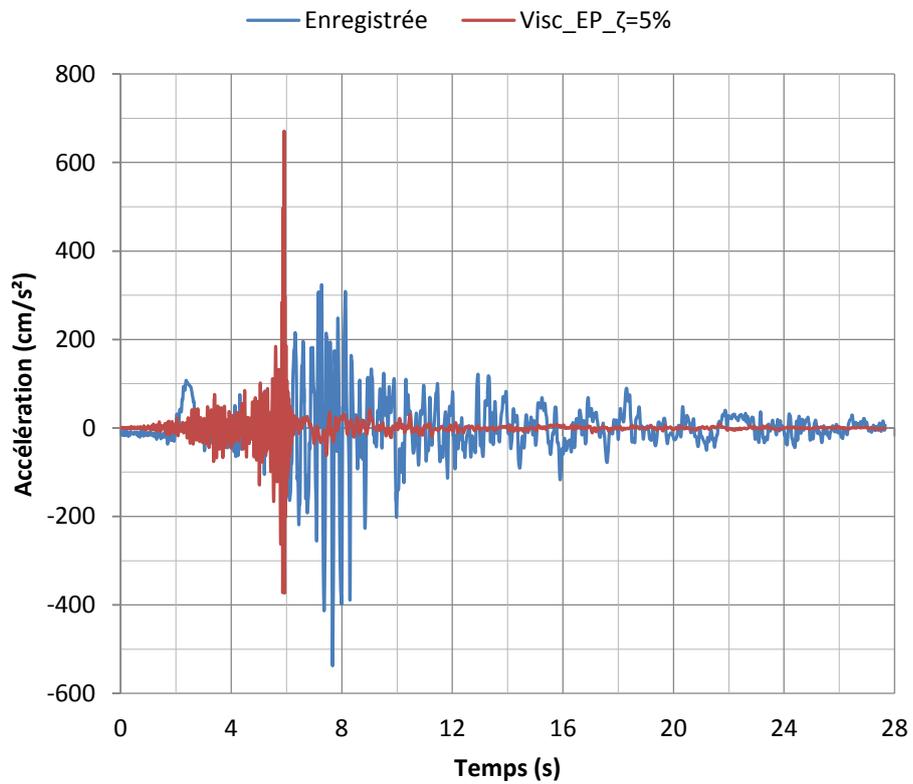
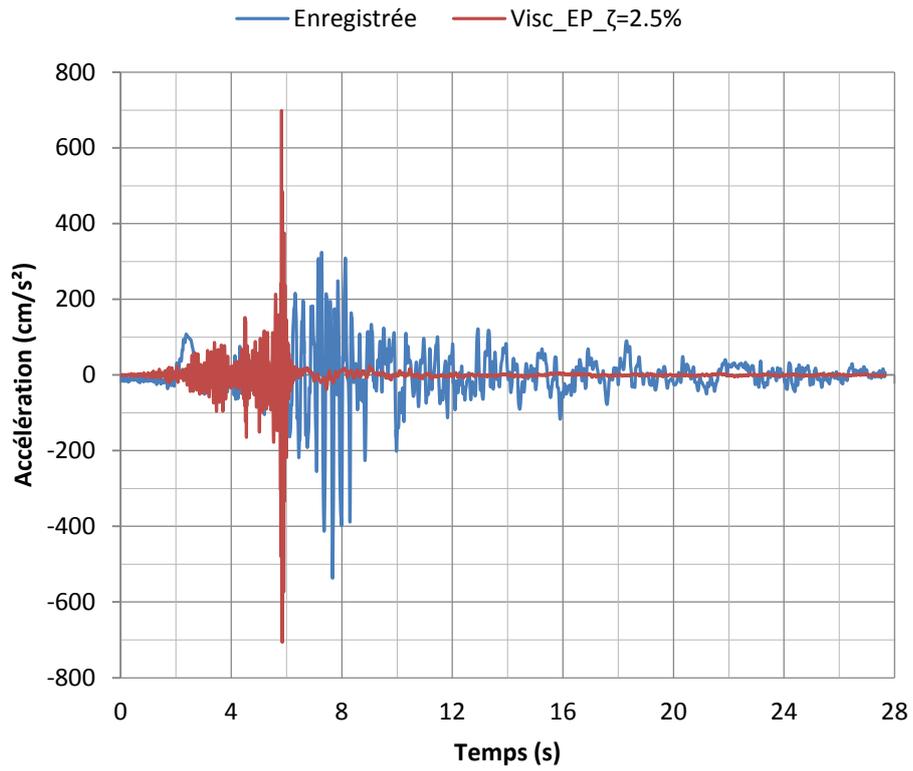


Fig. 5.17- Comparaison entre l'accélération calculée pour $\zeta = 2.5\%$, 5% et l'accélération enregistrée à la surface libre du site de Bab Ezzouar.

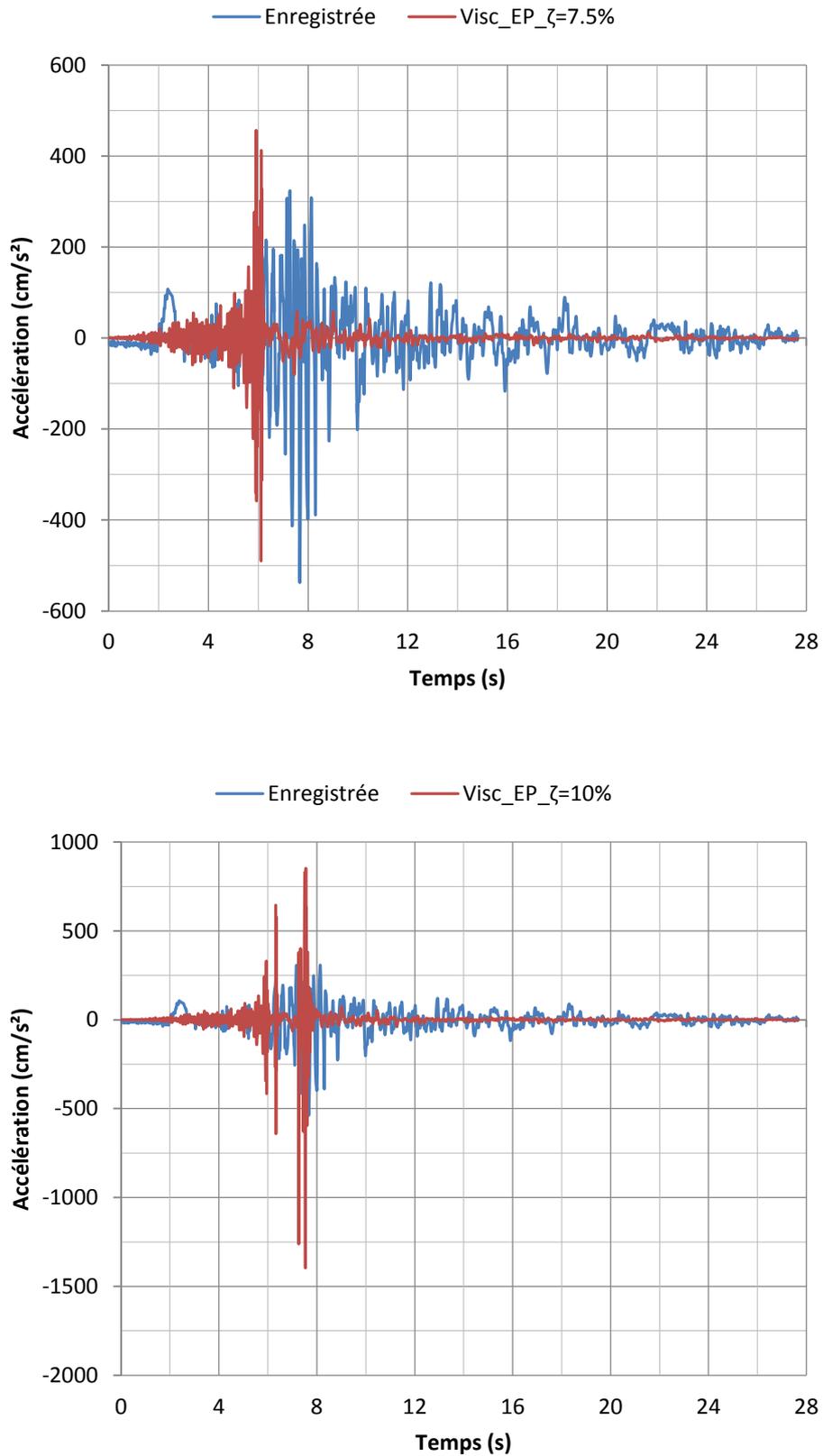


Fig. 5.18- Comparaison entre l'accélération calculée pour $\zeta = 7.5\%$, 10% et l'accélération enregistrée à la surface libre du site de Bab Ezzouar.

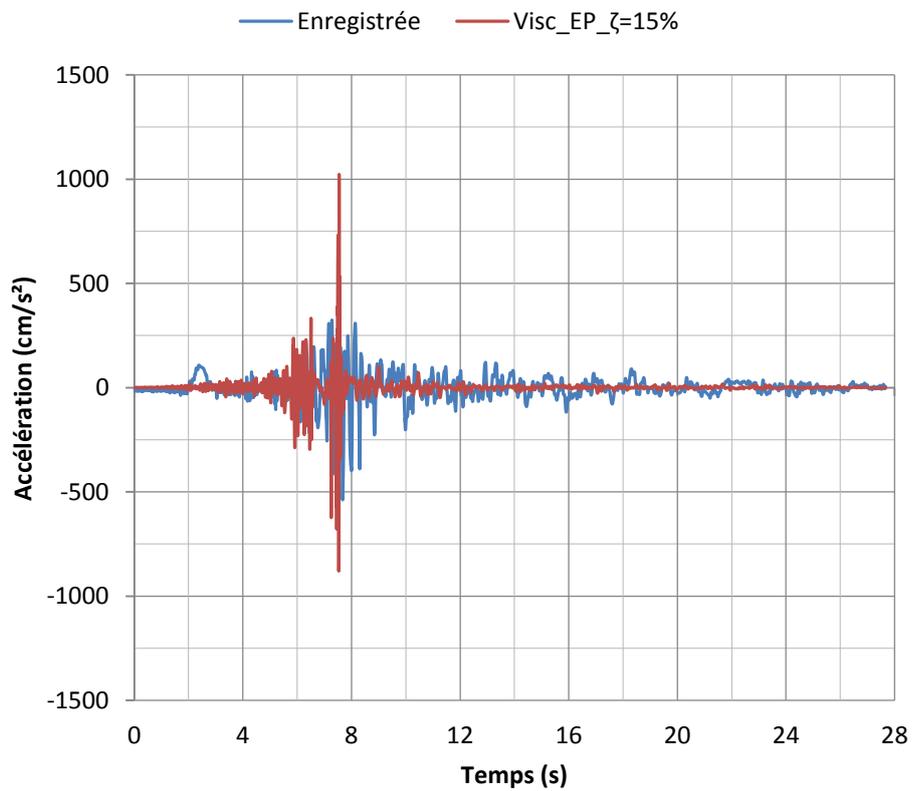
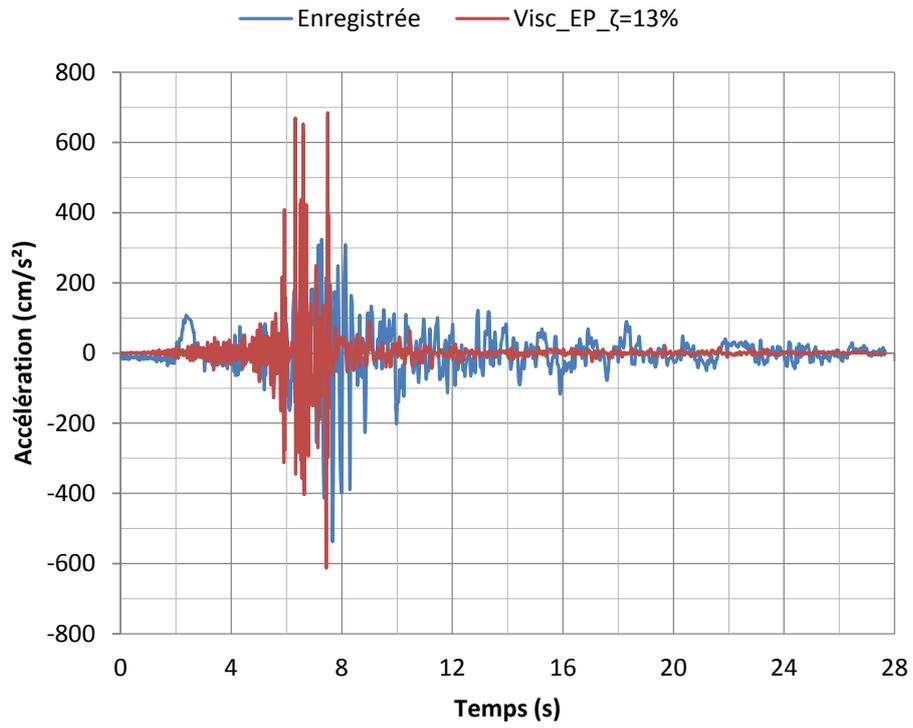


Fig. 5.19- Comparaison entre l'accélération calculée pour $\zeta = 13\%$, 15% et l'accélération enregistrée à la surface libre du site de Bab Ezzouar.

