Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Hassiba Benbouali de Chlef

Faculté des Sciences Exactes & Informatique

Département de Mathématiques

Cours d'analyse fonctionnelle

Exercices et sujets d'examens

Par

Dr. Aissa NASLI BAKIR

Première Année Master

Année Universitaire : 2022/2023

Table des matières

Introduction

Je mets à la disposition de nos chèrs enseignants et étudiants ce travail qui correspond au programme de l'Analyse fonctionnelle, et destiné au niveau de la première année Master de Mathématiques. Il est composé de cinq chapitres, dont chaque chapitre contient un rappel de cours et des exercices recueillis de mes séries de travaux dirigés, pour bien apprendre les notions du contenu. Des problèmes et des sujets d'examens avec solutions sont proposés à la fin de cet ouvrage.
L'auteur

" La pensée n'est qu'un éclair au milieu d'une longue nuit

Mais c'est cet éclair qui est tout. "

Henri POINCARÉ

Chapitre 1

Espaces de Banach

1.1 Rappel sur les espaces vectoriels normés

1.1.1 Norme sur un espace vectoriel

Définition 1.1. *(Rappel) Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.*

Une application $\|.\| : X \to \mathbb{R}_+$ est dite norme sur X si :

1. $\forall x \in X : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(Séparation)*
2. $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{C} : \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *(Homogénéité)*
3. $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Inégalité triangulaire)*

Définition 1.2. *Un espace vectoriel muni d'une norme est dit espace vectoriel normé.*

Exemples 1. Les applications $\|.\|_p$, $(1 \leq p < \infty)$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{C}^n$ où

$$\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{n \geq 1} |x_n| \,, \; x = (x_k)_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$$

2. L'application $\|.\|_\infty$ sur l'espace vectoriel $X = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur un segment compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et définie par

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \,, \quad f \in X$$

est une norme sur X.

1.2 Espaces de Banach

Définition 1.3. *Une suite $(x_n)_n$ d' un espace vectoriel normé $(X, \|.\|)$ est dite de Cauchy dans X si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}/\forall n, m \in \mathbb{N} : (n > N \text{ et } m > N) \Rightarrow (\|x_n - x_m\| < \varepsilon)$$

Définition 1.4. *La suite $(x_n)_n$ est dite convergente vers un élément $x \in X$, si*

$$\lim_{n \to +\infty} \|x_n - x\| = 0$$

i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N) \Rightarrow (\|x_n - x\| < \varepsilon)$$

et l'on écrit

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x$$

Définition 1.5. *Soit X un espace vectoriel normé. Si toute suite de Cauchy dans X est convergente dans X, l'espace X est dit complet.*

Définition 1.6. *Un espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.* [1]

Exemples 1. Les espaces $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$ et $L_2([a, b], \mathbb{C})$ sont des espaces de Banach.

1. Stefan Banach (1892-1945) est un grand mathématicien polonais. Il est l'un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle.

2. Les espaces

$$\ell_p := \left\{ x = (x_n)_n \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}, 1 \leq p < \infty$$

et

$$\ell_\infty := \left\{ x = (x_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{C} : \sup_{n \geq 1} |x_n| < +\infty \right\}$$

munis de normes

$$\|x\|_p = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |x_n|$$

respectivement où $x = (x_n)_{n \geq 1}$, sont des espaces de Banach.

Proposition 1.1. *L'espace ℓ_2 est complet.*

Preuve. Soit donc

$$x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \xi_3^{(n)}, ..., \xi_n^{(n)}, ...) \in \ell_2$$

une suite de Cauchy. Pour k fixé, on a

$$\left| \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} \right| \leq \|x_n - x_m\| \to 0 \qquad (1)$$

quand $n, m \to +\infty$. La suite $\left(\xi_k^{(n)} \right)_{n \geq 1}$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Elle est donc convergente. Soit $\xi_k = \lim_{n \to +\infty} \xi_k^{(n)}$, et posons $x = (\xi_1, \xi_2, , ...\xi_n, ..)$. Montrons que $x \in \ell_2$, et que $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$.

Pour tout entier j, $j \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{j} |\xi_k|^2 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{j} \left| \xi_k^{(n)} \right|^2 \qquad (2)$$

et

$$\sum_{k=1}^{j} \left| \xi_k^{(n)} \right|^2 \leq \|x_n\|^2 \qquad (3)$$

De plus, $\sup_{n\geq 1} \|x_n\| = M < +\infty$ car

$$|\|x_n\| - \|x_m\|| \leq \|x_n - x_m\| \to 0, n, m \to +\infty$$

Il s'ensuit donc de (2) et (3) que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left|\xi_k^{(n)}\right|^2 \leq M^2$$

, i.e., $x \in \ell_2$. D'autre part, pour $\epsilon > 0$, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tous n, m, $n > N$ et $m > N_\epsilon$, et tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{p} \left|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}\right|^2 \leq \|x_n - x_m\|^2 < \epsilon \qquad (4)$$

Fixons $n \geq N_\epsilon$ et faisons tendre m vers $+\infty$. De (1) et (4), on obtiendra pour tout p

$$\sum_{k=1}^{p} \left|\xi_k^{(n)} - \xi_k\right|^2 = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} \left|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}\right|^2 \leq \epsilon$$

Par conséquent,

$$\|x_n - x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \left|\xi_k^{(n)} - \xi_k\right|^2 \leq \epsilon$$

◄

Remarque On verra plus tard que les espaces $\ell_p, (1 \leq p \leq +\infty)$ sont tous complets.

1.2.1 Normes équivalentes

Définition 1.7. *Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur un espace vectoriel normé X sont dites équivalentes sur X s'il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que*

$$\|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

pour tout x, $x \in X$.

Remarque Il est clair que si $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont des normes équivalentes sur X, alors toute suite de Cauchy $(x_n)_n$ qui converge dans $(X, \|.\|_1)$, converge également dans $(X, \|.\|_2)$ et l'inverse. De même, toute suite de Cauchy dans $(X, \|.\|_1)$ est une suite de Cauchy dans $(X, \|.\|_2)$.

On a donc le résultat important suivant

Théorème 1.1. *[9] Deux normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.*

Remarque Ce résultat est généralement faux si le corps de l'espace X n'est pas complet. En effet, soit $X = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$.
On vérifie aisément que X est un $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. De plus, X est isomorphe à $\mathbb{Q}^2$. D'où, $\dim X = 2$.
On définit les applications $\quad \|.\|_1, \quad \|.\|_2 : X \to \mathbb{R}$ par

$$\|a + b\sqrt{2}\|_1 = |a| + |b| \quad \text{et} \quad \|a + b\sqrt{2}\|_2 = |a + b\sqrt{2}|$$

On vérifie facilement que ces applications sont des normes sur X.
Considérons les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ où

$$u_n = (1 - \sqrt{2})^n \text{ et } \quad v_n = (1 + \sqrt{2})^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Les termes u_n et v_n peuvent être écrits sous la forme

$$u_n = a_n - b_n\sqrt{2} \quad \text{et} \quad v_n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

où $a_n, b_n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$. Par conéquent,

$$a_n = \tfrac{u_n + v_n}{2}$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, la suite $(a_n)_n$ est divergente et

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

D'où,

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_1 = +\infty$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_2 = 0$$

La suite $(\frac{\|u_n\|_1}{\|u_n\|_2})_n$ n'est donc pas bornée, et par suite, les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes sur X.

1.3 Espaces de Banach séparables

Définition 1.8. *Un espace vectoriel normé X est dit séparable si X contient un ensemble dénombrable et dense dans X.*

Exemple L'espace $(\mathbb{R}, |.|)$ est séparable. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.2. *Les espaces $\ell_p, (1 \leq p < \infty)$ cités ci-dessus, sont séparables. Toutefois, l'espace ℓ_∞ ne l'est pas.*

Preuve. 1. En effet, l'ensemble

$$H = \left\{ (\alpha_k)_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{Q} \ / \ \alpha_n = 0 \text{ pour certain } n \text{ assez grand} \right\}$$

est dense dans ℓ_p.

2. Pour tout ensemble dénombrable $(x_n)_n$ dans ℓ_∞, on peut toujours trouver $x \in \ell_\infty$ tel que

$$\|x_n - x\|_\infty \geq 1$$

Soit donc $x_n = \left(\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, ..., \alpha_k^{(n)}, ..\right) \in \ell_\infty$, et soit

$$\alpha_n = \begin{cases} 0, & \text{si } \left|\alpha_n^{(n)}\right| > 1 \\ 1 + \left|\alpha_n^{(n)}\right|, & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors, $x = (\alpha_1, \alpha_1, ..., \alpha_n, ..) \in \ell_\infty$ et

$$\|x_n - x\|_\infty = \left|\alpha - \alpha_n^{(n)}\right| \geq 1$$

◀

Remarque Si X est de Hilbert séparable, alors X admet une base orthonormale dénombrable $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$, et tout élément x de X s'écrit

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \varphi_n$$

où $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$. Or, pour un espace de Banach, on a la définition suivante

Définition 1.9. *Une suite $(x_n)_n$ dans un epace de Banach X est dite base de Schauder pour X si pour tout $x \in X$, il existe une suite unique $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ dans $\mathbb{C}$, telle que*

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n x_n$$

Exemple La base standard $(e_n)_{n\geq 1}$ où $e_n = (0, 0, ..., 1, 0, 0, ..)$ est une base de Schauder de l'espace $\ell_p, 1 \leq p < \infty$.

Remarque On verra plus tard qu'il existe des espaces de Hilbert non séparables.

1.4 Exercices

Exercice 1.4.1.

a. Montrer que les applications suivantes de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ sont des normes sur $\mathbb{C}^n$:

$$\|x\|_p := (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} \ \ (1 \leq p < \infty); \ \ \|x\|_\infty := \sup_{1\leq k\leq n} |x_k| \quad \text{où } x = (x_k)_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$$

N.B. Utiliser l'inégalité de Minkowski

$$(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{k=1}^{n} a_k^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{n} b_k^p)^{\frac{1}{p}}; \ \ a_k, b_k \geq 0, \ \ p \in [1, +\infty[$$

b. Montrer que ces normes sont équivalentes dans $\mathbb{C}^n$.

Exercice 1.4.2.

Soit $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur un intervalle compact $[a,b]$, $(a < b)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On le munit des applications suivantes

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\, dt; \ \ \|f\|_2 := (\int_a^b [f(t)]^2\, dt)^{\frac{1}{2}} \ \text{ et } \ \|f\|_\infty := \max_{a\leq t\leq b} |f(t)|, \ \ (f \in E)$$

- Montrer que ces applications définissent des normes sur E.

- Montrer qu'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $f \in E$:

$$\|f\|_1 \leq C_1 \|f\|_2 \leq C_2 \|f\|_\infty$$

- Ces normes sont-elles équivalentes sur E ? (Utiliser la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ où $f_n(t) = t^n$, $t \in [0,1]$).

Exercice 1.4.3.

Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On le munit de la norme $\|.\|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$$

- Montrer que $(\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Soit $\mathcal{F}$ le sous-espace de $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ formé des fonctions continues f telles que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer que $\mathcal{F}$ est fermé dans $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 1.4.4.

1. Soient $(\mathcal{E}, \|.\|_\mathcal{E})$, $(\mathcal{F}, \|.\|_\mathcal{F})$ deux espaces vectoriels normés. On suppose que $\mathcal{E}$ est de dimension finie.

- Montrer que toute application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ est continue.

2. Soit K une fonction continue sur $[0,1]\times[0,1]$. Considérons l'application

$$\begin{aligned} A\colon \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) &\to \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \\ u &\mapsto Au \end{aligned}$$

où

$$Au(x) = \int_0^1 K(x,y)u(y)dy, \quad x\in[0,1]$$

Montrer que A définit une application linéaire continue sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$, et que $\|A\| \leq \|K\|_\infty$.

Chapitre 2

Espaces des applications linéaires continues

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1. *Une application linéaire $T : X \to Y$ est continue en un point $x_0 \in X$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in X : (\|x - x_0\|_X < \delta) \Rightarrow (\|Tx - Tx_0\|_Y < \varepsilon)$$

. $T : X \to Y$ est dite continue si elle est continue en tout point $x_0 \in X$.

Définition 2.2. *Une application linéaire $T : X \to Y$ est dite bornée si*

$$\sup_{x \in X} \|Tx\| < +\infty$$

Proposition 2.1. *[2] Soit $T : X \to Y$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *T est continu.*
2. *T est continu en un point quelconque de X.*
3. *T est borné.*

4. $\exists c > 0 / \forall x \in X : \|Tx\| \leq c \|x\|$

Définition 2.3. *Soient X et Y des espace vectoriels normés. On note $\mathcal{L}(X,Y)$ à l'espace des applications linéaires continues de X dans Y.*

Théorème 2.1. *L'ensemble $\mathcal{L}(X,Y)$ est un espace vectoriel normé, avec la norme*

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| \tag{2.1}$$

pour tout $u \in \mathcal{L}(X,Y)$, et l'on a dans ce cas

$$\|u(x)\| \leq \|u\|\|x\| \tag{2.2}$$

Preuve. Montrons d'abord que $\mathcal{L}(X,Y)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
i. Soient $u_1, u_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$. On a

$$(u_1 + u_2)(x) = u_1(x) + u_2(x), x \in X$$

On vérifie facilement que $u_1 + u_2$ est linéaire, et de plus, on a pour tout $x, x \in X$, et en utilisant (2.2)

$$\begin{aligned} \|(u_1+u_2)(x)\| = \|u_1(x) + u_2(x)\| &\leq \|u_1(x)\| + \|u_2(x)\| \\ &\leq \|u_1\|\|x\|\|u_2\|\|x\| \\ &\leq (\|u_1\| + \|u_2\|)\|x\| \end{aligned}$$

Ce qui montre que $u_1 + u_2$ est continue. D'où, $(u_1 + u_2) \in \mathcal{L}(X,Y)$ et

$$\|u_1 + u_2\| \leq \|u_1\| + \|u_2\| \tag{2.3}$$

. L'élément neutre dans $\mathcal{L}(X,Y)$ est l'application nulle $f \equiv 0$.
. Pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, et $u \in \mathcal{L}(X,Y)$, on pose

$$(\lambda u)(x) = \lambda u(x), x \in X$$

Alors, l'application λu est linéaire et continue, car pour tout $x, x \in X$

$$\|(\lambda u)(x)\| = |\lambda|\|u(x)\| \leq |\lambda\|u\|\|x\|$$

D'où, $\lambda u \in \mathcal{L}(X, Y)$, et de plus, on a :

$$\|\lambda u\| = \sup_{\|x\|=1} \|(\lambda u)(x)\| = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

Donc,

$$\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\| \tag{2.4}$$

on a donc défini une opération interne $(+)$ et une autre externe $(.)$ sur l'espace $\mathcal{L}(X, Y)$. Il est facile de montrer que $(\mathcal{L}(X, Y), +, .)$ est espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. De plus, comme

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

est évidente, et en vertu des relations (2.3) et (2.4), il s'ensuit que l'application $\|.\|$ définie par (2.1) est une norme sur $\mathcal{L}(X, Y)$, et que $(\mathcal{L}(X, Y), \|.\|)$ est donc un espace vectoriel normé. ◄

De plus, si $u \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $v \in \mathcal{L}(Y, Z)$ où Z est un espace vectoriel normé, alors pour tout $x, x \in X$:

$$\|(v \circ u)(x)\| = \|v(u(x))\| \leq \|v\|\|u(x)\| \leq \|v\|\|u\|\|x\|$$

car u et v sont continues. Par suite,

$$\|(v \circ u)\| \leq \|v\|\|u\| \tag{2.5}$$

Soit $(A_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}(X, Y)$, et soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Définition 2.4. *La suite $(A_n)_n$ est dite simplement convergente vers A, si*

$$\forall x \in X : \lim_{n \to +\infty} A_n x = Ax$$

Définition 2.5. *$(A_n)_n$ est dite uniformément convergente vers A si :*

$$\lim_{n\to+\infty}\|A_n - A\| = 0$$

La norme étant définie au sens de celle de $\mathcal{L}(X,Y)$.

Proposition 2.2. *Si $(A_n)_n$ converge uniformément vers A dans $\mathcal{L}(X,Y)$, alors $(A_n)_n$ converge simplement vers A.*

Preuve. Pour tout $x, x \in X$:

$$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \leq \|A_n - A\|\|x\| \to 0, (n \to +\infty)$$

◀

Proposition 2.3. *Soient $(X, \|.\|_1)$ et $(Y, \|.\|_2)$ des espaces vectoriels normés. Si Y est de Banach, alors $\mathcal{L}(X,Y)$ l'est également.*

Preuve. Soit $(A_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(X,Y)$. Alors,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}/\forall n, m \in \mathbb{N} : n > N_0 \wedge m > N_0 \Rightarrow \|A_n - A_m\| \leq \varepsilon$$

Soit $x \in X$ fixé. On a pour tous $n, m \in \mathbb{N}, n > N_0 \wedge m > N_0$:

$$\|A_n(x) - A_m(x)\| \leq \|A_n - A_m\|\|x\| \to 0, (n \to +\infty)$$

Ce qui montre que la suite $A_n(x)$ est de Cauchy dans Y pour tout x dans X. Comme Y est complet, $A_n(x)$ converge dans Y pour tout $x \in X$. Soit donc

$$Ax = \lim_{n\to+\infty} A_n(x), x \in X$$

Soient maintenant $x, y \in X$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned} A(\lambda x + y) = \lim_{n\to+\infty} A_n(\lambda x + y) &= \lim_{n\to+\infty}(\lambda A_n x + A_n y) \\ &= \lambda \lim_{n\to+\infty} A_n x + \lim_{n\to+\infty} A_n y \\ &= \lambda Ax + Ay \end{aligned}$$

et A est donc linéaire. De plus, par le critère de Cauchy, il existe N_0 tel que :

$$n > N_0 \wedge m > N_0 \Rightarrow \|A_n - A_m\| \leq \varepsilon$$

D'où, pour tous $n, m \in \mathbb{N}/n > N_0 \wedge m > N_0$

$$\|A_n(x) - A_m(x)\| \leq \varepsilon\|x\| \tag{2.6}$$

et donc pour tout $x \in X$:

$$\|A_m(x)\| \leq \|A_n(x)\| + \varepsilon\|x\| \quad \leq \quad (\|A_n\| + \varepsilon)\|x\| \tag{2.7}$$

Fixons n et faisons tendre m vers $+\infty$ dans (2.7), on obtiendra

$$\|Ax\| \leq (\|A_n x + \varepsilon)\|x\|$$

et A est donc continue car A_n est bornée, $n \geq 1$. Par conséquent, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Montrons maintenant que $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = A$. Soit $n \geq N_0$ fixé, et soit $x \in X$ fixé. On fait tendre m vers $+\infty$ dans (2.6), on aura

$$\|Ax - A_n x\| \leq \varepsilon\|x$$

Donc,

$$\|A - A_n\| \leq \varepsilon$$

(c.q.f.d) ◀

2.2 Suite bornée d'applications linéaires continues

Rappel. Soit X un espace vectoriel normé. Une partie A de X est dite bornée si A est contenue dans une boule, i.e., l'ensemble

$$\{\|x\|, x \in X\}$$

est majoré. On a donc le résultat suivant

Théorème 2.2. *Soit* $(X, \|.\|_1)$ *un espace vectoriel normé, et soit* E *une partie dense dans* X. *Soit* $(Y, \|.\|_2)$ *un espace de Banach. Si* $(A_n)_n$ *est une suite bornée dans* $\mathcal{L}(X, Y)$, *convergeant simplement sur* E, *alors* $(A_n)_n$ *converge simplement sur* X *vers un unique opérateur* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Preuve. Soit $M > 0$ tel que $\|A_n\| \leq M, n \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$. L'ensemble E étant dense dans X. Alors,

$$\forall x \in X, \exists y \in E : \|x - y\| \leq \frac{\varepsilon}{3M} \tag{2.8}$$

De plus, la suite $(A_n(x))_n$ converge pour tout $x \in E$. D'où,

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall n, m \geq N_0 : \|A_n y - A_m y\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.9}$$

Des inégalités (2.8)et (2.9), on obtiendra pour tous $x \in X,\ n, m \geq N_0$ que

$$\begin{aligned} \|A_n x - A_m x\| &\leq \|A_n x - A_n y\| + \|A_n y - A_m y\| + \|A_m y - A_m x\| \\ &\leq \|A_n\| \|x - y\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|A_m\| \|x - y\| = \varepsilon \end{aligned}$$

La suite $(A_n x)_n$ est alors de Cauchy dans Y, pour tout $x \in X$. Elle est donc convergente dans l'espace complet Y. Soit donc

$$Ax = \lim_{n \to +\infty} A_n(x), x \in X$$

Montrons que $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

i. Soient $x, y \in X$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned} A(\lambda x + y) = \lim_{n \to +\infty} A_n(\lambda x + y) &= \lim_{n \to +\infty} (\lambda A_n x + A_n y) \\ &= \lambda \lim_{n \to +\infty} A_n x + \lim_{n \to +\infty} A_n y \\ &= \lambda A x + A y \end{aligned}$$

A est donc linéaire. De plus, pour tout $x \in X$:

$$\|A_n x\| \leq M \|x\|, n \in \mathbb{N}$$

D'où, et en passant à la limite quand $n \to +\infty$, on aura pour tout $x \in X$:

$$\|Ax\| \leq M\|x\|$$

et A est donc continue. ◀

2.3 Dual topologique

Définition 2.6. *Soit X un espace vectoriel normé. On appelle dual de X, et on le note X', l'espace des formes linéaires continues sur X, i.e., l'espace des applications linéaires continues de X dans $\mathbb{C}$.*

On a donc

$$X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{C}) = \{f : X \to \mathbb{C},\ f \text{ linéaire et continue }\}$$

D'après les résultats précédents, X' est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$, avec la norme

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|u(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |u(x)|$$

De plus, et par la Proposition (2.3), X' est un espace de Banach.

