

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Hassiba Benbouali de Chlef

Faculté des Sciences Exactes & Informatique

Département de Mathématiques



Initiation à la

# Théorie des Opérateurs

Cours, exercices et sujets d'examens corrigés

Par

**Dr. Aissa NASLI BAKIR**

**Première Année Master**

**Année Universitaire : 2021/2022**

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Espaces de Hilbert</b>	<b>6</b>
1.1 Espaces pré-Hilbertiens . . . . .	6
1.1.1 Produit scalaire . . . . .	6
1.1.2 Inégalité de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz . . . . .	8
1.1.3 Norme associée à un produit scalaire . . . . .	8
1.2 Propriétés . . . . .	10
1.2.1 Continuité du produit scalaire . . . . .	10
1.3 Espace de Hilbert . . . . .	11
1.4 Exercices . . . . .	13
<b>2 Systèmes orthogonaux et orthonormaux</b>	<b>15</b>
2.0.1 Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt . . . . .	17
2.0.2 Inégalité de Bessel . . . . .	19
2.0.3 Egalité de Parseval . . . . .	21
2.1 Espaces de Hilbert séparables . . . . .	23
2.1.1 Définitions et propriétés . . . . .	23
2.1.2 Espaces isomorphes . . . . .	24
2.1.3 L'espace $L_2([a, b])$ . . . . .	25
2.2 Orthogonalité et projection orthogonale . . . . .	26
2.2.1 Orthogonalité et complément orthogonal . . . . .	26
2.2.2 Théorème de la projection orthogonale . . . . .	28

---

2.2.3	Théorème de la décomposition orthogonale . . . . .	29
2.3	Exercices . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert</b>	<b>34</b>
3.1	Opérateurs linéaires bornés . . . . .	34
3.1.1	Définitions - continuité . . . . .	34
3.2	Fonctionnelles linéaires bornées . . . . .	38
3.2.1	Théorème de représentation de Riesz . . . . .	39
3.2.2	Théorème de Hahn-Banach . . . . .	41
3.3	Théorème de Lax-Milgram . . . . .	42
3.3.1	Forme coercive . . . . .	42
3.3.2	Théorème de Lax-Milgram . . . . .	43
3.4	Opérateurs inversibles . . . . .	44
3.5	Adjoint d'un opérateur linéaire . . . . .	47
3.5.1	Opérateurs auto-adjoints . . . . .	50
3.6	Orthoprojecteur sur un espace de Hilbert . . . . .	52
3.7	Exercices . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Opérateurs compacts</b>	<b>57</b>
4.1	Définitions et propriétés . . . . .	57
4.1.1	Théorème de Bolzano-Weierstrass . . . . .	58
4.2	Convergence d'une suite d'opérateurs compacts . . . . .	60
4.2.1	Types de convergence et propriétés . . . . .	60
4.2.2	Autre définition d'un opérateur compact . . . . .	62
4.2.3	Convergence d'une suite d'opérateurs compacts . . . . .	64
4.3	Opérateurs de Hilbert-Schmidt . . . . .	65
4.3.1	Application sur l'opérateur intégral . . . . .	68

---

4.4	Alternative de Fredholm . . . . .	70
4.4.1	Alternative de Fredholm . . . . .	71
4.4.2	Application sur les équations intégrales . . . . .	72
4.5	Exercices . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Opérateurs non-bornés</b>	<b>75</b>
5.1	Définitions et propriétés . . . . .	75
5.2	Extension d'un opérateur non-borné . . . . .	78
5.2.1	Opérateurs fermables . . . . .	79
5.3	Adjoint d'un opérateur non-borné . . . . .	79
5.3.1	Définitions . . . . .	80
5.4	Exercices . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Sujets d'examens</b>	<b>84</b>
6.1	EMD 2016/2017 . . . . .	84
6.1.1	Corrigé de l'EMD 2016/2017 . . . . .	86
6.2	Rattrapage 2016/2017 . . . . .	91
6.2.1	Corrigé du rattrapage 2016/2017 . . . . .	92
6.3	EMD 2017/2018 . . . . .	96
6.3.1	Corrigé de l'EMD 2017/2018 . . . . .	97
6.4	Rattrapage 2017/2018 . . . . .	100
6.4.1	Corrigé du Rattrapage 2017/2018 . . . . .	101
6.5	EMD 2018/2019 . . . . .	104
6.5.1	Corrigé de l'EMD 2018/2019 . . . . .	105
6.6	EMD de remplacement 2018/2019 . . . . .	107
6.6.1	Corrigé de l'EMD de remplacement 2018/2019 . . . . .	109
6.7	Rattrapage 2018/2019 . . . . .	112
6.7.1	Corrigé du rattrapage 2018/2019 . . . . .	113
6.8	EMD 2019/2020 . . . . .	116
6.8.1	Corrigé de l'EMD 2019/2020 . . . . .	118
6.9	Rattrapage 2019/2020 . . . . .	122
6.9.1	Corrigé du Rattrapage 2019/2020 . . . . .	123

# Introduction

Ce travail contient le programme de la matière " Théorie des Opérateurs ", et est destiné aux étudiants de la première année Master de Mathématiques. Il est composé de cinq chapitres, dont chaqu'un comprend un rappel de cours et des exercices recueillis de mes séries de travaux dirigés, pour bien apprendre les notions données. Sont proposés à la fin de ce polycopié des sujets d'examens avec solutions.

# Chapitre 1

## Espaces de Hilbert

### 1.1 Espaces pré-Hilbertiens

#### 1.1.1 Produit scalaire

**Définition 1.1.** (Rappel) Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{C}$ .

Une application  $f : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  est dite bilinéaire si pour tous  $x, x', y, y' \in E$ , et tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  :

$$f(\lambda x + x', y) = \lambda f(x, y) + f(x', y)$$

et

$$f(x, \lambda y + y') = \lambda f(x, y) + f(x, y')$$

**Définition 1.2.** Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Un produit scalaire sur  $E$ , est une application bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  et vérifiant :

- i.  $\forall x \in E : \langle x, x \rangle \geq 0$  (Positivité)
- ii.  $\forall x \in E : \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (Séparation)
- iii.  $\forall x, y \in E : \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$  (Anti-symétrie)
- iv.  $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C} : \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$  (Homogénéité)
- v.  $\forall x, y, z \in E : \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

**Définition 1.3.** Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit espace pré-Hilbertien.

**Exemples** 1.  $E = \mathbb{C}^n$ . L'application  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$  pour tous  $x = (x_i)_{i=1}^n, y = (y_i)_{i=1}^n \in E$ , définit bien un produit scalaire sur  $E$ .

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est donc un espace pré-Hilbertien.

2. Considérons l'espace

$$\ell_2 := \left\{ x = (x_n)_n \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}$$

et l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $\ell_2 \times \ell_2$  définie par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \bar{y}_i, \quad x = (x_i)_{i=1}^{+\infty}, \quad y = (y_i)_{i=1}^{+\infty} \in \ell_2$$

Cette application est bien définie sur  $\ell_2$ . En effet, si  $x = (x_i)_{i=1}^n, y = (y_i)_{i=1}^n \in \ell_2$ , alors

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \bar{y}_i \right| \leq \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i \bar{y}_i| \leq \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^2 \right) < +\infty$$

car  $x, y \in \ell_2$ . Il est facile de montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\ell_2$ , et

$(\ell_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est donc un espace pré-Hilbertien.

3. De même pour l'espace

$$E = L_2([a, b], \mathbb{C}) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : \int_a^b |f(t)|^2 dt < +\infty \right\}$$

muni de l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  où

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt, \quad f, g \in E$$

**Exercice** Montrer que dans un espace pré-Hilbertien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  :

$$\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$$

pour tous  $x, y \in E$  et tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

### 1.1.2 Inégalité de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz

1 2 3

**Théorème 1.1.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace pré-Hilbertien, et soient  $x, y \in E$ . Alors,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle} \quad (1.1)$$

**Preuve.** Si  $\langle x, y \rangle = 0$ , l'inégalité (1.1) est triviale. On suppose que  $\langle x, y \rangle \neq 0$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . On a

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\operatorname{Re}(\lambda \langle y, x \rangle) + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle \quad (1.2)$$

Pour  $\lambda = \frac{\langle x, x \rangle}{\langle y, x \rangle}$ , on aura dans (1.2)

$$\langle x, x \rangle - 2 \langle x, x \rangle + \frac{\langle x, x \rangle^2}{|\langle y, x \rangle|^2} \langle y, y \rangle \geq 0$$

Comme  $\langle x, x \rangle \geq 0$ ,

$$\frac{\langle x, x \rangle}{|\langle y, x \rangle|^2} \langle y, y \rangle - 1 \geq 0$$

Ce qui achève la démonstration. ■

### 1.1.3 Norme associée à un produit scalaire

**Proposition 1.1.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace pré-Hilbertien. L'application  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in E$$

est une norme sur  $E$ .

**Preuve.** En effet,

i. Si  $x \in E$  et  $\|x\| = 0$ , alors  $\sqrt{\langle x, x \rangle} = 0$ . Donc  $\langle x, x \rangle = 0$ . Par suite  $x = 0$  (propriété du produit scalaire). De même,  $\|0\| = \sqrt{\langle 0, 0 \rangle} = 0$ .

- 
1. Augustin Cauchy :1789-1857, Mathématicien français.
  2. Viktor L. Bunyakovsky :1804-1889, Vice-président de l'académie des sciences de St-Petersburg, connu par sa conjecture en théorie des nombres.
  3. Hermann A. Schwarz : 1843-1921, Mathématicien allemand.

ii. Pour tous  $x \in E$  et tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  :

$$\begin{aligned}\|\lambda x\| &= \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} \\ &= |\lambda| \|x\|\end{aligned}$$

iii. Soient  $x, y \in E$ . Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on aura

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

■

**Définition 1.4.** La norme  $\|\cdot\|$  ainsi définie est dite norme associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $E$ . (Ou norme issue du produit scalaire)

**Exemples** Exprimer les normes associées aux produits scalaires sur les espaces définis dans les exemples 1,2 et 3 précédents.

### Conséquences

1. Soient  $x = (x_i)_{i=1}^{+\infty}, y = (y_i)_{i=1}^{+\infty} \in \ell_2$ . Pour  $a = (|x_i|)_{i=1}^{+\infty}, b = (|y_i|)_{i=1}^{+\infty} \in \ell_2$ , on aura par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

i.e.

$$\|ab\|_1 \leq \|a\|_2 \|b\|_2$$

Autrement dit, l'inégalité de Cauchy-Schwarz coïncide avec l'inégalité de Hölder.

2. Si  $x = (x_i)_{i=1}^n, y = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$ . Pour  $a = (|x_i|)_{i=1}^n, b = (|y_i|)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$ , on pourra avoir toujours par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sqrt{n} \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

D'où,

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$

## 1.2 Propriétés

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace pré-Hilbertien, et soit  $\|\cdot\|$  la norme associée à son produit scalaire. Pour tous  $x, y \in E$ , on a

### 1. Identité du parallélogramme

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

### 2. Identité de polarisation On suppose que le corps de $E$ est $\mathbb{R}$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2)$$

**Preuve.** Calcul direct. ■

### 1.2.1 Continuité du produit scalaire

**Proposition 1.2.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace pré-Hilbertien. Le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est une fonction continue sur  $E \times E$ .

**Preuve.** Soient  $(x_n)_n, (y_n)_n$  deux suites de  $E$  convergeant respectivement vers  $x, y$  dans  $E$ . On a donc

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

car  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|, (n \rightarrow +\infty)$ . ■

### 1.3 Espace de Hilbert

**Définition 1.5.** Une suite  $(x_n)_n$  d'un espace pré-Hilbertien  $E$  est dite de Cauchy dans  $E$  si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n, m \in \mathbb{N} : (n > N \wedge m > N) \Rightarrow (\sqrt{\langle x_n - x_m, x_n - x_m \rangle} < \epsilon)$$

**Définition 1.6.** La suite  $(x_n)_n$  est dite convergente vers un élément  $x \in E$ , si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0$$

i.e., si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N) \Rightarrow (\|x_n - x\| < \epsilon)$$

et l'on écrit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$$

**Définition 1.7.** Soit  $E$  un espace pré-Hilbertien. Si toute suite de Cauchy dans  $E$  est convergente dans  $E$ , l'espace  $E$  est dit complet.

**Définition 1.8.** Un espace pré-Hilbertien complet est dit espace de Hilbert.<sup>4</sup>

**Exemples** 1. Les espaces  $\mathbb{C}^n$ ,  $n \geq 1$  et  $L_2([a, b], \mathbb{C})$  sont des espaces de Hilbert.

2. Montrons que l'espace  $\ell_2$  est de Hilbert. Soit donc

$$x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \xi_3^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}, \dots) \in \ell_2$$

une suite de Cauchy. Pour  $k$  fixé, on a

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}| \leq \|x_n - x_m\| \rightarrow 0 \quad (1)$$

4. David Hilbert (1862-1943) est un grand mathématicien allemand, connu par ses 23 fameux problèmes en Analyse mathématique présentés en 1900, et dits Hilbert Open Problems.

quand  $n, m \rightarrow +\infty$ . La suite  $(\xi_k^{(n)})_{n \geq 1}$  est donc de Cauchy dans  $\mathbb{C}$ . Elle est donc convergente. Soit  $\xi_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_k^{(n)}$ , et posons  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ . Montrons que  $x \in \ell_2$ , et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0$ .

Pour tout entier  $j, j \geq 1$ , on a

$$\sum_{k=1}^j |\xi_k|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^j |\xi_k^{(n)}|^2 \quad (2)$$

et

$$\sum_{k=1}^j |\xi_k^{(n)}|^2 \leq \|x_n\|^2 \quad (3)$$

De plus,  $\sup_{n \geq 1} \|x_n\| = M < +\infty$  car

$$\| \|x_n\| - \|x_m\| \| \leq \|x_n - x_m\| \rightarrow 0, n, m \rightarrow +\infty$$

Il s'ensuit donc de (2) et (3) que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k|^2 \leq M^2$$

, i.e.,  $x \in \ell_2$ . D'autre part, pour  $\epsilon > 0$ , il existe  $N_\epsilon \in \mathbb{N}$  tel que pour tous  $n, m, n > N$  et  $m > N_\epsilon$ , et tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{k=1}^p |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}|^2 \leq \|x_n - x_m\|^2 < \epsilon \quad (4)$$

Fixons  $n \geq N_\epsilon$  et faisons tendre  $m$  vers  $+\infty$ . De (1) et (4), on obtiendra pour tout  $p$

$$\sum_{k=1}^p |\xi_k^{(n)} - \xi_k|^2 = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^p |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}|^2 \leq \epsilon$$

Par conséquent,

$$\|x_n - x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k^{(n)} - \xi_k|^2 \leq \epsilon$$

■

## 1.4 Exercices

### Exercice 1.1.

i. Soit  $E = \mathbb{R}[X]$ , l'espace vectoriel des polynômes de la variable réelle  $X$  et à coefficients réels. Les applications suivantes définissent-elles des produits scalaires sur  $E$  ?

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx, \quad P, Q \in \mathbb{R}[X]$$

$$\langle P, Q \rangle = P(1)Q'(0) + P'(0)Q(1), \quad P, Q \in \mathbb{R}[X]$$

### Exercice 1.2.

Soit  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{R}$ .

a. Montrer l'identité de polarisation

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2), \quad x, y \in \mathcal{H}$$

b. Une application linéaire  $u: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est dite une isométrie si  $u$  conserve la norme, i.e.

$$\forall x \in \mathcal{H} : \|u(x)\| = \|x\|$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme issue du produit scalaire sur  $\mathcal{H}$ . Montrer que  $u$  est une isométrie si et seulement si  $u$  conserve le produit scalaire, c-à-d

$$\forall x, y \in \mathcal{H} : \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

N.B. Pour  $(\Rightarrow)$ , utiliser l'identité de polarisation, et pour  $(\Leftarrow)$ , le développement de

$\|u(x + \lambda y) - u(x) - \lambda u(y)\|^2$  pour  $x, y \in \mathcal{H}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 1.3.

Montrer que l'espace vectoriel  $\mathcal{E} = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$  des fonctions réelles continues sur  $[-1, 1]$ , muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt, \quad f, g \in \mathcal{E}$$

n'est pas de Hilbert. Utiliser la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  où

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leq t \leq \frac{-1}{n} \\ nt + 1, & \frac{-1}{n} \leq t \leq 0 \\ 1 & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}, \quad (n \geq 1)$$

#### Exercice 1.4.

Dans l'espace  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  des matrices carrées d'ordre  $n$ , ( $n \geq 1$ ) et à coefficients réels, on définit la trace d'une matrice  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  par  $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .

1. Montrer que pour  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

i.  $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$

ii.  $tr(AB) = tr(BA)$

2. Montrer que l'application

$$\langle A, B \rangle = tr(A^t B), \quad A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

définit un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , où  $A^t$  est la matrice transposée de la matrice  $A$ .

3. Montrer que la norme associée à ce produit scalaire vérifie

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

4. En déduire que  $\|A^p\| \leq \|A\|^p$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 1$ .

#### Exercice 1.5.

(Produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{R}_n[X]$ )

a. Montrer que la relation

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx, \quad P, Q \in \mathbb{R}[X]$$

définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$  et sur  $\mathbb{R}_n[X]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

b. Montrer que  $(\mathbb{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace de Hilbert.

c. 1. Soit  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que la suite  $(P_n)_n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers la fonction  $x \mapsto \exp(x)$ .

2. En déduire que  $P_n$  converge vers la fonction  $x \mapsto \exp(x)$  pour la norme associée au produit scalaire.

3. En déduire que  $(\mathbb{R}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$  n'est pas un espace de Hilbert.

# Chapitre 2

## Systemes orthogonaux et orthonormaux

**Définition 2.1.** Soit  $E$  un espace pré-Hilbertien. Une famille de vecteurs non nuls  $(e_i)_{i \geq 1}$  est dite orthogonale si

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0, i, j \geq 1, i \neq j$$

Si de plus  $\langle e_i, e_i \rangle = 1, i \geq 1$ , la famille  $(e_i)_{i \geq 1}$  est dite système orthonormal dans  $E$ .

. Tout système orthogonal est orthonormalisable. En effet, si  $(e_i)_{i \geq 1}$  est un système orthogonal dans  $E$ , le système  $\left\{ \frac{e_i}{\|e_i\|} \right\}_{i \geq 1}$  est orthonormal dans  $E$ .

. La condition d'orthonormalisation est exprimée par le symbole de Kronecker

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, i, j \geq 1$$

**Exemples** 1. La famille  $(e_i)_{i \geq 1}$  où

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots), \dots$$

est orthonormale dans l'espace  $\ell_2$ .

2. La famille  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  où  $\varphi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ , forme un système orthonormal dans l'espace de Hilbert  $H = L_2([-\pi, \pi])$  muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt, \quad f, g \in H$$

En effet, on a pour tous  $n, m \geq 1$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) \overline{\varphi_m(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt \\ &= \begin{cases} \frac{e^{i\pi(m-n)} - e^{-i\pi(m-n)}}{2\pi i(m-n)}, & n \neq m \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt, & n = m \end{cases} \\ &= \delta_{n,m} \end{aligned}$$

**Proposition 2.1.** *Tout système orthogonal dans un espace pré-Hilbertien  $E$  est libre dans  $E$ .*

**Preuve.** Soit  $(e_i)_{i \geq 1}$  un système orthogonal dans  $E$ , et soit  $(\lambda_i)_{i \geq 1}$  une suite dans  $\mathbb{C}$  telle que  $\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i e_i = 0$ . D'où

$$\forall k; k \geq 1 : \left\langle \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i e_i, e_k \right\rangle = 0$$

i.e.,

$$\forall k; k \geq 1 : \lambda_k = 0$$

■

Tout espace de Hilbert de dimension finie admet une base orthonormale.

### Théorème de Pythagore généralisé

**Théorème 2.1.** *Si  $\{e_i\}_{i \geq 1}^n, n \geq 1$  est un système orthogonal dans un espace pré-Hilbertien, alors*

$$\left\| \sum_{i=1}^n e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 \quad (*)$$

**Preuve.** Par récurrence sur  $n$ .

i. Pour  $n = 2 : e_1 \perp e_2$  alors

$$\begin{aligned} \|e_1 + e_2\|^2 &= \langle e_1 + e_2, e_1 + e_2 \rangle \\ &= \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 + \langle e_1, e_2 \rangle + \langle e_2, e_1 \rangle \\ &= \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 \end{aligned}$$

ii. On suppose que (\*) est vraie pour le rang  $p - 1, p \geq 2$ , i.e.,

$$\left\| \sum_{i=1}^{p-1} e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p-1} \|e_i\|^2$$

Soient  $x = \sum_{i=1}^{p-1} e_i$  et  $y = e_p$ . On a  $\langle x, y \rangle = 0$ . D'où

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^p e_i \right\|^2 &= \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{p-1} e_i \right\|^2 + \|e_p\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} \|e_i\|^2 + \|e_p\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^p \|e_i\|^2 \end{aligned}$$

Donc, l'égalité (\*) est vraie pour  $p, p \geq 2$ . De (i) et (ii), (\*) est vraie pour tout  $n, n \geq 2$ . ■

## 2.0.1 Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

12

**Théorème 2.2.** *Etant donnée une suite  $(y_n)_n$  de vecteurs linéairement indépendants dans un espace pré-Hilbertien  $E$ . Alors  $(y_n)_n$  engendre un système orthonormal  $(x_n)_n$  dans  $E$ .*

- 
1. Jørgen Pedersen Gram, 1850-1916, est un mathématicien danois.
  2. Erhard Schmidt, 1876-1959, est un mathématicien allemand.

**Preuve.** Posons

$$\begin{aligned}
 w_1 &= y_1 \text{ et } x_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} \\
 w_2 &= y_2 - \langle y_2, x_1 \rangle x_1 \text{ et } x_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} \\
 w_3 &= y_3 - \langle y_3, x_1 \rangle x_1 - \langle y_3, x_2 \rangle x_2 \text{ et } x_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 w_n &= y_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle y_n, x_i \rangle x_i \text{ et } x_n = \frac{w_n}{\|w_n\|}, \quad n \geq 2
 \end{aligned}$$

La suite  $(w_n)_n$  est orthogonale dans  $E$ . En effet, par récurrence sur  $n$  :

i. Pour  $n = 2$  :

$$\begin{aligned}
 \langle w_2, w_1 \rangle &= \langle y_2 - \langle y_2, x_1 \rangle x_1, y_1 \rangle = \langle y_2, y_1 \rangle - \langle y_2, x_1 \rangle \langle x_1, y_1 \rangle \\
 &= \langle y_2, y_1 \rangle - \frac{\langle y_2, y_1 \rangle \langle y_1, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ii. On suppose maintenant que les vecteurs  $w_k, 1 \leq k \leq p-1$  sont deux à deux orthogonaux pour certain rang  $p, p \geq 2$ . Pour tout  $m, m < k$  :

$$\begin{aligned}
 \langle w_k, w_m \rangle &= \langle y_k, w_m \rangle - \frac{\sum_{p=1}^{k-1} \langle y_k, w_p \rangle \langle w_p, w_m \rangle}{\|w_m\|^2} \\
 &= \langle y_k, w_m \rangle - \frac{\langle y_k, w_m \rangle \langle w_m, w_m \rangle}{\|w_m\|^2} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

D'où, les vecteurs  $w_k, 1 \leq k \leq p$  sont deux à deux orthogonaux. De (i) et (ii), la suite  $(w_n)_n$  est orthogonale dans  $E$ , et  $\{x_k\}_{k \geq 1}$  est donc un système orthonormal dans  $E$ . ■

**Remarque** Il est clair que  $\overline{\{x_k\}_{k=1}^n} = \overline{\{y_k\}_{k=1}^n}$ .

**Définition 2.2.** Une série de la forme  $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$  dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est dite convergente vers un vecteur  $x \in \mathcal{H}$ , et l'on écrit  $x = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ , si la suite  $(S_n)_n$  où  $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ ,  $n \geq 1$  est convergente vers  $x$ .

**Exemple**  $x = (\lambda_i)_{i \geq 1} \in \ell_2$ . Soit  $(e_k)_{k \geq 1}$  la base standard de  $\ell_2$ . Alors

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\lambda_k|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

car  $x \in \ell_2$ . (le reste de la série  $\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2$ ). D'où,  $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k e_k$ .

## 2.0.2 Inégalité de Bessel

3

**Théorème 2.3.** Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert, et soit  $(\varphi_i)_{i \geq 1}$  un système orthonormal dans  $\mathcal{H}$ . Alors, pour tout  $x, x \in \mathcal{H}$  :

1.  $\sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, \varphi_k \rangle| \leq \|x\|^2$  (Inégalité de Bessel)
2. La série  $\sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$  converge.
3.  $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_k$  converge dans  $\mathcal{H}$  si et seulement si  $(\lambda_k)_{k \geq 1} \in \ell_2$ .
4. Si  $y = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_k$ , alors  $\lambda_k = \langle y, \varphi_k \rangle$ ,  $k \geq 1$ .

**Preuve 1.** Comme le système  $(\varphi_i)_{i \geq 1}$  est orthonormal dans  $\mathcal{H}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle x - \sum_{k=1}^n \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k, x - \sum_{k=1}^n \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\rangle \\ &= \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

---

3. Friedrich Wilhelm Bessel, 1784-1846, Astronome, mathématicien et physicien allemand.

D'où,

$$\sum_{k=1}^n |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2, \quad n \geq 1 \quad (*)$$

La série à termes positifs  $\sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2$  est donc convergente, car sa suite des sommes partielles définie par  $U_n = \sum_{k=1}^n |\langle x, \varphi_k \rangle|^2$  est majorée d'après (\*). D'où

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

2. Soit  $S_n = \sum_{k=1}^n \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$ ,  $n \geq 1$ . Pour tous  $n, m$  avec  $n > m$  on aura d'après (1)

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\|^2 &= \left\langle \sum_{k=m+1}^n \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k, \sum_{k=m+1}^n \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=m+1}^n |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

D'où, la suite  $(S_n)_n$  est de Cauchy dans  $\mathcal{H}$ . Comme  $\mathcal{H}$  est complet,  $(S_n)_n$  est convergente. Donc, la série  $\sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$  converge également.

3. Soit  $V_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k$ ,  $n \geq 1$ , et soit  $W_n = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2$ ,  $n \geq 1$ . Alors pour tous  $n, m$  tels que  $n > m$  :

$$\begin{aligned} \|V_n - V_m\|^2 &= \left\langle \sum_{k=m+1}^n \lambda_k \varphi_k, \sum_{k=m+1}^n \lambda_k \varphi_k \right\rangle = \sum_{k=m+1}^n |\lambda_k|^2 \\ &= W_n - W_m \end{aligned}$$

D'où,  $(V_n)_n$  est de Cauchy dans  $\mathcal{H}$  si et seulement si  $(W_n)_n$  l'est. Donc  $(V_n)_n$  converge si et seulement si  $(W_n)_n$  converge également dans  $\mathcal{H}$ .