D'après les figures (5.17), (5.18) et (5.19) on constate l'influence du coefficient d'amortissement sur la réponse sismique. La réponse sismique calculée se converge vers la réponse enregistrée pour des grandes valeurs du coefficient d'amortissement. D'après ces résultats, on peut conclure que le sol du site de Bab Ezzouar est un sol ferme.

5.5.2. Cas de sollicitations faibles à modérées

La figure (5.20), schématise l'emplacement du site de Garner Valley, qui se trouve à environs 7 km à l'est de San Jacinto. Le profil de sol est équipé par des accélérographes pour différents niveaux de profondeurs (Fig. 5.21).

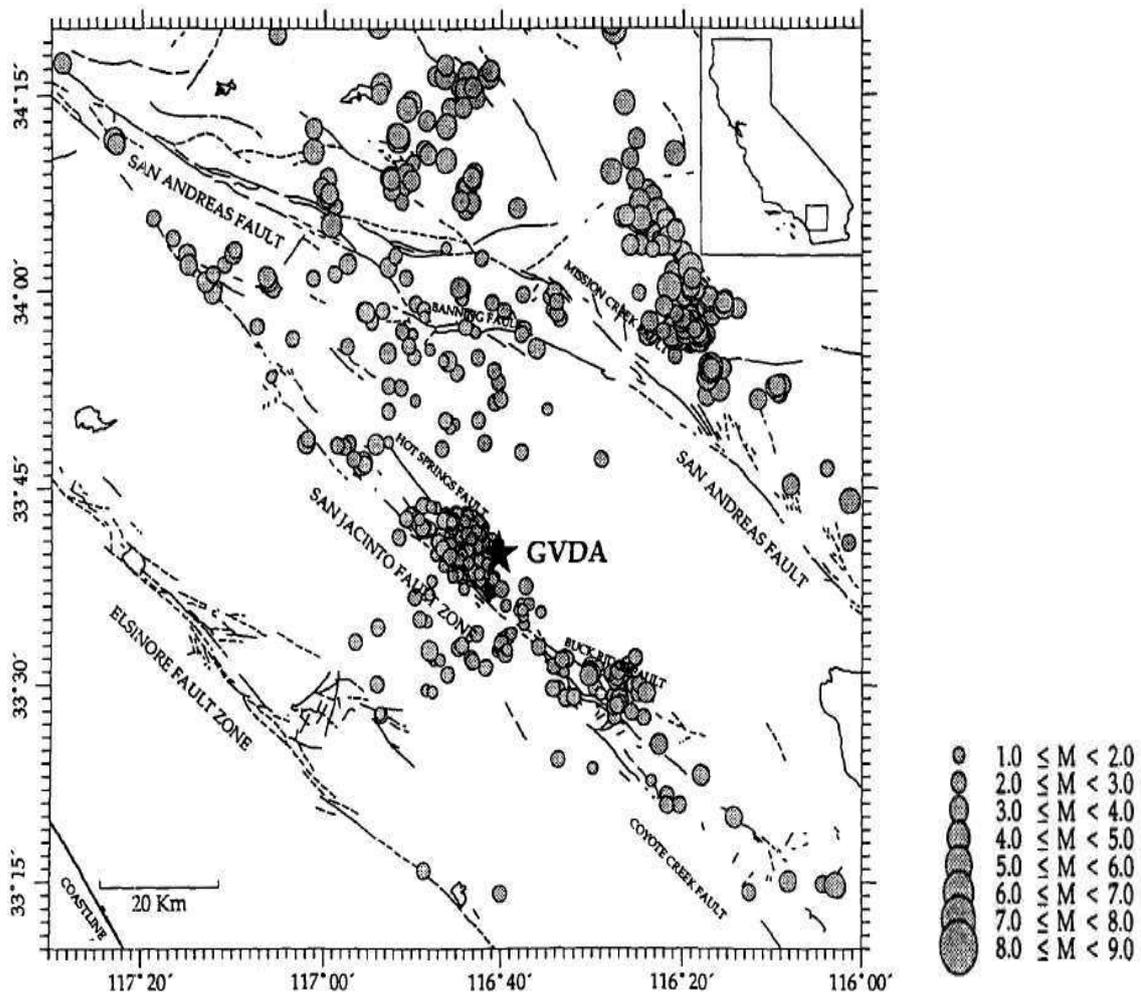


Fig. 5.20- Localisation du site de Garner Valley [Pecker, 1995].

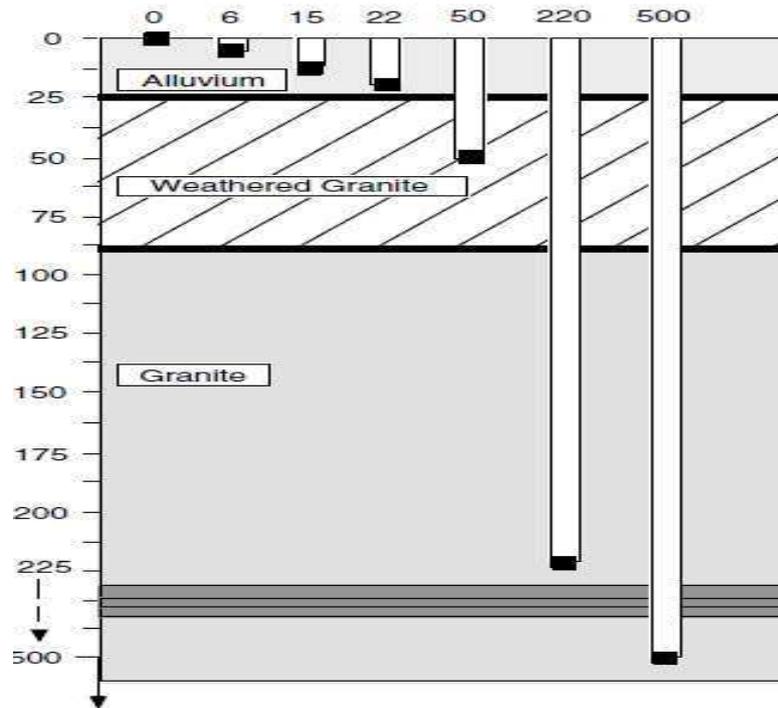


Fig. 5.21- Profil de sol du site de Garner Valley et position des accéléromètres [Bonilla et al, 2002].

Les caractéristiques géotechniques sont récapitulées dans le tableau (5.5), suivant des données trouvées par différents chercheurs.

Tableau 5.5- Données géotechniques du profil de sol de Garner Valley [Mohammadioun et al, 2002].

Profondeur (m)	Vitesse de cisaillement (m/s)	Masse volumique (kg/m ³)	ξ (%)
0 - 1	90	1950	2
1 - 2	130	1950	2
2 - 4	165	2000	2
4 - 6	190	2000	2
6 - 8	215	2000	4
8 - 9	240	2000	4
9-11.5			1-2
11.5 - 15	260	2000	1-2
15 - 18	280	2050	1-2
18 - 22	600	2200	1-2
> 22	2000	2400	-

Les travaux de [Pecker, 1995] sur la variation de la vitesse de cisaillement pour le cas des petites déformations, ont montrés que la variation de vitesse de cisaillement est proportionnelle avec la profondeur du profil de sol suivant cette relation :

$$\left. \begin{aligned} V &= V_b \left(\frac{y}{h}\right)^{1/4} \\ V_b &= K(h)^{1/4}, \quad K = 135, \text{ pour } y < 14m \\ & \quad K = 150, \text{ pour } y \geq 14m \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

D'après la relation (4.21), qui estime les fréquences naturelles du profil de sol pour $p = \frac{(1-B)}{(2-B)}$, il vient pour $B=0,5$ que $p = \frac{1}{3}$, d'où les fréquences naturelles du profil de sol $f_1 = 3.44Hz, f_2 = 9.20Hz, f_3 = 14.98Hz$.

Les fréquences naturelles du profil de sol déterminées d'après les enregistrements sont $f_1 = 3.25Hz, f_2 = 8.4Hz$ et $f_3 = 13.4Hz$ et qui sont en accord avec ceux estimées.

Le calcul viscoélastoplastique de la réponse sismique sous forme d'accélération relatives à la surface libre du profil de sol de Garner Valley suivant l'excitation de sa base rigide, qui se trouve à une hauteur $h=22m$, est schématisé suivant la figure (5.22) d'après les équations (4.28), (4.29) et (4.30), de Murono (2001), Woodward (1996) et Hashash (2001), respectivement.

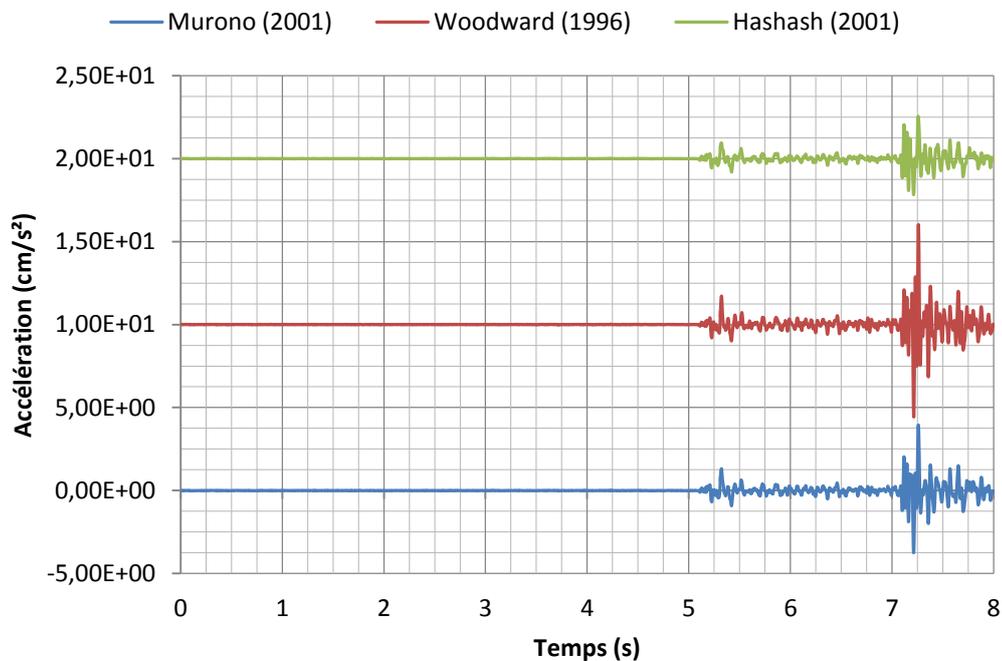


Fig. 5.22- Accélérations relatives calculées à la surface libre du profil de sol de Garner Valley pour différentes formes de la matrice d'amortissement.

On constate d'après la figure (5.22), qu'il existe une différence entre la réponse qui utilise la relation (4.29) [Woodward et al, 1996] et les deux autres relations.

La figure (5.23), exprime la comparaison entre l'accélération calculée viscoélastoplastique et l'accélération enregistrée à la surface libre suivant la relation (4.28), qui a comme expression $[C] = \omega_1 \xi [M] + \frac{\xi}{\omega_1} [K]$.

La figure (5.24), exprime la comparaison entre l'accélération relative calculée viscoélastoplastique et l'accélération viscoélastique.

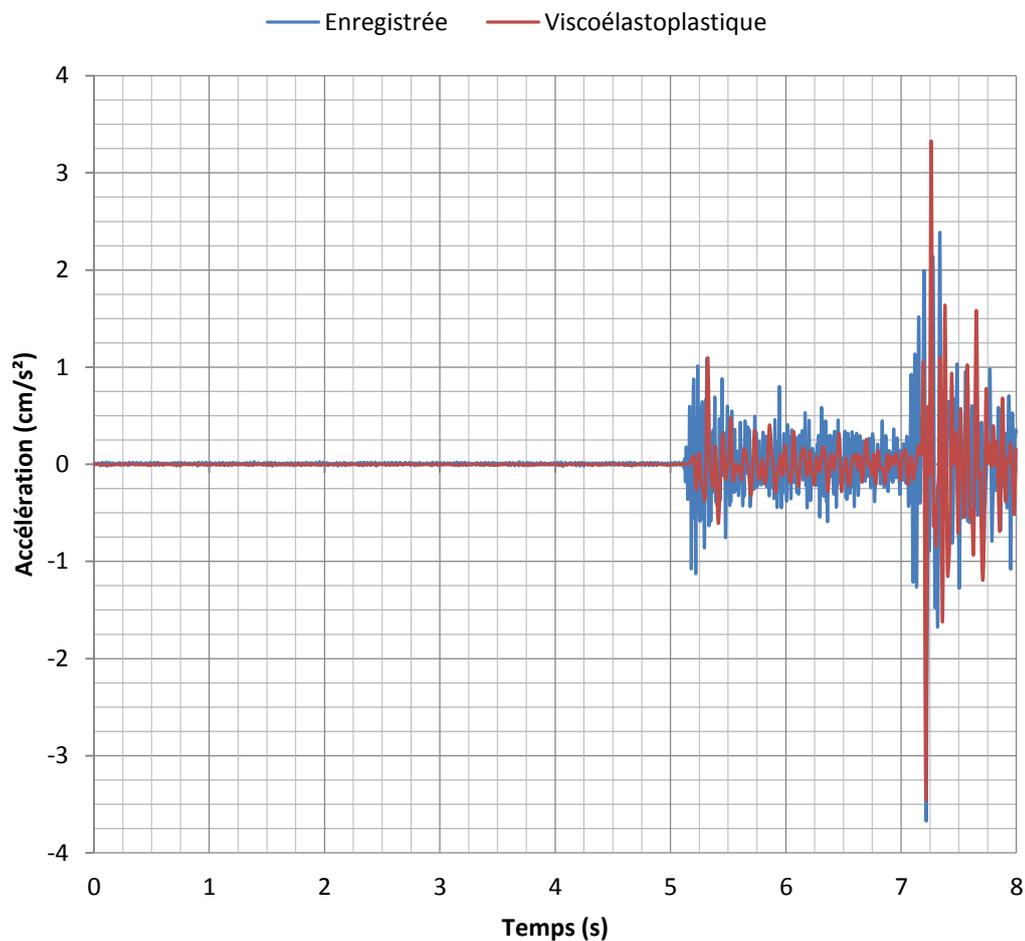


Fig. 5.23- Comparaison entre l'accélération viscoélastoplastique et l'accélération enregistrée à la surface libre du profil de sol de Garner Valley.

