

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Hassiba Benbouali de Chlef

Faculté de Génie Civil et d'Architecture

Département d'Hydraulique



THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Hydraulique

Par

YACINE BEBOUKHA

Thème :

**CONTRIBUTION AU CALCUL DES COEFFICIENTS DE CHEZY ET
DE MANNING DANS LES CONDUITES FERMEES EN FORME DE
VOUTE, ELLIPTIQUE ET SEMI-ELLIPTIQUE PAR LA METHODE
DU MODELE RUGUEUX DE REFERENCE - MMR**

Soutenu le : 21 / 10 / 2021

Membres de jury :

Saaed HAMOUDI	Professeur	Université de Chlef	Président
Moussa LAKEHAL	MCA	Université de Annaba	Rapporteur
Boualem REMINI	Professeur	Université de Blida	Examineur
Hamouda BOUTAGHANE	MCA	Université de Annaba	Examineur
Mohamed RIABI	MCA	Université de Chlef	Examineur
Mohamed REMAOUN	Professeur	Université de Chlef	Co-Rapporteur

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail en signe de respect et de reconnaissance en témoignage de ma profonde affection à :

- *Ma chère mère qui ma protégée pendant toute ma vie, et qui a fait tout pour que je devienne ce que je suis.*
- *Mon père qui m'a tant aidé et encourager.*
- *Tous mes frères et sœurs.*
- *Ma chère LEILA et mes petits-enfants ROUDAINA, RAID et NOUR EL-YAKINE*
- *Toute la famille.*
- *Tous mes amis.*

Toute personne qui a contribué de près ou de loin à ma réussite.

REMERCIEMENTS

Je remercie ALLAH, tout puissant, de m'avoir donné la force et le courage pour dépasser toutes les difficultés

J'adresse ma profonde gratitude à l'âme du défunt M. REMAOUN MOHAMMED pour mener à bien ce travail surtout au début de notre recherche, et que ALLAH ait pitié de lui.

Je tiens à examiner mes remerciements les plus sincères à notre professeur et notre encadreur M. LAKEHAL MOUSSA, pour ses efforts fournis afin de mener à bien ce projet.

Je tiens à remercier très vivement Monsieur HAMOUDI SAAD, Professeur à l'Université de Chlef d'avoir accepté de juger ce travail et de présider le jury.

J'exprime mes plus sincères remerciements à Monsieur REMINI BOUALEM, Professeur à l'Université de Blida, Monsieur RJABI MOHMED, Docteur à l'Université de Chlef, Monsieur BOUTAÛHANE HAMOUDA, Docteur à l'Université de Annaba, pour avoir accepté d'être examinateurs de cette thèse.

Merci également à M. BENAOU DA HAMID chef de département d'hydraulique, Madame la présidente du CSD M^{me}. ELMEDDAHI YAMINA ainsi que tous les membres du CSD et du CSF.

J'adresse ma profonde gratitude à M. KHALDI NOUREDDINE et M. GUEDDA NADJIB et M. REZIG ABDEL FATAH qui ont tout mis à ma disposition pour que mon travail se déroule dans les meilleures conditions possibles.

A tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail, j'aimerais leur dire merci beaucoup.

ملخص

المساهمة في حساب معاملات تشيزي و مانينغ في الانابيب المغلقة ذات الشكل المقوس، الإهليجي و شبه الإهليجي بواسطة طريقة النموذج الخشن المرجعي.

تلعب معاملات مقاومة الجريان دورًا كبيرًا في دراسة الجريان المنتظم. فقد كان حساب أو حتى تقدير هذه المعاملات موضوع عدة أبحاث علمية. و عندما ننظر إلى الدراسات القديمة نجد أن هذه المعاملات تعتبر ثابتة و تتعلق حصريًا بطبيعة الجدران الداخلية للقناة المدروسة وهذا بالتأكيد لتبسيط مهمة المهندسين في ذلك الوقت. و لكن في الحقيقة، معاملات المقاومة يجب أن تتغير بدلالة جميع العوامل التي تؤثر على الجريان وبشكل خاص وفقًا للعمق الطبيعي. و يجدر بالإشارة أنه على حد علمنا، لا توجد حتى الآن أي طريقة تمكن من حساب ودراسة تغيرات معاملات المقاومة في القنوات المغلقة ذات شكل مقوس من النوع I و النوع II، ذات شكل إهليجي و كذا ذات شكل شبه إهليجي. و لقد تم اقتراح هذه الدراسة وفقًا لهذا السياق. و بالفعل فقد تم في بادئ الأمر إنجاز وتحضير العلاقات التي تعبر على الخصائص الهندسية لجميع القنوات المختارة والخصائص الهيدروليكية للجريان في هذه القنوات. ننوه بأن هذه الخطوة كانت صعبة بالنسبة لبعض الأشكال وخاصة بالنسبة للشكل الإهليجي. بالإضافة إلى ذلك، فإن الجمع بين علاقة عاشور و بجاوي مع علاقة تشيزي من جهة و بين علاقة عاشور و بجاوي مع علاقة مانينغ من جهة أخرى أمكن من اقتراح علاقات مباشرة تسمح بحساب معاملات مقاومة الجريان لتشيزي ومانينغ على التوالي وبشكل سهل وذلك بالنسبة لجميع القنوات المدروسة. وبالتالي، فإن العلاقات المقترحة تعبر عن معاملات المقاومة اللابعدية بدلالة الخشونة النسبية، نسبة امتلاء القناة و كذا عدد رينولدز في حالة القناة الممتلئة. انطلاقًا من العلاقات المنجزة، تم رسم وتقديم منحنيات تغير معاملات المقاومة اللابعدية والتعليق عليها واستخلاص نتائج جد مهمة منها. ولكن عندما لا يكون القطر المولد للقنوات المعنية من بين المعطيات، في هذه الحالة فإن تطبيق طريقة النموذج الخشن جعل من الممكن إيجاد معاملات المقاومة المطلوبة بسهولة وبدلالة خصائص النموذج الخشن المرجعي، حيث يمكن حساب هذه الأخيرة بكل بساطة. وأخيرًا، تم عرض بعض الأمثلة التطبيقية العملية لإثبات بساطة وكفاءة وكذا صلاحية مختلف المقاربات النظرية المقترحة.

الكلمات المفتاحية: معامل تشيزي، معامل مانينغ، القنوات المغلقة، التدفق الحجمي، الجريان المنتظم، طريقة النموذج الخشن.

Abstract

Contribution to the calculation of Chezy's and Manning's coefficients in city-gate, elliptical and semi-elliptic closed conducted by the reference rough model method – RMM

Flow resistance coefficients plays an important role in the study of uniform flow. Their estimation or even determination has been the subject of several research works. Previous studies considered, certainly for the sake of simplicity, that these coefficients are constant and depend exclusively on the nature of the internal walls of that certain channel. In fact, the resistance coefficients should vary according to all the flow's parameters more specifically, according to the normal depth. As far as we know for the time being there is no method for calculating and studying the variation of these resistance coefficients in closed conducts in the form of type I and II city-gate, elliptical and semi-elliptical. Therefore, in this context, this study was proposed, where the geometric characteristics of the concerned conducts and the hydraulic characteristics of the flow were first developed. What was noted is that this step was complicated for certain shapes, particularly, the elliptical one. Furthermore, combining the relations of *Achour & Bedjaoui* with the one of *Chezy's* in one hand and the relation of *Achour & Bedjaoui* with the one of *Manning's* on the other hand made it possible to suggest simple relations that would allow to easily calculate *Chezy's* and *Manning's* flow resistance coefficients for the four studied conducts. Consequently, the developed relationships express the dimensionless resistance coefficients as a function of the relative roughness, the filling rate and the *Reynolds* number in the full state. In this concern, the variation of these coefficients were presented and commented on, and interesting conclusions were drawn. However, when the generating diameter of the concerned conducts not included in the problem's data, the application of the rough model method makes it possible to explicitly express the required resistance coefficients depending on the characteristics of the rough reference model which is easy to calculate. Finally, practical application examples were presented in order to demonstrate the simplicity, efficiency and validity of the different approaches proposed.

Keywords: *Chezy's* coefficient, *Manning's* coefficient, Closed conducts, Volume discharge, Uniform flow, Rough model method (RMM).

Résumé

Contribution au calcul des coefficients de Chézy et de Manning dans les conduites fermées en forme de voûte, elliptique et semi-elliptique par la méthode du modèle rugueux de référence - MMR

Les coefficients de résistance à l'écoulement jouent un rôle important dans l'étude de l'écoulement uniforme. Leur estimation voire détermination a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. Les anciennes études considèrent, certainement par souci de simplification, que ces coefficients sont constants et dépendent exclusivement de la nature des parois internes du canal considéré. En réalité, les coefficients de résistance devraient varier en fonction de tous les paramètres régissant l'écoulement et plus particulièrement en fonction de la profondeur normale. A notre connaissance, il n'existe à nos jours aucune méthode permettant de calculer et d'étudier la variation de ces coefficients de résistance dans les conduites fermées en forme de voûte de type I et II, elliptique et semi-elliptique. C'est dans ce contexte qu'on a proposé cette étude. En effet, les caractéristiques géométriques des conduites considérées et hydraulique de l'écoulement ont été d'abord développées. Notons que cette étape était délicate pour certaines formes notamment pour la forme elliptique. En outre, la combinaison des relations de *Achour & Bedjaoui* et de *Chézy* d'une part et de *Achour & Bedjaoui* et de *Manning* d'autre part a permis, respectivement, de proposer des relations explicites permettant le calcul aisé des coefficients de résistance à l'écoulement de *Chézy* et de *Manning* pour les quatre conduites étudiées. Ainsi, les relations développées expriment les coefficients de résistance adimensionnels en fonction de la rugosité relative, du taux de remplissage et du nombre de *Reynolds* à l'état plein. Les courbes de variations de ces coefficients ont été présentées et commentées et des conclusions intéressantes ont été tirées. Cependant, lorsque le diamètre générateur des conduites considérées ne constitue pas une donnée du problème, l'application de la méthode du modèle rugueux a permis d'exprimer explicitement les coefficients de résistance recherchés en fonction des caractéristiques, facilement calculables, du modèle rugueux de référence. Enfin, des exemples d'application pratiques ont été exposés afin de montrer la simplicité, l'efficacité et la validité des différentes approches proposées.

Mots clés : Coefficient de *Chézy*, Coefficient de *Manning*, Conduites fermées, Débit volume, Ecoulement uniforme, Méthode du modèle rugueux (MMR),.

SOMMAIRE

Dédicace	i
Remerciements	ii
ملخص	iii
Résumé	iv
Abstract	v
Principales notations	xi
Liste des figures	xiii
Liste des tableaux	xvii
Introduction générale	1

PREMIERE PARTIE

APERÇU SUR L'ÉCOULEMENT UNIFORME

Chapitre I

Etat des connaissances sur l'écoulement uniforme

I. Introduction	05
II. Hypothèses de l'écoulement uniforme	05
II.1. Concept de l'uniformité	05
II.2. Calcul de l'écoulement uniforme	06
II.2.1. Conductivité	07
II.2.2. Facteur de section	07
II.2.3. Equations hydrodynamiques	08
II.2.3.1. Equation de continuité	08
II.2.3.2. Equation du mouvement (Calcul de vitesse)	08
III. Formules usuelles de l'écoulement uniforme	10
III.1. Formule de <i>Chézy</i>	10
III.2. Calcul du coefficient <i>C</i> de <i>Chézy</i>	11
III.2.1. La formule de <i>Ganguillet – Kutter</i>	11

III.2.2. La formule de <i>Bazin</i>	12
III.2.3. La formule de <i>Powell</i>	12
III.2.4. La formule de <i>Swamee et Rathie</i>	12
III.2.5. La formule de <i>Achour et Bedjaoui</i>	13
III.3. Formule de <i>Manning-Strickler</i>	13
III.4. Formule de <i>Darcy – Weisbach</i> et évaluation du coefficient de frottement	15
III.4.1. Formule de <i>Colebrook -White</i>	16
III.4.2. Formule de <i>Swamee et Jain</i>	17
III.4.3. Formule de <i>Achour et al</i>	19
IV. Diagramme universel de <i>Moody</i>	20
V. Conclusion	22

Chapitre II

Présentation de la méthode du modèle rugueux de référence

I. Introduction	25
II. Méthode du modèle rugueux de référence	25
II.1. Caractéristiques du modèle rugueux de référence	26
II.2. Relation de <i>Darcy-Weisbach</i> appliquée au modèle rugueux	26
II.3. Facteur de correction des dimensions linéaires	27
III. Relation générale du débit volume	31
IV. Expression générale des coefficients <i>C</i> de <i>Chézy</i> et <i>n</i> de <i>Manning</i>	35
V. Conclusion	36

DEUXIEME PARTIE

CONTRIBUTION AU CALCUL DES COEFFICIENTS DE RESISTANCE A L'ÉCOULEMENT DANS QUELQUES CONDUITES FERMEES

Chapitre I

Etude des coefficients de *Chézy* et de *Manning* dans une conduite en forme de voûte de type I

I. Introduction	38
II. Caractéristiques de l'écoulement	38
III. Expression du coefficient de <i>Chézy</i> dans une conduite en forme de voûte de type I	44
III.1. Variation du coefficient de <i>Chézy</i>	46
III.2. Conductivité relative	52
III.3. Calcul du coefficient de résistance à l'écoulement <i>C</i> de <i>Chézy</i> par la méthode MMR	53
III.4. Exemple d'application (01)	56
IV. Expression du coefficient de <i>Manning</i> dans une conduite en forme de voûte de type I	58
IV.1. Variation du coefficient de <i>Manning</i>	59
VI.2. Calcul du coefficient de résistance à l'écoulement <i>n</i> de <i>Manning</i> par la méthode MMR	65
IV.3. Exemple d'application (02)	66
V. Conclusion	69

Chapitre II

Etude des coefficients de *Chézy* et de *Manning* dans une conduite en forme de voûte de type II

I. Introduction	71
II. Caractéristiques de l'écoulement	71
III. Expression du coefficient de <i>Chézy</i> dans une conduite en forme de voûte de type II	80
III.1. Variation du coefficient de <i>Chézy</i>	82

III.2. Conductivité relative	88
III.3. Calcul du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy par la méthode MMR	89
III.4. Exemple d'application (01)	92
IV. Expression du coefficient de Manning dans une conduite en forme de voûte de type II	94
IV.1. Variation du coefficient de Manning	95
VI.2. Calcul du coefficient de résistance à l'écoulement n de Manning par la méthode MMR	101
IV.3. Exemple d'application (02)	102
V. Conclusion	104

Chapitre III
Etude des coefficients de Chézy et de Manning dans
une conduite fermée de forme semi-elliptique

I. Introduction	105
II. Caractéristiques de l'écoulement	105
III. Expression du coefficient de Chézy dans une conduite de forme semi-elliptique	120
III.1. Variation du coefficient de Chézy	122
III.2. Conductivité relative	129
III.3. Calcul du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy par la méthode MMR	131
III.4. Exemple d'application (01)	134
IV. Expression du coefficient de Manning dans une conduite de forme semi-elliptique	136
IV.1. Variation du coefficient de Manning	138
VI.2. Calcul du coefficient de résistance à l'écoulement n de Manning par la méthode MMR	144
IV.3. Exemple d'application (02)	146
V. Conclusion	148

Chapitre IV
Etude des coefficients de *Chézy* et de *Manning* dans
une conduite elliptique

I. Introduction	150
II. Caractéristiques de l'écoulement dans une conduite en forme d'arc	151
III. Caractéristiques de l'écoulement d'une conduite elliptique	158
IV. Etude de cas sur la forme elliptique	161
IV .1. Dimensions de la conduite	161
IV.2. Caractéristiques de l'écoulement	162
V. Etude du coefficient de résistance à l'écoulement de <i>Chézy</i>	169
V.1. Expression du coefficient de <i>Chézy</i> dans une conduite de forme elliptique	169
V.2. Variation du coefficient de <i>Chézy</i>	171
V.3. Conductivité relative	178
V.4. Calcul du coefficient de résistance à l'écoulement <i>C</i> de <i>Chézy</i> par la méthode MMR	179
V.5. Exemple d'application (01)	182
VI. Etude du coefficient de résistance à l'écoulement de <i>Manning</i>	184
VI.1.Expression du coefficient de <i>Manning</i> dans une conduite elliptique	184
VI.2. Variation du coefficient de <i>Manning</i>	185
VI.3. Calcul du coefficient de résistance à l'écoulement <i>n</i> de <i>Manning</i> par la méthode MMR	192
VI.4. Exemple d'application (02)	194
VII. Conclusion	195
Conclusion générale	197
Références bibliographiques	202

PRINCIPALES NOTATIONS

Accélération de la pesanteur	g	m/s^2
Aire de la section mouillée	A	m^2
Aire de la section mouillée du modèle rugueux	\bar{A}	m^2
Coefficient de <i>Chézy</i>	C	$\text{m}^{1/2}/\text{s}$
Coefficient de <i>Chézy</i> du modèle rugueux	\bar{C}	$\text{m}^{1/2}/\text{s}$
Coefficient de frottement	f	-
Coefficient de frottement du modèle rugueux	\bar{f}	-
Coefficient de <i>Kutter</i>	n	$\text{m}^{-1/3}\text{s}$
Coefficient de <i>Manning</i>	n	$\text{m}^{-1/3}\text{s}$
Coefficient de <i>Manning</i> du modèle rugueux	\bar{n}	$\text{m}^{-1/3}\text{s}$
Conductivité d'une conduite	K	-
Conductivité relative	Q^*	-
Débit volume du modèle rugueux	\bar{Q}	m^3/s
Débit volume	Q	m^3/s
Dimension linéaire d'un canal		
Dimension linéaire d'un canal dans le modèle rugueux		
Diamètre hydraulique du modèle rugueux	\bar{D}_h	m
Diamètre hydraulique	D_h	m
Diamètre générateur de la conduite	D	m
Exposant	β	-
Exposant	γ	-
Facteur de correction des débits	ψ_Q	-
Facteur de correction des dimensions linéaires	ψ	-
Force de frottement	F_f	N
Force de résistance	F_r	N
Longueur du canal	L	m
Masse volumique du liquide	ρ	Kg/m^3
Nombre de <i>Reynolds</i> à l'état plein	R_p	-
Nombre de <i>Reynolds</i> à l'état plein dans le modèle rugueux	\bar{R}_p	-

Nombre de <i>Reynolds</i>	R	-
Nombre de <i>Reynolds</i> dans le modèle rugueux	\bar{R}	-
Pente longitudinale	i	m/m
Pente longitudinale du modèle rugueux	\bar{i}	m/m
Perte de charge linéaire dans le modèle rugueux	\bar{J}	m/m
Perte de charge linéaire	J	m/m
Périmètre mouillé	P	m
Périmètre mouillé du modèle rugueux	\bar{P}	m
Poids du liquide	W	N
Poids spécifique du liquide	ϖ	N/m ³
Profondeur normale de l'écoulement	y_n	m
Profondeur normale de l'écoulement dans le modèle rugueux	\bar{y}_n	m
Taux de remplissage	η	-
Taux de remplissage du modèle rugueux	$\bar{\eta}$	-
Rayon hydraulique	R_h	m
Rayon hydraulique du modèle rugueux	\bar{R}_h	m
Rugosité absolue	ε	m
Rugosité absolue du modèle rugueux	$\bar{\varepsilon}$	m
Rugosité relative	ε / D_h	-
Rugosité relative du modèle rugueux	$\bar{\varepsilon} / \bar{D}_h$	-
Viscosité cinématique	ν	m ² /s
Viscosité cinématique dans le modèle rugueux	$\bar{\nu}$	m ² /s
Vitesse de frottement	ν_*	m/s
Vitesse moyenne de l'écoulement	V	m/s

LISTE DES FIGURES

PREMIERE PARTIE

APERÇU SUR L'ÉCOULEMENT UNIFORME

Chapitre I

Etat des connaissances sur l'écoulement uniforme

Figure 1.1	Ecoulement uniforme loin des extrémités.....	06
Figure 1.2	Schéma de définition ayant servi de base à l'établissement de la formule de Chézy à l'établissement de la formule de Chézy.....	09
Figure 1.3	Première forme de la formule de Manning).....	14
Figure 1.4	Seconde forme de la formule de Manning).....	14
Figure 1.5	Comparaison entre les relations de Colebrook-White (1.37) et de Swamee et Jain (1.41) pour quelques valeurs de ε / D).....	18
Figure 1.6	Comparaison entre les relations de Colebrook-White (1.37) et de Achour et al. (1.42) pour quelques valeurs de ε / D).....	19
Figure 1.7	Diagramme universel de Moody (1944).....	22

Chapitre II

Présentation de la méthode du modèle rugueux de référence

Figure 1.8	Variation de $\psi(\bar{R})$ selon la relation (1.68) ($\bar{D}_h = \bar{D}$) pour diverses valeurs de ε / \bar{D}	30
Figure 1.9	Comparaison entre les valeurs exactes et approchées du coefficient ψ calculées selon les relations (1.68) et (1.72).....	31

DEUXIEME PARTIE

CONTRIBUTION AU CALCUL DES COEFFICIENTS DE RESISTANCE A
L'ECOULEMENT DANS QUELQUES CONDUITES FERMEESChapitre IEtude des coefficients de *Chézy* et de *Manning* dans
une conduite en forme de voûte de type I

Figure 2.1	Schéma de définition de l'état de l'écoulement dans la conduite en forme de voûte de type I.....	39
Figure 2.2	Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D=0$ (Ecoulement lisse).....	47
Figure 2.3	Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D=10^{-5}$	48
Figure 2.4	Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D=10^{-4}$	49
Figure 2.5	Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D=10^{-3}$	50
Figure 2.6	Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D=5.10^{-3}$	51
Figure 2.7	Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D=0$ (Ecoulement lisse).....	60
Figure 2.8	Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D=10^{-5}$	61
Figure 2.9	Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D=10^{-4}$	62
Figure 2.10	Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D=10^{-3}$	63
Figure 2.11	Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D=10^{-2}$	64

Chapitre IIEtude des coefficients de *Chézy* et de *Manning* dans
une conduite en forme de voûte de type II

Figure 2.12	Schéma de définition de l'état de l'écoulement dans la conduite en forme de voûte de type II.....	72
Figure 2.13	Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D=0$ (Ecoulement lisse).....	83
Figure 2.14	Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D=10^{-5}$	84
Figure 2.15	Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D=10^{-4}$	85

Figure 2.16	Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-3}$	86
Figure 2.17	Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-2}$	87
Figure 2.18	Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 0$ (Ecoulement lisse).....	96
Figure 2.19	Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-5}$	97
Figure 2.20	Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-4}$	98
Figure 2.21	Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-3}$	99
Figure 2.22	Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-2}$	100

Chapitre III

Etude des coefficients de *Chézy* et de *Manning* dans une conduite fermée de forme semi-elliptique

Figure 2.23	Schéma de définition de l'état de l'écoulement dans la conduite fermée de forme semi-elliptique.....	106
Figure 2.24	Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 0$ (Ecoulement lisse).....	123
Figure 2.25	Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-5}$	124
Figure 2.26	Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-4}$	125
Figure 2.27	Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-3}$	126
Figure 2.28	Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-2}$	127
Figure 2.29	Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 0$ (Ecoulement lisse).....	139
Figure 2.30	Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-5}$	140
Figure 2.31	Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-4}$	141
Figure 2.32	Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-3}$	142
Figure 2.33	Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-2}$	143

Chapitre IV**Etude des coefficients de *Chézy* et de *Manning* dans
une conduite elliptique**

Figure 2.34	Schéma de définition de l'état de l'écoulement dans la conduite en arc.....	151
Figure 2.35	Schéma de définition de l'état de l'écoulement dans la conduite elliptique.....	159
Figure 2.36	Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 0$ ((Ecoulement lisse)	172
Figure 2.37	Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-5}$	173
Figure 2.38	Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-4}$	174
Figure 2.39	Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-3}$	175
Figure 2.40	Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-2}$	176
Figure 2.41	Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 0$ (Ecoulement lisse).....	186
Figure 2.42	Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-5}$	187
Figure 2.43	Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-4}$	188
Figure 2.44	Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-3}$	189
Figure 2.45	Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-2}$	190

LISTE DES TABLEAUX

DEUXIEME PARTIE

CONTRIBUTION AU CALCUL DES COEFFICIENTS DE RESISTANCE A L'ECOULEMENT DANS QUELQUES CONDUITES FERMEES

Chapitre I

Etude des coefficients de *Chézy* et de *Manning* dans une conduite en forme de voûte de type I

Tableau 2.1	Valeurs de C / \sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 0$	46
Tableau 2.2	Valeurs de C / \sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 10^{-5}$	47
Tableau 2.3	Valeurs de C / \sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 10^{-4}$	48
Tableau 2.4	Valeurs de C / \sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 10^{-3}$	49
Tableau 2.5	Valeurs de C / \sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 5.10^{-3}$	50
Tableau 2.6	Valeurs de N pour $\varepsilon/D = 0$	59
Tableau 2.7	Valeurs de N pour $\varepsilon/D = 10^{-5}$	60
Tableau 2.8	Valeurs de N pour $\varepsilon/D = 10^{-4}$	61
Tableau 2.9	Valeurs de N pour $\varepsilon/D = 10^{-3}$	62
Tableau 2.10	Valeurs de N pour $\varepsilon/D = 10^{-2}$	63

Chapitre II

Etude des coefficients de *Chézy* et de *Manning* dans une conduite en forme de voûte de type II

Tableau 2.11	Valeurs de C / \sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 0$	82
Tableau 2.12	Valeurs de C / \sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 10^{-5}$	83
Tableau 2.13	Valeurs de C / \sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 10^{-4}$	84
Tableau 2.14	Valeurs de C / \sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 10^{-3}$	85

Tableau 2.15	Valeurs de C / \sqrt{g} pour $\varepsilon / D = 10^{-2}$	86
Tableau 2.16	Valeurs de N pour $\varepsilon / D = 0$	95
Tableau 2.17	Valeurs de N pour $\varepsilon / D = 10^{-5}$	96
Tableau 2.18	Valeurs de N pour $\varepsilon / D = 10^{-4}$	97
Tableau 2.19	Valeurs de N pour $\varepsilon / D = 10^{-3}$	98
Tableau 2.20	Valeurs de N pour $\varepsilon / D = 10^{-2}$	99

Chapitre III

Etude des coefficients de *Chézy* et de *Manning* dans une conduite fermée de forme semi-elliptique

Tableau 2:21	Valeurs de C / \sqrt{g} pour $\varepsilon / D = 0$	123
Tableau 2.22	Valeurs de C / \sqrt{g} pour $\varepsilon / D = 10^{-5}$	124
Tableau 2.23	Valeurs de C / \sqrt{g} pour $\varepsilon / D = 10^{-4}$	125
Tableau 2.24	Valeurs de C / \sqrt{g} pour $\varepsilon / D = 10^{-3}$	126
Tableau 2.25	Valeurs de C / \sqrt{g} pour $\varepsilon / D = 10^{-2}$	127
Tableau 2.26	Valeurs de N pour $\varepsilon / D = 0$	138
Tableau 2.27	Valeurs de N pour $\varepsilon / D = 10^{-5}$	139
Tableau 2.28	Valeurs de N pour $\varepsilon / D = 10^{-4}$	140
Tableau 2.29	Valeurs de N pour $\varepsilon / D = 10^{-3}$	141
Tableau 2.30	Valeurs de N pour $\varepsilon / D = 10^{-2}$	142

Chapitre IV

Etude des coefficients de *Chézy* et de *Manning* dans une conduite elliptique

Tableau 2.31	Dimensions de la conduite elliptique étudiée	161
Tableau 2:32	Valeurs de C / \sqrt{g} pour $\varepsilon / D = 0$	171
Tableau 2.33	Valeurs de C / \sqrt{g} pour $\varepsilon / D = 10^{-5}$	172
Tableau 2.34	Valeurs de C / \sqrt{g} pour $\varepsilon / D = 10^{-4}$	173

Tableau 2.35	Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 10^{-3}$	174
Tableau 2.36	Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 10^{-2}$	175
Tableau 2.37	Valeurs de N pour $\varepsilon/D = 0$	186
Tableau 2.38	Valeurs de N pour $\varepsilon/D = 10^{-5}$	187
Tableau 2.39	Valeurs de N pour $\varepsilon/D = 10^{-4}$	188
Tableau 2.40	Valeurs de N pour $\varepsilon/D = 10^{-3}$	189
Tableau 2.41	Valeurs de N pour $\varepsilon/D = 10^{-2}$	190

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Le calcul de l'écoulement dans les canaux et rivières est effectué sous l'hypothèse de l'uniformité ou tous les paramètres de l'écoulement sont considérés constants dans le temps et dans l'espace, tels que le débit volume Q , la vitesse moyenne de l'écoulement V , l'aire de la section mouillée A , la profondeur normale de l'écoulement y_n , la pente longitudinale de la conduite ou du canal considérée,... . Le calcul de l'écoulement uniforme se base, en règle générale, sur les formules usuelles de type *Chézy* ou *Manning*. Dans ces deux relations, la vitesse moyenne de l'écoulement V est exprimée en fonction de la pente du canal ou de la conduite i , du rayon hydraulique R_h et d'un coefficient appelé coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* ou n de *Manning*. Dans le domaine hydraulique, ces coefficients de résistance sont souvent choisis de manière arbitraire. Classiquement, les valeurs de (C) et de (n) sont tabulées ou calculées de manière indépendante de la profondeur de l'écoulement ou du rayon hydraulique et encore moins du nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement. Cette démarche ne correspond pas à la réalité physique de l'écoulement, puisque ces coefficients sont généralement influencés par un certain nombre de paramètres que l'on doit alors définir et prendre en considération. Le coefficient de résistance doit en principe dépendre de la géométrie de la conduite ou du canal considéré, ainsi que du rayon hydraulique et d'autres paramètres. Par ailleurs, il est important de signaler que ni le coefficient de résistance de *Chézy*, ni celui de *Manning* ne constitue une donnée du problème. Lorsque l'une ou l'autre des formules de *Chézy* et de *Manning* doit être utilisée pour dimensionner les canaux ou conduites, il sera alors nécessaire de déterminer la valeur de C ou celle de n . Pour cela, plusieurs auteurs ont tenté de proposer des relations permettant d'évaluer ces coefficients, notamment le coefficient de résistance C de *Chézy*, dont on cite la relation de *Ganguillet-Kutter* (1869), *Bazin* (1897), *Powell* (1950), *Swamee* et *Rathie* (2004) et de *Achour et Bedjaoui* (2006). En effet, la littérature montre que les relations de *Ganguillet-Kutter* (1869) et de *Bazin* (1897) ne tiennent pas en compte de tous les paramètres régissant l'écoulement uniforme et s'appliquent ainsi au régime turbulent rugueux uniquement. Quant à la formule de *Powell* (1950), elle est applicable pour tout le domaine de l'écoulement

turbulent mais elle se présente sous forme implicite vis-à-vis du coefficient C de *Chézy*. Par contre la relation de *Swamme et Rathie (2004)*, se présente sous une forme plus complète mais elle est implicite également lorsque la dimension linéaire du canal ou de la conduite n'est pas donnée. En revanche, *Achour et Bedjaoui (2006)* ont proposé des relations générales permettant le calcul explicite du coefficient C de *Chézy* et n de *Manning* et elles comprennent tous les paramètres qui affectent l'écoulement uniforme. Cependant, ces relations sont générales et ne permettent pas la détermination directe de ces coefficients de résistance pour un profil géométrique donné.