Exemples Le résultat suivant discutera les duals des espaces ℓ_p, $(1 \leq p \leq \infty)$ définis dans le paragraphe précédent. On a donc

Théorème 2.3. *Soit $f \in \ell'_p$, $(1 \leq p < \infty)$. Alors, il existe un vecteur unique $\eta = (\eta_1, \eta_2, .., \eta_k, ..)$ dans ℓ_q avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ($q = \infty$ quand $p = 1$) tel que pour tout $x = (x_1, x_2, .., x_k, ..) \in \ell_p$, on a :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \eta_k \tag{2.10}$$

De plus, $\|f\| = \|\eta\|$ et $\eta = (f(e_k))_{k=1}^{+\infty}$ où $(e_k)_{k=1}^{+\infty}$ est la base standard de ℓ_p. Inversement, pour tout $\eta = (\eta_k)_{k=1}^{+\infty} \in \ell_q$, la relation (2.10) définit une forme linéaire

$f \in \ell'_p$.
Autrement dit, $\ell'_p = \ell_q$ *pour* $1 \le p < \infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Preuve. D'abord, on fait la preuve pour $p = 1$.
Soit donc $f \in \ell'_1$, et soit $\eta_k = f(e_k), k \geq 1$. Donc, $\eta_k \in \mathbb{C}, k \geq 1$. Pour $x = (x_1, x_2, .., x_k, ..) \in \ell_1$, on obtient :

$$f(x) = f(\sum_{k=0}^{+\infty} x_k e_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k f(e_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \eta_k$$

et $\eta = (\eta_k)_{k=1}^{+\infty} \in \ell_\infty$ car

$$\|\eta\|_\infty = \sup_{k\geq 1} |x_k \eta_k| \leq \|f\| \tag{2.11}$$

De même, on a

$$|f(x)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k \eta_k| \leq \|\eta\|_\infty \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k| = \|\eta\|_\infty \|x\|_1 \tag{2.12}$$

D'où,

$$\|f\| \leq \|\eta\|_\infty \tag{2.13}$$

De (2.11)et (2.13), on obtient que $\|f\| = \|\eta\|_\infty$

L'unicité. S'il existe $\beta = (\beta_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k \beta_k|$$

pour tout $x = (x_k)_{k=1}^{+\infty} \in \ell_1$, alors $f(e_j) = \beta_j, j \geq 1$. D'où, $\eta = \beta$.
L'inverse. L'inégalité (2.12) implique que la forme linéaire f définie par (2.10) est un élément de ℓ'_1. ◀

Remarque Le Théorème 2.3 montre que l'espace ℓ'_p est identifié à l'espace ℓ_q dans le sens qu'il existe un isomorphisme isométrique $I : \ell'_p \to \ell_q$ défini par $I(f) = (f(e_k))_{k=1}^{+\infty}$ pour tout $f \in \ell'_p$.
Pour $\eta = (\eta_k)_{k=1}^{+\infty} \in \ell_q : I^{-1}\eta = g \in \ell'_p$ où $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \eta_k$.

Pour $p > 1$, on a besoin aux Lemmes suivants :

Lemme 2.1. ***(Inégalité de Young)*** *Soient* $p, q \in [1, +\infty[$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, et soient* $a, b \geq 0$*. Alors :*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Preuve. La fonction $x \mapsto \exp(x)$ étant convexe. Donc, pour tous $0 \leq t \leq 1$ et $x, y \in \mathbb{R}$:

$$e^{tx+(1-t)y} \leq te^x + (1-t)e^y$$

En prenant x, y tels que $x = p \ln a$, $y = q \ln b$ et $t = \frac{1}{p}$, on aura le résultat. ◀

On adopte les règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ où

$$x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = (+\infty), (0 < x \leq +\infty) \tag{2.14}$$

et

$$0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 = 0 \tag{2.15}$$

on a alors :

Corollaire 2.1. ***(Inégalité de Hölder)*** *Soient* $(a_i)_{i=1}^n$ *et* $(b_i)_{i=1}^n$ *des familles de nombres réels positifs. Alors, pour tous* p, q *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et* $1 \leq p \leq +\infty$ *:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq (\sum_{k=1}^{n} a_k^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} b_k^q)^{\frac{1}{q}}$$

Preuve. Posons $A = (\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p)^{\frac{1}{p}}$ et $B = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^p)^{\frac{1}{p}}$. On applique le Lemme 2.1 pour $x = \frac{a_k}{A}$, et $y = \frac{b_k}{B}$, pour tout $1 \leq k \leq n$, on aura :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{AB} \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^p}{A^p} + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^p}{B^q} = 1$$

Donc,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq AB$$

◀

Corollaire 2.2. ***(Inégalité de Minkowski)*** *Pour toutes familles* $(a_i)_{i=1}^n$ *et* $(b_i)_{i=1}^n$ *dans* $\mathbb{R}_+$, *et tout* $p \geq 1$ *, on a :*

$$(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{k=1}^{n} a_k^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{n} b_k^p)^{\frac{1}{p}}$$

Preuve. Pour $p = 1$, c'est l'inégalité triangulaire pour la norme $\|.\|_1$.
Pour $p > 1$, on pose $q = \frac{p}{p-1}$, et on applique l'inégalité de Hölder sur a_k et $(a_k + b_k)^{p-1}$ d'un côté, et sur b_k et $(a_k + b_k)^{p-1}$ d'autre côté, puis on additionne :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p &= \sum_{k=1}^{n}[a_k(a_k+b_k)^{p-1} + b_k(a_k+b_k)^{p-1}] \\
&\leq (\sum_{k=1}^{n} a_k^p)^{\frac{1}{p}}[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{(p-1)q}]^{\frac{1}{q}} + (\sum_{k=1}^{n} b_k^p)^{\frac{1}{p}}[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{(p-1)q}]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq [(\sum_{k=1}^{n} a_k^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{n} b_k^p)^{\frac{1}{p}}][\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{(p-1)q}]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

D'où, et du fait que $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ et $(p-1)q = p$, on conclut que :

$$(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p)^{1-(1-\frac{1}{p})} \leq (\sum_{k=1}^{n} a_k^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{n} b_k^p)^{\frac{1}{p}}$$

◀

Remarques 1. Pour $p = q = 2$, l'inégalité de Hölder coïncide avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=1}^{n} b_k^2)^{\frac{1}{2}}$$

2. Vu les règles de calcul(2.14) et (2.15), et par le principe de prolongement des identités, les résultats précédents demeurent vraies pour $k \in I$ avec I un ensemble dénombrable et infini.
3. Si $x = (x_k)_{k\in I}$ et $y = (y_k)_{k\in I}$ sont deux vecteurs dans ℓ_p, alors l'inégalité de Minkowski s'écrit :

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

et comme $\|\lambda x\|_p = |\lambda|\|x\|_p$, $\lambda \in \mathbb{C}$, alors, les espaces ℓ_p sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{F}(I, \mathbb{C})$, et que $\|.\|$ définit une norme sur ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$.

4. De même, l'inégalité de Hölder s'écrit pour p, q avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

Revenons maintenant à la preuve du Théorème 2.3 pour $p > 1$:
Par l'inégalité de Hölder, il en résulte que :

$$|f(x)| \leq \|x\|_p \|\eta\|_q$$

Soit $\eta = (\eta_k)_{k=1}^{+\infty} = (f(e_k))_{k=1}^{+\infty}$. Alors,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \eta_k = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k f(e_k)$$

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Choisissons $h = (h_k)_{k \geq 1} \in \ell_p$ comme suit

$$h_k = \begin{cases} |\eta_k|^{q-1} sign(\overline{\eta_k}), & 1 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

où $sign(\lambda) = \frac{\lambda}{|\lambda|}$, $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$ et $sign(0) = 0$. Pour $1 \leq k \leq n$, on aura :

$$\eta_k h_k = |\eta_k|^q = |h_k|^p$$

et donc

$$\|h|_p = (\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q)^{\frac{1}{p}}$$

et

$$f(h) = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q$$

Or, comme f est continue sur ℓ_p :

$$|f(h)| \leq \|f\| \|h\|_p$$

D'où,

$$\sum_{k=1}^{n} |h_k|^q \leq \|f\| (\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q)^{\frac{1}{p}}$$

Il s'ensuit que

$$(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|$$

i.e., $\|\eta\|_q \leq \|f\|$. D'où, $\eta \in \ell_q$.

Inversement, si $\eta = (\eta_k)_{k=1}^{+\infty}$ est un élément dans ℓ_q, on définit $f \in \ell'_p$ par (2.10), pour tout $x = (x_k)_{x=1}^{+\infty} \in \ell_p$.
Par l'inégalité de Hölder, on aura pour tout $x \in \ell_p$:

$$|f(x)| \leq (\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q)^{\frac{1}{q}} (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} = \|\eta\|_q \|x\|_p$$

ce qui montre que $\|f\| \leq \|\eta\|_q$.
Comme $\eta_k = f(e_k)$, il s'ensuit de ce qui précède que $\|\eta\|_q \leq \|f\|$. ◀

Corollaire 2.3. *Les espaces* ℓ_p, $(1 \leq p \leq +\infty)$ *sont complets.*

Preuve. Pour $1 < p \leq +\infty$: Conséquence directe du Théorème 2.3 et la Proposition 2.3.
Pour $p = 1$: L'espace ℓ_1 est le dual du sous-espace $\mathcal{C}_0$ de l'espace ℓ_∞, constitué des suites complexes qui convergent vers 0. (Voir TD, Exercice 2.5.2) ◀

Remarque (Très importante) Le Théorème 2.3 n'est pas valable pour $p = \infty$, sinon ça va contredire le résultat suivant que l'on démontrera ultérieurement

Théorème 2.4. *Soit X un espace vectoriel normé. Si X' est séparable, alors X est aussi séparable.*

En effet, l'espace ℓ_∞ n'est pas séparable, (Paragraphe 1.3, Exemple 2).
Autrement dit, $\ell'_1 = \ell_\infty$ et $\ell'_\infty \neq \ell_1$.

2.4 Espaces $L_p(\Omega)$

Définition 2.7. *Soit Ω un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$, et soit $1 \leq p < +\infty$. On pose*

$$L_p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \textit{ mesurable telle que } \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty\}$$

De même,

$$L_\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \ \textit{ mesurable telle que } \sup_{x\in\Omega}|f(x)|^p < +\infty\}$$

On munit ces espaces des normes $\|.\|_p$ et $\|.\|_\infty$ où

$$\|f\|_p = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}, f \in \ell_p \tag{2.16}$$

et

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega}|f(x)|, f \in \ell_\infty \tag{2.17}$$

Proposition 2.4. *$L_p(\Omega)$ est espace vectoriel pour tout p, $1 \leq p \leq +\infty$.*

Preuve. 1. La preuve est évidente pour $p = 1$ et $p = \infty$.
2. Si $(1 < p < +\infty)$: Pour tous $a, b \geq 0$, on a $(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$, D'où,

$$|(f + g)(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

D'où, $(f + g) \in L_p(\Omega)$. D'autre part, on a

$$\|f + g\|_p^p \leq \int_\Omega |f + g|^{p-1}|f + g| \leq \int_\Omega |f + g|^{p-1}|f| + \int_\Omega |f + g|^{p-1}|g|$$

Or, $|f + g|^{p-1} \in L_q(\Omega)$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Donc, et par l'inégalité de Hölder, on obtiendra

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f + g\|_p^{p-1}(\|f\|_p + \|g\|_p)$$

Finalement

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

◄

Proposition 2.5. *L'espace $L_p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ est normé avec les normes (2.16) et (2.17) citées ci-dessus.*

Pour la preuve, on utilise directement les inégalités de Hölder et de Minkowski dans $L_p(\Omega)$ comme suit

Lemme 2.2. *Soient* $p, q \in [1, +\infty]$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *et soient* $f \in L_p(\Omega)$, $g \in L_q(\Omega)$. *Alors,* $fg \in L_1(\Omega)$, *et l'on a*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Lemme 2.3. *Soient* $p, q \in [1, +\infty]$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *et soient* $f, g \in L_p(\Omega)$. *Alors,* $f + g \in L_p(\Omega)$, *et l'on a*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

On a donc le résultat suivant

Théorème 2.5. *Pour tout* $F \in (L_p(\Omega))'$, $1 \leq p < +\infty$, *il correspond* $g \in L_q(\Omega)$ *unique avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *et* $q = +\infty$ *si* $p = 1$, *tel que*

$$F(f) = F_g(f) = \int_\Omega f(t)g(t)dt \tag{2.18}$$

pour tout $f \in L_p(\Omega)$. *De plus,* $\|F\| = \|g\|_q$.
Inversement, si $g \in L_q(\Omega)$, *la forme linéaire* F *définie par (2.18) est un élément de* $(L_p(\Omega))'$.

Preuve. Soit $f \in L_p(\Omega)$. Par l'inégalité de Hölder,

$$|F(f)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

La forme linéaire F est donc continue et

$$\|F_g\| \leq \|g\|_q \tag{2.19}$$

On peut vérifier que pour

$$f = |g|^{\frac{p}{q}} e^{iArg(g)} \in L_p(\Omega)$$

on a

$$\|g\|_q \leq \|F_g\| \tag{2.20}$$

De (2.19) et (2.20),

$$\|F\| = \|g\|_q$$

Comme dans le Théorème 2.3, l'application $g \mapsto F_g$ de $L_q(\Omega)$ dans $(L_p(\Omega))'$, et définie par (2.18) est un isomorphisme isométrique. ◄

2.5 Exercices

Exercice 2.5.1.

a. Soit X un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$, et soit f une forme linéaire sur X. Montrer que f est identiquement nulle ou surjective.

b. Montrer que si f et g sont deux formes linéaires non nulles sur X, alors $(\ker f = \ker g)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$ tel que $g = \lambda f$.

Exercice 2.5.2.

Considérons les espaces vectoriels normés

$$\ell_1 := \left\{ x = (x_n)_n \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty \right\}$$

et

$$\ell_\infty := \left\{ x = (x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C} : \sup_{n\geq 1} |x_n| < +\infty \right\}$$

munis des normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ où

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \sup_{n\geq 1} |x_n|\,,\, x = (x_n)_n \subset \mathbb{C}$$

respectivement. On note $\mathcal{C}_0$ le sous-espace de ℓ_∞ constitué des suites qui convergent vers 0, et $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang, i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &= \left\{ x = (x_n)_n \subset \ell_\infty : \lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \right\} \\ \mathcal{P} &= \{ x = (x_n)_n \subset \mathbb{C} \,,\, \exists N_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq N_0 : x_n = 0 \} \end{aligned}$$

1. Vérifier les inclusions $\mathcal{P} \subset \ell_1 \subset \mathcal{C}_0 \subset \ell_\infty$.
2. Comparer sur ℓ_1 la norme $\|.\|_1$ avec la restriction de $\|x\|_\infty$ de ℓ_∞ à ℓ_1.
3. Montrer que $\mathcal{P}$ est une partie dense de $(\ell_1, \|.\|_1)$.
4. Montrer que $\mathcal{P}$ est une partie dense de $(\mathcal{C}_0, \|.\|_\infty)$.

5. Montrer que $\mathcal{P}$ n'est pas une partie dense de $(\ell_\infty, \|.\|_\infty)$. (Utiliser la suite constante $x_n = 1, n \geq 1$)

6. Montrer que l'application $\Phi \colon \mathcal{C}_0^{'} \to \ell_1$ définie par $f \mapsto \Phi(f) = (f(e_k))_{k\geq 1}$ où $e_n = (\delta_{nk})_{k\geq 1}$, $\delta_{nk} = \begin{cases} 1, & \text{si } n = k \\ 0, & \text{si } n \neq k \end{cases}$ est un isomprphisme isométrique. Que peut-on déduire pour l'espace ℓ_1 ?

Exercice 2.5.3.

(★★) a. Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ dont la mesure de Lebesgue est finie, i.e. $\mu(\Omega) < +\infty$, et soit pour tout $p, 1 \leq p < +\infty$, l'espace vectoriel normé

$$L_p(\Omega) = \left\{ f \colon \Omega \to \mathbb{R}, \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty \right\}$$

et $L_\infty(\Omega)$ se note à l'espace des fonctions essentiellement bornées sur Ω , i.e.

$$L_\infty(\Omega) = \left\{ f \colon \Omega \to \mathbb{R}, \sup_{x\in\Omega} |f(x)| < +\infty \right\}$$

munis des normes $\|f\|_p = (\int_\Omega |f(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}}$, $(1 \leq p < +\infty)$ et $\|.\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$ respectivement.

- Montrer que $L_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ si $q < p$. En particulier, on a pour $1 < p < 2 < q$:

$$L_\infty(\Omega) \subset L_q(\Omega) \subset L_2(\Omega) \subset L_p(\Omega) \subset L_1(\Omega)$$

(★★) b. Soit $E = L_p([0,1])$, $(1 \leq p < +\infty)$, et soit l'application $A \colon E \to E$, $u \mapsto Au$ où

$$Au(x) = xu(x), \quad x \in [0,1]$$

Montrer que $A \in \mathcal{L}(E)$, puis donner un majorant de sa norme.

Chapitre 3

Complétion d'un espace métrique et d'un espace vectoriel normé

3.1 Complétion d'un espace métrique

Définition 3.1. ***(Rappel)*** *Une suite $(x_n)_n$ d'un espace métrique (E, d) est dite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}/\forall n, m \in \mathbb{N} : (n > N \wedge M > n) \Rightarrow (d(x_n, x_m) < \varepsilon)$$

Définition 3.2. *Si toute suite de Cauchy dans un espace métrique (E, d) est convergente dans E, l'espace E est dit complet.*

Définition 3.3. *Un espace métrique complet (F, δ) est dit complété d'un autre espace métrique (E, d), si :*

a. $E \subset F$.

b. E *est partout dense dans* F, *i.e.,* $\overline{E} = F$.

Exemple. L'espace des nombres réels $(\mathbb{R}, |.|)$ est le complété de l'espace métrique $(\mathbb{Q}, |.|)$ des nombres rationnels.

On a donc le résultat suivant

Théorème 3.1. *Tout espace métrique (E, d) admet un complété (F, δ) unique à une isométrie près, i.e., s'il existe deux espaces métriques (F_1, δ_1) et (F_2, δ_2) complétés de (E, d), alors (F_1, δ_1) est isométrique à (F_2, δ_2).*

Preuve. Commençons par l'unicité. Cherchons une isométrie $\varphi : F_1 \to F_2$ telle que :

1. $\varphi(x) = x, x \in E.$
2. Si $x^{**} = \varphi(x^*)$ et $y^{**} = \varphi(y^*)$, alors $\delta_1(x^*, y^*) = \delta_2(x^{**}, y^{**})$, pour tous $x^*, y^* \in F_1, x^{**}, y^{**} \in F_2.$

Soit $x^* \in F_1$. Alors, par définition du complété, $\exists (x_n)_n \subset E : \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$. Or, $(x_n) \subset F_2$ aussi. Comme F_2 est complet, (x_n) converge aussi dans F_2 vers un élément x^{**}. Posons $\varphi(x^*) = x^{**}$. Alors, φ est une isométrie de F_1 dans F_2. En effet, par construction, $\varphi(x) = x, x \in E$. D'autre part, soit $(x_n) \to x^*$ dans F_1, et $(x_n) \to x^{**}$ dans F_2, et soit $(y_n) \to y^*$ dans F_1, et $(y_n) \to y^{**}$ dans F_2. Comme la distance est une fonction continue, on aura

$$\delta_1(x^*, y^*) = \lim_{n\to+\infty} \delta_1(x_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n)$$

De même,

$$\delta_2(x^{**}, y^{**}) = \lim_{n\to+\infty} \delta_2(x_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n)$$

Par suite,

$$\delta_1(x^*, y^*) = \delta_2(x^{**}, y^{**})$$

et φ est donc une isométrie de F_1 dans F_2. $\square$

L'existence. Rappelons d'abord la notion d'équivalence des suites :

Définition 3.4. *Deux suites de Cauchy $(x_n)_n)$ et $(y_n)_n)$ d'un espace métrique (E, d) sont dites équivalentes, et l'on note $(x_n)_n \simeq (y_n)_n$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0$.*

Par définition, il est clair que la notion d'équivalence est justifiée. Il en résulte que toutes les suites de Cauchy qu'on peut former avec les points de E sont partagées en classes d'équivalences.