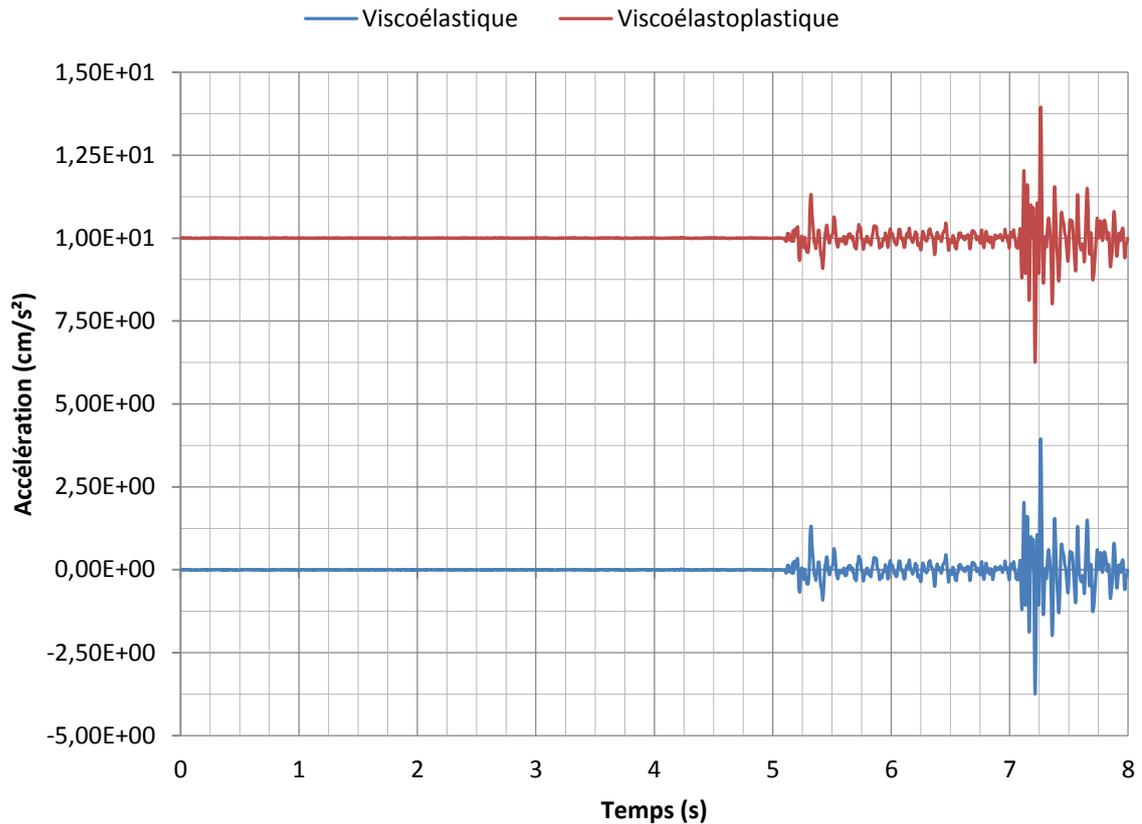


Fig. 5.24- Comparaison entre l'accélération relative viscoélastoplastique et viscoélastique à la surface libre du profil de sol de Garner Valley.

D'après la figure (5.23), on remarque qu'il ya une similitude entre la réponse viscoélastoplastique et celle enregistrée.

La figure (5.24), montre la forte linéarité qui régit le comportement des matériaux du profil de sol du site de Garner Valley lord de ce séisme.

5.6. Effet de la fonction de chargement sur la réponse sismique

Il existe plusieurs formes de fonction de chargement, qui sont utilisées pour décrire le comportement des contraintes-déformation post élastique (domaine plastique). Pour cette étude, deux types de fonction de charges sont utilisées, l'une est parabolique et l'autre et linéaire. La figure (5.25), schématise l'allure de ces deux fonctions.

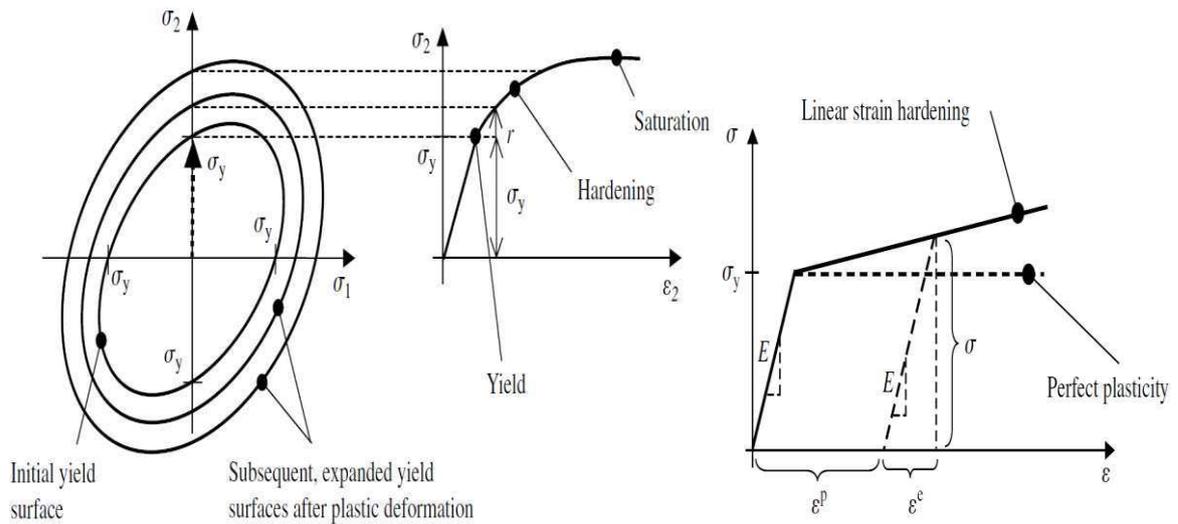


Fig. 5.25- Evolution isotropique de la fonction de chargement parabolique et linéaire et sa représentation unidimensionnelle des contraintes-déformations [Fionn et al, 2005].

Pour la première famille de fonction de chargement, on tient compte de deux formes du modèle Hyperbolique et le modèle Iwan. L'expression mathématique de ces derniers sont donnée par les relations (5.15) et (5.16), respectivement [Elgamal et al, 1985].

$$\tau = G_o \frac{\gamma}{1 + \gamma/\gamma_r} \tag{5.15}$$

$$\tau = G_o \left[\gamma - \frac{\gamma^{n+2}}{(n + 2)\gamma_u^{n+1}} \right] \tag{5.16}$$

Où, G_o est le module de cisaillement pour des petites déformations, γ_r et γ_u paramètres des modèles égaux à 0.0013 et 0.002, respectivement, n nombre entier pris égale à 0.

Pour le modèle linéaire, la fonction d'écrouissage est linéaire ou nulle (modèle élastoplastique parfait).

La figure (5.26), montre la comparaison entre la réponse enregistrée et la réponse sismique viscoélastoplastique à la surface libre du site de Bab Ezzouar excité par l'accélérogramme de Keddara à sa base supposée rigide en considérant le modèle hyperbolique et le modèle Iwan.

Il sort de la figure (5.26), que le modèle Iwan, prédit des réponses plus élastiques que non-linéaires, et d'ailleurs la figure (5.27) illustre cette constatation.

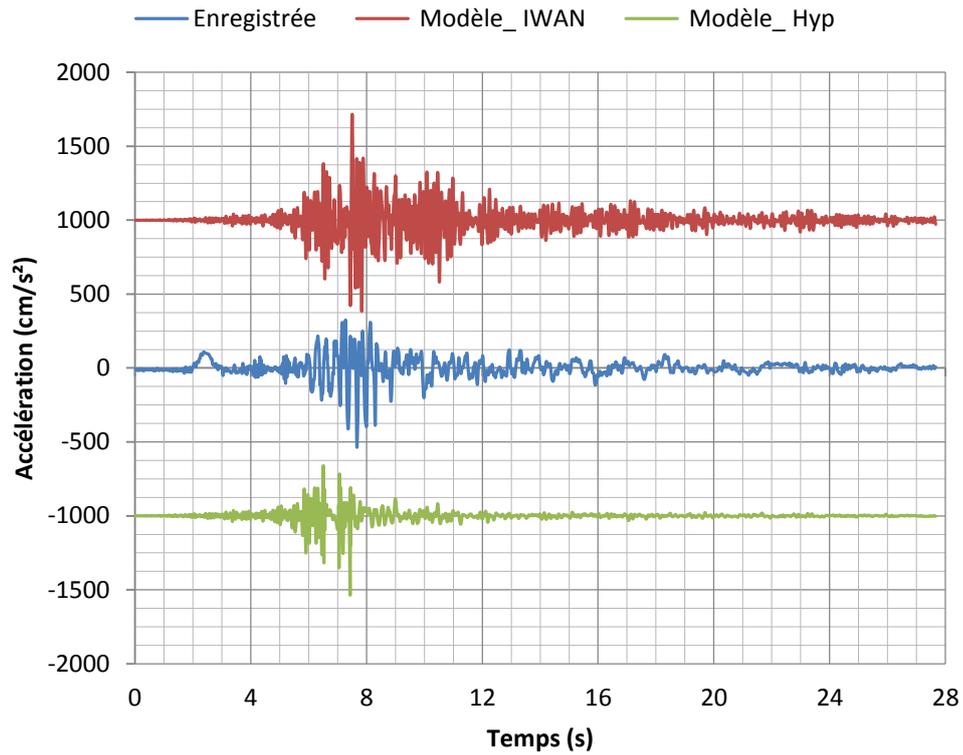


Fig. 5.26- Comparaison entre l'accélération calculée suivant le modèle Hyperbolique et le modèle Iwan et l'accélération enregistrée du site de Bab Ezzouar.

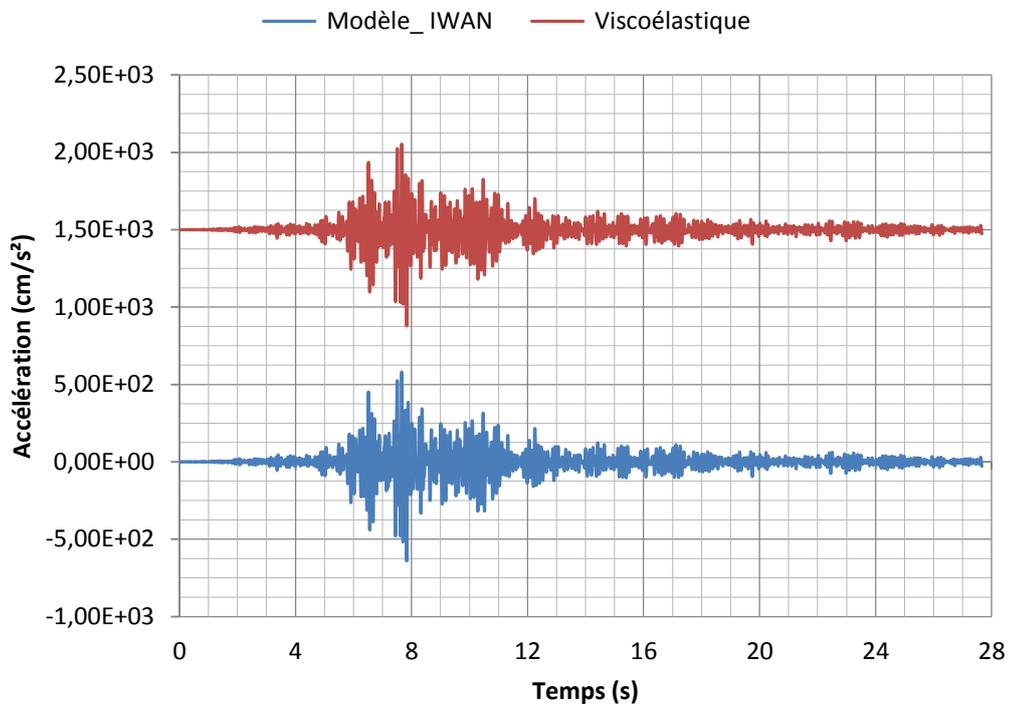


Fig. 5.27- Comparaison entre l'accélération relative calculée suivant le modèle Iwan et le comportement viscoélastique du site de Bab Ezzouar.