Dans ce contexte, nous proposons de contribuer au développement des approches théoriques qui aident à déterminer explicitement les coefficients de résistance à l'écoulement C de *Chézy* et n de *Manning* en tenant compte de tous les paramètres régissant l'écoulement uniforme, et cela pour les profils géométriques des conduites fermées en forme de Voûte de type I et II, elliptique et semi-elliptique. Cela peut être rendu possible en se basant principalement sur la relation du débit volume de *Achour et Bedjaoui (2006)* d'une part et d'autre part sur les formules de *Chézy* et de *Manning*. L'écoulement normal est analysé à coefficient de résistance variable. Et lorsque la dimension linéaire ne constitue pas une donnée du problème, la méthode du modèle rugueux est le moyen le plus approprié pour atteindre notre objectif.

Notons que les formes de conduite choisies pour l'élaboration de cette thèse, n'ont pas fait, à notre connaissance, l'objet des études antérieures en matière des coefficients de résistance à l'écoulement.

Pour mener à bien notre étude, la thèse a été subdivisée en deux grandes parties :

La première partie se compose de deux chapitres. Le premier chapitre est dédié à une synthèse bibliographique sur l'écoulement uniforme, tant sur le plan théorique que pratique. Le deuxième chapitre de cette partie est consacré à la présentation de la méthode du modèle rugueux de référence (MMR), c'est une méthode qui répond aux problèmes de calcul de l'écoulement uniforme dont les coefficients des résistances à l'écoulement en fait partie, en particulier le coefficient C de *Chézy* et n de *Manning*.

La seconde partie de la thèse constitue notre propre contribution à l'étude des coefficients des résistances C de *Chézy* et n de *Manning* dans quelques profils de conduites fermées. Cette partie est divisée en quatre chapitres comme suit :

Le premier chapitre de la deuxième partie de notre thèse constituera la contribution au calcul des coefficients de résistance à l'écoulement dans une conduite fermée en forme de voûte de type I. Après avoir présenté la géométrie de la conduite, les caractéristiques géométriques de la conduite et celles de l'écoulement seront indiquées. La relation générale du débit volume permet de déduire l'expression du coefficient de résistance de *Chézy* ainsi que le coefficient de *Manning* et la représentation graphique de ces coefficients est présentée et les courbes de variation obtenues seront commentées. Lorsque la dimension de la conduite est inconnue, la méthode du modèle rugueux sera utilisée pour calculer les coefficients de résistance C et n .

Le deuxième chapitre concerne l'étude des coefficients de résistance à l'écoulement dans une conduite en forme de voûte de type II. Les relations régissant les propriétés géométriques de la conduite et hydrauliques de l'écoulement seront exprimées en fonction du taux de remplissage. Ensuite, nous établirons les relations des coefficients de résistance à l'écoulement de *Chézy* et de *Manning*. La variation du coefficient sans dimension C / \sqrt{g} et N en fonction du taux de remplissage sera présentée et commentée pour certaines valeurs de la rugosité relative et du nombre de *Reynolds* à l'état plein. Encore une fois, lorsque le diamètre de la conduite est inconnu, la méthode MMR nous permet de développer les relations visant à déterminer les coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning*.

A travers le troisième chapitre, nous étudierons un autre type de conduite, qui est la conduite fermée de forme semi-elliptique. Avec un schéma de définition, nous expliquerons toutes les dimensions de cette forme puis contribuerons au développement des relations de la largeur du plan d'eau e , du périmètre mouillé P , de l'aire de la section mouillée A et du rayon hydraulique R_h . Grâce à la relation générale de *Chézy* et celle de *Manning*, nous développerons les expressions des coefficients de résistance dans la conduite étudiée. Les relations qui en résultent seront adimensionnelles afin de leur donner un caractère de validité générale. Les courbes de variation des coefficients adimensionnels seront présentées et commentées. Par ailleurs, lorsque le diamètre générateur de la conduite n'est pas une donnée du problème, les relations obtenues ne peuvent pas être utilisées pour évaluer les coefficients de résistance à l'écoulement C de *Chézy* et n de *Manning*, la méthode MMR sera alors utilisée pour la détermination de ces coefficients.

Au cours du quatrième et dernier chapitre de la deuxième partie, nous nous intéresserons à l'étude d'une forme plus compliquée, qui est la forme elliptique qui est considérée dans notre thèse comme un cas particulier de la conduite en forme d'arc. Selon la

valeur du taux de remplissage, nous exprimerons les relations régissant les propriétés géométriques et hydrauliques de la conduite en arc, puis nous déduirons celle de la conduite elliptique étudiée. Par la suite, les relations des paramètres de résistance C et n seront exprimées en fonction de la rugosité relative, du taux de remplissage et du nombre de *Reynolds* à l'état plein. Ces derniers paramètres permettent de tracer la variation des coefficients de résistance. A partir de ces courbes, des conclusions intéressantes seront tirées et les relations des coefficients de résistance particuliers seront déduites. Nous utiliserons toujours la méthode MMR pour calculer les coefficients de résistance C et n en l'absence de la valeur du diamètre générateur.

Enfin, l'étude des coefficients de résistance à l'écoulement dans les différents types de conduites qui seront étudiés à travers cette thèse devra être ponctuée par des applications pratiques. Celles-ci permettront au lecteur de mieux appréhender les relations proposées et d'apprécier le degré de leur validité et de leur efficacité.

PREMIERE PARTIE

APERÇU SUR L'ÉCOULEMENT UNIFORME

Chapitre I

Etat des connaissances sur l'écoulement uniforme

Chapitre I

Etat des connaissances sur l'écoulement uniforme

I. Introduction

Le premier chapitre de cette première partie est entièrement dédié à présenter un état de connaissances sur l'écoulement uniforme. Le concept d'uniformité est expliqué à travers un schéma simplifié et l'équation de continuité est présentée. L'expression générale de la vitesse moyenne V est aussi présentée en fonction des paramètres régissant l'écoulement. Ceci est suivi par les équations du mouvement qui mènent aux relations universellement connues de *Chézy*, de *Manning* et de *Darcy-Weisbach*. Les coefficients de résistance liés à ces formules sont pratiquement discutés et les relations permettant leur estimation sont présentées. On présente ensuite les différentes relations permettant l'évaluation du coefficient de frottement, le plus important d'entre eux est la relation de *Colebrook-White* ; leur discussion et domaine d'application seront présentés, avec une explication détaillée du diagramme universel de *Moody*.

II. Hypothèses de l'écoulement uniforme

II.1. Concept de l'uniformité

Comme dans n'importe quel domaine de la science physique, certaines hypothèses sont inévitables et peuvent même ne pas poser de problème, comme lorsqu'il est affirmé, généralement tacitement, que les effets quantiques ou de relativité peuvent être négligés dans les problèmes de science environnementale (*Smith et al.,2007*). Il est cependant important que les chercheurs examinent dans quelle mesure les diverses hypothèses s'appliquent à leur situation sur le terrain ou en laboratoire, l'une de ces hypothèses est l'hypothèse d'écoulement uniforme.

En effet, dans un canal de pente constante et de section transversale invariable (canal cylindrique ou prismatique), l'écoulement est uniforme si :

- La ligne de charge, la surface libre et le fond du canal sont parallèles ;
- La pression verticale est de nature hydrostatique (*Graf et Altinakar, 2000*).

Bien que la condition d'un écoulement uniforme, dans le sens strict du terme, ne soit pratiquement jamais satisfaite, elle est cependant fréquemment admise lors de calcul des caractéristiques d'un écoulement en canaux et rivières (*Chow, 1973*).

Notons que l'écoulement est considéré comme étant uniforme lorsque ses caractéristiques sont invariables dans le temps et dans l'espace. Ces caractéristiques sont la profondeur y_n de l'écoulement appelée aussi profondeur normale, l'aire de la section mouillée A , la vitesse moyenne V de l'écoulement et le débit Q (*Achour et al., 2002*).

L'hypothèse de la constance des vitesses concerne bien l'égalité des vitesses moyennes de l'écoulement d'une section à l'autre, mais dans une section la vitesse n'est pas obligatoirement constante d'un point à un autre (*Smith et al., 2007*). En d'autres termes, la distribution des vitesses dans chacune des sections transversales de l'écoulement est uniforme, correspondant à une couche limite pleinement développée; cet aspect du problème a été longuement étudié par plusieurs chercheurs (*Prandtl, 1926 ; Keulegan, 1938 ; Hama, 1954 ; Schlichting, 1955 ; Morris, 1955 ; Iwasa, 1957*).

L'écoulement véritablement uniforme est très rare dans les canaux naturels et assez rare dans les canaux artificiels. L'écoulement uniforme (Figure 1.1) ne s'observe que dans des canaux prismatiques très longs et loin des extrémités amont et aval (*Graf et Altinakar, 2000*).

Bien que l'écoulement uniforme soit rare, on l'utilise souvent comme écoulement standard pour l'étude (théorique et expérimentale) de base pour tous les autres types d'écoulement, notamment pour la compréhension de la résistance à l'écoulement.

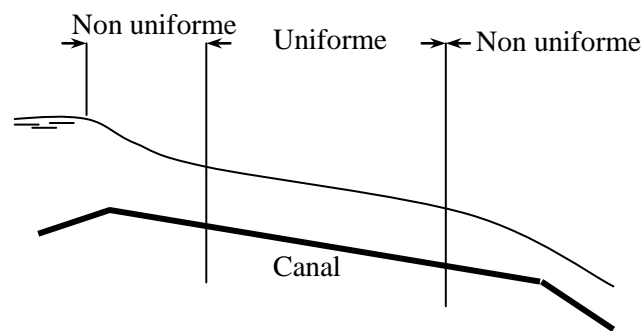


Figure 1.1 : Ecoulement uniforme loin des extrémités (*Graf et Altinakar, 2000*)

II.2. Calcul de l'écoulement uniforme

Lorsque l'on se réfère à la bibliographie (*Houk, 1918 ; Forchheimer, 1930 ; Lindquist, 1933 ; Vladislavljevitch, 1951*), on peut s'apercevoir que de très nombreuses relations ont été proposées au calcul de l'écoulement uniforme. Cependant, aucune d'entre elles ne répond au qualificatif de

" bonne relation " selon la conception de [Schnackenberg \(1951\)](#). Différentes approches ont été également présentées au calcul de la vitesse de l'écoulement dans les canaux naturels.

II.2.1. Conductivité

Le débit volume Q de l'écoulement uniforme dans une conduite ou un canal s'exprime par le produit de la vitesse moyenne V et l'aire de la section mouillée A :

$$Q = VA = CAR_h^\beta J^\gamma \quad (1.1)$$

La relation (1.1) peut aussi s'écrire :

$$Q = KJ^\gamma \quad (1.2)$$

Où :

$$K = CAR_h^\beta \quad (1.3)$$

Le facteur K est connu sous le terme de conductivité de la conduite ou du canal. Il s'agit de la capacité d'évacuation de la section de la conduite ou du canal considéré, étant donné que K est directement lié au débit volume Q .

Lorsque l'une des relations de *Chézy* ou de *Manning* est utilisée, correspondant à $\gamma = 1/2$, la relation (1.2) permet alors de déduire que la conductivité est :

$$K = Q / \sqrt{J} \quad (1.4)$$

Lorsque la formule de *Chézy* est utilisée, correspondant à $\beta = 1/2$, l'équation (1.3) devient :

$$K = CAR_h^{1/2} \quad (1.5)$$

C est le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy*.

Lorsque la relation de *Manning* est utilisée, la conductivité K s'écrit :

$$K = \frac{1}{n} AR_h^{2/3} \quad (1.6)$$

Où n représente le coefficient de rugosité de *Manning*.

Les relations (1.5) et (1.6) peuvent être utilisées pour calculer la conductivité K , lorsque la géométrie de la section ainsi que le coefficient de résistance sont connus.

II.2.2. Facteur de section

L'expression $AR_h^{2/3}$ est appelée facteur de section au calcul de l'écoulement uniforme ([Badri, 2010](#)). Selon la relation (1.6), nous pouvons écrire :

$$AR_h^{2/3} = nK \quad (1.7)$$

Ou bien, en tenant compte de la relation (1.4) :

$$AR_h^{2/3} = \frac{nQ}{\sqrt{J}} \quad (1.8)$$

La relation (1.8) peut être très utile pour l'analyse et le calcul de l'écoulement uniforme. Lorsque le débit volume Q , la pente J et le coefficient de rugosité de Manning n sont connus, cette dernière relation donne la valeur du facteur de section $A_n R_{h,n}^{2/3}$, où l'indice n désigne l'écoulement normal, et par suite la profondeur normale y_n . D'autre part, lorsque n , J et y_n sont donnés, la relation (1.8) permet de calculer le débit volume normal Q_n .

II.2.3. Equations hydrodynamiques

II.2.3.1. Equation de continuité

Lorsque l'écoulement est uniforme et permanent, l'aire de la section mouillée A reste inchangée selon la direction x le long de l'écoulement et dans le temps t . L'équation de continuité qui s'écrit :

$$\frac{\partial(VA)}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (1.9)$$

Devient :

$$\frac{\partial(VA)}{\partial x} = 0 \quad (1.10)$$

Avec $VA=Q$. Le débit volume Q est donc une constante, soit :

$$Q = \text{constante} \quad (1.11)$$

Entre deux sections transversales données 1 et 2, nous pouvons écrire :

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 = Q \quad (1.12)$$

II.2.3.2. Equation du mouvement (Calcul de vitesse)

Considérons un canal prismatique de forme quelconque (Figure 1.2). Le liquide en écoulement occasionne une force de frottement sur les parois qui peut s'écrire :

$$F_f = \tau_o P dx \quad (1.13)$$

Où : τ_o est la force par unité d'aire de surface mouillée, P est le périmètre mouillé et dx est la longueur élémentaire de la tranche de canal considéré (Figure 1.2).

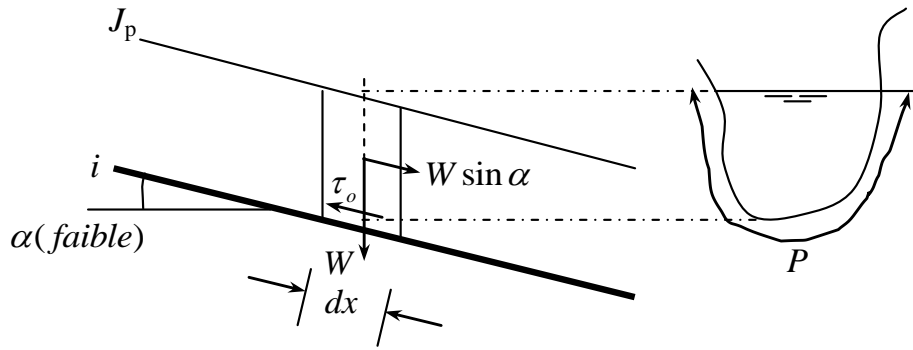


Figure 1.2 : Schéma de définition ayant servi de base à l'établissement de la formule de Chézy

Sur la figure 1.2, la quantité $W \sin \alpha$ représente la composante tangentielle du poids propre W de la tranche liquide élémentaire dx , soit :

$$W = \rho g \times \text{Volume} = \rho g A dx = \varpi A dx$$

La composante tangentielle du poids propre W s'écrit donc :

$$F_g = \varpi A dx \sin \alpha = W \sin \alpha \quad (1.14)$$

Lorsque l'écoulement uniforme est établi, les forces F_f et F_g , données par les relations (1.13) et (1.14) respectivement, s'équilibrent. Ainsi :

$$\tau_o P dx = \varpi A dx \sin \alpha \quad (1.15)$$

La relation (1.15) permet d'écrire :

$$\tau_o = \varpi \frac{A}{P} \sin \alpha \quad (1.16)$$

Le rapport A/P représente le rayon hydraulique R_h , tandis que $\sin \alpha$ désigne la pente longitudinale i . La relation (1.16) s'écrit alors :

$$\tau_o = \varpi R_h i \quad (1.17)$$

En hydrodynamique, on définit (Graf et Altinakar, 2000):

$$\frac{\tau_o}{\rho} = v_*^2 \quad (1.18)$$

Où v_* désigne ce que l'on appelle la vitesse de frottement. Tenant compte de (1.18), la relation (1.17) permet d'écrire que :

$$v_* = \sqrt{g R_h i} \quad (1.19)$$

D'autre part, on définit le coefficient de frottement f (Graf et Altinakar, 2000) par :

$$f = \frac{8 \tau_o}{\rho V^2} \quad (1.20)$$

En tenant compte des relations (1.17) et (1.20), nous pouvons déduire que :

$$f \frac{\rho V^2}{8} = \varpi R_h i$$

Cette dernière relation s'écrit plus simplement sous la forme, avec : $\varpi = \rho \cdot g$:

$$i = f \frac{1}{4R_h} \frac{V^2}{2g} \quad (1.21)$$

La relation (1.21) est connue sous le nom de la relation de *Darcy-Weisbach*. Elle est très utilisée pour les écoulements dans les conduites. Dans cette relation, le coefficient de frottement f dépend du nombre de *Reynolds* R et de la rugosité relative ε / R_h , qui dépendent de la forme géométrique de la section du canal considéré. La relation (1.21) s'écrit souvent sous la forme :

$$V = \sqrt{8g / f} \sqrt{R_h i} \quad (1.22)$$

Ou bien :

$$V = C \sqrt{R_h i} \quad (1.23)$$

$$\text{Avec : } C = \sqrt{8g / f}$$

La relation (1.23) est connue sous le nom de la relation de *Chézy* et le coefficient C est appelé coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* dont la dimension est $m^{1/2} s^{-1}$.

III. Formules usuelles de l'écoulement uniforme

L'écoulement uniforme est régi par des relations que l'on appelle « relations de l'écoulement uniforme ». Les relations de type *Chézy* et *Manning* sont celles qui sont le plus souvent utilisées pour l'étude de l'écoulement uniforme. La relation de *Darcy-Weisbach* est une équation de base qui est, également, largement utilisée pour le calcul des écoulements uniformes.

III.1. Formule de *Chézy*

Durant le dix huitième siècle, *Antoine Chézy*, a réalisé deux canalisations sur la rivière Yvette près de Paris (*Smith et al.,2007*). À partir des expériences qui ont été fait sur le canal de Courpalet et la Seine, *Chézy (1775)* a développé ce que l'on appelle aujourd'hui la formule de *Chézy* pour comparer des écoulements uniformes dans des canaux ouverts (*Herschel, 1897*, citée par : *Smith et al.,2007*), soit :

$$V = C \sqrt{R_h i} \quad (1.23)$$

Cette relation nous permet d'étudier l'écoulement uniforme à surface libre dans les conduites et les canaux. Cette relation met en exergue le lien fonctionnel entre la profondeur et la vitesse de l'écoulement. Ces deux facteurs sont les plus importants dans l'écoulement, par conséquent les

chercheurs en hydraulique leur donnent beaucoup d'importance. La dite relation entre les deux facteurs se base essentiellement sur la résistance de l'eau dans la canalisation (Lawrence, 2000), cette résistance est paramétrée par le coefficient de résistance de Chézy que l'on note souvent par la lettre "C".

III.2. Calcul du coefficient C de Chézy

Dans la pratique, il existe des tableaux qui permettent d'évaluer les valeurs du coefficient C en fonction de la nature des matériaux constituant les parois internes des canaux et des conduites. Cependant, cette démarche ne correspond pas à la réalité physique de l'écoulement, puisque le coefficient de résistance devrait en principe dépendre de la géométrie de la conduite et des caractéristiques hydrauliques de l'écoulement (Achour, 2014.a). Cela est confirmé par plusieurs chercheurs du domaine, d'où le coefficient de Chézy est constamment variable en fonction de multiples paramètres. (Henderson, 1966), suggère que la valeur de C se diminue au fur et à mesure avec l'augmentation de la rugosité. La forme géométrique du canal ainsi que les différences de rugosité du lit et du talus ont un effet substantiel sur la résistance à l'écoulement (Hey, 1979), en plus (Smith et al., 2007) annonce que la profondeur normale de l'eau a une répercussion sur le coefficient de résistance de Chézy. Différentes formules ont été également présentées au calcul du coefficient C de Chézy. Les plus citées par la bibliographie sont celles de Ganguillet – Kutter (1869), de Bazin (1897), de Powell (1950), de Swamee et Rathie (2004) et de Achour et Bedjaoui (2006).

III.2.1. La formule de Ganguillet – Kutter

La formule de Ganguillet – Kutter (1869) exprime le coefficient C de Chézy en fonction de la pente J du canal, du rayon hydraulique R_h et du coefficient de rugosité n de Kutter. Cette formule est donnée comme suit :

$$C = \frac{23 + \frac{0,00155}{J} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{J}\right) \frac{n}{\sqrt{R_h}}} \quad (1.24)$$

Cette relation de C est tabulée de manière indépendante de la viscosité cinématique du liquide ν . Par conséquent, elle ne peut s'appliquer que dans le domaine d'écoulement turbulent rugueux où la viscosité cinématique du liquide n'a aucune influence.

III.2.2. La formule de Bazin

Bazin (1897) considère que la valeur du coefficient C de *Chézy* dépend du rayon hydraulique R_h mais ne dépend pas de la pente J du canal. Le coefficient C peut alors être déterminé par la relation :

$$C = \frac{87}{1 + \frac{m}{\sqrt{R_h}}} \quad (1.25)$$

m est le coefficient de rugosité dépendant de la nature du matériau constituant le canal considéré et dont la valeur est tabulée. La formule (1.25) a été développée à l'origine pour de petits canaux (*Badri, 2010*), si bien que sa généralisation ne donne pas d'aussi bons résultats que ceux obtenus par la formule de *Ganguillet – Kutter*.

III.2.3. La formule de Powell

La formule de *Powell* (1950) est plus complète car elle contient le rayon hydraulique R_h , la rugosité absolue ε et le nombre de *Reynolds* R_e . Cependant, cette formule est implicite, exprimant C comme suit :

$$C = -42 \log \left(\frac{C}{4R} + \frac{\varepsilon}{R_h} \right) \quad (1.26)$$

Selon cette relation, C dépend surtout du nombre de *Reynolds* R_e et donc de la viscosité cinématique ν . Dans cette relation, aucun terme n'exprime l'influence de la pente i du canal. Son application semble convenir à l'ensemble du domaine de l'écoulement turbulent. Pour déterminer le coefficient C par la formule de *Powell*, il est nécessaire d'utiliser un procédé itératif.

III.2.4. La formule de Swamee et Rathie

Plus récemment, *Swamee et Rathie* (2004) ont tenté de proposer une relation générale pour calculer le coefficient C de *Chézy*, applicable dans tout le domaine de l'écoulement turbulent et pour toutes les formes des canaux et des conduites. Cependant, cette relation est implicite nécessitant, alors, l'utilisation d'un procédé itératif surtout lorsque la dimension linéaire du canal ou du conduit n'est pas donnée, ou lorsqu'il s'agit de calculer la profondeur normale de l'écoulement. *Swamee et Rathie* (2004) ont suggéré pour C la formule logarithmique suivante :

$$C = -2,457 \sqrt{g} \ln \left(\frac{\varepsilon}{12R_h} + \frac{0,221\nu}{R_h \sqrt{giR_h}} \right) \quad (1.27)$$

Outre sa forme implicite, cette relation a l'avantage d'être très complète où tous les paramètres de l'écoulement sont pris en compte (Achour, 2015).

III.2.5. La formule de Achour et Bedjaoui

La formule générale de Achour et Bedjaoui (2006) exprime le coefficient C de Chézy en fonction de la rugosité absolue ε , du rayon hydraulique R_h et du nombre de Reynolds R , soit :

$$C = -4\sqrt{2g} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (1.28)$$

Le nombre de Reynolds R figurant dans la relation ci-dessus s'exprime d'après le même auteur en fonction de la pente géométrique i , du rayon hydraulique R_h et de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement, soit :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{giR_h^3}}{\nu} \quad (1.29)$$

III.3. Formule de Manning-Strickler

La vitesse moyenne V de l'écoulement uniforme peut être également évaluée par la formule dite de Manning (1891). Après comparaison avec sept autres formules bien connues à son époque, et en utilisant des données expérimentales issues de 20 séries de données, Manning a établi en 1885 la formule suivante qui a été présentée lors d'une réunion en 1889 et publiée en 1891 (Jean et Bertrand, 2006). A l'origine, la formule de Manning se présentait sous une forme compliquée (figure 1.3), soit :

$$V = C\sqrt{ig} \left[R_h^{0,5} + \frac{0,22}{m^{0,5}} (R_h - 0,15m) \right] \quad (1.30)$$

Où :

V : La vitesse moyenne de l'écoulement (m/s) ;

i : La pente du canal ou de la conduite (m/m) ;

g : L'accélération de la pesanteur (m/s^2) ;

R_h : Le rayon hydraulique (m) ;

C : Un coefficient varie selon la nature de la paroi interne du canal ;

m : Hauteur de colonne de mercure qui équilibre la pression atmosphérique (m).

coefficients. Such a formula the author now submits to the judgment of the members of the Institution.

Formula.

I. $V = C \sqrt{S} g. \left[R^{\frac{1}{2}} + \frac{0.22}{m^{\frac{1}{2}}} (R - 0.15m) \right]$

V represents the mean velocity in seconds for all measures of length; C, a coefficient which varies with the nature of the bed; S, the sine of the angle of inclination of the surface; R, "the mean radius" or "mean hydraulic depth" (which is found by dividing the area of the channel by the length of the perimeter in contact with the fluid); g, the velocity acquired by a falling body in a second of time; and m, the height of the column of mercury which balances the atmospheric pressure.

For units of English feet and seconds this formula becomes for channels in earth in good order:—

II. $V = 62 S^{\frac{1}{2}} \left(R^{\frac{1}{2}} + \frac{R}{7} - 0.05 \right),$

and, for metres—seconds, it takes the simple form:—

III. $V = 34 S^{\frac{1}{2}} \left(R^{\frac{1}{2}} + \frac{R}{4} - 0.03 \right).$

In both cases a mean height of barometer is taken = 30 English inches.

Figure 1.3 : Première forme de la formule de Manning (Manning, 1891).

Dans le même article, Manning a présenté une autre formule, basée sur 170 essais et écrite comme suit (Figure 1.4) :

$$V = C R_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (1.31)$$

The method adopted in these calculations was to take the first observation of each series as unity, and to reduce all the others to it, so that the exponent of R might be easily found; of course a similar operation should be performed successively on each of the other experiments, and a mean of all the results taken; this was not done, it being considered sufficiently accurate to take the value of the exponent at 0.666' or $\frac{2}{3}$, and so the formula—

V. $V = C S^{\frac{1}{2}} R^{\frac{2}{3}}$

was established, and was applied to 170 experiments, with the following results:—

Figure 1.4 : Seconde forme de la formule de Manning (Manning, 1891).

La relation (1.31) a été ensuite modifiée par plusieurs auteurs pour s'écrire, en unité métrique :

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (1.32)$$

n : c'est un coefficient de rugosité comme celui initialement proposé par Ganguillet et Kutter. Selon Strickler $K = 1/n$ (Strickler, 1923).

La conversion en unité anglaise conduit à la constante $(3,28084)^{1/3} = 1,4859$, puisque : $1\text{m} = 3,2808\text{ ft}$, et l'équation (1.32) donne :

$$V = \frac{1,4859}{n} R_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (1.33)$$

Chow (1955) a également suggéré que tous les chiffres de 1,4859 ne sont pas nécessaires dans la pratique et pourrait être remplacé par 1,49, soit :

$$V = \frac{1,49}{n} R_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (1.34)$$

En comparant la formule de *Manning – Strickler* (Relation 1.32), exprimée en unité métrique, à celle de *Chézy* (Relation 1.23), on peut écrire : $C = (1/n)R_h^{1/6}$. Ainsi, la formule de *Manning – Strickler* est souvent considérée comme une variante de la formule de *Chézy*.

De nombreuses applications ont montré que les valeurs de n de *Manning* et n de *Kutter* sont pratiquement identiques lorsque la pente du canal est supérieure ou égale à 0,0001 pour un rayon hydraulique variant approximativement entre 0,30 m et 9 m.

En outre, des listes plus complètes du coefficient n de *Manning*, ont été établies par *Crausse (1951)*, *Chow (1973)* et *Graf (1984)*. De plus, *Chow (1973)* et *Barnes (1967)* montrent des photos de différents canaux naturels et artificiels comme support visuel permettant le choix du coefficient de *Manning*.