4. Soit  $y = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_k$ . Comme le système  $\{\varphi_k\}_{k \geq 1}$  est orthonormal dans  $\mathcal{H}$ , et par la continuité du produit scalaire, on aura pour tout  $j, j \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \langle y, \varphi_j \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_k, \varphi_j \right\rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k, \varphi_j \right\rangle \\ &= \lambda_j \end{aligned}$$

■

**Définition 2.3.** Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert. Un système orthonormal  $\{\varphi_k\}_{k \geq 1}$  est dit base orthonormale de  $\mathcal{H}$  si :

$$\forall x \in \mathcal{H} : x = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{C}, \quad (k \geq 1)$$

Par le Théorème précédent,  $\lambda_k = \langle x, \varphi_k \rangle, k \geq 1$ .

**Définition 2.4.** Les scalaires  $\langle x, \varphi_k \rangle, k \geq 1$  sont dits *coefficients de Fourier* du vecteur  $x$ .

**Exemples.** 1. La base standard  $(e_i)_{i \geq 1}$  de  $\ell_2$  est orthonormale.

2. Le système  $\{\varphi_k\}_{k \geq 1}$  où  $\varphi_k = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, k \in \mathbb{Z}$  est une base orthonormale de  $L_2([-\pi, \pi])$ .

3. Le système  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}, n \geq 1$  est une base orthonormale de  $L_2([-\pi, \pi])$  également.

4. On suppose que  $\dim \mathcal{H} = n < +\infty$ . Soit  $\{\varphi_k\}_{1 \leq k \leq p}$  un système orthonormal dans  $\mathcal{H}$ . Comme  $\{\varphi_k\}_{1 \leq k \leq p}$  est linéairement indépendant,  $\{\varphi_k\}_{1 \leq k \leq p}$  est une base de  $\mathcal{H}$  si et seulement si  $n = p$ .

### 2.0.3 Egalité de Parseval

4

**Définition 2.5.** Une suite d'éléments  $(e_i)_{i \geq 1}$  d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est dite totale (complète) si

$$\forall i, i \geq 1 : \langle x, e_i \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$$

Autrement dit, le vecteur unique orthogonal au système  $(e_i)_{i \geq 1}$  est le vecteur nul.

On donnera par la suite, un résultat présentant des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système orthonormal dans  $\mathcal{H}$  soit une base orthonormale de  $\mathcal{H}$ .

---

4. Marc-Antoine Parseval des Chênes : 1755-1836, mathématicien français.

**Théorème 2.4. (Egalité de Parseval)** Soit  $\{\varphi_k\}_{k \geq 1}$  un système orthonormal dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i.  $\{\varphi_k\}_{k \geq 1}$  est une base orthonormale de  $\mathcal{H}$ .
- ii.  $\{\varphi_k\}_{k \geq 1}$  est une suite totale dans  $\mathcal{H}$ .
- iii.  $\text{Vect}\{\varphi_k\}_{k \geq 1}$  est dense dans  $\mathcal{H}$ , i.e.,

$$\forall x \in \mathcal{H}, \exists (x_n)_n \subset \overline{\{\varphi_k\}_{k \geq 1}} : x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

$$iv. \forall x \in \mathcal{H} : \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 = \|x\|^2 \text{ (Egalité de Parseval)}$$

$$v. \forall x, y \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, \varphi_k \rangle \overline{\langle y, \varphi_k \rangle}$$

**Preuve.** (i)  $\Rightarrow$  (v) Soient  $u_n = \sum_{k=1}^n \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$ ,  $v_n = \sum_{k=1}^n \langle y, \varphi_k \rangle \varphi_k$ ,  $n \geq 1$ . Alors

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle u_n, v_n \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \langle x, \varphi_k \rangle \overline{\langle y, \varphi_k \rangle} \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, \varphi_k \rangle \overline{\langle y, \varphi_k \rangle} \end{aligned}$$

(v)  $\Rightarrow$  (iv) On pose  $x = y$  dans (v).

(iv)  $\Rightarrow$  (iii) Soit  $x \in \mathcal{H}$ .

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) Si  $\langle x, \varphi_k \rangle = 0$ ,  $k \geq 1$ , alors  $x \perp \{\varphi_k\}_{k \geq 1}$ . Par conséquent,  $x \perp \overline{\{\varphi_k\}_{k \geq 1}} = \mathcal{H}$  (Exercice de TD). Donc  $x \perp x$ . D'où,  $x = 0$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Pour tout  $z$ ,  $z \in \mathcal{H}$ , la série  $w = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle z, \varphi_k \rangle \varphi_k$  converge par le Théorème précédent. D'où

$$\begin{aligned} \forall j, j \geq 1 : \langle z - w, \varphi_j \rangle &= \langle z, \varphi_j \rangle - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\langle \sum_{k=1}^n \langle z, \varphi_k \rangle \varphi_k, \varphi_j \right\rangle \\ &= \langle z, \varphi_j \rangle - \sum_{k=1}^{+\infty} \langle z, \varphi_k \rangle \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle \\ &= \langle z, \varphi_j \rangle - \langle z, \varphi_j \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par (ii), on aura  $z - w = 0$ . D'où,  $z = w = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle z, \varphi_k \rangle \varphi_k$ . ■

Autrement dit, une base orthonormale de  $\mathcal{H}$  est un système orthonormal total dans  $\mathcal{H}$ , ou bien, un système qui vérifie l'égalité de Parseval.

**Exemple** On verra plus tard que le système  $\{\varphi_k\}_{k \geq 1}$  où  $\varphi_k = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  est total dans l'espace de Hilbert  $L_2([-\pi, \pi])$ . Il forme donc une base orthonormale de  $L_2([-\pi, \pi])$ .

Par conséquent, tout élément  $f \in L_2([-\pi, \pi])$  s'écrit sous la forme

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

soit donc

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} e^{ikx} dt, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

## 2.1 Espaces de Hilbert séparables

### 2.1.1 Définitions et propriétés

**Définition 2.6.** *Un espace de Hilbert est dit séparable s'il contient une suite orthonormale totale.*

On a donc le résultat suivant

**Théorème 2.5.** *Un espace de Hilbert est séparable si et seulement s'il admet une base orthonormale.*

**Preuve.** Conséquence directe du Théorème précédent. ■

**Exemples.** 1. Un espace de Hilbert de dimension finie est séparable.

2. Les espaces  $\ell_2$  et  $L_2([a, b])$  sont séparables.

**Théorème 2.6.** *Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert séparable. Alors,  $\mathcal{H}$  admet un sous-ensemble dénombrable et dense.*

**Preuve.** Soit  $(x_n)_n$  une suite orthonormale totale dans  $\mathcal{H}$ , et soit

$$S = \left\{ \sum_{k=1}^n (\alpha_k + i\beta_k)x_k, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Q}, 1 \leq k \leq n, n \geq 1 \right\}$$

$S$  est dénombrable. De plus

$$\forall x \in \mathcal{H} : \left\| \sum_{k=1}^n \langle x, x_k \rangle x_k - x \right\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

car  $(x_n)_n$  est totale dans  $\mathcal{H}$ . Ce qui montre que  $S$  est dense dans  $\mathcal{H}$ . ■

## 2.1.2 Espaces isomorphes

**Définition** Deux espaces de Hilbert  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont dits isomorphes s'il existe une bijection  $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  vérifiant

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle, \quad x, y \in \mathcal{H}_1$$

L'application  $T$  est linéaire et est dite isomorphisme de  $\mathcal{H}_1$  dans  $\mathcal{H}_2$ .

**Remarque**  $\|T\| = 1$ .

**Théorème 2.7.** *Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert séparable.*

*i. Si  $\dim \mathcal{H} < +\infty$ , alors  $\mathcal{H}$  est isomorphe à  $\mathbb{C}^n$  ou  $\mathbb{R}^n$ , (selon le corps de  $\mathcal{H}$ )*

*ii. Si  $\dim \mathcal{H} = +\infty$ , alors  $\mathcal{H}$  est isomorphe à  $\ell_2$ .*

**Preuve.** i. On suppose que  $\dim \mathcal{H} = n, n \geq 1$ . Soit  $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$  une base de  $\mathcal{H}$ . L'application  $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}^n$  où

$$Tx = T\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right) = (\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad x \in \mathcal{H}$$

est un isomorphisme.

ii. Soit  $(e_k)_{k \geq 1}$  une base orthonormale de  $\mathcal{H}$ . On définit l'application  $T: \mathcal{H} \rightarrow \ell_2$  par

$$Tx = (\langle x, e_k \rangle e_k)_{k \geq 1}$$

On montre facilement que  $T$  est un isomorphisme de  $\mathcal{H}$  dans  $\ell_2$ , et que

$$\|Tx\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2, \quad x \in \mathcal{H}$$

par l'égalité de Parseval car  $(e_k)_{k \geq 1}$  est une base orthonormale de  $\mathcal{H}$ . ■

**Remarque** Du Théorème précédent, découle que les espaces de Hilbert séparables de dimension finie ( resp. dimension infinie) sont isomorphes. Cela veut dire qu'en réalité, il n'existe qu'un seul espace de Hilbert séparable de dimension finie ( resp. dimension infinie) qui est  $\mathbb{C}^n$ . ( resp.  $\ell_2$ )

### 2.1.3 L'espace $L_2([a, b])$

L'espace des fonctions Lebesgue mesurables à carré intégrable sur  $[a, b]$ , i.e.,

$$\mathcal{L}_2([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ mesurable et } \int_a^b |f|^2 < +\infty \right\}$$

et l'espace

$$L_2([a, b]) = \{ \{f\}, f \in \mathcal{L}_2([a, b]) \}$$

formé des classes d'équivalences pour la relation d'égalité p.p. sur  $[a, b]$ .

.  $L_2([-\pi, \pi])$  muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt, \quad f, g \in L_2([-\pi, \pi])$$

est un espace de Hilbert séparable, admettant le système  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  où

$$\varphi_k(t) = \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}, \quad t \in [-\pi, \pi]$$

comme une base orthonormale [1] (TD)

**Théorème 2.8.** [6] *L'espace de Hilbert  $L_2([a, b])$  est séparable.*

## 2.2 Orthogonalité et projection orthogonale

### 2.2.1 Orthogonalité et complément orthogonal

**Définition 2.7.** Deux vecteurs  $x, y$  d'un espace pré-Hilbertien  $\mathcal{H}$  sont dits orthogonaux, et l'on écrit  $x \perp y$ , si  $\langle x, y \rangle = 0$ .

**Définition 2.8.** Si  $\operatorname{Re} \langle x, y \rangle = 0$ , les vecteurs  $x, y$  sont dits perpendiculaires.

**Remarque** Il est clair que ces deux notions sont équivalentes si  $\mathcal{H}$  est réel, i.e.  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Dans le cas où  $\mathcal{H}$  est complexe, les vecteurs  $x$  et  $ix$  sont perpendiculaires car  $\operatorname{Re} \langle x, ix \rangle = \operatorname{Re}(-i\|x\|^2) = 0$ .

**Définition 2.9.** Soit  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ ,  $\mathcal{M} \neq \emptyset$ , et soit  $x \in \mathcal{H}$ . Alors

$$x \perp \mathcal{M} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in \mathcal{M}$$

**Définition 2.10.** Soient  $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathcal{H}$ . Alors

$$\mathcal{M} \perp \mathcal{N} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in \mathcal{M}, \forall y \in \mathcal{N}$$

**Définition 2.11.** Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert, et soit  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ . Le complément orthogonal de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{H}$  est l'ensemble noté  $\mathcal{M}^\perp$  et défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\perp &= \{x \in \mathcal{H} : x \perp \mathcal{M}\} \\ &= \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in \mathcal{M}\} \end{aligned}$$

**Proposition 2.2.**  $\mathcal{M}^\perp$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{H}$ .

**Preuve.** i. Soient  $x_1, x_2 \in \mathcal{M}^\perp$ , et soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . On a pour tout  $y \in \mathcal{M}$  :

$$\langle \lambda x_1 + x_2, y \rangle = \lambda \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$$

car  $x_1 \perp y$  et  $x_2 \perp y$ . D'où  $(\lambda x_1 + x_2) \perp y$ . Par suite,  $(\lambda x_1 + x_2) \in \mathcal{M}^\perp$ . L'espace  $\mathcal{M}^\perp$  est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}$ .

ii. Montrons que  $\mathcal{M}^\perp$  est fermé de  $\mathcal{H}$ . Soit  $(x_n)_n$  une suite dans  $\mathcal{M}^\perp$  qui converge vers  $x$ ,  $x \in \mathcal{H}$ . Pour tout  $y \in \mathcal{M}$ , on a par la continuité du produit scalaire,

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n, y \right\rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, y \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

car  $x_n \in \mathcal{M}^\perp, n \in \mathbb{N}$ . D'où  $x \in \mathcal{M}^\perp$ . ■

**Propriétés.** Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert, et soit  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ . Alors

1.  $\mathcal{M} \subset (\mathcal{M}^\perp)^\perp = \mathcal{M}^{\perp\perp}$ . On montrera plus tard que si  $\mathcal{M}$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{H}$ , alors  $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\perp\perp}$ )

2.  $\mathcal{M}^\perp = \overline{\mathcal{M}}^\perp$  (TD)

3.  $\mathcal{H}^\perp = \{0\}$  et  $\{0\}^\perp = \mathcal{H}$ .

**Preuve.** 1. Soit  $x \in \mathcal{M}$ . Alors  $x \perp \mathcal{M}^\perp$ . Donc

$$\langle x, y \rangle = 0, \forall y \in \mathcal{M}^\perp$$

D'où  $x \in \mathcal{M}^{\perp\perp}$  par définition du complément orthogonal.

4. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\perp &= \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in \mathcal{H}\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

et comme  $\mathcal{H}$  est un espace vectoriel, on aura par (2) que

$$\{0\}^\perp = \mathcal{H}^{\perp\perp} = \mathcal{H}$$

■

**Définition 2.12.** Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert, et soit  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ . La distance d'un point  $a \in \mathcal{H}$  à  $\mathcal{M}$  est le nombre réel positif

$$d(a, \mathcal{M}) = \inf_{y \in \mathcal{M}} \|a - y\|$$

**Exercice** Montrer que

$$d(a, \mathcal{M}) = 0 \Leftrightarrow a \in \overline{\mathcal{M}}$$

On a donc le résultat important suivant

## 2.2.2 Théorème de la projection orthogonale

**Théorème 2.9.** Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert, et soit  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$  un sous-ensemble convexe et fermé. Pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , il existe  $w \in \mathcal{M}$  unique tel que

$$d(x, \mathcal{M}) = \|x - w\|$$

**Définition 2.13.** Le vecteur  $w$  est dit projection orthogonale de  $x$  sur  $\mathcal{M}$ .

**Preuve du Théorème 2.9.** Soit

$$d = d(x, \mathcal{M}) = \inf_{z \in \mathcal{M}} \|x - z\|$$

Il existe donc une suite  $(z_n)_n \subset \mathcal{M}$  telle que

$$\|x - z_n\| \rightarrow d, (n \rightarrow +\infty)$$

On doit montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = w$ . Appliquons l'identité du parallélogramme sur les vecteurs  $x - z_n, z - z_m, n, m \in \mathbb{N}$  :

$$2(\|x - z_n\|^2 + \|x - z_m\|^2) = \|2x - (z_n + z_m)\|^2 + \|z_n - z_m\|^2 \quad (1)$$

$\mathcal{M}$  étant convexe,  $\frac{1}{2}(z_n + z_m) \in \mathcal{M}$  et

$$\|2x - (z_n + z_m)\| = 2 \left\| x - \frac{1}{2}(z_n + z_m) \right\| \geq 2d \quad (2)$$

Combinant les relations (1) et (2), on obtient

$$\|z_n - z_m\|^2 \leq 2(\|x - z_n\|^2 + \|x - z_m\|^2) - 4d^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 4d^2 - 4d^2 = 0$$

La suite  $(z_n)_n$  est donc de Cauchy dans  $\mathcal{M}$ . Comme  $\mathcal{H}$  est complet, et  $\mathcal{M}$  est fermé,  $\mathcal{M}$  est aussi complet. Il existe donc  $w \in \mathcal{M}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = w$ . D'où, et par la continuité du produit scalaire

$$d = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - z_n\| = \|x - w\|$$

Montrons maintenant l'unicité de  $w$ . Supposons qu'il existe  $y \in \mathcal{M}$  tel que

$$d = \|x - y\|$$

On aura donc

$$d^2 \leq \left\| x - \frac{1}{2}(y + w) \right\|^2 = \left\| \frac{1}{2}(x - y) + \frac{1}{2}(x - w) \right\|^2$$

D'où, et par l'identité du parallélogramme sur les vecteurs  $\frac{1}{2}(x - y)$  et  $\frac{1}{2}(x - w)$ , on obtiendra

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \left\| \frac{1}{2}(x - y) + \frac{1}{2}(x - w) \right\|^2 = \\ &= 2\left( \left\| \frac{1}{2}(x - y) \right\|^2 + \left\| \frac{1}{2}(x - w) \right\|^2 \right) - \left\| \frac{1}{2}(y - w) \right\|^2 \\ &= d^2 - \frac{1}{4} \|y - w\|^2 \end{aligned}$$

D'où  $y = w$ . ■

Du Théorème 2.9, découle le résultat important suivant

### 2.2.3 Théorème de la décomposition orthogonale

**Théorème 2.10.** *Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert, et soit  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$  un sous-espace vectoriel fermé. Alors, tout vecteur  $x \in \mathcal{H}$  admet une décomposition unique  $x = x_1 + x_2$  où  $x_1 \in \mathcal{M}$  et  $x_2 \in \mathcal{M}^\perp$ .*

Autrement dit,  $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$  (somme directe orthogonale)

$x_1$  est la projection orthogonale de  $x$  sur  $\mathcal{M}$  et  $x_2$  est la projection orthogonale de  $x$  sur  $\mathcal{M}^\perp$ .

**Preuve.** i. Si  $x \in \mathcal{M}$ , alors  $x = x + 0$ .

ii. Si  $x \notin \mathcal{M}$ . Soit  $y$  le point unique de  $\mathcal{M}$  vérifiant

$$\|x - y\| = d(x, \mathcal{M}) = \inf_{w \in \mathcal{M}} \|x - w\|$$

$y$  existe d'après le théorème de la projection orthogonale. Montrons que

$$x = y + (x - y)$$

est la décomposition demandée. On a

$$\forall w \in \mathcal{M}, \forall \lambda \in \mathbb{C} : y + \lambda w \in \mathcal{M}$$

car  $\mathcal{M}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}$ . De plus

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &\leq \|x - y - \lambda w\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda \langle w, x - y \rangle) + |\lambda|^2 \|w\|^2 \end{aligned}$$

D'où

$$-2\operatorname{Re}(\lambda \langle w, x - y \rangle) + |\lambda|^2 \|w\|^2 \geq 0$$

Si  $\lambda > 0$ , on divise par  $\lambda$  et on fait tendre  $\lambda$  vers 0, on aura

$$\operatorname{Re}(\lambda \langle w, x - y \rangle) \leq 0 \quad (1)$$

De même, en remplaçant  $\lambda$  par  $-i\lambda$ , ( $\lambda > 0$ ), et on divise par  $\lambda$ , puis on fait tendre  $\lambda$  vers 0, on obtiendra

$$\operatorname{Im}(\lambda \langle w, x - y \rangle) \leq 0 \quad (2)$$

comme  $y \in \mathcal{M}$ ,  $-y \in \mathcal{M}$ . Alors, (1) et (2) demeurent vraies pour  $-w$ , i.e. :

$$\langle w, x - y \rangle = 0, \forall w \in \mathcal{M}$$

Donc  $(x - y) \in \mathcal{M}^\perp$ .

L'unicité. posons

$$x = y_1 + z_1, y_1 \in \mathcal{M}, z_1 \in \mathcal{M}^\perp$$

Alors  $(y - y_1) \in \mathcal{M}$  et  $(z - z_1) \in \mathcal{M}^\perp$ . Comme  $y - y_1 = z_1 - z$ , on aura forcément  $y - y_1 = z_1 - z = 0$  car  $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$ . ■

## 2.3 Exercices

### Exercice 2.1.

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et soit  $\mathcal{V}$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{V}^\perp = \overline{\mathcal{V}}^\perp$ .

2. On suppose que  $\mathcal{V}$  est fermé (Uniquement dans cette question). Montrer que  $(\mathcal{V}^\perp)^\perp = \mathcal{V}$ .

3. En déduire que  $(\mathcal{V}^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{V}}$ .

4. En déduire que  $\mathcal{V}$  est dense dans  $\mathcal{H}$  si et seulement si  $\mathcal{V}^\perp = \{0\}$ .

### Exercice 2.2.

a. 1. Montrer que

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^4 P(k)Q(k), \quad P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$$

définit bien un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_2[X]$ .

2. Trouver une base orthonormale de  $\mathbb{R}_2[X]$  pour ce produit scalaire.

b. On cherche à calculer

$$I = \inf_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 e^{-x} dx$$

1. Montrer que

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx, \quad P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$$

définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_3[X]$ .

2. Trouver une relation entre  $I$  et la distance de  $X^3$  à  $\mathbb{R}_2[X]$  pour la norme induite par ce produit scalaire.

3. Trouver  $I$ .

### Exercice 2.3.

Soit  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite orthonormale dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Soient

$$F_n = \text{Vect} \{e_i\}_{i=0, \dots, n}, \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{et} \quad F = \text{Vect} \{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$$

On considère la projection orthogonale  $P_n$  de  $\mathcal{H}$  sur  $F_n$ ,  $(n \in \mathbb{N})$ . Montrer que

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle e_i, \quad x \in \mathcal{H}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

2. Montrer que pour tout  $x \in \mathcal{H}$  :

$$\sum_{i=0}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 + \|x - P_n(x)\|^2 = \|x\|^2$$

3. En déduire l'inégalité de Bessel

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2, \quad x \in \mathcal{H}$$

4. On définit  $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$ . Montrer l'identité de Parseval

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 + (d(x, F))^2 = \|x\|^2, \quad x \in \mathcal{H}$$

#### Exercice 2.4.

Pour tout entier naturel  $N$ ,  $N \geq 1$ , on note  $M_N$  le sous-espace vectoriel de  $\ell_2$  formé des suites  $(x_n)_n$  telles que  $\sum_{i=0}^N x_i = 0$ .

1.i. Montrer que l'application  $(x_n)_n \mapsto \sum_{i=0}^N x_i$  est linéaire et continue de  $\ell_2$  dans  $\mathbb{C}$ .

1.ii. Que peut-on déduire de l'espace  $M_N$ ?

1.iii. Conclure une décomposition orthogonale de  $\ell_2$ .

2. Soit

$$E_n = \{(y_n)_n : y_i = y_j \text{ pour } 0 \leq i < j \leq N \text{ et } y_n = 0 \text{ pour } n > N\}$$

a. Montrer que  $E \subseteq M_N^\perp$ .

b. Montrer que  $E = M_N^\perp$ . (Remarquer que pour  $0 \leq i < j \leq N$ , la suite  $(x_n)$  où  $x_i = 1, x_j = -1$  et  $x_n = 0$  si  $n \neq i$  et  $n \neq j$  appartient à  $M_N$ .)

**Exercice 2.5.**

Soit  $a$  un vecteur non nul dans  $\mathcal{H}$ . Posons  $F = \overline{\{a\}}^\perp$ . Montrer que pour tout  $x \in \mathcal{H}$  :

$$d(x, F) = \frac{|\langle x, a \rangle|}{\|a\|}$$

# Chapitre 3

## Opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert

### 3.1 Opérateurs linéaires bornés

#### 3.1.1 Définitions - continuité

Dans ce chapitre,  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  désignent deux espaces de Hilbert séparables complexes .

**Définition 3.1.** Une fonction  $A: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  est dite opérateur linéaire si pour tous  $x, y \in \mathcal{H}_1$  et tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  :

$$A(\lambda x + y) = \lambda A(x) + A(y)$$

On écrit souvent  $Ax$  au lieu de  $A(x)$  pour l'image d'un vecteur  $x$  de  $\mathcal{H}_1$  par  $A$ .

**Définition 3.2.** Un opérateur linéaire  $A: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  est dit borné si

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < +\infty$$

On a donc le résultat suivant

**Théorème 3.1.** Soit  $A: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  un opérateur linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes

- i.  $A$  est continu.
- ii.  $A$  est continu en un point quelconque de  $\mathcal{H}_1$ .
- iii.  $A$  est borné.
- iv.  $\exists c > 0 / \forall x \in \mathcal{H}_1 : \|Ax\| \leq c \|x\|$

**Preuve.** (iv)  $\Rightarrow$  (i)  $\Rightarrow$  (ii) est évident.

(ii)  $\Rightarrow$  (iv) Supposons que  $A$  est continu en un point  $x_0, x_0 \in \mathcal{H}_1$ . On a donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in \mathcal{H}_1 : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\| < \epsilon$$

On a pour tout  $x \in \mathcal{H}_1, x \neq 0$  :

$$Ax = \frac{\|x\|}{\delta} A\left(\frac{\delta x}{\|x\|}\right) = \frac{\|x\|}{\delta} \left(A\left(\frac{\delta x}{\|x\|}\right) + x_0 - Ax_0\right)$$

Soit  $y = \frac{\delta x}{\|x\|} + x_0$ . Donc  $\|y - x_0\| = \delta$ . D'où

$$\|Ay - Ax_0\| < \epsilon \Rightarrow \|Ax\| \leq \frac{\|x\|}{\delta} \epsilon = \frac{\epsilon}{\delta} \|x\|$$

D'où,  $A$  est borné. ■

Si  $A$  est borné, la norme de  $A$  notée  $\|A\|$  est donnée par

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

**Exercice** Montrer que

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Ax, y \rangle|$$

On note par  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  à l'espace des opérateurs linéaires bornés de  $\mathcal{H}_1$  dans  $\mathcal{H}_2$ .

**Proposition 3.1.**  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ .

**Preuve.** Calcul direct. ■

**Proposition 3.2.**  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  est un espace de Banach.

**Preuve.** Comme  $\mathcal{H}_2$  est complet,  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  est complet. ■

. Si  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ , on note  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$  à l'espace  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1)$ .

. Si  $\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathbb{C})$  est le dual topologique de  $\mathcal{H}_1$ , et est noté  $\mathcal{H}_1^*$ . On montrera plus tard que  $\mathcal{H}_1^* \simeq \mathcal{H}_1$  ou bien  $\mathcal{H}_1^* = \mathcal{H}_1$ .