On peut conclure, que le modèle hyperbolique est le plus adaptable pour la modélisation des réponses sismique non linéaire des profils de sol que le modèle Iwan, car ce dernier est plus élastique.

Pour une fonction de charge linéaire, avec une pente qui varie entre (G et 0), à titre indicatif, lorsque la pente est nulle, le comportement et viscoélastoplastique parfait, les figures (5.28), (5.29), (5.30), (5.31) et (5.32), schématisent la réponse sismique relative pour le cas où la pente de la fonction de chargement est égale à G , $0.75G$, $0.5G$, $0.25G$ et 0 respectivement.

Il vient de ces figures, qu'il faut faire très attention quand il s'agit d'une fonction de chargement linéaire, car on constate qu'il y'a une très grande différence entre l'accélération calculée et celle enregistrée à la surface libre, mais il semble pour un comportement viscoélastoplastique parfait, que ce dernier prédit une bonne convergence des résultats, par contre dans les autres cas, il y'a une sur estimation.

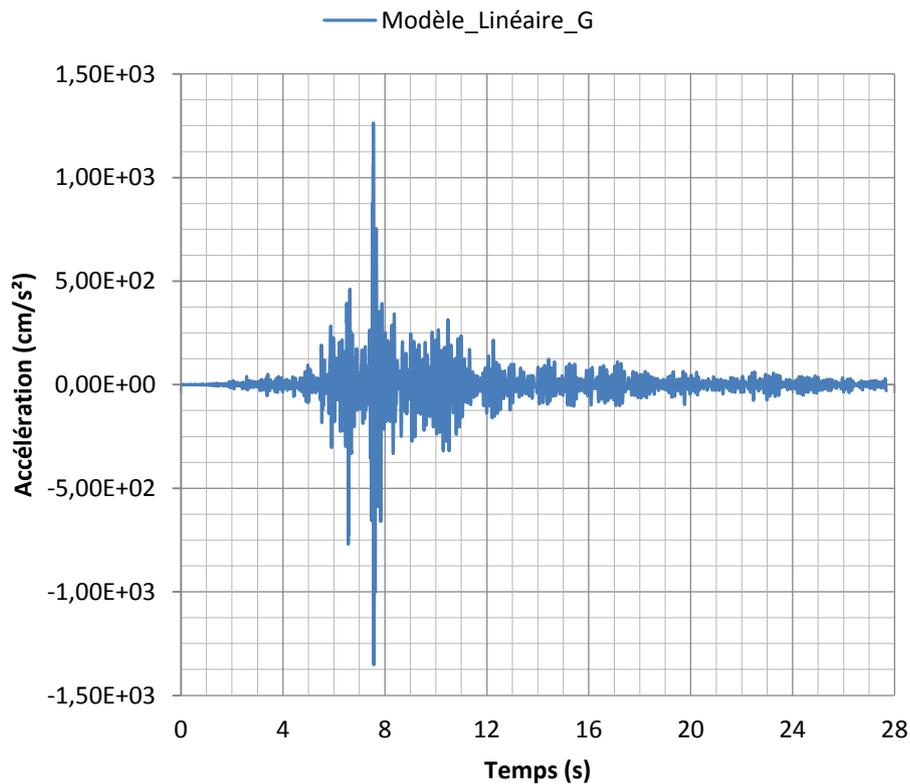


Fig. 5.28- Réponse relative viscoélastoplastique suivant une fonction de chargement linéaire avec un module égal à G .

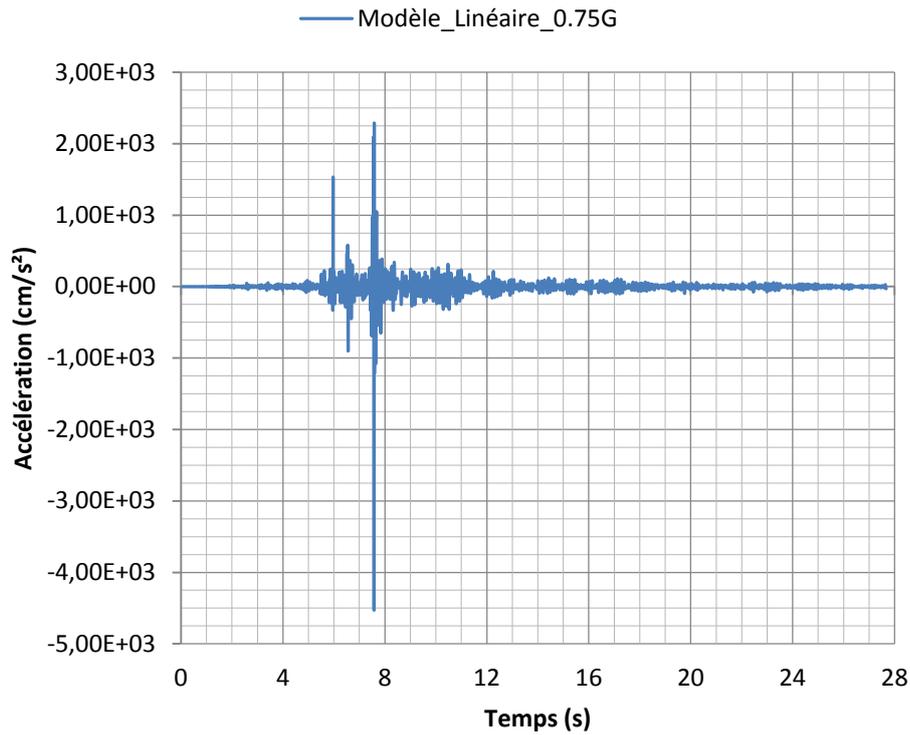


Fig. 5.29- Réponse relative viscoélastoplastique suivant une fonction de chargement linéaire avec un module égal à 0.75G.

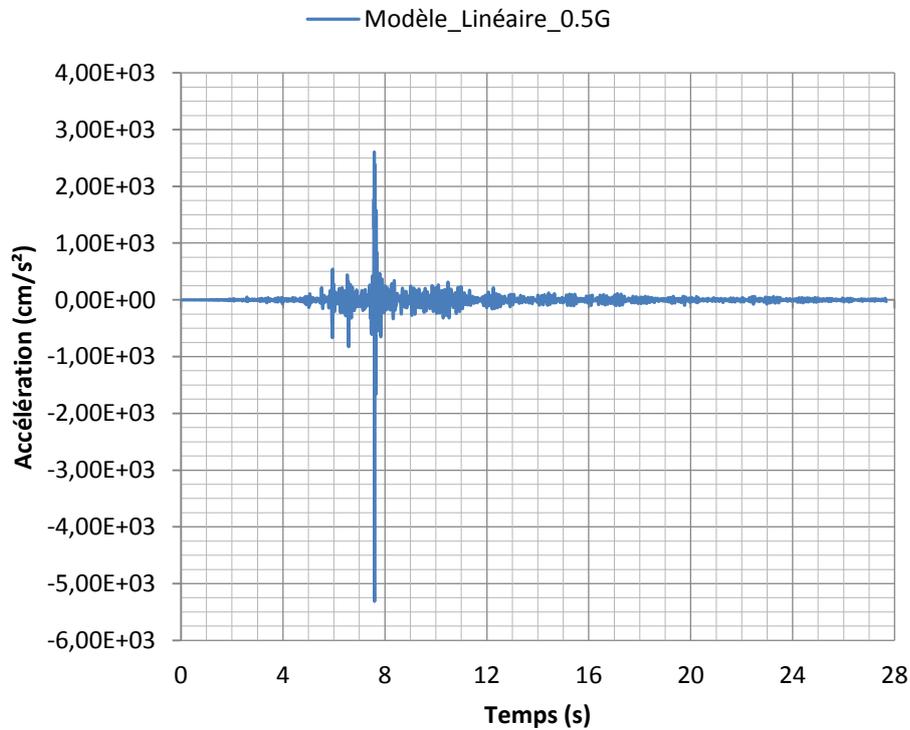


Fig. 5.30- Réponse relative viscoélastoplastique suivant une fonction de chargement linéaire avec un module égal à 0.5G.

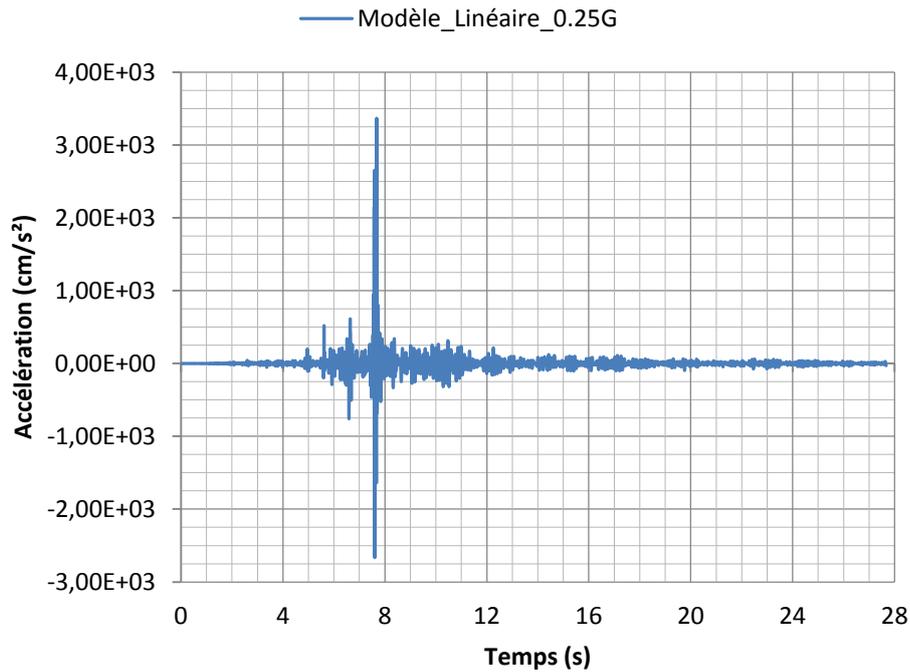


Fig. 5.31- Réponse relative viscoélastoplastique suivant une fonction de chargement linéaire avec un module égal à 0.25G.

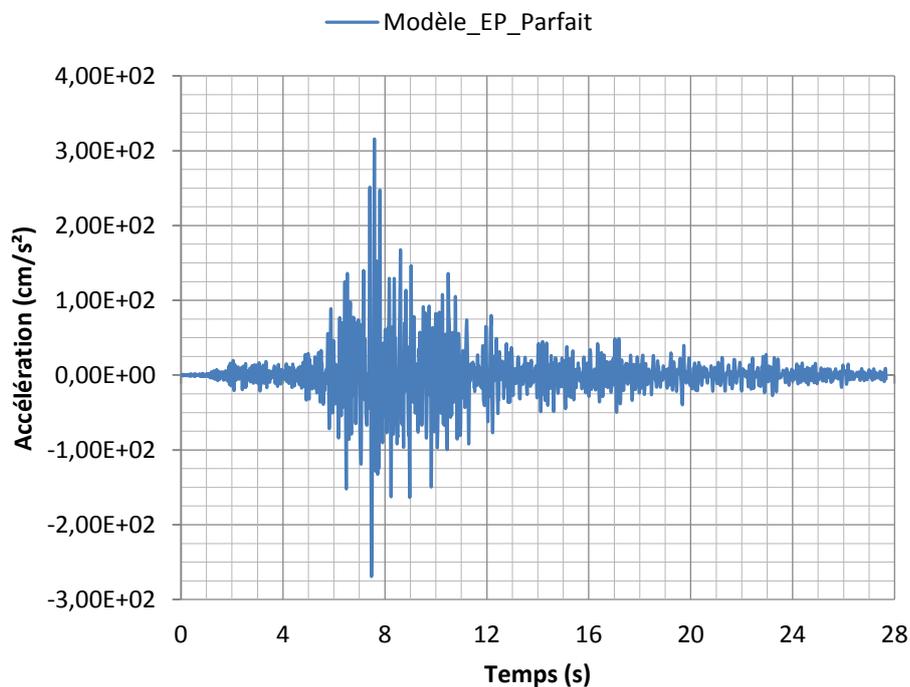


Fig. 5.32- Réponse relative suivant un comportement viscoélastoplastique parfait.

Pour un module tangent infini ($H = 10^{34} \text{ kg/m}^2$), la figure (5.33) schématise la réponse relative sous forme d'accélération à la surface libre du site étudié.