- Construisons maintenant **notre espace** (F, δ).
Admettons comme points de F, toutes les classes des suites de Cauchy équivalentes, i.e.,

$$F = \{[x_n], (x_n)_n \subset E\}$$

où,

$$[x_n] = \{(x'_n)_n \subset E : (x'_n)_n \simeq (x_n)_n\}$$

Et on définit sur F la distance δ entre deux éléments $x^* = [x_n], y^* = [y_n]$ de F où $(x_n)_n, (y_n)_n \subset E$ comme suit :
Choisissons dans chacune des classes $[x_n], y = [y_n]$ un représentant, i.e., une suite de Cauchy. Soient $(x_n)_n, (y_n)_n$ ces suites respectivement. Posons

$$\delta(x_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n)$$

et montrons que cette définition est correcte, c-à-d, que la suite existe et qu'elle ne dépend pas du choix de $(x_n)_n \in x^*$ et de $(y_n)_n \in y^*$. Soient $(x_n)_n, (y_n)_n$ deux suites de Cauchy dans E. En vertu de l'inégalité

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) \tag{3.1}$$

On a :

$$\|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| < \varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et tous $n, m \in \mathbb{N}/n, m > N_0$.
Ainsi, la suite réelle $s_n = d(x_n, y_n)$ est de Cauchy. Elle est donc convergente, et sa limite $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ ne dépend pas du choix de $(x_n)_n \in x^*$ et de $(y_n)_n \in y^*$. En effet, soient $(x_n)_n, (x'_n)_n \in x^*$ et de $(y_n)_n, (y'_n)_n \in y^*$. Un calcul analogue à (3.1) donne

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n)$$

Comme $(x_n)_n \simeq (x'_n)_n$ et $(y_n)_n \simeq (y'_n)_n$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty} d(x'_n, y'_n)$$

$\square$

- Montrons maintenant que δ est une distance sur F :

1. Pour tous $x^*, y^* \in F$:

$$\delta(x^*, y^*) = 0 = d(x_n, y_n) \Rightarrow (x_n)_n \simeq (y_n)_n \Rightarrow x^* = y^*$$

2. $\delta(x^*, y^*) = \delta(y^*, x^*)$, $x^*, y^* \in F$.
3. Comme l'inégalité triangulaire est vérifiée dans E, on aura pour tous $(x_n), (y_n), (z_n)$ dans E :

$$d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$$

En passant à la limite, on obtiendra

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, z_n) \leq \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n\to+\infty} d(y_n, z_n)$$

D'où,

$$\delta(x^*, z^*) \leq \delta(x^*, y^*) + \delta(y^*, z^*)$$

$\square$

- E peut être considéré comme un sous-espace de F : Soit $x \in E$. Il correspond à x une classe d'équivalence $[x_n]$ de suites de Cauchy équivalentes qui est l'ensemble des suites convergeant vers x. Cette classe n'est pas vide, car $x_n = x, n \geq 1$ appartient à cette classe. D'où, si $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$ et $y = \lim_{n\to+\infty} y_n$, alors :

$$d(x, y) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n)$$

Donc, l'application $\psi : x \mapsto x^*$ où $x^* = [x_n]$, est isométrique de E dans F, et est injective car si $x \neq y$, on a clairement $\psi(x) = x^* \neq \psi(y) = y^*$ (Une suite qui converge vers x ne peut pas converger vers y car $x \neq y$). Donc, on peut, par ψ, identifier E avec $\psi(E) \subset F$ avec lequel il est en bijection. □

- E est partout dense dans F :

Soit $x^* \in F$, et soit $\varepsilon > 0$. choisissons une suite de Cauchy $(x_n)_n$ représentant de x^*. Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ pour tous $n, m > N_0$. On a donc

$$\delta(x_n, x^*) = \lim_{m \to +\infty} d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

pour tout $n > N_0$.(en fixant n et faisant tendre m vers $+\infty$). Par conséquent, $\overline{E} = F$. □

- Reste à montrer que F est complet :

Soit $(x_1^*, x_1^*, .., x_n^*, ..)$ une suite de Cauchy dans F. Comme E est dense dans F, il existe une suite équivalente $(x_1, x_2, .., x_n, ..)$ dans E. On peut prendre (x_n) dans E telle que $\delta(x_n, x_n^*) < \frac{1}{n}$. La suite ainsi définie est de Cauchy dans E, et par définition, elle converge vers un point $x^* \in F$, x^* est l'élément défini par la suite $(x_n)_n$ elle même. Mais alors, la suite $(x_n^*)_n$ converge aussi vers x^* , car

$$\delta(x_n^*, x^*) \leq d(x_n^*, x_n) + d(x_n, x^*) < \frac{1}{n} + \varepsilon' = \varepsilon, (n > N_0, \varepsilon > 0)$$

◄

3.2 Complété d'un espace vectoriel normé

Théorème 3.2. *[8] Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$, et soit d la distance associée à sa norme, i.e., $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in E$. Soit (F, δ) l'espace métrique complété de (E, d). Alors, il existe sur F, une structure unique d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et une norme $\|.\|_F$, telle que $\|x^* - y^*\|_F = \delta(x^*, y^*)$, $x^*, y^* \in F$.*

De plus, $(E, \|.\|)_E)$ est partout dense dans l'espace de Banach $(F, \|.\|)_F)$.

Définition 3.5. *L'espace de Banach $(F, \|.\|)_F)$ ainsi défini, est dit complété de l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|)_E)$.*

Exemples. 1. L'espace de Banach complété de l'espace $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_p = (\int_0^1 |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < +\infty$ est l'espace de Lebesgue $F = L_p([0, 1], \mathbb{R})$. Ici, l'espace E est un sous-espace de F au sens de l'application

$$E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \ni f \mapsto [f] \in F = L_p([0, 1], \mathbb{R})$$

où

$$[f] = \{g \in F = L_p([0, 1], \mathbb{R}) : f \simeq g, \text{ i.e., } f - g = 0 \text{ p.p. sur } [0, 1]\}$$

2. Soit $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{m \to +\infty} f(t) = 0\}$, et soit $K(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à support compact K, i.e., $K(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\exists K \subset \mathbb{R}$ compact : $f(t) = 0, \forall t \notin K\}$. Alors, $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est le complété de $K(\mathbb{R})$ pour la norme uniforme. (TD, Exercice 3.3.1).

3.3 Exercices

Exercice 3.3.1.

On note $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telles que $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f(t) = 0$, et note $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact, i.e.

$$\mathcal{K}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continue } / \ \exists \mathcal{K} \subset \mathbb{R} \text{ compact } : \ f(t) = 0, \text{ pour tout } t, \ t \notin \mathcal{K}\}$$

Notre but est de montrer que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est le complété de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ pour la norme uniforme.

Partie I.

1. Montrer que $\mathcal{K}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$: L'espace vectoriel des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$).

3. Montrer que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est fermé dans l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, i.e., montrer que si $(f_n)_n$ est une suite dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ qui converge uniformément vers $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

4. En déduire que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est un espace de Banach. (Utiliser le fait que $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un espace de Banach pour la norme uniforme).

Partie II. Soit $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Considérons les fonctions

$$\varphi_n = \max(f, \frac{1}{n}), \ \psi_n = \max(-f, \frac{1}{n}) \text{ et } \quad f_n = \varphi_n - \psi_n, \ (n \geq 1)$$

1. Compléter le tableau suivant

	$\varphi_n(t)$	$\psi_n(t)$	$f_n(t)$	$\lvert f(t) - f_n(t\rvert$
$f(t) \geq \frac{1}{n}$				
$\frac{-1}{n} \leq f(t) \leq \frac{1}{n}$				
$f(t) \leq \frac{-1}{n}$				

2. Déduire du tableau que $\lim_{n \to +\infty} \|f - f_n\| = 0.$

3. Montrer que $f_n \in \mathcal{K}(\mathbb{R}), \ (n \geq 1)$. (Utiliser le tableau).

4. En déduire de II.1 et II.2 que $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ est partout dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Partie III. Déduire de tout ce qui précède que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est le complété de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ pour la norme uniforme.

Chapitre 4

Théorèmes fondamentaux de l'anaylse fonctionnelle

4.1 Théorème de Riesz

[1]

Théorème 4.1. *Soit X un espace vectoriel normé. La boule unité fermée de X est compacte si et seulement si X est de dimension finie.*

Preuve. ($\Leftarrow$) Si X est de dimension finie, alors la boule $\overline{B}(O,1)$ est compacte (Propriété de Borel-Heine).

Remarque Si $\dim X = +\infty$, la propriété précédente n'est pas vraie. En effet, Si $X = \mathbb{R}[X]$ avec la norme $\|P\| = \max\limits_{i`geq0}|a_i|$ où $P = \sum\limits_{k=1}^{n} a_i X^i \in X$, alors, la boule $\overline{B}(O,1)$ est fermée et bornée. Or, la suite $(X^n)_n$ de X vérifie

$$d(X^n, X^m) = \|X^n - X^m\| = 1, n \neq m \tag{4.1}$$

1. Frigyes Riesz, mathématicien hongrois, 1880-1956, l'un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle.

Donc, elle n'est pas de Cauchy pour n'importe quels entiers n, m. Elle n'admet donc aucune sous-suite convergente car tous les termes de la suite vérifient l'égalité (4.1) . Par conséquent, la boule $\overline{B}(O,1)$ n'est pas compacte dans X.

(($\Rightarrow$)) Comme $\overline{B}(O,1)$ est compacte, il existe $a_1, a_2, .., a_n$ dans $\overline{B}(O,1)$ tels que

$$\overline{B}(O,1) = \underset{1\leq i\leq n}{\cup} B(a_i, \frac{1}{2})$$

Notons $\mathcal{V}$ l'espace vectoriel engendré par $(a_i)_{i=1}^{n}$, et montrons que $\mathcal{V} = X$.
Par l'absurde, on suppose qu'il existe $b \in X$ tel que $b \notin \mathcal{V}$. L'espace $\mathcal{V}$ étant fermé, donc

$$d(b,\mathcal{V}) = \delta > 0 \tag{4.2}$$

Il existe donc $c \in \mathcal{V}$ tel que

$$\delta \leq \|b-c\| \leq \frac{3\delta}{2}$$

Soit $u = \frac{b-c}{\|b-c\|}$. Il existe $j, 1 \leq j \leq n$ tel que $\|u - a_j\| \leq \frac{1}{2}$ car $u \in \overline{B}(O,1)$.
D'autre part,

$$b = c + \|b-c\|u = c + \|b-c\|a_j + \|b-c\|(u-a_j)$$

où, $c + \|b-c\|a_j \in \mathcal{V}$ et

$$\|b-c\|\|u-a_j| \leq \frac{3\delta}{4}$$

Ce qui implique que $d(b,\mathcal{V}) \leq \frac{3\delta}{4}$. Contradiction avec (4.2) ◂

Exemple Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0,2\pi],\mathbb{C})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ où

$$\|f\|_\infty = \sup_{0\leq t\leq 2\pi} |f(t)|, f \in E$$

on considère la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$f_n(t) = e^{int}, n \geq 0, t \in [0,2\pi]$$

Montrons que E est dimension infinie.

Solution. La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ ainsi est un élément de la boule unité fermée $\overline{B}(O,1)$, et vérifie

$$|f_n(t)-f_m(t)|^2=|e^{int}-e^{imt}|^2=2-2\cos(n-m)t$$

D'où,

$$\|f_n-f_m\|_\infty=\sup_{0\leq t\leq 2\pi}|f_n(t)-f_m(t)|=\sup_{0\leq t\leq 2\pi}\sqrt{(2-2\cos(n-m)t}=2$$

Ce qui montre que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ n'admet donc aucune une suite extraire convergente. Par conséquent, la boule $\overline{B}(O,1)$ n'est pas compacte dans $E.$ Par le T'éoréme de Riesz, l'espace E est de dimension infinie.

4.2 Théorème de Hahn-Banach

Le Théorème de Hahn-Banach [4, 5] [2] est l'un des grands résultats fondamentaux de l'analyse mathématique.

Théorème 4.2. *[5] Soit X un espace vectoriel normé, et soit M un sous-espace vectoriel de X. Si f est une forme linéaire continue sur M, alors, il existe un prolongement de f en une forme linéaire $\widehat{f}$ continue sur tout X et telle que $\|f\| = \|\widehat{f}\|$.*

Pour la preuve, on a besoin des résultats préliminaires suivants

Définition 4.1. *Un ensemble E est dit partiellement ordonné s'il existe une relation binaire $\preceq$ définie sur $E \times E$ telle que :*

i. $\forall x \in E : x \preceq x$

ii. $\forall x, x, z \in E : (x \preceq y \wedge y \preceq z) \Rightarrow (x \preceq z)$

Définition 4.2. *Soit $F \subset E$ un ensemble ordonné. Un élément $x \in E$ est dit majorant de F si pour tout $y \in F$ on a $y \preceq x$.*

Définition 4.3. *f est dit totalement ordonné si pour tous $x, y \in F$, on a $x \preceq y$ ou $y \preceq x$.*

Définition 4.4. *Un élément $m \in E$ est dit élément maximal de E si pour tout $x \in E$ tel que $m \preceq x$, on a nécessairement $x = m$.*

Enfin,

Définition 4.5. *E est dit inductif, si tout sous-ensemble totalement ordonné de E admet un majorant.*

2. Hans Hahn, 1879-1934, est un mathématicien et philosophe autrichien qui a apporté de nombreuses contributions à l'analyse fonctionnelle, la topologie, la théorie des ensembles et le calcul des variations.

Exemple Soit S un ensemble non vide, et soit $E = \mathscr{P}(S)$, l'ensemble de toutes les parties de S. Soit la relation binaire :

$$\forall A, B \in E : A \preceq B \text{ si } A \subset B$$

Alors, E est partout ordonné respectivement à la relation $\preceq$. Si $F \subset E$, alors $\underset{A \subset F}{\cup} A$ est un majorant de F.

On a donc le résultat suivant

Lemme 4.1. ***(Lemme de Zorn)*** *[6] Tout ensemble non vide, partiellement ordonné et inductif, admet un élément maximal.*

4.2.1 Forme analytique du Théorème de Hahn-Banach

On a encore besoin de la version plus générale du Théorème de Hahn-Banach dite forme analytique

Théorème 4.3. *Soit X un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit $p : X \to \mathbb{R}$ telle que :*

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad x, y \in X$
2. $p(\alpha x) \leq |\alpha| p(x), \quad \alpha \in \mathbb{C}, x \in X$

Supposons que f est une forme linéaire sur un sous-espace vectoriel M de X dominée par p, i.e.,

$$|f(x)| \leq p(x), x \in M$$

alors, f peut être prolongée à une forme linéaire $\widehat{f}$ définie sur tout X et dominée par p.

Preuve. Soit E l'ensemble de toutes les formes linéaires g telles que le domaine $D(g)$ de g est inclus dans X, avec $f = g$ sur M, et

$$|g(x)| \leq p(x), x \in D(g)$$

i.e.,

$$E = \{g : D(g) \subset X \to \mathbb{R}, D(g) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E, g \text{ linéaire,}$$
$$M \subset D(g), g \text{ prolonge } f \text{ et } g(x) \leq p(x), x \in D(g)\}$$

Il est clair que $E \neq \emptyset$ car $f \in E.$

E est muni de la relation d'ordre

$$(g_1 \preceq g_2) \Leftrightarrow D(g_1) \subset D(g_2) \text{ et } g_2 \text{ prolonge } g_1$$

L'idée c'est de montrer, en utilisant le Lemme de Zorn, que E admet un élément maximal qui est défini sur X, .

Soit $J \subset E$ un ensemble totalement ordonné, et soit H une forme linéaire définie par

$$D(H) = \underset{g \in J}{\cup} D(g) \quad \text{et} \quad H(x) = g(x), x \in D(g)$$

Comme J est totalement ordonné, $H \in E$ car $D(H) \subset X$, et H est linéaire de $D(H)$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. De plus,

$$H_{|M} = f \text{ et } f(x) \leq p(x), \quad x \in D(H)$$

et H est un majorant de J. D'après le Lemme 4.1 de Zorn, J admet un élément maximal, on le note $\widehat{f}$. Reste à montrer que $D(\widehat{f}) = X$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in X$ tel que $x \notin D(\widehat{f})$. Soit

$$X_1 = \overline{\{x\}} \oplus D(\widehat{f})$$

On doit montrer qu'il existe une extension $\widehat{g} \in E$ de $\widehat{f}$ sur X_1. Ce qui va contredire la maximalité de $\widehat{f}$.

Il est clair qu'on doit définir $\widehat{g}$ sur X_1 par

$$\widehat{g}(\alpha x + z) = \alpha \widehat{g}(x) + \widehat{f}(z), \quad z \in D(\widehat{f}) \tag{4.3}$$

avec $\widehat{g}(x)$ est choisi de façon que

$$|\widehat{g}(\alpha x + z)| \leq p(\alpha x + z), \quad z \in D(\widehat{f}) \tag{4.4}$$

Pour déterminer $\widehat{g}(x,)$ on suppose d'abord que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Si (4.4) est vérifiée, alors on a en particulier

$$|\widehat{g}(x + z)| \leq p(x + z), \quad z \in D(\widehat{f}) \tag{4.5}$$

et

$$\widehat{g}(-x - y) \leq p(-x - y) = p(x + y), \quad y \in D(\widehat{f}) \tag{4.6}$$

D'où, et de (4.3), (4.5) et (4.6), on obtiendra que

$$\widehat{g}(x) \leq p(x + z) - \widehat{f}(z), \quad z \in D(\widehat{f}) \tag{4.7}$$

et

$$\widehat{g}(x) \geq -p(x + z) - \widehat{f}(y), \quad y \in D(\widehat{f}) \tag{4.8}$$

Il est facile de vérifier que

$$p(x + z) - \widehat{f}(z) \geq -p(x + y) - \widehat{f}(y), \quad y, z \in D(\widehat{f})$$

D'où, si on pose

$$\widehat{g}(x) = \inf\{p(x + z) - \widehat{f}(z), z \in D(\widehat{f})\}$$

alors, (4.5) et (4.6) sont vérifiées. Cependant, on aura :

$$\widehat{g}(\alpha x + z) \leq p(\alpha x + z), \quad z \in D(\widehat{f}) \tag{4.9}$$

En effet, supposons que $\alpha > 0$. (4.5) implique que

$$\widehat{g}(\alpha x + z) = \alpha \widehat{g}(x + \frac{z}{\alpha}) \leq \alpha p(x + \frac{z}{\alpha}) = p(\alpha x + z), \quad z \in D(\widehat{f})$$

et si $\alpha < 0$, alors (4.6) implique que

$$\widehat{g}(\alpha x + z) = -\alpha \widehat{g}(-x - \frac{z}{\alpha}) \leq -\alpha p(-x - \frac{z}{\alpha}) = p(\alpha x + z), \quad z \in D(\widehat{f})$$

et pour $\alpha = 0$,

$$\widehat{g}(z) = \widehat{f}(z) \leq p(z), \quad z \in D(\widehat{f})$$

Finalement, (4.9) implique (4.4), car

$$-\widehat{g}(\alpha x + z) = \widehat{g}(-\alpha x - z) \leq p(-\alpha x - z) = p(\alpha x + z), \quad z \in D(\widehat{f})$$

En résumé, on a construit une forme linéaire $\widehat{g} \in E$ telle que $\widehat{f} \preceq \widehat{g}$, mais $\widehat{f} \neq \widehat{g}$. ce qui contredit le fait que $\widehat{f}$ est maximal. D'où, $D(\widehat{f}) = X$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On écrit $f(z) = Ref(z) + iImf(z), \quad z \in M$. Comme

$$Imf(z) = -Ref(iz)$$

on aura que

$$f(z) = Ref(z) - iRef(iz), \quad z \in M \tag{4.10}$$

Soit X_r un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Ref est une forme linéaire sur M, où M est considéré comme un sous-espace vectoriel de X_r. De plus,

$$|Ref(z)| \leq |f(z)| \leq p(z), \quad z \in M$$

D'où ; et par le résultat précédent pour le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe une extension $\widehat{g}$ de Ref sur tout X_r telle que

$$|\widehat{g}(x) \leq p(x), \quad x \in X_r$$

Par (4.10), on définit $\widehat{f}$ sur X par

$$\widehat{f}(x) = \widehat{g}(x) - i\widehat{g}(ix)$$

$\widehat{g}$ est un prolongement linéaire de f sur tout X.
En écrivant

$$\widehat{f}(x) = |\widehat{f}(x)|e^{i\theta}$$

on aura

$$|\widehat{f}(x)| = \widehat{f}(e^{-i\theta}x) = Re\widehat{f}(e^{-i\theta}x) = \widehat{g}(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = p(x)$$

◄

Preuve du Théorème 4.2. On pose

$$p : X \to \mathbb{R} \quad \text{telle que } p(x) = \|f\|\|x\|, \quad x \in X$$

et on applique le Théorème 4.3 sur f et p. ◄

4.2.2 Applications du Théorème de Hahn-Banach

Théorème 4.4. *Soit M un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé X et soit $x_0 \in X$ tel que $d(x_0, M) > 0$. Alors, il existe $f \in X'$ telle que*

i. $\|f\| = 1$

ii. $f(M) = 0$

iii. $f(x) = d(x, M), x \in X$

Preuve. Comme $x_0 \notin M$, pour tout $z \in M_0 = \overline{\{x_0\}} + M$:

$$z = \alpha x + m, \alpha \in \mathbb{C}, m \in M$$

La fonction g où

$$g(\alpha x + m) = \alpha d(x, M) = \alpha d$$

est linaéire sur M_0, et pour $\alpha \neq 0$,

$$\|\alpha x + m\| = |\alpha|\|x + \frac{1}{\alpha}m\| \geq |\alpha|d = |g(\alpha x + m)|$$

D'où, $\|g\| \leq 1.$ (1*)

D'autre part, par la définition de la borne supérieure, il existe une suite $(m_k)_{k\geq 1}$ dans M telle que $\|x - m_k\| \to 0$, $(k \to +\infty)$. Donc,

$$d = g(x - m_k \leq \|g\|\|x - m_k| \to \|g\|d, (k \to +\infty)$$

ce qui implique que $\|g| \geq 1.$ (2*)
De (1*) et (2*), résulte que $\|g| = 1$. Par le Théorème 4.3, il existe un prolongement $f \in X'$ de g tel que $\|f\| = \|g\| = 1.$ ◀

Si $M = 0$, on aura le résultat suivant

Corollaire 4.1. *Soit X un espace vectoriel normé, et soit $x_0 \in X$. Il existe $f \in X'$ telle que $\|f\| = 1$ et $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Corollaire 4.2. *Soit X un espace vectoriel normé, et soit $x \in X$. Alors,*

$$\|x\| = \max_{f \in X', \|f\|=1} |f(x)|$$

Preuve. Il existe, par le Corollaire 4.1, $g \in X'$ telle que $\|g\| = 1$ et $g(x) = \|x\|$. Alors, pour tout $f \in X'$, vérifiant $\|f\| = 1$, on a

$$|f(x)| \leq \|x\| = g(x), x \in X$$

D'où,

$$\max_{f \in X', \|f\|=1} |f(x)| \leq \|x\| \tag{4.11}$$

D'autre part, comme $g \in X'$ et $\|g\| = 1$,

$$\|x\| = g(x) \leq \max_{f \in X', \|f\|=1} |f(x)| \tag{4.12}$$

Le résultat demandé s'atteint des inégalités (4.11) et (4.12). ◀

Corollaire 4.3. *Soit $\{x_i\}_{i=1}^n$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, un ensemble de vecteurs linéairement indépendants dans X. Il existe alors un ensemble de formes linéaires $\{f_i\}_{i=1}^n$ dans X' vérifiant $f_j(x_i) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$. Dans ce cas, on aura pour tout $x \in \overline{\{x_i\}_{i=1}^n}$,*

$$x = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) x_j$$

Preuve. Soit $M_j = \overline{\{x_i, i \neq j\}}$, $1 \leq j \leq n$. Comme M_j est un sous-espace vectoriel fermé de X, et $x_j \notin M_j$, le Théorème 4.3 assure l'existence de $g_j \in X$ telle que $g_j(x_j) = d_j$ et $g_j(x) = 0$ pour $x \in M_j$, $1 \leq j \leq n$.
Les formes linéaires $f_j = \frac{1}{d_j} g_j, 1 \leq j \leq n$ satisfont aux propriétés demandées. ◀

Remarques 1. Le Corollaire précédent donne un procédé de définir la base (dite duale) de l'espace dual d'un espace vectoriel normé de dimension finie.