**Exemples 1.** Soit  $A: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  un opérateur linéaire avec  $\dim \mathcal{H}_1 < +\infty$ . Alors,  $A$  est borné. En effet, soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base orthonormale de  $\mathcal{H}_1$ . Alors

$$\forall x \in \mathcal{H}_1 : x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \quad \text{et} \quad Ax = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle Ae_k$$

D'où

$$\begin{aligned} \|Ax\| &\leq \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle| \|Ae_k\| \leq \left( \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n \|Ae_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \sum_{k=1}^n \|Ae_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|x\| \end{aligned}$$

D'où,  $A$  est borné et  $\|A\| \leq \left( \sum_{k=1}^n \|Ae_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ . Si de plus,  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ ,  $A$  est donc une matrice carrée. On suppose qu'il existe  $\lambda_k \in \mathbb{C}$ ,  $1 \leq k \leq n$  tels que

$$Ae_k = \lambda_k e_k, \quad 1 \leq k \leq n$$

Alors

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= \left\langle \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle Ae_k, \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle Ae_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 |\lambda_k|^2 \leq M^2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

où

$$M = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|$$

Donc

$$\|A\| \leq M \quad (1)$$

D'autre part, soit  $M = |\lambda_{j_0}|$ ,  $1 \leq j_0 \leq n$ . Comme  $\|e_{j_0}\| = 1$ , on obtiendra par définition de  $\|A\|$  que

$$\|A\| \geq \|Ae_{j_0}\|$$

Donc

$$\|A\| \geq |\lambda_{j_0}| = M \quad (2)$$

De (1) et (2),  $\|A\| = M = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|$  (maximum des valeurs propres de  $A$  en dimension finie)

2. Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert, et soit  $(\varphi_k)_{k \geq 1}$  une base orthonormale de  $\mathcal{H}$ . Soit  $(\lambda_k)_{k \geq 1}$  une suite dans  $\mathbb{C}$ . On définit l'opérateur  $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  par

$$Ax = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k, \quad x \in \mathcal{H}$$

Alors,  $A$  est linéaire. De plus, par l'inégalité de Bessel,

$$\|Ax\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2 |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \leq m^2 \|x\|^2$$

où  $m = \sup_{k \geq 1} |\lambda_k|$ . D'où,  $A$  est borné et  $\|A\| \leq m$  (1)

De plus, par la définition de la borne supérieure

$$\forall \epsilon > 0, \exists j \geq 1 : |\lambda_j| > m - \epsilon$$

D'où

$$\|A\| \geq \|A\varphi_j\| = |\lambda_j| > m - \epsilon$$

comme  $\epsilon > 0$  est arbitraire,  $\|A\| \geq m$  (2)

De (1) et (2) on obtient que

$$\|A\| = m = \sup_{k \geq 1} |\lambda_k|$$

### 3. Sur l'espace

$$\mathcal{D}(\mathcal{D}) = \{f \in L_2[-\pi, \pi] : f' \in L_2[-\pi, \pi]\}$$

muni de son produit scalaire usuel

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} dt, \quad f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{D})$$

on définit l'opérateur différentiel  $D$  par

$$Df(x) = \frac{df}{dx}(x) = f'(x)$$

Alors  $D$  n'est pas borné. En effet, pour la suite  $(f_n)_n$  où

$$f_n(x) = \sin nx, \quad (n \geq 1)$$

on a

$$\|f_n\| = \sqrt{\pi} \quad \text{et} \quad \|Df_n\| = n\sqrt{\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

■

**Proposition 3.3.** Soient  $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ . On montre facilement que

- i.  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ , ( $\alpha \in \mathbb{C}$ )
- ii.  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- iii. Si  $\mathcal{H}_3$  un espace de Hilbert, et si  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ , alors

$$CA \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3) \quad \text{et} \quad \|CA\| \leq \|C\| \|A\|$$

## 3.2 Fonctionnelles linéaires bornées

**Définition 3.3.** Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert. Une fonctionnelle (forme) linéaire sur  $\mathcal{H}$  est un opérateur linéaire de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathbb{C}$ .

Une fonctionnelle linéaire bornée sur  $\mathcal{H}$  est un élément de l'espace dual  $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ .

On a donc le résultat important suivant

### 3.2.1 Théorème de représentation de Riesz

1

**Théorème 3.2.** *Pour toute forme linéaire continue  $f$  sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , il existe un élément unique  $a \in \mathcal{H}$  tel que*

1.  $\forall x \in \mathcal{H} : f(x) = \langle x, a \rangle$  (\*)
2.  $\|f\| = \|a\|$

*Inversement, tout élément  $a \in \mathcal{H}$  définit une forme linéaire continue  $f_a$  sur  $\mathcal{H}$  par la formule (\*)*

**Preuve.**  $\Rightarrow$ ) Si  $f \equiv 0$ , on prend  $a = 0$ .

Soit  $f \neq 0$ . Il existe donc  $x_0 \neq 0$  tel que  $f(x_0) \neq 0$ . D'où,  $x_0 \notin \ker f$ .

$\ker f$  étant un sous-espace fermé de  $\mathcal{H}$  car  $f$  est linéaire continue. De plus

$$\forall x \in \mathcal{H} : f(x_0 f(x) - x f(x_0)) = 0$$

D'où,

$$\forall x \in \mathcal{H} : (x_0 f(x) - x f(x_0)) \in \ker f$$

Comme  $x_0 \in (\ker f)^\perp$ ,

$$\langle (x_0 f(x) - x f(x_0)), x_0 \rangle = 0$$

Donc

$$f(x) \langle x_0, x_0 \rangle - f(x_0) \langle x, x_0 \rangle = 0$$

ce qui implique que

$$f(x) = \langle x, x_0 \rangle = \left\langle x, \frac{\overline{f(x_0)}}{\|x_0\|^2} x_0 \right\rangle$$

Il suffit donc de prendre  $a = \frac{\overline{f(x_0)}}{\|x_0\|^2} x_0$ . On aura donc :

1.

$$\forall x \in \mathcal{H} : f(x) = \langle x, a \rangle$$

---

1. Frigyes Riesz, 1880-1956, est un mathématicien hongrois. Il est l'un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle.

2. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall x \in \mathcal{H} : |f(x)| = |\langle x, a \rangle| \leq \|a\| \|x\|$$

D'où,

$$\|f\| \leq \|a\| \quad (1)$$

D'autre part

$$f(a) = \langle a, a \rangle = \|a\|^2$$

et

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \|a\| \quad (2)$$

De (1) et (2), on obtient que  $\|f\| = \|a\|$ .

$\Leftrightarrow$  Evident. ■

**Définition 3.4.** L'espace  $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$  des formes linéaires continues sur  $\mathcal{H}$  est dit espace dual de l'espace  $\mathcal{H}$ , et est noté  $\mathcal{H}^*$ . (Pour le distinguer de l'espace de Banach)

**Remarque 1** Le Théorème de représentation de Riesz affirme l'existence d'un isomorphisme isométrique

$$\begin{aligned} I: \mathcal{H}^* &\rightarrow \mathcal{H} \\ f &\mapsto I(f) = a_f \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'identifier isométriquement les espaces  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}^*$ , i.e.,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^*$ .

**Exemple**  $(\mathbb{C}^n)^* = \mathbb{C}^n$ ,  $\ell_2^* = \ell_2$  et  $(L_2([a, b]))^* = L_2([a, b])$ .

**Remarque 2** Si  $\{\varphi_k\}_{k \geq 1}$  est une base orthonormale de  $\mathcal{H}$ , alors l'élément  $a$  correspondant à la forme linéaire dans le Théorème 3.2 est défini par

$$a = \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{f(\varphi_k)} \varphi_k$$

En effet, comme  $f(\varphi_k) = \langle \varphi_k, a \rangle$ ,  $k \geq 1$  :

$$a = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle a, \varphi_k \rangle \varphi_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{\langle \varphi_k, a \rangle} \varphi_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{f(\varphi_k)} \varphi_k$$

**Exemples** 1.  $\mathcal{H} = L_2([a, b])$  : Une forme linéaire  $T$  sur  $\mathcal{H}$  est continue si et seulement s'il existe  $g \in \mathcal{H}$  telle que

$$\forall f \in \mathcal{H} : T(f) = \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$$

De plus

$$\|T\| = \|g\|$$

et dans ce cas

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{T\left(\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}\right)} \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{T(e^{int})} e^{int}, \quad t \in [a, b] \end{aligned}$$

2.  $\mathcal{H} = \ell_2$ . Une forme linéaire  $T$  sur  $\ell_2$  est continue si et seulement s'il existe  $a = (a_k)_{k \geq 1} \in \ell_2$  tel que

$$\forall x = (x_k)_{k \geq 1} \in \ell_2 : Tx = \langle x, a \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \overline{a_k}$$

De plus

$$\|T\| = \|a\|$$

et si  $(e_k)_{k \geq 1}$  est la base standard de  $\ell_2$ , on aura dans ce cas

$$a = \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{T(e_k)} e_k$$

### 3.2.2 Théorème de Hahn-Banach

Dans la suite, on donne une version du Théorème de Hahn-Banach sur un espace de Hilbert

**Théorème 3.3.** Soit  $H$  un espace de Hilbert, et soit  $F \subset H$  un sous-espace vectoriel non dense dans  $H$ . Pour tout  $x_0 \notin \overline{F}$ , il existe une forme linéaire continue  $f$  sur  $H$  telle que  $f(x_0) = 1$  et  $f \equiv 0$  sur  $\overline{F}$ .

**Preuve** Posons  $G = F^\perp = \overline{F}^\perp$ . Donc,

$$x_0 = P_G(x_0) + (x_0 - P_G(x_0)) \in H = G \oplus G^\perp$$

Comme  $x_0 \notin \overline{F}$ ,  $P_G(x_0) \neq 0$ . Soit  $a = \frac{P_G(x_0)}{\|P_G(x_0)\|^2} \in F^\perp$ . Par le Théorème de représentation de Riesz, il existe une forme linéaire continue  $f$  sur  $H$  vérifiant

$$f(x) = \langle x, a \rangle, \quad x \in H$$

D'où,  $f(x_0) = 1$  et  $f(\overline{F}) = 0$ . ■

### 3.3 Théorème de Lax-Milgram

#### 3.3.1 Forme coercive

**Définition 3.5.** Une forme bilinéaire  $f$  sur un espace vectoriel normé  $E$  est dite coercive (elliptique) s'il existe  $K \geq 0$  vérifiant

$$f(x, x) \geq K\|x\|^2, \quad x \in E$$

**Exemple 3.1.** Soit  $\varphi$  une fonction réelle continue sur  $[0, 1]$  telle que  $\min_{0 \leq x \leq 1} \varphi(x) > 0$ . Alors, la forme bilinéaire  $\psi$  définie sur l'espace  $L_2([0, 1])$  par

$$\psi(f, g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\varphi(t)dt, \quad f, g \in L_2([0, 1])$$

vérifie pour tout  $f \in L_2([0, 1])$

$$\psi(f, f) = \int_0^1 |f(t)|^2 \varphi(t) dt \geq \min_{0 \leq x \leq 1} \varphi(x) \int_0^1 |f(t)|^2 dt \geq \min_{0 \leq x \leq 1} \varphi(x) \|f\|_2^2$$

Par l'hypothèse sur  $\varphi$ , la forme  $\psi$  est coercive.

**Exercice** Montrer que si  $\dim E < +\infty$ , alors  $f$  est coercive sur  $E$  si et seulement si  $f$  est définie positive sur  $E$ , i.e.,  $f(x, x) > 0$ ,  $x \in E$ ,  $x \neq 0$ .

### 3.3.2 Théorème de Lax-Milgram

23

**Théorème 3.4.** Soit  $H$  un espace de Hilbert, et soit  $\psi$  une forme bilinéaire continue et coercive sur  $H \times H$  telle que

$$\exists \alpha, C > 0 : |\psi(u, v)| \leq C \|u\| \|v\| \quad \text{et} \quad \psi(u, u) \geq \alpha \|u\|^2, \quad u, v \in H$$

et soit  $\ell$  une forme linéaire continue sur  $H$ . Alors, il existe un unique  $u \in H$  tel que

$$\psi(u, v) = \ell(v), \quad v \in H$$

Si de plus,  $\psi$  est symétrique, alors  $u$  est l'unique minimum de la forme linéaire

$$J : v \mapsto \frac{1}{2} \psi(u, v) - \ell(v)$$

**Remarque** Le Théorème de Lax-Milgram constitue une généralisation du Théorème de représentation de Riesz.

**Preuve** Comme  $\ell$  est une forme linéaire continue sur  $H$ , il existe par le Théorème de représentation de Riesz, un unique  $a \in H$  tel que  $\ell(v) = \langle a, v \rangle$ ,  $v \in H$ . De même, comme  $\psi$  est continue, pour tout  $u \in H$ , l'application  $v \mapsto \psi(u, v)$  est une forme linéaire continue sur  $H$ . Il existe donc un unique  $a_u \in H$  tel que  $\psi(u, v) = \langle a_u, v \rangle$ ,  $v \in H$ . Posons  $A : H \rightarrow H$ ,  $u \mapsto a_u$ . On doit donc montrer que

$$\exists ! u \in H : Au = a$$

Pour cela, il suffit de montrer que  $A$  est bijective.

Pour tous  $u, v \in H$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle A(\lambda u + v), w \rangle = \psi(\lambda u + v, w) = \lambda \psi(u, w) + \psi(v, w) = \langle \lambda Au + Av, w \rangle, \quad w \in H$$

Ce qui montre la linéarité de  $A$ . De plus,

$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au \rangle = \psi(u, Au) \leq C \|u\| \|Au\|$$

- 
2. P. Lax : Mathématicien hongrois de nationalité américaine, Prix Abel en 2005.
  3. A. Milgram : Mathématicien américain, 1912-1961.

$A$  est donc continue.

Comme  $\psi$  est coercive,

$$\langle Au, u \rangle = \psi(u, u) \geq \alpha \|u\|^2, \quad u \in H$$

. D'où,  $\ker A = \{0\}$ , et  $A$  est donc injective. D'autre part, pour toute suite  $(v_n = Au_n)_n$  dans  $ImA$  qui converge vers  $v \in H$ , on a

$$\alpha \|u_k - u_m\|^2 \leq \psi(u_k, u_m) = \langle A(u_k - u_m), u_k - u_m \rangle \leq \|v_k - v_m\| \|u_k - u_m\|$$

Comme  $(v_n)_n$  est de Cauchy car convergente,  $(u_n)_n$  l'est également dans  $H$ . Elle est donc convergente vers  $u \in H$  car  $H$  est de Hilbert. Comme  $A$  est borné,

$$Au = A\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Au_n = v$$

Ce qui montre que  $v \in ImA$ . L'espace  $ImA$  est donc fermé de  $H$ .

Pour montrer que  $A$  est surjectif, il suffit donc de prouver que  $(ImA)^\perp = \{0\}$ . Soit  $v \in (ImA)^\perp$ . Donc,

$$0 = \langle Au, v \rangle = \psi(u, v) \geq \alpha \|v\|^2$$

Par suite,  $v = 0$ . Par conséquent,  $A$  est bijectif. Il existe donc  $u \in H$  unique tel que  $\psi(u, v) = \ell(v)$ ,  $v \in H$ .

Si  $\psi$  est symétrique, alors pour tout  $u \in H$ ,

$$J(u + v) = J(u) + \psi(u, v) - \ell(v) + \frac{1}{2}\psi(u, v) = J(u) + \frac{1}{2}\psi(u, v) \geq J(u) + \frac{\alpha}{2}\|v\|^2$$

D'où,  $J(u)(v)$  pour tous  $v \in H$ ,  $v \neq u$ . Ce qui prouve que  $u$  est le minimum unique de  $J$  sur  $H$ . ■

### 3.4 Opérateurs inversibles

**Définition 3.6.** Un opérateur  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  est dit inversible s'il existe un opérateur noté  $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$  tel que

$$A^{-1}A = I_{\mathcal{H}_2} \quad \text{et} \quad AA^{-1} = I_{\mathcal{H}_1}$$

où  $I_{\mathcal{H}_i}$  est l'opérateur identité sur  $\mathcal{H}_i$ , ( $1 \leq i \leq 2$ ).

**Définition 3.7.** L'opérateur  $A^{-1}$  est dit opérateur inverse de  $A$ .

**Définition 3.8.** Soit  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ . Le noyau de  $A$  est l'ensemble

$$\ker A = \{x \in \mathcal{H}_1 : Ax = 0\}$$

.  $A$  est injectif si et seulement si  $\ker A = \{0\}$ .

**Définition 3.9.** L'image de  $A$  est l'ensemble

$$ImA = \{Ax, x \in \mathcal{H}_1\}$$

.  $A$  est surjectif si et seulement si  $ImA = \mathcal{H}_2$ .

.  $A$  est inversible si et seulement si  $A$  est injectif et surjectif à la fois.

. S'il existe  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$  tel que  $BA = I_{\mathcal{H}_1}$ , on dit que  $A$  admet un inverse à gauche. L'opérateur  $B$  est dit inverse gauche de  $A$ .

Il est clair que dans ce cas,  $A$  est injectif.

. De même, s'il existe  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$  tel que  $AC = I_{\mathcal{H}_2}$ , on dit que  $A$  admet un inverse à droite, et que  $C$  est l'inverse droit de  $A$ .

Dans ce cas, l'opérateur  $A$  est surjectif.

. Si  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$  et est de dimension finie, alors  $A$  est inversible si et seulement si  $A$  admet soit un inverse à gauche, soit un inverse à droite, car dans ce cas on a

$$\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2 = \dim \ker A + \dim ImA$$

. En dimension infinie, la remarque précédente n'est pas vraie en général. En effet, l'opérateur shift (de décalage) droit  $S_r$  défini sur  $\ell_2$  par

$$S_r x = S_r(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots), \quad x = (x_i)_{i \geq 1} \in \ell_2$$

est l'inverse droit du shift gauche  $S_l$  où  $S_l x = S_l(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ .

Or,  $S_l$  n'est pas inversible car  $e_1 = (1, 0, 0, \dots) \in \ker S_l$ . De même,  $S_r$  n'est pas inversible car  $e_1 \notin ImS_r$ .

**Théorème 3.5.** Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert, et soit  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  tel que  $\|A\| < 1$ . Alors l'opérateur  $I - A$  est inversible, et l'on a

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k, \quad A^0 = I$$

De plus

$$\left\| (I - A)^{-1} - \sum_{k=0}^n A^k \right\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

**Preuve.** Soit  $y \in \mathcal{H}$ . La série  $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k y$  est convergente dans  $\mathcal{H}$ . En effet, si on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n A^k y$ , on aura pour tous  $n, m, n > m$  :

$$\|S_n - S_m\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|A^k y\| \leq \|y\| \sum_{k=m+1}^n \|A\|^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

car  $\|A\| < 1$ . La suite  $(S_n)_n$  est donc de Cauchy dans  $\mathcal{H}$ . Par suite, elle est convergente ( $\mathcal{H}$  est complet). La série  $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k y$  converge également. Soit  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  tel que

$$By = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k y$$

$B$  est linéaire, et

$$\|By\| \leq \|y\| \sum_{k=0}^{+\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|} \|y\|$$

D'où  $B$  est borné et

$$\|B\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

De plus, on a pour tout  $y \in \mathcal{H}$  :

$$\begin{aligned} (I - A)By &= (I - A) \sum_{k=0}^{+\infty} A^k y = \sum_{k=0}^{+\infty} (I - A)A^k y \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} A^k (I - A)y = B(I - A)y \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} A^k y - \sum_{k=0}^{+\infty} A^{k+1} y = y \end{aligned}$$

Ce qui montre que  $(I - A)$  est inversible et  $(I - A)^{-1} = B$ . Finalement

$$\begin{aligned} \left\| (I - A)^{-1} - \sum_{k=0}^n A^k \right\| &= \sup_{\|y\|=1} \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} A^k y \right\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|A\|^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

■

### 3.5 Adjoint d'un opérateur linéaire

**Théorème 3.6.** Soit  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ . Il existe un opérateur unique  $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$  tel que

$$\forall x \in \mathcal{H}_1, \forall y \in \mathcal{H}_2 : \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$$

De plus, on a  $\|A\| = \|A^*\|$ .

**Définition 3.10.** L'opérateur  $A^*$  est dit opérateur adjoint de l'opérateur  $A$ .

**Preuve.** Pour tout  $y \in \mathcal{H}_2$ , l'application

$$\varphi : x \mapsto \langle Ax, y \rangle$$

est linéaire et continue sur  $\mathcal{H}_1$  par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et est de norme  $\|\varphi\| \leq \|A\| \|y\|$ . Par le Théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément noté  $A^*y \in \mathcal{H}_1$  tel que

$$\forall x \in \mathcal{H}_1 : \varphi(x) = \langle x, A^*y \rangle$$

On vient donc de définir un opérateur  $A^* : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1, y \mapsto A^*y$ . On vérifie facilement que  $A^*$  est linéaire. En effet, pour tous  $x \in \mathcal{H}_1, y, y' \in \mathcal{H}_2$  et tout  $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \langle Ax, \lambda y + y' \rangle &= \langle x, A^*(\lambda y + y') \rangle = \langle Ax, \lambda y \rangle + \langle Ax, y' \rangle \\ &= \bar{\lambda} \langle Ax, y \rangle + \langle x, A^*y' \rangle = \bar{\lambda} \langle x, A^*y \rangle + \langle x, A^*y' \rangle \\ &= \langle x, \lambda A^*y \rangle + \langle x, A^*y' \rangle \\ &= \langle x, \lambda A^*y + A^*y' \rangle \end{aligned}$$

Par unicité,

$$A^*(\lambda y + y') = \lambda A^*y + A^*y'$$

On a de même

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Ax, y \rangle| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle x, A^*y \rangle| \\ &= \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle A^*y, x \rangle| = \|A^*\| \end{aligned}$$

■

**Exemples** 1.  $I^* = I$  et  $0^* = 0$ .

2.  $S_r^* = S_l$  et  $S_l^* = S_r$ , où  $S_r$  et  $S_l$  sont respectivement les opérateurs shift droit et shift gauche sur  $\ell_2$ .

3. Considérons l'opérateur de multiplication  $M$  sur  $L_2([a, b])$  défini comme suit

$$(Mf)(t) = \mu(t)f(t), f \in L_2([a, b])$$

où  $\mu$  est une fonction complexe continue et Lebesgue mesurable sur  $[a, b]$ . On a pour tous  $f, g \in L_2([a, b])$  :

$$\begin{aligned} \langle Mf, g \rangle &= \int_a^b M(f)(t)\overline{g(t)} dt = \int_a^b \mu(t)f(t)\overline{g(t)} dt \\ &= \int_a^b f(t)\mu(t)\overline{g(t)} dt = \int_a^b f(t)\overline{\overline{\mu(t)g(t)}} dt \\ &= \langle f, M^*g \rangle \end{aligned}$$

D'où

$$(M^*g)(t) = \overline{\mu(t)}g(t), t \in [a, b]$$

On a donc les propriétés suivantes

**Théorème 3.7.** Soient  $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ . Alors

1.  $(A + B)^* = A^* + B^*$
2.  $(\alpha A)^* = \overline{\alpha}A^*, (\alpha \in \mathbb{C})$
3.  $(A^*)^* = A$

4. Si  $D \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$  où  $\mathcal{H}_3$  est un espace de Hilbert, alors  $(DA)^* = A^*D^*$

**Preuve.** Soient  $x \in \mathcal{H}_1$  et  $y \in \mathcal{H}_2$ . On a

1.

$$\begin{aligned} \langle (A+B)x, y \rangle &= \langle x, (A+B)^*y \rangle = \langle Ax+Bx, y \rangle = \langle Ax, y \rangle + \langle Bx, y \rangle \\ &= \langle x, A^*y \rangle + \langle x, B^*y \rangle = \langle x, A^*y + B^*y \rangle \\ &= \langle x, (A^* + B^*)y \rangle \end{aligned}$$

2.

$$\langle (\alpha A)x, y \rangle = \langle x, (\alpha A)^*y \rangle = \langle \alpha Ax, y \rangle = \langle Ax, \bar{\alpha}y \rangle = \langle x, A^*(\bar{\alpha}y) \rangle = \langle x, \bar{\alpha}A^*y \rangle$$

3.

$$\langle A^*y, x \rangle = \langle y, (A^*)^*x \rangle = \overline{\langle x, A^*y \rangle} = \overline{\langle Ax, y \rangle} = \langle y, Ax \rangle$$

4. Soit  $z \in \mathcal{H}_3$  :

$$\langle DAx, z \rangle = \langle x, (DA)^*z \rangle = \langle D(Ax), z \rangle = \langle Ax, D^*z \rangle = \langle x, A^*D^*z \rangle$$

■

**Théorème 3.8.** Soit  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ . Alors

1.  $\ker A = (\text{Im} A^*)^\perp$
2.  $\ker A^* = (\text{Im} A)^\perp$
3.  $\overline{\text{Im} A} = (\ker A^*)^\perp$
4.  $\overline{\text{Im} A^*} = (\ker A)^\perp$

**Preuve.** 1. Soit  $x \in \ker A$  et soit  $y \in \mathcal{H}_2$ .

$$0 = \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$$

D'où

$$x \perp \text{Im} A^*$$

i.e.,

$$x \in (\text{Im} A^*)^\perp$$

D'où  $\ker A \subset (ImA^*)^\perp$ .

De même, si  $u \in (ImA^*)^\perp$ , alors pour tout  $y \in \mathcal{H}_2$  :

$$0 = \langle u, A^*y \rangle = \langle Au, y \rangle$$

Pour  $y = Au \in \mathcal{H}_2$ , on aura

$$0 = \langle Au, Au \rangle$$

D'où  $Au = 0$ . Donc  $u \in \ker A$ , et par suite,  $(ImA^*)^\perp \subset \ker A$ .

2. On prend  $A^*$  au lieu de  $A$  dans (1), et on utilise le fait que  $A^{**} = A$ .

3.  $\overline{ImA} = (\overline{ImA})^{\perp\perp} = (ImA)^{\perp\perp} = (\ker A^*)^\perp$  par (2) et les propriétés du complément orthogonal.

4. On applique (3) sur  $A^*$ , et on utilise le fait que  $A^{**} = A$ . ■

Comme conséquence directe du Théorème précédent, on présente un résultat important relatif à la décomposition en somme directe orthogonale d'un espace de Hilbert.

On a donc

**Corollaire 3.1.** (Important) Soit  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ . Alors

$$\mathcal{H}_1 = \ker A \oplus (\overline{ImA^*}) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_2 = \ker A^* \oplus \overline{ImA}$$

### 3.5.1 Opérateurs auto-adjoints

**Définition 3.11.** Un opérateur  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est dit auto-adjoint si  $A^* = A$ .

**Théorème 3.9.** Soit  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  un opérateur auto-adjoint. Alors  $(\ker A)^\perp = \overline{ImA}$ .  
De plus

$$\mathcal{H} = \ker A \oplus (\overline{ImA})$$

**Preuve.** Conséquence directe du Théorème précédent. ■

**Exemples 1.** Soit  $M$  l'opérateur de multiplication sur  $L_2([a, b])$  défini par

$$Mf = \mu f, \quad f \in L_2([a, b])$$

On a alors

$$M^*f = \bar{\mu}f$$

Donc  $M$  est auto-adjoint si et seulement si  $\bar{\mu}(t) = \mu(t)$  p.p. sur  $[a, b]$ .