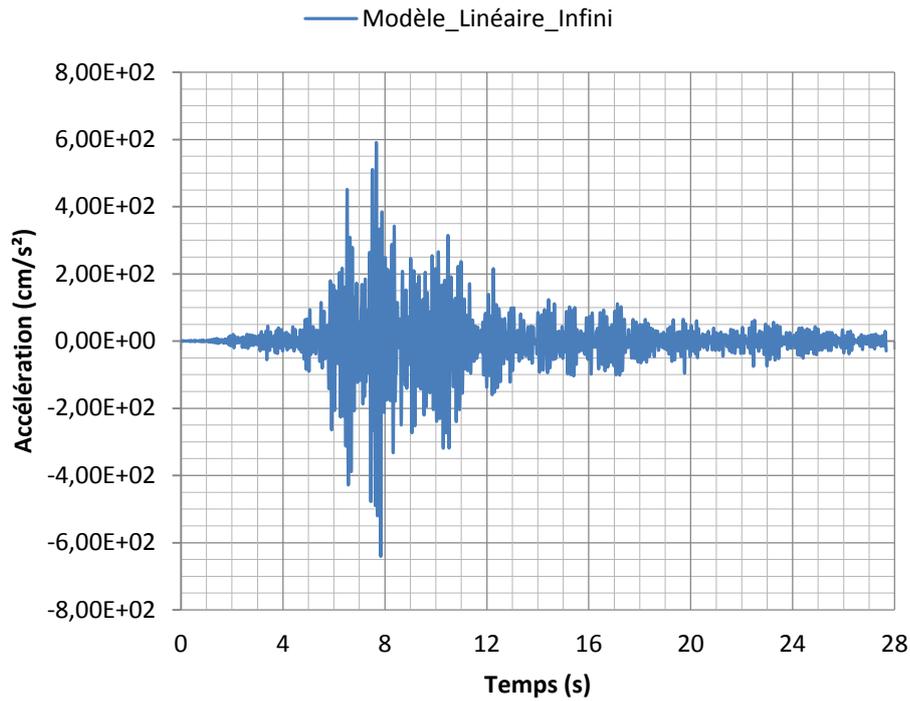


Fig. 5.33- Réponse relative suivant un comportement viscoélastoplastique parfait.

La figure (5.33), correspond en réalité à un comportement viscoélastique et la figure (5.34) illustre cette ressemblance.

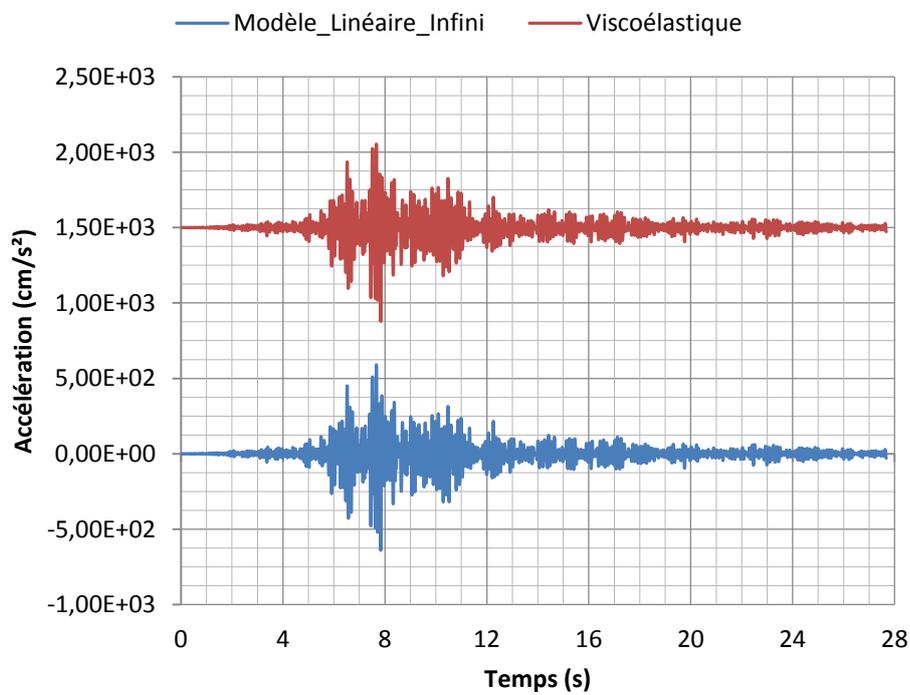


Fig. 5.34- Comparaison entre la réponse relative viscoélastique et la réponse relative viscoélastoplastique suivant un modèle linéaire de module infini.

5.7. Conclusion

Malgré la simplicité géométrique et mathématique du modèle viscoélastoplastique élaboré qui suit le critère de Von Misès, il donne des résultats acceptables. La dégradation du module de cisaillement lors d'une excitation sismique, fait apparaître un comportement hystérétique entre les contraintes et les déformations de cisaillements. Pour une meilleure exploitation du programme, il faut introduire d'autres facteurs qui vont sans doute améliorer la convergence des résultats, sans oublier de mener des applications dynamiques bidimensionnelles et tridimensionnelles, notamment sur des structures qui sont construites sur l'apport des géomatériaux telles que barrages en terre.

Les enregistrements des mouvements sismiques montrent que les accélérations, et donc les contraintes et les déformations induites sont cycliques et rapides, avec des cycles d'accélération se produisant en moins d'une seconde et une durée totale de l'événement sismique inférieure à une minute. Du point de vue de la mécanique des sols, cela signifie que le dépôt de sol est soumis à un chargement cyclique en conditions non drainée. Sous la rapidité de la vitesse sismique, l'eau n'ayant pas le temps de s'évacuer, le sol se déforme donc à volume constant. Le critère de Von Mises admet cette hypothèse, et la formulation mathématique de ce critère est basée principalement sur cette énoncé, et que le sol se déforme à volume constant.

Pour les faibles niveaux de déformation de cisaillement ($\leq 10^{-5}$), le comportement du sol est élastique, à la fin de chargement il n'y a pas de déformation résiduelle et le sol retrouve son état initial, mais lorsque l'amplitude du déviateur du tenseur de déformation devient plus importante ($> 10^{-5}$), le sol présente un comportement non linéaire avec des déformations irréversibles, et donc la nécessité d'une loi de comportement plus sophistiquée pour décrire la relation de non linéarité contrainte-déformation s'impose.

La formulation élastoplastique permet de mieux décrire le comportement des dépôts de sol et des barrages en terre construits sur l'apport des géomatériaux lors d'une sollicitation sismique. En effet, dans un comportement non linéaire (apparition des déformations irréversibles), le tenseur des raideurs de la structure se dégrade ainsi que le module de rigidité au cisaillement résultant en une baisse de vitesse de propagation des ondes de cisaillements dans le milieu étudié. L'abaissement du module de cisaillement inclut l'abaissement de la contrainte au cisaillement donc la réduction de résistance du matériau.

L'implantation numérique du modèle élastoplastique nous a permis d'apporter une contribution dans la compréhension du comportement complexe dans un milieu de sol pendant un séisme. Cependant un effort considérable reste à fournir pour mieux contourner le problème.

Le programme « PLASTE » que nous avons élaboré n'est que le fruit des travaux des autres chercheurs, qui ont construit et conçu les démarches globales pour la mise en œuvre d'un programme numérique élastoplastique, l'intégration des relations de Von Mises pour aboutir au tenseur des raideurs, la méthode de « retour radial », et d'autres méthodes sont développées pour servir au jeune chercheur.

La modélisation bidimensionnelle offre plus de précision que celle unidimensionnelle, mais elle est très couteuse, car pour un simple calcul statique cela nécessite plus d'une heure alors quand on traite la réponse sismique cela nécessite plus de temps (quelques jours). Dans ce contexte, la première solution est l'implantation des frontières absorbantes afin de limiter le maillage et par conséquent le temps de calcul.

Le programme « PLASTE », n'est qu'une très simple tentative et initiation de la modélisation plastique des sols, car ce dernier fait des simples hypothèses sur le comportement des sols tel que l'isotropie qui nous facilite la programmation.

Il faut signaler que la prédiction du comportement non linéaire des géomatériaux est très difficile est demande de grandes investigations. C'est pour cette raison et à nos jours il n'existe pas une loi de comportement universelle quand il s'agit du comportement non linéaires d'une structure construite sur l'apport des géomatériaux, mais au contraire il y'a des tentatives sérieuses pour un matériau spécifié.

L'application des relations de plasticité pour le comportement des sols semble plus réaliste, car beaucoup d'essais en prouvé l'efficacité et la convergence des résultats numériques.

Comme recommandations, nous proposons pour des futurs travaux de recherches dans ce domaine de prendre en considération les éléments suivants :

- 1- Mener des recherches bibliographiques bien approfondies.
- 2- Utiliser d'autres modèles non linéaires tels que celui de Moh-Coulomb et Drucker Prager qui ont prouvé leurs efficacités dans des travaux antérieurs.
- 3- Considérer l'aspect tridimensionnel du problème afin de tenir compte mieux de la variabilité spatiale du mouvement en surface de sol

Annexe A

A.1. Relations élastiques des contraintes et déformations

A.1.1. Problème de contraintes planes

Dans ce cas, la contrainte normale au plan est nulle. Si par exemple ($\sigma_z = 0$), la relation qui existe entre les contraintes et déformations est la suivante :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} = 0 \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} = 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1})$$

Sous forme matricielle, il vient :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z = 0 \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

On constate que ε_z dépend seulement de σ_x et σ_y , cette relation peut s'écrire de la façon connue suivante :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

et

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} \quad (\text{A.4})$$

A.1.2. Problème de déformations planes

Dans ce cas, la déformation normale au plan est nulle. Si par exemple ($\varepsilon_z = 0$), la relation qui existe entre les déformations et les contraintes est la suivante :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.5})$$

Sous forme matricielle, il devient :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z = 0 \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

On constate que σ_z dépend seulement de σ_x et σ_y , donc :

$$\{\sigma(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

et

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (\text{A.8})$$

A.2. Algorithme pour le calcul d'une structure élastoplastique

- **Chaque itération de la méthode de Newton consiste principalement à :**
 - Annuler le résidu linéarisé autour de $\{\mathbb{U}_{n+1}^{(k)}\}$ par rapport à $\delta\{\mathbb{U}_n^{(k)}\}$
 - Faire l'actualisation $\{\Delta\mathbb{U}_n^{(k+1)}\} = \{\Delta\mathbb{U}_n^{(k)}\} + \delta\{\mathbb{U}_n^{(k)}\}$
 - Calculer la nouvelle matrice tangente cohérente $[\mathbb{K}_{n+1}^{(k)}]$
- **Présentation de ces étapes à l'aide de quatre niveaux d'algorithmes**
 - **Niveau I**
 - Procédure complète de calcul incrémental-itératif, au niveau de la structure
 - **Niveau II** (Appelé une fois par itération par l'Algorithme 01) :
 - Calcul des grandeurs globales : Rigidité tangente, Forces nodales.
 - **Niveau III** (Appelé pour chaque élément par l'Algorithme 02) :
 - Calcul des contraintes et variables internes sur l'élément

- Calcul des contributions élémentaires (Rigidité tangente, Forces nodales).
- **Niveau IV** (Appelé pour chaque point de Gauss par l'Algorithme 03) :
 - Intégration locale du comportement (Algorithme de retour radial)
 - Calcul des modules tangents locaux.

Calcul incrémental / itératif d'un solide élastoplastique

Données : Maillage, Instant t_0, t_1, \dots, t_M , Comportement, Chargement, Tolérance ϵ

- Initialisation générale (t=0)
 - Conditions initiales : $\{\mathbb{U}_0\}, \{\sigma_0\}, \{p_0\}, \{\underline{\underline{\epsilon}}_0^p\}$
 - Initialisation : $\{\mathbb{F}^{int}\} = \{0\}$
 - Assemblage (élasticité linéaire) : $\{\mathbb{K}^{EP}\} = \{\mathbb{K}^{ELAS}\}$
- Incrémentation du chargement : pour n=0, 1, 2, ..., M-1, faire
 - Initialisation : $\{\Delta\mathbb{U}\} = 0$
 - Forces nodales : Initialisation : $\{\mathbb{F}^{ext}\} = \{\mathbb{F}_{n+1}^{Vol}\} + \{\mathbb{F}_{n+1}^{Surf}\}$
 - Résidu : $-\{\mathbb{R}\} = \{\mathbb{F}^{int}\} + \{\mathbb{F}^{ext}\} + \{\mathbb{F}^{\Delta\xi}\}, r^{ref} = \|\{\mathbb{R}\}\|, r = r^{ref}$
 - Itération : pour k=1, 2, Et tant que $r > \epsilon r^{ref}$:
 - Résoudre $[\mathbb{K}^{EP}]\{\delta\mathbb{U}\} = -\{\mathbb{R}\}$, actualiser : $\{\Delta\mathbb{U}\} = \{\Delta\mathbb{U}\} + \{\delta\mathbb{U}\}$
 - Assembler $[\mathbb{K}^{EP}(\Delta\mathbb{U})], \{\mathbb{F}^{int}(\Delta\mathbb{U})\}$, et $\{\mathbb{F}^{\Delta u}\} \leftarrow \Delta\underline{\underline{u}}_0^D$ (**Niveau II**)

Niveau II : Matrice tangente élastoplastique globale, forces nodales internes et associées aux déplacements imposé

En entrées : Incréments de déplacements nodaux $\{\Delta\mathbb{U}_n\}$ et imposés

En sorties : Matrice tangente globales $[\mathbb{K}^{EP}]$, forces nodales globales $\{\mathbb{F}^{\Delta u}\}, \{\mathbb{F}^{int}\}$

- Initialisation : $[\mathbb{K}^{EP}] = [0], \{\mathbb{F}^{\Delta u}\} = \{0\}, \{\mathbb{F}^{int}\} = \{0\}$
- Boucle sur les éléments :
 - Extraire les incréments des déplacements nodaux élémentaires $\{\Delta\mathbb{U}_{n,e}\}$
 - Calculer $[\mathbb{K}_e^{EP}]$ et $\{\mathbb{F}_e^{int}\}$ (**Niveau III**)

Niveau III : Contraintes et variables internes sur un élément, matrice tangente et forces nodales élémentaires.