La relation de *Achour et Bedjaoui (2006)* a donnée des résultats satisfaisants pour le calcul du coefficient n de *Manning*. Elle a été adoptée dans plusieurs études pour différentes formes de canaux et de conduites (*Badri, 2010; Zegait, 2012; Lamri, 2013; Achour, 2013, Achour, 2014.a ; Achour, 2014.b ; Achour, 2015 ; Loukam, 2018 ; Achour et Amara, 2020*), soit ainsi :

$$\frac{1}{n} = -4 \sqrt{2g} R_h^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right) \quad (1.35)$$

La relation (1.35) montre que le coefficient n de *Manning* est fonction de la rugosité absolue ε , du nombre de *Reynolds* Re et du rayon hydraulique R_h . Cette relation est applicable à tous les profils géométriques et dans tout le domaine de l'écoulement turbulent tel que défini par le diagramme universel de *Moody*.

III.4. Formule de *Darcy – Weisbach* et évaluation du coefficient de frottement

C'est d'abord *Weisbach* qu'en 1845 fut le premier qui a établi la relation du gradient de la perte de charge dans les conduites circulaires. Indépendamment des travaux de *Weisbach*, *Darcy* a effectué en 1854 des travaux sur les écoulements en conduites. Il en est ainsi résulté la formule suivante, portant le nom de *Darcy-Weisbach* :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (1.36)$$

Où : Q est le débit volume, g est l'accélération de la pesanteur, A est l'aire de la section mouillée, D_h est le diamètre hydraulique et f représente le coefficient de frottement.

Dans tous les problèmes pratiques se rapportant aux conduites et canaux, c'est la relation (1.36) qui est largement appliquée. Cependant, elle peut nécessiter l'emploi d'un procédé graphique ou itératif en raison de la forme implicite du coefficient de résistance f . Cet aspect du problème sera présenté et commenté dans les prochains paragraphes.

III.4.1. Formule de *Colebrook-White*

Etablie en 1939, la formule de *Colebrook-White* est celle qui est largement adoptée pour le calcul du coefficient de frottement f lorsque l'écoulement est en régime de transition, turbulent rugueux ou lisse. Celui-ci s'exprime par :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) , R > 2300 \quad (1.37)$$

Où "log" désigne le logarithme décimal. Dans la relation (1.37), les paramètres ε , D_h et R correspondent respectivement à la rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite, au diamètre hydraulique de celle-ci et au nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement. Celui-ci est par définition le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité, et s'écrit :

$$R = \frac{4Q}{P\nu} \quad (1.38)$$

Où ν est la viscosité cinématique du liquide en écoulement et P est le périmètre mouillé.

La relation (1.37) s'applique à l'écoulement turbulent et à toute forme de canaux et conduites, pour les nombres de *Reynolds* R supérieurs à 2300 (*Sinniger et Hager, 1989*). L'écoulement turbulent est non seulement caractérisé par la valeur du nombre de *Reynolds* R mais aussi par celle de la rugosité relative ε/D_h .

Selon les valeurs de ε/D_h et de R , l'écoulement turbulent peut être en régime pratiquement lisse correspondant à $\varepsilon/D_h \rightarrow 0$, ou en régime rugueux appelé aussi régime de pleine turbulence ou turbulent rugueux. Celui-ci correspond en règle générale aux valeurs élevées du nombre de *Reynolds* R .

Ces deux régimes sont en réalité les deux états extrêmes de l'écoulement qui peut cependant se situer en zone intermédiaire dite zone de transition. Dans le cas d'un régime d'écoulement

pratiquement lisse $\varepsilon/D_h \rightarrow 0$, la relation (1.37) montre que le coefficient de frottement f ne dépend que de la valeur du nombre de *Reynolds* R , soit :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) \right]^{-2} \quad (1.39)$$

Dans le cas d'un régime d'écoulement turbulent rugueux, correspondant aux valeurs élevées du nombre de *Reynolds* ($R \rightarrow \infty$), le terme $\left(\frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right)$ figurant dans la relation (1.37) tend alors vers

zéro et le coefficient de frottement f s'écrit alors :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} \right) \right]^{-2} \quad (1.40)$$

La rugosité relative ε/D_h est donc le seul paramètre dont dépend le coefficient de frottement f lorsque l'écoulement est en régime turbulent rugueux. La relation (1.40) est également connue sous le nom de formule de *Nikuradse* en hommage à son auteur.

Lorsque l'écoulement se situe en zone de transition, le coefficient de frottement f répond alors à la relation (1.37) et sa valeur dépend à la fois de celle de la rugosité relative ε/D_h et de celle du nombre de *Reynolds* R .

En admettant que les valeurs de ε/D_h et de R soient données, la relation (1.37) montre que la valeur du coefficient de frottement f ne peut être explicitement déterminée. La relation (1.37) est en effet implicite vis-à-vis de f puisque celui-ci est contenu à la fois dans les membres gauche et droit de la relation. La détermination du coefficient de frottement f nécessite donc un procédé itératif ou graphique dans le cas où la relation (1.37) est utilisée.

III.4.2. Formule de *Swamee et Jain*

Etablie en 1976, la formule de *Swamee et Jain* est destinée au calcul explicite du coefficient de frottement f . Cette formule se veut être une solution approchée à la relation implicite (1.37) de *Colebrook-White*. Aucune méthode analytique n'a été proposée par les auteurs pour établir leur relation. Celle-ci a été déterminée après plusieurs tentatives basées sur un calcul laborieux. Selon *Swamee et Jain (1976)*, la relation (1.37) de *Colebrook-White* peut être remplacée par la relation approchée suivante :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} + \frac{5,74}{R^{0,9}} \right) \right]^{-2} \quad (1.41)$$

Comme l'indique la relation (1.41), le coefficient de frottement peut être directement calculé à partir des valeurs connues du nombre de *Reynolds* R et de la rugosité relative ε/D_h .

Cependant, *Swamee* et *Jain* indiquent que la relation (1.41) doit être appliquée dans les gammes de valeurs : $5 \cdot 10^3 < R < 10^8$ et $10^{-6} < \varepsilon/D_h < 10^{-2}$. La relation (1.41) est donc restrictive vis-à-vis notamment de la gamme de valeurs admise de la rugosité relative. Celle du nombre de *Reynolds* R semble suffisante tant elle couvre une large gamme pratique.

La relation (1.41) ne couvre donc pas l'ensemble du diagramme de *Moody*, mais elle est de nos jours la formule la plus largement adoptée, à son époque, en raison de sa simplicité. La formule historique (1.37) de *Colebrook-White* est ainsi peu à peu abandonnée au profit de la formule de *Swamee* et *Jain*, car elle nécessite le recours à un procédé itératif ou graphique tel que nous l'avons montré au paragraphe précédent.

Dans le cas d'une conduite circulaire en charge, le diamètre hydraulique D_h qui apparaît dans la relation (1.37) doit être remplacé par le diamètre D . Pour ce dernier cas, une étude comparative est faite par (*Achour, 2007*) entre la relation (1.37) de *Colebrook-White* et la relation (1.41) de *Swamee* et *Jain* pour quelques valeurs de ε/D , les résultats obtenus sont représentés dans la figure 1.5.

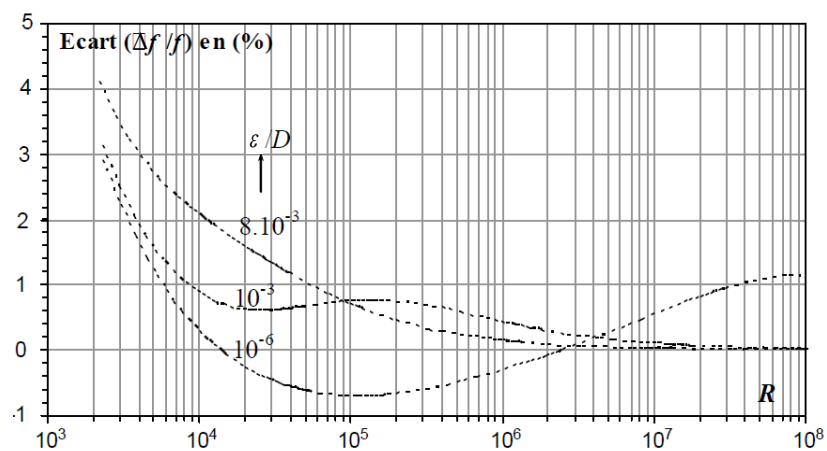


Figure 1.5 : Comparaison entre les relations de *Colebrook-White* (1.37) et de *Swamee et Jain* (1.41) pour quelques valeurs de ε/D (*Achour, 2007*)

Le diagramme de la figure 1.5 montre clairement que pour les valeurs du nombre de *Reynolds* R tel que : $5 \cdot 10^3 < R < 10^4$, l'écart relatif $\Delta f/f$ entre les deux relations (1.37) et (1.41) varie entre 0,3% et 2,8%.

Les forts écarts sont observés pour les plus faibles valeurs du nombre de *Reynolds* R . Au-delà de la valeur $R = 10^4$, les écarts relatifs $\Delta f/f$ sont tout à fait acceptables car ils restent dans la majorité des cas inférieurs ou à la limite égaux à 1%.

En d'autres termes, la relation (1.41) de *Swamee* et *Jain* doit être appliquée avec beaucoup de précaution dans la gamme $5.10^3 < R < 10^4$, puisque des écarts relatifs $\Delta f/f$ de 2,8% peuvent être obtenus et seraient inacceptables dans certaines applications pratiques (*Achour*, 2007).

III.4.3. Formule de *Achour et al.*

Dans le but de faciliter le calcul du coefficient de frottement f dans tout le domaine de l'écoulement turbulent en conduite sous pression, *Achour et al.* (2002) proposent de remplacer la formule (1.37) de *Colebrook-White* par la relation approchée suivante :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} + \frac{4,5}{R} \log \frac{R}{6,97} \right) \right]^{-2} \quad (1.42)$$

Pour la large gamme de valeurs : $0 \leq \varepsilon/D_h \leq 0,05$ de la rugosité relative, les auteurs préconisent l'usage de la formule (1.42) pour les valeurs du nombre de *Reynolds* R tel que $R \geq 10^4$. L'écart maximal observé entre les valeurs de f calculées selon les relations (1.37) et (1.42) ne dépasserait guère 2%. Les forts écarts sont obtenus pour les fortes rugosités relatives et correspondent à l'état de l'écoulement en régime turbulent rugueux ou hydrauliquement rugueux.

Pour mieux apprécier ces écarts, *Achour* (2007) a procédé à une comparaison graphique entre la relation (1.37) de *Colebrook-White*, prise comme référence, et celle (1.42) de *Achour et al.* Les résultats obtenus à l'issue de l'étude comparative sont représentés sur la figure 1.6. La comparaison a été faite pour une conduite circulaire en charge où : $D_h = D$.

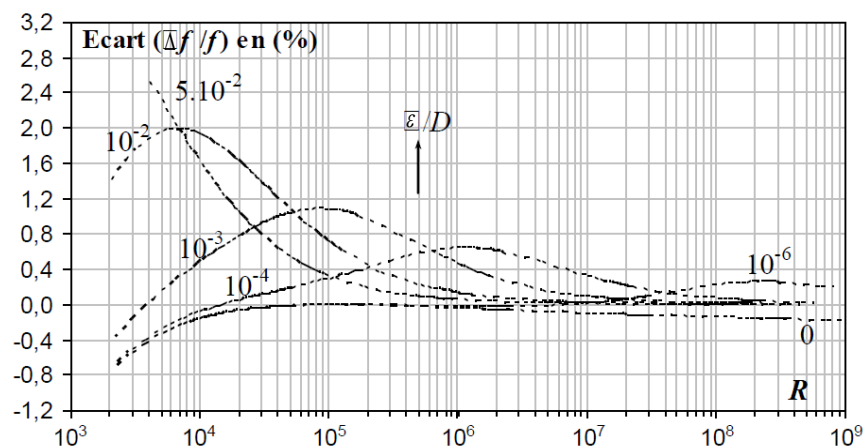


Figure 1.6 : Comparaison entre les relations de *Colebrook-White* (1.37) et de *Achour et al.* (1.42) pour quelques valeurs de ε/D (*Achour*, 2007)

Au regard de la figure 1.6, le diagramme montre que l'écart relatif $\Delta f/f$, calculé selon les formules de *Colebrook-White* et de *Achour et al.* dépend à la fois de la valeur du nombre de

Reynolds R et de celle de la rugosité relative ε/D . Dans la gamme des rugosités relatives : $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$, la valeur maximale observée de $\Delta f/f$ est pratiquement 2% et s'obtient pour $R=7000$. Au fur et à mesure de l'augmentation du nombre de *Reynolds* R , l'écart $\Delta f/f$ diminue sensiblement pour atteindre des valeurs inférieures à 1,2% pour : $R \geq 10^5$ et $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$. En restreignant la gamme de valeurs de la rugosité relative à $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,001$, nous pouvons observer que les écarts $\Delta f/f$ sont également inférieurs à 1,2% pour toute valeur de $R \geq 2300$. Il est particulièrement intéressant de noter que pour l'écoulement turbulent lisse ou pratiquement lisse correspondant à : $\varepsilon/D \rightarrow 0$, l'écart $\Delta f/f$ reste insignifiant pour toutes les valeurs du nombre de *Reynolds* R supérieures à 2300. Pour cet état de l'écoulement, la relation (1.42) permet d'écrire que le coefficient de frottement f est tel que :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{4,5}{R} \log \frac{R}{6,97} \right) \right]^{-2} \quad (1.43)$$

Il a noté qu'une étude expérimentale très récente qui a été effectuée par *Germano et al.* (2020) a montré que, parmi 47 formules du coefficient de frottement y compris celle de *Colebrook-White*, la relation (1.42) de *Achour et al.* (2002) donne la meilleure précision comparativement avec les résultats expérimentaux et cela pour l'intervalle des rugosités relatives : $0 \leq \varepsilon/D \leq 1,4 \cdot 10^{-3}$ et des nombres de *Reynolds* : $3000 \leq R \leq 735000$.

IV. Diagramme universel de *Moody*

En 1944, *Lewis Ferry Moody* publie un graphique représentant la variation du coefficient de frottement f de *Darcy-Weisbach* en fonction du nombre de *Reynolds* R pour diverses valeurs de rugosité relative ε/D telle que : $0 \leq \varepsilon/D \leq 5 \cdot 10^{-2}$. Ce graphique est connu sous le nom de graphe de *Moody* ou diagramme de *Moody*. Ce diagramme a été tracé dans la figure 1.7 pour le cas d'une conduite circulaire en charge. Ce travail est une adaptation du travail de *Hunter* (1943) à l'aide des coordonnées employées par *Pigott* (1933), dont le travail était basé sur une analyse de quelque 10000 expériences provenant de diverses sources. Les mesures de débits de fluides dans des tuyaux artificiellement rendus rugueux par *Nikuradse* (1933) étaient à ce moment-là encore trop récentes pour avoir été pris en compte par *Pigott*.

Le diagramme a pour but de fournir une représentation graphique de la fonction produite par *C. F. Colebrook* en collaboration avec *C. M. White*. Cette fonction permet de dessiner une courbe de transition reliant la zone de transition entre les tuyaux lisses et rugueux, c'est-à-dire la région de turbulence incomplète ou régime transitoire. Ce diagramme est représenté sur la figure 1.7.

Sur ce diagramme, l'on a fait figurer aussi les observations de *Blasius* (1913) représentées par la courbe d'équation :

$$f = \frac{0,223}{R^{1/4}} \quad (1.44)$$

Cette relation est applicable à l'écoulement turbulent pratiquement lisse ($\varepsilon \rightarrow 0$) en conduite sous pression et dont la représentation graphique se traduit par une droite dans le système d'axes de coordonnées logarithmiques de la figure 1.7.

Tous les auteurs s'accordent à dire que la relation (1.44) ne serait valide que si le nombre de *Reynolds* R est compris entre 750 et $2,5 \cdot 10^4$. Cette restriction sur la valeur du nombre de *Reynolds* pourrait constituer une sérieuse contrainte dans l'emploi de la formule (1.44) étant donné que dans la plupart des cas pratiques les valeurs de R sont nettement supérieures à $2,5 \cdot 10^4$. Sur le diagramme de la figure 1.7, ont été également représentées les observations de *Prandtl-Nikuradse*, correspondant à des valeurs plus élevées du nombre de *Reynolds* R que celles issues des observations de *Blasius* (1913). En réalité, les observations de *Prandtl-Nikuradse* sont d'abord issues de celles de *Von Karman* (1930) qui a développé une relation généralisée du coefficient de frottement f , laquelle a été ensuite modifiée par *Prandtl* pour mieux être corrélée aux données obtenues par *Nikuradse*. C'est la raison pour laquelle ces observations portent le nom de *Prandtl-Nikuradse* (*Achour, 2007*).

Le coefficient de frottement f se traduit par l'équation :

$$f = \left[2 \log(R\sqrt{f}) + 0,4 \right]^2 \quad (1.45)$$

Comme pour le cas de la formule de *Colebrook-White*, la relation (1.45) est implicite vis-à-vis du coefficient de frottement f .

Mais, la relation (1.37) de *Colebrook-White* pourrait à elle seule représenter et couvrir l'ensemble du diagramme de *Moody*, à l'exception du régime laminaire qui se traduit par la droite située à l'extrémité gauche du diagramme (figure 1.7). La relation (1.37) est en effet exclusivement destinée à l'écoulement turbulent.

Pour l'écoulement turbulent lisse, la courbe enveloppe inférieure du diagramme de la figure 1.7 correspondrait à la représentation graphique de la relation (1.39), tandis que les courbes en trait plein situées à droite du diagramme de la figure 1.7 occuperaient la zone de pleine turbulence. Cette zone s'étend au-delà de la courbe en trait discontinu.

Les courbes appartenant à la zone de pleine turbulence apparaissent comme étant des lignes quasi horizontales, traduisant le fait que le coefficient de frottement f pourrait être considéré comme étant une constante, exclusivement dépendante de la valeur de la rugosité relative ε/D . En réalité, ces lignes décroissent très lentement au fur et à mesure de l'accroissement du nombre

de Reynolds R et quelle que soit la valeur de la rugosité relative ε/D . La valeur constante de f n'est théoriquement atteinte que pour $R \rightarrow \infty$ conformément à la relation (1.40).

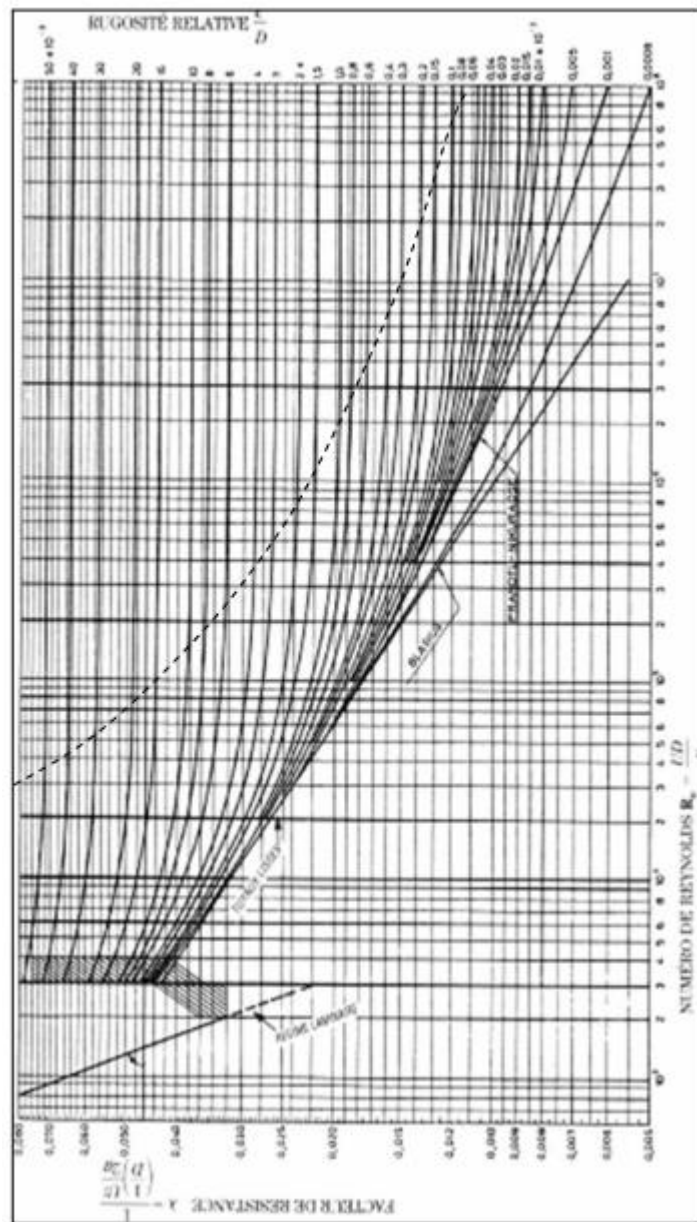


Figure 1.7: Diagramme universel de *Moody* (1944).

(—) Courbes $f(R)$ pour diverses valeurs de ε/D .

(- - -) Courbe au-delà de laquelle $f \approx$ constante.

V. Conclusion

Le premier chapitre de cette thèse a été consacré à un état de connaissances sur l'écoulement uniforme dans les conduites et les canaux, dans lequel nous avons clairement rappelé les conditions d'établissement de l'écoulement dans un canal de grande longueur. Comme nous l'avons indiqué au début de ce chapitre, l'écoulement uniforme est très rare, et se produit, d'un

point de vue théorique, lorsque le canal a une longueur infinie ou très grande. Cependant, le calcul de l'écoulement dans les canaux et rivières est effectué sous l'hypothèse de l'uniformité. Différentes approches ont été également présentées pour calculer l'écoulement uniforme qui intéresse notre recherche. Nous avons présenté la conductivité qui est paramétrée par le facteur K . Il s'agit de la capacité d'évacuation de la section de la conduite ou du canal considéré, étant donné que K est directement lié au débit volume Q . Le facteur de section contribue également au calcul de l'écoulement uniforme, lorsque le débit volume Q , la pente J et n sont connus. La relation de continuité a également été présentée afin de calculer l'écoulement uniforme dans les canaux et les conduites, où la section transversale reste inchangée dans l'espace et dans le temps. Les relations usuelles pour calculer l'écoulement uniforme ont été présentées, dont la plus importantes sont la relation de *Chézy*, de *Manning* et celle de *Darcy-Weisbach*. A partir d'un schéma de définition, nous avons montré les différentes forces intervenant dans un volume de contrôle de l'écoulement uniforme, ce qui a conduit à la démonstration de la formule universellement connu de *Chézy*. Nous avons montré que le coefficient de résistance C de *Chézy* est tel que $C = \sqrt{8g/f}$ où g est l'accélération de la pesanteur et f est un coefficient appelé coefficient de frottement. Nous avons présenté cinq relations permettant d'évaluer le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy*. La première relation est celle de *Ganguillet – Kutter* dans laquelle le coefficient C est tel que $C(J, R_h, n)$, cette relation n'est pas liée à la viscosité cinématique ν et ne peut être appliquée que dans le domaine d'écoulement turbulent rugueux. La seconde relation est celle de *Bazin* dans laquelle le coefficient C est tel que $C(R_h, m)$, cette relation n'est pas liée à la pente du canal et n'a pas donné de résultats satisfaisants. La troisième relation est celle de *Powell*. Elle exprime de manière implicite le coefficient C en fonction du nombre de *Reynolds*, du rayon hydraulique et de la rugosité absolue des parois du canal. La relation suivante est la relation de *Swamee* et *Rathie*, elle contient la plupart des paramètres géométrique de la conduite et hydraulique de l'écoulement, ses résultats sont meilleurs mais sa forme est complexe. La cinquième relation est celle de *Achour*, cette relation a donné des résultats plus efficaces et a été utilisée dans plusieurs études. Nous avons présenté la relation de *Manning* ou de *Manning-Strickler* qui exprime la vitesse moyenne V , nous avons montré les étapes de développement de cette relation depuis sa première forme en 1891 jusqu'à sa dernière forme en 1923, par suite le coefficient n selon *Manning* et $1/n = k$ selon *Strickler* a été discuté et son unité a été précisée et d'autre part, il peut être corrélé au coefficient C de *Chézy* par la relation $C = (1/n)R_h^{1/6}$.

Le premier chapitre s'est poursuivi par la présentation de la relation de *Darcy-Weisbach* (1845, 1854). Cette relation montre clairement que la vitesse moyenne d'écoulement V dépend de la pente du canal i , de l'accélération de la pesanteur g , du diamètre hydraulique D_h et d'un coefficient de frottement f . Celui-ci peut être évalué par la relation de *Colebrook-White* en s'appuyant sur un procédé itératif. Des relations explicites au calcul de f ont été proposées par certains auteurs, tels que *Swamee et Jain* (1976) et *Achour* (2007). La figure 1.5 montre que la formule de *Swamee et Jain* s'écarte de celle de *Colebrook-White* d'une valeur maximale 2,8 % pour un nombre de *Reynolds* $R = 10^4$. Alors que la relation de *Achour* a donné une différence qui ne dépasse pas de 2 % pour un nombre de *Reynolds* $R = 7000$. Dans ce contexte, le diagramme global de *Moody* a également été représenté, où nous avons expliqué en détail les relations permettant le calcul du coefficient de frottement f dans tous les cas, dont la plus importante est la relation *Colebrook-White*.

Chapitre II

Présentation de la méthode du modèle rugueux de référence

Chapitre II

Présentation de la méthode du modèle rugueux de référence

I. Introduction

Le présent chapitre a pour but d'exposer la méthode du modèle rugueux de référence qui a été élaborée pour répondre aux problèmes principaux que pose le calcul de l'écoulement uniforme dans les conduites et canaux, telle que le calcul du débit volume Q écoulé par la conduite, le calcul du diamètre D de celle-ci et le calcul du gradient J de la perte de charge linéaire lorsque celle-ci coule en charge.

Dans un premier temps, la méthode sera exposée aussi clairement que possible en mettant l'accent sur les principaux fondements sur lesquels elle repose, et les relations régissant les caractéristiques de l'écoulement dans le modèle rugueux seront alors déduites. Le plus important d'entre eux est la relation de *Darcy-Weisbach* et le facteur de correction des dimensions linéaires. Dans un second temps, nous expliquerons la relation de *Achour et Bedjaoui* publiée en 2006 et destinée au calcul du débit volume écoulé par toute conduite ou canal en charge ou à surface libre. Cette relation demeure applicable à l'ensemble des domaines de l'écoulement turbulent tels qu'ils sont décrits par le diagramme de *Moody*.

Enfin, les expressions du coefficient de *Chézy* C et de *Manning* n seront présentées en fonction du facteur de correction des dimensions linéaires.

II. Méthode du modèle rugueux de référence

Le facteur de calcul dans le domaine hydraulique pose un sérieux problème dans la réalisation des projets surtout aux niveaux des canalisations. Donc nous allons procéder à la présentation d'une nouvelle méthode de calcul de canalisations dite méthode **MMR** (**M**éthode du **M**odèle **R**ugueux). Il s'agit d'une méthode destinée aux calculs des conduites et canaux, en charge ou à surface libre initiée et développée par monsieur *ACHOUR Bachir* entre les années 2002 et 2006 (*Achour, 2007*) au sein du laboratoire de recherche en hydraulique souterraine et de surface (LARHYSS) de l'université de Biskra.

II.1. Caractéristiques du modèle rugueux de référence

Tous les paramètres du modèle rugueux sont distingués par le symbole : « $\bar{\quad}$ ». En effet, le modèle rugueux de référence considéré est en fait une conduite ou un canal caractérisé par un diamètre hydraulique \bar{D}_h , une rugosité absolue $\bar{\varepsilon}$, écoulant un débit volume \bar{Q} d'un liquide de viscosité cinématique $\bar{\nu}$, et pente longitudinale \bar{i} . En plus, Le nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux est \bar{R} et le coefficient de frottement est \bar{f} .

On affecte à cette conduite une forte rugosité relative, arbitrairement choisie égale à $\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h = 3,7 \cdot 10^{-2}$, de telle sorte que l'écoulement turbulent qui s'y produit soit en régime turbulent rugueux ou soit supposé être comme tel (*Achour, 2007*).

La rugosité relative arbitrairement choisie $\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h = 3,7 \cdot 10^{-2}$ est obtenue pour diverses valeurs de la rugosité absolue $\bar{\varepsilon}$ et du diamètre hydraulique \bar{D}_h .

Puisque l'écoulement est supposé être en régime turbulent rugueux, le coefficient de frottement \bar{f} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence répond donc à la relation (1.40) de *Nikuradse*, présentée au cours du chapitre précédent, pour $\varepsilon/D_h = \bar{\varepsilon}/\bar{D}_h$ et $f = \bar{f}$, soit :

$$\bar{f} = \left[-2 \log \left(\frac{\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h}{3,7} \right) \right]^{-2} \quad (1.46)$$

En introduisant dans la relation (1.46) la valeur choisie $\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h = 3,7 \cdot 10^{-2}$, le coefficient de frottement \bar{f} prend alors la valeur constante :

$$\bar{f} = \left[-2 \log \left(\frac{\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h}{3,7} \right) \right]^{-2} = \left[-2 \log \left(\frac{3,7 \cdot 10^{-2}}{3,7} \right) \right]^{-2} \quad (1.47)$$

Alors :

$$\bar{f} = \frac{1}{16} \quad (1.48)$$

L'écoulement turbulent rugueux se produisant dans la conduite de référence est donc caractérisé par un coefficient de frottement constant égal à 1/16.

II.2. Relation de *Darcy-Weisbach* appliquée au modèle rugueux

L'écoulement dans la conduite rugueuse de référence est également régi par des relations de même forme que celle des équations de base (1.36) et (1.38), exprimant respectivement le gradient de la perte de charge linéaire selon *Darcy-Weisbach* et le nombre de *Reynolds* de l'écoulement.