2. Soit  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . L'opérateur  $A^*A$  est auto-adjoint. En effet

$$(AA^*)^* = A^{**}A^* = AA^*$$

**Théorème 3.10.** L'opérateur  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est auto-adjoint si et seulement si

$$\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{H}$$

**Preuve.**  $\Rightarrow$ ) Si  $A = A^*$ , alors pour tout  $x \in \mathcal{H}$  :

$$\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle}$$

Donc  $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$ .

$\Leftarrow$ ) Si  $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathcal{H}$ , alors pour tous  $x, y \in \mathcal{H}$  et tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  :

$$\langle A(x + \lambda y), (x + \lambda y) \rangle = \langle (x + \lambda y), A(x + \lambda y) \rangle$$

Par unicité, et l'hypothèse que  $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathcal{H}$ , il s'ensuit que

$$Im(\lambda \langle Ay, x \rangle) = Im(\lambda \langle y, Ax \rangle) \quad (1)$$

En prenant  $\lambda = 1$  et  $\lambda = i$  dans (1), on aura

$$\forall x, y \in \mathcal{H} : \langle Ay, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$$

■

### 3.6 Orthoprojecteur sur un espace de Hilbert

**Définition 3.12.** Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert, et soit  $\mathcal{M}$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}$ . Un opérateur  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est dit orthoprojecteur (Opérateur de projection orthogonale) sur  $\mathcal{M}$  si

$$\forall x \in \mathcal{M}, \forall y \in \mathcal{M}^\perp : P(x + y) = x$$

. Il est clair que  $P$  est linéaire sur  $\mathcal{H}$ . De plus

$$\text{Im}P = \mathcal{M} \text{ et } \ker P = \mathcal{M}^\perp$$

et que

$$Px = x, x \in \mathcal{M}$$

.  $I - P$  est un orthoprojecteur sur  $\mathcal{M}^\perp$  de noyau  $\ker(I - P) = \mathcal{M}$ .

. Si  $\mathcal{M} \neq \{0\}$ , alors  $\|P\| = 1$ . En effet

$$\forall x = u + v \in \mathcal{H}, u \in \mathcal{M}, v \in \mathcal{M}^\perp : \|Px\|^2 = \|u\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 = \|x\|^2$$

par le théorème de Pythagore. D'où  $\|P\| \leq 1$  (1)

D'autre part, si  $u \in \mathcal{M}, u \neq 0$  :

$$\|P\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Px\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Pu\|}{\|u\|} = \frac{\|u\|}{\|u\|} = 1$$

car  $u \in \mathcal{M}$ . Donc  $\|P\| \geq 1$  (2)

De (1) et (2), découle que  $\|P\| = 1$ .

On a donc le résultat important suivant

**Théorème 3.11.** Un opérateur  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est un orthoprojecteur si et seulement si  $P^2 = P = P^*$ .

**Preuve.** ( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $P$  est un orthoprojecteur de  $\mathcal{H}$  sur un sous-espace vectoriel fermé  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{H}$ . Soit  $x = u + v, u \in \mathcal{M}$  et  $v \in \mathcal{M}^\perp$ . On a

$$P^2x = P(Px) = P(u) = u = Px$$

Donc  $P^2 = P$ , ( $P$  est dit idempotent). De plus, on a pour tous  $x = u + v$ ,  $y = u' + v' \in \mathcal{H}$  avec  $u, u' \in \mathcal{M}$  et  $v, v' \in \mathcal{M}^\perp$  :

$$\langle Px, y \rangle = \langle u, u' + v' \rangle = \langle u, u' \rangle = \langle u + v, u' \rangle = \langle x, Py \rangle$$

D'où  $P^* = P$ .

( $\Leftarrow$ ) Posons  $\mathcal{M} = \text{Im}P$ . Alors,  $\mathcal{M} = \ker(I - P)$  car  $P^2 = P$ . Le sous-espace  $\mathcal{M}$  est donc fermé dans  $\mathcal{H}$ . De plus,

$$\mathcal{M}^\perp = (\text{Im}P)^\perp = \ker P^* = \ker P$$

D'où, pour tous  $u \in \mathcal{M}, v \in \mathcal{M}^\perp$  :

$$P(u + v) = Pu + Pv = Pu$$

car  $u \in \mathcal{M} = \text{Im}P$ . Par suite,  $P$  est un orthoprojecteur sur  $\mathcal{M}$ . ■

## 3.7 Exercices

### Exercice 3.1.

Déterminer les opérateurs adjoints des opérateurs linéaires suivants

$$K_i: L^2([-\pi, \pi]) \rightarrow L^2([-\pi, \pi]), \quad i = \overline{1, 2} \quad \text{où} \quad (K_1\psi)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t-s)}\psi(s) ds$$

$$\text{et } K_2(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)\psi(s) ds, \quad \psi \in L^2([-\pi, \pi]), t \in [-\pi, \pi]$$

$$K: L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1]), \quad (K\psi)(t) = \int_0^t \psi(s) ds, \quad \psi \in L^2([0, 1]), t \in [0, 1]$$

### Exercice 3.2.

$\mathcal{H}$  et  $\mathcal{K}$  sont deux espaces de Hilbert, et  $(\varphi_k)_{k \geq 1}$  et  $(\psi_k)_{k \geq 1}$  sont des suites orthonormales dans  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{K}$  respectivement. Soit  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  une suite complexe bornée. Considérons l'application  $\mathcal{T}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  définie par

$$\mathcal{T}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \psi_n, \quad x \in \mathcal{H}$$

- i. Montrer que  $\mathcal{T}$  définit un opérateur linéaire de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{K}$ .
- ii. Montrer que  $\mathcal{T}$  est borné, et en déduire une estimation de sa norme.
- iii. Calculer  $\|\mathcal{T}\|$ .
- vi. Déterminer l'opérateur adjoint  $\mathcal{T}^*$  de  $\mathcal{T}$ .

### Exercice 3.3.

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert muni d'une base orthonormale  $(\varphi_k)_{k \geq 1}$ , et soit  $\mathcal{A}$  un opérateur linéaire borné sur  $\mathcal{H}$ . Montrer  $\mathcal{A}$  admet une représentation matricielle  $\mathcal{A} = (a_{ij})$  correspondante à la base  $(\varphi_k)_{k \geq 1}$  où  $a_{ij} = \langle \mathcal{A}\varphi_j, \varphi_i \rangle, i, j \geq 1$ .

Application.  $\mathcal{H} = L^2([-\pi, \pi])$  muni de la base orthonormale  $\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$ , ( $n \in \mathbb{Z}$ ), et  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est l'opérateur de multiplication défini par

$$(\mathcal{A}f)(t) = a(t)f(t), \quad f \in \mathcal{H}$$

avec  $a(t)$  une fonction complexe Lebesgue mesurable sur  $[-\pi, \pi]$ . La matrice obtenue est dite matrice de Toeplitz.

**Exercice 3.4.**

a. Soit  $k$  une fonction complexe Lebesgue mesurable sur  $[a, b] \times [a, b]$  et telle que

$$\int_a^b \int_a^b |k(t, s)|^2 dt ds < +\infty$$

On définit l'opérateur  $K : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$  par

$$(Kf)(t) = \int_a^b k(t, s)f(s) ds, f \in L^2([a, b])$$

- Montrer que  $Kf$  existe pour tout  $f \in L^2([a, b])$ .

- Vérifier que  $K$  est linéaire et montrer que  $\|K\| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(t, s)|^2 dt ds}$ .

- Déterminer l'opérateur adjoint  $K^*$  de l'opérateur  $K$ .

**Exercice 3.5.**

(★) On définit sur  $\ell_2$  l'opérateur

$$\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \dots), \quad x \in \ell_2$$

Prouver que

a.  $\|\mathcal{U}x\| = \|x\|$  pour tout  $x \in \ell_2$ .

b.  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1}$  et  $\mathcal{U}^2 = \mathcal{I}$ .

c. Si  $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq \pm 1$ , alors l'opérateur  $\mathcal{I} - \alpha\mathcal{U}$  est inversible et

$$(\mathcal{I} - \alpha\mathcal{U})^{-1} = \frac{1}{1 - \alpha^2} (\mathcal{I} + \alpha\mathcal{U})$$

où  $\mathcal{I}$  est l'identité sur  $\ell_2$ .

d. Donner une représentation matricielle de  $\mathcal{U}$  dans la base standard de  $\ell_2$ .

**Exercice 3.6.**

Soit  $(\omega_j)_{j=1}^{+\infty}$  une suite de nombres complexes, et soit  $\mathcal{D}_\omega$  l'opérateur sur  $\ell_2$  défini par

$$\mathcal{D}_\omega x = \mathcal{D}_\omega(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\omega_1 x_1, \omega_2 x_2, \omega_3 x_3, \dots), \quad (x \in \ell_2)$$

a. Prouver que  $\mathcal{D}_\omega$  est borné si et seulement si la suite  $(\omega_j)_{j=1}^{+\infty}$  est bornée, et que dans ce cas, on a  $\|\mathcal{D}_\omega\| = \sup_{j \geq 1} |\omega_j|$ .

b. Montrer que  $\inf_{j \geq 1} |\omega_j| \|x\| \leq \|\mathcal{D}_\omega x\|$ ,  $x \in \ell_2$ .

c. Calculer  $\mathcal{D}_\omega^k x$ , pour tout  $k$ ,  $k \geq 1$ .

d. Montrer que  $\mathcal{D}_\omega$  est inversible si et seulement si  $\inf_{j \geq 1} |\omega_j| > 0$ . Donner l'expression de  $\mathcal{D}_\omega^{-1}$ .

e. Trouver une condition suffisante et nécessaire pour que  $\mathcal{D}_\omega$  soit auto-adjoint.

# Chapitre 4

## Opérateurs compacts

### 4.1 Définitions et propriétés

**Définition 4.1.** Un opérateur  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  est dit compact (ou complètement continu), si pour toute suite bornée  $(x_n)_n$  de  $\mathcal{H}$ , la suite  $(Ax_n)_n$  admet une sous-suite convergente dans  $\mathcal{H}_2$ .

**Exemples** 1. Si  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  est de rang fini ( $\dim \text{Im}A < +\infty$ ), alors  $A$  est compact.

En effet, soit  $(x_n)_n \subset \mathcal{H}_1$ ,  $\|x_n\| = 1$ . Alors, la suite  $(Ax_n)_n$  est bornée dans l'espace  $\text{Im}A$  de dimension finie  $\dim \text{Im}A = \text{rg}(A)$ . Comme  $\text{Im}A$  est isomorphe à  $\mathbb{C}^{\text{rg}(A)}$ , la suite  $(Ax_n)_n$  admet donc une sous-suite convergente dans  $\mathcal{H}_2$ .

2. Soit  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  avec  $\dim \mathcal{H}_1 < +\infty$ . Alors  $A$  est borné. Comme

$$\forall x \in \mathcal{H} : x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$$

on a

$$Ax = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle Ae_k$$

où  $(e_k)_{k=1}^n$  est une base orthonormale de  $\mathcal{H}_1$  ( $\dim \mathcal{H}_1 = n$ ,  $n \geq 1$ ). Alors,  $\text{Im}A$  est de dimension finie. L'opérateur  $A$  est donc compact d'après (1).

3. L'opérateur identité  $I_{\mathcal{H}}$  sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimension infinie n'est pas compact. En effet, si  $(x_n)_n$  est une suite orthonormale dans  $\mathcal{H}$ , alors

$$\|Ix_n - Ix_m\| = \|x_n - x_m\| = \sqrt{2}$$

La suite  $(Ix_n)_n$  n'admet donc aucune sous-suite convergente.

### 4.1.1 Théorème de Bolzano-Weierstrass

12

**Théorème 4.1.** [2] *Un espace métrique  $(\mathcal{X}, d)$  est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de  $\mathcal{X}$ , on peut en extraire une sous-suite convergente dans  $\mathcal{X}$ .*

**Remarque** Compte-tenu de la linéarité de  $A$ , il est équivalent de dire que  $A$  est compact si pour toute suite  $(x_n)_n$  d'éléments de la boule unité fermée  $\overline{B}(0, 1)$ , la suite  $(Ax_n)_n$  admet une sous-suite convergente.

Soit encore

**Définition 4.2.**  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  est compact si l'image par  $A$ , de la boule unité fermée est relativement compacte dans  $\mathcal{H}_2$ , i.e.,  $\overline{A(\overline{B}(0, 1))}$  est compacte dans  $\mathcal{H}_2$ .

**Exemples** 1. Dans l'exemple 3 précédent, où  $\dim \mathcal{H} = +\infty$ , on a

$$I_{\mathcal{H}}(\overline{B}(0, 1)) = \overline{B}(0, 1)$$

n'est pas compacte dans  $\mathcal{H}$  d'après le Théorème de Riesz relatif à la compacité de la boule unité fermée. Par conséquent,  $I_{\mathcal{H}}$  n'est pas compact.

On a donc les propriétés suivantes

**Théorème 4.2.** Soient  $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  deux opérateurs compacts. Alors :

i.  $A + B$  est compact.

---

1. Bernard Bolzano, 1781-1848, est un mathématicien bohémien germanophone.  
2. Karl Weierstrass, 1815-1897, est un grand mathématicien allemand, nommé " Père de l'analyse".

ii.  $\lambda A$  est compact, ( $\lambda \in \mathbb{C}$ )

**Preuve i.** Soit  $(x_n)_n \subset \mathcal{H}_1, \|x_n\| = 1$ . Il existe une sous-suite  $(x'_n)_n$  de  $(x_n)_n$  telle que  $(Ax'_n)_n$  converge, car  $A$  est compact.

De même, comme  $B$  est compact, la suite  $(Bx'_n)_n$  admet une sous-suite convergente  $(Bx''_n)_n$ . La sous-suite  $(A+B)x''_n)_n$  est donc convergente, et par suite,  $A+B$  est compact.

ii. Méthode analogue à celle de (1).

**Théorème 4.3.** *Tout opérateur compact est borné.*

**Preuve.** Par l'absurde, si  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  est compact et n'est pas borné, alors il existe une suite  $(x_n)_n$  dans  $\mathcal{H}_1, \|x_n\| = 1$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Ax_n\| = +\infty$$

Donc, la suite  $(Ax_n)_n$  n'admet pas une sous-suite convergente. Contradiction car  $A$  est compact. ■

Ce résultat montre que  $\mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  où

$$\mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) = \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2), A \text{ compact}\}$$

De plus, on a

**Corollaire 4.1.** *L'ensemble  $\mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ .*

**Théorème 4.4.** *Soient  $A, B: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  deux opérateurs linéaires tels que  $A$  est compact et  $B$  est borné. Alors les opérateurs  $AB$  et  $BA$  sont compacts.*

**Preuve.** Soit  $(x_n)_n \subset \mathcal{H}, \|x_n\| = 1$ . Comme  $B$  est borné, la suite  $(Bx_n)_n$  est bornée.  $A$  étant compact, la suite  $(ABx_n)_n$  admet donc une sous-suite convergente. D'où,  $AB$  est compact.

De même, comme  $A$  est compact, la suite  $(Ax_n)_n$  admet une sous-suite convergente  $(Ax'_n)_n$ . Comme  $B$  est continu car borné, la suite  $(BAx'_n)_n$  converge également, et  $BA$  est compact. ■

**Corollaire 4.2.** *L'espace  $\mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  est un idéal bilatère de  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ .*

**Théorème 4.5.**  *$A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  est compact si et seulement si  $A^*$  est compact.*

**Preuve.** ( $\Rightarrow$ ) Soit  $A$  compact sur  $\mathcal{H}_1$ , et soit  $(x_n)_n \subset \mathcal{H}_2, \|x_n\| = 1$ . Soit  $y_n = A^*x_n, n \geq 1$ . Comme  $A$  est borné,  $(y_n)_n$  est bornée dans  $\mathcal{H}_1$ . Elle admet donc une sous-suite convergente  $(y_{n_k})_n$  telle que  $(Ay_{n_k})_n$  converge dans  $\mathcal{H}_2$  car  $A$  est compact.

Comme  $AA^*$  est compact, on aura pour tous  $n, m \in \mathbb{N}, (n \neq m)$

$$\begin{aligned} \|y_{n_k} - y_{m_k}\|^2 &= \|A^*x_{n_k} - A^*x_{m_k}\|^2 = \langle A^*(x_{n_k} - x_{m_k}), A^*(x_{n_k} - x_{m_k}) \rangle \\ &= \langle AA^*(x_{n_k} - x_{m_k}), (x_{n_k} - x_{m_k}) \rangle \leq \|AA^*(x_{n_k} - x_{m_k})\| \|x_{n_k} - x_{m_k}\| \\ &\leq 2 \|AA^*(x_{n_k} - x_{m_k})\| \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

D'où, la suite  $(y_{n_k})_n$  est de Cauchy dans  $\mathcal{H}_1$ . Elle est donc convergente par la complétion de  $\mathcal{H}_1$ . D'où,  $A^*$  est compact.

( $\Leftarrow$ ) Si  $A^*$  est compact,  $A = A^{**}$  est aussi compact par ( $\Rightarrow$ ). ■

## 4.2 Convergence d'une suite d'opérateurs compacts

### 4.2.1 Types de convergence et propriétés

Soit  $(x_n)$  une suite dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , et soit  $x \in \mathcal{H}$ .

**Définition 4.3.** *Convergence faible :  $(x_n)_n$  est dite faiblement convergente vers  $x$ , et l'on écrit  $x_n \xrightarrow{w} x$ , si*

$$\forall y \in \mathcal{H} : \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

**Définition 4.4.** *Convergence forte :  $(x_n)_n$  est dite fortement convergente vers  $x$ , et l'on écrit  $x_n \xrightarrow{s} x$ , si*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0$$

**Définition 4.5.** *Convergence en norme :  $(x_n)_n$  est dite convergente en norme vers  $x$  si*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = \|x\|$$

**Proposition 4.1.** *Soit  $(x_n)$  une suite dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , et soit  $x \in \mathcal{H}$ . Alors,*

1.  $(x_n \xrightarrow{s} x) \Rightarrow (x_n \xrightarrow{w} x)$
2. *Si  $x_n \xrightarrow{w} x$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = \|x\|$ , alors  $x_n \xrightarrow{s} x$*

**Preuve.** 1. Soit  $y \in \mathcal{H}$ . On a

$$|\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| = |\langle x_n - x, y \rangle| \leq \|x_n - x\| \|y\| \rightarrow 0, (n \rightarrow +\infty)$$

D'où,  $(x_n \xrightarrow{w} x)$ .

2. On a

$$\|x_n - x\|^2 = \langle x_n - x, x_n - x \rangle = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - \langle x_n, x \rangle - \langle x, x_n \rangle$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|^2 = 2\|x\|^2 - 2\langle x, x \rangle = 0$$

■

**Proposition 4.2.** *Toute suite faiblement convergente dans un espace de Hilbert est bornée.*

**Preuve.** Soit  $(x_n)$  une suite dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , et soit  $x \in \mathcal{H}$ . Considérons la suite de fonctions

$$f_n(x) = \langle x_n, x \rangle, x \in \mathcal{H}, n \geq 1$$

Il est clair que  $f_n, n \geq 1$  sont des formes linéaires continues sur  $\mathcal{H}$  par la Proposition 4.1. Comme  $(x_n)$  converge faiblement, la suite  $(\langle x_n, x \rangle)_n$  converge également dans  $\mathbb{C}$ . Elle est donc bornée. Il existe donc  $M_x > 0$  tel que

$$\forall n, n \geq 1, \forall x \in \mathcal{H} : |f_n(x)| \leq M_x \|x\|$$

Autrement dit, la suite  $(f_n)_n$  est simplement bornée. Comme  $\mathcal{H}$  et  $\mathbb{C}$  sont complets, le Théorème de Banach-Steinhaus nous confirme que la suite  $(f_n)_n$  est uniformément bornée. i.e., il existe  $M > 0$  tel que

$$\sup_{n \geq 1} \|f_n\| \leq M \quad (4.1)$$

Or,

$$f_n(x_n) = \|x_n\|^2, n \geq 1$$

D'où,

$$\|f_n\| \geq \|x_n\|, \quad (n \geq 1) \quad (4.2)$$

Le résultat s'atteint donc par (4.1) et (4.2) ■

### 4.2.2 Autre définition d'un opérateur compact

On a donc le résultat important suivant

**Théorème 4.6.** *Soit  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ . Alors,  $A$  est compact si et seulement si  $A$  transforme toute suite faiblement convergente dans  $\mathcal{H}_1$  en une suite fortement convergente dans  $\mathcal{H}_2$ . Autrement dit, si  $(x_n)_n$  est une suite faiblement convergente dans  $\mathcal{H}_1$ , alors  $(Ax_n)_n$  est une suite fortement convergente dans  $\mathcal{H}_2$ .*

**Preuve.** ( $\Rightarrow$ ) Soit  $(x_n)_n$  une suite faiblement convergente vers un élément  $x$  dans  $\mathcal{H}_1$ . Alors  $(x_n)_n$  est bornée par la Proposition 4.2. Donc,

$$\exists r > 0, \forall n : x_n \in B(O, r)$$

D'où,

$$\forall n : A(x_n) \in A(B(O, r)) \subseteq \overline{A(B(O, r))}$$

Comme  $A$  est compact, l'ensemble  $\overline{A(B(O, r))}$  est compact dans  $\mathcal{H}_2$ . La suite  $A(x_n)_n$  admet au moins une sous-suite convergente fortement vers un élément  $y$  dans  $\mathcal{H}_2$  par le Théorème de Bolzano-Weierstrass. On doit donc montrer que toute autre sous-suite de  $A(x_n)_n$  converge vers  $y$  aussi. On a donc

$$\forall z \in \mathcal{H}_1 : \langle x_n, z \rangle \rightarrow \langle x, z \rangle, (n \rightarrow +\infty)$$

D'où,

$$\forall z' \in \mathcal{H}_2 : \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle Ax_n, z' \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, A^* z' \rangle = \langle x, A^* z' \rangle = \langle Ax, z' \rangle$$

Ce qui montre que

$$Ax_n \xrightarrow{w} y, \quad \text{et } y = Ax$$

car  $A$  est borné.

Soit  $(Ax_{n_k})_n$  une sous-suite de  $(Ax_n)$  telle que  $Ax_{n_k} \xrightarrow{s} y_1$ . Alors,  $Ax_n \xrightarrow{w} y_1$ . Par conséquent,  $y_1 = Ax = y$ .

( $\Leftarrow$ ) On doit montrer que  $\overline{A(\overline{B}(O, 1))}$  est compact dans  $\mathcal{H}_2$ . Soit  $(y_n)$  une suite dans  $\overline{A(\overline{B}(O, 1))}$ . Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \exists x_n \in \mathcal{H}_1, \|x_n\| \leq 1 : \|y_n - Ax_n\| \leq \frac{1}{n}$$

D'autre part,  $(x_n)_n$  est bornée dans  $\mathcal{H}_1$ . Donc, la suite  $(\langle x_n, a \rangle)$  est aussi bornée dans  $\mathbb{C}$ , pour tout  $a \in \mathcal{H}_1$ . Il existe donc une sous-suite  $(x_{n_k})_n$  de  $(x_n)_n$  telle que  $(\langle x_{n_k}, a \rangle)_n$  est convergente pour tout  $a \in \mathcal{H}_1$ . Donc, il existe  $x \in \mathcal{H}_1$  tel que

$$Ax_n \xrightarrow{w} y,$$

Par hypothèse,

$$Ax_{n_k} \xrightarrow{s} Ax$$

Par ailleurs,

$$0 \leq \|y_{n_k} - Ax\| \leq \|y_{n_k} - Ax_{n_k}\| + \|Ax_{n_k} - Ax\| < \frac{1}{n_k} + \|Ax_{n_k} - Ax\|$$

D'où,

$$y_{n_k} \xrightarrow{s} Ax$$

Autrement dit, la suite  $(y_n)$  admet une sous-suite fortement convergente dans  $\mathcal{H}_2$ , i.e.,  $\overline{A(\overline{B}(O, 1))}$  est compacte dans  $\mathcal{H}_2$ . Par suite, l'opérateur  $A$  est compact. ■

**Remarque** Ce résultat montre que la propriété de compacité d'un opérateur linéaire est plus forte que la propriété de continuité, et donc donne raison à l'appellation d'opérateur complètement continu pour un opérateur compact dans certaines littératures.

**Exemples 1.** Le shift right  $S_r$  sur  $\ell_2$  n'est pas compact. En effet, soit  $(e_n)_{n \geq 1}$  la suite de la base standard orthonormale de  $\ell_2$ . Comme

$$\forall x \in \ell_2 : x = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$$

et par l'égalité de Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

La série numérique réelle  $\sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$  est donc convergente. Par conséquent

$$\forall x \in \ell_2 : \lim_{n \rightarrow +\infty} |\langle x, e_k \rangle| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x, e_k \rangle = 0 = \langle x, 0 \rangle$$

ce qui montre que  $e_n \xrightarrow{w} 0$ . Or,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_r(e_n)\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|e_{n+1}\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \neq 0$$

i.e., la suite  $(S_r(e_n))_n$  ne converge pas fortement vers 0. Par le Théorème précédent,  $S_r$  n'est pas compact.

2. L'opérateur identité  $I_{\mathcal{H}}$  sur  $\mathcal{H}$  avec  $\dim \mathcal{H} = +\infty$  n'est pas compact.

### 4.2.3 Convergence d'une suite d'opérateurs compacts

**Théorème 4.7.** Soit  $(A_n)_{n \geq 1}$  une suite d'opérateurs compacts dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  convergent vers un opérateur  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ , i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n - A\| = 0 \quad (*)$$

Alors,  $A$  est compact.

**Preuve.** Soit  $(x_n)_n$  une suite faiblement convergente dans  $\mathcal{H}_1$  vers  $x$ . On a pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 1$  et tous  $n, m, n \neq m$  :

$$\begin{aligned} \|Ax_n - Ax_m\| &\leq \|Ax_n - A_p x_n\| + \|A_p x_n - A_p x_m\| + \|A_p x_m - Ax_m\| \\ &\leq \|A - A_p\| (\|x_n\| + \|x_m\|) + \|A_p x_n - A_p x_m\| \\ &\leq 2C \|A - A_p\| + \|A_p x_n - A_p x_m\| \end{aligned}$$

Soit  $\epsilon > 0$ . Pour  $p$  assez grand, on a

$$\|A - A_p\| < \frac{\epsilon}{4C}$$

par (\*).  $A_p$  étant compact,  $p \geq 1$ . Donc, il existe  $N_\epsilon \in \mathbb{N}$  tel que

$$n, m \geq N_\epsilon \Rightarrow \|A_p x_n - A_p x_m\| < \frac{\epsilon}{2}$$

D'où,

$$n, m \geq N_\epsilon \Rightarrow \|Ax_n - Ax_m\| \leq \frac{2C\epsilon}{4C} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Ce qui montre que la suite  $(Ax_n)_n$  est fortement convergente dans  $\mathcal{H}_2$ , et  $A$  est donc compact. ■

**Exemple** Soit  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  une suite complexe convergente vers 0. On considère l'opérateur diagonal

$$\begin{aligned} K: \ell_2 &\rightarrow \ell_2 \\ x = (x_i)_{i \geq 1} &\mapsto Kx = (\lambda_k x_k)_{k \geq 1} \end{aligned}$$

Pour tout  $n, n \geq 1$ , on définit l'opérateur

$$\begin{aligned} K_n: \ell_2 &\rightarrow \ell_2 \\ x = (x_i)_{i \geq 1} &\mapsto K_n x = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n, 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

Les opérateurs  $K_n$ , ( $n \geq 1$ ) sont de rang fini. Ils sont donc compacts sur  $\ell_2$ . De plus, on a

$$\|K_n - K\| \leq c \sup_{k \geq n} |\lambda_k| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0$ . D'où,  $K$  est compact par le Théorème précédent.