En entrées : $\{\sigma_n\}$ (Champ aux points de Gauss), $\{\Delta U_e\}$

En sorties : $[\mathbb{K}_e^{EP}], \{\mathbb{F}_e^{int}\}$ (Matrice élémentaires), $\{\sigma_{n+1}\}, \{\Delta p\}, \{\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p\}$ (Champ aux points de Gauss)

- Initialisation : $[\mathbb{K}_e^{EP}] = [0], \{\mathbb{F}_e^{int}\} = [0]$
- Boucle sur les points de Gauss \underline{a}_g , de poids w_g
 - Incrément de déformation : $\{\Delta \varepsilon(\underline{a}_g)\} = [B(\underline{a}_g)]\{\Delta U^e\}$
 - Calcul de : $\{\sigma_{n+1}(\underline{a}_g)\}, \Delta p(\underline{a}_g)$ et $[A^{EP}(\underline{a}_g)]$ (Niveau IV)

Niveau IV : Contraintes, modules tangents et variables internes

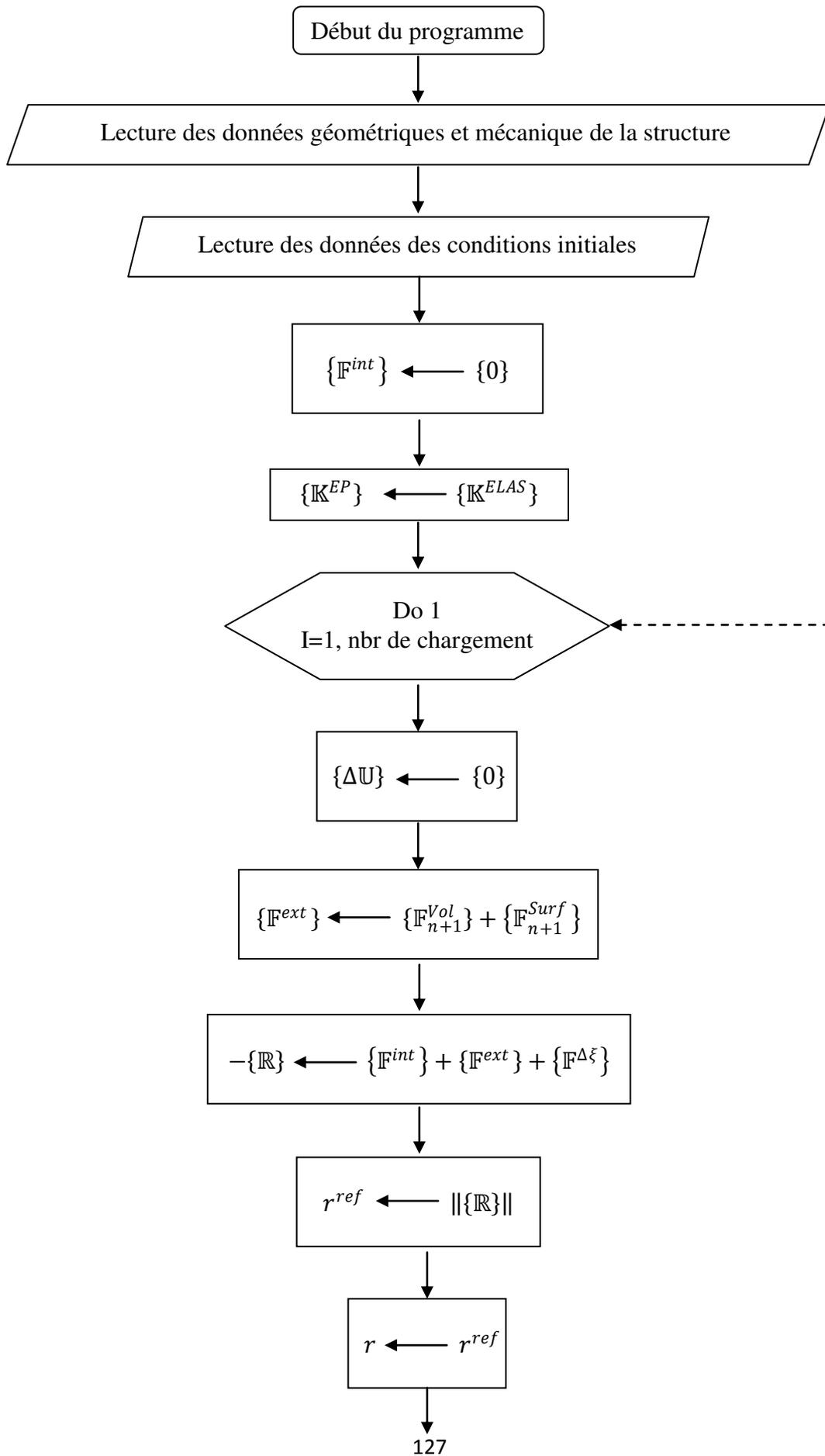
- Evaluer $\underline{\underline{S}}^{elas} = \underline{\underline{S}}_n + 2\mu k : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}$ (prédicteur élastique) et $\sigma^{elas,eq} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{\underline{S}}^{elas}\|$
- Calculer $f^{elas} = f(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{elas}, p_n) = \sigma^{elas,eq} - R(p_n)$. Deux cas :
 - Si $f^{elas} \leq 0$, évolution élastique : $\left. \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = 3ktr(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{S}}^{elas} \\ \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p = \underline{\underline{0}}, \mathcal{A}^{EP} = \mathcal{A} \end{array} \right\}$
 - Si $f^{elas} > 0$, évolution élastoplastique :
 - Résoudre par rapport à Δp : $\sigma^{elas,eq} - 3\mu\Delta p - R(p_n + \Delta p) = 0$
 - Evaluer les constantes β, γ : $\beta = \frac{3\mu\Delta p}{\sigma^{elas,eq}}, \gamma = \frac{3\mu}{3\mu + R(p_n + \Delta p)}$
 - Contribution du point de Gauss à $[\mathbb{K}_e^{EP}]$:

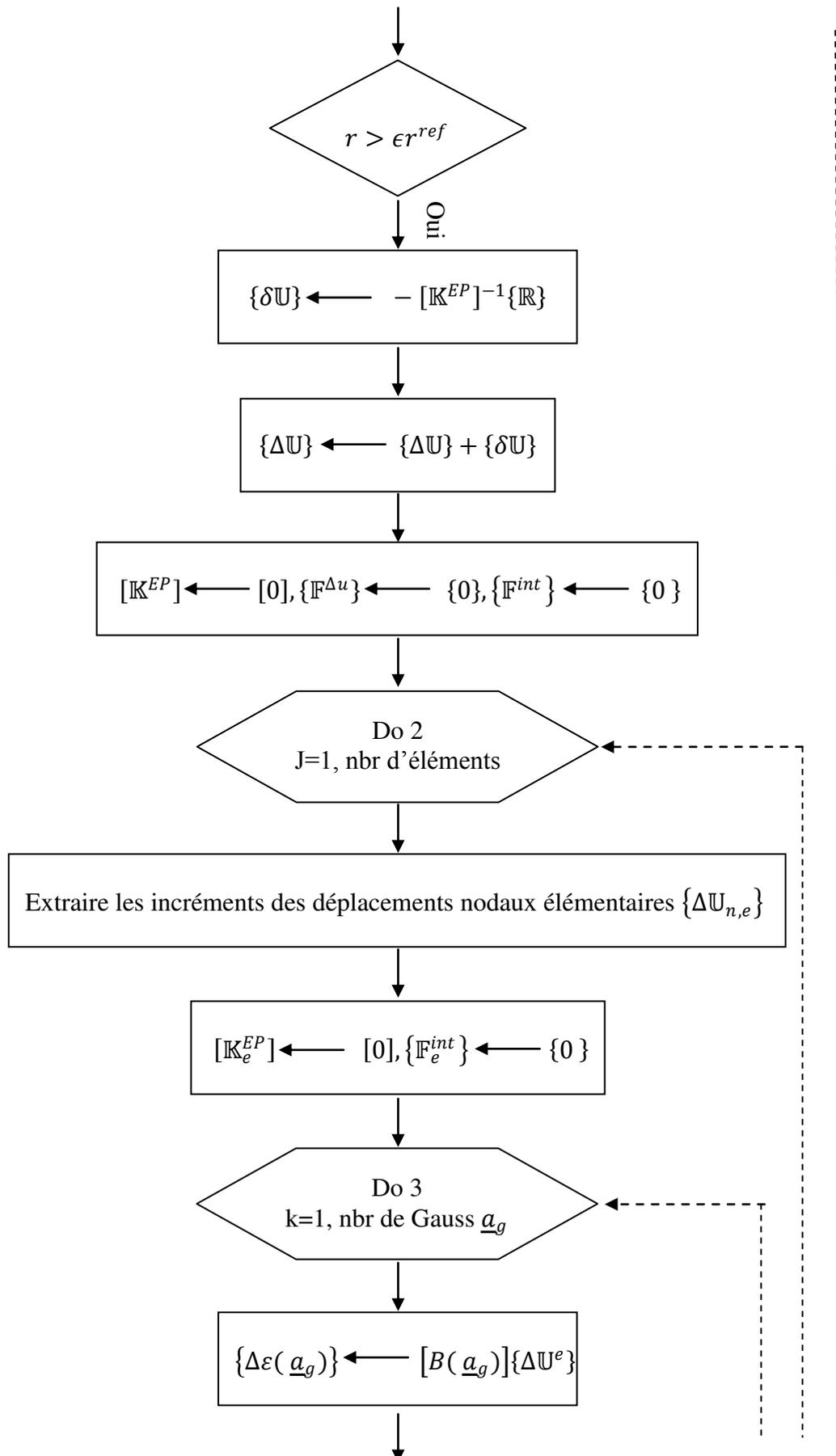
$$[\mathbb{K}_e^{EP}] = [\mathbb{K}_e^{EP}] + [B(\underline{a}_g)]^T [A^{EP}(\underline{a}_g)] [B(\underline{a}_g)] J(\underline{a}_g) w_g$$
 - Contribution du point de Gauss à $\{\mathbb{F}_e^{int}\}$:

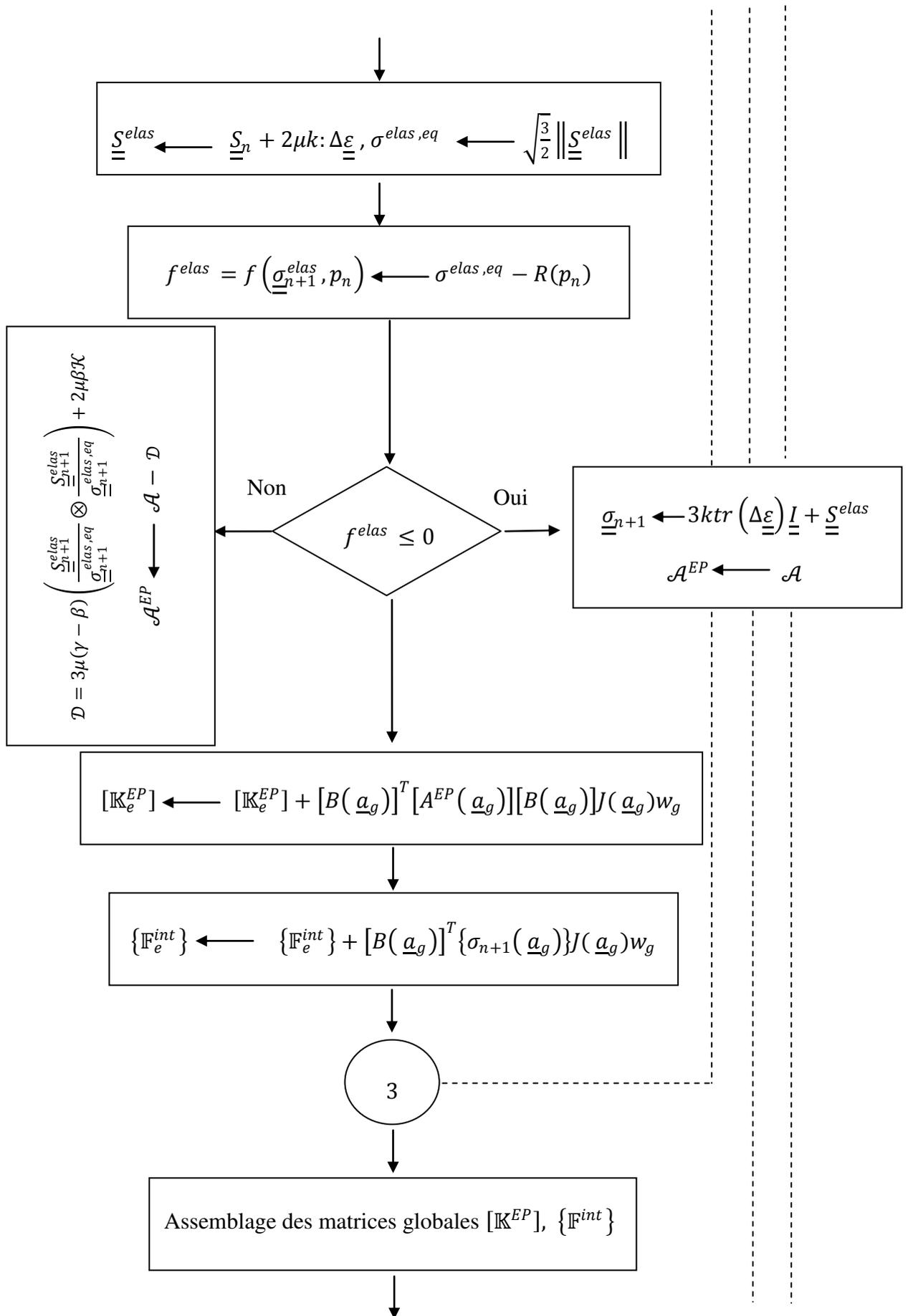
$$\{\mathbb{F}_e^{int}\} = \{\mathbb{F}_e^{int}\} + [B(\underline{a}_g)]^T \{\sigma_{n+1}(\underline{a}_g)\} J(\underline{a}_g) w_g$$
 - Assemblage : $[\mathbb{K}_e^{EP}] \rightarrow [\mathbb{K}^{EP}], \{\mathbb{F}_e^{int}\} \rightarrow \{\mathbb{F}^{int}\}$

A noter que le procédé d'assemblage fonctionne comme pour l'élasticité linéaire.