2. Le système $(\overline{\{x_i\}_{i=1}^n}, \{f_i\}_{i=1}^n)$ est dit système biorthogonal.

Définition 4.6. *Un sous-espace vectoriel M d'un espace vectoriel normé X admet un supplémentaire dans X s'il existe un sous-espace fermé N de X tel que $X = M \oplus N$.*

Rappelons que si X est un espace de Hilbert, le supplémentaire d'un sous-espace vectoriel fermé M de X est le sous-espace vectoriel fermé $M^\perp$ dit complémentaire orthogonal de M. Toutefois, pour X un espace de Banach, M admet un supplémentaire si M est de dimension finie. On a donc

Théorème 4.5. *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie M d'un espace de Banach X admet un supplémentaire dans X.*

Preuve. Soit $\{x_i\}_{i=1}^n$ une base de M. Par le Corollaire 4.3, il existe $f_1, f_2, .., f_n \in X'$ telles que $f_j(x_i) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$. Posons

$$N = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \ker f_i$$

N est un sous-espace vectoriel fermé de X car $f_i, 1 \leq i \leq n$ sont continues. De plus, pour tout $z \in N$, on a par définition de N, et en utilisant le Corollaire 4.3,

$$z = \sum_{k=1}^{n} f_i(z) x_i = 0$$

D'où, $N \cap M = \{0\}$. Soit donc $x \in X$, et $u = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)x_i \in M$. On pose $v = x - u$. Alors, $x = u + v$ et $v \in N$ car pour tout $k, 1 \leq k \leq n$:

$$f_k(v) = f_k(x) - f_k(u) = f_k(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) f_k(x_i) = f_k(x) - f_k(x) = 0$$

Par conséquent, $X = M \oplus N$. ◀

Corollaire 4.4. *Soit X un espace vectoriel normé tel que $X \neq \{0\}$. Alors, $X' \neq \{0\}$.*

Preuve. En effet, il existe $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Le reste de la preuve en résulte du Corollaire 4.1. ◀

Corollaire 4.5. *Soit X un espace vectoriel normé, et soit $x_0 \in X$ tel que*

$$\forall f \in X' : f(x_0) = 0$$

Alors, $x_0 = 0$.

Preuve. Il existe $g \in X'$ telle que $g(x_0) = \|x_0\| = 0$. ◀

Une autre application : Séparabilité de l'espace dual

Le résultat suivant est une conséquence importante du Théorème de Hahn-Banach. On l'a utilsé précédemment pour montrer que le Théorème 2.3 ne demeure pas vrai pour $p = \infty$, i.e., $\ell'_\infty \neq \ell_1$.

Théorème 4.6. *Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach. Si $\mathcal{X}'$ est séparable, alors $\mathcal{X}$ l'est aussi.*

Preuve. Soit $\{f_i\}_{i \geq 1}$ un ensemble partout dense dans $\mathcal{X}'$. Par la définition de la borne supérieure, et pour chaque f_k, on choisit un élément $x_k \in \mathcal{X}$ tel que

$$\|x_k\| = 1 \text{ et } \ |f_k(x_k)| \geq \frac{\|f_k\|}{2}, \quad k \geq 1$$

Posons

$$K = \left\{ \sum_{k\geq 1} \lambda_k x_k,\ \lambda_k \in \mathbb{Q} \right\}$$

K est dénombrable dans $\mathcal{X}$.

De plus, si $\overline{K} \neq \mathcal{X}$, alors par le Théorème 4.3, il existe $f \in \mathcal{X}'$, $f \neq 0$ telle que

$$f(x) = 0,\ x \in \overline{K}$$

En particulier,

$$f(x_k) = 0,\ k \geq 1$$

D'où,

$$\exists m \in \mathbb{N} / \ \|f_m - f\| < \epsilon, \forall \epsilon > 0$$

Par suite,

$$|(f - f_m)(x_m)| = |f_m(x_m)| \geq \frac{\|f_m\|}{2} = \frac{\|f_m\|}{2} \|x_m\|$$

Donc

$$\|f - f_m\| \geq \frac{\|f_m\|}{2} \Rightarrow \|f_m\| < 2\epsilon$$

Soit finalement

$$\|f\| \leq \|f - f_m\| + \|f_m\| < 3\epsilon$$

Par conséquent, $f \equiv 0$. Contradiction. ◄

4.2.3 Forme géométrique du Théorème de Hahn-Banach

Hyperplan dans un espace vectoriel normé

Définition 4.7. *Soit X un espace vectoriel normé. Un hyperplan (affine) est un ensemble de la forme*

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$$

où f est une forme linéaire sur X, (pas nécessairement continue) et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On dit que H est l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$.

Proposition 4.1. *L'hyperplan H d'équation $[f = \alpha]$ est fermé si et seulement si f est continue.*

Preuve. ($\Leftarrow$) $H = f^{-1}(\{\alpha\})$ est fermé car $\{\alpha\}$ est un fermé dans $\mathbb{R}$.
($\Rightarrow$) Supposons que H est fermé. H^C est donc un ouvert non vide dans X car $f \neq 0$. Soit donc $x_0 \in H^C$, et supposons que $f(x_0) < \alpha$. Soit $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset H^C$. On a donc

$$\forall x \in B(x_0, r) : f(x) < \alpha \tag{4.13}$$

En effet, s'il existe $x_1 \in B(x_0, r)$ tel que $f(x_1) > \alpha$, alors,

$$\{x_t = (1-t)x_0 + tx_1, t \in [0,1]\} \subset B(x_0 r)$$

et donc

$$f(x_t) \neq \alpha, \quad t \in [0,1] \tag{4.14}$$

D'où,

$$f(x_t) = \alpha \quad \text{pour} \quad t = \tfrac{f(x_1)-\alpha}{f(x_1)-f(x_0)} \in]0,1[$$

car $f(x_0) < \alpha$. Contradiction avec (4.14). D'où, $f(x_0) > \alpha, \quad x \in B(x_0, r)$.
Il en résulte que

$$\forall z \in B(O, 1) : f(x_0 + rz) < \alpha$$

Par conséquent, f est continue et

$$\|f\| \leq \tfrac{1}{r}(\alpha - f(x_0)$$

◀

Soit X un espace vectoriel normé, et soient $A, B \subset X$.

Définition 4.8. *On dit que l'hyperplan H d'équation $[f = \alpha]$ sépare A et B au sens large, si l'on a :*

$$\forall x \in A : f(x) \leq \alpha \quad \textit{et} \quad \forall x \in B : f(x) \geq \alpha$$

Définition 4.9. *On dit que l'hyperplan H d'équation $[f = \alpha]$ sépare A et B au sens strict, s'il existe $\varepsilon > 0$, tel que*

$$\forall x \in A : f(x) \leq \alpha - \varepsilon \quad \textit{et} \quad \forall x \in B : f(x) \geq \alpha + \varepsilon$$

On a donc les résultats suivants

1ère Forme géométrique du Théorème de Hahn-Banach

Théorème 4.7. *[5] Soient A, B deux ensembles convexes, non vides et disjoints dans un espace vectoriel normé. On suppose que A est un ouvert. Alors, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.*

2ème Forme géométrique du Théorème de Hahn-Banach

Théorème 4.8. *[5] Soient A, B deux ensembles convexes, non vides et disjoints dans un espace vectoriel normé. On suppose que A est fermé, et que B est compact. Alors, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.*

Corollaire 4.6. *(Très utile) Soit $F \subset X$ un sous-espace vectoriel tel que $\overline{F} \neq X$. Alors, il existe $f \in X'$, $f \neq 0$ telle que $f(x) = 0, x \in F$.*

Preuve. Soit $x_0 \in X$, $x_0 \notin \overline{F}$. On applique le Théorème 4.8, avec $A = \overline{F}$ et $B = \{x_0\}$. Il existe donc $f \in X', f \neq 0$ telle que l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ sépare A et B au sens strict. On a donc

$$\forall x \in F : f(x) < \alpha < f(x_0$$

D'où,

$$f(x) = 0, x \in F$$

car

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda f(x) < \alpha$$

◄

Remarques 1. Ce Corollaire est souvent appliqué pour montrer qu'un sous-espace vectoriel $F \subset X$ n'est pas dense. On considère une forme linéaire et continue f sur X, telle que $f = 0$ sur F, et on prouve que $f = 0$ sur X.

2. Si X est de dimension finie, on peut toujours séparer deux convexes non vides et disjoints A et B dans X.

Exercice Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Montrer que F est complet si et seulement si $\mathcal{L}(E, F)$ est complet.

Solution $(\Rightarrow)$ Démontrée dans le chapitre 2.
$(\Leftarrow)$ Soit $(y_n)_n$ une suite de Cauchy dans F. Soit $x_0 \in E, \|x_0\| = 1$. D'après le Corollaire 4.1 du Théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in X'$,$|f\| = 1$ et $f(x_0) = \|x_0\|$. Soit $T_n : E \to F, (n \geq 1)$ définies par

$$T_n(x) = f(x)y_n, \quad x \in E, n \geq 1$$

On a donc :

$$T_n \in \mathcal{L}(E, F), n \geq 1$$

et de plus, pour tous $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$:

$$\|T_n - T_m\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)(y_n - y_m)\| = \|y_n - y_m\| \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \|y_n - y_m\|$$

La suite $(T_n)_n$ est donc de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$. Elle est donc convergente vers certain $T \in \mathcal{L}(E, F)$ car $\mathcal{L}(E, F)$ est complet. Posons $Tx_0 = y$. Alors,

$$\|y_n - y\| = \|T_n(x_0) - Tx_0\| = \|(T_n - T)x_0\| \leq \|T_n - T\|\|x_0\| \to 0, \quad (n \to +\infty)$$

La suite $(y_n)_n$ est donc convergente vers $y, y \in F$. Par conséquent, l'espace F est complet.

4.3 Théorème de catégorie de Baire

[3]

Définition 4.10. ***(Rappel)*** *Soit X un espace métrique, et soit A un sous-ensemble de X. Un vecteur x_0 de X est dit point intérieur de A s'il existe une boule $B(x_0, r)$ de centre x_0 et de rayon $r, (r > 0)$ incluse dans A.*

Définition 4.11. *L'ensemble des points intérieurs de A est dit intérieur de A et est noté $\overset{\circ}{A}$.*

On a donc

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in X / \exists r > 0 : B(x, r) \subset A\}$$

Le résultat suivant est utile pour démontrer les théorèmes de ce chapitre.

Théorème 4.9. *Soit X un espace de Banach, et soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de fermés dans X tels que $X = \underset{i\geq 1}{\cup} X_i$. Alors, il existe $j \in \mathbb{N}, j \geq 1$ tel que $\overset{\circ}{X_j} \neq \emptyset$.*

Autrement dit, un espace de Banach ne peut être une réunion dénombrable de fermés, tous d'intérieur vide.

Preuve. Par l'absurde, on suppose que $\overset{\circ}{X_n} = \emptyset, n \geq 1$. Soit $x_1 \in X$. Comme $B(x_1, r_1) \nsubseteq X_1$, et X_1 est fermé, il existe $x_2 \in X$ et $0 < r_2 < \frac{1}{2}$ tel que

$$\overline{B(x_2, r_2)} \subset B(x_1, r_1)$$

et

$$\overline{B(x_2, r_2)} \cap X_1 = \emptyset$$

Comme $B(x_2, r_2) \nsubseteq X_2$, et X_2 est fermé, il existe $x_3 \in X$ et $0 < r_3 < \frac{1}{3}$ tel que

$$\overline{B(x_3, r_3)} \subset B(x_2, r_2)$$

3. René-Louis Baire, 1874-1932, est un mathématicien français.

et

$$\overline{B(x_3, r_3)} \cap X_2 = \emptyset$$

En continuant de la même manière, on obtient deux suites $(x_n)_n$ et $(r_n)_n$ avec $0 < r_n < \frac{1}{n}, n \geq 1$, et telles que pour tout $n, n \geq 1$

$$\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_n, r_n) \tag{4.15}$$

et

$$\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \cap X_n = \emptyset \tag{4.16}$$

La suite $(x_n)_n$ ainsi définie est de Cauchy dans X. En effet, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n > m$, et par (4.15) et (4.16),

$$x_n \in B(x_m, r_m)$$

i.e.,

$$\|x_n - x_m\| < r_m \leq \frac{1}{m} \tag{4.17}$$

D'où, $(x_n)_n$ converge vers un point $x \in X$, car X est complet.
Fixons m et faisons tendre n vers ∞ dans (4.17), on aura

$$\|x - x_m\| \leq r_m$$

D'où, $x \in B(x_m, r_m)$. Comme

$$B(x_m, r_m) \cap X_{m-1} = \emptyset, \quad (m \geq 2)$$

$x \notin X_{m-1}, m \geq 2$. Contradiction car $X = \underset{i \geq 1}{\cup} X_i$. ◀

Exemple Montrer que $(\mathbb{R}, |.|)$ muni de sa topologie usuelle n'est pas dénombrable.

Solution Par l'absurde, on suppose que $\mathbb{R} = \underset{n \geq 1}{\cup} \{x_n\}$, où $x_n \in \mathbb{R}, n \geq 1$. On a donc :

1. $(\mathbb{R}, |.|)$ est un espace de Banach.

2. Les singletons $\{x_n\}$ sont des fermés dans $\mathbb{R}$ pour tout $n, n \geq 1$ car

$$\{x_n\}^C =]-\infty, x_n[\cup]x_n, +\infty[$$

est un ouvert dans $\mathbb{R}$.

Par le Théorème de Baire, il existe $j \in \mathbb{N}, j \geq 1$ tel que $\overset{\circ}{\{x_j\}} \neq \emptyset$. i.e., il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \{x_j\}$. Contradiction. ◄

4.3.1 Quelques applications du Théorème de Baire

Proposition 4.2. *Soit (X, d) un espace métrique complet, et soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$ une famille dénombrable de fermés de X tous d'intérieur vide. Alors, $\underset{n\geq 1}{\cup} X_n$ est aussi d'intérieur vide.*

Preuve. Posons $\Omega = \underset{n\geq 1}{\cup} X_n$. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $x \in \overset{\circ}{\Omega}$. Alors,

$$\exists r > 0 : B(x, r) \subset \Omega$$

Comme X_1 est d'intérieur vide,

$$B(x, r) \cap X_1^C \neq \emptyset$$

Donc, $B(x, r) \cap X_1^C$ est un ouvert contenant une boule fermée $\overline{B}(x_1, r_1)$ avec $r_1 < \frac{r}{2}$. De même, $B(x_1, r_1) \cap X_2^C \neq \emptyset$. Donc, $B(x_1, r_1) \cap X_2^C$ est un ouvert qui contient une boule fermée $\overline{B}(x_2, r_2)$ avec $r_2 < \frac{r}{2^2}$. On obtient de cette manière, une suite $(\overline{B}(x_n, r_n))_n$ de boules fermées dans X telles que

$$r_n < \tfrac{r}{2^n} \quad \text{et } \overline{B}(x_n, r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1})$$

On a donc pour tout $n, m \in \mathbb{N}, n > m$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + .. + d(x_{n-1}, x_n) &\leq \frac{r}{2^m} + \frac{r}{2^{m+1}} + .. + \frac{r}{2^{n-1}} \\ &\leq \frac{r}{2^m}(1 + \frac{1}{2} + .. + \frac{1}{2^{n-1-m}}) \\ &< \frac{r}{2^{m-1}} \end{aligned}$$

La suite $(x_n)_n$ est donc de Cauchy dans X. Elle est donc convergente vers un élément $y, y \in X$ car X est complet. D'autre part, pour tous $n, m \in \mathbb{N}, n > m$

$$x_n \in \overline{B}(x_m, r_m) \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} x_n = y \in \overline{B}(x_m, r_m), \forall m$$

D'où,

$$y \in B(x, r) \subset \overset{\circ}{\Omega} \quad \text{et} \quad y \notin X_n, \forall n$$

Contradiction. Par conséquent, $\overset{\circ}{\Omega} = \emptyset$. ◀

De même, on a le résultat suivant

Proposition 4.3. *[2] Soit (X, d) un espace métrique complet, et soit $\{X_n\}_{n \geq 1}$ une famille dénombrable d'ouverts denses dans X. Alors, $\underset{n \geq 1}{\cap} X_n$ est aussi un ouvert dense dans X.*

Théorème 4.10. *Soit (X, d) un espace métrique complet. On suppose que $X = \underset{n \geq 1}{\cup} X_n$ avec $X_n,\ n \geq 1$ sont des fermés de X. Alors, $\Omega = \underset{n \geq 1}{\cup} \overset{\circ}{X_n}$ est un ouvert dense dans X.*

Preuve. Il est clair que Ω est un ouvert dans X. Pour tout $n, n \in \mathbb{N}$, posons

$$\widehat{X_n} = X_n \cap \Omega^C$$

Chaque $\widehat{X_n}$, $(n \in \mathbb{N})$ est fermé de X. Montrons que $\widehat{X_n}$ est d'intérieur vide. En effet, si U est un ouvert contenu dans $\widehat{X_n}$, alors

$$U \subset X_n \text{ et } U \subset \Omega^C$$

Par suite,

$$U \subset \overset{\circ}{X}_n \text{ et } U \subset \Omega^C$$

Il en résulte que

$$U \subset \Omega \text{ et } U \subset \Omega^C$$

D'où, $U = \emptyset$. De plus, on a

$$\bigcup_{n \geq 1} \widehat{X_n} = \bigcup_{n \geq 1} X_n \cap \Omega^C = X \cap \Omega^C = \Omega^C$$

Ω^C est donc union dénombrable de fermés d'intérieur vide. Par le Théorème de Baire, Ω^C est aussi d'intérieur vide. Comme

$$\overline{\Omega}^C = \overset{\circ}{\Omega^C} = \emptyset$$

il s'ensuit que $\overline{\Omega} = X$. ◄

4.4 Théorème du graphe fermé

4.4.1 Graphe d'un opérateur linéaire

Définition 4.12. *(**Rappel**) Soient X, Y des espaces vectoriels normés sur le même corps $\mathbb{K}$, et soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire. Le graphe de T est l'ensemble*

$$G(T) = \{(x, Tx), x \in X\}$$

Définition 4.13. *Un opérateur linéaire $T : X \to Y$ est dit fermé, si son graphe est fermé dans $X \times Y$.*

i.e., $T : X \to Y$ est fermé si et seulement si

$$\forall (x_n)_n \subset X : ((x_n \to x) \wedge (Tx_n \to y)) \Rightarrow (x \in D(T) \wedge y = Tx)$$

On a donc le résultat suivant

4.4.2 Théorème du graphe fermé

Théorème 4.11. *Soient X, Y des espaces de Banach, et soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire. Si le graphe de T est fermé, alors T est continu.*

Remarque La réciproque est évidemment vraie, car si f est une fonction continue, le graphe de f est fermé. (même si f n'est pas linéaire)

Pour la preuve du Théorème 4.11, on a besoin du Lemme suivant

Lemme 4.2. *Soit X un espace vectoriel normé, et soit C un ensemble convexe dans X tel que $C = (-1)C$. Si C admet un point intérieur, alors 0 est aussi un point intérieur de C.*

Preuve . Soit $x_0 \in \overset{\circ}{C}$. Donc, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset C$. Si $x \in X$ avec $\|x\| < 2r$, alors

$$x = (x_0 + \frac{x}{2}) - (x_0 - \frac{x}{2}) \in B(x_0, r) + (-1)B(x_0, r) \subset C + C$$

Or, $C + C = 2C$. En effet, pour tous $u, v \in C$:

$$u + v = 2(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v) \in 2C$$

car C est convexe. On a donc montré que $B(O, 2r) \subset 2C$. D'o'u $B(O, r) \subset C$. ◀

Preuve du Théorème 4.11. Soit $Z = \{x \in X : \|Tx\| \leq 1\}$. Comme $D(T) = X$, et T est linéaire, $X = \underset{n\geq 1}{\cup} nZ$. Par le Théorème de Baire, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$k\overline{Z} = \overline{kZ} \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{\overline{kZ}} \neq \emptyset$$

Donc, $\overset{\circ}{\overline{Z}} \neq \emptyset$.