Appliquées au modèle rugueux de référence, la relation (1.36) de *Darcy-Weisbach* mène à écrire que la pente longitudinale \bar{i} du modèle rugueux est :

$$\bar{i} = \frac{\bar{f}}{D_h} \frac{\bar{Q}^2}{2g\bar{A}^2} \quad (1.49)$$

Or, le diamètre hydraulique est : $\bar{D}_h = 4\bar{A}/\bar{P}$, où \bar{A} et \bar{P} désignent respectivement l'aire de la section mouillée et le périmètre mouillé de l'écoulement dans le modèle rugueux. La relation (1.49) s'écrit alors, avec $\bar{f} = 1/16$:

$$\bar{i} = \frac{1}{128g} \frac{\bar{P}}{\bar{A}^3} \bar{Q}^2 \quad (1.50)$$

En ayant recours à la relation de *Darcy-Weisbach*, la relation (1.50) constitue alors la relation de base régissant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, applicable à tout profil géométrique. Notons que lorsque l'écoulement est en charge, la pente longitudinale \bar{i} doit être remplacée par le gradient de la perte de charge linéaire \bar{J} .

En outre, le nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence s'écrit par définition :

$$\bar{R} = \frac{4\bar{Q}}{P\nu} \quad (1.51)$$

II.3. Facteur de correction des dimensions linéaires

Selon la méthode du modèle rugueux, toute dimension linéaire L d'une conduite donnée est égale à la dimension linéaire correspondante \bar{L} du modèle rugueux, corrigée par les effets d'un facteur de correction ψ . Cela se traduit par la relation fondamentale :

$$L = \psi \bar{L} \quad (1.52)$$

Etant donné que la dimension linéaire \bar{L} est plus grande que la dimension linéaire L , alors le facteur de correction ψ est inférieur à l'unité, ou bien : $0 < \psi < 1$.

Comme le périmètre mouillé P est une dimension linéaire, alors nous pouvons écrire :

$$P = \psi \bar{P} \quad (1.53)$$

En ce qui concerne l'aire de la section mouillée A , celle-ci étant proportionnelle à la dimension linéaire L au carré, nous pouvons alors écrire que :

$$A = \psi^2 \bar{A} \quad (1.54)$$

La relation (1.36) de *Darcy-Weisbach* peut se mettre sous la forme, pour $D_h = 4A/P$:

$$i = \frac{f}{8g} \frac{P}{A^3} Q^2 \quad (1.55)$$

Appliquons les relations (1.53) et (1.54) à la relation (1.55). Nous obtenons :

$$i = \frac{f}{8g} \psi \bar{P} \frac{Q^2}{\psi^6 A^3} \quad (1.56)$$

Soit :

$$i = \frac{f}{8g} \bar{P} \frac{Q^2}{A^3} \frac{1}{\psi^5} \quad (1.57)$$

Le modèle rugueux écoule le même liquide et le même débit volume que celui de la conduite à dimensionner et sous la même pente i , soit :

$$\bar{Q} = Q ; \bar{i} = i ; \bar{v} = v \quad (1.58)$$

Remarquons, en vertu des relations (1.48), (1.50) et (1.58), que :

$$\frac{1}{8g} \bar{P} \frac{Q^2}{A^3} = \frac{\bar{i}}{f} \quad (1.59)$$

En combinant les relations (1.57) et (1.59), il vient alors que :

$$i = \frac{f}{f} \bar{i} \frac{1}{\psi^5} \quad (1.60)$$

Comme d'une part $\bar{f} = 1/16$ et $\bar{i} = i$ en vertu de la condition (1.58), la relation (1.60) s'écrit alors plus simplement :

$$1 = \frac{16f}{\psi^5}$$

Soit :

$$f = \psi^5 / 16 \quad (1.61)$$

Il faut donc noter que le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est étroitement lié au coefficient de frottement f .

Dans cette étape, il est nécessaire de faire appel à la formule (1.37) de *Colebrook-White* exprimant le coefficient de frottement f . Ainsi :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon / D_h}{3,7} + \frac{2,51}{R \sqrt{f}} \right) , R > 2300 \quad (1.37)$$

Le diamètre hydraulique D_h figurant dans la relation (1.37) est une dimension linéaire et peut donc s'écrire, en vertu de la relation (1.52) :

$$D_h = \psi \bar{D}_h \quad (1.62)$$

Le nombre de *Reynolds* R figurant dans la relation (1.37) s'écrit, par définition :

$$R = \frac{4Q}{Pv} \quad (1.63)$$

Compte de la relation (1.53), le nombre de *Reynolds* R figurant la relation (1.37) devient :

$$R = \frac{4Q}{\psi \bar{P}v} \quad (1.64)$$

En vertu de la relation (1.51) et de la condition (1.58), nous pouvons alors remarquer que la quantité $(4Q/\bar{P}v)$ figurant dans la relation (1.64) correspond en fait au nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux. Ainsi :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\bar{P}v} \quad (1.65)$$

En combinant les relations (1.64) et (1.65), il ressort que :

$$R = \psi^{-1} \bar{R} \quad (1.66)$$

Introduisons les relations (1.61), (1.62) et (1.66) dans la relation (1.37) de *Colebrook-White*, nous obtenons :

$$\frac{4}{\psi^{5/2}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_h}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{-1}\bar{R}\psi^{5/2}} \right) \quad (1.67)$$

Ou bien :

$$\psi^{5/2} \log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_h}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2}\bar{R}} \right) = -2 \quad (1.68)$$

Pour le cas d'une conduite circulaire sous pression, où $\bar{D}_h = \bar{D}$, la relation implicite (1.68) est représentée graphiquement dans le système d'axes de coordonnées à divisions semi logarithmiques de la figure 1.8, (*Achour, 2007*). Le diagramme traduit la variation du coefficient de correction des dimensions linéaires ψ en fonction du nombre de *Reynolds* \bar{R} , pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/\bar{D} .

Selon l'étude de *Achour* en 2007, le diagramme de la figure 1.8 est une version du diagramme de *Moody*. On y distingue les trois domaines connus de l'écoulement turbulent : lisse, de transition et turbulent rugueux. Sur la figure 1.8, le trait continu, c'est la courbe limite pratique délimitant les domaines de l'écoulement de transition et turbulent rugueux. Au-delà de cette courbe, le domaine de l'écoulement turbulent rugueux se traduit par une variation quasi horizontale du coefficient de correction des dimensions linéaires ψ . Celui-ci ne dépend, alors, que de la rugosité relative ε/\bar{D} .

Le domaine lisse, correspondant à $\varepsilon / \bar{D} = 0$, se réduit à une courbe unique. Celle-ci se traduit, selon la relation (1.68), par :

$$\psi^{5/2} \log\left(\frac{10,04}{\psi^{3/2} \bar{R}}\right) = -2 \quad (1.69)$$

Le domaine de l'écoulement rugueux, correspondant à $\nu \rightarrow 0$ ou à $\bar{R} \rightarrow \infty$, est régi, selon la relation (1.68), par l'équation :

$$\psi^{5/2} \log\left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{3,7\psi}\right) = -2 \quad (1.70)$$

Le diagramme de la figure 1.8 montre que dans l'ensemble du domaine turbulent, le facteur de correction des dimensions linéaires ψ varie dans la gamme $0,55 < \psi < 1$.

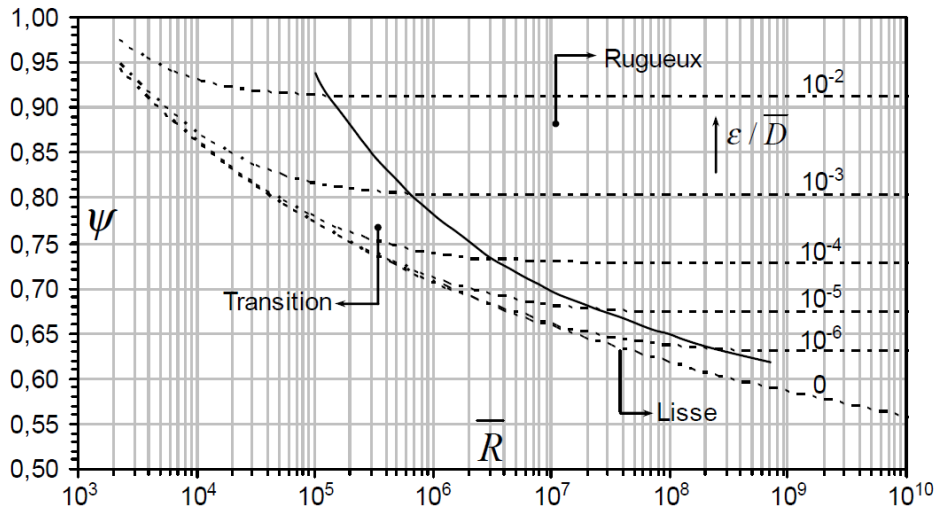


Figure 1.8 : Variation de $\psi(\bar{R})$ selon la relation (1.68) ($\bar{D}_h = \bar{D}$) pour diverses valeurs de ε / \bar{D} (Achour, 2007).

Afin de faciliter le calcul du facteur de correction ψ , il est recommandé d'utiliser la relation approchée suivante (Achour et Bedjaoui, 2006), en remplacement de la relation implicite (1.68), établie au prix d'un calcul assez laborieux :

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log\left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}}\right) \right]^{-2/5} \quad (1.71)$$

Pour: $\bar{D}_h = 4\bar{R}_h$, la relation (1.71) prend la forme suivante:

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log\left(\frac{\varepsilon / \bar{R}_h}{19} + \frac{8,5}{\bar{R}}\right) \right]^{-2/5} \quad (1.72)$$

La relation approchée (1.71) a été comparée à la relation exacte (1.68). La comparaison a été menée en respectant les étapes suivantes :

1. On fixe une valeur de la rugosité relative $\varepsilon / \overline{D}_h$ entre les valeurs 0 et 0,05 afin de balayer l'ensemble du diagramme universel de *Moody*.
2. On fait varier le nombre de *Reynolds* \overline{R} avec un pas arbitrairement choisi.
3. Par un procédé itératif, on calcule la valeur du coefficient de correction ψ en application de la relation exacte (1.68).
4. On calcule la valeur approchée selon la relation proposée (1.71).
5. On calcule enfin l'écart relatif $\Delta\psi / \psi$ (%) entre les valeurs de ψ déterminées au cours des étapes 3 et 4.

Les résultats de cette comparaison ont été tracés graphiquement dans le système d'axes de coordonnées à divisions semi-logarithmiques de la figure 1.9.

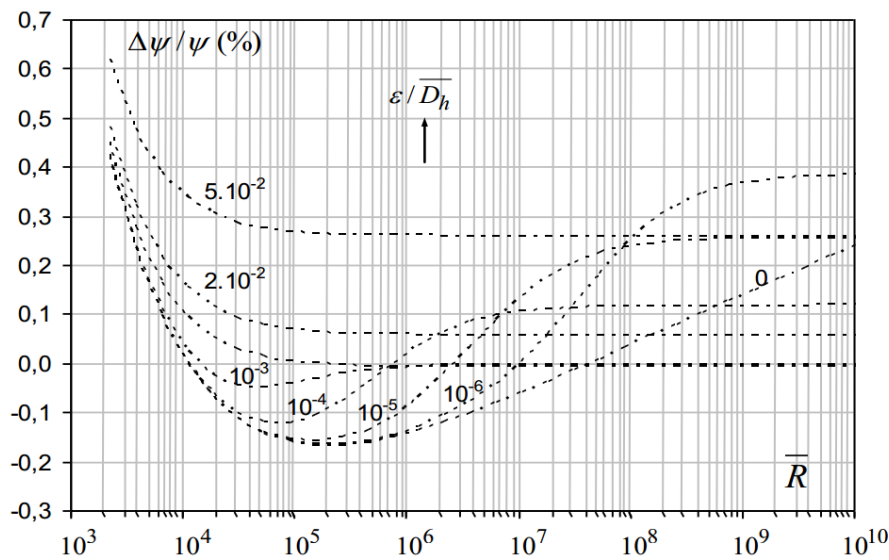


Figure 1.9 : Comparaison entre les valeurs exactes et approchées du coefficient ψ calculées selon les relations (1.68) et (1.71) (*Achour, 2014*).

Il ressort de la figure 1.9 que, pour les valeurs pratiques $R \geq 10^4$, l'écart relatif entre les valeurs exactes et approchées de ψ ne dépassent guère 0,4% seulement. Ceci montre clairement la fiabilité de la relation approchée (1.71) qui peut donc être appliquée avec une erreur très acceptable. Notons que la relation approchée (1.71) est applicable à l'ensemble du domaine de l'écoulement turbulent, comprenant le régime d'écoulement lisse, le régime d'écoulement de transition et le régime d'écoulement turbulent rugueux (*Achour, 2014*).

III. Relation générale du débit volume

A travers cette section, on va présenter la relation générale du débit volume de *Achour et Bedjaoui (2006)*. En effet, la relation dimensionnelle du débit volume Q peut être écrite sous la forme (*Achour et Bedjaoui, 2006*) :

$$Q = \varphi(i, \varepsilon, A, R_h, \nu)$$

Où i est la pente de la conduite ou du canal considéré, ε est la rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne du canal ou de la conduite, A est l'aire de la section mouillée, R_h est le rayon hydraulique et ν est la viscosité cinématique du liquide en écoulement. Le système d'équations de base de l'écoulement turbulent en conduites ou canaux ouverts est composé de trois relations. La première relation est la relation (1.36) de *Darcy-Weisbach*, la seconde relation est la relation (1.37) de *Colebrook-White* et la troisième relation est la relation (1.38) de *Reynolds*.

Pour toute formes des canaux et conduites, l'aire de la section mouillée A ainsi que le périmètre mouillé P peuvent s'écrire respectivement :

$$A = L^2 A^* \quad (1.73)$$

$$P = LP^* \quad (1.74)$$

Dans les relations (1.73) et (1.74), L est une dimension linéaire quelconque telle que la largeur b d'un canal rectangulaire ou le diamètre D d'une conduite de forme circulaire. Les paramètres A^* et P^* sont des paramètres adimensionnels qui dépendent exclusivement du paramètre de forme de la section considérée. A titre d'exemple, l'aire de la section mouillée A d'une section rectangulaire de largeur b et dont la profondeur de l'écoulement est h s'écrit $A = bh = b^2 (h/b)$ et par suite $L = b$ et $A^* = h/b$. Le périmètre mouillé P est $P = b + 2h = b(1 + 2h/b)$, par suite $P^* = 1 + 2h/b$.

Sachant que $D_h = 4 \frac{A}{P}$ et en tenant compte des relations (1.73) et (1.74), la relation (1.36) de *Darcy-Weisbach* (présentée dans le chapitre précédent) permet d'écrire que :

$$L = (f/8)^{1/5} \left(Q / \sqrt{gi} \right)^{2/5} \left(P^* / A^{*3} \right)^{1/5} \quad (1.75)$$

La relation (1.74) permet d'écrire le nombre de *Reynolds* R (relation 1.63) comme suit :

$$R = \frac{4Q}{LP^* \nu} \quad (1.76)$$

Rappelons que le modèle rugueux de référence est caractérisé par une rugosité relative $\bar{\varepsilon} / \bar{D} = 3,7 \cdot 10^{-2}$ et par un coefficient de frottement constant $\bar{f} = 1/16$. Ainsi, la relation (1.75) permet de déduire la relation de la dimension linéaire \bar{L} du modèle rugueux, soit :

$$\bar{L} = 128^{-1/5} \left(\bar{Q} / \sqrt{g\bar{i}} \right)^{2/5} \left(\bar{P}^* / \bar{A}^{*3} \right)^{1/5} \quad (1.77)$$

En se basant sur la relation (1.76), le nombre de *Reynolds* \bar{R} de l'écoulement dans le canal

rugueux s'écrit :

$$\bar{R} = \frac{4\bar{Q}}{L\bar{P}^*v} \quad (1.78)$$

En éliminant le débit volume \bar{Q} entre les relations (1.77) et (1.78), il vient que :

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g\bar{i}L^3}}{v} (\bar{A}^* / \bar{P}^*)^{3/2} \quad (1.79)$$

La relation (1.79) peut également s'écrire, en ayant recours aux relations (1.73) et (1.74) :

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g\bar{i}R_h^3}}{v} \quad (1.80)$$

Admettons que : $\bar{i} = i$, $\bar{L} = L$ et $\bar{Q} \neq Q$, impliquant que $\bar{R} \neq R$, et que le paramètre de forme de la section mouillée du canal rugueux soit le même que celui du canal considéré. Alors, nous pouvons écrire : $\bar{A}^* = A^*$, $\bar{P}^* = P^*$ et $\bar{R}_h = R_h$. En comparant les relations (1.75) et (1.77), il vient que :

$$Q = \psi_Q \bar{Q} \quad (1.81)$$

Où ψ_Q est exprimé par la relation suivante (Achour et Bedjaoui, 2006) :

$$\psi_Q = \frac{1}{4\sqrt{f}} \quad (1.82)$$

Au regard de la relation (1.81), il apparaît que le débit volume Q est égal au débit volume \bar{Q} corrigé par les effets du facteur ψ_Q . Celui-ci peut donc être considéré comme un facteur adimensionnel de correction du débit.

En ayant recours à la relation (1.77), le débit volume \bar{Q} dans le modèle rugueux s'écrit :

$$\bar{Q} = 8\sqrt{2g} \sqrt{iL^5} (\bar{A}^{*3} / \bar{P}^*)^{1/2} \quad (1.83)$$

En tenant compte des relations (1.73) et (1.74), cette dernière relation peut s'écrire plus simplement :

$$\bar{Q} = 8\sqrt{2g} A \sqrt{R_h i} \quad (1.84)$$

D'autre part, nous avons indiqué dans le premier chapitre que le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy est étroitement lié au coefficient de frottement f par la relation bien connue :

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (1.85)$$

Définissons pour le modèle rugueux de référence le coefficient de résistance à l'écoulement C de

Chézy. Selon la relation (1.85), nous pouvons écrire que :

$$\bar{C} = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (1.86)$$

Or, nous avons déjà établi au cours des paragraphes précédents que le coefficient de frottement de l'écoulement dans le modèle rugueux est constant $\bar{f} = 1/16$.

En introduisant cette valeur dans la relation (1.86), il vient que:

$$\bar{C} = \sqrt{8g/\bar{f}} = 8\sqrt{2g} \quad (1.87)$$

La relation (1.84) se présente sous la forme de la relation de Chézy, avec un coefficient de Chézy tel que : $\bar{C} = 8\sqrt{2g}$

En tenant compte des conditions $\bar{L} = L$ et $\bar{P}^* = P^*$, la combinaison des relations (1.76), (1.78) et (1.81) permet de déduire que :

$$R = \psi_Q \bar{R} \quad (1.88)$$

En insérant les relations (1.82) et (1.88) dans la relation (1.37) de Colebrook-White, il vient que, pour $D_h = 4R_h$:

$$\psi_Q = -\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \quad (1.89)$$

En ayant recours aux relations (1.88) et (1.89), nous obtenons :

$$R = -\frac{1}{2} \bar{R} \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \quad (1.90)$$

En combinant les relations (1.81), (1.84) et (1.89), le débit volume Q s'exprime alors par :

$$Q = -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \quad (1.91)$$

Le nombre de Reynolds \bar{R} est donné par la relation (1.78) pour $\bar{L} = L$ et $\bar{P}^* = P^*$, ou par la relation (1.80) pour $\bar{i} = i$ et $\bar{R}_h = R_h$. Dans ce cas, le nombre de Reynolds \bar{R} du modèle rugueux est égal au nombre de Reynolds R du canal ou de la conduite considérée. Nous pouvons alors écrire que :

$$\bar{R} = R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} \quad (1.92)$$

La relation (1.91) permet de calculer le débit volume Q écoulé par une conduite ou un canal de forme quelconque. Cette relation, applicable à tous les profils géométriques, a été établie dans le domaine entier de l'écoulement turbulent englobant ainsi les régimes d'écoulement turbulent

lisse, de transition et turbulent rugueux (*Achour et Bedjaoui, 2006*).

IV. Expression générale des coefficients C de *Chézy* et n de *Manning*

En éliminant le facteur de correction ψ_Q entre les relations (1.82) et (1.89), le coefficient de frottement f s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \quad (1.93)$$

Lorsque i , ε , ν et R_h sont donnés, la relation (1.93) permet de calculer explicitement la valeur exacte du coefficient de frottement f pour $R \geq 2300$. Tenant compte des relations (1.85) et (1.93), le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* s'écrit :

$$C = -4\sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \quad (1.94)$$

Tenant compte des relations (1.87) et (1.89), la relation (1.94) peut s'écrire :

$$C = \psi_Q \bar{C} \quad (1.95)$$

La relation (1.95) permet de déduire que le coefficient C de *Chézy* est lié à celui du modèle rugueux par le facteur adimensionnel de correction des débits ψ_Q .

En outre, en combinant les relations (1.61) et (1.85), nous pouvons aisément déduire que :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \quad (1.96)$$

Comme pour le coefficient de frottement f , le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* est étroitement lié au facteur de correction des dimensions linéaires ψ .

Par ailleurs, en comparant la relation (1.91) avec la relation usuelle (1.32) de *Manning* (voir chapitre précédent), nous pouvons aisément déduire que :

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} R_h^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \quad (1.97)$$

En comparant les relations (1.23) de *Chézy* et (1.32) de *Manning*, on peut montrer que le coefficient n de *Manning* est étroitement lié au coefficient de *Chézy* C :

$$n = \frac{1}{C} R_h^{1/6} \quad (1.98)$$

Considérons les relations (1.87) et (1.98), le coefficient n de *Manning* dans le modèle rugueux s'écrit, pour $\bar{R}_h = R_h$:

$$\bar{n} = \frac{R_h^{1/6}}{8\sqrt{2g}} \quad (1.99)$$

Tenant compte des relations (1.89) et (1.99), la relation (1.97) s'écrit sous la forme :

$$n = \bar{n} \psi_Q^{-1} \quad (1.100)$$

Rappelons que le coefficient C de *Chézy* est lié au facteur de correction des dimensions linéaires ψ par la relation (1.96). Tandis que le rayon hydraulique R_h est une dimension linéaire, nous pouvons écrire, selon la relation (1.52) :

$$R_h = \psi \bar{R}_h \quad (1.101)$$

En introduisant les relations (1.96) et (1.101) dans la relation (1.98), il vient que :

$$n = \frac{\psi^{1/6} \bar{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g} / \psi^{5/2}} \quad (1.102)$$

Soit, après simplification :

$$n = \frac{\psi^{8/3} \bar{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}} \quad (1.103)$$

La relation (1.103) montre bien que le coefficient n de *Manning* est lié au coefficient de correction des dimensions linéaires ψ .

V. Conclusion

Au cours du second chapitre de cette partie, la théorie du modèle rugueux de référence a été présentée. Il s'agit d'une nouvelle méthode capable de calculer les canaux et les conduites. A travers ce chapitre, le modèle rugueux de référence a été présenté en montrant ses caractéristiques. Celui-ci est caractérisé par une rugosité relative arbitrairement choisie. Le choix de la rugosité relative est tel que l'écoulement est de nature rugueuse auquel est associé un coefficient de frottement constant au sens de *Darcy-Weisbach*. D'autres paramètres du modèle rugueux ont été présentés parmi lesquels on cite la pente géométrique et le nombre de *Reynolds*.

En acceptant les conditions : $\bar{Q} = Q$, $\bar{i} = i$ et $\bar{v} = v$, tous les paramètres des modèles rugueux ont été corrigés par l'effet d'un facteur de correction des dimensions linéaires ψ . Par conséquent, nous avons démontré la relation implicite de ce dernier facteur sur la base de la formule de *Colebrook-White*. La variation du facteur de correction en fonction du nombre de *Reynolds* et de la rugosité relative a été présentée et discutée. Ensuite, nous avons présenté la relation approchée de *Achour et Bedjaoui (2006)* pour le calcul du facteur de correction ψ . La comparaison entre les valeurs exactes et approchées du coefficient ψ montre un écart relatif ne dépasse guère 0,4% pour les valeurs pratiques du nombre de *Reynolds* $R \geq 10^4$.

Notre recherche bibliographique s'est poursuivie par la présentation de la démonstration de la relation du débit volume proposée par *Achour et Bedjaoui (2006)*, la relation obtenue est valable pour toutes les formes des conduites et des canaux, et applicable dans les régimes d'écoulement turbulent lisse, de transition et turbulent rugueux. Par la suite, le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* et le coefficient de rugosité de *Manning* ont été exprimés selon des relations de validité générale. En effet, ces relations s'appliquent pour toutes les formes des conduites et des canaux et pour l'ensemble du domaine de l'écoulement turbulent.

DEUXIEME PARTIE

CONTRIBUTION AU CALCUL DES COEFFICIENTS DE RESISTANCE A L'ECOULEMENT DANS QUELQUES CONDUITES FERMEES

Chapitre I

Etude des coefficients de *Chézy* et de *Manning* dans une conduite en forme de voûte de type I

Chapitre I

Etude des coefficients de *Chézy* et de *Manning* dans une conduite en forme de voûte de type I

I. Introduction

Au cours de ce chapitre de notre thèse, la conduite en forme de voûte de type I sera étudiée. Cette forme se compose d'une partie basse de forme rectangulaire surmontée par une forme semi-circulaire de diamètre égal à la largeur de la partie rectangulaire (Figure 2.1). Le profil liquide dans la conduite ainsi que le développement de ses caractéristiques géométriques et hydrauliques seront exposés.

Le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* sera, par la suite, exprimé en fonction du taux de remplissage η , de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds à l'état plein R_p . Ceci sera rendu possible par la combinaison des relations de *Chézy* et de *Achour et Bedjaoui (2006)*. En outre, la même méthodologie sera suivie afin d'exprimer le Coefficient de *Manning* en fonction des mêmes paramètres cités ci-dessus mais par la combinaison des relations de *Manning* et de *Achour et Bedjaoui (2006)*.

Les deux relations du coefficient de *Chézy* et de *Manning* seront présentées graphiquement en fonction des différents paramètres qui les régissent. Des conclusions intéressantes seront tirées en analysant les graphiques qui seront obtenus.

En revanche, la méthode du modèle rugueux sera appliquée pour pouvoir exprimer les deux coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning* lorsque le diamètre de la conduite n'est pas nécessairement un paramètre disponible.

II. Caractéristiques de l'écoulement

La figure (2.1) montre les deux espaces géométriques que peut occuper l'écoulement selon la valeur du taux de remplissage $\eta = y_n / D$ (*Vatankhah, 2012*). Où y_n représente la profondeur normale de l'écoulement et D est la hauteur totale de la conduite qui correspond également au diamètre de la partie supérieure de la même conduite. C'est ainsi que si :

- $0 \leq \eta \leq 1/2$, l'écoulement, de plan d'eau \overrightarrow{ab} , se situe dans la forme rectangulaire de la partie

la plus basse de la conduite.

- $1/2 \leq \eta \leq 1$, l'écoulement, de plan d'eau \overleftrightarrow{gf} , se situe dans la partie circulaire la plus haute de la conduite.

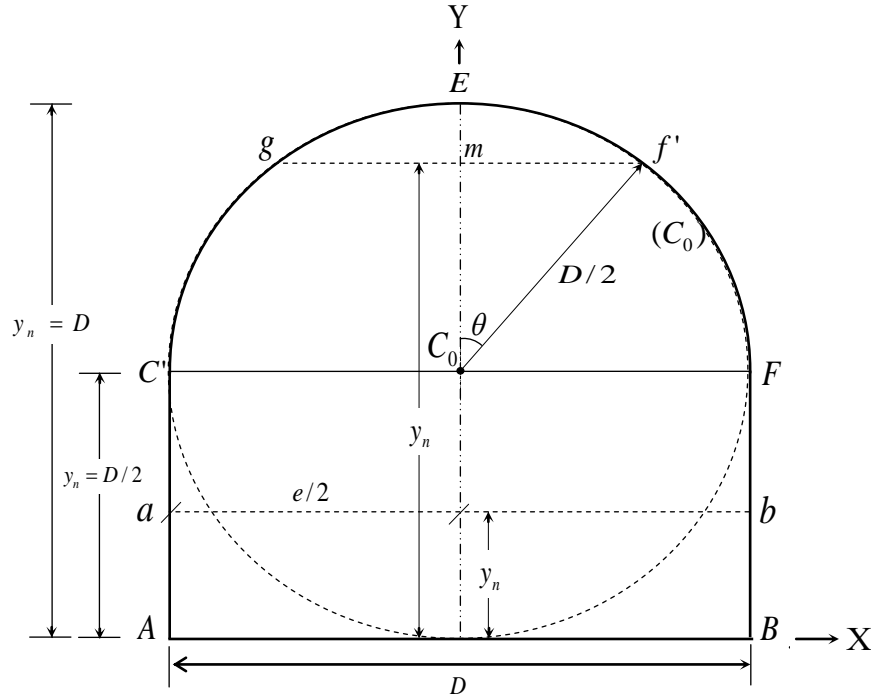


Figure 2.1 : Schéma de définition de l'état de l'écoulement dans la conduite en forme de voûte de type I.