- Actualiser le résidu : $\{\mathbb{R}\} = -\{\mathbb{F}^{int}\} - \{\mathbb{F}^{ext}\}, r = \|\{\mathbb{R}\}\|$
- Mise à jours : $\{\mathbb{U}_{n+1}\} = \{\mathbb{U}_n\} + \{\Delta \mathbb{U}_n\}, \{\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^p\} = \{\underline{\underline{\varepsilon}}_n^p\} + \{\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p\}$







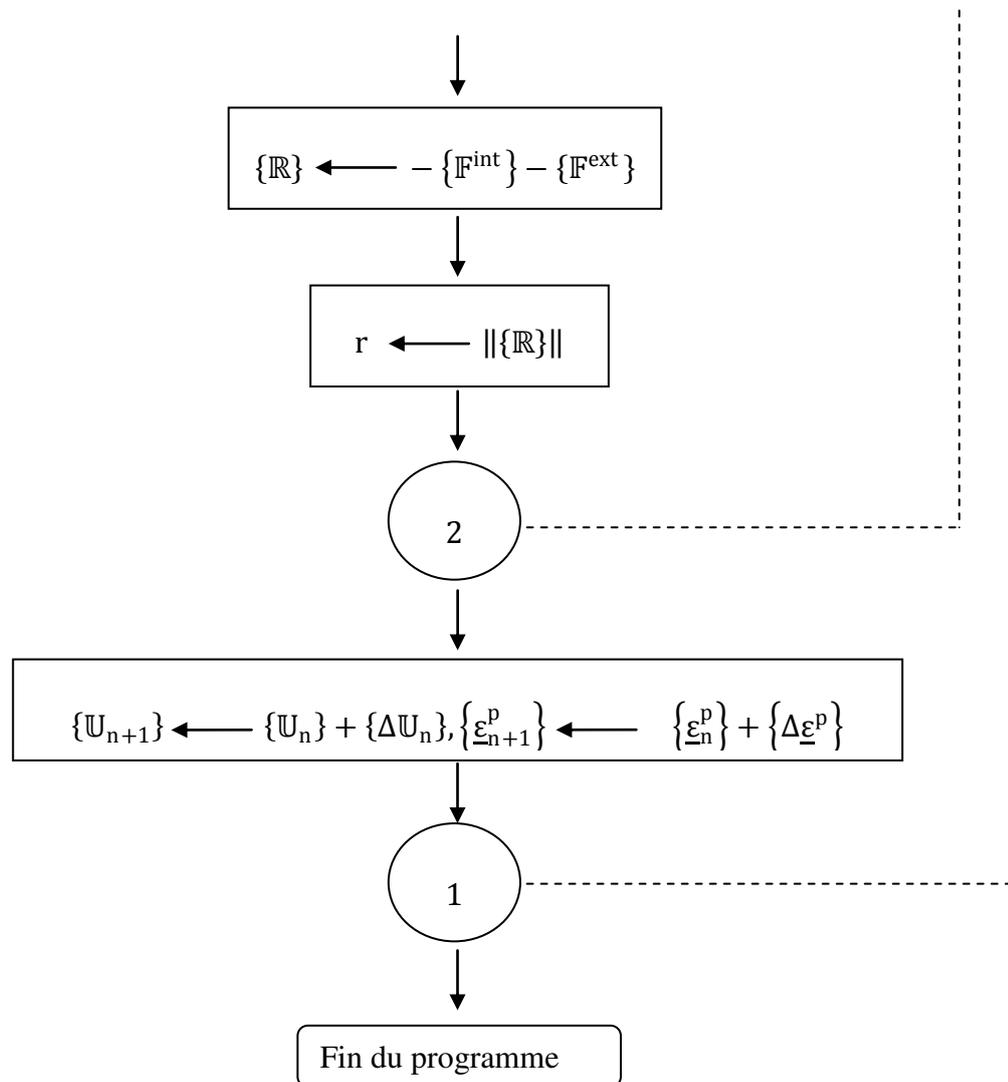


Fig. A.2.1. Organigramme du programme élaboré « PLASTE »

A.3. Adaptation de l'algorithme de Newmark pour le cas non linéaire

On considère une structure en régime non-linéaire, dont l'équation dynamique peut s'écrire sous la forme générale :

$$[M]\ddot{q} + F^{int}(q, \dot{q}) = F^{ext} \quad (\text{A.9})$$

Les conditions initiales $\{\dot{q}\}_0$ et $\{q\}_0$ sont données.

On fait l'hypothèse que les coefficients d'inertie ne dépendent pas de la configuration. Pour le cas implicite, on peut résoudre le système non-linéaire par la méthode de Newton.

A.3.1. Méthode de Newton

On commence par réécrire l'équation d'équilibre du système sous la forme d'une équation régissant les déplacements $\{q(t)\}$:

$$\{R(q)\} = [M]\ddot{q} + F^{int}(q, \dot{q}) - F^{ext} = 0 \quad (\text{A.10})$$

On introduit alors les formules de Newmark en imposant, comme valeur « initiale » de l'accélération au temps t_{n+1} , $\{\ddot{q}\}_{n+1} = 0$.

On utilise alors une technique de linéarisation pour résoudre cette équation : c'est $\{q\}_{n+1}^k$ est une approximation de $\{q\}_{n+1}$, obtenu à l'itération k, l'équation résiduelle peut être décrite dans un certain voisinage de l'approximation par l'expression linéaire [Puel, 2001]:

$$\{R(\{q(t)\}_{n+1}^{k+1})\} = \{R(\{q(t)\}_{n+1}^k)\} + [S_T(\{q(t)\}_{n+1}^k)](\{q(t)\}_{n+1}^{k+1} - \{q(t)\}_{n+1}^k) \quad (\text{A.11})$$

ou

$$[S_T(\{q(t)\}_{n+1}^k)] = \left[\frac{\partial \{R\}}{\partial \{q(t)\}} \right]_{\{q\}_{n+1}^k} \quad (\text{A.12})$$

La matrice $[S_T(\{q(t)\}_{n+1}^k)]$ est la matrice Jacobienne associée à l'équation résiduelle, elle à comme expression :

$$[S_T\{q\}] = \frac{\partial \{F^{int}\}}{\partial \{q\}} + \frac{\partial \{F^{int}\}}{\partial \{\dot{q}\}} \frac{\partial \{\dot{q}\}}{\partial \{q\}} + [M] \frac{\partial \{\ddot{q}\}}{\partial \{q\}} \quad (\text{A.13})$$

Les différents termes de l'équation (A.13) s'interprètent comme suit :

- $\frac{\partial \{F^{int}\}}{\partial \{q\}}$ est la variation des forces internes avec les déplacements, c'est la matrice de raideur tangente.
- $\frac{\partial \{F^{int}\}}{\partial \{\dot{q}\}}$ est la variation des forces internes avec les vitesses, c'est la matrice d'amortissements tangente.

Avec les formules de Newmark, on a les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \{\dot{q}\}}{\partial \{q\}} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} I \\ \frac{\partial \{\ddot{q}\}}{\partial \{q\}} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} I \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.14})$$

Ce qui donne la matrice finale de la matrice tangente :

$$[S_T\{q\}] = [K_T] + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}[C_T] + \frac{1}{\beta\Delta t^2}[M] \quad (\text{A.15})$$

A.3.2. Algorithme

L'équation résiduelle (A.10) peut être résolue de la manière suivante : soit $(\{q(t)\}_{n+1}^k, \{\dot{q}(t)\}_{n+1}^k$ et $\{\ddot{q}(t)\}_{n+1}^k)$ l'approximation des déplacements, vitesses et accélérations obtenue à l'itération k du pas de temps $n+1$. elle peut alors être corrigée sous la forme $(\{q\}_{n+1}^k + \Delta\{q\}^k, \{\dot{q}\}_{n+1}^k + \Delta\{\dot{q}\}^k$ et $\{\ddot{q}\}_{n+1}^k + \Delta\{\ddot{q}\}^k)$, ou la correction des déplacements est solution de l'équation linéarisée :

$$[S_T\{q\}]\{\Delta q\}^k = -\{R(\{q\}_{n+1}^k)\} \quad (\text{A.16})$$

et les corrections de vitesses et accélérations y sont reliées par la loi d'intégration temporelle :

$$\left. \begin{aligned} \Delta\{\dot{q}\}^k &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\{\Delta q\}^k \\ \Delta\{\ddot{q}\}^k &= \frac{1}{\beta\Delta t^2}\{\Delta q\}^k \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.14})$$

L'algorithme obtenu comporte alors à l'intérieur de la boucle temporelle une boucle d'itération sur l'équilibre que l'on arrête lorsque le *résidu d'équilibre* est plus petit qu'un certain seuil de précision, l'organigramme suivant récapitule les points précédents.

- 1. Données initiales :

$$[M], \{F^{int}\}, \{\dot{q}\}_0 \text{ et } \{q\}_0$$

- 2. Initialisation :

$$\{\ddot{q}\}_0 = [M]^{-1}(\{F^{ext}\}_0 - \{F^{int}(\{q\}_0, \{\dot{q}\}_0)\})$$

- 3. Incrémentation temporelle :

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$

- 4. Prédiction :

$$\{\ddot{q}\}_{n+1} = 0$$

$$\{\dot{q}\}_{n+1} = \{\dot{q}\}_n + (1 - \gamma)\Delta t\{\ddot{q}\}_n$$

$$\{q\}_{n+1} = \{q\}_n + \Delta t\{\dot{q}\}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\{\ddot{q}\}_n$$

- 5. Evaluation du résidu :

$$\{R\}_{n+1} = [M]\{\ddot{q}\}_{n+1} + \{F^{int}(\{q\}_{n+1}, \{\dot{q}\}_{n+1})\} - \{F^{ext}\}_{n+1}$$

- 6. Convergence des résultats :

$$\|\{R\}_{n+1}\| \leq \epsilon \|\{F^{ext}\}_{n+1}\|$$

- Si oui, fin de la boucle temporelle, retour vers 3.
- Sinon on continue vers l'étape 7.