### 4.3 Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert séparable, et soit  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Soit  $(e_k)_{k \geq 1}$  une base orthonormale de  $\mathcal{H}$ . On considère la quantité

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|Ae_k\|^2$$

**Proposition 4.3.** *On a*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|Ae_k\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \|A^*e_k\|^2$$

**Preuve.** Pour tout  $k$ ,  $k \geq 1$  :

$$Ae_k = \sum_{j=1}^{+\infty} \langle Ae_k, e_j \rangle e_j$$

D'où

$$\|Ae_k\|^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} |\langle Ae_k, e_j \rangle|^2$$

Par suite

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \|Ae_k\|^2 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |\langle Ae_k, e_j \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |\langle e_k, A^*e_j \rangle|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |\langle A^*e_j, e_k \rangle|^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle A^*e_j, e_k \rangle|^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \|A^*e_j\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \|A^*e_k\|^2 \end{aligned}$$

■

**Proposition 4.4.** *Si  $(e'_k)_{k \geq 1}$  est une autre base orthonormale de  $\mathcal{H}$ , alors*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|Ae_k\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \|Ae'_k\|^2$$

**Preuve.** Pour tout  $k$ ,  $k \geq 1$  :

$$Ae_k = \sum_{j=1}^{+\infty} \langle Ae_k, e'_j \rangle e'_j$$

Donc, par la Proposition 4.3,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \|Ae_k\|^2 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |\langle Ae_k, e'_j \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |\langle A^*e'_j, e_k \rangle|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \|A^*e'_j\|^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \|Ae'_j\|^2 \end{aligned}$$

■

**Définition 4.6.** Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert séparable muni d'une base orthonormale  $(e_n)_{n \geq 1}$ , et soit  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Posons

$$N(A) = \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \|Ae_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Si  $N(A)$  est finie, on dit que  $A$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

**Définition 4.7.** Si la quantité  $N(A)$  est finie, elle est dite norme de Hilbert-Schmidt de  $A$ .

**Propriétés (TD)** Soient  $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Alors

1.  $\|A\| \leq N(A)$
2.  $N(A) \geq \|Ae_k\|$ ,  $(e_n)_{n \geq 1}$  est une base orthonormale de  $\mathcal{H}$ .
3.  $N(AB) \leq \|B\| N(A)$
4.  $N(A + B) \leq N(A) + N(B)$

**Théorème 4.8.** Soit  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  un opérateur de Hilbert-Schmidt. Alors  $A$  est compact.

**Preuve.** Soit  $(e_n)_{n \geq 1}$  une base orthonormale de  $\mathcal{H}$ . Comme  $N(A) < +\infty$ , la série  $\sum_{k=1}^{+\infty} \|A^*e_k\|^2$  converge. D'où

$$\forall p \in \mathbb{N}, p \geq 1, \exists N_p \in \mathbb{N} : \sum_{k=N_p+1}^{+\infty} \|A^*e_k\|^2 < \frac{1}{p^2}$$

Pour tout  $p, p \geq 1$ , on pose

$$\begin{aligned} A_p: \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \\ x &\mapsto A_p x = \sum_{k=1}^{N_p} \langle Ax, e_k \rangle e_k \end{aligned}$$

On a donc pour tout  $x, x \in \mathcal{H}$  et tout  $p, p \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \|A_p x\|^2 &= \sum_{k=1}^{N_p} |\langle Ax, e_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{N_p} |\langle x, A^*e_k \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{N_p} \|x\|^2 \|A^*e_k\|^2 \leq (N(A))^2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

Donc  $A_p$  est borné,  $p \geq 1$ . De plus,  $A_p$  est de rang fini,  $p \geq 1$ . Donc  $A_p$  est compact,  $p \geq 1$ . Il suffit pour montrer que  $A$  est compact de vérifier que la suite  $(A_p)_{p \geq 1}$  converge vers  $A$ , et puis appliquer le Théorème précédent.

On a donc pour tout  $x, x \in \mathcal{H}$  :

$$\begin{aligned} Ax - A_p x &= \sum_{k=1}^{+\infty} \langle Ax, e_k \rangle e_k - \sum_{k=1}^{N_p} \langle Ax, e_k \rangle e_k \\ &= \sum_{k=N_p+1}^{+\infty} \langle Ax, e_k \rangle e_k \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \|Ax - A_p x\|^2 &= \sum_{k=N_p+1}^{+\infty} |\langle Ax, e_k \rangle|^2 = \sum_{k=N_p+1}^{+\infty} |\langle x, A^* e_k \rangle|^2 \\ &\leq \|x\|^2 \sum_{k=N_p+1}^{+\infty} \|A^* e_k\|^2 \leq \frac{\|x\|^2}{p^2} \end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax - A_p x\| \leq \frac{1}{p}$$

Par conséquent

$$\|A - A_p\| \leq \frac{1}{p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

■

### 4.3.1 Application sur l'opérateur intégral

**Exercice (L'opérateur intégral est compact)** Soit l'opérateur

$$\begin{aligned} K : L_2([a, b]) &\rightarrow L_2([a, b]) \\ f &\mapsto Kf \end{aligned}$$

défini par

$$(Kf)(t) = \int_a^b k(x, t) f(x) dx$$

avec

$$\int_a^b \int_a^b k(x, t) dx dt < +\infty$$

$K$  est appelé l'opérateur intégral, et la fonction  $k$  est dite noyau de l'opérateur  $K$ .

1. Montrer que  $K$  est bien défini, i.e.,  $Kf \in L^2([a, b])$  pour tout  $f \in L^2([a, b])$ .
2. En déduire que  $K$  est borné, et estimer sa norme.
3. Montrer que  $K$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt.
4. Que peut-on déduire ?
5. Montrer que l'opérateur de Volterra  $\mathcal{V}: L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ ,  $f \mapsto \mathcal{V}f$  où

$$(\mathcal{V}f)(t) = \int_t^1 f(s) ds, \quad t \in [0, 1]$$

est compact.

**Solution** 1. Soit  $f \in L^2([0, 1])$ . Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on aura

$$\begin{aligned} \|Kf\|_2^2 &= \int_0^1 |(Kf)(t)|^2 dt = \int_0^1 \left| \int_0^1 f(s)k(t, s) ds \right|^2 dt \leq \int_0^1 \left( \int_0^1 |f(s)|^2 ds \right) \left( \int_0^1 |k(t, s)|^2 ds \right) dt \\ &= \int_0^1 |f(s)|^2 ds \int_0^1 \int_0^1 |k(t, s)|^2 ds dt = \int_0^1 \int_0^1 |k(t, s)|^2 ds dt \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

Comme  $\int_0^1 \int_0^1 |k(t, s)|^2 ds dt < +\infty$ ,  $Kf \in L^2([0, 1])$ , et donc  $K$  est bien défini.

2. De (1) découle que  $K$  est borné, et que  $\|K\| \leq \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 |k(t, s)|^2 ds dt}$ .

3. On a pour tout  $n, n \geq 1$  :

$$Ke_n(t) = \int_0^1 e_n(s)k(t, s) ds = \langle e_n, \bar{k}_t \rangle$$

où  $k_t(s) = k(t, s)$ ,  $t, s \in [0, 1]$ . D'où,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|Ke_n\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 |Ke_n(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 |\langle e_n, \bar{k}_t \rangle|^2 dt = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle e_n, \bar{k}_t \rangle|^2 dt$$

car la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle e_n, \bar{k}_t \rangle|^2$  est convergente par l'égalité de Parseval et le système  $(e_n)_n$  est une base orthonormale de  $L^2([0, 1])$ . On aura donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|Ke_n\|^2 = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle e_n, \bar{k}_t \rangle|^2 dt = \int_0^1 \|\bar{k}_t\|_2^2 dt = \|\bar{k}\|_2^2 = \int_0^1 \int_0^1 |k(t, s)|^2 ds dt < +\infty$$

Par conséquent,  $K$  est de Hilbert-Schmidt.

4. On déduit de (3) que  $K$  est compact.

5. On a pour tout  $f \in L^2([0, 1])$  :

$$(\mathcal{V}f)(t) = \int_t^1 f(s) ds = \int_0^1 f(s) k(t, s) ds, \quad t \in [0, 1]$$

où

$$k(t, s) = \begin{cases} 1, & s \in [t, 1] \\ 0, & s \in [0, t] \end{cases}$$

Comme

$$\int_0^1 \int_0^1 |k(t, s)|^2 ds dt = \int_0^1 \int_t^1 ds dt = \int_0^1 [s]_t^1 dt = \int_0^1 [1 - t] dt = \left[ t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} < +\infty$$

Alors,  $\mathcal{V}$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Il est donc compact.

## 4.4 Alternative de Fredholm

**Théorème 4.9.** Soit  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  un opérateur compact. Alors

1.  $\dim \ker(I - A) < +\infty$ .
2.  $\text{Im}(I - A)$  est fermé de  $H$ .

**Preuve** 1. Par l'absurde, on suppose que  $\dim \ker(I - A) = \infty$ . L'espace  $\ker(I - A)$  est fermé car  $I - A$  est borné, et est donc complet dans  $H$ . Soit donc  $B = \{e_i, i \geq 1\}$  une base orthonormale de  $\ker(I - A)$ . Comme

$$\|Ae_i - Ae_j\| \|e_i - e_j\| = \sqrt{2},$$

la suite  $(Ae_i)_{i \geq 1}$  n'admet aucune sous-suite convergente. Contradiction car  $A$  est compact.

2. Soit  $(y_n)_n$  une suite dans  $Im(I - A)$  qui converge vers un vecteur  $y \in H$ . Donc,  $y_n = (I - A)x_n$ ,  $x_n \in H$ ,  $n \geq 1$ . D'autre part, comme

$$H = \ker(I - A) \oplus \ker(I - A)^\perp,$$

$x_n = u_n + v_n$ ,  $n \geq 1$  avec  $u_n \in \ker(I - A)$  et  $v_n \in \ker(I - A)^\perp$ . On peut supposer que la suite  $(v_n)_n$  est bornée. donc, la suite  $(Av_n)_n$  admet une sous-suite convergente  $(Av_{n_k})_{n_k}$ . De plus,

$$v_{n_k} = (I - A)v_{n_k} + Av_{n_k} = y_{n_k} + Av_{n_k}$$

Ce qui montre que  $(v_{n_k})$  est convergente vers une limite  $v$ . D'où,

$$\begin{aligned} y &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (I - A)y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (I - A)y_{n_k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (I - A)v_{n_k} \\ &= (I - A) \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n_k} \\ &= (I - A)v \end{aligned}$$

i.e.,  $y \in Im(I - A)$ . ■

#### 4.4.1 Alternative de Fredholm

**Théorème 4.10.** Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur compact. Alors,

$(I - A)$  est injectif si et seulement si  $(I - A)$  est surjectif

**Preuve** ( $\Rightarrow$ ) Soit  $B = I - A$  et  $E_n = ImB^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Il est clair que

$$\dots \subseteq E_n \subseteq E_{n-1} \subseteq \dots \subseteq E_1 \subseteq E_0 = H \quad (4.3)$$

On suppose que  $E_n \neq E_{n-1}$ ,  $n \geq 1$ . Il existe donc une suite  $(x_n)_n$  dans  $H$  vérifiant

$$\|x_n\| = 1 \text{ et } \|Ax_n - Ax_m\| > \frac{1}{2}, \quad n \neq m \quad (4.4)$$

La suite  $(Ax_n)_n$  ne contient donc aucune suite extraite convergente. Ceci contredit le fait que  $A$  est compact. Par suite, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $E_{n_0} = E_{n_0+1} = H$ . Soit  $k$  le plus petit entier naturel vérifiant  $E_{k-1} \neq E_k = E_{k+1}$ . Donc,

$$y \in E_{k-1} \ominus E_k \Rightarrow Ty \in E_k = E_{k+1}$$

Il existe donc  $z \in E_k : z \neq y$  et  $Ty = Tz$ . i.e.,

$$(I - A)y = (I - A)z \text{ et } y \neq z$$

Contradiction car  $I - A$  est injectif. Par suite,  $E_n = H$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ceci prouve que  $(I - A)H = H$ . L'opérateur  $I - A$  est donc surjectif.

( $\Leftarrow$ ) Si  $I - A$  est surjectif, alors  $\ker(I - A^*) = \{0\}$ . Donc,  $I - A^*$  est injectif. Par l'implication précédente,  $I - A^*$  est surjectif car  $A^*$  est aussi compact. D'où,  $\ker(I - A) = \{0\}$  et  $(I - A)$  est injectif. ■

#### 4.4.2 Application sur les équations intégrales

Soient  $E$  un espace vectoriel normé, et  $A : E \rightarrow E$  un opérateur compact. Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \neq 0$ . Alors,

1. Soit l'équation  $(A - \lambda)f = 0$  admet une solution non nulle  $f$ .
2. Soit l'équation  $(A - \lambda)f = g$  admet une solution  $f$  pour tout  $g \in E$ .

Autrement dit, tout scalaire non nul  $\lambda$  est soit une valeur propre de  $A$ , ou soit un point de la résolvante de  $A$ , i.e.,  $(A - \lambda)^{-1}$  est continu.

## 4.5 Exercices

### Exercice 4.1.

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert, et soit  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

i. Montrer que si  $\mathcal{A}$  est compact, alors l'image par  $\mathcal{A}$  de toute suite orthonormale dans  $\mathcal{H}$ , est une suite fortement convergente vers 0.

ii. Montrer que  $\mathcal{A}$  est de rang fini si et seulement si  $\mathcal{A}^*$  l'est aussi. Dans ce cas,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}^*$  ont le même rang.

### Exercice 4.2.

Soit l'espace  $\mathcal{H} = L^2([a, b])$  et soit  $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$  une base orthonormale de  $\mathcal{H}$ . Soit  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  l'opérateur de multiplication défini par

$$(\mathcal{A}f)(t) = a(t)f(t), \quad f \in \mathcal{H}, \quad t \in [a, b]$$

$a(t)$  étant une fonction complexe continue Lebesgue mesurable sur  $[a, b]$ . On suppose qu'il existe  $t_0 \in [a, b]$  tel que  $a(t_0) \neq 0$ .

- Montrer que  $\mathcal{A}$  n'est pas compact.

### Exercice 4.3.

Considérons l'opérateur  $\mathcal{S}: L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$  où

$$(\mathcal{S}u)(t) = \int_0^t u(s) ds, \quad u \in L^2([0, 1])$$

ii. Montrer que  $\mathcal{S}$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt. (Donc compact)

Autre démonstration (★★) :

- Montrer que  $(\Phi_{i,j})_{i,j \geq 1}$  où  $\Phi_{i,j}(t, s) = \varphi_i(t)\overline{\varphi_j(s)}$  est une base orthonormale de  $L^2([a, b] \times [a, b])$ .

ii. Pour  $k = \sum_{i,j=1}^{+\infty} \langle k, \Phi_{i,j} \rangle \Phi_{i,j}$ , on pose

$$k_n(t, s) = \sum_{i,j=1}^n \langle k, \Phi_{i,j}(t, s) \rangle \Phi_{i,j}(t, s), \quad n \geq 1$$

a. Montrer que  $\|k - k_n\| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

iii. On définit les opérateurs intégraux

$$(\mathcal{K}_n f)(t) = \int_a^b k_n(t, s) f(s) ds, \quad (n \geq 1)$$

1. Montrer que  $\mathcal{K}_n, (n \geq 1)$  est linéaire et de rang fini.

2. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathcal{K} - \mathcal{K}_n\| = 0$ .

iv. En déduire que  $\mathcal{K}$  est compact.

#### Exercice 4.4.

Montrer que toute suite faiblement convergente dans un espace de Hilbert est bornée. (Utiliser le Théorème de Banach-Steinhaus)

# Chapitre 5

## Opérateurs non-bornés

### 5.1 Définitions et propriétés

**Définition 5.1.** Soient  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  des espaces de Hilbert. Un opérateur linéaire non-borné est une application linéaire

$$A: \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$$

définie sur un sous-espace vectoriel  $\mathcal{D}(A)$  de  $\mathcal{H}_1$  et à valeurs dans  $\mathcal{H}_2$ .

L'ensemble  $\mathcal{D}(A)$  est dit domaine de  $A$ .

On note un tel opérateur par  $(A, \mathcal{D}(A))$  ou simplement  $A$  s'il n'y a pas d'ambiguïté.

#### Exemple

$$\begin{aligned} A: \ell_2 &\rightarrow \ell_2 \\ x &\mapsto Ax = A((x_n)_n) = (nx_n)_{n \geq 1} \end{aligned}$$

$A$  est linéaire, mais  $A$  n'est pas borné sur  $\ell_2$ . Le domaine de  $A$  est l'ensemble

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ (x_n)_n \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 |x_n|^2 < +\infty \right\}$$

$A$  est donc un opérateur non-borné de domaine  $\mathcal{D}(A)$ .

**Définition 5.2.** Un opérateur non-borné est borné sur  $\mathcal{D}(A)$  s'il existe  $C > 0$  tel que

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) : \|Ax\| \leq C \|x\|$$

Il peut donc arriver qu'un opérateur non-borné soit borné sur son domaine.

**Définition 5.3.** Soit  $A: \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  un opérateur non-borné. Le graphe de  $A$  est l'ensemble

$$G(A) = \{(x, Ax), x \in \mathcal{D}(A)\} \subset \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$$

**Définition 5.4.** L'image de  $A$  est l'ensemble

$$ImA = \{Ax, x \in \mathcal{D}(A)\} \subset \mathcal{H}_2$$

De même,

**Définition 5.5.** Le noyau de  $A$  est l'ensemble

$$\ker A = \{x \in \mathcal{D}(A) : Ax = 0\} \subset \mathcal{H}_1$$

**Définition 5.6.** Un opérateur non-borné  $(A, \mathcal{D}(A)): \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}_2$  est fermé si son graphe  $G(A)$  est fermé, i.e.,

$$(\forall (x_n)_n \in \mathcal{D}(A) / \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = y) \Rightarrow (y = Ax \text{ et } x \in \mathcal{D}(A))$$

. Il est clair que  $A$  est fermé si et seulement si son graphe est fermé.

**Exemples** 1. Tout opérateur borné  $A: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  est fermé. (Par application du Théorème du graphe fermé)

2. Soit  $\mathcal{H} = L_2([a, b])$ , et soit  $A$  l'opérateur différentiel défini sur l'ensemble

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in \mathcal{H} : f \text{ absolument continue, } f' \in \mathcal{H} \text{ et } f(0) = 0\}$$

par

$$Af = f', f \in \mathcal{D}(A)$$

On a donc :

i.  $A$  n'est pas borné sur  $\mathcal{H}$ . En effet, la suite  $(f_n)_n$  où  $f_n(x) = x^n$ , ( $n \geq 1$ ) vérifie

$$f_n \in \mathcal{D}(A), \|f_n\|^2 = \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{2n+1} \leq 1, n \geq 1$$

et

$$\|Af_n\|^2 = \|f'_n\|^2 = \int_0^1 n^2 t^{2n-2} dt = \frac{n^2}{2n-1}$$

D'où,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|Af_n\|}{\|f_n\|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} = +\infty$$

ii.

$$\ker A = \{0\} \text{ et } \text{Im}A = \mathcal{H}$$

En effet, soit  $g \in \mathcal{H}$  tel que

$$f(t) = \int_0^t g(s) ds$$

Comme  $L_2([a, b]) \subset L_1([a, b])$

$$f \in \mathcal{D}(A) \text{ et } Af = g$$

D'où,  $A$  est inversible. Soit

$$A^{-1}g = f, g \in \mathcal{H}$$

L'opérateur  $A^{-1}$  est borné sur  $\mathcal{H}$  et  $\text{Im}A^{-1} = \mathcal{D}(A)$  car

$$\left| (A^{-1}g)(t) \right| \leq \int_0^1 |g(s)| ds \leq \left( \int_0^1 |g(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} = \|g\|$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'où

$$\|A^{-1}g\|^2 = \int_0^1 |(A^{-1}g)(s)|^2 ds \leq \int_0^1 \|g\|^2 ds = \|g\|^2$$

Donc  $\|A^{-1}\| \leq 1$ .

iii.  $A$  est fermé. Soit  $(f_n)_n$  une suite dans  $\mathcal{D}(A)$  telle que

$$(f_n)_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f, \text{ et } Af_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} h, h \in \mathcal{H}$$

Alors

$$f_n = A^{-1}Af_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A^{-1}h$$

car  $A^{-1}$  est continu. D'où,

$$f = A^{-1}h \in \mathcal{D}(A)$$

et donc  $Af = h$ . ■

**Proposition 5.1.** *Soit  $(A, \mathcal{D}(A))$  un opérateur fermé. Alors  $A$  est borné sur  $\mathcal{H}$  si et seulement si  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$ .*

**Preuve.** Application directe du Théorème du graphe fermé. ■

**Théorème 5.1.** *Soit  $A: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  un opérateur inversible. Alors  $A$  est fermé.*

**Preuve.** Soit  $(x_n)_n$  une suite dans  $\mathcal{D}(A)$  telle que  $Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y, y \in \mathcal{H}_2$ . Comme  $A^{-1}$  est borné sur  $\mathcal{H}_2$ ,

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} A^{-1}Ax_n = A^{-1}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} Ax_n\right) = A^{-1}y$$

D'où,

$$x = A^{-1}y \in \mathcal{D}(A)$$

et

$$Ax = A(A^{-1}y) = y$$

■

## 5.2 Extension d'un opérateur non-borné

**Définition 5.7.** *Soit  $(A, \mathcal{D}(A)): \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}_2$  un opérateur non-borné. On dit que  $(S, \mathcal{D}(S))$  est une extension de  $(A, \mathcal{D}(A))$ , et l'on écrit  $A \subset S$ , si*

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(S) \text{ et } Ax = Sx, x \in \mathcal{D}(A)$$

Autrement dit,  $G(A) \subset G(S)$ .

### 5.2.1 Opérateurs fermables

**Définition 5.8.** Un opérateur non-borné  $(A, \mathcal{D}(A))$  est dit *fermable* si  $A$  admet une extension fermée.

**Proposition 5.2.** Soit  $(A, \mathcal{D}(A))$  un opérateur non-borné de graphe  $G(A)$ . On suppose que  $A$  est fermable. Alors, il existe une extension  $\bar{A}$  de  $A$  telle que  $\bar{A} \subseteq A_1$  pour toute autre extension fermée  $A_1$  de  $A$ . De plus,  $G(\bar{A}) = \overline{G(A)}$ .

**Preuve.** Soit  $A_1$  une extension fermée de  $A$ . Alors,  $G(A) \subseteq G(A_1)$ . Donc,  $G(\bar{A}) \subseteq G(A_1)$ . Par suite,  $G(\bar{A})$  ne contient pas d'éléments de la forme  $(0, x)$  avec  $x \neq 0$ . Définissons l'opérateur  $B$  sur le domaine

$$\mathcal{D}(B) = \{x \in H : \exists f \in H \text{ tel que } (x, f) \in G(\bar{A})\}$$

par  $Bx = f$ , où  $f$  est l'unique vecteur vérifiant la condition de  $\mathcal{D}(B)$ . Evidemment,  $G(B) = G(\bar{A})$  et  $G(B) \subset G(A_1)$ . Par conséquent,  $B = \bar{A}$ . ■

## 5.3 Adjoint d'un opérateur non-borné

**Introduction** Rappelons que si  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ , alors pour tout  $y \in \mathcal{H}_2$ , il existe un unique  $A^*y \in \mathcal{H}_1$  tel que

$$\forall x \in \mathcal{H}_1, \forall y \in \mathcal{H}_2 : \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$$

Cependant, si  $A$  est non-borné, on pose

$$\forall x \in \mathcal{D}(A), \forall y \in \mathcal{D}(A^*) : \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \quad (*)$$

Toutefois, si  $\mathcal{D}(A)$  est quelconque dans  $\mathcal{H}_1$ , alors  $A^*y$  n'est pas défini de façon unique. En effet, soit  $x_0 \in \mathcal{H}_1$  avec  $x_0 \perp \mathcal{D}(A)$ . On a donc

$$\forall x \in \mathcal{D}(A), \forall y \in \mathcal{D}(A^*) : \langle x, x_0 + A^*y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$$

Pour cela, et afin d'éviter cet inconvénient, il faut que tout vecteur orthogonal à  $\mathcal{D}(A)$  soit 0, i.e.,  $\mathcal{D}(A)$  soit dense dans  $\mathcal{H}_1$ .

### 5.3.1 Définitions

**Définition 5.9.** Un opérateur non-borné  $(A, \mathcal{D}(A))$  est dit à domaine dense si  $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$ .

On aboutit donc à la définition suivante

**Définition 5.10.** Soit  $A: \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  un opérateur non-borné à domaine dense. L'adjoint  $A^*$  de  $A$  est l'unique opérateur ayant pour domaine

$$\mathcal{D}(A^*) = \{y \in \mathcal{H}_2 : \text{l'application } x \mapsto \langle Ax, y \rangle \text{ est continue} \}$$

et vérifiant l'égalité (\*)

**Théorème 5.2.** Soit  $A: \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  un opérateur non-borné à domaine dense. Alors,  $A^*$  est fermé.

**Preuve.** Soit  $(y_n)_n \in \mathcal{D}(A^*)$  telle que

$$y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y \text{ et } A^* y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z$$

On a

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) : \langle Ax, y_n \rangle = \langle x, A^* y_n \rangle$$

par la continuité du produit scalaire, on aura

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) : \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle Ax, y_n \rangle = \langle Ax, y \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x, A^* y_n \rangle = \langle x, z \rangle$$

D'où,

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) : \langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle = \langle x, A^* y \rangle$$

Finalement, et comme  $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}_1$ ,

$$y \in \mathcal{D}(A^*) \text{ et } z = A^* y$$

■

**Théorème 5.3.** Soit  $A: \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  un opérateur non-borné à domaine dense. Si  $A \subset B$ , alors  $B^* \subset A^*$ .