Les caractéristiques de l'écoulement doivent être déterminées pour chacun des deux cas ci-dessus indiqués.

i. $0 \leq \eta \leq 1/2$

a) **Largeur du plan d'eau**

Lorsque $0 \leq \eta \leq 1/2$, la largeur du plan d'eau e correspond à la corde \overleftrightarrow{ab} . Soit :

$$e = D \quad (2.1)$$

b) **Périmètre mouillé**

Lorsque $0 \leq \eta \leq 1/2$, le périmètre mouillé P correspond à la somme de deux fois la longueur \overleftrightarrow{Aa} et la longueur \overleftrightarrow{AB} , soit :

$$P = 2\overleftrightarrow{Aa} + \overleftrightarrow{AB}$$

Alors :

$$P = 2y_n + D$$

Ou bien :

$$P = (2\eta + 1)D \quad (2.2)$$

Avec : $\eta = y_n / D$

Définissons la fonction :

$$M(\eta) = (2\eta + 1) \quad (2.3)$$

La relation (2.2) s'écrit alors plus simplement :

$$P = DM(\eta) \quad (2.4)$$

c) Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A correspondant à $0 \leq \eta \leq 1/2$ est définie par l'espace du rectangle $aABba$ de la figure (2.1). Soit :

$$A = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{aA} = D \times y_n$$

Ou bien :

$$A = \eta D^2 \quad (2.5)$$

Définissons la fonction :

$$T(\eta) = \eta \quad (2.6)$$

La relation (2.5) s'écrit alors:

$$A = D^2 T(\eta) \quad (2.7)$$

d) Rayon hydraulique

Le rayon hydraulique $R_h = A / P$ s'écrit, en ayant recours aux relations (2.4) et (2.7). Soit :

$$R_h = D \frac{T(\eta)}{M(\eta)} \quad (2.8)$$

ii. $1/2 \leq \eta \leq 1$

a) Largeur du plan d'eau

Lorsque $1/2 \leq \eta \leq 1$, la largeur du plan d'eau e correspond à la longueur du la corde $\overrightarrow{gf'}$ (Figure 2.1). Dans le triangle droit $\Delta C_0mf'$, nous pouvons écrire que :

$$\overrightarrow{mf'} = e / 2 \quad (2.9)$$

Et :

$$\overrightarrow{mC_0} = y_n - D / 2 \quad (2.10)$$

Avec :

$$\overrightarrow{mf'}^2 + \overrightarrow{mC_0}^2 = (D / 2)^2 \quad (2.11)$$

Les relations (2.9), (2.10) et (2.11) mènent à écrire que :

$$(e/2)^2 + (y_n - D/2)^2 = (D/2)^2 \quad (2.12)$$

Ou bien :

$$(e/2)^2 = (D/2)^2 - (y_n - D/2)^2 \quad (2.13)$$

Or :

$$(D/2)^2 - (y_n - D/2)^2 = y_n(D - y_n) \quad (2.14)$$

Soit :

$$y_n(D - y_n) = \eta(1 - \eta)D^2 \quad (2.15)$$

Par suite, la relation (2.14) s'écrit :

$$(e/2)^2 = \eta(1 - \eta)D^2$$

Ainsi, la largeur du plan d'eau est :

$$e = 2D\sqrt{\eta(1 - \eta)} \quad (2.16)$$

b) Périmètre mouillé

Pour $1/2 \leq \eta \leq 1$, le périmètre mouillé correspond à deux fois la longueur de l'arc $\widehat{C'g}$ à laquelle il faut ajouter la longueur $C'ABF$. Celle-ci s'obtient par la relation (2.2) pour $\eta = \frac{1}{2}$. La longueur $2C'g$ est quant à elle égale à la différence des longueurs des arcs $C'gEf'F$ et gEf' .

Désignons par P_0 la longueur $C'ABF$. Pour $\eta = \frac{1}{2}$, la relation (2.2) donne :

$$P_0 = (2\eta + 1)D = \left(2 \times \frac{1}{2} + 1\right)D$$

Soit :

$$P_0 = 2D \quad (2.17)$$

Désignons par P_1 la longueur de l'arc $C'gEf'F$. Celle-ci correspond au demi-périmètre du cercle (C_0), de centre C_0 et de rayon $D/2$. Ainsi :

$$P_1 = (\pi/2)D \quad (2.18)$$

Désignons également par P_2 la longueur de l'arc gEf' . Nous pouvons alors écrire que :

$$P_2 = 2 \times \frac{D}{2} \theta = D\theta \quad (2.19)$$

Or, dans le triangle $\Delta C_0mf'$, nous pouvons écrire que :

$$\cos(\theta) = \frac{y_n - D/2}{D/2}$$

Soit, en tenant compte que: $\eta = y_n / D$:

$$\cos(\theta) = 2\eta - 1 \quad (2.20)$$

Ou bien :

$$\theta = \cos^{-1}(2\eta - 1) \quad (2.21)$$

Notons également que le triangle $\Delta C_0mf'$ permet d'écrire :

$$\sin(\theta) = \frac{\overline{mf'}}{D/2} = \frac{e/2}{D/2} = \frac{e}{D} \quad (2.22)$$

Tenant compte de la relation (2.16), la relation (2.22) devient :

$$\sin(\theta) = 2\sqrt{\eta(1-\eta)} \quad (2.23)$$

Soit :

$$\theta = \sin^{-1}\left[2\sqrt{\eta(1-\eta)}\right] \quad (2.24)$$

Tenant compte de la relation (2.21), la relation (2.19) s'écrit :

$$P_2 = D \cos^{-1}(2\eta - 1) \quad (2.25)$$

Le périmètre, $P = P_o + (P_1 - P_2)$, recherché est, en ayant recours aux relations (2.17), (2.18) et (2.25) :

$$P = 2D + (\pi/2)D - D \cos^{-1}(2\eta - 1)$$

Ou bien, plus simplement :

$$P = [3,5708 - \cos^{-1}(2\eta - 1)]D \quad (2.26)$$

Définissons la fonction :

$$K(\eta) = 3,57080 - \cos^{-1}(2\eta - 1) \quad (2.27)$$

La relation (2.26) s'écrit alors :

$$P = K(\eta)D \quad (2.28)$$

c) Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A , dans le cas où $1/2 \leq \eta \leq 1$, correspond à l'espace $AC'gf'FBA$ de la figure (2.1). L'aire de la section mouillée A est la somme des aires $AC'FBA$ et $C'gf'FC'$.

Désignons par A_0 l'aire de la section $AC'FBA$. Cette aire est donnée par la relation (2.5) pour $\eta = 1/2$, soit :

$$A_0 = \eta D^2 = 0,5D^2 \quad (2.29)$$

Désignons également par A_1 l'aire de la section mouillée du segment circulaire $gEf'g$. Ce segment circulaire appartient au cercle (C_0) , de centre C_0 et de rayon $D/2$. Nous pouvons alors

écrire que, pour l'angle θ exprimé en radian :

$$A_1 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 [\theta - \sin(\theta)\cos(\theta)] \quad (2.30)$$

Soit :

$$A_1 = \frac{D^2}{4} [\theta - \sin(\theta)\cos(\theta)] \quad (2.31)$$

Tenant compte des relations (2.20), (2.21) et (2.23), la relation (2.31) s'écrit :

$$A_1 = \frac{D^2}{4} [\cos^{-1}(2\eta - 1) - 2\sqrt{\eta(1-\eta)}(2\eta - 1)]$$

Ou bien :

$$A_1 = \frac{D^2}{4} [\cos^{-1}(2\eta - 1) - (4\eta - 2)\sqrt{\eta(1-\eta)}] \quad (2.32)$$

Désignons aussi par A_2 l'aire du demi-cercle $C'EFC'$, de rayon $D/2$. Il vient que :

$$A_2 = \frac{\pi}{8} D^2 \quad (2.33)$$

L'aire, $A = A_o + (A_2 - A_1)$, recherchée est, en ayant recours aux relations (2.29), (2.32) et (2.33) :

$$A = 0,5D^2 + \left\{ \frac{\pi}{8} D^2 - \frac{D^2}{4} [\cos^{-1}(2\eta - 1) - (4\eta - 2)\sqrt{\eta(1-\eta)}] \right\}$$

Ou bien :

$$A = \left[0,892699 - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2\eta - 1) + \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \sqrt{\eta(1-\eta)} \right] D^2 \quad (2.34)$$

Définissons la fonction :

$$L(\eta) = 0,89270 - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2\eta - 1) + \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \sqrt{\eta(1-\eta)} \quad (2.35)$$

La relation (2.34) s'écrit alors plus simplement :

$$A = D^2 L(\eta) \quad (2.36)$$

Pour l'état plein de la conduite voûte type I considérée, correspondant au taux de remplissage $\eta = 1$, la relation (2.34) mène à écrire que :

$$A_p = 0,89270D^2 \quad (2.37)$$

d) Rayon hydraulique

Lorsque $1/2 \leq \eta \leq 1$, le rayon hydraulique $R_h = A/P$ s'exprime, compte tenu des relations (2.28) et (2.36), par :

$$R_h = D \frac{L(\eta)}{K(\eta)} \quad (2.38)$$

Le rayon hydraulique à l'état plein peut être exprimé par les relations (2.38), (2.27) et (2.35), pour $\eta = 1$, soit :

$$R_{h,p} = 0,25D \quad (2.39)$$

III. Expression du coefficient de Chézy dans une conduite en forme de voûte de type I

Pour exprimer le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy par une relation de validité générale, il est utile d'avoir recours à la formule du débit volume de [Achour et Bedjaoui \(2006\)](#), soit :

$$Q = -4\sqrt{2g} A\sqrt{R_h} i \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.40)$$

Dans cette relation, ε désigne la rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite et R est un nombre de *Reynolds* défini par la relation :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} \quad (2.41)$$

Où ν est la viscosité cinématique du liquide en écoulement.

Pour le cas de la conduite en forme de voûte de type I représentée par la figure 2.1, l'aire de la section mouillée A figurant dans la relation (2.40) s'exprime par les relations (2.7) et (2.36) selon la gamme du taux de remplissage η . Quant au rayon hydraulique R_h figurant dans la relation (2.41), il s'exprime par les relations (2.8) et (2.38).

Pour une conduite en forme de voûte de type I à l'état plein, correspondant au taux de remplissage $\eta = 1$, le rayon hydraulique $R_{h,p}$ est régi par la relation (2.39), où l'indice « p » désigne l'état plein.

Par suite, le nombre de *Reynolds* R_p à l'état plein de la conduite est, selon la relation (2.41) :

$$R_p \cong 5,65685 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} \quad (2.42)$$

D'autre part la relation de Chézy est définie par la formule suivante :

$$Q = CA\sqrt{R_h} i \quad (2.43)$$

En comparant les relations (2.43) et (2.40), nous pouvons déduire que le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy est tel que :

$$C = -4\sqrt{2g} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.44)$$

La relation (2.44) peut aussi s'écrire, en termes adimensionnels :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.45)$$

La relation (2.44) montre que le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy est fonction à la fois de la rugosité relative ε/D , du taux de remplissage η et du nombre de Reynolds R , lui-même fonction de la pente longitudinale i , du diamètre D , du taux de remplissage η et de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Nous pouvons donc écrire la relation fonctionnelle :

$$C(D, \eta, i, \varepsilon, \nu) = 0 \quad (2.46)$$

En ayant recours aux relations (2.8) et (2.38), nous pouvons écrire que pour :

$$i. \quad 0 \leq \eta \leq 1/2$$

La relation (2.41) mène à :

$$R = 32\sqrt{2} \left[\frac{T(\eta)}{M(\eta)} \right]^{3/2} \frac{\sqrt{giD^3}}{\nu} \quad (2.47)$$

Ou bien, compte tenu de la relation (2.42) :

$$R = 8 \left[\frac{T(\eta)}{M(\eta)} \right]^{3/2} R_p \quad (2.48)$$

La relation (2.45) mène à, en vertu des relations (2.8) et (2.48) :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left\{ \frac{\varepsilon/D}{14,8[T(\eta)/M(\eta)]} + \frac{1,255}{R_p[T(\eta)/M(\eta)]^{3/2}} \right\} \quad (2.49)$$

$$ii. \quad 1/2 \leq \eta \leq 1$$

La relation (2.41) mène à écrire que :

$$R = 32\sqrt{2} \left[\frac{L(\eta)}{K(\eta)} \right]^{3/2} \frac{\sqrt{giD^3}}{\nu} \quad (2.50)$$

Ou bien, tenant quant de la relation (2.42) :

$$R = 8 \left[\frac{L(\eta)}{K(\eta)} \right]^{3/2} R_p \quad (2.51)$$

Selon les relations (2.38) et (2.51), la relation (2.45) permet d'écrire que :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[L(\eta)/K(\eta)]} + \frac{1,255}{R_p[L(\eta)/K(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.52)$$

III.1. Variation du coefficient de Chézy

Les tableaux 2.1 à 2.4 montrent les valeurs du coefficient de Chézy adimensionnel C/\sqrt{g} selon les relations (2.49) et (2.52). Notons que les valeurs de C/\sqrt{g} ont été calculées pour les rugosités relatives suivantes : $\varepsilon/D = 0, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$ et $5 \cdot 10^{-3}$ et les nombres de *Reynolds* à l'état plein suivants : $R_p = 10^4, 10^5, 10^6$ et 10^7 .

Tableau 2.1 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 0$

$0 \leq \eta \leq 1/2$							
$\varepsilon/D = 0$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$M(\eta)$	$T(\eta)$	$T(\eta)/M(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,01	1,020	0,010	0,010	5,02587	10,68272	16,33957	21,99643
0,05	1,100	0,05	0,045	10,67857	16,33542	21,99228	27,64913
0,10	1,200	0,10	0,083	12,91225	18,56910	24,22596	29,88281
0,15	1,300	0,15	0,115	14,11146	19,76832	25,42517	31,08203
0,20	1,400	0,20	0,143	14,89851	20,55536	26,21222	31,86907
0,25	1,500	0,25	0,167	15,46657	21,12343	26,78028	32,43713
0,30	1,600	0,30	0,188	15,90062	21,55747	27,21432	32,87118
0,35	1,700	0,35	0,206	16,24527	21,90212	27,55898	33,21583
0,40	1,800	0,40	0,222	16,52671	22,18357	27,84042	33,49727
0,45	1,900	0,45	0,237	16,76151	22,41837	28,07522	33,73207
0,50	2,000	0,50	0,250	16,96076	22,61761	28,27446	33,93132
$1/2 \leq \eta \leq 1$							
η	$K(\eta)$	$L(\eta)$	$L(\eta)/K(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,50	2,000	0,500	0,250	16,96076	22,61761	28,27446	33,93132
0,55	2,100	0,549	0,261	17,13133	22,78819	28,44504	34,10190
0,60	2,201	0,599	0,272	17,27501	22,93186	28,58871	34,24557
0,62	2,242	0,618	0,276	17,32503	22,98189	28,63874	34,29559
0,65	2,304	0,647	0,281	17,39209	23,04894	28,70580	34,36265
0,70	2,411	0,694	0,288	17,48227	23,13912	28,79598	34,45283
0,75	2,523	0,739	0,292	17,54432	23,20118	28,85803	34,51488
0,8200	2,694	0,796	0,295	17,57851	23,23536	28,89222	34,54907
0,90	2,927	0,851	0,291	17,52030	23,17716	28,83401	34,49087
0,95	3,119	0,878	0,281	17,39724	23,05410	28,71095	34,36781
1,00	3,570	0,892	0,250	16,96076	22,61761	28,27446	33,93132

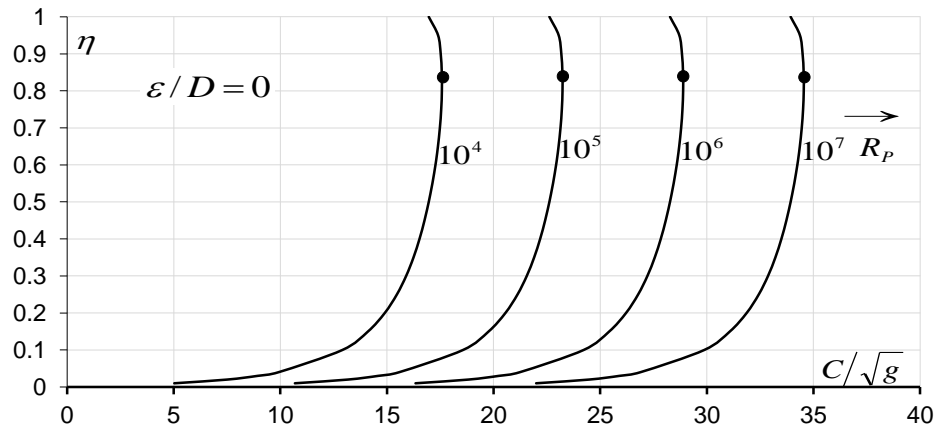


Figure 2.2 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 0$ (Ecoulement lisse).

(•) Valeurs maximales $C_{\max.}/\sqrt{g}$ obtenues pour $\eta \cong 0,82$.

Tableau 2.2 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 10^{-5}$

$0 \leq \eta \leq 1/2$							
$\varepsilon/D = 10^{-5}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$M(\eta)$	$T(\eta)$	$T(\eta)/M(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,01	1,020	0,010	0,010	5,02456	10,66966	16,21198	20,94671
0,05	1,100	0,05	0,045	10,67575	16,30738	21,72533	25,77104
0,10	1,200	0,10	0,083	12,90843	18,53121	23,87105	27,57904
0,15	1,300	0,15	0,115	14,10698	19,72380	25,01256	28,52737
0,20	1,400	0,20	0,142	14,89351	20,50587	25,75716	29,14164
0,25	1,500	0,25	0,166	15,46118	21,07001	26,29217	29,58114
0,30	1,600	0,30	0,187	15,89489	21,50085	26,69950	29,91484
0,35	1,700	0,35	0,205	16,23927	21,84283	27,02202	30,17853
0,40	1,800	0,40	0,222	16,52048	22,12199	27,28476	30,39304
0,45	1,900	0,45	0,236	16,75508	22,35482	27,50352	30,57145
0,50	2,000	0,50	0,250	16,95415	22,55235	27,68882	30,72244
$1/2 \leq \eta \leq 1$							
η	$K(\eta)$	$L(\eta)$	$L(\eta)/K(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,50	2,000	0,500	0,250	16,95415	22,55235	27,68882	30,72244
0,55	2,100	0,549	0,261	17,12457	22,72142	27,84723	30,85144
0,60	2,201	0,599	0,272	17,26811	22,86380	27,98048	30,95988
0,62	2,242	0,618	0,276	17,31809	22,91337	28,02684	30,99760
0,65	2,304	0,647	0,281	17,38509	22,97981	28,08895	31,04812
0,70	2,411	0,694	0,288	17,47518	23,06915	28,17242	31,11601
0,75	2,523	0,739	0,292	17,53717	23,13062	28,22982	31,16267
0,8200	2,694	0,796	0,295	17,57133	23,16448	28,26144	31,18837
0,90	2,927	0,851	0,291	17,51318	23,10682	28,20761	31,14461
0,95	3,119	0,878	0,281	17,39024	22,98491	28,09372	31,05200
1,00	3,570	0,892	0,250	16,95415	22,55235	27,68882	30,72244

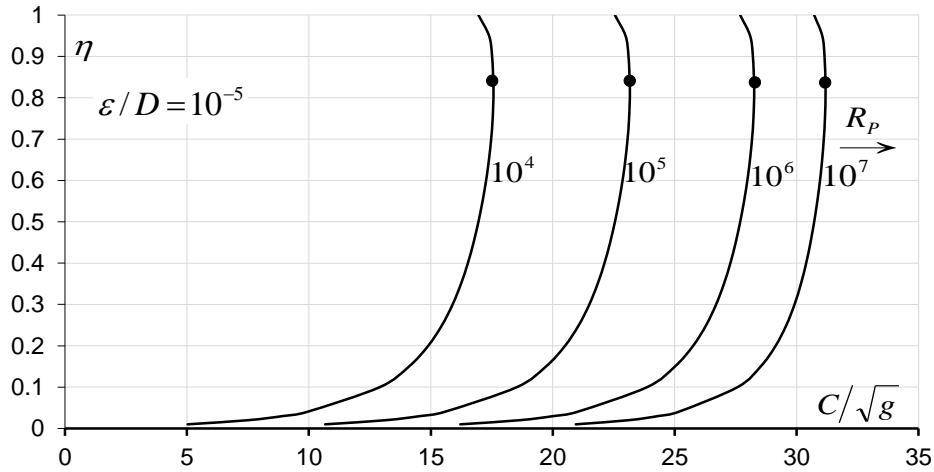


Figure 2.3 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-5}$.

Tableau 2.3 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 10^{-4}$

$0 \leq \eta \leq 1/2$							
$\varepsilon/D = 10^{-4}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$M(\eta)$	$T(\eta)$	$T(\eta)/M(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,01	1,020	0,010	0,010	5,01280	10,55513	15,28986	17,46268
0,05	1,100	0,05	0,045	10,65053	16,06847	20,11419	21,44831
0,10	1,200	0,10	0,083	12,87436	18,21419	21,92218	22,98945
0,15	1,300	0,15	0,115	14,06694	19,35570	22,87052	23,81133
0,20	1,400	0,20	0,142	14,84902	20,10031	23,48479	24,34896
0,25	1,500	0,25	0,166	15,41316	20,63531	23,92429	24,73622
0,30	1,600	0,30	0,187	15,84400	21,04265	24,25799	25,03171
0,35	1,700	0,35	0,205	16,18597	21,36517	24,52168	25,26610
0,40	1,800	0,40	0,222	16,46514	21,62791	24,73619	25,45735
0,45	1,900	0,45	0,236	16,69797	21,84666	24,91459	25,61680
0,50	2,000	0,50	0,250	16,89550	22,03197	25,06559	25,75204
$1/2 \leq \eta \leq 1$							
η	$K(\eta)$	$L(\eta)$	$L(\eta)/K(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,50	2,000	0,500	0,250	16,89550	22,03197	25,06559	25,75204
0,55	2,100	0,549	0,261	17,06457	22,19038	25,19458	25,86778
0,60	2,201	0,599	0,272	17,20694	22,32363	25,30303	25,96522
0,62	2,242	0,618	0,276	17,25651	22,36998	25,34074	25,99914
0,65	2,304	0,647	0,281	17,32295	22,43210	25,39127	26,04461
0,70	2,411	0,694	0,288	17,41229	22,51557	25,45915	26,10574
0,75	2,523	0,739	0,292	17,47376	22,57297	25,50582	26,14779
0,8200	2,694	0,796	0,295	17,50763	22,60458	25,53152	26,17096
0,90	2,927	0,851	0,291	17,44997	22,55075	25,48776	26,13152
0,95	3,119	0,878	0,281	17,32806	22,43687	25,39515	26,04810
1,00	3,570	0,892	0,250	16,89550	22,03197	25,06559	25,75204

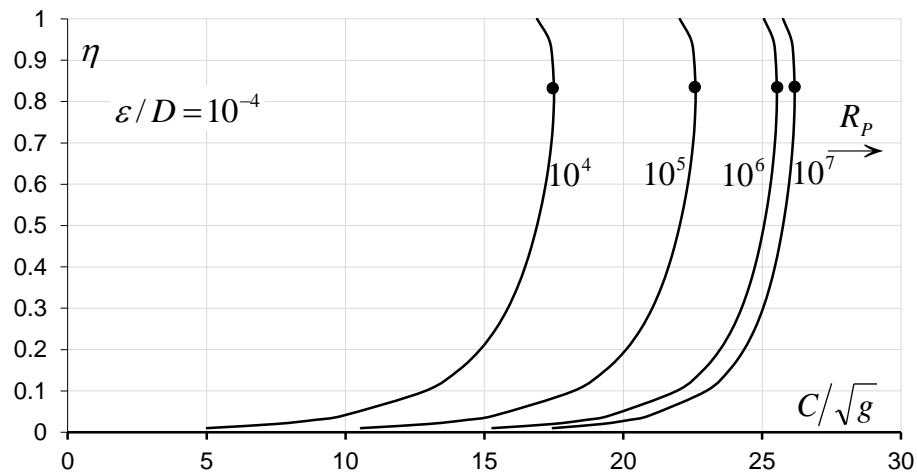


Figure 2.4 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-4}$

Tableau 2.4 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 10^{-3}$

$0 \leq \eta \leq 1/2$							
$\varepsilon/D = 10^{-3}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$M(\eta)$	$T(\eta)$	$T(\eta)/M(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,01	1,020	0,010	0,010	4,89827	9,63300	11,80583	12,18255
0,05	1,100	0,05	0,045	10,41162	14,45733	15,79146	15,97536
0,10	1,200	0,10	0,083	12,55734	16,26533	17,33260	17,47004
0,15	1,300	0,15	0,115	13,69885	17,21366	18,15448	18,27187
0,20	1,400	0,20	0,142	14,44346	17,82793	18,69211	18,79792
0,25	1,500	0,25	0,166	14,97846	18,26744	19,07937	19,17752
0,30	1,600	0,30	0,187	15,38579	18,60113	19,37485	19,46752
0,35	1,700	0,35	0,205	15,70831	18,86483	19,60924	19,69777
0,40	1,800	0,40	0,222	15,97105	19,07934	19,80049	19,88577
0,45	1,900	0,45	0,236	16,18981	19,25774	19,95995	20,04261
0,50	2,000	0,50	0,250	16,37511	19,40874	20,09519	20,17569
$1/2 \leq \eta \leq 1$							
η	$K(\eta)$	$L(\eta)$	$L(\eta)/K(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,50	2,000	0,500	0,250	16,37511	19,40874	20,09519	20,17569
0,55	2,100	0,549	0,261	16,53352	19,53773	20,21092	20,28961
0,60	2,201	0,599	0,272	16,66677	19,64617	20,30836	20,38557
0,62	2,242	0,618	0,276	16,71313	19,68389	20,34229	20,41898
0,65	2,304	0,647	0,281	16,77524	19,73441	20,38775	20,46376
0,70	2,411	0,694	0,288	16,85872	19,80230	20,44888	20,52399
0,75	2,523	0,739	0,292	16,91612	19,84897	20,49094	20,56542
0,8200	2,694	0,796	0,295	16,94773	19,87467	20,51411	20,58826
0,90	2,927	0,851	0,291	16,89390	19,83091	20,47466	20,54938
0,95	3,119	0,878	0,281	16,78001	19,73829	20,39125	20,46720
1,00	3,570	0,892	0,250	16,37511	19,40874	20,09519	20,17569

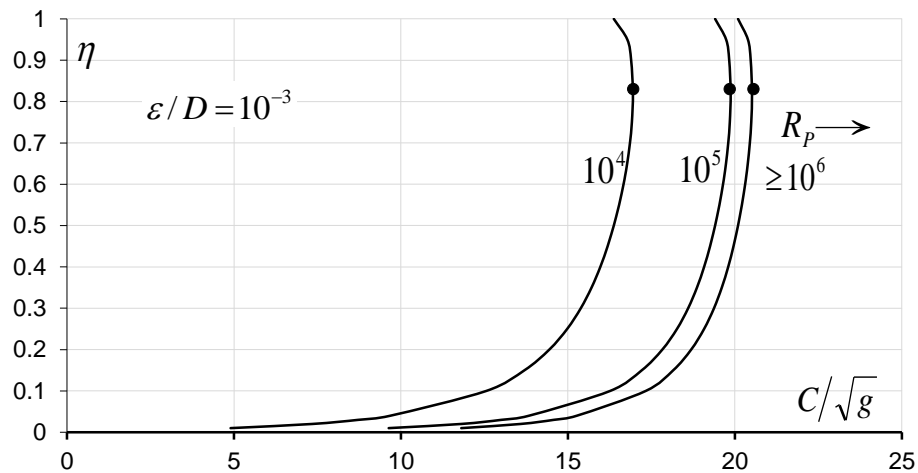


Figure 2.5 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-3}$

Tableau 2.5 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 5.10^{-3}$

$0 \leq \eta \leq 1/2$							
$\varepsilon/D = 5.10^{-3}$				$R_p=10^4$	$R_p=10^5$	$R_p=10^6$	$R_p=10^7$
η	$M(\eta)$	$T(\eta)$	$T(\eta)/M(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,01	1,020	0,010	0,010	4,44536	7,49156	8,18375	8,26503
0,05	1,100	0,05	0,045	9,56426	11,64810	12,00026	12,03842
0,10	1,200	0,10	0,083	11,49967	13,23443	13,50041	13,52866
0,15	1,300	0,15	0,115	12,51604	14,07633	14,30458	14,32861
0,20	1,400	0,20	0,142	13,17428	14,62568	14,83197	14,85358
0,25	1,500	0,25	0,166	13,64502	15,02075	15,21245	15,23247
0,30	1,600	0,30	0,187	14,00225	15,32186	15,50308	15,52196
0,35	1,700	0,35	0,205	14,28440	15,56051	15,73380	15,75182
0,40	1,800	0,40	0,222	14,51382	15,75511	15,92218	15,93953
0,45	1,900	0,45	0,236	14,70454	15,91728	16,07931	16,09612
0,50	2,000	0,50	0,250	14,86590	16,05476	16,21264	16,22900
$1/2 \leq \eta \leq 1$							
η	$K(\eta)$	$L(\eta)$	$L(\eta)/K(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,50	2,000	0,500	0,250	14,86590	16,05476	16,21264	16,22900
0,55	2,100	0,549	0,261	15,00369	16,17237	16,32677	16,34276
0,60	2,201	0,599	0,272	15,11950	16,27136	16,42290	16,43858
0,62	2,242	0,618	0,276	15,15978	16,30582	16,45637	16,47194
0,65	2,304	0,647	0,281	15,21372	16,35200	16,50123	16,51666
0,70	2,411	0,694	0,288	15,28618	16,41407	16,56156	16,57680
0,75	2,523	0,739	0,292	15,33598	16,45677	16,60306	16,61818
0,8200	2,694	0,796	0,295	15,36341	16,48030	16,62593	16,64098
0,90	2,927	0,851	0,291	15,31671	16,44025	16,58700	16,60217
0,95	3,119	0,878	0,281	15,21786	16,35554	16,50468	16,52010
1,00	3,570	0,892	0,250	14,86590	16,05476	16,21264	16,22900

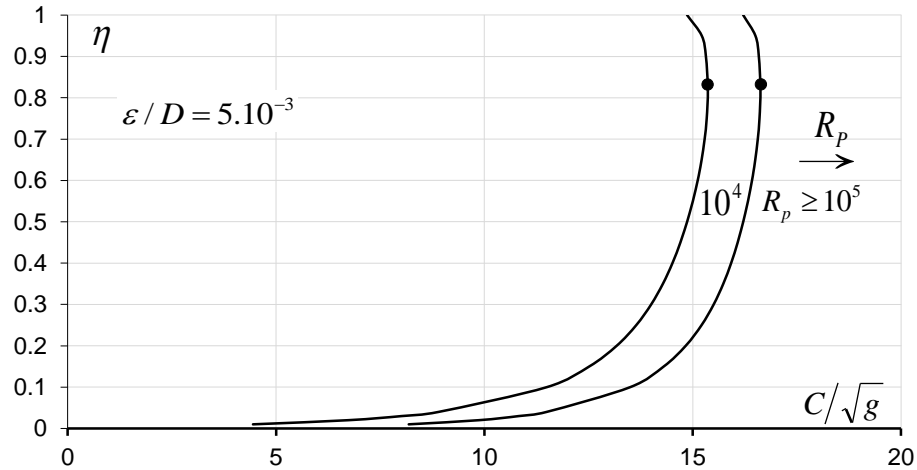


Figure 2.6 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 5.10^{-3}$

D'après les figures (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) et (2.6), nous observons clairement que :

- Pour une même valeur du nombre de Reynolds R_p à l'état plein, le coefficient C/\sqrt{g} augmente au fur et à mesure que le taux de remplissage η augmente jusqu'à $\eta = 0,82$, puis il diminue au-delà de cette valeur. Ceci signifie que le coefficient C/\sqrt{g} augmente lorsque la profondeur y_n de l'écoulement augmente jusqu'à $\eta = 0,82$, puis il diminue.
- Pour un taux de remplissage η fixé, le coefficient C/\sqrt{g} augmente avec l'augmentation du nombre de Reynolds R_p à l'état plein.
- Pour la valeur de la rugosité relative $\varepsilon/D = 5.10^{-3}$, les courbes de variation du coefficient C/\sqrt{g} se confondent à partir de la valeur $R_p = 10^5$. L'écoulement turbulent rugueux est atteint plus tôt que dans le cas des courbes des figures (2.3), (2.4) et (2.5). Cela peut se justifier par le fait que plus la rugosité relative ε/D augmente, et plus le régime d'écoulement turbulent rugueux est atteint rapidement.
- Les courbes montrent que C/\sqrt{g} atteint un maximum pour $\eta = 0,82$.