- 7. Correction :

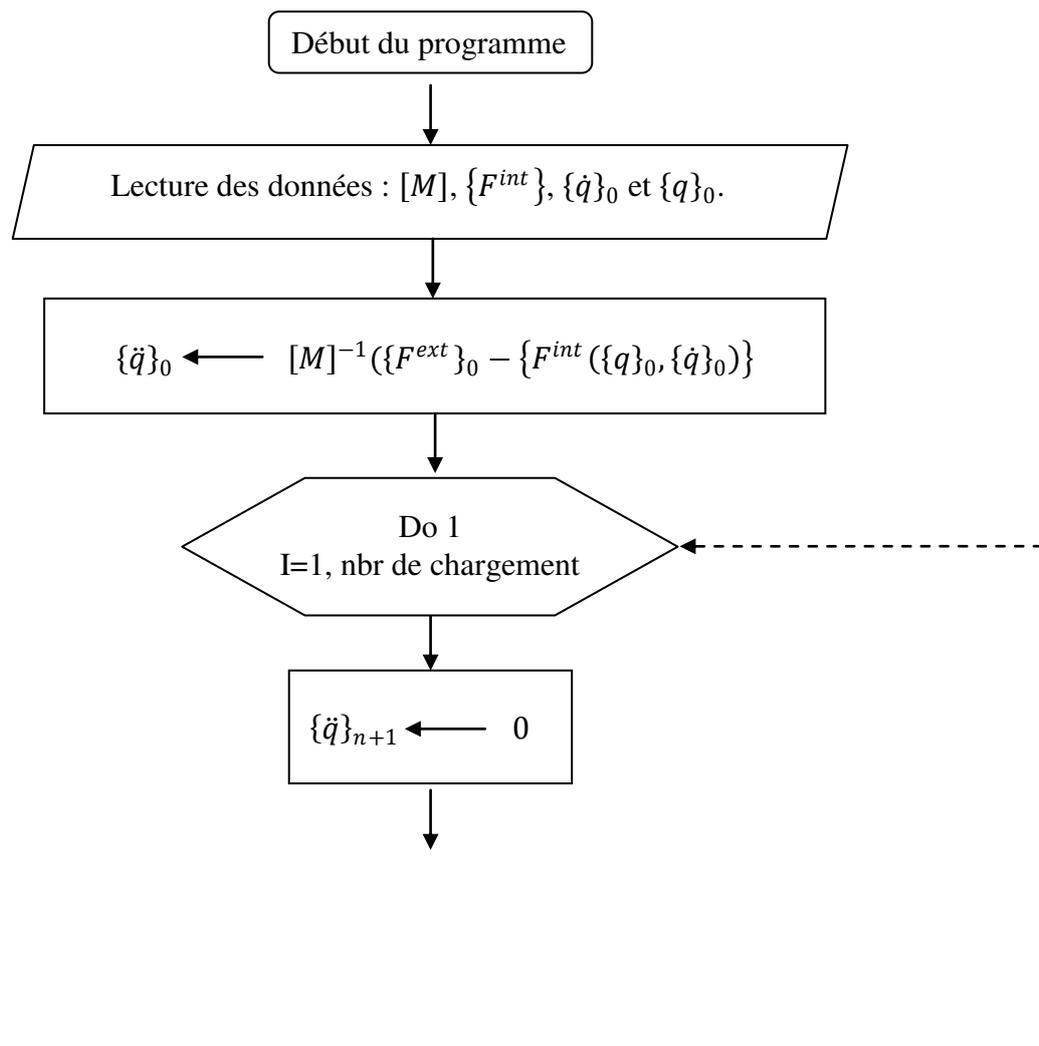
$$[S_T\{q\}_{n+1}]\{\Delta q\} = -\{R\}_{n+1}$$

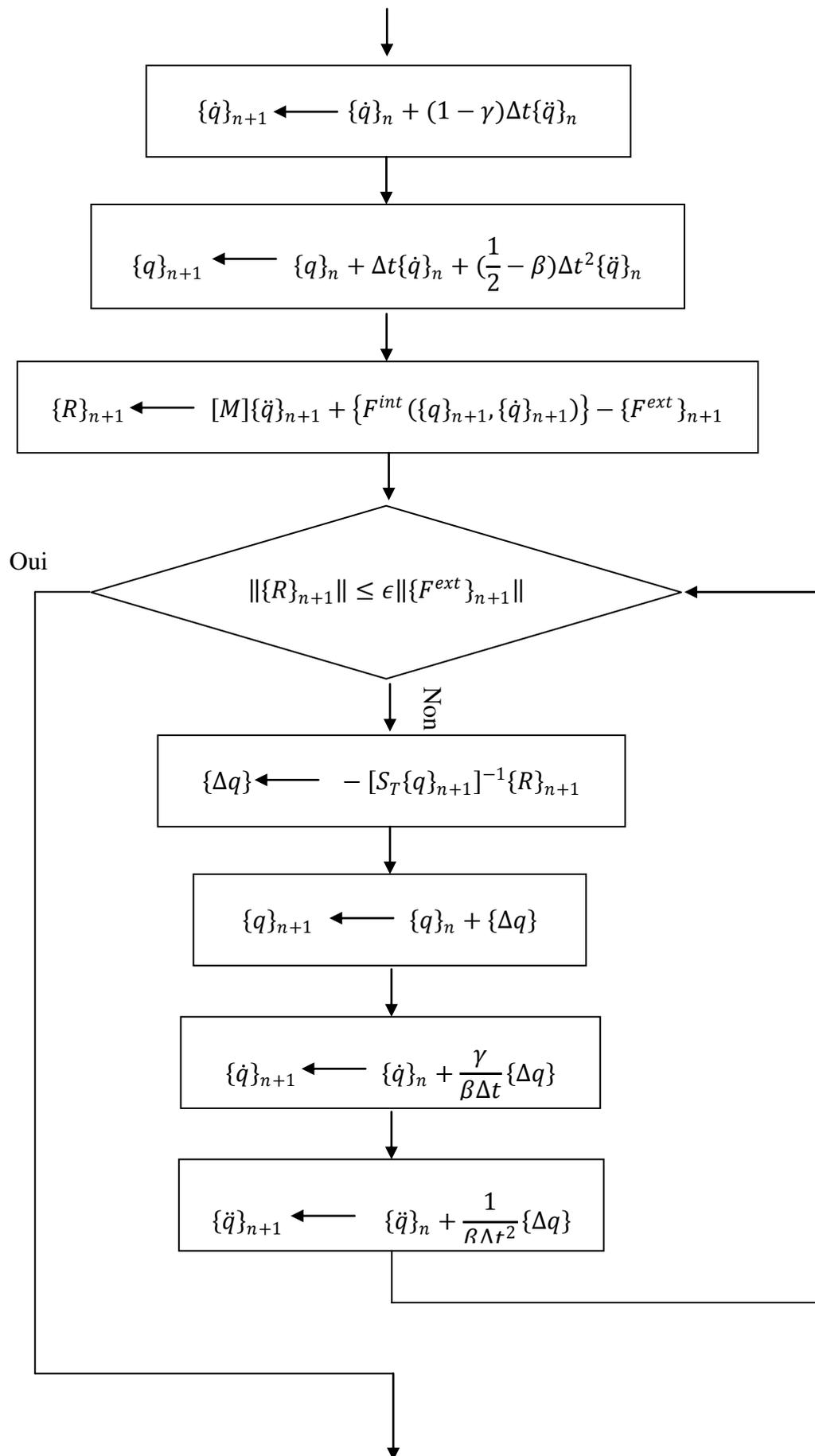
$$\{q\}_{n+1} = \{q\}_n + \{\Delta q\}$$

$$\{\dot{q}\}_{n+1} = \{\dot{q}\}_n + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\{\Delta q\}$$

$$\{\ddot{q}\}_{n+1} = \{\ddot{q}\}_n + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\{\Delta q\}$$

- 8. Fin de la boucle de la convergence, retour vers l'étape 5.





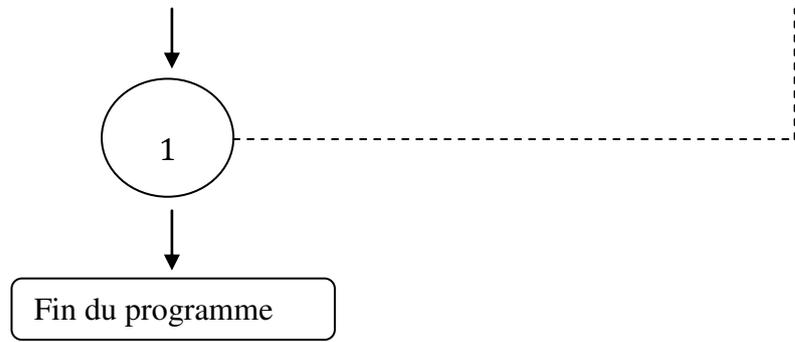


Fig. A.3.1. Organigramme de l'algorithme de Newmark pour le cas non linéaire.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Abdel-Ghaffar A.M., Koh A.S. (1982), Three-Dimensional Dynamic of Nonhomogeneous Earth Dams, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 1, pp. 136-144.

Besson J., Cailletaud G., Forest S. (2005), Lois de Comportement non Linéaire des Matériaux, Master comadis, Ecole des Mines de Paris, 158p.

Bonilla L., Steidl J. H., Gariel J.C., Archuleta R. J. (2002), Borehole Response Studies at the Garner Valley Downhole Array Southern California, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 92, pp. 3165-3179.

Capra A., Davidovici V. (1984), Calcul dynamique des structures en zones sismiques, Ed. Eyrolles, Paris, 162p.

Cascone E., Rampello S. (2003), Decoupled Seismic Analysis of an Earth Dam, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 23, pp. 349-359.

Cavin P. (2006), Méthode des Eléments Finis avec Raffinement Spatial et Temporel Adaptatif et Automatique, Thèse de Doctorat, M.E.G.A Lyon, 150p.

Cristecu N. D. (2007), Dynamic Plasticity. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 468p.

Dhatt G., Touzot G. (1984), Une présentation de la Méthode des éléments finis, Ed. Maloine, Paris, 546p.

Dunne F., Petrinic N. (2006), Introduction to Computational Plasticity, Department of Engineering of Engineering Science Oxford University, UK, 241p.

Elgamal A.W., Abdel-Ghaffar A. M., Prevost J.H. (1985), Elasto-Plastic Earthquake Shear-Response of One-Dimensional Earth Dam Models, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 13, pp. 617-633.

Gazetas G., Debchaudhury A., Gasparini D. A. (1982), Stochastic Estimation of the Nonlinear Response of Earth Dams to Strong Earthquakes, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 1, pp. 39-46.

- Gazetas G. (1982), Shear Vibration of Vertically Inhomogeneous Earth, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 6, pp. 219-241.
- Harichane Z. (2010), Cours de Rhéologie des Géomatériaux (2^{ème} année magister), Université Hassiba Ben Bouali de Chlef.
- Hashash Y.M.A., Park D. (2001), Non Linear One-Dimensional Seismic Ground Motion Propagation in the Mississippi Embayment, Engineering Geology, Vol. 62, pp. 185-206.
- Imbert J.F. (1995), Analyse des structures par éléments finis, Ed. Cépadués, Toulouse, 506p.
- Khellafi A.M. (2002), Modélisation du Comportement des Sols Saturés Soumis à des Sollicitations sismiques, Mémoire de Magister, Université Saâd DAHLEB de Blida, 134p.
- Krasnov M., Kissélev A., Makarenko G. (1978), Recueil de Problèmes sur les Equations Différentielles Ordinaires, Ed. Mir, Moscou, 283p.
- Lemaitre J., Chabouche J. L. (1988), Mécanique des Matériaux Solide, Ed. Bordas, 543p.
- Maheo L. (2006), Etude des Effets Dissipatifs de Différents Schémas d'Intégration Temporelle en Calcul Dynamique par Eléments finis, Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Sud, 165p.
- Maya M., (2008), Plasticite Mise en oeuvre, Arts et Metiers-Paritech Centre d'Enseignement et de Recherche de Cluny.
- Mestat P.H. (1998), Lois de Comportement des Géomatériaux et Modélisation par la Méthodes des Eléments Finis, LTPC, 193p.
- Modaressi A. (2004), Lois de Comportement-Aide mémoire, Ecole Centrale de Paris, 29p.
- Mohammadioun B., Mohammadioun G., Gariel J. C. (1992), Preliminary Results from a Vertical array in Garner Valley California, Earthquake Engineering Tenth World Conference, Rotterdam, pp. 1025-1030.
- Murono Y., Tanamura S. (2001), Nonlinear Earthquake Response of Soft Ground with Non-Flat Base, Fondation & Geotechnical Engineering G., Structure Technological Research Div., Vol. 42, pp. 151-155.
- Ottoseu N.S. (2005), the Mechanics of Constitutive modeling, Division of Solid Mechanics, Lund University, Sueden, 773p.
- Pecker A. (1995), Validation of Small Strain Properties from Record Weak Seismic Motions, Soil dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 14, pp. 399-408.

- Puel G., (2001), Mise en Evidence et Recalage des Non-Linéarités locales en Dynamique des structures, Dea «Techniques Avancées en calcul de structures», Université Paris 6, 74p.
- Rockey R. E., Griffiths W., Nethercot D. (1979), Introduction à la méthode des éléments finis, Ed. Eyrolles, Paris, 228p.
- Siyahi B., Arslan H. (2007), Nonlinear Dynamic Finite Element Simulation of Alibey Earth Dam, Environ Geol, Vol. 54, pp. 77-85.
- Succarieh M.F., Elgamal A.W., Yan L. (1993), Observed and Predicted Earthquake Response of la Villita Dam, Engineering Geology, Vol. 34, pp. 11-26.
- Tsiatas G., Gazetas G. (1982), Plane-Strain and Shear Beam Free Vibration of Earth Dams, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 1, pp. 150-160.
- Woodward P. K., Griffith D.V. (1996), Influence of Viscous Damping in the Dynamic Analysis of an Earth Dam Using Simple Constitutive Models, Computers and Geotechnics, Vol. 19, pp. 245-263.
- Wulfsohn D., Adams B. A. (2002), Elastoplastic soil mechanics in Advances in Soil Dynamics, Vol. 2, 116p.
- Zienkiewicz O. C., Chan A.H., Pastor, M., Schrefler B. A., Shiomi T. (1999), Computational Geomechanics with Special Reference to Earthquake Engineering, Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, 375p.