Il est facile de montrer que $\overline{Z}$ est convexe dans X, et que $\overline{Z} = (-1)\overline{Z}$. Par le Lemme 4.2 précédent, $0 \in \overset{\circ}{\overline{Z}}$. i.e.,

$$\exists r > 0 : B(O, r) \subset \overline{Z}$$

D'où, pour tout $\alpha > 0$:

$$B(O, \alpha r) \subset \alpha\overline{Z} = \overline{\alpha Z} \tag{4.18}$$

Soit $0 < \varepsilon < 1$, et soit $\|x\| < r$. De (4.18), on aura que $x \in \overline{Z}$. D'où,

$$\exists x_1 \in Z : \|x - x_1\| < \varepsilon r$$

Comme

$$(x - x_1) \in B(O, r) \subset \overline{\varepsilon Z},$$

$$\exists x_2 \in \varepsilon Z : \|x - x_1 - x_2\| < \varepsilon^2 r$$

Inductivement, on obtient une suite $(x_n)_n$ telle que pour tout $n, n \geq 1$,

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k\| < \varepsilon^n r, \quad x_n \in \varepsilon^{n-1} Z, (n \geq 1) \tag{4.19}$$

Soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. De (4.19), et de la définition de Z, on aura que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = x$, et que

$$\|Tx_n\| < \varepsilon^{n-1}, (n \geq 1)$$

Par ailleurs, pour tous $n, m \geq 1$ avec $n > m$:

$$\begin{aligned} \|TS_n - TS_m\| = \| \sum_{k=m+1}^{n} Tx_k\| &\leq \sum_{k=m+1}^{n} \|Tx_k\| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon^k \\ &\leq \sum_{k=m}^{+\infty} \varepsilon^k \\ &= \frac{\varepsilon^m}{1-\varepsilon} \to 0, (m \to +\infty) \end{aligned}$$

Donc, la suite $(TS_n)_n$ est de Cauchy dans Y. Elle est donc convergente vers certain $y \in Y$, car Y est complet. On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = x$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} TS_n = y$. D'où, $Tx = y$ car $G(T)$ est fermé.

Ainsi,

$$\|Tx\| = \|y\| = \lim_{n \to +\infty} \|TS_n\| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \|TS_k| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}$$

pour tout $x, \|x| < r$. Donc pour $v \in X$, $\|v\| = 1$, on aura

$$\|T(\frac{r}{2}v)\| < \frac{1}{1-\varepsilon}$$

Soit

$$\|Tv\| < \frac{2}{r(1-\varepsilon)}, \quad \|v\| = 1$$

Ce qui implique que $\|T\| \leq \frac{2}{r(1-\varepsilon)}$, et T est donc continu. ◀

Exemple Soient X, Y des espaces de Banach, et soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire. On suppose que

$$\forall f \in X', \forall (x_n)_n \in X : \lim_{n \to +\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(Tx_n) = 0 \tag{4.20}$$

Montrer, en utilisant le Théorème du graphe fermé, que T est continu.

Solution Soit $(x_n)_n)$ une suite dans X convergeant vers un élément $x, x \in X$ et telle que $(Tx_n)_n$ converge vers $y, y \in Y$. Montrons que $y = Tx$.
On a

$$\lim_{n \to +\infty} (x_n - x) = 0$$

D'où, pour tout $f, f \in Y'$:

$$\lim_{n \to +\infty} f(T(x_n - x)) = 0$$

par (4.20). Donc

$$\lim_{n \to +\infty} f(T(x_n)) = f(Tx), \quad f \in X'$$

Comme f est continue,

$$f(\lim_{n \to +\infty} (T(x_n)) = f(Tx), \quad f \in X'$$

C-à-d, pour tout $f, f \in Y'$:

$$f(y) = f(Tx)$$

D'où, $y = Tx$ par le Corollaire 4.5 du Théorème de Hahn-Banach. Le graphe de T est donc fermé. Comme X, Y sont de Banach, T est continu par le Théorème 4.10.

Corollaire 4.7. *Soient X, Y des espaces de Banach, et soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire borné et bijectif. Alors, T^{-1} est aussi borné.*

Preuve. Le graphe de T est fermé car T est continu. De plus,

$$G(T^{-1}) = \{(y, T^{-1}y), y \in Y\} = \{(Tx, x), x \in X\}$$

car T est bijectif. Le graphe de T^{-1} est donc fermé. Par le Théorème du graphe fermé, T^{-1} est borné. ◀

Remarque La condition que les espaces X et Y soient complets est nécessaire comme le montre l'exemple suivant

Exercice Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et soit F le sous-espace de E formé des fonctions de classe $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que le graphe de l'application

$$S : F \ni f \mapsto f' \in E$$

est fermé, mais S n'est pas continue.

Corollaire 4.8. *Soient $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes sur un espace vectoriel normé X telles que $(X, \|.\|_1)$ et $(X, \|.\|_2)$ soient complets. S'il existe $c > 0$ tel que*

$$\forall x \in X : \|x\|_1 \leq c\|x\|_2 \tag{4.21}$$

alors, $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes sur X.

Preuve. En effet, l'opérateur identité $I_d : (X, \|.\|_2) \to (X, \|.\|_1)$ est borné par l'inégalité (4.21). Donc, I_d^{-1} est aussi borné par le Corollaire 4.6 car $(X, \|.\|_1)$ et $(X, \|.\|_2)$ sont complets, et de plus :

$$\forall x \in X : \|x\|_1 \leq c\|x\|_2 = c\|I_d^{-1}x\|_2 \leq c\|I_d{}^{-1}\|\|\|\|x\|_1$$

◀

4.5 Théorème de Banach-Steinhaus

4.5.1 Théorème de Banach-Steinhaus

[4] **(ou Principe de la borne uniforme)**

Soient $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés, et soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{L}(X, Y)$.

Définition 4.14. *$(T_i)_{i\in I}$ est dite simplement bornée si*

$$\forall x \in X : \sup_{i\in I}\|T_i x\| < +\infty$$

Définition 4.15. *$(T_i)_{i\in I}$ est dite uniformément bornée si*

$$\sup_{i\in I}\|T_i\| < +\infty$$

Il est clair que si $(T_i)_{i\in I}$ est uniformément bornée, alors $(T_i)_{i\in I}$ est simplement bornée. La réciproque n'est pas vraie en général. Toutefois, le résultat suivant affirme que ces définitions sont équivalentes dans le cas où X est de Banach. On a donc

Théorème 4.12. *Soient $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés. On suppose que X est de Banach. Si $\{T_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ est une famille simplement bornée, alors $\{T_i\}_{i\in I}$ est uniformément bornée.*

Remarque Le nom du Théorème exprime bien le contenu du résultat :
" On déduit une borne uniforme à partir de bornes ponctuelles. "

Preuve. Pour tout $n, n \in \mathbb{N}$, considérons l'ensemble

$$X_n = \{x \in X / \forall i \in I : \|T_i x\| \leq n\}$$

4. Władysław Hugo Dionizy Steinhaus, 1887-1972, est un mathématicien et professeur polonais.

Comme $T_i, i \in I$ sont toutes continues, $X_n, n \geq 1$ sont fermés comme intersection de fermés. De plus, et par hypothèse,

$$\forall x \in X, \exists n \in \mathbb{N} : \sup_{i \in I} \|T_i x\| \leq n$$

D'où, $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Comme X est complet, et par le Théorème de catégorie de Baire, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\overset{\circ}{X}_{n_o} \neq \emptyset$. Donc, il existe $x_0 \in X$ et $r > 0$ tel que

$$B(x_0, r) \subset X_{n_0}$$

Autrement dit,

$$\forall x \in B(x_0, r), \forall i \in I : \|T_i x\| \leq n_0$$

Par la linéarité des $T_i, (i \in I)$, découle que

$$\forall x \in B(O, 1), \forall i \in I : \|T_i x\| \leq \frac{1}{r}(n_0 + \sup_{i \in I} \|T_i x_0\|)$$

Soit finalement

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| \leq \frac{1}{r}(n_0 + \sup_{i \in I} \|T_i x_0\|)$$

◄

4.5.2 Quelques applications

Corollaire 4.9. *Soit S un sous-ensemble d'un espace de Banach X tel que*

$$\forall f \in X' : \sup_{x \in S} |f(x)| < +\infty$$

Alors, S est borné.

Preuve. Pour tout $x \in S$, on définit la forme linéaire $F_x : X' \to \mathbb{C}$ définie par

$$F_x(f) = f(x), \quad f \in X'$$

Il est clair que F_x est linéaire, et par le Corollaire 4.2 du Théorème de Hahn-Banach,

$$\|F_x\| = \sup_{\|f\|=1} |F_x(f)| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)| = \|x\| \tag{4.22}$$

D'où, F_x est une forme linéaire sur X', et par hypotheèse, pour tout $g \in X'$:

$$\sup_{x \in S} |F_x(g)| = \sup_{x \in S} |g(x)| < +\infty$$

D'où, par le Théorème 4.11, on aura

$$\sup_{x \in S} \|F_x\| < +\infty$$

Finalement, il en résulte de (4.22) que

$$\sup_{x \in S} \|x\| = \sup_{x \in S} \|F_x\| < +\infty$$

◀

Corollaire 4.10. *Soient X et Y deux espaces de Banach, et soit $(A_n)_n$ une suite dans $\mathcal{L}(X,Y)$ convergeant simplement sur X vers un opérateur A.*
Alors, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. De plus, la suite $(\|A_n\|)_n$ est bornée.

Preuve. Il est clair que A est linéaire. De plus, pour tout $x \in X$, la suite $(A_n(x))_n$ est bornée car convergente. D'où, et par le Principe de la borne uniforme,

$$M = \sup_{n \geq 1} \|A_n\| < +\infty$$

Or, pour tout $x \in X$:

$$\|Ax\| = \lim_{n \to +\infty} \|A_n x\| \leq M\|x\|$$

Donc, A est borné et $\|A\| \leq M$. ◀

4.5.3 L'inverse de la propriété de Hölder dans ℓ_p

Corollaire 4.11. *Soient* $1 \leq p, q \leq +\infty$, *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *On suppose que*

$$\forall x = (x_n)_n \in \ell_p : \text{ la série } \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n \text{ est convergente} \tag{4.23}$$

Alors, $y \in \ell_q$.

Preuve. 1. Si $1 \leq p < +\infty$: On définit $f : \ell_p \to \mathbb{C}$ par

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k y_k$$

Par (4.23), l'application f est bien définie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, on pose $f_n : \ell_p \to \mathbb{C}$ avec

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

pour tous $x \in \ell_p$ et $n \geq 1$.

Alors, $f_n \in \ell'_p, n \geq 1$. En effet, f_n est linéaire, et de plus, pour tout $x, x \in \ell_p$:

$$\begin{aligned} |f_n(x)| = |\sum_{k=1}^{n} x_k y_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| &\leq (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}} (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}} \|x\|_p \end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder (Corollaire 2.1, chapitre 2). Ce qui montre que f_n est continue, et que $|f_n\| \leq (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}}, \ n \geq 1$.

De plus,

$$\forall x \in \ell_p : \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Du Corollaire 4.10 du Théorème de Banach-Steinhaus, découle que $f \in \ell'_p$.

Finalement, par le Théorème 2.3, $y \in \ell_q$ et $\|y\|_q = \|f\|_{\ell'_p}$.

2. Pour $p = +\infty$: On prend la suite $x_n = sign(y_n)$ où

$$sign(x) = \frac{|x|}{x} \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et } sign(0) = 0$$

Donc, $x \in \ell_\infty$. De plus, par (4.23), la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n = \sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|$$

est convergente. Par conséquent, $y \in \ell_1$. ◀

4.6 Théorème de l'application ouverte

Définition 4.16. *Soient E et F deux espaces topologiques. Une application $f : X \to Y$ est dite ouverte si l'image par f, de tout ouvert de E est un ouvert de F.*

Exemple L'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

n'est pas ouverte en $x = 0$.
En effet, $f(]-1,1[) = [0,1[$ n'est pas un voisinage de 0. Cependant, f est ouverte en tout point $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$.

Exercice Montrer qu'une application linéaire et continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est ouverte si et seulement si $f(1) \neq 0$.

On a donc le résultat suivant dit Théorème de l'application ouverte ou Théorème de Banach-Schauder [5]

Théorème 4.13. *Soient X et Y deux espaces de Banach, et soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire continu et surjectif. Alors, il existe $c > 0$ tel que*

$$T(B_X(O,1)) \supset B_Y(O,c) \tag{4.24}$$

Autrement dit, T transforme tout ouvert de X en un ouvert de Y, i.e., T est une application ouverte. D'où vient le nom du résultat. En effet, soit U un ouvert de X. Soit $y_0 \in T(U)$. Il existe donc $x_0 \in U$ tel que $y_0 = Tx_0$. Soit $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset U$. i.e.,

$$x_0 + B(O,r) \subset U$$

5. Juliusz Paweł Schauder, 1899-1943, est un mathématicien polonais, connu pour ses travaux dans les domaines de l'analyse fonctionnelle, les EDP et la physique mathématique.

Il s'ensuit que

$$y_0 + T(B(O,r)) \subset T(U)$$

Par (4.24), on aura

$$T(B(O,r)) \supset B(O,rc)$$

Finalement

$$B(y_0,rc) \subset T(U)$$

Preuve du Théorème 4.13. D'abord, on a $X = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} nB_X(O,1)$. Montrons que $Y = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \overline{nTB_X(O,1)}$. En effet, pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $y = Tx$, car T est surjectif.
Si $\|x\| < k$, alors $y \in T(kB_X(O,1)) = kT(B_X(O,1))$.
L'espace Y étant de Banach. Par le Théorème de catégorie de Baire, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\overline{T(n_0B_X(O,1)} = \overline{n_0T(B_X(O,1))}$$

est d'intérieur non vide, i.e., il contient un ouvert non vide U. Comme T est linéaire, $T(B_X(O,1))$ et $\overline{T(B_X(O,1))}$ sont convexes, et

$$-U \subset n_0\overline{T(B_X(O,1))}$$

implique que

$$U_1 = \frac{1}{2}(U-U) \subset n_0\overline{T(B_X(O,1))}$$

U_1 est un ouvert, et $0 \in U_1$. Donc, il existe $\delta' > 0$ tel que

$$B_Y(O,\delta') \subset n_0\overline{T(B_X(O,1))}$$

Posons $\delta_1 = \frac{\delta'}{n_0}$. On aura donc

$$B_Y(O,\delta_1) \subset \overline{T(B_X(O,1))}$$

Ce qui équivaut pour $\delta = \frac{\delta_1}{2}$ que

$$B_Y(O,\delta) \subset \overline{T(B_X(O,\frac{1}{2}))}$$

Reste à montrer que $\overline{T(B_X(O,\frac{1}{2}))} = T(B_X(O,1))$. Soit donc $y \in \overline{T(B_X(O,\frac{1}{2}))}$. Il existe alors $x_1 \in X, \|x_1\| < \frac{1}{2}$ tel que

$$\|Tx_1 - y\| < \frac{\delta}{2}$$

D'où,

$$y_1 = (Tx_1 - y) \in B_Y(O,\frac{\delta}{2}) \subset \overline{T(B_X(O,\frac{1}{4}))}$$

Par le même argument, il existe $x_2 \in X, \|x_2\| < \frac{1}{4}$ tel que

$$\|y_2\| = \|Tx_2 - y_1\| = \|Tx_1 + Tx_2 - y\| < 2^{-2}\delta$$

et

$$y_2 = (Tx_1 + Tx_2 - y) \in B_Y(O, 2^{-2}\delta) \subset \overline{T(B_X(O,2^{-3})}$$

De la même faccon, on obtiendra une suite $(x_n)_n$ dans X vérifiant $\|x_n\| < 2^{-n}$ et

$$\|T\sum_{k=1}^{n} x_k - y\| < 2^{-n}\delta, (n \geq 1)$$

Posons $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k, n \geq 1$. Comme $(S_n)_n$ est de Cauchy dans X, elle converge vers certain $x, x \in X$ car X est de Banach, avec

$$\|x\| < \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = 1 \tag{4.25}$$

Comme T est continu, on aura de (4.25) que $Tx = y$. ◀

4.6.1 Théorème de l'homéomorphisme de Banach

Du résultat précédent, découle le Corollaire important suivant

Corollaire 4.12. *(Théorème de l'homéomorphisme de Banach)*
Soient X et Y deux espaces de Banach, et soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire borné et bijectif. Alors, T^{-1} est aussi borné. (T est dit homéomorphisme)

Preuve. Soit U un ouvert de X. Par le Théorème 4.10, $T(U)$ est un ouvert de Y, car T est continu et surjectif. Or, $T(U) = (T^{-1})^{-1}(U)$ est l'image réciproque par T^{-1} de U. D'où, T^{-1} est continu. ◀

Exemple Soit $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, et soit $I : (X, \|.\|_\infty) \to (X, \|.\|_1)$ l'opérateur d'identité.
1. Montrer que I est linéaire, bijectif et continu.
2. Calculer $\|I\|$.
3. Montrer que I^{-1} n'est pas un homéomorphisme (n'est pas continu). Utiliser la suite $(f_n)_n$ où $f_n(t) = t^n, n \geq 1$.
4. Que peut-on déduire par le Corollaire 4.10 ?

Solution 1. Il est clair que I est linéaire et bijectif, et son inverse est l'opérateur d'identité $I^{-1} : (X, \|.\|_1) \to (X, \|.\|_\infty)$. De plus, pour tout $f \in X$, on a

$$\|I(f)\|_1 = \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)dt| \leq \int_0^1 \sup_{t\in[0,1]} |f(t)dt| \leq \|f\|_\infty$$

D'où, I est continu, et

$$\|I\| \leq 1 \tag{4.26}$$

2. On a pour $f_0 = 1$ sur $[0,1]$:

$$\|I(f_0)\|_1 = \|1\|_1 = \int_0^1 dt = 1$$

et $\|f_0\|_\infty = 1$. Par conséquent,

$$\|I\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} \|I(f)\|_1 \geq \|I(f_0)\|_1 = 1 \tag{4.27}$$

De (4.26) et (4.27), $\|I\| = 1$.

3. On a :

$$\|I^{-1} f_n\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t)|dt = \sup_{t\in[0,1]} |t^n|dt = 1$$

De même,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)|dt = \int_0^1 |t^n|dt = \frac{1}{n+1}$$

Par suite,

$$\frac{\|I^{-1} f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = n + 1 \to +\infty, (n \to +\infty)$$

Ce qui montre que I^{-1} n'est pas continu.

4. De (3), l'opérateur I n'est pas un homéomorphisme. Comme $(X, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach, par le Théorème d'homéomorphisme de Banach, l'espace $(X, \|.\|_1)$ n'est pas de Banach.

4.7 Exercices

Exercice 4.7.1.

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces vectoriels normés et soit $T : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application linéaire continue. On définit l'application $T^* : \mathcal{F}' \to \mathcal{E}'$ par

$$T^*(\varphi) = \varphi \circ T, \; \varphi \in \mathcal{F}'$$

L'opérateur T^* ainsi défini est dit opérateur adjoint de l'opérateur T.

- Montrer que T^* est linéaire et continue, et que $\|T^*\| \leq \|T\|$.

- Déduire du Théorème de Hahn-Banach que $\|T^*\| = \|T\|$.

Exercice 4.7.2.

Soit $n \in \mathbb{N}, (n \geq 1)$, et soit $E = \mathbb{C}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n et à coefficients complexes.
i. Soit $\{1, X, X^2, .., X^n\}$ la base standard de E. Déterminer la base duale correspondante. (Appliquer le Corollaire 4.3 du Théorème de Hahn-Banach).
ii. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, on définit l'application $\varphi_a : E \to \mathbb{C}$ par

$$\forall P \in E : \varphi_a(P) = P(a)$$

Montrer que pour tout $a \in \mathbb{C}$, $\varphi_a \in E'$.
iii. Soient $a_0, a_1, .., a_n$, $(n+1)$ nombres complexes deux à deux distincts.
Montrer que la famille $\{\varphi_{a_0}, \varphi_{a_1}, .., \varphi_{a_n}\}$ est une base de E'.

Exercice 4.7.3.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Montrer que F est complet si et seulement si $\mathcal{L}(E, F)$ est complet.

Exercice 4.7.4.

a. Soit $\mathcal{X}$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé, muni de deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$. Montrer que ces deux normes sont équivalentes si seulement si les applications d'identité

$$\mathcal{I}_{d_1} : (\mathcal{X}\,, \|.\|_1) \to (\mathcal{X}\,, \|.\|_2) \text{ et } \mathcal{I}_{d_2} : (\mathcal{X}\,, \|.\|_2) \to (\mathcal{X}\,, \|.\|_1)$$

sont continues.

b. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels normés, et soit $\mathcal{T} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application linéaire de graphe fermé.

- Montrer que le noyau de $\mathcal{T}$ est aussi fermé.

Exercice 4.7.5.

Soit $(x_n)_n$ une suite dans un espace de Hilbert H, et soit $x \in H.$

Convergence faible. $(x_n)_n$ est dite faiblement convergente vers x, et l'on écrit $x_n \xrightarrow{w} x$, si

$$\forall y \in \mathcal{H} : \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle$$

Convergence forte. $(x_n)_n$ est dite fortement convergente vers x, et l'on écrit $x_n \xrightarrow{s} x$, si

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$$

Convergence en norme. $(x_n)_n$ est dite convergente en norme vers x si

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$$

a. Montrer que :

1. $(x_n \xrightarrow{s} x) \Rightarrow (x_n \xrightarrow{w} x)$
2. Si $x_n \xrightarrow{w} x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$, alors $x_n \xrightarrow{s} x$

b. Montrer que si $(x_n)_n$ est faiblement convergente dans H, alors $(x_n)_n$ est bornSi $x_n \xrightarrow{w} x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$, alors $x_n \xrightarrow{s} x$ e. (Utiliser le Théorème de Banach-Steinhaus)

Exercice 4.7.6.