Le coefficient de résistance à l'écoulement maximal C_{\max} de Chézy est régi par la relation (2.52), les fonctions $K(\eta)$ et $L(\eta)$ figurant dans la relation (2.52) sont régies par les relation (2.27) et (2.35) respectivement :

- $K(0,82) = 3,570796 - \cos^{-1}(2 \times 0,82 - 1) = 2,69450$
- $L(0,82) = 0,892699 - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2 \times 0,82 - 1) + \left(0,82 - \frac{1}{2}\right) \sqrt{0,82 \times (1 - 0,82)} = 0,79656$

Ainsi, selon la relation (2.52), le coefficient de résistance à l'écoulement maximal C_{\max} de Chézy

est :

$$\frac{C_{\max}}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[0,79656/2,69450]} + \frac{1,255}{R_p[0,79656/2,69450]^{3/2}} \right)$$

Soit :

$$C_{\max} = -4\sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{4,37527} + \frac{7,80781}{R_p} \right) \quad (2.53)$$

Pour l'état plein de la conduite, correspondant à $\eta = 1$, la relation (2.52) permet d'exprimer le coefficient de résistance à l'écoulement C_p de Chézy. Pour $\eta = 1$, les fonctions $K(\eta)$ et $L(\eta)$ sont régies par les relations (2.27) et (2.35) respectivement, elles prennent les valeurs:

- $K(1) = 3,570796 - \cos^{-1}(2 \times 1 - 1) = 3,570796$
- $L(1) = 0,892699 - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2 \times 1 - 1) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \sqrt{1 \times (1-1)} = 0,892699$

Ainsi, selon la relation (2.52), le coefficient de résistance à l'écoulement C_p de Chézy à l'état plein est donné par la relation suivante :

$$C_p = -4\sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[0,892699/3,570796]} + \frac{1,255}{R_p[0,892699/3,570796]^{3/2}} \right)$$

Soit :

$$C_p = -4\sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{R_p} \right) \quad (2.54)$$

III.2. Conductivité relative

Selon Chézy, le débit volume Q s'exprime par la relation :

$$Q = CA\sqrt{R_h} i \quad (2.55)$$

L'aire de la section mouillée A est déterminée par les relations (2.7) et (2.36), ainsi que le rayon hydraulique R_h s'exprime par les relations (2.8) et (2.38), selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η . C'est ainsi que pour :

$$i. \quad 0 \leq \eta \leq 1/2$$

En tenant compte des relations (2.7) et (2.8), la relation (2.55) devient :

$$Q = CD^{5/2} \frac{[T(\eta)]^{3/2}}{[M(\eta)]^{1/2}} \sqrt{i} \quad (2.56)$$

Dans cette relation, les fonctions $M(\eta)$ et $T(\eta)$ sont définies par les relations (2.3) et (2.6)

respectivement.

Définissons la conductivité relative :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} \quad (2.57)$$

La relation (2.56) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$Q^* = \frac{[T(\eta)]^{3/2}}{[M(\eta)]^{1/2}} \quad (2.58)$$

ii. $1/2 \leq \eta \leq 1$

Dans cet intervalle du taux de remplissage η , l'aire de la section mouillée A ainsi que le rayon hydraulique R_h sont respectivement donnés par les relations (2.36) et (2.38). Dans ces relations, les fonctions $K(\eta)$ et $L(\eta)$ sont définies par les relations (2.26) et (2.35) respectivement.

En ayant recours à ces relations, la relation (2.55) devient :

$$Q = CD^{5/2} \frac{[L(\eta)]^{3/2}}{[K(\eta)]^{1/2}} \sqrt{i} \quad (2.59)$$

En faisant appel à la relation (2.57), la relation (2.59) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$Q^* = \frac{[L(\eta)]^{3/2}}{[K(\eta)]^{1/2}} \quad (2.60)$$

III.3. Calcul du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy par la méthode MMR

Lorsque le diamètre D de la conduite n'est pas une donnée du problème, les relations (2.49) et (2.52) ne peuvent être utilisées pour évaluer le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy. Pour les paramètres : Q , η , i , ε et ν , la méthode MMR (Ahour, 2007) permet la détermination du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy.

Rappelons que le coefficient de résistance de Chézy dans la méthode MMR est donné par la relation (1.87) :

$$\bar{C} = \sqrt{8g / f} = 8\sqrt{2g} = \text{constante} \quad (1.87)$$

Pour déterminer le coefficient de résistance C de Chézy, caractérisant l'écoulement dans la conduite en forme de voûte de type I considérée, admettons les conditions suivantes :

i. $\bar{D} \neq D$

ii. $\bar{Q} = Q$

iii. $\bar{i} = i$

$$iv. \quad \bar{\eta} = \eta$$

$$v. \quad \bar{\nu} = \nu$$

Selon la relation (2.57) et tenant compte des conditions (ii) et (iii), la conductivité relative \bar{Q}^* du modèle rugueux de référence serait telle que :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 \bar{D}^5 i}} \quad (2.61)$$

Ou bien, en tenant compte de la relation (1.87) :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128 g \bar{D}^5 i}} \quad (2.62)$$

La conductivité relative \bar{Q}^* est régie par les relations (2.58) et (2.60) selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η . Ainsi, pour :

$$i. \quad 0 \leq \eta \leq 1/2$$

$$\bar{Q}^* = \frac{[T(\bar{\eta})]^{3/2}}{[M(\bar{\eta})]^{1/2}}$$

Ou bien, en tenant compte de la condition iv :

$$\bar{Q}^* = \frac{[T(\eta)]^{3/2}}{[M(\eta)]^{1/2}} \quad (2.63)$$

Les relations (2.62) et (2.63) permettent de déduire que le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est :

$$\bar{D} = \frac{[M(\eta)]^{0,2}}{2,639[T(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} \quad (2.64)$$

Pour : $0 \leq \eta \leq 1/2$, le nombre de Reynolds \bar{R} , caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, s'exprime par une relation similaire à la relation (2.48), soit :

$$\bar{R} = 8 \left[\frac{T(\eta)}{M(\eta)} \right]^{3/2} \bar{R}_p \quad (2.65)$$

$$ii. \quad 1/2 \leq \eta \leq 1$$

$$\bar{Q}^* = \frac{[L(\eta)]^{3/2}}{[K(\eta)]^{1/2}} \quad (2.66)$$

Les relations (2.62) et (2.66) permettent d'écrire que :

$$\bar{D} = \frac{[K(\eta)]^{0,2}}{2,639[L(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} \quad (2.67)$$

Dans la gamme : $1/2 \leq \eta \leq 1$, le nombre de Reynolds \bar{R} , caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, s'exprime par une relation similaire à la relation (2.51), soit :

$$\bar{R} = 8 \left[\frac{L(\eta)}{K(\eta)} \right]^{3/2} \bar{R}_p \quad (2.68)$$

Ainsi, avec les valeurs connues des paramètres Q , η et i , le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence peut être explicitement évalué par l'une des relations (2.64) ou (2.67). Ces paramètres permettent également d'évaluer le nombre de Reynolds \bar{R} de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, par application de l'une des relations (2.65) et (2.68). Dans ces relations, le nombre de Reynolds \bar{R}_p à l'état plein s'exprime par une relation similaire à la relation (2.42), soit :

$$\bar{R}_p \cong 5,65685 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} \quad (2.69)$$

Selon la MMR, le coefficient de résistance de Chézy s'écrit comme démontré dans la partie bibliographique par la relation suivante :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \quad (1.96)$$

Rappelons que le paramètre sans dimension ψ est défini par la relation (1.72) comme suit :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon}{19R_h} + \frac{8,5}{R} \right) \right]^{-2/5} \quad (1.72)$$

Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η , le rayon hydraulique \bar{R}_h , figurant dans la relation (2.71), est défini par des relations similaires aux relations (2.8) et (2.38). De même que le nombre de Reynolds du modèle rugueux \bar{R} est donné par l'une des relations (2.65) et (2.68).

Ainsi :

i. $0 \leq \eta \leq 1/2$

$$\bar{R}_h = \bar{D} \frac{T(\eta)}{M(\eta)} \quad (2.70)$$

La relation (1.72) s'écrit, en tenant compte des relations (2.65) et (2.70) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[T(\eta)/M(\eta)]} + \frac{1,0625}{[T(\eta)/M(\eta)]^{5/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.71)$$

ii. $1/2 \leq \eta \leq 1$

$$\overline{R}_h = \overline{D} \frac{L(\eta)}{K(\eta)} \quad (2.72)$$

Tenant compte des relations (2.68) et (2.72), la relation (1.72) s'écrit :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}}{19[L(\eta)/K(\eta)]} + \frac{1,0625}{[L(\eta)/K(\eta)]^{3/2} \overline{R}_p} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.73)$$

Pour évaluer le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy, pour les valeurs connues des paramètres Q , η , ε , i et ν , les étapes suivantes sont recommandées :

- a) Selon la valeur du taux de remplissage η , on calcule les fonctions $M(\eta)$ et $T(\eta)$ ou $K(\eta)$ et $L(\eta)$ respectivement par les relations (2.3) et (2.6) ou (2.26) et (2.35).
- b) Connaissant la valeur du taux de remplissage η , l'une des relations (2.64) ou (2.67) permet d'évaluer le diamètre \overline{D} du modèle rugueux de référence.
- c) Les paramètres connus \overline{D} , i et ν sont introduits dans la relation (2.69) pour le calcul du nombre de Reynolds à l'état plein \overline{R}_p .
- d) Le facteur de correction ψ peut alors être évalué par l'une des relations (2.71) ou (2.73) selon la valeur du taux de remplissage η .
- e) Enfin, le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy est déduit de la relation (1.96).

III.4. Exemple d'application (01)

On souhaite calculer la valeur du coefficient C de Chézy et la valeur du diamètre D , pour le cas d'une conduite en forme de voûte de type I, connaissant les données suivantes :

$$Q = 4 \text{ m}^3 / \text{s}, \quad \eta = 0,62, \quad \varepsilon = 0,001 \text{ m}, \quad i = 0,001, \quad \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}.$$

Solution

i. Puisque : $1/2 \leq \eta \leq 1$, alors le diamètre \overline{D} du modèle rugueux de référence est donné par la relation (2.67). Les fonctions $K(\eta)$ et $L(\eta)$ sont données par les relations (2.27) et (2.35) respectivement et prennent pour valeurs :

- $K(\eta) = 3,57080 - \cos^{-1}(2\eta - 1) = 3,57080 - \cos^{-1}[(2 \times 0,62) - 1] = 2,24237$
- $L(\eta) = 0,89270 - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2\eta - 1) + \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \sqrt{\eta(1-\eta)}$
 $= 0,89270 - \frac{1}{4} \cos^{-1}[(2 \times 0,62) - 1] + \left(0,62 - \frac{1}{2} \right) \sqrt{0,62 \times (1 - 0,62)} = 0,61884$

Selon la relation (2.67), le diamètre \overline{D} est :

$$\bar{D} = \frac{[K(\eta)]^{0,2}}{2,639[L(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} = \frac{[2,24237]^{0,2}}{2,639[0,61884]^{0,6}} \left(\frac{4}{\sqrt{9,81 \times 0,001}} \right)^{0,4} = 2,60763m$$

ii. Le nombre de Reynolds \bar{R}_p à l'état plein est, en vertu de la relation (2.69) :

$$\bar{R}_p \cong 5,65685 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 5,65685 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 10^{-3} \times 2,60763^3}}{10^{-6}} = 2359272,71$$

iii. Le facteur ψ est par suite, selon la relation (2.73) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[L(\eta) / K(\eta)]} + \frac{1,0625}{[L(\eta) / K(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5}$$

Soit :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{0,001 / 2,60763}{19[0,61884 / 2,24237]} + \frac{1,0625}{[0,61884 / 2,24237]^{3/2} \times 2359272,71} \right) \right]^{-2/5}$$

$$= 0,76511$$

iv. Le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy est, selon la relation (2.70) :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8\sqrt{2 \times 9,81}}{0,76511^{5/2}} = 69,204m^{0,5} / s$$

v. Le diamètre D aurait pu être également évalué par la relation fondamentale de la MMR, applicable à toute forme de profil géométrique de conduites et canaux :

$$D = \psi \bar{D} = 0,76511 \times 2,60763 = 1,99512 \cong 2m$$

vi. Vérifions nos calculs en déterminant, pour le diamètre ainsi obtenu, le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy par application de la relation (2.52). Pour cela, évaluons d'abord le nombre de Reynolds R_p à l'état plein, en ayant recours à la relation (2.42) :

$$R_p \cong 5,65685 \frac{\sqrt{giD^3}}{\nu} = 5,65685 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 10^{-3} \times 1,99512^3}}{10^{-6}} = 1116472,65$$

Ainsi, selon la relation (2.52), le coefficient C est :

$$C = -4\sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{14,8[L(\eta) / K(\eta)]} + \frac{1,255}{R_p [L(\eta) / K(\eta)]^{3/2}} \right)$$

$$= -4\sqrt{2 \times 9,81} \log \left(\frac{0,001 / 1,99512}{14,8[0,61884 / 2,24237]} + \frac{1,255}{1116472,65 \times [0,61884 / 2,24237]^{3/2}} \right)$$

$$= 68,8246m^{0,5} / s$$

L'écart relatif entre les valeurs du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy, calculées selon les relations (2.52) et (2.70) est de 0,55% seulement.

IV. Expression du coefficient de *Manning* dans une conduite en forme de voûte de type I

La relation universellement connue de *Manning* exprime le débit volume Q sous la forme suivante :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (2.74)$$

où n est le coefficient de *Manning*.

En comparant les relations (2.74) et la relation (2.40) de *Achour et Bedjaoui (2006)*, nous pouvons aisément déduire que :

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} R_h^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.75)$$

La relation (2.75) constitue la relation générale du coefficient n de *Manning*, applicable à tous les profils géométriques et dans tout le domaine de l'écoulement turbulent tel que défini par le diagramme universel de *Moody*.

Le nombre de *Reynolds* R figurant dans la relation (2.75) est, pour rappel, donné par les relations (2.48) et (2.51), dépendant de la gamme de variation du taux de remplissage η . La relation (2.75) montre que le coefficient n de *Manning* est fonction de la rugosité absolue ε , du nombre de *Reynolds* R et du rayon hydraulique R_h . Cette dépendance de n vis-à-vis de R_h traduit bien le fait que n varie en fonction du taux de remplissage η de la conduite, mais il est intéressant d'observer le degré de cette dépendance. Le rayon hydraulique R_h est donné par les relations (2.8) et (2.38), selon la gamme de variation du taux de remplissage η .

En tenant compte de toutes ces relations, nous pouvons écrire que pour :

$$i. \quad 0 \leq \eta \leq 1/2$$

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} D^{-1/6} \left[\frac{T(\eta)}{M(\eta)} \right]^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[T(\eta)/M(\eta)]} + \frac{1,255}{[T(\eta)/M(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.76)$$

En introduisant le paramètre adimensionnel :

$$N = \frac{D^{1/6}}{n\sqrt{g}} \quad (2.77)$$

La relation (2.76) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$N = -4\sqrt{2} \left[\frac{T(\eta)}{M(\eta)} \right]^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[T(\eta)/M(\eta)]} + \frac{1,255}{[T(\eta)/M(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.78)$$

ii. $1/2 \leq \eta \leq 1$

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g}D^{-1/6} \left[\frac{L(\eta)}{K(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[L(\eta)/K(\eta)]} + \frac{1,255}{[L(\eta)/K(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.79)$$

Ou bien en termes adimensionnels :

$$N = -4\sqrt{2} \left[\frac{L(\eta)}{K(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[L(\eta)/K(\eta)]} + \frac{1,255}{[L(\eta)/K(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.80)$$

Nous pouvons donc constater que dans toute la gamme $0 \leq \eta \leq 1$, le paramètre adimensionnel N est fonction du taux de remplissage η de la conduite, de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p à l'état plein.

IV.1. Variation du coefficient de Manning

Sous chacun des tableaux (2.6) à (2.10), les relations (2.78) et (2.80) ont été graphiquement représentées (Figures 2.7 à 2.11).

Tableau 2.6 : Valeurs de N pour $\varepsilon/D = 0$

$0 \leq \eta \leq 1/2$							
$\varepsilon/D = 0$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$M(\eta)$	$T(\eta)$	$T(\eta)/M(\eta)$	N	N	N	N
0,01	1,020	0,010	0,010	10,86370	23,09131	35,31892	47,54654
0,05	1,100	0,05	0,045	17,87517	27,34434	36,81352	46,28269
0,10	1,200	0,10	0,0833	19,53734	28,09664	36,65595	45,21525
0,15	1,300	0,15	0,1154	20,22464	28,33208	36,43952	44,54696
0,20	1,400	0,20	0,1429	20,60594	28,42987	36,25379	44,07772
0,25	1,500	0,25	0,1667	20,84903	28,47451	36,09998	43,72546
0,30	1,600	0,30	0,1875	21,01747	28,49471	35,97195	43,44919
0,35	1,700	0,35	0,2059	21,14091	28,50250	35,86410	43,22569
0,40	1,800	0,40	0,2222	21,23514	28,50363	35,77211	43,04059
0,45	1,900	0,45	0,2368	21,30934	28,50105	35,69275	42,88446
0,50	2,000	0,50	0,2500	21,36921	28,49640	35,62359	42,75078
$1/2 \leq \eta \leq 1$							
η	$K(\eta)$	$L(\eta)$	$L(\eta)/K(\eta)$	N	N	N	N
0,50	2,0000	0,50000	0,2500	21,36921	28,49640	35,62359	42,75078
0,55	2,1002	0,54992	0,2618	21,41825	28,49067	35,56309	42,63550
0,65	2,3047	0,64772	0,2810	21,48933	28,47883	35,46833	42,45783
0,70	2,4115	0,69453	0,2880	21,51283	28,47389	35,43494	42,39599
0,75	2,5236	0,73915	0,2929	21,52869	28,47023	35,41177	42,35332
0,8200	2,6945	0,79656	0,2956	21,53731	28,46813	35,39895	42,32977
0,90	2,9273	0,85182	0,2910	21,52258	28,47167	35,42076	42,36985
0,95	3,1198	0,87802	0,2814	21,49069	28,47856	35,46643	42,45430
1,00	3,5708	0,89270	0,2500	21,36921	28,49640	35,62359	42,75078

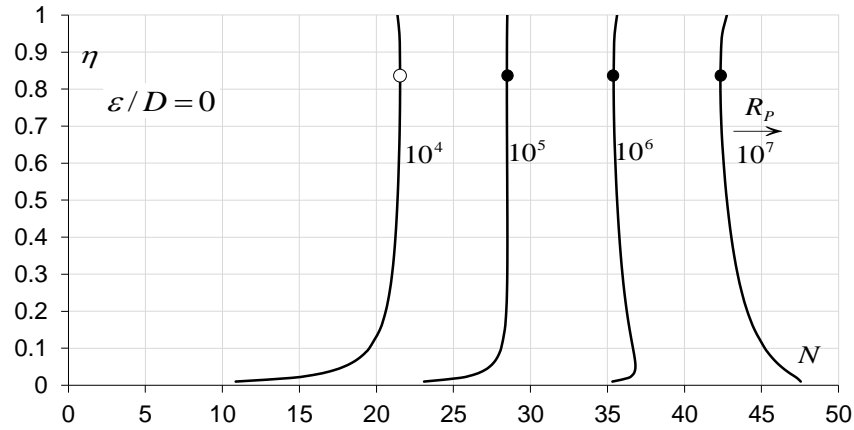


Figure 2.7 : Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 0$ (Ecoulement lisse).

(o) Valeur maximale de N obtenues pour $\eta \cong 0,82$

(●) Valeur minimale de N obtenues pour $\eta \cong 0,82$

Tableau 2.7 : Valeurs de N pour $\varepsilon/D = 10^{-5}$

$0 \leq \eta \leq 1/2$							
$\varepsilon/D = 10^{-5}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$M(\eta)$	$T(\eta)$	$T(\eta)/M(\eta)$	N	N	N	N
0,01	1,020	0,010	0,010	10,86087	23,06308	35,04312	45,27751
0,05	1,100	0,05	0,045	17,87045	27,29741	36,36666	43,13890
0,10	1,200	0,10	0,0833	19,53156	28,03931	36,11894	41,72945
0,15	1,300	0,15	0,1154	20,21821	28,26827	35,84815	40,88561
0,20	1,400	0,20	0,1429	20,59904	28,36142	35,62441	40,30544
0,25	1,500	0,25	0,1667	20,84176	28,40251	35,44200	39,87556
0,30	1,600	0,30	0,1875	21,00991	28,41987	35,29146	39,54150
0,35	1,700	0,35	0,2059	21,13311	28,42534	35,16533	39,27308
0,40	1,800	0,40	0,2222	21,22714	28,42451	35,05814	39,05197
0,45	1,900	0,45	0,2368	21,30117	28,42026	34,96593	38,86627
0,50	2,000	0,50	0,2500	21,36089	28,41418	34,88573	38,70785
$1/2 \leq \eta \leq 1$							
η	$K(\eta)$	$L(\eta)$	$L(\eta)/K(\eta)$	N	N	N	N
0,50	2,0000	0,50000	0,2500	21,36089	28,41418	34,88573	38,70785
0,55	2,1002	0,54992	0,2618	21,40980	28,40719	34,81568	38,57165
0,65	2,3047	0,64772	0,2810	21,48068	28,39341	34,70617	38,36246
0,70	2,4115	0,69453	0,2880	21,50411	28,38778	34,66762	38,28985
0,75	2,5236	0,73915	0,2929	21,51992	28,38365	34,64090	38,23981
0,8200	2,6945	0,79656	0,2956	21,52852	28,38129	34,62611	38,21222
0,90	2,9273	0,85182	0,2910	21,51383	28,38527	34,65126	38,25919
0,95	3,1198	0,87802	0,2814	21,48203	28,39310	34,70397	38,35831
1,00	3,5708	0,89270	0,2500	21,36089	28,41418	34,88573	38,70785

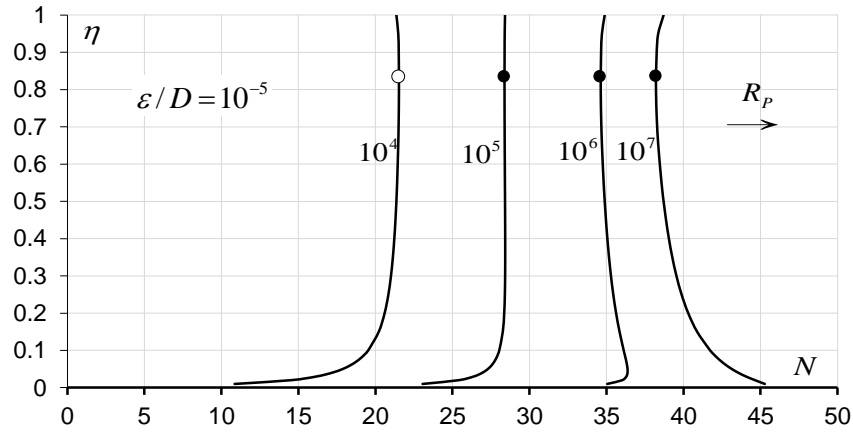
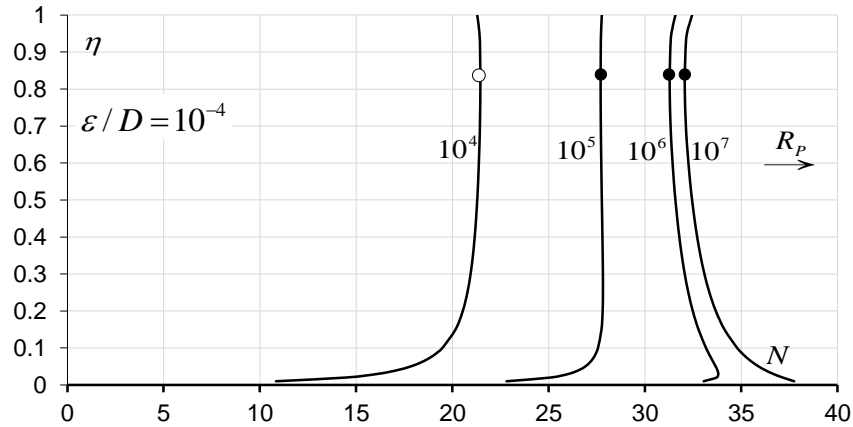


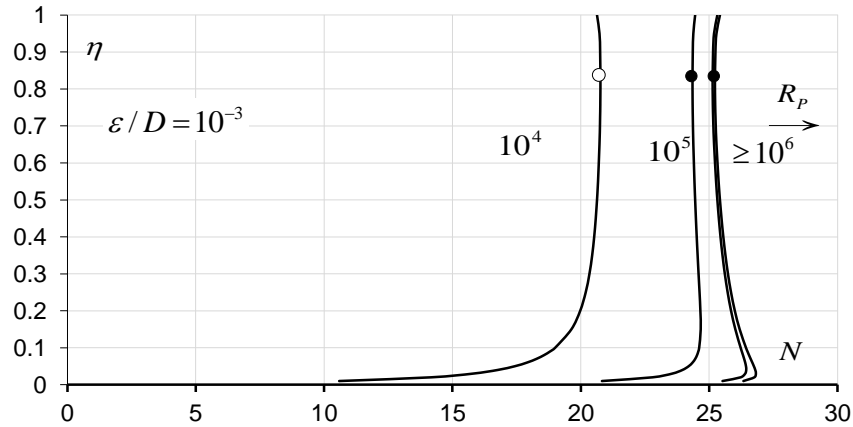
Figure 2.8 : Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-5}$

Tableau 2.8 : Valeurs de N pour $\varepsilon/D = 10^{-4}$

$0 \leq \eta \leq 1/2$							
$\varepsilon/D = 10^{-4}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$M(\eta)$	$T(\eta)$	$T(\eta)/M(\eta)$	N	N	N	N
0,01	1,020	0,010	0,010	10,83546	22,81551	33,04990	37,74659
0,05	1,100	0,05	0,045	17,82824	26,89749	33,66973	35,90296
0,10	1,200	0,10	0,0833	19,48001	27,55964	33,17014	34,78501
0,15	1,300	0,15	0,1154	20,16083	27,74071	32,77817	34,12655
0,20	1,400	0,20	0,1429	20,53749	27,80049	32,48152	33,67675
0,25	1,500	0,25	0,1667	20,77703	27,81653	32,25009	33,34458
0,30	1,600	0,30	0,1875	20,94263	27,81422	32,06426	33,08696
0,35	1,700	0,35	0,2059	21,06375	27,80373	31,91149	32,88024
0,40	1,800	0,40	0,2222	21,15603	27,78966	31,78349	32,71010
0,45	1,900	0,45	0,2368	21,22856	27,77422	31,67457	32,56730
0,50	2,000	0,50	0,2500	21,28699	27,75854	31,58067	32,44554
$1/2 \leq \eta \leq 1$							
η	$K(\eta)$	$L(\eta)$	$L(\eta)/K(\eta)$	N	N	N	N
0,50	2,0000	0,50000	0,2500	21,28699	27,75854	31,58067	32,44554
0,55	2,1002	0,54992	0,2618	21,33478	27,74326	31,49923	32,34089
0,65	2,3047	0,64772	0,2810	21,40391	27,71667	31,37296	32,18021
0,70	2,4115	0,69453	0,2880	21,42672	27,70657	31,32880	32,12446
0,75	2,5236	0,73915	0,2929	21,44210	27,69936	31,29827	32,08604
0,8200	2,6945	0,79656	0,2956	21,45047	27,69529	31,28140	32,06485
0,90	2,9273	0,85182	0,2910	21,43618	27,70218	31,31010	32,10091
0,95	3,1198	0,87802	0,2814	21,40522	27,71610	31,37044	32,17703
1,00	3,5708	0,89270	0,2500	21,28699	27,75854	31,58067	32,44554

Figure 2.9 : Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon / D = 10^{-4}$ Tableau 2.9 : Valeurs de N pour $\varepsilon / D = 10^{-3}$