**Preuve.** Si  $B$  est une extension de  $A$ , alors  $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ . Donc  $\overline{\mathcal{D}(B)} = \mathcal{H}_1$ . l'opérateur  $B$  est donc de domaine dense.  $B^*$  existe et est unique. De plus, par définition, on a

$$\forall x \in \mathcal{D}(B), \forall y \in \mathcal{D}(B^*) : \langle Bx, y \rangle = \langle x, B^*y \rangle$$

D'où,

$$\forall x \in \mathcal{D}(A), \forall y \in \mathcal{D}(B^*) : \langle Ax, y \rangle = \langle x, B^*y \rangle$$

Par conséquent,

$$\forall y \in \mathcal{D}(B^*) : y \in \mathcal{D}(A^*)$$

i.e.,

$$\mathcal{D}(B^*) \subset \mathcal{D}(A^*)$$

En outre,

$$\forall x \in \mathcal{D}(A), \forall y \in \mathcal{D}(A^*) : \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$$

Donc

$$\forall y \in \mathcal{D}(B^*) \subset \mathcal{D}(A^*) : A^*y = B^*y$$

D'où,  $A^*$  est une extension de  $B^*$ . ■

**Théorème 5.4.** Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un non-borné possédant un adjoint  $A^*$  tel que  $\overline{\mathcal{D}(A^*)} = \mathcal{H}$ . Alors  $A^{**}$  est une extension de  $A$ .

**Preuve** On a

$$\forall x \in \mathcal{D}(A), \forall y \in \mathcal{D}(A^*) : \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \quad (1)$$

et  $A^*$  est unique car  $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$ . Donc,  $A^{**}$  existe et est unique car  $\overline{\mathcal{D}(A^*)} = \mathcal{H}$ , et vérifie

$$\forall y \in \mathcal{D}(A^*), \forall x \in \mathcal{D}(A^{**}) : \langle A^*y, x \rangle = \langle y, A^{**}x \rangle \quad (2)$$

D'où,

$$\langle x, A^*y \rangle = \langle A^{**}x, y \rangle, x \in \mathcal{D}(A^{**}), y \in \mathcal{D}(A^*)$$

Par conséquent,

$$x \in \mathcal{D}(A) \implies x \in \mathcal{D}(A^{**}) \quad (3)$$

De (1) et (2), et comme  $\overline{\mathcal{D}(A^*)} = \mathcal{H}$ ,

$$\forall y \in \mathcal{D}(A^*) : \langle Ax, y \rangle = \langle A^{**}x, y \rangle$$

et donc

$$A^{**}x = Ax, \quad x \in \mathcal{D}(A) \quad (4)$$

Par (3) et (4),  $A^{**}$  est une extension de  $A$ .     ■

## 5.4 Exercices

**Exercice 5.1.** Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , et considérons l'opérateur  $A : E \rightarrow E$  défini par  $Af = f'$ ,  $f \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ .

Montrer que  $A$  est non-borné et fermé.

**Exercice 5.2.** Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , et considérons l'opérateur  $T : E \rightarrow E$  défini par  $T\varphi = \varphi'$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(T) = \{\phi \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}), \phi \text{ est à support compact dans } ]0, 1[\}$ .

Montrer que  $T$  est non-borné et non fermé.

**Exercice 5.3.** Soit  $\mathcal{S} : \mathcal{D}(\mathcal{S}) \subseteq E \rightarrow F$  un opérateur linéaire. Posons  $\|x\|_{\mathcal{S}} = \|x\|_E + \|\mathcal{S}x\|_F$ ,  $x \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$ .

Montrer que  $\mathcal{S}$  est fermé si et seulement si l'espace  $(E, \|\cdot\|_{\mathcal{S}})$  est complet.

# Chapitre 6

## Sujets d'examens

### 6.1 EMD 2016/2017

#### Exercice 6.1.

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert, et soit  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  une suite orthonormale dans  $\mathcal{H}$ .

- Montrer que  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  converge faiblement vers 0 dans  $\mathcal{H}$ .

2. Soit  $\mathcal{M}$  un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{H}$ . Soient  $x \in \mathcal{H}$  et  $y \in \mathcal{M}$ . On note  $P_{\mathcal{M}}x$  la projection orthogonale de  $x$  sur  $\mathcal{M}$ .

- Montrer que  $y \perp P_{\mathcal{M}}x$  si et seulement si  $y \perp x$ .

#### Exercice 6.2.

Considérons l'espace de Hilbert  $L^2([0, 1])$  muni de la base orthonormale  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $\varphi_n(t) = e^{2\pi i n t}$ . Soit l'opérateur  $\mathcal{T}: L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ ,  $f \mapsto \mathcal{T}f$  où

$$(\mathcal{T}f)(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad x \in [0, 1]$$

1. Montrer que  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base orthonormale de  $L^2([0, 1])$ .

2. Calculer  $(\mathcal{T}\varphi_n)(x)$  pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, 1]$ , et en déduire la valeur de  $\|\mathcal{T}\varphi_n\|^2$ .

2. Montrer que  $\mathcal{T}$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt, i.e.,  $\sum_{n=0}^{+\infty} \|\mathcal{T}\varphi_n\|^2 < +\infty$ .

3. Que peut-on déduire ?

**Exercice 6.3.**

Soit  $a \in \mathbb{C}$ ,  $|a| = 1$ . On définit l'opérateur  $\mathcal{A}: L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ ,  $f \mapsto \mathcal{A}f$  où

$$\mathcal{A}f(x) = af(x) - 2ae^x \int_x^1 e^{-t} f(t) dt, \quad f \in L^2([0, 1])$$

1. Montrer que  $\mathcal{A}$  est linéaire.
2. Déterminer l'opérateur adjoint  $\mathcal{A}^*$  de l'opérateur  $\mathcal{A}$ .
3. Montrer que pour tout  $f \in L^2([0, 1])$  :  $(\mathcal{I} - \mathcal{A}^* \mathcal{A})f(x) = 2 \langle f, g \rangle g(x)$  où  $g(x) = e^{-x}$ .
4. Calculer  $\langle (\mathcal{I} - \mathcal{A}^* \mathcal{A})f, f \rangle$  pour tout  $f \in L^2([0, 1])$ .
5. En déduire que  $\mathcal{A}$  est borné, et estimer sa norme.

### 6.1.1 Corrigé de l'EMD 2016/2017

**Exercice 1** 1. Soit  $x \in \mathcal{H}$ . Comme  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  une suite orthonormale dans  $\mathcal{H}$ , on aura

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

et de plus, on a par l'inégalité de Bessel

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, \varphi_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

D'où, la série numérique  $\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, \varphi_n \rangle|^2$  est convergente pour tout  $x \in \mathcal{H}$ . Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\langle x, \varphi_n \rangle| = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x, \varphi_n \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \varphi_n, x \rangle$$

i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \varphi_n, x \rangle = 0 = \langle 0, x \rangle$$

pour tout  $x \in \mathcal{H}$ . Ce qui montre que  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  converge faiblement vers 0 dans  $\mathcal{H}$ .

2. Comme  $\mathcal{M}$  est un s.e.v fermé de  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$  par le théorème de la décomposition orthogonale. D'où

$$x \in \mathcal{H} \Rightarrow x = P_{\mathcal{M}}x + x', \quad x' \in \mathcal{M}^\perp$$

On aura donc

$$\langle y, x \rangle = \langle y, P_{\mathcal{M}}x + x' \rangle = \langle y, P_{\mathcal{M}}x \rangle + \langle y, x' \rangle = \langle y, P_{\mathcal{M}}x \rangle$$

car  $y \in \mathcal{M}$  et  $x' \in \mathcal{M}^\perp$ . D'où  $\langle y, x \rangle = 0$  si et seulement si  $\langle y, P_{\mathcal{M}}x \rangle = 0$ .

**Exercice 2** 1. Pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle &= \int_0^1 \varphi_n(t) \overline{\varphi_m(t)} dt = \int_0^1 e^{2\pi i n t} e^{-2\pi i m t} dt = \int_0^1 e^{2\pi i (n-m)t} dt \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi i (n-m)} \left[ e^{2\pi i (n-m)t} \right]_0^1, & n \neq m \\ \int_0^1 dt, & n = m \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i (n-m)} \left[ e^{2\pi i (n-m)} - 1 \right] ; & n \neq m \\ 1 ; & n = m \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 ; & n \neq m \\ 1 ; & n = m \end{cases} \end{aligned}$$

D'où,  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base orthonormale de  $L^2([0, 1])$ .

2. On a pour tout  $x, x \in [0, 1]$  :

$$(\mathcal{T}\varphi_n)(x) = \int_0^x e^{2\pi int} dt = \frac{1}{2\pi in} e^{2\pi int} \Big|_0^x = \frac{1}{2\pi in} (e^{2\pi inx} - 1) = \frac{1}{2\pi in} (\varphi_n - \varphi_0), \quad n \geq 1$$

et  $(\mathcal{T}\varphi_0)(x) = \int_0^x dt = x$

D'où

$$\|\mathcal{T}\varphi_n\|^2 = \frac{1}{4\pi^2 n^2} \|\varphi_n - \varphi_0\|^2 = \frac{1}{2\pi^2 n^2}, \quad n \geq 1$$

$$\|\mathcal{T}\varphi_0\|^2 = \int_0^1 |\mathcal{T}\varphi_0(x)|^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Par conséquent

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|\mathcal{T}\varphi_n\|^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi^2 n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

L'opérateur  $\mathcal{T}$  est donc de Hilbert-Schmidt.

3. On déduit que  $\mathcal{T}$  est compact.

**Exercice 3** 1. On a pour tous  $f, g \in L^2([0, 1])$  et tous  $\lambda \in \mathbb{R}, x \in [0, 1]$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda f + g)(x) &= a(\lambda f + g)(x) - 2ae^x \int_x^1 (\lambda f + g)(t) dt \\ &= a\lambda f(x) - 2ae^x \int_x^1 \lambda e^{-t} f(t) dt + ag(x) - 2ae^x \int_x^1 e^{-t} g(t) dt \\ &= \lambda(a f(x) - 2ae^x \int_x^1 e^{-t} f(t) dt) + ag(x) - 2ae^x \int_x^1 e^{-t} g(t) dt \\ &= \lambda \mathcal{A}f(x) + \mathcal{A}g(x) \\ &= (\lambda \mathcal{A}f + \mathcal{A}g)(x) \end{aligned}$$

D'où,

$$\mathcal{A}(\lambda f + g) = \lambda \mathcal{A}f + \mathcal{A}g$$

2. Pour tous  $f, g \in L^2([0, 1])$ , on a

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{A}f, g \rangle &= \int_0^1 \mathcal{A}f(x) \overline{g(x)} dx = \int_0^1 \left[ af(x) - 2ae^x \int_x^1 e^{-t} f(t) dt \right] \overline{g(x)} \\
 &= \int_0^1 af(x) \overline{g(x)} dx - 2a \int_0^1 e^x \overline{g(x)} \int_x^1 e^{-t} f(t) dt dx \\
 &= \int_0^1 f(x) \overline{ag(x)} dx - 2a \int_0^1 e^x \overline{g(x)} \int_x^1 e^{-t} f(t) dt dx
 \end{aligned}$$

Par une intégration de parties, on aura

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 e^x \overline{g(x)} \int_x^1 e^{-t} f(t) dt dx &= \left[ \int_0^x e^t \overline{g(t)} dt \int_x^1 e^{-t} f(t) dt \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} f(x) \int_0^x e^t \overline{g(t)} dt dx \\
 &= \int_0^1 f(x) e^{-x} \int_0^x e^t \overline{g(t)} dt dx
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{A}f, g \rangle &= \int_0^1 f(x) \overline{ag(x)} dx - 2a \int_0^1 f(x) e^{-x} \int_0^x e^t \overline{g(t)} dt dx \\
 &= \int_0^1 f(x) \overline{ag(x)} dx - \int_0^1 f(x) \overline{2ae^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt} dx \\
 &= \int_0^1 f(x) \left[ \overline{ag(x)} - \overline{2ae^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt} \right] dx \\
 &= \int_0^1 f(x) \left[ \overline{ag(x) - 2ae^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt} \right] dx \\
 &= \langle f, \mathcal{A}^*g \rangle
 \end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{A}^*g(x) = \overline{ag(x) - 2ae^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt}, \quad x \in [0, 1]$$

3. Soit  $f \in L^2([0, 1])$ , et soit  $x \in [0, 1]$ . On a

$$\begin{aligned}
 ((\mathcal{I} - \mathcal{A}^* \mathcal{A})f)(x) &= f(x) - (\mathcal{A}^* \mathcal{A})f(x) = f(x) - \mathcal{A}^*(\mathcal{A}f)(x) \\
 &= f(x) - \bar{a}(\mathcal{A}f)(x) + 2\bar{a}e^{-x} \int_0^x e^t (\mathcal{A}f)(t) dt \\
 &= f(x) - \bar{a} \left[ af(x) - 2ae^x \int_x^1 e^{-t} f(t) dt \right] + 2\bar{a}e^{-x} \int_0^x e^t \left[ af(t) - 2ae^t \int_t^1 e^{-s} f(s) ds \right] dt \\
 &= 2e^x \int_x^1 e^{-t} f(t) dt + 2e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt - 4e^{-x} \int_0^x e^{2t} \int_t^1 e^{-s} f(s) ds dt
 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
 \int_0^x e^{2t} \int_t^1 e^{-s} f(s) ds dt &= \left[ \frac{1}{2} e^{2t} \int_t^1 e^{-s} f(s) ds \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x e^{2s} e^{-s} f(s) ds \\
 &= \frac{1}{2} e^{2x} \int_x^1 e^{-s} f(s) ds - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-s} f(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^x e^s f(s) ds
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 ((\mathcal{I} - \mathcal{A}^* \mathcal{A})f)(x) &= 2e^x \int_x^1 e^{-t} f(t) dt + 2e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt - 2e^x \int_x^1 e^{-s} f(s) ds + \\
 &\quad + 2e^{-x} \int_0^1 e^{-s} f(s) ds - 2e^{-x} \int_0^x e^s f(s) ds \\
 &= 2e^{-x} \int_0^1 e^{-s} f(s) ds = 2 \langle f, g \rangle g(x), \quad g(x) = e^{-x}
 \end{aligned}$$

3. On a pour tout  $f \in L^2([0, 1])$  :

$$\begin{aligned}
 \langle (\mathcal{I} - \mathcal{A}^* \mathcal{A})f, f \rangle &= \int_0^1 ((\mathcal{I} - \mathcal{A}^* \mathcal{A})f)(x) \overline{f(x)} dx = \int_0^1 2 \langle f, g \rangle g(x) \overline{f(x)} dx \\
 &= 2 \langle f, g \rangle \langle g, f \rangle = 2 |\langle f, g \rangle|^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
 \langle f, f \rangle - \langle (\mathcal{A}^* \mathcal{A})f, f \rangle &\geq 0 \Rightarrow \langle f, f \rangle - \langle \mathcal{A}f, \mathcal{A}f \rangle \geq 0 \\
 &\Rightarrow \langle f, f \rangle - \langle \mathcal{A}f, \mathcal{A}f \rangle \geq 0 \\
 &\Rightarrow \|\mathcal{A}f\| \leq \|f\|
 \end{aligned}$$

Ce qui montre que  $\mathcal{A}$  est borné, et  $\|\mathcal{A}\| \leq 1$ . ( $\mathcal{A}$  est une contraction ).

## 6.2 Rattrapage 2016/2017

### Exercice 6.4.

a. Montrer que l'application

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$$

définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_2[X]$ .

b. Trouver une base orthonormale de  $\mathbb{R}_2[X]$  pour ce produit scalaire.

### Exercice 6.5.

Soient  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{K}$  deux espaces de Hilbert, et soient  $(\varphi_k)_{k \geq 1}$  et  $(\psi_k)_{k \geq 1}$  des suites orthonormales dans  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{K}$  respectivement.  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  est une suite complexe bornée.

Considérons l'application  $\mathcal{T}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  définie par

$$\mathcal{T}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \psi_n, \quad x \in \mathcal{H}$$

- i. Montrer que  $\mathcal{T}$  définit un opérateur linéaire de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{K}$ .
- ii. Montrer que  $\mathcal{T}$  est borné, et en déduire une majoration de  $\|\mathcal{T}\|$ .
- iii. Calculer  $\|\mathcal{T}\|$ .
- vi. Déterminer l'opérateur adjoint  $\mathcal{T}^*$  de  $\mathcal{T}$ .

### Exercice 6.6.

a. Trouver l'opérateur adjoint  $\mathcal{S}^*$  de l'opérateur  $\mathcal{S}: \mathcal{L}^2([0, 1], \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}^2([0, 1], \mathbb{C})$  défini par

$$(\mathcal{S}f)(x) = f(x) + i \int_x^1 f(t)dt, \quad f \in \mathcal{L}^2([0, 1], \mathbb{C})$$

b. Soient  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  des espaces de Hilbert, et soit  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ .

1. Montrer que si  $\mathcal{H}_1$  est de dimension finie, alors  $\mathcal{A}$  est compact.
2. On suppose que  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont de dimensions infinies. Montrer que si  $\mathcal{A}$  est compact et inversible, alors son inverse  $\mathcal{A}^{-1}$  n'est pas borné.

### 6.2.1 Corrigé du rattrapage 2016/2017

**Exercice 1** a. i. Soit  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ . Comme la fonction  $P^2$  est continue et positive sur  $[-1, 1]$ , on aura

$$\begin{aligned} \langle P, P \rangle &= 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 P^2(x) dx = 0 \Rightarrow P^2(x) = 0, x \in [-1, 1] \Rightarrow P(x) = 0, x \in [-1, 1] \\ &\Rightarrow P = 0 \end{aligned}$$

car  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  et admet une infinité de racines.

De même, si  $P = 0$  alors  $\langle P, P \rangle = 0$ .

ii. On a également  $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 P^2(x) dx \geq 0$  pour tout  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ .

iii. Soient  $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ . On a

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx = \int_{-1}^1 Q(x)P(x) dx = \langle Q, P \rangle$$

vi. Soient  $P, Q, S \in \mathbb{R}_2[X]$  et soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On a

$$\begin{aligned} \langle \alpha P + S, Q \rangle &= \int_{-1}^1 (\alpha P + S)(x)Q(x) dx = \int_{-1}^1 ((\alpha P)(x) + S(x))Q(x) dx = \\ &= \int_{-1}^1 (\alpha P)(x)Q(x) dx + \int_{-1}^1 S(x)Q(x) dx \\ &= \alpha \int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx + \int_{-1}^1 S(x)Q(x) dx \\ &= \alpha \langle P, Q \rangle + \langle S, Q \rangle \end{aligned}$$

b. Soit  $\{P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2\}$  la base standard de  $\mathbb{R}_2[X]$ . On utilise le procédé de Gram-Schmidt pour trouver la base  $\{Q_0, Q_1, Q_2\}$  recherchée. On a donc

$$S_0 = P_0 = 1 \text{ et } Q_0 = \frac{S_0}{\|S_0\|} = \frac{1}{\sqrt{\langle S_0, S_0 \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^1 1 dx}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S_1 = P_1 - \langle P_1, Q_0 \rangle Q_0 = X - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x dx = X - \frac{1}{2} [x^2]_{-1}^1 = X$$

et

$$Q_1 = \frac{S_1}{\|S_1\|} = \frac{X}{\sqrt{\int_{-1}^1 x^2 dx}} = \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{3} [x^3]_{-1}^1}} = \sqrt{\frac{3}{2}} X$$

De même

$$\begin{aligned} S_2 &= P_2 - \langle P_2, Q_0 \rangle Q_0 - \langle P_2, Q_1 \rangle Q_1 = \\ &= X^2 - \frac{3}{2} X \int_{-1}^1 x^3 dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = X^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

et donc

$$\|S_2\| = \sqrt{\int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx} = \sqrt{\left[ \frac{1}{5} x^5 - \frac{2}{9} x^3 + \frac{1}{9} x \right]_{-1}^1} = \sqrt{\frac{8}{45}}$$

$$Q_2 = \frac{S_2}{\|S_2\|} = \sqrt{\frac{45}{8}} X^2 - \sqrt{\frac{5}{8}}$$

D'où, la base recherchée est  $\left\{ Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, Q_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x, Q_2 = \sqrt{\frac{45}{8}} X^2 - \sqrt{\frac{5}{8}} \right\}$ .

**Exercice 2 i.** Soient  $u, v \in \mathcal{H}$  et soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ . On a

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\alpha u + v) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle (\alpha u + v), \varphi_n \rangle \psi_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n (\langle \alpha u, \varphi_n \rangle + \langle v, \varphi_n \rangle) \psi_n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle \alpha u, \varphi_n \rangle \psi_n + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle v, \varphi_n \rangle \psi_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha \lambda_n \langle u, \varphi_n \rangle \psi_n + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle v, \varphi_n \rangle \psi_n \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle u, \varphi_n \rangle \psi_n + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle v, \varphi_n \rangle \psi_n \\ &= \alpha \mathcal{T}u + \mathcal{T}v \end{aligned}$$

Donc,  $\mathcal{T}$  est linéaire.

ii. Comme  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  est bornée, on aura pour tout  $x \in \mathcal{H}$  :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}x\|^2 &= \left\langle \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \psi_n, \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \psi_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x, \varphi_n \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} (\sup_{n \geq 1} |\lambda_n|^2) |\langle x, \varphi_n \rangle|^2 \leq (\sup_{n \geq 1} |\lambda_n|^2) \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, \varphi_n \rangle|^2 \\ &\leq (\sup_{n \geq 1} |\lambda_n|^2) \|x\|^2 \end{aligned}$$

par l'inégalité de Bessel. D'où,  $\mathcal{T}$  est borné et  $\|\mathcal{T}\| \leq \sup_{n \geq 1} |\lambda_n|$  (1).

ii. Soit  $N_0 \geq 1$  tel que  $|\lambda_{N_0}| = \sup_{n \geq 1} |\lambda_n|$ . D'où

$$\|\mathcal{T}\| = \sup_{\|x\|=1} \|\mathcal{T}x\| \geq \|\mathcal{T}\varphi_{N_0}\| = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^2 |\langle \varphi_{N_0}, \varphi_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda_{N_0}| |\langle \varphi_{N_0}, \varphi_{N_0} \rangle| = |\lambda_{N_0}|$$

i.e.  $\|\mathcal{T}\| \geq \sup_{n \geq 1} |\lambda_n|$  (2)

De (1) et (2), on obtient que  $\|\mathcal{T}\| = \sup_{n \geq 1} |\lambda_n|$ .

iii. Soient  $x \in \mathcal{H}$  et  $y \in \mathcal{K}$ . On a  $\mathcal{T}^*: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$  et de plus

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}x, y \rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \psi_n, y \right\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, \varphi_n \rangle \lambda_n \langle \psi_n, y \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, \overline{\lambda_n \langle \psi_n, y \rangle} \varphi_n \rangle = \left\langle x, \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{\lambda_n \langle \psi_n, y \rangle} \varphi_n \right\rangle \\ &= \langle x, \mathcal{T}^*y \rangle \end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{T}^*y = \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{\lambda_n \langle \psi_n, y \rangle} \varphi_n, \quad y \in \mathcal{K}$$

**Exercice 3** a. Soient  $f, g \in \mathcal{L}^2([0, 1], \mathbb{C})$ . On a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}f, g \rangle &= \int_0^1 \mathcal{S}f(x) \overline{g(x)} dx = \int_0^1 (f(x) + i \int_x^1 f(t) dt) \overline{g(x)} dx \\ &= \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx + \int_0^1 i \int_x^1 f(t) dt \overline{g(x)} dx \\ &= \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx + \left[ \int_x^1 f(t) dt \int_0^x \overline{g(t)} i dt \right]_0^1 + \int_0^1 f(x) dx \int_0^x \overline{g(t)} i dt \\ &= \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx + \int_0^1 f(x) dx \int_0^x \overline{g(t)} (-i) dt = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx + \int_0^1 f(x) \int_0^x \overline{g(t)} (-i) dt dx \\ &= \int_0^1 f(x) \left( \overline{g(x) - i \int_0^x g(t) dt} \right) dx \\ &= \langle f, \mathcal{S}^*g \rangle \end{aligned}$$

D'où

$$(\mathcal{S}^*g)(x) = g(x) - i \int_0^x g(t)dt, \quad g \in \mathcal{L}^2([0, 1], \mathbb{C})$$

b. 1. Si  $\mathcal{H}_1$  est de dimension finie  $n$ ,  $n \geq 1$ , alors pour tout  $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \in \mathcal{H}_1$  avec  $x_k \in \mathbb{C}$ ,  $1 \leq k \leq n$  :  $\mathcal{A}x = \sum_{k=1}^n x_k \mathcal{A}e_k$ .

D'où,  $Im \mathcal{A}$  est de dimension finie, i.e.,  $\mathcal{A}$  est de rang fini.  $\mathcal{A}$  est donc compact.

2. On suppose que  $\mathcal{A}^{-1}$  est borné. Donc l'opérateur  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{I}_{d_{\mathcal{H}_1}}$  est compact. De même pour l'opérateur  $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I}_{d_{\mathcal{H}_2}}$ . Contradiction avec le théorème de Riesz relatif à la compacité de la boule unité, car  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont de dimensions infinies. Par conséquent,  $\mathcal{A}^{-1}$  n'est pas borné.

### 6.3 EMD 2017/2018

**Exercice 1** L'espace  $H = L^2([-\pi, \pi])$  est muni de sa base hilbertienne  $(\psi_n)_n$  où  $\psi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  et  $\psi_n(t) = \frac{e^{int}}{\sqrt{\pi}}, n \geq 1, t \in [-\pi, \pi]$ .

1. Montrer que  $f \in H$ , où  $f(t) = t^2, t \in [-\pi, \pi]$ .
2. Ecrire  $f$  dans la base  $(\psi_n)_n$ .
3. Utiliser l'égalité de Parseval pour trouver la somme de la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ . (Justifier votre réponse)

**Exercice 2** Sur l'espace de Hilbert  $\ell_2$  muni de sa base standard  $(e_n)_{n \geq 1}$ , on définit l'opérateur linéaire  $S$  par

$$Sx = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{n}x_n, \dots), x = (x_i)_{i \geq 1} \in \ell_2$$

- a. Calculer  $\|Se_n\|^2$  pour tout  $n, n \geq 1$ .
- b. Montrer que  $S$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt.
- c. Que peut-on déduire ?

**Exercice 3** Considérons dans l'espace de Hilbert  $K = L^2([0, 1])$ , l'opérateur linéaire  $A: f \mapsto Af$  où

$$(Af)(t) = f(t) + e^t \int_t^1 e^{-s} f(s) ds, t \in [0, 1]$$

1. Montrer que  $A = A_1 + A_2 \circ A_3$  où  $A_i: K \rightarrow K, 1 \leq i \leq 3$  avec

$$(A_1 f)(t) = f(t), (A_2 f)(t) = e^t f(t), \text{ et } (A_3 f)(t) = \int_t^1 e^{-s} f(s) ds, t \in [0, 1]$$

2. Montrer que les opérateurs  $A_i, 1 \leq i \leq 3$  sont bien définis et bornés.
3. En déduire que  $A$  est bien défini et borné, puis estimer sa norme.
4. Déterminer  $A^*$ , l'opérateur adjoint de  $A$ .