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0\leq t\leq 1} |f(t)|$, $f \in E$. On considère l'application $h\colon E \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$h(f) = \int_0^1 f(t)dt, \quad f \in E$$

Montrer que $h \in E'$, puis calculer $\|h\|$.

Exercice 4.7.7.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que l'application identité de $(E, \|.\|_1)$ dans $(E, \|.\|_\infty)$ n'est pas continue, mais que son graphe est fermé.

Exercice 4.7.8.

Montrer que les normes $\|.\|_p$ et $\|.\|_\infty$ sur l'espace $\ell_p(\mathbb{R}), (1 \leq p < \infty)$ ne sont pas équivalentes. Utiliser la suite (x_n) où

$$x_i^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & i \leq n \\ 0, & i > n \end{cases}$$

Que peut-on dire de la proposition suivante :

Toute suite bornée dans l'espace $\ell_p(\mathbb{R})$, contient une sous-suite convergente ? Justifier votre réponse en utilisant le Théorème de Riesz relatif à la comapcité de la boule unité fermée.

Exercice 4.7.9.

Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0 \leq t \leq 2\pi} |f(t)|$, $f \in E$, on considère la suite

$$f_n(t) = e^{int}, \ (n \geq 0, \ t \in [0, 2\pi])$$

Montrer que E est de dimension infinie.

Exercice 4.7.10.

Soient $\|.\|_1$ et $\|.\|_1$ deux normes sur un espace vectoriel X telles que $(X, \|.\|_1)$ et $(X, \|.\|_2)$ soient complets. Montrer que s'il existe $c > 0$ tel que

$$\forall x \in X : \|x\|_1 \leq c\|x\|_2$$

alors, $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes sur X.

Exercice 4.7.11.

(Séparation des points) Soit $(X, \|.\|)$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé, et soient $x, y \in X$ tels que $x \neq y$. Montrer qu'il existe une forme linéaire et continue f sur X telle que $f(x) \neq f(y)$.

N.B. Application directe du Corollaire suivant qui découle du Théorème de Hahn-Banach :

Corollaire. Soit X un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé. Si $x_0 \in X \neq \{0\}$, alors il existe $f \in X'$ telle que $\|f\| = 1$ et $f(x) = \|x\|$.

Exercice 4.7.12.

(L'espace $\ell_1(\mathbb{R})$ n'est pas réflexif)

Soit $\mathcal{C}$ l'espace des suites réelles convergentes. Montrer que $\mathcal{C} \subset (\ell_\infty(\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.

i. Montrer en utilisant le Théorème de Hahn-Banach, qu'il existe $f \in (\ell_\infty(\mathbb{R}))'$ telle que

$$\forall x = (x_n)_n \in \ell_\infty(\mathbb{R}) : f(x) = \lim_{n \to +\infty} x_n$$

ii. Montrer qu'il n'existe aucun $a = (a_n)_{n\geq 1} \in (\ell_1(\mathbb{R}), \|.\|_1)$ tel que pour tout $x = (x_n)_n \in \ell_\infty(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n a_n$$

iii. Déduire que l'espace $(\ell_1(\mathbb{R}), \|.\|_1)$ n'est pas réflexif.

Exercice 4.7.13.

(Théorème de Baire) L'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de la distance euclidienne.

1. Montrer que toute droite dans $\mathbb{R}^2$ est d'intérieur vide.

2. En déduire que $\mathbb{R}^2$ ne peut pas s'écrire comme réunion dénombrable de droites.

Exercice 4.7.14.

(Théorème de Baire) Soit $\mathcal{E}$ un espace métrique. Une partie non vide $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}$ est dite nulle part dense dans $\mathcal{E}$, si aucune boule dans $\mathcal{E}$ n'est entièrement contenue dans $\mathcal{A}$.

Montrer que :

i. $\mathcal{A}$ est nulle part dense dans $\mathcal{E}$ si et seulement si $\mathcal{A}$ est d'intérieur vide, i.e., $\overset{\circ}{\mathcal{A}} = \varnothing$.

ii. $\mathcal{A}$ est nulle part dense dans $\mathcal{E}$ si et seulement si $\mathcal{A}^c$ est dense dans $\mathcal{E}$.

Exercice 4.7.15.

(Théorème de Baire) Soit $\mathcal{F}$ un espace métrique complet.

1. Montrer que si $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ est une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide dans $\mathcal{F}$, i.e., $\overset{\circ}{\mathcal{F}_n} = \varnothing$, $n \geq 1$, alors la réunion $\underset{n\geq 1}{\cup} \mathcal{F}_n$ est aussi d'intérieur vide.

2. Montrer que si $(\mathcal{O}_n)_{n\geq 1}$ est une famille dénombrable d'ouverts denses dans $\mathcal{F}$, alors l'intersection $\underset{n\geq 1}{\cap} \mathcal{O}_n$ est aussi un ouvert dense dans $\mathcal{F}$.

3. Montrer que $\mathcal{F}$ ne peut s'écrire comme réunion de famille dénombrable de fermés d'intérieur vide.

4. Déduire de ce qui précède que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

5. Montrer que l'espace $\mathbb{R}^2$ ne peut pas s'écrire comme réunion dénombrable de droites ou de cercles.

Exercice 4.7.16.

(Théorème de Hellinger-Toeplitz) Soit H un espace de Hilbert, et soit $T : H \to H$ un opérateur linéaire symétrique, i.e.,

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \quad x, y \in H$$

Montrer, par le Théorème du graphe fermé, que T est continu.

Exercice 4.7.17.

Soient X, Y and Z des espaces vectoriels normés avec Z complet.

1. Soit $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ un opérateur injectif, et soit $A : X \to Y$ est un opérateur linéaire tel que BA soit borné.

Montrer que A est borné.

2. Soit $T \in \mathcal{L}(X, Z)$ et $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. On suppose que

$$\forall x \in X, \exists y \in Y : Tx = Sy$$

On pose $Bx = y$. Montrer que $B \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Chapitre 5

Sujets d'examens

5.1 EMD 2015/2016

Exercice 1 Considérons les espaces vectoriels normés

$$\ell_1 := \left\{ x = (x_n)_n \subset \mathbb{C} : \sum_{k=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty \right\} \text{ et } \ell_\infty := \left\{ x = (x_n)_n \subset \mathbb{C} : \sup_{n \geq 1} |x_n| < +\infty \right\}$$

munis des normes $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ et $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n \geq 1} |x_n|$, $x = (x_n)_n \subset \mathbb{C}$ respectivement. Notons $(e_k)_{k \geq 1}$ la base standard de ℓ_1.

Soit $f \in \ell_1'$. Posons $u = (u_k)_{k \geq 1} = (f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n), ..)$.

1. Donner une expression de $f(x)$, $x \in \ell_1$.

2. Montrer que $u \in \ell_\infty$.

3. Estimer la norme de f.

4. Que peut-on déduire des questions (2) et (3) ?

Exercice 2 Soit $\mathcal{E} = \mathcal{C}_0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme, et soit $\mathcal{F}$ un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}$ tel que toute fonction $f \in \mathcal{F}$ soit de classe $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$.

Montrer, que le graphe de l'application $\mathcal{T} \colon \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ définie par $\mathcal{T}f = f'$ est fermé, et que T n'est pas continue.

-Discuter. .

Exercice 3 On note $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telles que $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f(t) = 0$, et note $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact, i.e.

$$\mathcal{K}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continue } / \ \exists \mathcal{K} \subset \mathbb{R} \text{ compact } : \ f(t) = 0, \ \forall t \notin \mathcal{K}\}$$

Notre but est de montrer que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est le complété de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ pour la norme uniforme.

Partie I.

1. Montrer que $\mathcal{K}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$: L'espace vectoriel des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$).

3. Montrer que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est fermé dans l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, i.e., montrer que si $(f_n)_n$ est une suite dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ qui converge uniformément vers $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

4. En déduire que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est un espace de Banach. (Utiliser le fait que $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un espace de Banach pour la norme uniforme).

Partie II. Soit $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Considérons les fonctions

$$\varphi_n = \max(f, \frac{1}{n}), \ \psi_n = \max(-f, \frac{1}{n}) \text{ et } \quad f_n = \varphi_n - \psi_n, \ (n \geq 1)$$

1. Compléter le tableau suivant

	$\varphi_n(t)$	$\psi_n(t)$	$f_n(t)$	$\lvert f(t) - f_n(t\rvert$
$f(t) \geq \frac{1}{n}$				
$\frac{-1}{n} \leq f(t) \leq \frac{1}{n}$				
$f(t) \leq \frac{-1}{n}$				

2. Déduire du tableau que $\lim_{n \to +\infty} \|f - f_n\| = 0$.

3. Montrer que $f_n \in \mathcal{K}(\mathbb{R}),\ (n \geq 1)$. (Utiliser le tableau).

4. En déduire de II.1 et II.2 que $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ est partout dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

5. Déduire de tout ce qui précède que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est le complété de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ pour la norme uniforme.

5.1.1 Corrigé de l'EMD 2015/2016

Exercice 1 1. Soit $x = (x_k)_{k\geq 1} \in \ell_1$. On a donc

$$f(x) = f(\sum_{k=1}^{+\infty} x_k e_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k u_k$$

car f est linéaire.

2. On a

$$\|u\|_\infty = \sup_{k\geq 1} |u_k| = \sup_{k\geq 1} |f(e_k)| \leq \|f\|_{\ell_1'} < +\infty \quad (1)$$

Ce qui montre que $u \in \ell_\infty$.

3. Pour tout $x = (x_k)_{k\geq 1} \in \ell_1$, On a

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty} x_k u_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{+\infty} x_k \sup_{k\geq 1} |u_k|\right| \leq \|u\|_\infty \left|\sum_{k=1}^{+\infty} x_k\right| \leq \|u\|_\infty \|x\|_1$$

D'où

$$\|f\|_{\ell_1'} = \sup_{k\geq 1} \frac{|f(x)|}{\|x\|_1} \leq \|u\|_\infty \qquad (2)$$

4. De (1) et (2), on aura $\|f\|_{\ell_1'} = \|u\|_\infty$.

Exercice 2 Soit $(f_n, \mathcal{T} f_n)_n$ une suite dans $\mathcal{G}(\mathcal{T})$, le graphe de $\mathcal{T}$, qui converge vers (f, g). Est-ce qu'on a $g = \mathcal{T} f$?.

On a donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, et $(\mathcal{T} f_n = f_n')_n$ converge uniformément vers g. Donc, et d'après un résultat de la dérivabilité d'une suite de fonctions, f est de classe $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, et de plus $f' = g$, i.e., $\mathcal{T} f = g$. D'où, $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ est fermé. D'après le théorème du graphe fermé, $\mathcal{T}$ est continu.

Exercice 3 **Partie I**.

1. Si $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$, alors $f(x) = 0, x \notin \mathcal{K} = [a, b]\,, (-\infty < a < b < +\infty)$ et f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\lim_{|t|\to+\infty} f(t) = 0$$

D'où, $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc, f est continue en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. Elle est par suite bornée au voisinage de x_0. De plus, comme $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f(t) = 0$, il s'ensuit que

$$\exists A > 0 / \forall x \in \mathbb{R}, |x| > A \Rightarrow |f(x)| < 1$$

Ce qui montre que f est bornée au voisinage de $\mp\infty$. Par conséquent, f est bornée sur $\mathbb{R}$. D'où, $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. Soit $(f_n)_n$ une suite dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ qui converge uniformément vers $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq N_0, \forall t \in \mathbb{R} : |f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

De même, $f_n \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}), n \geq 1$. D'où, f_n est continue sur $\mathbb{R}$. Alors f est aussi continue sur $\mathbb{R}$. On a de plus $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f_n(t) = 0$. Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 / \forall\, |t| > A : |f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

Soit $\varepsilon > 0$. On aura de (1) et (2) que

$$\forall\, |t| > A, \forall n \geq N_0 : |f(t)| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

c-à-d

$$\lim_{|t|\to+\infty} f(t) = 0$$

Donc $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

4. $\mathcal{C}_0(\mathbb{R} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donc $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est un fermé dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui est complet. Donc $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est aussi complet. Il est donc un espace de Banach.

Partie II. 1. Soit $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

	$\varphi_n(t)$	$\psi_n(t)$	$f_n(t)$	$\|f(t) - f_n(t\|$
$f(t) \geq \frac{1}{n}$	$f(t)$	$1/n$	$f(t) - 1/n$	$1/n$
$\frac{-1}{n} \leq f(t) \leq \frac{1}{n}$	$1/n$	$1/n$	0	0
$f(t) \leq \frac{-1}{n}$	$1/n$	$-f(t)$	$f(t) + 1/n$	$1/n$

2. Du tableau précédent, on aura que

$$\forall t \in \mathbb{R} : |f(t) - f_n(t)| \leq \frac{1}{n}$$

D'où

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t) - f_n(t)| = \|f - f_n\| \leq \frac{1}{n} \to 0,\ (n \to +\infty)$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - f_n\| = 0$.

3. Du tableau, on a : si $|f(t)| \leq \frac{1}{n}$, alors $f_n(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Comme $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f(t) = 0$ car $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, alors pour tout $n \geq 1$:

$$\exists B > 0 / \forall\, |t| > B : |f(t)| \leq \frac{1}{n}$$

Donc, pour tout t, $|t| > B : f_n(t) = 0 \qquad (*)$

Reste à montrer que f_n est continue sur $\mathbb{R}$ On a

$$\begin{aligned} f_n &= \varphi_n - \psi_n = \varphi_n = \max(f, \frac{1}{n}) - \max(-f, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}(f + \frac{1}{n} + \Big|f - \frac{1}{n}\Big|) - \frac{1}{2}(-f + \frac{1}{n} + \Big|-f - \\ &= f + \frac{1}{2}(\Big|f - \frac{1}{n}\Big| - \Big|f + \frac{1}{n}\Big|) \end{aligned}$$

Ce qui montre que f_n est continue sur $\mathbb{R}$, $(n \geq 1) \qquad (**)$

D'où, et de $(*)$ et $(**)$, on conclut que $f_n \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$, $(n \geq 1)$.

4. De II.1 et II.2, pour tout $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, il existe une suite $f_n \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - f_n\| = 0$. D'où, $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ est partout dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

5. On a donc :

- $\mathcal{K}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est un espace de Banach.
- $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ est partout dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Par conséquent, $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est le complété de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ pour la norme uniforme.

5.2 Rattrapage 2015/2016

Exercice 1 a. Soient $(\mathcal{E}_1, \|.\|_1)$ et $(\mathcal{E}_2, \|.\|_2)$ deux espaces vectoriels normés.

Montrer que si $\mathcal{E}_1$ est de dimension finie, alors toute application linéaire de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_2$ est continue.

b. Soit $\mathcal{K}$ une fonction continue sur $[0,1] \times [0,1]$, et soit $\mathcal{X} = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et muni de la norme $\|.\|_\infty$. Considérons l'application $\mathcal{A}\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ définie par

$$(\mathcal{A}u)(x) = \int_0^1 \mathcal{K}(x,y)u(y)dy, \quad u \in \mathcal{X}$$

i. Montrer que $\mathcal{A}$ est une application linéaire et continue.

ii. En déduire que $\|\mathcal{A}\| \leq \|\mathcal{K}\|_\infty$.

Exercice 2 Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel fermé de $(\mathcal{L}^2([0,1]), \|.\|_2)$.

On suppose que $\mathcal{V} \subset (\mathcal{L}^\infty([0,1]), \|.\|_\infty)$.

1. L'espace $(\mathcal{V}, \|.\|_2)$ est-il de Banach ? Justifier.

2. En utilisant le théorème du graphe fermé, montrer que l'application Identité

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}\colon (\mathcal{V}, \|.\|_2) & \to & (\mathcal{L}^\infty([0,1]), \|.\|_\infty) \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

est continue.

3. En déduire qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout f, $f \in \mathcal{V}$: $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_2$

Exercice 3 Considérons les espaces de Banach

$$\ell_p(\mathbb{Z}) := \left\{ x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C} : \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k| < +\infty \right\}$$

et

$$\ell_\infty(\mathbb{Z}) := \left\{ x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C} : \sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| < +\infty \right\}$$

$(1 \leq p < +\infty)$, munis des normes $\|x\|_p = (\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ et $\|x\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|$ respectivement, $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$.

1. Soient $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell_1(\mathbb{Z})$ et $u = (u_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$. Posons $v = (v_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ où

$$v_k = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p u_{k-p},\ (k \in \mathbb{Z})....(*)$$

Montrer que $v \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$. (On peut utiliser l'inégalité de Hölder)

2. Soit $u \in \ell_2(\mathbb{Z})$. On pose $\varphi(u) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|u_k|^2}{1+k^2}$, et on considère l'ensemble

$$\mathcal{F} = \{u \in \ell_2(\mathbb{Z}) : \varphi(u) \leq 1\}$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble convexe et fermé de $\ell_2(\mathbb{Z})$.

5.2.1 Corrigé du Rattrapage 2015/2016

Exercice 1 a. On suppose que $\dim \mathcal{E}_1 = n, n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_i)_{i=1}^n$ une base de $\mathcal{E}_1$, et soit $x \in \mathcal{E}_1$. Alors $x = \sum\limits_{i=1}^n x_i e_i,\ (x_i \in \mathbb{C},\ i = \overline{1,n})$. D'où

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}x\| &= \left\|\sum_{i=1}^n x_i \mathcal{T}e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \, \|\mathcal{T}e_i\| \leq \sum_{i=1}^n (\max_{i=\overline{1,n}} |x_i|) \, \|\mathcal{T}e_i\| = (\max_{i=\overline{1,n}} |x_i|) \sum_{i=1}^n \|\mathcal{T}e_i\| \\
&= \sum_{i=1}^n \|\mathcal{T}e_i\| \, \|x\| = C \, \|x\|_\infty
\end{aligned}$$

où

$$\|x\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$$

$\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$ est équivalente à la norme $\|.\|_1$ de $\mathcal{E}_1$ car $\mathcal{E}_1$ est isomorphe à $\mathbb{C}^n$, et $C = \sum\limits_{i=1}^n \|\mathcal{T}e_i\| < +\infty$.

i. Si $C = 0$, alors $\mathcal{T} \equiv 0$ et $\mathcal{T}$ est donc continue.

ii. Si $C > 0$, alors $\mathcal{T}$ est continue.

b. i. Soient $u, v \in \mathcal{X}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\lambda u + v)(x) &= \int_0^1 \mathcal{K}(x,y)(\lambda u + v)(y)dy = \int_0^1 \mathcal{K}(x,y)(\lambda u)(y) + v(y))dy \\
&= \int_0^1 \mathcal{K}(x,y)(\lambda u)(y)dy + \int_0^1 \mathcal{K}(x,y)v(y)dy \\
&= \lambda \int_0^1 \mathcal{K}(x,y)u(y)dy + \int_0^1 \mathcal{K}(x,y)v(y)dy \\
&= \lambda(\mathcal{A}u)(x) + (\mathcal{A}v)(x) \\
&= (\lambda\mathcal{A}u + \mathcal{A}v)(x)
\end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$\mathcal{A}(\lambda u + v) = \lambda\mathcal{A}u + \mathcal{A}v, \ \ u, v \in \mathcal{X}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

et $\mathcal{A}$ est donc linéaire de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}$.

ii. On a pour tout $u \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}u\|_{\mathcal{X}} &= \sup_{x\in[0,1]} |(\mathcal{A}u)(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^1 \mathcal{K}(x,y)u(y)dy \right| \leq \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 \sup_{y\in[0,1]} (|\mathcal{K}(x,y)u(y)|)\ dy \\
&\leq \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 \sup_{y\in[0,1]} |\mathcal{K}(x,y)| \sup_{y\in[0,1]} |u(y)|\ dy
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}u\|_{\mathcal{X}} &\leq \sup_{x\in[0,1]} \sup_{y\in[0,1]} |\mathcal{K}(x,y)| \sup_{y\in[0,1]} |u(y)| \int_0^1 dy \\
&= \|\mathcal{K}\|_\infty \|u\|_\infty
\end{aligned}$$

D'où, $\mathcal{A}$: $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ est continue, et l'on a $\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq \|\mathcal{K}\|_\infty$.

Exercice 2 1. $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel fermé dans $(\mathcal{L}^2([0,1]), \|.\|_2)$ qui est complet car c'est un espace de Banach. Donc $\mathcal{V}$ est complet. Par suite, $\mathcal{V}$ est aussi un espace de Banach.

2. Soit $(f_n, \mathcal{I}f_n) = (f_n, f_n)$ une suite dans $\mathcal{G}(\mathcal{I})$ le graphe de $\mathcal{I}$, qui converge vers (f, g). A-t-on $g = \mathcal{I}f = f$?

On a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \mathcal{I}f_n = g$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_2 = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \|\mathcal{I}f_n - g\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \|f_n - g\|_\infty = 0$$

Par conséquent, $f = g$ et donc $g = \mathcal{I}f$, car $(f_n)_n$ ne peut admetre qu'une seule limite dans $\mathcal{V}$ et donc dans $\mathcal{L}^\infty([0,1])$ car $\mathcal{V} \subset (\mathcal{L}^\infty([0,1])$.

Ce qui prouve que $\mathcal{G}(\mathcal{I})$ est fermé. Comme $\mathcal{I}$ agit entre deux espaces de Banach, $\mathcal{I}$ est donc continue par le théorème du graphe fermé.