$0 \leq \eta \leq 1/2$							
$\varepsilon / D = 10^{-3}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$M(\eta)$	$T(\eta)$	$T(\eta)/M(\eta)$	N	N	N	N
0,01	1,020	0,010	0,010	10,58790	20,82229	25,51898	26,33327
0,05	1,100	0,05	0,045	17,42831	24,20055	26,43378	26,74163
0,10	1,200	0,10	0,0833	19,00033	24,61084	26,22571	26,43366
0,15	1,300	0,15	0,1154	19,63327	24,67073	26,01911	26,18736
0,20	1,400	0,20	0,1429	19,97656	24,65759	25,85282	25,99917
0,25	1,500	0,25	0,1667	20,19105	24,62462	25,71911	25,85142
0,30	1,600	0,30	0,1875	20,33698	24,58702	25,60972	25,73221
0,35	1,700	0,35	0,2059	20,44214	24,54989	25,51865	25,63385
0,40	1,800	0,40	0,2222	20,52118	24,51501	25,44162	25,55120
0,45	1,900	0,45	0,2368	20,58252	24,48286	25,37560	25,48069
0,50	2,000	0,50	0,2500	20,63135	24,45348	25,31835	25,41977
$1/2 \leq \eta \leq 1$							
η	$K(\eta)$	$L(\eta)$	$L(\eta)/K(\eta)$	N	N	N	N
0,50	2,0000	0,50000	0,2500	20,63135	24,45348	25,31835	25,41977
0,55	2,1002	0,54992	0,2618	20,67084	24,42682	25,26847	25,36686
0,65	2,3047	0,64772	0,2810	20,72717	24,38346	25,19071	25,28463
0,70	2,4115	0,69453	0,2880	20,74552	24,36775	25,16341	25,25582
0,75	2,5236	0,73915	0,2929	20,75782	24,35673	25,14449	25,23589
0,8200	2,6945	0,79656	0,2956	20,76448	24,35058	25,13403	25,22488
0,90	2,9273	0,85182	0,2910	20,75309	24,36101	25,15183	25,24362
0,95	3,1198	0,87802	0,2814	20,72823	24,38257	25,18916	25,28299
1,00	3,5708	0,89270	0,2500	20,63135	24,45348	25,31835	25,41977

Figure 2.10 : Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-3}$ Tableau 2.10 : Valeurs de N pour $\varepsilon/D = 10^{-2}$

$0 \leq \eta \leq 1/2$							
$\varepsilon/D = 10^{-2}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$M(\eta)$	$T(\eta)$	$T(\eta)/M(\eta)$	N	N	N	N
0,01	1,020	0,010	0,010	8,59467	13,29136	14,10565	14,19440
0,05	1,100	0,05	0,045	14,73138	16,96461	17,27245	17,30454
0,10	1,200	0,10	0,0833	16,05153	17,66640	17,87436	17,89581
0,15	1,300	0,15	0,1154	16,56329	17,91167	18,07992	18,09720
0,20	1,400	0,20	0,1429	16,83367	18,02890	18,17525	18,19024
0,25	1,500	0,25	0,1667	16,99914	18,09363	18,22594	18,23947
0,30	1,600	0,30	0,1875	17,10977	18,13248	18,25497	18,26748
0,35	1,700	0,35	0,2059	17,18830	18,15705	18,27226	18,28401
0,40	1,800	0,40	0,2222	17,24652	18,17314	18,28271	18,29388
0,45	1,900	0,45	0,2368	17,29116	18,18389	18,28898	18,29969
0,50	2,000	0,50	0,2500	17,32629	18,19116	18,29258	18,30291
$1/2 \leq \eta \leq 1$							
η	$K(\eta)$	$L(\eta)$	$L(\eta)/K(\eta)$	N	N	N	N
0,50	2,0000	0,50000	0,2500	17,32629	18,19116	18,29258	18,30291
0,55	2,1002	0,54992	0,2618	17,35440	18,19605	18,29444	18,30445
0,65	2,3047	0,64772	0,2810	17,39396	18,20121	18,29513	18,30468
0,70	2,4115	0,69453	0,2880	17,40670	18,20235	18,29477	18,30417
0,75	2,5236	0,73915	0,2929	17,41518	18,20295	18,29435	18,30364
0,8200	2,6945	0,79656	0,2956	17,41976	18,20321	18,29406	18,30329
0,90	2,9273	0,85182	0,2910	17,41192	18,20274	18,29453	18,30386
0,95	3,1198	0,87802	0,2814	17,39470	18,20129	18,29512	18,30466
1,00	3,5708	0,89270	0,2500	17,32629	18,19116	18,29258	18,30291

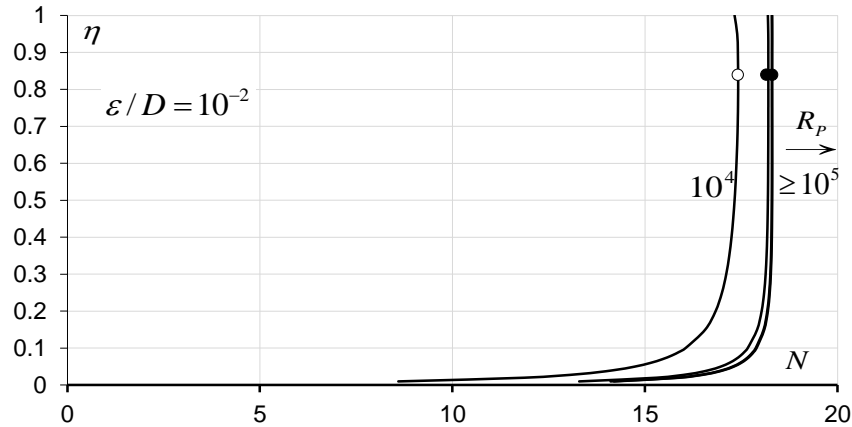


Figure 2.11 : Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon / D = 10^{-2}$

Pour les valeurs pratiques de η , telles que $\eta \geq 0,2$, il ressort des figures (2.7) à (2.11) les observations suivantes :

- Le paramètre adimensionnel N augmente, jusqu'à un maximum, avec l'accroissement du taux de remplissage η , pour les valeurs de R_p atteignant 10^4 . Le maximum de N a été observé pour $\eta = 0,82$.
- Au-delà de son maximum, le paramètre N diminue avec l'accroissement du taux de remplissage η .
- Pour les valeurs de $R_p \geq 10^5$, le paramètre N diminue avec l'accroissement de η , jusqu'à un minimum. Le minimum de N a été également observé pour $\eta = 0,82$.
- Au-delà de $\eta = 0,82$, le paramètre N augmente avec l'accroissement du taux de remplissage η .
- Un changement de concavité des courbes s'opère dès que le nombre de Reynolds R_p atteint 10^5 .
- Au-delà de $\eta = 0,2$, la variation de N est graduelle et les courbes se resserrent au fur et à mesure de l'augmentation de la rugosité relative ε / D . Les courbes se confondent quasiment lorsque le nombre de Reynolds R_p atteint 10^5 (Pour la plus forte valeur de la rugosité relative).

Pour les cas pratiques, la plus petite valeur du nombre de Reynolds R_p est de l'ordre de 10^5 , ce qui permet de conclure que le paramètre adimensionnel N présente en pratique des valeurs minimales. Pour le taux de remplissage $\eta = 0,82$, N est régi par la relation la relation (2.80).

En vertu de cette dernière relation, nous pouvons écrire que pour $R_p \geq 10^5$:

$$N_{\min} = N_{(\eta=0,82)} = -4\sqrt{2} \left[\frac{0,79656}{2,69450} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{14,8 [0,79656 / 2,69450]} + \frac{1,255}{[0,79656 / 2,69450]^{3/2} R_p} \right)$$

Alors :

$$N_{\min} = -6,93082 \log \left(\frac{\varepsilon / D}{4,37527} + \frac{7,80781}{R_p} \right) \quad (2.81)$$

Ou bien, compte tenu de la relation (2.77) :

$$n_{\max} = -\frac{0,14428 D^{1/6}}{\sqrt{g}} \left[\log \left(\frac{\varepsilon / D}{4,37527} + \frac{7,80781}{R_p} \right) \right]^{-1} \quad (2.82)$$

IV.2. Calcul du coefficient de résistance à l'écoulement de *Manning* par la méthode MMR

Les relations (2.76) ou (2.79) ne permettent d'évaluer le coefficient n de *Manning* que si le diamètre D de la conduite est une donnée du problème. Dans le cas où D n'est pas connu, il est tout de même possible de calculer de manière explicite la valeur de n , à condition d'avoir recours à la méthode du modèle rugueux de référence (MMR).

Pour déterminer le coefficient n de *Manning*, admettons les conditions suivantes :

- i. $\bar{D} \neq D$
- ii. $\bar{Q} = Q$
- iii. $\bar{i} = i$
- iv. $\bar{\eta} = \eta$
- v. $\bar{\nu} = \nu$

Rappelons que le coefficient n de *Manning* du modèle rugueux de référence s'écrit :

$$n = \frac{\psi^{8/3} \bar{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}} \quad (1.103)$$

Le coefficient de correction des dimensions linéaires ψ est donné par l'une des relations (2.71) ou (2.73) selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η , tandis que \bar{R}_h s'exprime par l'une des relations (2.70) ou (2.72). Ainsi :

- i. $0 \leq \eta \leq 1/2$

$$n = \frac{0,19676}{\sqrt{g}} \bar{D}^{1/6} \left[\frac{T(\eta)}{M(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 [T(\eta) / M(\eta)]} + \frac{1,0625}{[T(\eta) / M(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \quad (2.83)$$

ii. $1/2 \leq \eta \leq 1$

$$n = \frac{0,19676}{\sqrt{g}} \bar{D}^{1/6} \left[\frac{L(\eta)}{K(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[L(\eta)/K(\eta)]} + \frac{1,0625}{[L(\eta)/K(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \quad (2.84)$$

Selon les relations (2.83) et (2.84), le coefficient n de *Manning* s'exprime en fonction du taux de remplissage η , de la rugosité absolue ε et des caractéristiques \bar{D} et \bar{R}_p du modèle rugueux de référence. Suivant la valeur de η , le diamètre \bar{D} est donné par l'une des relations (2.64) ou (2.67), tandis que le nombre de *Reynolds* \bar{R}_p est régi par la relation (2.69).

IV.3. Exemple d'application (02)

La conduite en forme de voûte de type I représentée par la figure 2.1 écoule le débit volume $Q = 4 \text{ m}^3/\text{s}$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, sous la pente longitudinale $i = 0,001$. La paroi interne de la conduite est caractérisée par la rugosité absolue $\varepsilon = 0,001 \text{ m}$ et le taux de remplissage de la conduite doit être maintenu à 62 %.

Calculer la valeur du coefficient n de *Manning*.

Solution :

i. Puisque $1/2 \leq \eta \leq 1$, alors le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est donné par la relation (2.67). Les fonctions $K(\eta)$ et $L(\eta)$ sont données par les relations (2.27) et (2.35) respectivement et prennent pour valeurs :

- $K(\eta) = 3,57080 - \cos^{-1}(2\eta - 1) = 3,57080 - \cos^{-1}[(2 \times 0,62) - 1] = 2,24237$
- $L(\eta) = 0,89270 - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2\eta - 1) + \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \sqrt{\eta(1-\eta)}$
 $= 0,89270 - \frac{1}{4} \cos^{-1}[(2 \times 0,62) - 1] + \left(0,62 - \frac{1}{2} \right) \sqrt{0,62 \times (1 - 0,62)} = 0,61884$

Selon la relation (2.67), le diamètre \bar{D} est :

$$\bar{D} = \frac{[K(\eta)]^{0,2}}{2,639[L(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} = \frac{[2,24237]^{0,2}}{2,639[0,61884]^{0,6}} \left(\frac{4}{\sqrt{9,81 \times 0,001}} \right)^{0,4} = 2,60763 \text{ m}$$

ii. Le nombre de *Reynolds* \bar{R}_p à l'état plein est, en vertu de la relation (2.69) :

$$\bar{R}_p \cong 5,65685 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 5,65685 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 10^{-3} \times 2,60763^3}}{10^{-6}} = 2359272,71$$

iii. Puisque $1/2 \leq \eta \leq 1$, alors le coefficient n de *Manning* est régi par la relation (2.84), soit :

$$\begin{aligned}
n &= \frac{0,19676}{\sqrt{g}} \bar{D}^{1/6} \left[\frac{L(\eta)}{K(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[L(\eta)/K(\eta)]} + \frac{1,0625}{[L(\eta)/K(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \\
&= \frac{0,19676}{\sqrt{9,81}} \times 2,60763^{1/6} \times \left[\frac{0,61884}{2,24237} \right]^{1/6} \\
&\times \left[-\log \left(\frac{0,001/2,60763}{19[0,61884/2,24237]} + \frac{1,0625}{[0,61884/2,24237]^{3/2} \times 2359272,71} \right) \right]^{-16/15} = 0,01315 m^{-1/3} s
\end{aligned}$$

iv. **1^{ère} vérification**

La vérification des calculs peut porter sur la détermination du débit volume Q par la relation générale (2.40) de [Achour et Bedjaoui \(2006\)](#). Pour cela, évaluons d'abord le diamètre D , en ayant recours à la relation (2.74) :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (2.74)$$

En tenant compte des relations (2.36) et (2.38) (Puisque : $\eta = 0,62 > 0,5$), la relation (2.74) s'écrit :

$$Q = \frac{1}{n} \frac{[L(\eta)]^{5/3}}{[K(\eta)]^{2/3}} D^{8/3} \sqrt{i}$$

Le diamètre D de la conduite est par conséquent :

$$D = \frac{[K(\eta)]^{1/4}}{[L(\eta)]^{5/8}} \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{3/8}$$

Soit :

$$D = \frac{2,24237^{1/4}}{0,61884^{5/8}} \left(\frac{0,01315 \times 4}{\sqrt{0,001}} \right)^{3/8} = 1,99913 m$$

Puisque la valeur du diamètre D est telle que $D = 1,99913 m$, alors l'aire de la section mouillée A est donnée par la relation (2.36). Ainsi :

$$A = D^2 L(\eta) = 1,99913^2 \times 0,61884 = 2,47319 m^2$$

Le rayon hydraulique R_h est régi par la relation (2.38). Soit :

$$R_h = D \frac{L(\eta)}{K(\eta)} = 1,99913 \times \frac{0,61884}{2,24237} = 0,55171 m$$

Le nombre de Reynolds R est, selon la relation (2.41) :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g} R_h^3}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,001 \times 0,55171^3}}{10^{-6}} = 1836814,774$$

Par suite, selon la relation (2.40), le débit volume Q est :

$$Q = -4\sqrt{2g} A\sqrt{R_h} i \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right)$$

Soit:

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 2,47319 \times \sqrt{0,55171 \times 0,001} \times \log\left(\frac{0,001}{14,8 \times 0,55171} + \frac{10,04}{1836814,774}\right) = 4,00689 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Nous pouvons constater que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est de 0,17% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

v. **2^{ème} : vérification**

Vérifions nos calculs en déterminant, pour le diamètre ainsi obtenu, la pente de la conduite par application la relation (1.36) de *Darcy-Weisbach*.

Puisque : $\eta = 0,62 > 0,5$, le facteur de correction des dimensions linéaires est évalué par la relation (2.73) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log\left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[L(\eta) / K(\eta)]} + \frac{1,0625}{[L(\eta) / K(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p}\right) \right]^{-2/5}$$

Soit :

$$\psi = 1,35 \left[-\log\left(\frac{0,001 / 2,60763}{19[0,61884 / 2,24237]} + \frac{1,0625}{[0,61884 / 2,24237]^{3/2} 2359272,71}\right) \right]^{-2/5} = 0,76511$$

Le diamètre de la conduite est donnée par la relation fondamentale de la MMR :

$$D = \psi \bar{D} = 0,76511 \times 2,60763 = 1,99512 \text{ m}$$

L'aire de la section mouillée se calcule par relation (2.36). Soit :

$$A = D^2 L(\eta) = 1,99512^2 \times 0,61884 = 2,47319 \text{ m}^2$$

Le périmètre mouillé peut être évalué par la relation (2.28) :

$$P = K(\eta)D = 2,24237 \times 1,99512 = 4,48277 \text{ m}$$

Le coefficient de frottement peut être évalué par la relation (1.61) figurant dans la partie bibliographique :

$$f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0,76642^5}{16} = 0,016387$$

La relation se Darcy – Weisbach s'exprime par la relation (1.36) :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2}$$

La vitesse moyenne de l'écoulement est telle que : $V = Q/A$ et le diamètre hydraulique est tel que : $D_h = 4A/P$. Soit :

$$i = \frac{f}{8g} \frac{P}{A^3} Q^2 = \frac{0,016387}{8 \times 9,81} \times \frac{4,48277}{2,47319^3} \times 4^2 = 0,00098999$$

L'écart relatif entre la valeur ainsi calculée de la pente de la conduite et celle donnée dans les énoncés du problème ne dépasse guère 1 % ce qui est très satisfaisant. Cela mène à conclure à la validité de la démarche de calcul du coefficient de *Manning* proposée.

V. Conclusion

Le présent chapitre de notre thèse a eu pour objectif l'étude des coefficients de Chézy et de *Manning* dans une conduite en forme de voûte de type I de hauteur D . Les caractéristiques géométriques de la conduite ainsi que les propriétés hydrauliques de l'écoulement ont été développées, tels que la largeur du plan d'eau, le périmètre mouillé, l'aire de la section mouillée et le rayon hydraulique. Ces caractéristiques et propriétés dépendent du lieu géométrique de l'écoulement et dépendent ainsi du taux de remplissage de la conduite.

La relation générale du coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* a été identifiée en ayant recours à la relation du débit volume proposée par *Achour et Bedjaoui (2006)*. Le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* est fonction à la fois de la rugosité relative ε/D , du taux de remplissage η et d'un nombre de *Reynolds* à l'état plein R_p , lui-même fonction de la pente longitudinale i , du diamètre D , de η et de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement.

Nous avons donc écrit la relation fonctionnelle $C(D, \eta, i, \varepsilon, \nu) = 0$. Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η , nous avons déterminé le paramètre adimensionnel C/\sqrt{g} . Il se présente en fonction du taux de remplissage η , de la rugosité relative ε/D et du nombre de *Reynolds* R_p à l'état plein. La représentation graphique du paramètre C/\sqrt{g} en fonction de η et de R_p , a montré que C/\sqrt{g} augmente avec l'augmentation de R_p , et se décroît avec la croissance de la rugosité relative ε/D , avec ε/D fixé et n'importe qu'elle la valeur de R_p , la valeur de C/\sqrt{g} augmente avec l'augmentation de taux de remplissage η jusqu'à atteindre à la valeur maximale pour

$\eta = 0,82$ puis il diminue. Lorsque le diamètre D de la conduite n'est pas une donnée du problème, le calcul du coefficient C de Chézy a pu être possible en ayant recours à la méthode du modèle rugueux (MMR). Nous avons présenté les étapes de calcul du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy et nous avons proposé un exemple de calcul numérique.

Le chapitre s'est poursuivi par l'étude du coefficient de résistance n de Manning. En comparant la relation générale du débit volume de Achour et Bedjaoui (2006) et celle de Manning, nous avons pu établir la relation générale du coefficient n de Manning que nous avons transformée en une relation adimensionnelle à travers laquelle est exprimé le coefficient adimensionnel N de Manning. La relation obtenue montre que N dépend à la fois de la rugosité relative ε / D , du taux de remplissage η et d'un nombre de Reynolds à l'état plein R_p . La relation obtenue est de type $N(D, \eta, i, \varepsilon, \nu) = 0$. Nous avons ensuite procédé au tracé de la variation de N , en faisant varier à la fois la rugosité relative et le nombre de Reynolds à l'état plein. Nous avons ainsi mis en évidence l'influence de R_p , c'est-à-dire celle de la viscosité cinématique ν . Il ressort des graphes obtenus que plus la rugosité relative augmente et plus les courbes se resserrent, indiquant que le régime d'écoulement turbulent rugueux est atteint. Les courbes se confondent pour les grandes valeurs de la rugosité relative et pour une certaine valeur de R_p . Nous avons ensuite procédé au calcul du coefficient n de Manning, en ayant recours à la méthode du modèle rugueux. L'application de cette méthode ne nécessite pas la connaissance du diamètre D de la conduite. Un exemple de calcul numérique a été proposé pour expliquer les différentes étapes de calcul du coefficient n de Manning.

Chapitre II

Etude des coefficients de *Chézy* et de *Manning* dans une conduite en forme de voûte de type II

Chapitre II

Etude des coefficients de *Chézy* et de *Manning* dans une conduite en forme de voûte de type II

I. Introduction

A travers ce chapitre, nous allons étudier le deuxième type de la conduite en forme de voûte. Cette forme est arrondie au niveau de sa partie inférieure plus précisément au niveau des deux cotés latéraux (Figure 2.12). Elle est, en outre, arrondie dans sa partie supérieure. Le niveau de la surface libre de l'écoulement peut, alors, se trouver dans l'une des trois parties de la conduite selon la valeur du taux de remplissage (Figure 2.12). Nous commencerons tout d'abord par la présentation du profil géométrique de la conduite et le développement de ses caractéristiques géométriques et hydrauliques particulièrement le périmètre mouillé, l'aire de la section mouillée et le rayon hydraulique.

Par la suite, nous allons établir pour les trois lieux géométriques de la conduite, les relations générales du coefficient de résistance de l'écoulement de *Chézy* et de *Manning*. Ces relations expriment le coefficient de résistance de l'écoulement en fonction du taux de remplissage η , de la rugosité relative ε/D et du nombre de *Reynolds* à l'état plein R_p .

La variation des coefficients de *Chézy* et de *Manning* en fonction du taux de remplissage sera représentée graphiquement. Les graphes seront traduits par une série de courbes passant chacune par un maximum ou un minimum. Ces courbes seront commentées et exploitées pour exprimer le coefficient de résistance maximal de *Chézy* et de *Manning*.

Par ailleurs, la méthode du modèle rugueux (MMR) sera utilisée pour pouvoir exprimer les coefficients de résistance lorsque le diamètre de la conduite n'est pas nécessairement un paramètre connu du problème.

Enfin, deux exemples d'application seront exposés afin d'apprécier l'efficacité des relations qui seront proposées.

II. Caractéristiques de l'écoulement

La figure (2.12) montre les trois espaces géométriques que peut occuper l'écoulement selon la valeur du taux de remplissage : $\eta = y_n / D$ ([Vatankhah, 2012](#)). C'est ainsi que si :

- $0 \leq \eta \leq 1/8$, l'écoulement, de plan d'eau \overleftrightarrow{ab} , se situe dans la partie la plus basse de la conduite.
- $1/8 \leq \eta \leq 1/2$, l'écoulement, de plan d'eau \overleftrightarrow{kl} , se situe dans la partie rectangulaire de la conduite.
- $1/2 \leq \eta \leq 1$, l'écoulement, de plan d'eau \overleftrightarrow{mn} , se situe dans la partie circulaire la plus haute de la conduite.

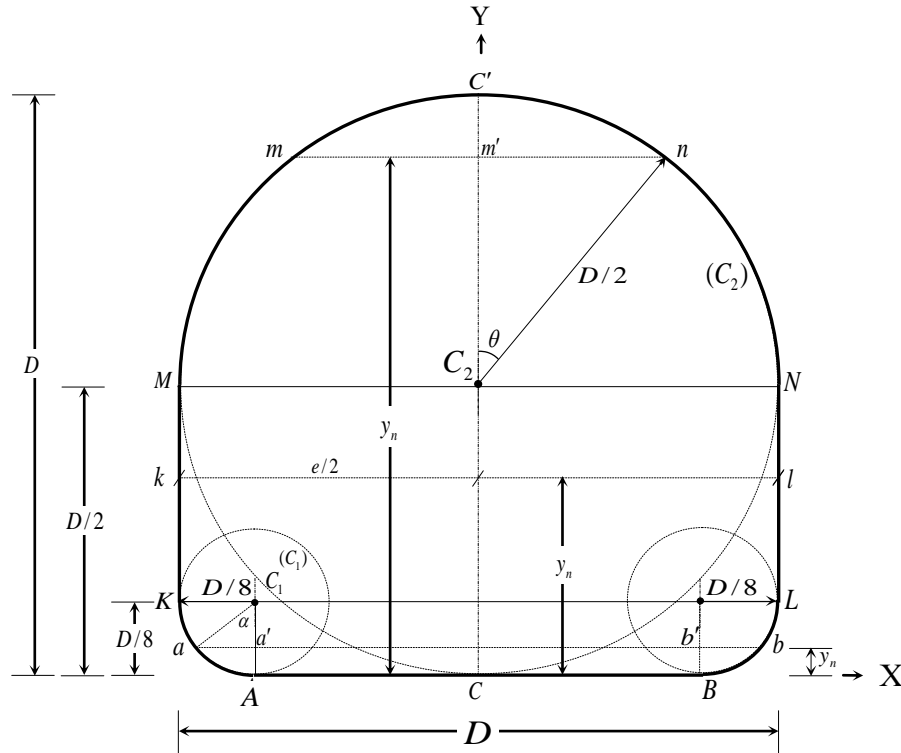


Figure 2.12 : Schéma de définition de l'état de l'écoulement dans une conduite en forme de voûte de type II.

Les caractéristiques de l'écoulement doivent être déterminées pour chacun des trois cas ci-dessus indiqués. Alors :

i. $0 \leq \eta \leq 1/8$

a) **Largeur du plan d'eau**

Lorsque : $0 \leq \eta \leq 1/8$, la largeur du plan d'eau e correspond à la corde \overleftrightarrow{ab} . Les points a et b appartiennent au cercle (C_1) , de centre C_1 et de diamètre $d_1 = \frac{D}{4}$. Ainsi :

$$e = \overleftrightarrow{ab} = \overleftrightarrow{AB} + (2 \times \overleftrightarrow{aa'}) \quad (2.85)$$

Où

$$\overleftrightarrow{aa'} = \frac{1}{8} D \times \sin \alpha \quad (2.86)$$

Et

$$\overrightarrow{AB} = D - 2 \times (D/8) = \frac{3D}{4} \quad (2.87)$$

En tenant compte des relations (2.86) et (2.87), la relation (2.85) s'écrit alors :

$$e = \left(\frac{3D}{4} \right) + 2 \left(\frac{1}{8} D \times \sin \alpha \right) \quad (2.88)$$

Ou bien :

$$e = \frac{D}{4} (3 + \sin \alpha) \quad (2.89)$$

Où (α) est le demi angle au centre du cercle C_1 , tel que:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{C_1A} - \overrightarrow{a'A}}{\overrightarrow{C_1a}} = \frac{(1/8)D - y_n}{(1/8)D} = 1 - 8\eta \quad (2.90)$$

Ou tel que :

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - (1 - 8\eta)^2} \quad (2.91)$$

Finalement, la largeur du plan d'eau e est, selon les relations (2.89) et (2.91) :

$$e = \frac{D}{4} \left[3 + \sqrt{1 - (1 - 8\eta)^2} \right] \quad (2.92)$$

b) Périmètre mouillé

Lorsque $0 \leq \eta \leq 1/8$, le périmètre mouillé P correspond à deux fois la longueur de l'arc \widehat{Aa} , à laquelle il faut ajouter la longueur \overrightarrow{AB} , soit :

Selon la relation (2.87) on a : la longueur $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4} D$

Et la longueur de l'arc \widehat{Aa} est telle que : $\widehat{Aa} = \left(2 \frac{D}{8} \times \alpha \right) / 2 = \frac{1}{8} D \alpha$

En tenant compte de la relation (2.90), l'angle α est tel que : $\alpha = \cos^{-1}(1 - 8\eta)$, soit :

$$\widehat{Aa} = \frac{D}{8} \cos^{-1}(1 - 8\eta)$$

Le périmètre mouillé P est donc tel que :

$$P = \overrightarrow{AB} + 2\widehat{Aa}$$

Soit :

$$P = \frac{3}{4} D + 2 \left[\frac{D}{8} \cos^{-1}(1 - 8\eta) \right]$$

Ou bien :

$$P = \frac{1}{4} [3 + \cos^{-1}(1 - 8\eta)] D \quad (2.93)$$

Définissons la fonction :

$$E(\eta) = \frac{1}{4} [3 + \cos^{-1}(1 - 8\eta)] \quad (2.94)$$

La relation (2.93) s'écrit alors plus simplement :

$$P = D \times E(\eta) \quad (2.95)$$

c) Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A correspondant à $0 \leq \eta \leq 1/8$ est définie par l'espace $aABba$ de la figure (2.12). L'aire de la section mouillée A peut être décomposée en deux aires qui sont :

- $2A_0$, où A_0 est l'aire de la section du demi segment circulaire $aAa'a$.
- et A_1 est l'aire du rectangle $a'ABb'a'$ dont les caractéristiques sont :

- La longueur = $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4} D$ (selon la relation 2.87).

- La largeur = y_n .