### 6.3.1 Corrigé de l'EMD 2017/2018

**Exercice 1** 1. On a

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \frac{1}{5} [t^5]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^5}{5} < +\infty$$

D'où,  $f \in H$ .

2. On a pour tout  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$$\langle f, \psi_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{\psi_n(t)} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-int} dt = 4\sqrt{\pi} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

et pour  $n = 0$ ,

$$\langle f, \psi_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^3}{3\sqrt{2\pi}}$$

D'où, pour tout  $t, t \in [-\pi, \pi]$  :

$$f(t) = t^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, \psi_n \rangle \psi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\pi^3}{3\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} 4\sqrt{\pi} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{int}$$

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} 4 \frac{(-1)^n}{n^2} e^{int}$$

3. Comme le système donné est une base orthonormale de  $H$ , par l'égalité de Parseval, on aura

$$\|f\|_2^2 = |\langle f, \psi_0 \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle f, \psi_k \rangle|^2 = \left(\frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \pi^3\right)^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(4\sqrt{\pi} \frac{(-1)^k}{n^2}\right)^2$$

D'où,

$$\frac{2\pi^5}{5} = \frac{2\pi^5}{9} + 16\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

Soit finalement,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

**Exercice 2** a. Pour tout  $n, n \geq 1$  :  $\|Se_n\|^2 = \left\| \left(0, 0, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right) \right\|^2 = \frac{1}{n^2}$ .

b. On a d'après (1),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|Se_n\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

car la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  est convergente. D'où,  $S$  est de Hilbert-Schmidt.

c. On déduit de (2) que  $S$  est compact.

**Exercice 3. 1.** On a pour tout  $f \in H$  :

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2 \circ A_3)(f)(t) &= (A_1 f)(t) + A_2(A_3 f)(t) = \\ &= f(t) + A_2\left(\int_t^1 e^{-s} f(s) ds\right) = f(t) + e^t \int_t^1 e^{-s} f(s) ds = (A f)(t) \end{aligned}$$

Donc,  $A = A_1 + A_2 A_3$ .

2. Soit  $f \in H$ . On a  $\|A_1 f\|_2^2 = \|f\|_2^2 < +\infty$ . Donc,  $A_1$  est bien défini et borné. De plus,  $\|A_1\| = 1$ . De même,

$$\|A_2 f\|_2^2 = \int_0^1 |(A_2 f)(t)|^2 dt = \int_0^1 \left| e^t f(t) \right|^2 dt \leq e^2 \int_0^1 |f(t)|^2 dt = e^2 \|f\|_2^2 < +\infty$$

D'où,  $A_2$  est bien défini et borné, et  $\|A_2\| \leq e$ . De plus, et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \|A_3 f\|_2^2 &= \int_0^1 |(A_3 f)(t)|^2 dt = \int_0^1 \left| \int_t^1 e^{-s} f(s) ds \right|^2 dt \leq \int_0^1 \left( \int_0^1 e^{-s} |f(s)| ds \right)^2 dt \\ &\leq \int_0^1 \left( \int_0^1 |f(s)| ds \right)^2 dt \leq \int_0^1 \left( \int_0^1 |f(s)|^2 ds \right) \left( \int_0^1 1 ds \right) dt \\ &\leq \int_0^1 \|f\|_2^2 dt = \|f\|_2^2 < +\infty \end{aligned}$$

Donc,  $A_3$  est bien défini et borné, et  $\|A_3\| \leq 1$ . D'où,  $A$  est aussi bien défini et comme  $\|A\| \leq \|A_1\| + \|A_2\| \|A_3\|$ ,  $A$  est donc borné, et  $\|A\| \leq 1 + e$ .

3. Par la question précédente, on aura  $A^* = A_1^* + A_3^* A_2^*$ . On a donc  $A_1^* = A_1$ . De plus, pour tous  $f, g \in H$  :

$$\langle A_2 f, g \rangle = \int_0^1 (A_2 f)(t) \overline{g(t)} dt = \int_0^1 e^t f(t) \overline{g(t)} dt = \int_0^1 f(t) \overline{e^t g(t)} dt = \int_0^1 f(t) \overline{e^t g(t)} dt = \langle f, A_2^* g \rangle$$

D'où,  $(A_2^* g)(t) = e^t g(t) = (A_2 g)(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ . De même,

$$\begin{aligned} \langle A_3 f, g \rangle &= \int_0^1 (A_3 f)(t) \overline{g(t)} dt = \int_0^1 \int_t^1 e^{-s} f(s) ds \overline{g(t)} dt = \int_0^1 \left( \int_0^s \overline{g(t)} dt \right) e^{-s} f(s) ds \\ &= \int_0^1 f(s) \left( e^{-s} \int_0^s \overline{g(t)} dt \right) ds = \int_0^1 f(s) \overline{\int_0^s g(t) dt} ds = \langle f, A_3^* g \rangle \end{aligned}$$

Donc,  $(A_3^*g)(t) = e^{-t} \int_0^t g(s) ds, t \in [0, 1]$ . Finalement,

$$(A^*f)(t) = f(t) + A_3^*(e^t f(t)) = f(t) + e^{-t} \int_0^t e^s f(s) ds, t \in [0, 1]$$

## 6.4 Rattrapage 2017/2018

**Exercice 1** Dans l'espace  $H = L^2([-\pi, \pi])$  muni de sa base hilbertienne  $(\varphi_n)_n$  où  $\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  et  $\varphi_n(t) = \frac{e^{int}}{\sqrt{\pi}}, n \geq 1, t \in [-\pi, \pi]$ , on considère la fonction  $f$  où  $f(t) = t$ , pour tout  $t, t \in [-\pi, \pi]$ .

1. Calculer  $\langle f, \varphi_n \rangle, n \in \mathbb{N}$ .
2. Ecrire l'expression de  $f$  dans la base  $(\varphi_n)_n$ .
3. Utiliser l'égalité de Parseval pour trouver la somme de la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ . (Sol.  $\frac{\pi^2}{6}$ )

**Exercice 2** Soit l'espace de Hilbert  $L^2([0, 1])$ , et soit l'opérateur  $A: L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1]), f \mapsto Af$  défini par

$$(Af)(t) = i \int_0^t f(s) ds, \quad t \in [0, 1]$$

1. Montrer que  $A$  est linéaire.
2. Montrer que  $A$  est borné, et estimer sa norme.
3. Déterminer l'opérateur adjoint  $A^*$  de  $A$ .

**Exercice 3** L'espace de Hilbert  $L^2([0, 1])$  est muni d'une base orthonormale  $(e_n)_{n \geq 1}$ . On définit l'opérateur linéaire  $K: L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1]), f \mapsto Kf$  par

$$(Kf)(t) = \int_0^1 f(s)k(t, s) ds, \quad t \in [0, 1]$$

où  $k$  est une fonction complexe Lebesgue mesurable sur  $[0, 1]$  et vérifiant  $\int_0^1 \int_0^1 |k(t, s)|^2 ds dt < +\infty$ .

1. Montrer que  $K$  est borné, et estimer sa norme.
2. Montrer que  $K$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt.
3. En déduire que l'opérateur  $\mathcal{V}: L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1]), f \mapsto \mathcal{V}f$  où

$$(\mathcal{V}f)(t) = \int_t^1 f(s) ds, \quad t \in [0, 1]$$

est de Hilbert-Schmidt.

4. Que peut-on déduire ?

### 6.4.1 Corrigé du Rattrapage 2017/2018

**Exercice 1** 1. On a

$$\langle f, \varphi_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} t \frac{e^{-int}}{\sqrt{\pi}} dt = (-1)^{n+1} \frac{2\sqrt{\pi}i}{n}, \quad (n \geq 1)$$

et

$$\langle f, \varphi_0 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t dt = 0$$

2. La fonction  $x \mapsto f(x) = x$  est un élément de  $L^2([-\pi, \pi])$ . Donc,  $f$  s'écrit sous la forme

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

Donc, pour tout  $t, t \in [-\pi, \pi]$  :

$$f(t) = t = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2\sqrt{\pi}i}{n} e^{int}$$

3. Comme le système  $(\varphi_n)_n$  est une base hilbertienne de  $H$ , on aura par l'identité de Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{2\sqrt{\pi}i}{n} \right|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\pi}{n^2}$$

Comme

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{3}\pi^3$$

Donc,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\pi}{n^2} = \frac{2}{3}\pi^3$$

Soit finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

**Exercice 2** 1. On a pour tous  $f, g \in L^2([0, 1])$  et tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  :

$$\begin{aligned} A(\lambda f + g)(t) &= i \int_0^t (\lambda f + g)(s) ds = i \int_0^t ((\lambda f)(s) + g(s)) ds \\ &= i \left( \int_0^t (\lambda f)(s) ds + \int_0^t g(s) ds \right) = \lambda i \int_0^t f(s) ds + i \int_0^t g(s) ds \end{aligned}$$

$$= \lambda A(f)(t) + A(g)(t)$$

$$= (\lambda A(f) + A(g))(t)$$

pour tout  $t, t \in [0, 1]$ . D'où,  $A(\lambda f + g) = \lambda A(f) + A(g)$ , et  $A$  est donc linéaire.

2. On a pour tout  $f \in L^2([0, 1])$  :

$$\begin{aligned} \|Af\|_2^2 &= \int_0^1 |(Af)(t)|^2 dt = \int_0^1 \left| i \int_0^t f(s) ds \right|^2 dt = \int_0^1 \left| \int_0^t f(s) ds \right|^2 dt \\ &\leq \int_0^1 \left| \int_0^1 f(s) ds \right|^2 dt = \int_0^1 \|f\|_2^2 dt = \|f\|_2^2 \int_0^1 dt = \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

D'où,  $A$  est borné et  $\|A\| \leq 1$ .

3. On a pour tous  $f, g \in L^2([0, 1])$  :

$$\begin{aligned} \langle Af, g \rangle &= \int_0^1 (Af)(t) \overline{g(t)} dt = \int_0^1 i \int_0^t f(s) ds \overline{g(t)} dt \\ &= \int_0^1 i \int_s^1 (f(s) \overline{g(t)}) dt ds = \int_0^1 (f(s) \int_s^1 (-i \overline{g(t)}) dt) ds \\ &= \int_0^1 \left( f(s) \overline{\int_s^1 (-i g(t)) dt} \right) ds = \langle f, A^*g \rangle \end{aligned}$$

D'où,  $A^*g(s) = \int_s^1 (-i g(t)) dt, s \in ([0, 1])$ .

**Exercice 3.** 1. Soit  $f \in L^2([0, 1])$ . Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on aura

$$\begin{aligned} \|Kf\|_2^2 &= \int_0^1 |(Kf)(t)|^2 dt = \int_0^1 \left| \int_0^1 f(s) k(t, s) ds \right|^2 dt \leq \int_0^1 \left( \int_0^1 |f(s)|^2 ds \right) \left( \int_0^1 |k(t, s)|^2 ds \right) dt \\ &= \left| \int_0^1 f(s) ds \right|^2 \int_0^1 \int_0^1 |k(t, s)|^2 ds = \int_0^1 \int_0^1 |k(t, s)|^2 ds \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

Comme  $\int_0^1 \int_0^1 |k(t, s)|^2 ds dt < +\infty$ ,  $K$  est borné et  $\|K\| \leq \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 |k(t, s)|^2 ds dt}$ .

2. On a pour tout  $n, n \geq 1$  :

$$Ke_n(t) = \int_0^1 e_n(s) k(t, s) ds = \langle e_n, \overline{k_t} \rangle$$

où  $k_t(s) = k(t, s)$ ,  $t, s \in [0, 1]$ . D'où,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|Ke_n\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 |Ke_n(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 |\langle e_n, \bar{k}_t \rangle|^2 dt = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle e_n, \bar{k}_t \rangle|^2 dt$$

car la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle e_n, \bar{k}_t \rangle|^2$  est convergente par l'égalité de Parseval (Le système  $(e_n)_n$  est une base orthonormale de l'espace). On aura donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|Ke_n\|^2 = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle e_n, \bar{k}_t \rangle|^2 dt = \int_0^1 \|\bar{k}_t\|_2^2 dt = \|\bar{k}_t\|_2^2 = \int_0^1 \int_0^1 |k(t, s)|^2 ds dt < +\infty$$

Par conséquent,  $K$  est de Hilbert-Schmidt.

3. On a

$$(\mathcal{V}f)(t) = \int_t^1 f(s) ds = \int_0^1 f(s) k(t, s) ds, \quad t \in [0, 1]$$

où

$$k(t, s) = \begin{cases} 1, & s \in [t, 1] \\ 0, & s \in [0, t] \end{cases}$$

Comme

$$\int_0^1 \int_0^1 |k(t, s)|^2 ds dt = \int_0^1 \int_t^1 ds dt = \int_0^1 [s]_t^1 dt = \int_0^1 [1 - t] dt = \left[ t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} < +\infty$$

Alors,  $\mathcal{V}$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

4. On déduit de (3) que  $\mathcal{V}$  est compact.

## 6.5 EMD 2018/2019

### Exercice 6.7.

Soient  $E, F$  des espaces de Hilbert, et soit  $T \in L(E, F)$ .

1. Montrer que si  $T$  est inversible, alors son adjoint  $T^*$  est aussi inversible, et que

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

où  $T^{-1}$  est l'inverse de  $T$ .

2. Soit  $a$  un vecteur non nul dans  $E$ . Posons  $M = \overline{\{a\}}$ , le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $a$ .

- a. Montrer que  $E = M \oplus M^\perp$ . (Somme directe orthogonale)
- b. Soit  $x \in E$ . Calculer  $(d(x, M))^2 + (d(x, M^\perp))^2$ .
- c. Exprimer  $d = d(x, M^\perp)$  en fonction du vecteur  $a$ .

### Exercice 6.8.

Soit  $H$  un espace de Hilbert, et soient  $P, Q$  les opérateurs de la projection orthogonale de  $H$  sur  $ImP, ImQ$  respectivement, ( $P$  vérifie  $P^2 = P$  et  $P = P^*$ ). Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

1.  $PQ = 0$ .
2.  $QP = 0$ .
3.  $ImP \perp ImQ$ .

### Exercice 6.9.

Soit  $A : L_2([-1, 1]) \rightarrow L_2([-1, 1]), f \mapsto Af$  où

$$(Af)(t) = t^2 \int_{-1}^1 sf(s)ds, f \in L_2([-1, 1]), t \in [-1, 1]$$

1. Montrer que  $A$  est bien défini, et que  $A$  est linéaire.
2. Montrer que  $A$  est borné, et estimer sa norme.
3. Déterminer  $A^*$ , l'opérateur adjoint de  $A$ .
4. Montrer que  $A$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt.
5. Conclure.

### 6.5.1 Corrigé de l'EMD 2018/2019

**Exercice 1** 1. On a  $TT^{-1} = I_{H_2}$  et  $T^{-1}T = I_{H_1}$ . En passant aux adjoints,

$$(T^{-1})^*T^* = I_{H_2}^* = I_{H_2}$$

et

$$T^*(T^{-1})^* = I_{H_1}^* = I_{H_1}$$

Ce qui montre que  $T^*$  est inversible et  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ .

2. a.  $M$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $E$ , car  $\dim M = 1 < \infty$ . Par le Théorème de la décomposition orthogonale,  $E = M \oplus M^\perp$ .

b. Par (a),

$$\exists! x_1 \in M, \exists! x_2 \in M^\perp : x = x_1 + x_2 \text{ et } \langle x_1, x_2 \rangle = 0$$

De plus, et en appliquant le Théorème de la projection orthogonale,

$$(d(x, M))^2 + (d(x, M^\perp))^2 = \|x - x_1\|^2 + \|x - x_2\|^2 = \|x_2\|^2 + \|x_1\|^2 = \|x\|^2$$

par le Théorème de Pythagore.

c. On a par le Théorème de la projection orthogonale,

$$d = d(x, M^\perp) = \|x - x_2\| = \|x_1\| = |\lambda| \|a\|$$

où  $x_1 = \lambda a, \lambda \in \mathbb{C}$  car  $x_1 \in M$ .

**Exercice 2** ((1)  $\Rightarrow$  (2)). On a

$$QP = Q^*P^* = (PQ)^* = 0^* = 0$$

((2)  $\Rightarrow$  (3)). Soient  $y \in \text{Im}P, z \in \text{Im}Q$ . Il existe donc  $u, v \in H$  tels que  $y = Pu, z = Qv$ . D'où,

$$\langle y, z \rangle = \langle Pu, Qv \rangle = \langle Q^*Pu, v \rangle = \langle QPu, v \rangle = \langle 0, v \rangle = 0$$

Donc,  $\text{Im}P \perp \text{Im}Q$ .

((3)  $\Rightarrow$  (1)). Soient  $z, z' \in H$ . On a

$$\langle PQz, z' \rangle = \langle Qz, P^*z' \rangle = \langle Qz, Pz' \rangle = 0,$$

car  $Pz' \in \text{Im}P, Qz \in \text{Im}Q$ . D'où,  $PQz = 0, z \in H$ . Par suite,  $PQ = 0$ .

**Exercice 3** 1.i. Soit  $f \in L_2([-1, 1])$ . Comme  $s, t \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \|Af\|_2^2 &= \int_{-1}^1 |(Af)(t)|^2 dt = \int_{-1}^1 t^4 \left| \int_{-1}^1 sf(s) ds \right|^2 dt \leq \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 f(s) ds \right|^2 dt \\ &\leq \int_{-1}^1 dt \int_{-1}^1 |f(s)|^2 ds \\ &\leq 2\|f\|_2^2 < +\infty \end{aligned}$$

D'où,  $Af \in L_2([-1, 1])$ , pour tout  $f \in L_2([-1, 1])$ . Ce qui montre que  $A$  est bien défini.

1.ii. Soient  $f, g \in L_2([-1, 1])$ , et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $t \in [-1, 1]$  :

$$\begin{aligned} (A(\lambda f + g))(t) &= t^2 \int_{-1}^1 s(\lambda f + g)(s) ds = t^2 \int_{-1}^1 s((\lambda f)(s) + g(s)) ds \\ &= t^2 \int_{-1}^1 s(\lambda f)(s) ds + t^2 \int_{-1}^1 sg(s) ds \\ &= \lambda t^2 \int_{-1}^1 sf(s) ds + t^2 \int_{-1}^1 sg(s) ds \\ &= \lambda(Af)(t) + (Ag)(t) \\ &= (\lambda Af + Ag)(t) \end{aligned}$$

D'où,  $A(\lambda f + g) = \lambda Af + Ag$ , et  $A$  est donc linéaire.

2. De la question (1.i.),  $A$  est borné, et  $\|A\| \leq \sqrt{2}$ .

3. Soient  $f, g \in L_2([-1, 1])$ .

$$\begin{aligned} \langle Af, g \rangle &= \int_{-1}^1 Af(t) \overline{g(t)} dt = \int_{-1}^1 t^2 \int_{-1}^1 sf(s) ds \overline{g(t)} dt \\ &= \int_{-1}^1 f(s) \int_{-1}^1 t^2 s \overline{g(t)} dt ds \\ &= \int_{-1}^1 f(s) \int_{-1}^1 s t^2 \overline{g(t)} dt ds \\ &= \langle f, A^*g \rangle \end{aligned}$$

D'où,  $A^* : L_2([-1, 1]) \rightarrow L_2([-1, 1])$ ,  $g \mapsto A^*g$  où,

$$A^*g(s) = s \int_{-1}^1 t^2 g(t) dt, \quad g \in L_2([-1, 1]), \quad s \in [-1, 1]$$

4. Soit  $(f_k)_{k \geq 1}$  une base orthonormale de  $L_2([-1, 1])$ , et soit  $I$  l'identité sur  $L_2([-1, 1])$ .

On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \|Af_k\|^2 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{-1}^1 |Af_k(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{-1}^1 t^4 \left| \int_{-1}^1 s f_k(s) ds \right|^2 dt \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{-1}^1 dt \left| \int_{-1}^1 s f_k(s) ds \right|^2 \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \int_{-1}^1 s f_k(s) ds \right|^2 \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle \bar{I}, f_k \rangle|^2 \\ &\leq 2 \|I\|_2^2 \\ &\leq \frac{4}{3} < +\infty \end{aligned}$$

par l'égalité de Parseval. Par conséquent,  $A$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

5. Comme conclusion de la question (4),  $A$  est compact.

## 6.6 EMD de remplacement 2018/2019

### Exercice 6.10.

Soient  $E, F$  des espaces de Hilbert, et soit  $T \in L(E, F)$ . Montrer que

1. Si  $T$  est de rang fini, alors  $T$  est compact.
2. Si  $\dim E < +\infty$ , alors  $T$  est compact.
3. Si  $\dim F < +\infty$ , alors  $T$  est compact.

### Exercice 6.11.

Soit  $H$  un espace de Hilbert, et soit  $P$  l'opérateur de la projection orthogonale de  $H$  sur un sous-espace vectoriel fermé  $M \subset H$ ,

$$\forall z \in H : P(z) = P(x + y) = x, \quad x \in M, y \in M^\perp$$

1. Montrer que  $P$  est linéaire.
2. Montrer que  $P$  est borné, et estimer sa norme.
3. Calculer  $\|P\|$ .
4. Montrer que  $P$  est auto-adjoint, et que  $P^2 = P$ .

**Exercice 6.12.**

Soit  $A : L_2([0, 1]) \longrightarrow L_2([0, 1]), f \mapsto Af$  où

$$(Af)(s) = s \int_0^1 t^2 f(t) dt, \quad f \in L_2([0, 1]), s \in [0, 1]$$

1. Montrer que  $A$  est un opérateur linéaire.
2. Montrer que  $A$  est borné, et estimer sa norme.
3. Déterminer  $A^*$ , l'opérateur adjoint de  $A$ .
4. Montrer que  $A$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt.
5. Que peut-on déduire ?

### 6.6.1 Corrigé de l'EMD de remplacement 2018/2019

**Exercice 1** 1. Soit  $(x_n)_n$  une suite bornée dans  $E$ . Comme  $T$  est borné, la suite  $(Tx_n)_n$  est aussi bornée dans  $ImT$ , car  $\|Tx_n\| \leq \|T\|\|x_n\| < +\infty$ . De plus,  $T$  est de rang fini. Donc  $\dim ImT = n < +\infty$ . D'où,  $ImT$  est isomorphe à  $\mathbb{C}^n$ . Par le Théorème de Bolzano-Weierstrass,  $(Tx_n)_n$  admet une sous-suite convergente.  $T$  est donc compact.

2. Si  $\dim E = p < \infty$ , alors pour tout  $x \in E : x = \sum_{k=1}^p \langle x, e_k \rangle e_k$ , on aura

$$Tx = \sum_{k=1}^p \langle x, e_k \rangle Te_k$$

où  $(e_k)_{1 \leq k \leq p}$  est une base orthonormale de  $E$ . Ce qui montre que  $T$  est de rang fini.  $T$  est compact par (1).

3. Si  $\dim F < \infty$ , alors  $\dim ImT < \infty$ , car  $ImT \subset F$ . Par (1),  $T$  est compact.

**Exercice 2** 1. Soient  $z = x + y, z' = x' + y' \in H = M \oplus M^\perp$ , et soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} P(\lambda z + z') &= P((\lambda(x + y) + (x' + y'))) = P((\lambda x + x') + (\lambda y + y')) \\ &= \lambda x + x' \\ &= \lambda Pz + Pz' \end{aligned}$$

et  $P$  est donc linéaire.

2. Soit  $z = x + y \in H = M \oplus M^\perp$ .

$$\|Pz\|^2 = \|x\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2 = \|z\|^2$$

par le Théorème de Pythagore car  $x \perp y$ . D'où,  $P$  est borné, et  $\|P\| \leq 1$ . (1)

3. Soit  $u \in M, \|u\| = 1$ . On a  $\|Pu\| = \|u\| = 1$ .

D'où,

$$\|P\| = \sup_{\|z\|=1} \|Pz\| \geq \|Pu\| = 1 \quad (2)$$

Par (1) et (2),  $\|P\| = 1$ .

4. Soit  $z = x + y \in H$ . Comme  $x \in M$ ,

$$P^2z = P(Pz) = Px = x = Pz$$

D'où,  $P^2 = P$ . De plus, pour tous  $z = x + y, z' = x' + y' \in H$ ,

$$\begin{aligned} \langle Pz, z' \rangle &= \langle x, x' + y' \rangle = \langle x, x' \rangle + \langle x, y' \rangle = \langle x, x' \rangle \\ &= \langle x + y, x' \rangle \\ &= \langle z, x' \rangle \\ &= \langle z, P^* z' \rangle \end{aligned}$$

D'où,  $P^* z' = x' = Pz', z' \in H$ , i.e.,  $P = P^*$ .

### Exercice 3

$$(Af)(s) = s \int_0^1 t^2 f(t) dt, \quad f \in L_2([0, 1]), \quad s \in [0, 1]$$

1. Soient  $f, g \in L_2([0, 1])$ , et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $s \in [0, 1]$  :

$$\begin{aligned} (A(\lambda f + g))(s) &= s \int_0^1 t^2 (\lambda f + g)(t) dt = s \int_0^1 t^2 ((\lambda f)(t) + g(t)) dt \\ &= s \int_0^1 t^2 (\lambda f)(t) dt + s \int_0^1 t^2 g(t) dt \\ &= \lambda s \int_0^1 t^2 f(t) dt + s \int_0^1 t^2 g(t) dt \\ &= \lambda (Af)(s) + (Ag)(s) \\ &= (\lambda Af + Ag)(s) \end{aligned}$$

D'où,  $A(\lambda f + g) = \lambda Af + Ag$ , et  $A$  est donc linéaire.

2. Soit  $f \in L_2([0, 1])$ . Comme  $s, t \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \|Af\|_2^2 &= \int_0^1 |(Af)(s)|^2 ds = \int_0^1 s^2 \left| \int_0^1 t^2 f(t) dt \right|^2 ds \leq \int_0^1 \left| \int_0^1 f(t) dt \right|^2 ds \\ &\leq \int_0^1 ds \int_0^1 |f(t)|^2 dt \\ &\leq \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

D'où,  $A$  est borné, et  $\|A\| \leq 1$ .