3. Comme $\mathcal{I}$ est continue, il existe $C > 0$ telle que pour tout $f \in \mathcal{V}$, on a :

$$\|\mathcal{I}f\|_\infty = \|f\|_\infty \leq C \|f\|_2$$

Exercice 3 1. On a

$$\begin{aligned}
\|v\|_\infty &= \sup_{k\in\mathbb{Z}} |v_k| = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p u_{k-p} \right| \leq \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |a_p u_{k-p}| \leq \\
&\leq \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |a_p| \sup_{k\in\mathbb{Z}} |u_{k-p}| = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |u_{k-p}| \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |a_p| \leq \|a\|_1 \|u\|_\infty
\end{aligned}$$

D'où

$$\|v\|_\infty \leq \|a\|_1 \|u\|_\infty < +\infty$$

Ce qui montre que $v \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$.

2. i. Soient $u = (u_k)_{k\in\mathbb{Z}}, v = (v_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{F}$, et soit $t \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned}
\varphi(tu + (1-t)v) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|tu_k + (1-t)v_k|^2}{1+k^2} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{(tu_k + (1-t)v_k)(t\overline{u_k} + (1-t)\overline{v_k})}{1+k^2} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 |u_k|^2 + (1-t)^2 |v_k|^2 + 2t(1-t)Re(u_k\overline{v_k})}{1+k^2} \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 |u_k|^2 + (1-t)^2 |v_k|^2 + t(1-t)(|u_k|^2 + |v_k|^2)}{1+k^2}, \; (2Reab \leq |a|^2 + |b|^2) \\
&\leq t^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|u_k|^2}{1+k^2} + (1-t)^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|v_k|^2}{1+k^2} + t(1-t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|u_k|^2 + |v_k|^2}{1+k^2} \\
&\leq t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) = 1
\end{aligned}$$

Car $u, v \in \mathcal{F}$. D'où, $tu + (1-t)v \in \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ est donc un sous-ensemble convexe de $\ell_2(\mathbb{Z})$.

ii. Soit $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{F}$ qui converge vers un élément $u = (u_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$. A-t-on $u \in \mathcal{F}$? On a

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = (u_k^{(n)})_{k\in\mathbb{Z}} = (......, u_{-1}^{(n)}, u_0^{(n)}, u_1^{(n)}, ...)$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N} : \forall n, n \geq N_0 : \|u_n - u\|_2 < \varepsilon$. D'où,

$$\forall n,\; n \geq N_0 : \left| \left| u_k^{(n)} \right| - |u_k| \right| \leq \left| u_k^{(n)} - u_k \right| \leq \|u_n - u\|_2 < \varepsilon$$

Comme $u_n \in \mathcal{F},\ n \in \mathbb{N}$, alors $\varphi(u_n) \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$. C-à-d, pour tout $m \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{k=-m}^{m} \frac{\left|u_k^{(n)}\right|^2}{1+k^2} \leq 1$. Donc, par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on aura

$$\sum_{k=-m}^{m} \frac{|u_k|^2}{1+k^2} \leq 1,\ m \in \mathbb{N}$$

Et quand $m \to +\infty$, on obtiendra

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|u_k|^2}{1+k^2} \leq 1$$

i.e. $\varphi(u) \leq 1$, et donc $u \in \mathcal{F}$.

5.3 Rattrapage 2016/2017

Exercice 1 Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{E} = \mathbb{C}_n[X]$, $(n \in \mathbb{N}^*)$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n et à coefficients complexes. Notons par $\mathcal{E}'$ à son dual topologique.

i. Soit $\{1, X, X^2, .., X^n\}$ la base standard de $\mathcal{E}$. Donner sa base duale correspondante.

ii. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, on définit l'application $f_\lambda \colon \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ par $f_a(P) = P(a)$, $P \in \mathcal{E}$.

- Montrer que $f_a \in \mathcal{E}'$ pour tout $a \in \mathbb{C}$.

iii. Soient $a_o, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ vérifiant $a_i \neq a_j$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$.

- Montrer que la famille $\{f_{a_i}\}_{i=0}^n$ est une base de $\mathcal{E}'$.

Exercice 2 Soit $\mathcal{H}$ le sous-espace de $(\ell_\infty, \|.\|_\infty)$ constitué des suites convergentes, i.e.

$$\mathcal{H} = \left\{ x = (x_n)_n \in \ell_\infty : \lim_{n\to+\infty} x_n \text{ existe} \right\}$$

i. Montrer que l'application $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} x_n,\ x = (x_n)_n \in \mathcal{H}$$

est linéaire.

ii. Montrer que f est bornée, et estimer sa norme.

Exercice 3 Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{B}(\mathbb{R}\mathbb{R})$ des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On le munit de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

- Montrer que $(\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Soit $\mathcal{F}$ le sous-espace de $\mathcal{B}(\mathbb{R}\mathbb{R})$ formé des fonctions continues f telles que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer que $\mathcal{F}$ est fermé dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}\mathbb{R})$.

5.3.1 Corrigé du Rattrapage 2016/2017

Exercice 1 i. Comme $\mathcal{E}' = \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{C})$, $\dim \mathcal{E}' = \dim \mathcal{E} \times \dim \mathbb{C} = \dim \mathcal{E} = n+1$. Soit donc $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ la base demandée. On a

$$\varphi_i(X^j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (0 \leq i, j \leq n)$$

Donc pour tout $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathcal{E}$:

$$\varphi_i(P) = \varphi_i(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_i(X^k) = a_i, \quad (0 \leq i \leq n)$$

ii. Pour tous $P, Q \in \mathcal{E}$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$f_a(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(a) = (\lambda P)(a) + Q(a) = \lambda(P)(a) + Q(a) = \lambda f_a(P) + f_a(Q)$$

D'où la linéarité de f_a.

De plus, comme $\dim \mathcal{E}'$ est finie, l'application f_a est continue. Par conséquent, $f_a \in \mathcal{E}'$.

iii. Il suffit de montrer que $(f_{a_0}, f_{a_1}, ..., f_{a_n})$ est libre dans $\mathcal{E}'$. Soient donc $\lambda_i \in \mathbb{C}, 0 \leq i \leq n$ tels que $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i f_{ai} = 0$. On a

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_{ai}(P) = 0, \ P \in \mathcal{E}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(a_i) &= 0, \ P \in \mathcal{E} \\ \lambda_0 P(a_0) + \lambda_1 P(a_1) + ... + \lambda_n P(a_n) &= 0, \ P \in \mathcal{E} \quad (*) \end{aligned}$$

En remplaçant par les polynômes $P_k = \frac{\prod\limits_{i=0, i\neq k}^{n} (X - a_i)}{\prod\limits_{i=0, i\neq k}^{n} (a_k - a_i)}$, $k = \overline{0, n}$ dans la formule $(*)$, on obtiendra

$$\lambda_k = 0, \ k = \overline{0, n}$$

Exercice 2 i. Soient $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in \mathcal{H}$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= f((\lambda x_n + y_n)) = \lim_{n\to+\infty}(\lambda x_n + y_n) = \lim_{n\to+\infty}\lambda x_n + \lim_{n\to+\infty} y_n \\ &= \lambda \lim_{n\to+\infty} x_n + \lim_{n\to+\infty} y_n = \lambda f(x) + f(y) \end{aligned}$$

D'où, f est linéaire.

De même, on a pour toute suite $(x_n)_n \in \mathcal{H}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}/\forall n \geq N : \|x_n - \ell\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - \ell| < \varepsilon$$

Donc pour $\varepsilon = \|x_n\|$, on aura

$$|f((x_n))| = |\ell| \leq |\ell - x_n| + |x_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - \ell| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \|x_n - \ell\|_\infty + \|x_n\|_\infty \leq 2\,\|x_n\|_\infty$$

D'où, f est bornée.

ii. On a : $\|f\| \leq 2$.

Exercice 3 i. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}/\forall n, m,\ m > n,\ (n \geq N_0 \text{ et } m \geq N_0) \Rightarrow (\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon)$$

D'où, pour $n \geq N_0$ et $m \geq N_0$, on aura

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \qquad (*)$$

Soit donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tous n, m avec $n \geq N_0$ et $m \geq N_0$: $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Ce qui montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Elle est donc convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$, car $\mathbb{R}$ est complet. Soit donc

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x),\ x \in \mathbb{R}$$

Fixons n et faisons tendre m vers $+\infty$ dans $(*)$. On obtiendra

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}/\forall n, m, (m > n), (n \geq N_0 \text{ et } m \geq N_0) \Rightarrow (\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon)$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$.

A-t-on $f \in \mathbb{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

On a pour $\varepsilon = 1$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \|f_n - f\|_\infty + \|f_n\|_\infty \leq 1 + \|f_n\|_\infty = Cte$$

car $f_n \in \mathbb{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$.

D'où, f est bornée, i.e., $f \in \mathbb{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Par conséquent, l'espace $\mathbb{B}(\mathbb{R}\mathbb{R})$ est complet. Il est donc de Banach.

ii. Soit $(g_n)_n$ une suite dans $\mathcal{F}$ qui converge vers une fonction g. A-t-on $g \in \mathcal{F}$?

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Il existe donc $A_n > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x > A_n \Rightarrow |g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

On a donc

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}/\forall n, m, (m > n), (n \geq N_0 \text{ et } m \geq N_0) \Rightarrow (\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| = \|g_n - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2})$$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R} : x > A_n$

$$|g(x)| \leq |g_n(x) - g(x)| + |g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Ce qui montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

5.4 EMD 2017/2018

Exercice 1 a. Soit $\mathcal{E} = L_p([0,1])$, $(1 \le p < +\infty)$, et soit l'application $A\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $u \mapsto Au$ où

$$Au(x) = xu(x), \ \ x \in [0,1]$$

Montrer que $A \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$, et donner un majorant de sa norme.

b. Soit $\mathcal{X}$ est espace vectoriel normé. Notons $\mathcal{X}'$ son dual. Montrer par un Corollaire du Théorème de Hahn-Banach, que si $\mathcal{X} \neq \{0\}$, alors $\mathcal{X}' \neq \{0\}$.

c. Montrer, en utilisant le Théorème de Baire, que l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne, ne peut s'écrire comme réunion dénombrable de cercles.

Exercice 2 Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel fermé de l'espace $\mathcal{F} = \mathcal{C}^\circ([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ tel que pour tout $f \in \mathcal{V}$, f est continûment dérivable sur $[0,1]$.

i. Montrer que l'application $\Phi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{F}$, $f \mapsto \Phi(f) = f'$ est linéaire.

ii. Montrer que le graphe de Φ est fermé.

iii. Montrer que l'espace $\mathcal{V}$ est complet.

iv. Que peut-on déduire pour la forme linéaire Φ ? Justifier votre réponse.

Exercice 3 Considérons l'espace vectoriel

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_n)_{n\ge1} \subset \mathbb{R} : \sup_{n\ge1} |x_n| < +\infty \right\}$$

muni de la norme $\|.\|_\infty$ où $\|x\|_\infty = \sup_{n\ge1} |x_n|$, et soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des suites réelles convergentes.

a. Montrer que $\mathcal{C} \subset \ell_\infty$.

b. Considérons l'application $f_0\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ où

$$f_0(x) = \lim_{n\to+\infty} x_n, \ \ x = (x_n)_n \in \mathcal{C}$$

- Montrer que f_0 est linéaire et continue sur $\mathcal{C}$, puis déterminer $\|f_0\|$.

c. Montrer, en utilisant le Théorème de Hahn-Banach, qu'il existe $f \in (\ell_\infty)'$ telle que

$$\forall x = (x_n)_n \in \mathcal{C} : f(x) = \lim_{n \to +\infty} x_n$$

Trouver $\|f\|$.

d. On cherche à montrer qu'il n'existe aucun $a = (a_n)_{n \geq 1} \in (\ell_1, \|.\|_1)$ tel que pour tout élément $x = (x_n)_n \in \ell_\infty$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n a_n$$

Pour cela :

d.1. Montrer que si a existe, alors $f(a) = 0$.

d.2. Déduire que f est la forme linéaire nulle sur ℓ_∞, et que ceci contredit la question (c). d.3. Conclure.

5.4.1 Corrigé de l'EMD 2017/2018

Exercice 1 a. i. Soient $u, v \in \mathcal{E}$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a pour tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} A(u+\lambda v)(x) &= x(u+\lambda v)(x) = x(u(x)+(\lambda v)(x)) \\ &= x(u(x)+\lambda v(x)) = xu(x)+x(\lambda v(x)) \\ &= xu(x)+\lambda xv(x) \\ &= Au(x)+\lambda Av(x) \end{aligned}$$

D'où

$$A(u+\lambda v) = Au + \lambda Av$$

Ce qui montre que A est linéaire.

ii. Soit $u \in \mathcal{E}$. On a

$$\|Au\|_p = (\int_0^1 |Au(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}} = (\int_0^1 |xu(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_0^1 |u(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_p$$

D'où, A est continue, et $\|A\| \leq 1$.

b. Soit $x \in \mathcal{X}$ tel que $x \neq 0$. Par un corollaire du Théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in \mathcal{X}'$ tel que $\|f\| = 1$ et $f(x) = \|x\| \neq 0$. D'où $f \in \mathcal{X}'$ et $f \neq 0$. Ce qui montre que $\mathcal{X}' \neq \{0\}$.

c. On suppose que $\mathbb{R}^2 = \underset{n\geq 1}{\cup} C_n$, avec C_n, $n \geq 1$ des cercles dans $\mathbb{R}^2$ d'équations

$$(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2 = r_n^2$$

où $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ et $r_n > 0$, $n \geq 1$. Soit d la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$.

L'espace $(\mathbb{R}^2, d)$ étant complet. De plus, si l'on considère les applications $f_n \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ où

$$(x,y) \mapsto f_n(x,y) = (x-x_n)^2 + (y-y_n)^2 - r_n^2$$

on aura que les f_n, $n \geq 1$ sont toutes continues sur $\mathbb{R}^2$. De plus, $f_n^{-1}\{0\} = C_n$, $n \geq 1$. Ce qui montre que C_n est fermé dans $\mathbb{R}^2$, $n \geq 1$.

Par le Théorème de Baire, il existe $n_0 \geq 1$ tel que $\overset{\circ}{C}_{n_0} \neq \varnothing$. Contradiction car $\overset{\circ}{C}_n = \varnothing$, $n \geq 1$ du fait qu'il n'existe aucune boule ouverte dans $\mathbb{R}^2$ entièrement contenante dans C_n, $n \geq 1$.

Exercice 2 i. Soient $f, g \in \mathcal{V}$ et soit $\beta \in \mathbb{R}$. On a

$$(\beta f + g)' = \beta f' + g'$$

D'où

$$\Phi(\beta f + g) = \beta\Phi(f) + \Phi(g)$$

Φ est donc linéaire.

ii. Soit $(f_n, \Phi(f_n))_{n\geq 1} = (f_n, f_n')_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathcal{G}(\Phi)$, le graphe de Φ, qui converge vers (f, g). A-t-on $(f, g) \in \mathcal{G}(\Phi)$?, i.e., $f \in \mathcal{V}$ et $g = \Phi(f)$?

La suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, et la suite $(f_n')_n$ converge uniformément vers g. Donc, et d'après un résultat de la dérivabilité d'une suite de fonctions, f est de classe $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, c-à-d, $f \in \mathcal{V}$ car $\mathcal{V}$ est fermé, et de plus $f' = g$, i.e., $\Phi(f) = g$. D'où, $\mathcal{G}(\Phi)$ est fermé.

iii. L'espace $\mathcal{V}$ est complet. En effet, $\mathcal{V}$ est fermé et contenu dans l'espace complet $\mathcal{F}$.

iv. Comme $\mathcal{V}$ et $\mathcal{F}$ sont complets, et le graphe de Φ est fermé, Φ est continu par le théorème du graphe fermé.

Exercice 3 a. Si $x = (x_n)_n \in \mathcal{C}$, alors $(x_n)_n$ est convergente. $(x_n)_n$ est donc bornée. Par suite, $x = (x_n)_n \in \ell_\infty$.

b. f_0 est linéaire. En effet, pour tous $x = (x_n)_n$, $y = (y_n)_n \in \mathcal{C}$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_0(\alpha x + y) &= \lim_{n\to+\infty} (\alpha x_n + y_n) = \lim_{n\to+\infty} (\alpha x_n) + \lim_{n\to+\infty} y_n \\ &= \alpha \lim_{n\to+\infty} x_n + \lim_{n\to+\infty} y_n \\ &= \alpha f_0(x) + f_0(y) \end{aligned}$$

et f_0 est donc linéaire.

De plus, pour tout $x = (x_n)_n \in \mathcal{C}$:

$$|f_0(x)| = \left| \lim_{n\to+\infty} x_n \right| \leq \sup_{n\geq 1} |x_n| = \|x\|_\infty$$

Donc, f est continue et $\|f_0\| \leq 1$ $\quad$ (1). De plus, pour la suite $y = (y_n) = (1, 1, 1, ..., 1, ..) \in \mathcal{C}$, on aura

$$\frac{|f_0(y)|}{\|y\|_\infty} = \frac{\left| \lim_{n\to+\infty} y_n \right|}{\sup_{n\geq 1} |y_n|} = \frac{1}{1} = 1$$

D'où

$$\|f_0\| = \sup_{x\in\mathcal{C}, x\neq 0} \frac{|f_0(x)|}{\|x\|_\infty} \geq \frac{|f_0(y)|}{\|y\|_\infty} = 1$$

i.e, $\|f_0\| \geq 1$ $\qquad$ (2)

De (1) et (2), on obtiendra que $\|f_0\| = 1$.

c. Comme $\mathcal{C} \subset \ell_\infty$ est un s.e.v, et $f_0 \in \mathcal{C}'$, par le Théorème de Hahn-Banach, f_0 admet un prolongement en une forme linéaire continue $f : \ell_\infty \to \mathbb{C}$

, c-à-d,

$$\forall x = (x_n)_n \in \mathcal{C} : f(x) = f_0(x)$$

De plus, $\|f\| = \|f_0\| = 1$.

d) d1. Par l'absurde, on suppose que a existe dans ℓ_1. Donc

$$\forall x = (x_n)_n \in \ell_\infty : f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n a_n = \lim_{n\to+\infty} x_n \qquad (*)$$

D'où

$$f(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = \lim_{n \to +\infty} a_n$$

Comme $a \in \ell_1$, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge. Par suite

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

Par conséquent

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = 0$$

Donc $a_n = 0, n \geq 1$. Soit donc $a = 0$.

d2. Comme $a = 0$ et par $(*)$, on aura

$$f(x) = 0,\ x = (x_n)_n \in \ell_\infty$$

i.e., $f = 0$. Contradiction car $\|f\| = 1$.

5.5 Rattrapage 2017/2018

Exercice 1 a. Soit $\mathcal{X}$ un espace vectoriel normé. Notons $\mathcal{X}'$ son dual. Montrer par un corollaire du Théorème de Hahn-Banach, que si $x, y \in \mathcal{X}$ et $x \neq y$, alors il existe $f \in \mathcal{X}'$ tel que $f(x) \neq f(y)$.

b. Montrer, par le Théorème de Baire, que l'espace des nombres réels $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 2 1. L'espace ℓ_1 est muni des normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$. Montrer qu'il existe $c > 0$ telle que

$$\forall x \in \ell_1 : \|x\|_\infty \leq c \|x\|_1$$

2. Montrer que les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sur l'espace ℓ_1 ne sont pas équivalentes. Utiliser la suite $(a_n)_n$ où

$$a_i^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & i \leq n \\ 0, & i > n \end{cases}$$

3. Soit $(x_n)_n$ une suite bornée dans l'espace ℓ_1.

- Montrer que $(x_n)_n$ **ne peut** admettre une sous-suite convergente dans ℓ_1. (Réponse détaillée).

Exercice 3 Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé, et soit $\mathcal{E}''$ le bidual de $\mathcal{E}$, i.e., le dual de $\mathcal{E}'$, constitué des formes linéaires continues de $\mathcal{E}'$ dans $\mathbb{C}$. On considère l'application $J \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}''$, $x \mapsto J(x) = J_x$ où

$$J_x \colon \mathcal{E}' \to \mathbb{C}, \quad J_x(f) = f(x), \quad f \in \mathcal{E}'$$

- Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{E}$, J_x est une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}'$.

- Montrer, par le théorème de Hahn-Banach, que $J \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}''$ est une isométrie, i.e. $\|J_x\| = \|x\|$, $x \in \mathcal{E}$.

5.5.1 Corrigé du Rattrapage 2017/2018

Exercice 1 a. Comme $x \neq y, x - y \neq 0$. Alors, par un corollaire du Théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in \mathcal{X}', \|f\| = 1$, tel que $f(x - y) \neq 0$. Par suite, $f(x) \neq f(y)$.

b. Par l'absurde, on suppose que $\mathbb{R}$ est pas dénombrable. Donc $\mathbb{R} = \{x_0, x_1, x_2, ...\}$ où $x_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}$, i.e., $\mathbb{R} = \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} \{x_i\}$. Le singleton $\{x_i\}$ étant fermé dans $\mathbb{R}$ car $\{x_i\}^C =]-\infty, x_i[\cup]x_i, +\infty[$ est un ouvert dans $\mathbb{R}$. De plus, $\mathbb{R}$ est complet. Par le théorème de Baire, il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\{x_{i_0}\}$ est d'intérieur non vide. Il existe donc un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$ inclus dans $\{x_{i_0}\}$. Contradiction. Par conséquent, $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 2 1. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell_1$, on a

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 1} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| = \|x\|_1$$

Il suffit donc de prendre $c = 1$.

2. On a

$$\|a\|_\infty = \sup_{n\geq 1} |a_n| = \frac{1}{2}$$

et

$$\|a\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

Par suite

$$\frac{\|a\|_1}{\|a\|_\infty} = n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

Par conséquent, il n'existe aucun $c' > 0$ tel que

$$\|a\|_1 \leq c' \|a\|_\infty$$

Et donc, $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur ℓ_1.

3. Si on suppose que $(x_n)_n$ peut admettre une sous-suite convergente dans ℓ_1. Donc, la boule unité fermée est compacte dans ℓ_1. Par le théorème de Riesz

relatif à la compacité de la boule unité fermée, l'espace ℓ_1 est de dimension finie. Contradiction.

Exercice 3 1. i. Soit $x \in \mathcal{E}$. On a pour tous $f, g \in \mathcal{E}^{'}$, et tout $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$J_x(\alpha f + g) = (\alpha f + g)(x) = \alpha f(x) + g(x) = \alpha J_x(f) + J_x(g)$$

J_x est donc une forme linéaire sur $\mathcal{E}'$.

ii. Continuité. Pour tout $x \in \mathcal{E}$, et tout $f \in \mathcal{E}^{'}$

$$|J_x(f)| = |f(x)| \leq \sup_{x \in \mathcal{E}} |f(x)| = \|f\|$$

Donc, J_x est continue sur $\mathcal{E}'$, et $\|J_x\| \leq 1$.

2. Par le théorème de Hahn-Banach, on a pour tout $x \in \mathcal{E}$:

$$\|J_x\| = \sup_{f \in \mathcal{E}'} |J_x(f)| = \sup_{f \in \mathcal{E}'} |f(x)| = \|x\|$$

Exercice 5.5.1.

a. L'espace $\mathbb{R}$ des nombres réels est muni de la distance de la valeur absolue. Montrer, en utilisant le Théorème de catégorie de Baire, que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

b. Dans l'espace de Banach $X = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ de la convergence uniforme, on considère la suite $(f_n)_n$ définie par $f_n(t) = e^{int}$, $(t \in [0,1], n \geq 1)$

1. Montrer que la suite $(f_n)_n$ n'admet aucune sous-suite convergente dans X.

2. Que peut-on conclure par le Théorème de Riesz ?

Exercice 5.5.2.

Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert, et soit $T : H \to H$ un opérateur linéaire symétrique, i.e.,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \quad x, y \in H$$

Montrer, par le Théorème du graphe fermé, que T est continu.
(Utiliser la continuité du produit scalaire)

5.6 EMD 2018/2019

Exercice 5.6.1.

a. L'espace $\mathbb{R}$ des nombres réels est muni de la distance de la valeur absolue. Montrer, en utilisant le Théorème de catégorie de Baire, que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

b. Dans l'espace de Banach $X = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ de la convergence uniforme, on considère la suite $(f_n)_n$ définie par $f_n(t) = e^{int}$, $(t \in [0,1], n \geq 1)$

1. Montrer que la suite $(f_n)_n$ n'admet aucune sous-suite convergente dans X.

2. Que peut-on conclure par le Théorème de Riesz ?

Exercice 5.6.2.

Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert, et soit $T : H \to H$ un opérateur linéaire symétrique, i.e.,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \quad x, y \in H$$

Montrer, par le Théorème du graphe fermé, que T est continu.
(Utiliser la continuité du produit scalaire)

Exercice 5.6.3.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et soit $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F.

Le but de l'exercice est de montrer que si $\mathcal{L}(E, F)$ est complet, alors F est complet.

Et donc comme conséquence directe : $\mathcal{L}(E, F)$ est complet si et seulement si F est complet.

1. Soit $x_0 \in E$ un vecteur unitaire. Montrer qu'il existe $f \in E', \|f\| = 1$ et vérifiant $f(x_0) = 1$.

2. On suppose que $\mathcal{L}(E, F)$ est complet, et soit $(z_n)_n$ une suite de Cauchy dans F, et soit la suite d'applications $T_n : E \to F, (n \geq 1)$ définies par

$$T_n(x) = f(x)z_n, \quad x \in E, n \geq 1$$

i. Montrer que $T_n \in \mathcal{L}(E, F), n \geq 1$.

ii. Montrer que la suite $(T_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$.

iii. Déduire que la suite $(T_n)_n$ est convergente vers un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$?

3. Montrer que $(z_n)_n$ est convergente vers le vecteur $z = Tx_0$.

4. Conclure.

5.6.1 Corrigé de l'EMD 2018/2019

Exercice 1. a. Par l'absurde, on suppose que l'espace $\mathbb{R}$ est dénombrable. Donc,

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\geq 1}\{x_n\}, x_n \in \mathbb{R}, n \geq 1$$

L'espace $\mathbb{R}$ muni de la distance euclidienne étant complet. De plus, les singletons $\{x_n\}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$. Par le Théorème de catégorie de Baire, il existe $j \geq 1$ tel que $Int\{x_j\} \neq \emptyset$. Il existe donc $r > 0$ tel que

$$B(x_j, r) \subset \{x_j\}$$

Contradiction.

b. La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$f_n(t) = e^{int}, n \geq 1, t \in [0, 1]$$

1. On a pour tous $n, m \geq 1$:

$$|f_n(t) - f_m(t)|^2 = |e^{int} - e^{imt}|^2 = 2 - 2\cos(n-m)t$$

Donc,

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{0\leq t\leq 2\pi} |f_n(t) - f_m(t)| = \sup_{0\leq t\leq 2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(n-m)t} = 2 \tag{5.1}$$

Donc, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ n'est pas de Cauchy dans X. Elle n'admet donc aucune sous-suite convergente car toute sous-suite de $(f_n)_{n\geq 0}$ vérifie l'égalité (5.2).

2. La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est un élément de la boule unité fermée $\overline{B}(O, 1)$ de l'espace X car

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{0\leq t\leq 2\pi} |f_n(t)| = \sup_{0\leq t\leq 2\pi} |e^{int}| = 1$$

Par la question précédente, la boule $\overline{B}(O, 1)$ n'est pas compacte dans X, d'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass. Finalement, et par le Théorème de Riesz, l'espace X est de dimension infinie.

Exercice 2. Soit (x_n, Tx_n) une suite dans le graphe $G(T)$ de T qui converge vers (x, y) dans $H \times H$. On a donc,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \text{ et } \lim_{n\to+\infty} Tx_n = y$$

De plus, pour tout $z \in H$,

$$\langle Tx_n, z\rangle = \langle x_n, Tz\rangle$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\langle Tx_n, z\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle x_n, Tz\rangle$$

Par la continuité du produit scalaire,

$$\langle \lim_{n\to+\infty} Tx_n, z\rangle = \langle \lim_{n\to+\infty} x_n, Tz\rangle$$

Donc, pour tout $z, z \in H$:

$$\langle y, z\rangle = \langle x, Tz\rangle = \langle Tx, z\rangle$$

Ce qui montre que $y = Tx$, et $G(T)$ est donc fermé. Comme l'espace H est complet, T est continu par le Théorème du graphe fermé.

Exercice 3. 1. Soit $x_0 \in E, \|x_0\| = 1$. D'après le Corollaire 4.1 du Théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in E'$ telle que $\|f\| = 1$ et $f(x_0) = \|x_0\|$.

2. i1. Pour tous $x, y \in E$, et tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$T_n(\lambda x+y) = f(\lambda x+y)z_n = (\lambda f(x)+f(y))z_n = \lambda f(x)z_n+f(y)z_n = \lambda T_n(x)+T_n(y)$$

car f est linéaire. Par conséquent, T_n est linéaire.

De plus, pour tout $x, x \in E$, et tout $n \geq 1$:

$$\|T_n(x)\| = \|f(x)z_n\| = |f(x)|\|z_n\| \leq \|f\|\|x\|\|z_n\| \leq \|z_n\|\|x\|$$

car f est continue et $\|f\| = 1$. Ce qui montre que T_n est continue, et $\|T_n\| \leq \|z_n\|$. De (i1) et (i2), on aura que $T_n \in \mathcal{L}(E, F), n \geq 1$.

ii. Pour tous $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$:

$$\|T_n - T_m\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)(z_n - z_m)\| = \|z_n - z_m\| \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \|z_n - z_m\|$$

Comme $(z_n)_n$ est de Cauchy dans F, la suite $(T_n)_n$ l'est également dans $\mathcal{L}(E, F)$.

iii. On en déduit que la suite $(T_n)_n$ est convergente vers certain $T \in \mathcal{L}(E, F)$ car $\mathcal{L}(E, F)$ est complet.

3. Posons $Tx_0 = z$. Alors,

$$\|z_n - z\| = \|T_n(x_0) - Tx_0\| = \|(T_n - T)x_0\| \leq \|T_n - T\|\|x_0\| \to 0, \quad (n \to +\infty)$$

4. La suite $(z_n)_n$ est donc convergente vers $z, z \in F$. Par conséquent, l'espace F est complet.

5.7 EMD de remplacement 2018/2019

Exercice 5.7.1.

a. L'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de la distance euclidienne. Montrer que :

1. Toute droite dans $\mathbb{R}^2$ est d'intérieur vide.

2. $\mathbb{R}^2$ ne peut pas s'écrire comme réunion dénombrable de droites

Exercice 5.7.2.

Sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on considère les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$. Soit la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} -n^2t+n, & t \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0, & t \in \left]\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

a. Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

b. Que peut-on déduire pour l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$?

Exercice 5.7.3.

Considérons les espaces de Banach

$$\ell_p(\mathbb{Z}) := \left\{ x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C} : \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k| < +\infty \right\}$$

et

$$\ell_\infty(\mathbb{Z}) := \left\{ x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C} : \sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| < +\infty \right\}$$

$(1 \leq p < +\infty)$, munis des normes

$$\|x\|_p = (\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|$$

respectivement, $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$.

1. Soient $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell_1\ (\mathbb{Z})$ et $u = (u_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$. Posons $v = (v_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ où

$$v_k = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p u_{k-p},\ (k \in \mathbb{Z})....(*)$$

Montrer que $v \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$. (On peut utiliser l'inégalité de Hölder)

2. Soit $u \in \ell_2(\mathbb{Z})$. On pose $\varphi(u) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|u_k|^2}{1+k^2}$, et on considère l'ensemble

$$\mathcal{F} = \{u \in \ell_2(\mathbb{Z}) : \varphi(u) \leq 1\}$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble convexe et fermé de $\ell_2(\mathbb{Z})$.

5.7.1 Corrigé de l'EMD de rempalcement 2018/2019

Exercice 1. 1. Toute droite dans $\mathbb{R}^2$ ne peut contenir une boule ouverte.

2. On suppose que $\mathbb{R}^2 = \bigcup\limits_{n\geq 1} D_n$ où $D_n, n \geq 1$ sont des droites dans $\mathbb{R}^2$ d'équations

$$a_n x + b_n y + c_n = 0,\, a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R} \text{ et } (a_n, b_n) \neq (0,0).$$

L'application $A_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$A_n(x,y) = a_n x + b_n y + c_n$$

est continue, et de plus, $D_n = A_n^{-1}(\{0\}), (n \geq 1)$
Ce qui montre que D_n est un fermé dans $\mathbb{R}^2$. Par le Théorème de Baire, il existe $j \geq 1$ tel que $Int(D_n) \neq \emptyset$. Cela contredit le résultat de la question précédente.

Exercice 2. 1. On a

$$\|x_n\|_1 = \int\limits_0^1 |f_n(t)dt| = \int\limits_0^{1/n} |-n^2t + n|dt = \int\limits_0^{1/n} (-n^2t+n)dt = \frac{1}{2}$$

$$\|x_n\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t)| = \sup_{t\in[0,1/n]} (-n^2t+n) = n$$

Donc,

$$\frac{\|x_n\|_\infty}{\|x_n\|_1} = \frac{n}{1/2} = 2n$$

La suite $(\frac{\|x_n\|_\infty}{\|x_n\|_1})$ n'est donc pas bornée. Par conséquent, les deux normes ne sont pas équivalentes sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

2. Comme au moins deux normes sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ ne sont pas équivalentes, l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ est de dimension infinie.

Exercice 3. 1. On a

$$\begin{aligned}\|v\|_\infty &= \sup_{k\in\mathbb{Z}}|v_k| = \sup_{k\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p u_{k-p}\right| \leq \sup_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}|a_p u_{k-p}| \leq \\ &\leq \sum_{p=-\infty}^{+\infty}|a_p|\sup_{k\in\mathbb{Z}}|u_{k-p}| = \sup_{k\in\mathbb{Z}}|u_{k-p}|\sum_{p=-\infty}^{+\infty}|a_p| \leq \|a\|_1\|u\|_\infty\end{aligned}$$

D'où

$$\|v\|_\infty \leq \|a\|_1\|u\|_\infty < +\infty$$

Ce qui montre que $v \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$.

2. i. Soient $u = (u_k)_{k\in\mathbb{Z}}, v = (v_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{F}$, et soit $t \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(tu+(1-t)v) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{|tu_k+(1-t)v_k|^2}{1+k^2} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\frac{(tu_k+(1-t)v_k)(t\overline{u_k}+(1-t)\overline{v_k})}{1+k^2} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{t^2|u_k|^2+(1-t)^2|v_k|^2+2t(1-t)Re(u_k\overline{v_k})}{1+k^2} \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{t^2|u_k|^2+(1-t)^2|v_k|^2+t(1-t)(|u_k|^2+|v_k|^2)}{1+k^2}, \ (2Re(ab)\leq|a|^2+|b|^2) \\ &\leq t^2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{|u_k|^2}{1+k^2}+(1-t)^2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{|v_k|^2}{1+k^2}+t(1-t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{|u_k|^2+|v_k|^2}{1+k^2} \\ &\leq t^2+(1-t)^2+2t(1-t) = 1\end{aligned}$$

Car $u, v \in \mathcal{F}$. D'où, $tu+(1-t)v \in \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ est donc un sous-ensemble convexe de $\ell_2(\mathbb{Z})$.

ii. Soit $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{F}$ qui converge vers un élément $u = (u_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$. A-t-on $u \in \mathcal{F}$? On a

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = (u_k^{(n)})_{k\in\mathbb{Z}} = (......, u_{-1}^{(n)}, u_0^{(n)}, u_1^{(n)}, ...)$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N} : \forall n, n \geq N_0 : \|u_n - u\|_2 < \varepsilon$. D'où,

$$\forall n,\ n \geq N_0 : \left||u_k^{(n)}| - |u_k|\right| \leq \left|u_k^{(n)} - u_k\right| \leq \|u_n - u\|_2 < \varepsilon$$

Comme $u_n \in \mathcal{F},\ n \in \mathbb{N}$, alors $\varphi(u_n) \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$. C-à-d, pour tout $m \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{k=-m}^{m} \frac{\left|u_k^{(n)}\right|^2}{1+k^2} \leq 1$. Donc, par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on aura

$$\sum_{k=-m}^{m} \frac{|u_k|^2}{1+k^2} \leq 1,\ m \in \mathbb{N}$$

Et quand $m \to +\infty$, on obtiendra

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|u_k|^2}{1+k^2} \leq 1$$

i.e. $\varphi(u) \leq 1$, et donc $u \in \mathcal{F}$.

5.8 Rattrapage 2018/2019

Exercice 5.8.1.

a. Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{C}$ tels que $\dim E < +\infty$.

- Montrer que toute application linéaire de E dans F est continue.

b. i. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de l'espace ℓ_2.

ii. L'ensemble $\mathcal{S}$ est-il fermé dans ℓ_2?

Exercice 5.8.2.

Soit $\mathcal{X} = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, et soit $I : (\mathcal{X}, \|.\|_\infty) \to (\mathcal{X}, \|.\|_1)$ l'opérateur d'identité.

1. Montrer que I est linéaire, bijectif et continu.

2. Calculer $\|I\|$.

3. Montrer que l'opérateur inverse I^{-1} de I n'est pas un homéomorphisme (n'est pas continu). Utiliser la suite $(f_n)_n$ où $f_n(t) = t^n, n \geq 1$.

4. Que peut-on déduire par le Théorème de l'homéomorphisme de Banach ?

Exercice 5.8.3.

Soit $\mathcal{Y}$ un sous-espace vectoriel fermé de $L_2([0,1], \mathbb{C})$. On suppose que $\mathcal{Y} \subset L_\infty([0,1], \mathbb{C})$. Montrer, à l'aide du Théorème du graphe fermé, qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\|f\|_\infty \leq C\|f\|_2, f \in \mathcal{Y}$$

5.8.1 Corrigé du rattrapage 2018/2019

Exercice 1. a. Soit $n = \dim E, n \geq 1$. Donc, E admet une base $(e_i)_{i=1}^{n}$. Pour tout $x \in E$, il existe donc $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. Soit donc $T : E \to F$ une application linéaire. On a donc,

$$\begin{aligned}
\|Tx\| = \|T(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k)\| = \|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k T e_k\| &\leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \|Te_k\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \max_{1\leq k\leq n} (|\lambda_k|) \|Te_k\| \\
&\leq \max_{1\leq k\leq n} (|\lambda_k|) \sum_{k=1}^{n} \|Te_k\| \\
&\leq C\|x\|_\infty
\end{aligned}$$

où $\|.\|_\infty$ est équivalente à la norme $\|.\|_E$ car $\dim E < +\infty$, et $C = \sum_{k=1}^{n} \|Te_k\|$. Si $T = 0$, T est continue. Sinon, $C > 0$. Par conséquent, T est continue.

b.i. Soient $x = (x_n)_{n\geq 1}, y = (y_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{S}$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Donc,

$$\lambda x + y = (\lambda x_n + y_n)_{n\geq 1}$$

D'où,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \lambda(0) + 0 = 0$$

car $x, y \in \mathcal{S}$. Donc, $(\lambda x + y) \in \mathcal{S}$, et $\mathcal{S}$ est alors un sous-espace vectoriel de ℓ_2.

ii. La suite $(x_n)_n$ où $x_n = (1, \frac{-1}{n}, \frac{-1}{n}, ..., \frac{-1}{n}, 0, 0, ...)$ vérifie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_n^{(k)} = 1 + n(\frac{-1}{n}) = 0$$

Ce qui montre que $x_n \in \mathcal{S}, n \geq 1$. Or, $\lim_{n\to+\infty} x_n = (1, 0, 0, ..., 0, ..) \notin \mathcal{S}$. Par conséquent, $\mathcal{S}$ n'est pas un fermé de ℓ_2.

Exercice 2. 1. Il est clair que I est linéaire et bijectif, et son inverse est l'opérateur d'identité $I^{-1} : (\mathcal{X}, \|.\|_1) \to (\mathcal{X}, \|.\|_\infty)$. De plus, pour tout $f \in \mathcal{X}$, on a

$$\|I(f)\|_1 = \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)dt| \leq \int_0^1 \sup_{t\in[0,1]} |f(t)dt| \leq \|f\|_\infty$$

D'où, I est continu, et

$$\|I\| \leq 1 \tag{5.2}$$

2. On a pour $f_0 = 1$ sur $[0,1]$:

$$\|I(f_0)\|_1 = \|1\|_1 = \int_0^1 dt = 1$$

et $\|f_0\|_\infty = 1$. Par conséquent,

$$\|I\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} \|I(f)\|_1 \geq \|I(f_0)\|_1 = 1 \tag{5.3}$$

De (5.2) et (5.3), $\|I\| = 1$.

3. On a :

$$\|I^{-1} f_n\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t)|dt = \sup_{t\in[0,1]} |t^n|dt = 1$$

De même,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)|dt = \int_0^1 |t^n|dt = \frac{1}{n+1}$$

Par suite,

$$\frac{\|I^{-1} f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = n+1 \to +\infty, (n \to +\infty)$$

Ce qui montre que I^{-1} n'est pas continu.

4. De (3), l'opérateur I n'est pas un homéomorphisme. Comme $(\mathcal{X}, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach, par le Théorème d'homéomorphisme de Banach, l'espace $(\mathcal{X}, \|.\|_1)$ n'est pas de Banach.

Exercice 3. Le sous-espace $\mathcal{Y}$ est fermé de l'espace complet ℓ_2. $\mathcal{Y}$ est donc complet. Considérons l'application d'identité $I : \mathcal{Y} \to L_\infty([0,1], \mathbb{C})$, et soit $(f_n, If_n)_n = (f_n, f_n)_n$ une suite dans le graphe $G(I)$ de I qui converge vers (f, g). Donc, $\lim_{n\to+\infty} f_n = f = g$. Ce qui montre que $G(I)$ est fermé. Comme $\mathcal{Y}$ et $L_\infty([0,1], \mathbb{C})$ sont complets, I est continu par le Théorème du graphe fermé. Par conséquent, il existe $C > 0$ tel que

$$\|f\|_\infty \leq C\|f\|_2, f \in \mathcal{Y}$$

Bibliographie

[1] N.I. Akhiezer, I.M. Glazman, *Theory of linear operators in Hilbert space,* Dover Publications Inc., New York, (1993).

[2] B. Bendoukha, *Analyse fonctionnelle*, Centre universitaire de Naama, Algérie, (2017/2018).

[3] J. Charles, M. Mbekhta, H. Queffélec, *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs*, Dunod, Paris, (2010).

[4] J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Second edition, Springer-Verlag New York, Inc, (1990).

[5] L. Debnath, P. Mikusinski, *Hilbert Spaces with Applications*, Elsevier Academic Press, (2005).

[6] N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear Operators*, John Wiley, New Jersey, 1988.

[7] W. Hengartner, M. Lambert, C. Reischer, *Introduction à l'analyse fonctionnelle,* Les Presses de l'Université de Québec, (1981).

[8] Y. Sonntag, *Topologie et analyse fonctionnelle,* Edition ellipses, (1997).

[9] P. Théo, *Espaces vectoriels normés*, ENS Ker Lann.