3. Soient  $f, g \in L_2([0, 1])$ .

$$\begin{aligned} \langle Af, g \rangle &= \int_0^1 Af(s)\overline{g(s)}ds = \int_0^1 s \int_0^1 t^2 f(t)dt \overline{g(s)}ds \\ &= \int_0^1 f(t)t^2 \int_0^1 \overline{sg(s)}ds dt \\ &= \int_0^1 f(t)t^2 \overline{\int_0^1 sg(s)ds} dt \\ &= \langle f, A^*g \rangle \end{aligned}$$

D'où,  $A^* : L_2([0, 1]) \longrightarrow L_2([0, 1])$ ,  $g \mapsto A^*g$  où,

$$A^*g(t) = t^2 \int_0^1 sg(s)ds, \quad g \in L_2([0, 1]), \quad t \in [0, 1]$$

4. Soit  $(f_k)_{k \geq 1}$  une base orthonormale de  $L_2([0, 1])$ . Posons  $h(t) = t^2$ ,  $t \in [0, 1]$ . On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \|Af_k\|^2 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 |Af_k(s)|^2 ds = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 |s \int_0^1 t^2 f_k(t)dt|^2 ds \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 s^2 ds \left| \int_0^1 t^2 f_k(t)dt \right|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \int_0^1 t^2 f_k(t)dt \right|^2 \text{ car } 0 \leq s \leq 1 \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle \bar{h}, f_k \rangle|^2 \\ &\leq \|\bar{h}\|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{5} < +\infty \end{aligned}$$

par l'égalité de Parseval. Par conséquent,  $A$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

5. On déduit de la question (4) que  $A$  est compact.

## 6.7 Rattrapage 2018/2019

### Exercice 6.13.

Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable, et soient  $A, B \in L(H)$  avec  $A$  compact.

1. Montrer que les opérateurs  $AB$  et  $BA$  sont compacts.

2. Soit  $(\varphi_n)_n$  une base orthonormale de  $H$ .

i. Montrer que  $(\varphi_n)_n$  converge faiblement vers 0.

ii. Que peut-on déduire pour la suite  $(A\varphi_n)_n$  ? Justifier.

### Exercice 6.14.

Soit  $K$  un espace de Hilbert muni d'une base orthonormale  $(e_n)_n$ , et soit  $S \in L(K)$  l'opérateur défini par  $Se_n = e_{n+1}$ ,  $n \geq 1$ .

a. Montrer que  $S$  est une isométrie. (i.e.,  $\|Sx\| = \|x\|$ ,  $x \in K$ )

b. Montrer que  $\|S + I\| = 2$ , où  $I$  est l'identité sur  $K$ .

↔ Utiliser le vecteur  $x_0 = (1, 1, \dots, \underbrace{1}_n, 0, 0, 0, 0, \dots) \in K$

c. Montrer que  $S$  n'est pas compact.

### Exercice 6.15.

Considérons l'opérateur  $T : L_2([-\pi, \pi]) \longrightarrow L_2([-\pi, \pi])$ ,  $f \mapsto Tf$  défini par

$$(Tf)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)f(s)ds, \quad f \in L_2([-\pi, \pi]), \quad t \in [-\pi, \pi]$$

1. Montrer que  $T$  est un opérateur linéaire.

2. Montrer que  $T$  est borné, et estimer sa norme.

3. Déterminer  $T^*$ , l'opérateur adjoint de  $T$ .

4. Conclure.

### 6.7.1 Corrigé du rattrapage 2018/2019

**Exercice 1** 1. Soit  $(x_n)_n \subset H, \|x_n\| = 1$ . Comme  $B$  est borné, la suite  $(Bx_n)_n$  est bornée. En effet,

$$\|Bx_n\| \leq \|B\| \|x_n\| \leq \|B\|$$

De plus, comme  $A$  est compact, la suite  $(ABx_n)_n$  admet une sous-suite convergente. L'opérateur  $AB$  est donc compact.

De même, comme  $A$  est compact, la suite  $(Ax_n)_n$  admet une sous-suite convergente  $(Ax_{n'})_n$ . Comme  $B$  est continu car borné, la suite  $(BAx_{n'})_n$  converge également, et  $BA$  est donc compact.

2. i. On a

$$\forall x \in H : x = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

Comme la suite  $(\varphi_k)_{k \geq 1}$  est une base orthonormale de  $H$ ,

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2$$

par l'égalité de Parseval. Donc, la série numérique réelle  $\sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2$  est convergente. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\langle x, \varphi_n \rangle| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x, \varphi_n \rangle = 0 = \langle x, 0 \rangle, x \in H$$

Ce qui montre que  $\varphi_n \xrightarrow{w} 0$ .

ii. Comme  $A$  est compact, l'image par  $A$  de toute suite faiblement convergente est une suite fortement convergente. Par suite, la suite  $(A\varphi_n)_n$  converge fortement vers  $A(0) = 0$ .

**Exercice 2** a. Soit  $x \in K$ . Donc  $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ . Par la linéarité de  $S$ ,

$$Sx = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle S e_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle e_{k+1}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|Sx\|^2 = \langle Sx, Sx \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle e_{k+1}, \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_{n+1} \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle \langle x, e_n \rangle \langle e_{k+1}, e_{n+1} \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \\
&= \|x\|^2
\end{aligned}$$

D'où,  $\|Sx\| = \|x\|, x \in K$ . Par conséquent,  $S$  est une isométrie.

b. Par la question (a),  $\|S\| = 1 = \|I\|$ . Donc,

$$\|S + I\| \leq \|S\| + \|I\| \leq 2 \quad (1)$$

D'autre part, pour  $x_0 = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, 0, 0, \dots) \in K$ ,

$$(S + I)x_0 = (0, 1, \dots, 1, 0, 0, 0, 0, \dots) + (1, 1, \dots, 1, 0, 0, 0, 0, \dots) = (1, 2, 2, \dots, 2, \underbrace{1}_{n+1}, 0, 0, 0, \dots)$$

D'où,

$$\|S + I\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(S + I)x\|}{\|x\|} \geq \frac{\|(S + I)x_0\|}{\|x_0\|} = \sqrt{\frac{4n-2}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \quad (2)$$

De (1) et (2),  $\|S + I\| = 2$ .

c. On a  $e_n \xrightarrow{w} 0$  par la question (2.i.) de l'exercice 1. De plus,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Se_n - S(0)\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|e_{n+1}\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \neq 0$$

Donc, la suite  $(Se_n)_n$  ne converge pas fortement vers 0. Par conséquent, l'opérateur  $S$  n'est pas compact.

**Exercice 3 1.** On a pour tous  $f, g \in L_2([-\pi, \pi])$ , et tous  $\lambda \in \mathbb{C}, t \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned}
 T(\lambda f + g)(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)(\lambda f + g)(s) ds = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)((\lambda f)(s) + g(s)) ds \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)(\lambda f)(s) ds + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)g(s) ds \\
 &= \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)f(s) ds + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)g(s) ds \\
 &= (\lambda Tf)(t) + (Tg)(t) \\
 &= (\lambda Tf + Tg)(t)
 \end{aligned}$$

Par suite,  $T(\lambda f + g) = \lambda Tf + Tg$ , et  $T$  est donc linéaire.

2. Soit  $f \in L_2([-\pi, \pi])$ . On a

$$\begin{aligned}
 \|Tf\|_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |(Tf)(t)|^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)f(s) ds \right|^2 dt \\
 &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(t-s)f(s)|^2 ds dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(s)|^2 ds dt \\
 &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_2^2 dt \\
 &\leq 2\pi \|f\|_2^2
 \end{aligned}$$

D'où,  $\|Tf\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_2$ . Ceci montre que  $T$  est borné, et que  $\|T\| \leq \sqrt{2\pi}$ .

3. Soient  $f, g \in L_2([-\pi, \pi])$ . On a

$$\begin{aligned} \langle Tf, g \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} Tf(t)\overline{g(t)}dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)f(s)ds \right] \overline{g(t)}dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)\overline{g(t)}dt \right] ds \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)g(t)dt ds \\ &= \langle f, T^*g \rangle \end{aligned}$$

Donc,

$$(T^*f)(s) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)f(t)dt, \quad f \in L_2([-\pi, \pi]), s \in [-\pi, \pi]$$

Par suite,  $T = T^*$ .

4. On conclut de (3) que  $T$  est auto-adjoint.

## 6.8 EMD 2019/2020

**Exercice 1** Sur l'espace  $E = \mathbb{R}_3[X]$  des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, et à coefficients réels, on définit l'application

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt, \quad P, Q \in E$$

1. Montrer que l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $E$ .

2. Posons  $P = X^3 + X^2$ . Montrer que la distance  $d = d(P, \mathbb{R}_2[X])$  existe, où  $d$  est la distance induite de la norme associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

3. Trouver le projeté orthogonal  $P_0$  de  $P$  sur  $\mathbb{R}_2[X]$ . ( $P_0 = \frac{1}{4}X^2 - \frac{6}{5}X + \frac{17}{120}$ )

4. Calculer  $d$ . ( $d = \frac{\sqrt{162485}}{120\sqrt{7}}$ )

**Exercice 2** On considère l'opérateur  $T : \mathbb{L}_2([0, 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{L}_2([0, 1], \mathbb{R})$  défini par

$$(Tf)(x) = \int_x^1 e^{-t}f(t)dt, \quad f \in \mathbb{L}_2([0, 1], \mathbb{R}), x \in [0, 1]$$

1. Montrer que  $T$  est bien défini, i.e.,  $Tf \in \mathbb{L}_2([0, 1], \mathbb{R})$  pour tout  $f \in \mathbb{L}_2([0, 1], \mathbb{R})$ .

2. Montrer que  $T$  est linéaire et borné, et estimer sa norme.

3. Trouver l'opérateur adjoint  $T^*$  de  $T$ .

**Exercice 3** On définit l'opérateur de Volterra sur l'espace  $\mathbb{L}_2([0, 1], \mathbb{R})$  comme suit

$$(\mathcal{V}\varphi)(t) = \int_0^t \varphi(s)ds, \quad \varphi \in \mathbb{L}_2([0, 1], \mathbb{R}), \quad t \in [0, 1]$$

1. Trouver une fonction  $k = k(t, s) \in \mathbb{L}_2([0, 1])$  telle que  $\mathcal{V}$  s'écrive sous la forme de l'opérateur intégral défini sur  $\mathbb{L}_2([0, 1], \mathbb{R})$  par

$$(K\varphi)(t) = \int_0^1 k(t, s)\varphi(s)ds, \quad \varphi \in \mathbb{L}_2([0, 1], \mathbb{R}), \quad t \in [0, 1]$$

2. Calculer  $\int_0^1 \int_0^1 |k(t, s)|^2 ds dt$  pour le noyau  $k$  de  $\mathcal{V}$  trouvé.

3. Que peut-on déduire pour l'opérateur  $\mathcal{V}$  ?

### 6.8.1 Corrigé de l'EMD 2019/2020

**Exercice 1** 1. i.a. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ .  $P = 0 \Rightarrow \langle P, P \rangle = 0$ .

i.b. Comme la fonction  $P^2$  est continue et positive,

$$\langle P, P \rangle = 0 \Rightarrow \int_0^1 P^2(x) dx = 0 \Rightarrow P^2(x) = 0, x \in [0, 1] \Rightarrow P(x) = 0, x \in [0, 1]$$

D'où,  $P(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ , car le polynôme  $P$  admet un ensemble non dénombrable de racines dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Par suite,  $P = 0$ .

ii. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ .  $\langle P, P \rangle = \int_0^1 P^2(x) dx \geq 0$

iii. Soient  $P, Q \in E$ .  $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x) dx = \int_0^1 Q(x)P(x) dx = \langle Q, P \rangle$

vi. Soient  $P, Q \in E$ , et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a

$$\langle \lambda P, Q \rangle = \int_0^1 (\lambda P)(x)Q(x) dx = \lambda \int_0^1 P(x)Q(x) dx = \lambda \langle P, Q \rangle$$

v. Soient  $P, Q, S \in E$ .

$$\begin{aligned} \langle P + Q, S \rangle &= \int_0^1 (P + Q)(x)S(x) dx = \int_0^1 (P(x) + Q(x))S(x) dx \\ &= \int_0^1 P(x)S(x) dx + \int_0^1 Q(x)S(x) dx \\ &= \langle P, S \rangle + \langle Q, S \rangle \end{aligned}$$

L'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit donc un produit scalaire sur  $E$ .

2. L'espace  $E = \mathbb{R}_3[X]$  est de Hilbert car de dimension finie. De plus, l'espace  $\mathbb{R}_2[X]$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $E$  car c'est un espace de dimension finie, il est donc complet. Par le Théorème de la projection orthogonale,  $P$  admet un projeté orthogonal unique  $P_0$  sur  $\mathbb{R}_2[X]$ . De plus,  $d = d(P, \mathbb{R}_2[X]) = d(P, P_0)$ . La distance  $d$  existe et est finie.

3.  $d = d(P, P_0) = \|P - P_0\|$ . Cherchons  $P_0$ .

Comme  $P_0 \in \mathbb{R}_2[X]$ ,  $P_0 = aX^2 + bX + c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . De plus, le vecteur  $(P - P_0) \in \mathbb{R}_2[X]^\perp$ . D'où,

$$\langle P - P_0, 1 \rangle = \langle P - P_0, X \rangle = \langle P - P_0, X^2 \rangle = 0$$

i.e.,

$$\begin{cases} \int_0^1 (X^3 + (a+1)X^2 + bX + c) dx = 0 \\ \int_0^1 (X^3 + (a+1)X^2 + bX + c)X dx = 0 \\ \int_0^1 (X^3 + (a+1)X^2 + bX + c)X^2 dx = 0 \end{cases}$$

On obtiendra après calcul que  $P_0 = \frac{1}{4}X^2 - \frac{6}{5}X + \frac{17}{120}$

4. On a

$$d^2 = \|P - P_0\|^2 = \int_0^1 ((P - P_0)(x))^2 dx = \frac{162485}{100800}$$

Donc,  $d = \frac{\sqrt{162485}}{120\sqrt{7}}$

### Exercice 2.

1. Soit  $f \in \mathcal{L}_2([0, 1], \mathbb{R})$ . Par l'inégalité de Cauchy-Bunyakowski-Schwarz,

$$\begin{aligned} \|Tf\|_2^2 &= \int_0^1 |Tf(x)|^2 dx = \int_0^1 \left| \int_x^1 e^{-t} f(t) dt \right|^2 dx \leq \int_0^1 \int_x^1 |e^{-t}|^2 dt \int_x^1 |f(t)|^2 dt dx \\ &\leq \frac{1}{2} \left[ -e^{-2t} \right]_0^1 \int_0^1 |f(t)|^2 dt dx \\ &\leq \frac{1 - e^{-2}}{2} \|f\|_2^2 < +\infty \end{aligned}$$

car  $x \geq 0$ , et  $f \in \mathcal{L}_2([0, 1], \mathbb{R})$ . Donc,  $Tf \in \mathcal{L}_2([0, 1], \mathbb{R})$ . L'opérateur  $T$  est donc bien défini.

2. Soient  $f, g \in \mathcal{L}_2([0, 1], \mathbb{R})$ , et soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a

$$\begin{aligned} (T(\alpha f + g))(x) &= \int_x^1 e^{-t} (\alpha f + g)(t) dt = \int_x^1 e^{-t} (\alpha f)(t) dt + \int_x^1 e^{-t} g(t) dt \\ &= \alpha \int_x^1 e^{-t} f(t) dt + \int_x^1 e^{-t} g(t) dt \\ &= \alpha (Tf)(x) + (Tg)(x) \\ &= (\alpha Tf + Tg)(x) \end{aligned}$$

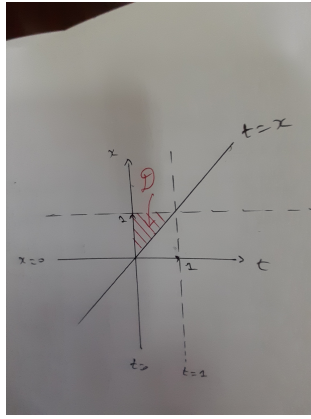
D'où,  $T(\alpha f + g) = \alpha Tf + Tg$ . L'opérateur  $T$  est donc linéaire.

De plus, et par la question (1),  $T$  est borné et  $\|T\| \leq \sqrt{\frac{1-e^{-2}}{2}}$ .

3. Soient  $f, g \in \mathcal{L}_2([0, 1], \mathbb{R})$ . Par le Théorème de Fubini, on aura

$$\begin{aligned} \langle Tf, g \rangle &= \int_0^1 (Tf)(x)g(x)dx = \int_0^1 \int_x^1 e^{-t} f(t) dt g(x) dx \\ &= \int_0^1 f(t) \left( e^{-t} \int_0^t g(x) dx \right) dt \\ &= \langle f, T^*g \rangle \end{aligned}$$

Par conséquent,  $(T^*g)(t) = e^{-t} \int_0^t g(x) dx$ ,  $t \in [0, 1]$ .



$$\mathcal{D} : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Méthode 2 : Intégration par parties : On pose  $F(x) = \int_x^1 e^{-t} f(t) dt$  et  $h'(x) = g(x)$ .

Donc,

$$\begin{aligned} \langle Tf, g \rangle &= \int_0^1 (Tf)(x)g(x)dx = \int_0^1 \int_x^1 e^{-t} f(t) dt g(x) dx \\ &= \left[ \int_x^1 e^{-t} f(t) dt \times \int_0^x g(t) dt \right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} f(x) \int_0^x g(t) dt \\ &= \int_0^1 f(x) e^{-x} \int_0^x g(t) dt = \langle f, T^*g \rangle \end{aligned}$$

D'où,

$$(T^*g)(x) = e^{-x} \int_0^x g(t)dt, \quad t \in [0, 1]$$

**Exercice 3** 1. On a  $(\mathcal{V}\varphi)(t) = \int_0^t \varphi(s)ds = \int_0^1 k(t, s)\varphi(s)ds$  où

$$k(t, s) = \begin{cases} 1, & s \in [0, t] \\ 0, & s \in ]t, 1] \end{cases}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 |k(t, s)|^2 ds dt &= \int_0^1 \int_0^t |k(t, s)|^2 ds dt + \int_0^1 \int_t^1 |k(t, s)|^2 ds dt = \int_0^1 \int_0^t 1^2 ds dt \\ &= \int_0^1 [s]_0^t dt = \int_0^1 t dt \\ &= \frac{1}{2} [t^2]_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. Comme  $\int_0^1 \int_0^1 |k(t, s)|^2 ds dt < +\infty$ , l'opérateur  $\mathcal{V}$  est bien défini, et est borné. De plus,  $\|\mathcal{V}\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

## 6.9 Rattrapage 2019/2020

**Exercice 1** L'espace  $\mathcal{H} = \ell_2(\mathbb{N})$  est muni de sa base standard  $(e_n)_{n \geq 1}$ , et de son produit scalaire usuel. Soit  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  une suite complexe bornée. On définit l'opérateur  $\mathcal{S} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  par

$$\mathcal{S}x = \mathcal{S}(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (\alpha_1 x_2, \alpha_2 x_3, \dots, \alpha_n x_{n+1}, \dots)$$

1. Montrer que  $\mathcal{S}$  est linéaire.
2. Montrer que  $\mathcal{S}$  est borné, et estimer sa norme.
3. Déterminer l'opérateur adjoint  $\mathcal{S}^*$  de l'opérateur  $\mathcal{S}$ .
4. L'opérateur  $\mathcal{S}$  est-il normal ? (i.e.,  $\mathcal{S}\mathcal{S}^* = \mathcal{S}^*\mathcal{S}$ )

**Exercice 2** Soit  $E = \mathbb{R}^3$ , et soit  $M = \text{Vect}\{v_1 = (1, -1, 0), v_2 = (0, 1, 1)\}$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par les vecteurs  $v_1, v_2$ .

1. Caractériser un vecteur  $v(x, y, z)$  dans  $M$ .
2. Posons  $u = (1, 0, 2)$ . Montrer que la distance  $d(u, M)$  existe.
3. Soit  $u_0$  le projeté orthogonal de  $u$  sur  $M$ .
  - 3.1. Trouver  $u_0$ . (Remarquer aussi que  $u_0 \in M$ )
  - 3.2. En déduire la valeur de  $d(u, M)$ .

### 6.9.1 Corrigé du Rattrapage 2019/2020

#### Exercice 1

$$\mathcal{S}x = \mathcal{S}(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (\alpha_1 x_2, \alpha_2 x_3, \dots, \alpha_n x_{n+1}, \dots)$$

1. Soient  $x = (x_n)_{n \geq 1}, y = (y_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{H}$ , et soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . On a

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\lambda x + y) &= \mathcal{S}(\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2, \dots, \lambda x_n + y_n, \dots) \\ &= (\alpha_1(\lambda x_2 + y_2), \alpha_2(\lambda x_3 + y_3), \dots, \alpha_n(\lambda x_{n+1} + y_{n+1}), \dots) = \\ &= (\alpha_1 \lambda x_2 + \alpha_1 y_2, \alpha_2 \lambda x_3 + \alpha_2 y_3, \dots, \alpha_n \lambda x_{n+1} + \alpha_n y_{n+1}, \dots) + \\ &= \lambda(\alpha_1 x_2, \alpha_2 x_3, \dots, \alpha_n x_{n+1}, \dots) + (\alpha_1 y_2, \alpha_2 y_3, \dots, \alpha_n y_{n+1}, \dots) \\ &= \lambda \mathcal{S}x + \mathcal{S}y \end{aligned}$$

L'opérateur  $\mathcal{S}$  est linéaire.

2. Soit  $x = (x_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{H}$ . Comme la suite  $(\alpha_n)_n$  est bornée,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}x\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n x_{n+1}|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2 |x_{n+1}|^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{n \geq 1} (|\alpha_n|^2) |x_{n+1}|^2 \\ &\leq \sup_{n \geq 1} (|\alpha_n|^2) \sum_{n=1}^{+\infty} |x_{n+1}|^2 \\ &\leq (\sup_{n \geq 1} |\alpha_n|)^2 \|x\|_2^2 \end{aligned}$$

D'où, l'opérateur  $\mathcal{S}$  est borné, et  $\|\mathcal{S}\| \leq \sup_{n \geq 1} |\alpha_n|$ .

3. Pour tous  $x = (x_n)_{n \geq 1}, y = (y_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{H}$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}x, y \rangle &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n x_{n+1} \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} x_{n+1} \overline{\alpha_n y_n} = \sum_{n=2}^{+\infty} x_n \overline{\alpha_{n-1} y_{n-1}} \\ &= \langle (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots), (0, \overline{\alpha_1} y_1, \overline{\alpha_2} y_2, \dots, \overline{\alpha_{n-1}} y_{n-1}, \dots) \rangle \\ &= \langle x, \mathcal{S}^* y \rangle \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\mathcal{S}^* y = (0, \overline{\alpha_1} y_1, \overline{\alpha_2} y_2, \dots, \overline{\alpha_{n-1}} y_{n-1}, \dots)$ ,  $y \in \mathcal{H}$ .

4. Pour tout  $x = (x_i)_{i \geq 1} \in \mathcal{H}$ , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\mathcal{S}^* x &= \mathcal{S}(0, \overline{\alpha_1} x_1, \overline{\alpha_2} x_2, \dots, \overline{\alpha_{n-1}} x_{n-1}, \dots) = (\alpha_1 \overline{\alpha_1} x_1, \alpha_2 \overline{\alpha_2} x_2, \dots, \alpha_n \overline{\alpha_n} x_n, \dots) \\ &= (|\alpha_1|^2 x_1, |\alpha_2|^2 x_2, \dots, |\alpha_n|^2 x_n, \dots) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^*\mathcal{S}x &= \mathcal{S}^*(\alpha_1x_2, \alpha_2x_3, \dots, \alpha_nx_{n+1}, \dots) = (0, \overline{\alpha_1}\alpha_1x_2, \overline{\alpha_2}\alpha_2x_3, \dots, \overline{\alpha_n}\alpha_nx_{n+1}, \dots) \\ &= (0, |\alpha_1|^2x_2, |\alpha_2|^2x_3, \dots, |\alpha_{n-1}|^2x_n, |\alpha_n|^2x_{n+1}, \dots)\end{aligned}$$

Pour  $x = e_1$ , on obtiendra,

$$\mathcal{S}\mathcal{S}^*e_1 = (|\alpha_1|^2, 0, 0, \dots, 0, \dots) \neq \mathcal{S}^*\mathcal{S}e_1 = (0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$$

D'où, l'opérateur  $\mathcal{S}$  n'est pas normal sur  $\mathcal{H}$ .

**Exercice 2** 1. Soit  $V = (x, y, z) \in M$ . Il existe donc  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $V = \alpha v_1 + \beta v_2$ . D'où,

$$x = \alpha, y = -\alpha + \beta, z = \beta$$

Donc,  $V = (\alpha, -\alpha + \beta, \beta)$ .

2. L'espace  $E$  est de Hilbert, et  $M$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $E$  car de dimension finie, il est donc complet. Par le Théorème de la projection orthogonale,  $u$  admet un projeté orthogonal unique  $u_0$  sur  $M$ , et  $d(u, M) = \|u - u_0\|$ . Donc la distance  $d(u, M)$  existe.

3.1. Comme  $u_0 \in M$ ,  $u_0 = (\alpha, -\alpha + \beta, \beta)$ . De plus, par le Théorème de la décomposition orthogonale,  $E = M \oplus M^\perp$ . Donc,  $u = u_0 + u_1$ , où  $u_1 \in M^\perp$ . Donc,  $u_1 = (u - u_0) \perp M$ , i.e.,  $\langle u - u_0, v_1 \rangle = \langle u - u_0, v_2 \rangle = 0$ . D'où,

$$1 - \alpha - \alpha + \beta = 0 \text{ et } \alpha - \beta + 2 - \beta = 0$$

i.e.,

$$-2\alpha + \beta = -1 \text{ et } \alpha - 2\beta = -2$$

Donc,  $\alpha = \frac{4}{3}$  et  $\beta = \frac{5}{3}$ . Par suite,  $u_0 = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3})$ .

3.2. On a

$$d(u, M) = \|u - u_0\|_2 = \left\| \left( -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

# Bibliographie

- [1] N.I. Akhiezer and I.M. Glazman, *Theory of linear operators in Hilbert space*, Dover Publications Inc., New York, (1993).
- [2] B. Bendoukha, *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs*, Cours et exercices corrigés, (2017), website (<http://www.sites.google.com/site/bendoukhamaths>)
- [3] J. Charles, M. Mbekhta and H. Queffélec, *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs*, Dunod, Paris, (2010).
- [4] J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Second edition, Springer-Verlag New York, Inc, (1990).
- [5] L. Debnath and P. Mikusinski, *Hilbert Spaces with Applications*, Elsevier Academic Press, (2005).
- [6] I. Gohberg and S. Goldberg, *Basic Operator Theory*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin(1981).
- [7] W. Hengartner, M. Lambert and C. Reischer, *Introduction à l'analyse fonctionnelle*, Les Presses de l'Université de Québec, (1981).
- [8] D. Michel, *Développements pour l'agrégation de Mathématiques*, ENS de Rennes, Univ. Rennes 1, (2016/2017).
- [9] B. Rémy, *Espaces de Hilbert, géométrie*, Ecole Polytechnique, Université Paris- Saclay.