L'aire de la section A recherchée est donc :

$$A = 2A_0 + A_1$$

L'aire du demi segment circulaire $aAa'a$ appartient au cercle de centre C_1 , de diamètre $D/4$ et d'angle au centre α . Nous pouvons ainsi écrire que, pour α exprimé en radian :

$$A_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \left(\frac{D}{4} \right)^2 [\alpha - \sin(\alpha) \times \cos(\alpha)]$$

Ou bien :

$$A_0 = \frac{D^2}{128} [\alpha - \sin(\alpha) \times \cos(\alpha)]$$

Soit :

$$2A_0 = \frac{D^2}{64} [\alpha - \sin(\alpha) \times \cos(\alpha)] \quad (2.96)$$

En tenant compte des relations (2.90) et (2.91), la relation (2.96) s'écrit alors :

$$2A_0 = \frac{D^2}{64} \left[\cos^{-1}(1 - 8\eta) - \left(\sqrt{1 - (1 - 8\eta)^2} \times (1 - 8\eta) \right) \right] \quad (2.97)$$

L'aire de la section mouillée A_1 du rectangle $a'ABb'a'$ s'écrit :

$$A_1 = y_n \times \frac{3}{4} D$$

Ou bien, tenant compte que : $\eta = y_n/D$:

$$A_1 = \left(\frac{3}{4}\eta\right)D^2 \quad (2.98)$$

Finalement, l'aire recherchée $A = 2A_0 + A_1$ est, compte tenu des relations (2.97), (2.98) :

$$A = \frac{D^2}{64} \left[\cos^{-1}(1-8\eta) - \left(\sqrt{1-(1-8\eta)^2} \times (1-8\eta) \right) \right] + \left(\frac{3}{4}\eta\right)D^2$$

Ou bien

$$A = \frac{D^2}{4} \left[\frac{1}{16} \cos^{-1}(1-8\eta) - \frac{1}{4} (1-8\eta) \sqrt{\eta(1-4\eta)} + 3\eta \right] \quad (2.99)$$

Définissons, par souci de simplification d'écriture, la fonction :

$$F(\eta) = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{16} \cos^{-1}(1-8\eta) - \frac{1}{4} (1-8\eta) \sqrt{\eta(1-4\eta)} + 3\eta \right] \quad (2.100)$$

La relation (2.99) s'écrit alors :

$$A = D^2 \times F(\eta) \quad (2.101)$$

d) Rayon hydraulique

Les relations (2.95) et (2.101) permettent de déduire que le rayon hydraulique $R_n = A/P$ est :

$$R_n = D \frac{F(\eta)}{E(\eta)} \quad (2.102)$$

ii. $1/8 \leq \eta \leq 1/2$

a) Largeur du plan d'eau

Lorsque : $1/8 \leq \eta \leq 1/2$, la largeur du plan d'eau e correspond à la longueur du rectangle \overrightarrow{kl} .

Soit :

$$e = D \quad (2.103)$$

b) Périmètre mouillé

Lorsque : $1/8 \leq \eta \leq 1/2$, le périmètre mouillé P correspond à deux fois la longueur \overrightarrow{Kk} , à laquelle il faut ajouter la longueur $KABL$.

La longueur $KABL$ est obtenue par la relation (2.93) pour $\eta = 1/8$, soit : $KABL = 1,1427D$.

La longueur \overrightarrow{Kk} , est égale à la différence du longueur y_n et $\overrightarrow{C_1A}$.

$$\overrightarrow{Kk} = y_n - \overrightarrow{C_1A} = y_n - (D/8)$$

Soit, en tenant compte que : $\eta = y_n/D$:

$$\overrightarrow{Kk} = \left(\eta - \frac{1}{8} \right) D \quad (2.104)$$

Le périmètre mouillé P est donc tel que :

$$P = 2\overrightarrow{Kk} + KABL \quad (2.105)$$

Tenant compte de la relation (2.104), la relation (2.105) s'écrit, sachant que : $KABL = 1,1427 D$:

$$P = 2 \times \left(\eta - \frac{1}{8} \right) D + 1,1427 D \quad (2.106)$$

Ou bien :

$$P = (2\eta + 0,8927) D \quad (2.107)$$

Définissons la fonction :

$$G(\eta) = 2\eta + 0,8927 \quad (2.108)$$

La relation (2.107) s'écrit alors plus simplement :

$$P = D \times G(\eta) \quad (2.109)$$

c) Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A correspondant à : $1/8 \leq \eta \leq 1/2$ est définie par l'espace du rectangle $kABlk$ de la figure (2.12). L'aire de la section mouillée A peut être décomposée en deux aires qui sont :

- A_0 , l'aire du rectangle $kKLLk$ dont les caractéristiques sont :

- La longueur = largeur du plan d'eau : $\overrightarrow{kl} = e = D$.

- Hauteur = $y_n - \frac{D}{8}$

- A_1 , est définie par l'espace $KABLK$ qui s'exprime par la relation (2.99) pour : $\eta = \frac{1}{8}$.

L'aire de la section A recherchée est donc : $A = A_0 + A_1$.

L'aire de la section mouillée A_0 du rectangle $kKLLk$ s'écrit :

$$A_0 = \overrightarrow{kl} \times \overrightarrow{kK} = D \times \left(y_n - \frac{D}{8} \right)$$

Ou bien, en tenant compte que : $\eta = y_n/D$:

$$A_0 = \left(\eta - \frac{1}{8} \right) D^2 \quad (2.110)$$

La section A_1 s'exprime par la relation (2.99) pour : $\eta = \frac{1}{8}$. Alors :

$$A_1 = \frac{D^2}{4} \left[\frac{1}{16} \cos^{-1} \left(1 - 8 \times \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{4} \left(1 - 8 \times \frac{1}{8} \right) \sqrt{\frac{1}{8} \left(1 - 4 \times \frac{1}{8} \right) + 3 \times \frac{1}{8}} \right] = 0,11829 D^2 \quad (2.111)$$

Finalement, l'aire recherchée : $A = A_0 + A_1$ est, compte tenu des relations (2.110) et (2.111):

$$A = \left(\eta - \frac{1}{8} \right) D^2 + 0,11829 D^2$$

Soit :

$$A = \left(\eta - 6,706 \times 10^{-3} \right) D^2 \quad (2.112)$$

Définissons la fonction :

$$H(\eta) = \eta - 6,706 \times 10^{-3} \quad (2.113)$$

La relation (2.112) s'écrit alors :

$$A = D^2 \times H(\eta) \quad (2.114)$$

d) Rayon hydraulique

Le rayon hydraulique $R_h = A / P$ s'écrit, en ayant recours aux relations (2.114) et (2.109) :

$$R_h = D \frac{H(\eta)}{G(\eta)} \quad (2.115)$$

iii. $1/2 \leq \eta \leq 1$

a) Largeur du plan d'eau

Lorsque : $1/2 \leq \eta \leq 1$, la largeur du plan d'eau e correspond à la longueur du segment \overrightarrow{mn} . En effet, dans le triangle droit $\Delta C_2 m' n$, nous pouvons écrire que :

$$\overrightarrow{m'n} = e/2 \quad (2.116)$$

Et :

$$\overrightarrow{m'C_2} = y_n - D/2 \quad (2.117)$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{m'n}^2 + \overrightarrow{m'C_2}^2 = (D/2)^2 \quad (2.118)$$

Les relations (2.116), (2.117) et (2.118) mènent à écrire que :

$$(e/2)^2 + (y_n - D/2)^2 = (D/2)^2 \quad (2.119)$$

Ou bien :

$$(e/2)^2 = (D/2)^2 - (y_n - D/2)^2 \quad (2.120)$$

Or :

$$(D/2)^2 - (y_n - D/2)^2 = y_n(D - y_n) \quad (2.121)$$

Soit, en tenant compte que : $\eta = y_n/D$:

$$y_n(D - y_n) = \eta(1 - \eta)D^2 \quad (2.122)$$

Par suite, la relation (2.120) s'écrit :

$$(e/2)^2 = \eta(1 - \eta)D^2$$

Ainsi, la largeur du plan d'eau est :

$$e = 2D\sqrt{\eta(1-\eta)} \quad (2.123)$$

b) Périmètre mouillé

Pour: $1/2 \leq \eta \leq 1$, le périmètre mouillé P correspond à deux fois la longueur de l'arc \widehat{Mm} , à laquelle il faut ajouter la longueur $MKABL N$. Celle-ci s'obtient par la relation (2.107) pour: $\eta = \frac{1}{2}$

La longueur $2Mm$, est, quant à elle, égale à la différence des longueurs des arcs $\widehat{MC'N}$ et $\widehat{mC'n}$.

Désignons, alors, par P_0 la longueur $MKABL N$. Pour: $\eta = \frac{1}{2}$, la relation (2.107) donne :

$$P_0 = (2\eta + 0,8927)D = \left(2 \times \frac{1}{2} + 0,8927\right)D$$

Soit :

$$P_0 = 1,8927D \quad (2.124)$$

Désignons, en outre, par P_1 la longueur de l'arc $\widehat{MC'N}$. Celle-ci correspond au demi-périmètre du cercle (C_2) de centre C_2 et de diamètre D . Ainsi :

$$P_1 = \frac{1}{2}(\pi D) \quad (2.125)$$

Désignons, également, par P_2 la longueur de l'arc $\widehat{mC'n}$. Nous pouvons alors écrire que :

$$P_2 = \theta \times D \quad (2.126)$$

Or, dans le triangle $\Delta C_2 m'n$, nous pouvons écrire que :

$$\cos(\theta) = \frac{y_n - D/2}{D/2}$$

Soit, en tenant compte que : $\eta = y_n/D$:

$$\cos(\theta) = 2\eta - 1 \quad (2.127)$$

Notons également que le triangle $\Delta C_2 m'n$ permet d'écrire :

$$\sin(\theta) = \frac{\overline{m'n}}{D/2} = \frac{e/2}{D/2} = \frac{e}{D} \quad (2.128)$$

Tenant compte de la relation (2.123), la relation (2.128) devient :

$$\sin(\theta) = 2\sqrt{\eta(1-\eta)} \quad (2.129)$$

Soit :

$$\theta = \sin^{-1}\left[2\sqrt{\eta(1-\eta)}\right] \quad (2.130)$$

Tenant compte de la relation (2.127), la relation (2.126) s'écrit :

$$P_2 = D \cos^{-1}(2\eta - 1) \quad (2.131)$$

Le périmètre mouillé : $P = P_o + (P_1 - P_2)$ recherché est, en ayant recours aux relations (2.124), (2.125) et (2.131) :

$$P = 1,8927D + \frac{1}{2}\pi D - D \cos^{-1}(2\eta - 1)$$

Ou bien, plus simplement :

$$P = \left[1,8927 + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(2\eta - 1) \right] D \quad (2.132)$$

Définissons la fonction :

$$I(\eta) = 1,8927 + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(2\eta - 1) \quad (2.133)$$

La relation (2.132) s'écrit alors :

$$P = D \times I(\eta) \quad (2.134)$$

c) Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A , dans le cas où : $1/2 \leq \eta \leq 1$, correspond à l'espace $MKACBLNnC'mM$ de la figure (2.12). L'aire de la section mouillée A est la somme des aires $MKACBLNM$ et $MNnC'mM$.

Désignons par A_0 l'aire de la section $MKACBLNM$. Cette aire est donnée par la relation (2.112) pour $\eta = 1/2$, soit :

$$A_0 = (\eta - 6,706 \times 10^{-3}) D^2 = \left[\frac{1}{2} - 6,706 \times 10^{-3} \right] D^2$$

Le calcul mène à :

$$A_0 = 0,49329 D^2 \quad (2.135)$$

Désignons également par A_1 l'aire de la section mouillée du segment circulaire $mnC'm$. Ce segment circulaire appartient au cercle (C_2) de centre C_2 et de rayon $D/2$. Nous pouvons alors écrire que, pour l'angle θ exprimé en radian :

$$A_1 = \left(\frac{D}{2} \right)^2 [\theta - \sin(\theta)\cos(\theta)] \quad (2.136)$$

Soit :

$$A_1 = \frac{D^2}{4} [\theta - \sin(\theta)\cos(\theta)] \quad (2.137)$$

Tenant compte des relations (2.127) et (2.129), la relation (2.137) s'écrit :

$$A_1 = \frac{D^2}{4} [\cos^{-1}(2\eta - 1) - 2(2\eta - 1)\sqrt{\eta(1-\eta)}] \quad (2.138)$$

Désignons aussi par A_2 l'aire du demi-cercle $MNC'M$, de diamètre D . Il vient que :

$$A_2 = \frac{\pi}{8} D^2 \quad (2.139)$$

L'aire de la section mouillée : $A = A_0 + (A_2 - A_1)$ recherchée est, en ayant recours aux relations (2.135), (2.138) et (2.139) :

$$A_0 = 0,49329D^2 \quad (2.135)$$

$$A_1 = \frac{D^2}{4} \left[\cos^{-1}(2\eta - 1) - 2(2\eta - 1)\sqrt{\eta(1-\eta)} \right] \quad (2.138)$$

$$A_2 = \frac{\pi}{8} D^2 \quad (2.139)$$

$$A = \left[0,49329 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2\eta - 1) + \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \sqrt{\eta(1-\eta)} \right] D^2 \quad (2.140)$$

Définissons la fonction :

$$J(\eta) = 0,49329 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2\eta - 1) + \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \sqrt{\eta(1-\eta)} \quad (2.141)$$

La relation (2.140) s'écrit alors plus simplement :

$$A = D^2 \times J(\eta) \quad (2.142)$$

Pour l'état plein de la conduite en forme de voûte de type II considérée, correspondant au taux de remplissage $\eta = 1$, la relation (2.140) mène à écrire que :

$$A_p = 0,88599D^2 \quad (2.143)$$

d) Rayon hydraulique

Lorsque : $1/2 \leq \eta \leq 1$, le rayon hydraulique $R_h = A/P$ s'exprime, compte tenu des relations (2.134) et (2.142), par :

$$R_h = D \frac{J(\eta)}{I(\eta)} \quad (2.144)$$

III. Expression du coefficient de Chézy dans une conduite en forme de voûte de type II

On rappelle que le coefficient de résistance à l'écoulement de Chézy, en termes adimensionnels est déterminé par la relation (2.45) comme suit :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right) \quad (2.45)$$

Le nombre de Reynolds R figurant dans la relation (2.45) est, pour rappel, donné par la relation (2.41), et le rayon hydraulique R_h est donné par les relations (2.102), (2.115) et (2.144) selon la gamme de variation du taux de remplissage η .

Pour une conduite en forme de voûte de type II à l'état plein, les fonctions $I(\eta)$ et $J(\eta)$ figurant dans la relation (2.144) sont données par les relations (2.133) et (2.141) respectivement, et l'on peut aisément montrer que : $I(\eta = 1) \cong 3,4635$ et $J(\eta = 1) \cong 0,88599$. Par suite, le rayon hydraulique $R_{h,p}$ à l'état plein est, en vertu de la relation (2.144) :

$$R_{h,p} \cong 0,25581D \quad (2.145)$$

Par suite, le nombre de Reynolds R_p à l'état plein de la conduite est, selon la relation (2.41) :

$$R_p \cong 5,85515 \frac{\sqrt{giD^3}}{\nu} \quad (2.146)$$

En ayant recours aux relations (2.102), (2.115) et (2.144), nous pouvons écrire que pour :

$$i. \quad 0 \leq \eta \leq 1/8$$

La relation (2.41) mène à :

$$R = 32\sqrt{2} \left[\frac{F(\eta)}{E(\eta)} \right]^{3/2} \frac{\sqrt{giD^3}}{\nu} \quad (2.147)$$

Ou bien, en tenant compte de la relation (2.146) :

$$R = 7,72906 \left[\frac{F(\eta)}{E(\eta)} \right]^{3/2} R_p \quad (2.148)$$

La relation (2.45) mène, alors, à :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[F(\eta)/E(\eta)]} + \frac{1,29899}{R_p [F(\eta)/E(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.149)$$

$$ii. \quad 1/8 \leq \eta \leq 1/2$$

La relation (2.41) mène à écrire que :

$$R = 32\sqrt{2} \left[\frac{H(\eta)}{G(\eta)} \right]^{3/2} \frac{\sqrt{giD^3}}{\nu} \quad (2.150)$$

Ou bien, en vertu de la relation (2.146) :

$$R = 7,72906 \left[\frac{H(\eta)}{G(\eta)} \right]^{3/2} R_p \quad (2.151)$$

La relation (2.45) permet d'écrire que :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[H(\eta)/G(\eta)]} + \frac{1,29899}{R_p [H(\eta)/G(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.152)$$

$$iii. \quad 1/2 \leq \eta \leq 1$$

La relation (2.41) mène à :

$$R = 32\sqrt{2} \left[\frac{J(\eta)}{I(\eta)} \right]^{3/2} \frac{\sqrt{giD^3}}{\nu} \quad (2.153)$$

Ou bien, tenant compte de la relation (2.146) :

$$R = 7,72906 \left[\frac{J(\eta)}{I(\eta)} \right]^{3/2} R_p \quad (2.154)$$

La relation (2.45) mène, par conséquent, à :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[J(\eta)/I(\eta)]} + \frac{1,29899}{R_p [J(\eta)/I(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.155)$$

III.1. Variation du coefficient de Chézy

Pour représenter la variation du coefficient sans dimension C/\sqrt{g} en fonction du taux de remplissage η selon les relations (2.149), (2.152) et (2.155), on fixe une valeur de la rugosité relative ε/D et l'on fait varier le nombre de *Reynolds* à l'état plein R_p . Les tableaux (2.11) à (2.15) ont été établis selon cette procédure.

Tableau 2.11 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/D=0$

$0 \leq \eta \leq 1/8$							
$\varepsilon/D=0$				$R_p=10^4$	$R_p=10^5$	$R_p=10^6$	$R_p=10^7$
η	$E(\eta)$	$F(\eta)$	$F(\eta)/E(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,010	0,85068	0,00816	0,00959	4,86019	10,51705	16,17390	21,83075
0,050	0,98182	0,04449	0,04531	10,58240	16,23925	21,89611	27,55296
0,075	1,03982	0,06864	0,06601	11,96865	17,62551	23,28236	28,93922
0,100	1,09236	0,09334	0,08544	12,91978	18,57663	24,23349	29,89034
0,120	1,13270	0,11329	0,10002	13,50027	19,15712	24,81398	30,47083
0,125	1,14270	0,11829	0,10352	13,62701	19,28386	24,94072	30,59757
$1/8 \leq \eta \leq 1/2$							
η	$G(\eta)$	$H(\eta)$	$H(\eta)/G(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,125	1,14270	0,11829	0,10352	13,62701	19,28386	24,94072	30,59757
0,250	1,39270	0,24329	0,17469	15,55524	21,21209	26,86894	32,52580
0,300	1,49270	0,29329	0,19649	15,98847	21,64532	27,30218	32,95903
0,350	1,59270	0,34329	0,21554	16,32959	21,98644	27,64330	33,30015
0,400	1,69270	0,39329	0,23235	16,60625	22,26311	27,91996	33,57682
0,450	1,79270	0,44329	0,24728	16,83576	22,49261	28,14946	33,80632
0,500	1,89270	0,49329	0,26063	17,02956	22,68641	28,34327	34,00012
$1/2 \leq \eta \leq 1$							
η	$I(\eta)$	$J(\eta)$	$J(\eta)/I(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,500	1,89270	0,49329	0,26063	17,02956	22,68641	28,34327	34,00012
0,650	2,19739	0,64101	0,29172	17,44478	23,10164	28,75849	34,41535
0,750	2,41630	0,73245	0,30313	17,58620	23,24306	28,89991	34,55677
0,812	2,56655	0,78366	0,30534	17,61295	23,26980	28,92666	34,58351
0,900	2,81999	0,84512	0,29969	17,54415	23,20100	28,85785	34,51471
1,000	3,46350	0,88599	0,25581	16,96076	22,61761	28,27446	33,93132

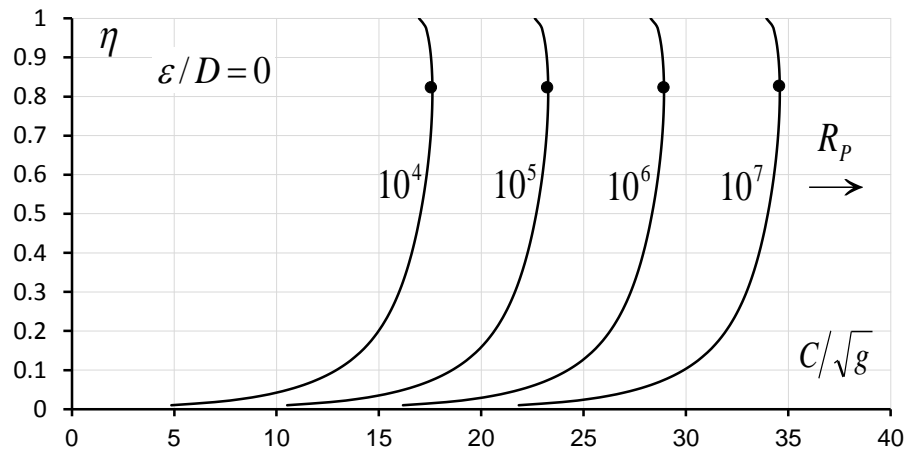


Figure 2.13 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 0$ (Ecoulement lisse).

(●) Valeurs maximales $C_{max.}/\sqrt{g}$ obtenues pour $\eta \cong 0,812$

Tableau 2.12 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 10^{-5}$

$0 \leq \eta \leq 1/8$							
$\varepsilon/D = 10^{-5}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$E(\eta)$	$F(\eta)$	$F(\eta)/E(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,010	0,85068	0,00816	0,00959	4,85894	10,50456	16,05184	20,81929
0,050	0,98182	0,04449	0,04531	10,57968	16,21220	21,63812	25,72176
0,075	1,03982	0,06864	0,06601	11,96537	17,59290	22,97421	26,85443
0,100	1,09236	0,09334	0,08544	12,91604	18,53956	23,88576	27,61924
0,120	1,13270	0,11329	0,10002	13,49623	19,11704	24,43983	28,08119
0,125	1,14270	0,11829	0,10352	13,62290	19,24309	24,56055	28,18157
$1/8 \leq \eta \leq 1/2$							
η	$G(\eta)$	$H(\eta)$	$H(\eta)/G(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,125	1,14270	0,11829	0,10352	13,62290	19,24309	24,56055	28,18157
0,250	1,39270	0,24329	0,17469	15,54990	21,15925	26,38565	29,68825
0,300	1,49270	0,29329	0,19649	15,98281	21,58932	26,79247	30,02166
0,350	1,59270	0,34329	0,21554	16,32367	21,92782	27,11188	30,28292
0,400	1,69270	0,39329	0,23235	16,60010	22,20227	27,37033	30,49401
0,450	1,79270	0,44329	0,24728	16,82941	22,42987	27,58430	30,66858
0,500	1,89270	0,49329	0,26063	17,02304	22,62202	27,76469	30,81563
$1/2 \leq \eta \leq 1$							
η	$I(\eta)$	$J(\eta)$	$J(\eta)/I(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,500	1,89270	0,49329	0,26063	17,02304	22,62202	27,76469	30,81563
0,650	2,19739	0,64101	0,29172	17,43789	23,03357	28,15022	31,12954
0,750	2,41630	0,73245	0,30313	17,57918	23,17369	28,28123	31,23611
0,812	2,56655	0,78366	0,30534	17,60590	23,20019	28,30598	31,25624
0,900	2,81999	0,84512	0,29969	17,53716	23,13202	28,24228	31,20443
1,000	3,46350	0,88599	0,25581	16,95430	22,55381	27,70068	30,76346

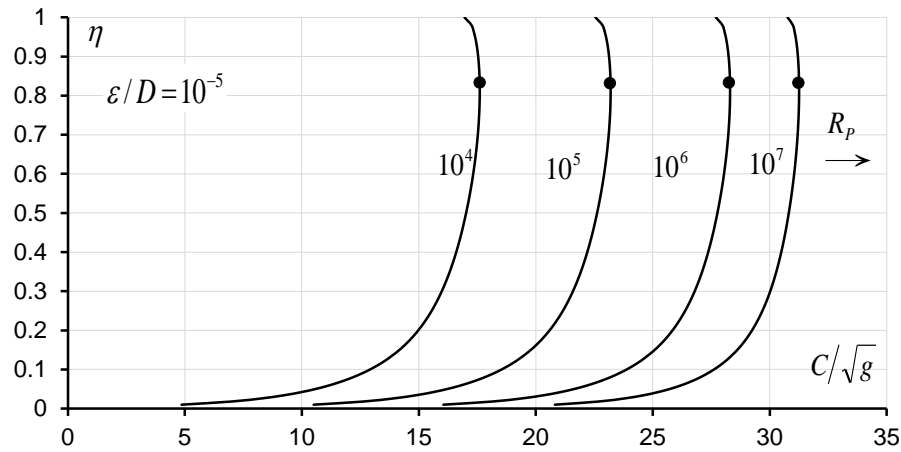


Figure 2.14 : Variation de C / \sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon / D = 10^{-5}$.

Tableau 2.13 : Valeurs de C / \sqrt{g} pour $\varepsilon / D = 10^{-4}$

$0 \leq \eta \leq 1/8$							
$\varepsilon / D = 10^{-4}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$E(\eta)$	$F(\eta)$	$F(\eta)/E(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,010	0,85068	0,00816	0,00959	4,84771	10,39498	15,16243	17,39069
0,050	0,98182	0,04449	0,04531	10,55535	15,98127	20,06491	21,43342
0,075	1,03982	0,06864	0,06601	11,93604	17,31736	21,19758	22,39273
0,100	1,09236	0,09334	0,08544	12,88271	18,22891	21,96238	23,04761
0,120	1,13270	0,11329	0,10002	13,46018	18,78297	22,42434	23,44611
0,125	1,14270	0,11829	0,10352	13,58623	18,90370	22,52471	23,53301
$1/8 \leq \eta \leq 1/2$							
η	$G(\eta)$	$H(\eta)$	$H(\eta)/G(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,125	1,14270	0,11829	0,10352	13,58623	18,90370	22,52471	23,53301
0,250	1,39270	0,24329	0,17469	15,50240	20,72880	24,03139	24,85059
0,300	1,49270	0,29329	0,19649	15,93247	21,13561	24,36480	25,14558
0,350	1,59270	0,34329	0,21554	16,27097	21,45502	24,62607	25,37762
0,400	1,69270	0,39329	0,23235	16,54542	21,71348	24,83716	25,56567
0,450	1,79270	0,44329	0,24728	16,77302	21,92745	25,01173	25,72156
0,500	1,89270	0,49329	0,26063	16,96517	22,10784	25,15877	25,85313
$1/2 \leq \eta \leq 1$							
η	$I(\eta)$	$J(\eta)$	$J(\eta)/I(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,500	1,89270	0,49329	0,26063	16,96517	22,10784	25,15877	25,85313
0,650	2,19739	0,64101	0,29172	17,37672	22,49337	25,47268	26,13484
0,750	2,41630	0,73245	0,30313	17,51684	22,62437	25,57925	26,23073
0,812	2,56655	0,78366	0,30534	17,54333	22,64913	25,59938	26,24885
0,900	2,81999	0,84512	0,29969	17,47517	22,58543	25,54758	26,20221
1,000	3,46350	0,88599	0,25581	16,89696	22,04383	25,10661	25,80643

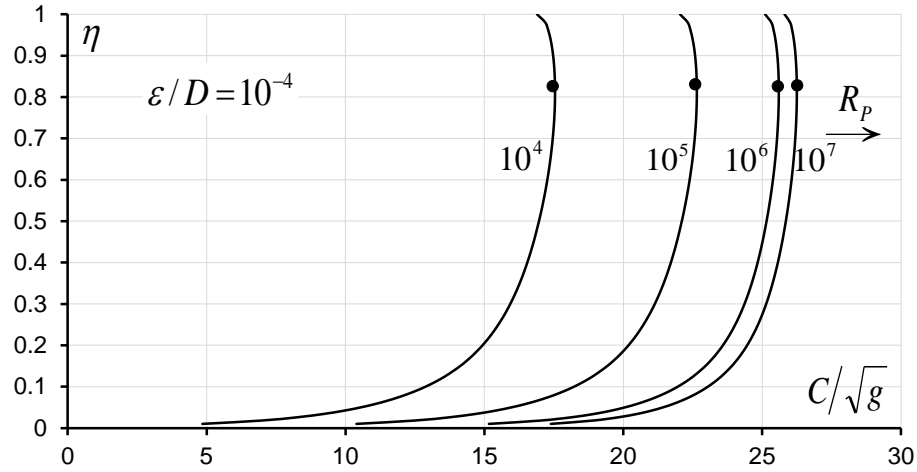


Figure 2.15 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-4}$

Tableau 2.14 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 10^{-3}$

$0 \leq \eta \leq 1/8$							
$\varepsilon/D = 10^{-3}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$E(\eta)$	$F(\eta)$	$F(\eta)/E(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,010	0,85068	0,00816	0,00959	4,73813	9,50558	11,73383	12,12642
0,050	0,98182	0,04449	0,04531	10,32441	14,40805	15,77656	15,96690
0,075	1,03982	0,06864	0,06601	11,66050	15,54072	16,73588	16,89484
0,100	1,09236	0,09334	0,08544	12,57205	16,30553	17,39075	17,53114
0,120	1,13270	0,11329	0,10002	13,12612	16,76748	17,78926	17,91935
0,125	1,14270	0,11829	0,10352	13,24685	16,86786	17,87615	18,00409
$1/8 \leq \eta \leq 1/2$							
η	$G(\eta)$	$H(\eta)$	$H(\eta)/G(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,125	1,14270	0,11829	0,10352	13,24685	16,86786	17,87615	18,00409
0,250	1,39270	0,24329	0,17469	15,07194	18,37454	19,19373	19,29294
0,300	1,49270	0,29329	0,19649	15,47876	18,70795	19,48873	19,58240
0,350	1,59270	0,34329	0,21554	15,79817	18,96921	19,72077	19,81030
0,400	1,69270	0,39329	0,23235	16,05662	19,18030	19,90881	19,99511
0,450	1,79270	0,44329	0,24728	16,27059	19,35487	20,06470	20,14841
0,500	1,89270	0,49329	0,26063	16,45098	19,50192	20,19628	20,27786
$1/2 \leq \eta \leq 1$							
η	$I(\eta)$	$J(\eta)$	$J(\eta)/I(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,500	1,89270	0,49329	0,26063	16,45098	19,50192	20,19628	20,27786
0,650	2,19739	0,64101	0,29172	16,83651	19,81583	20,47799	20,55518
0,750	2,41630	0,73245	0,30313	16,96752	19,92240	20,57387	20,64963
0,812	2,56655	0,78366	0,30534	16,99227	19,94253	20,59200	20,66749
0,900	2,81999	0,84512	0,29969	16,92857	19,89072	20,54536	20,62154
1,000	3,46350	0,88599	0,25581	16,38697	19,44975	20,14957	20,23191

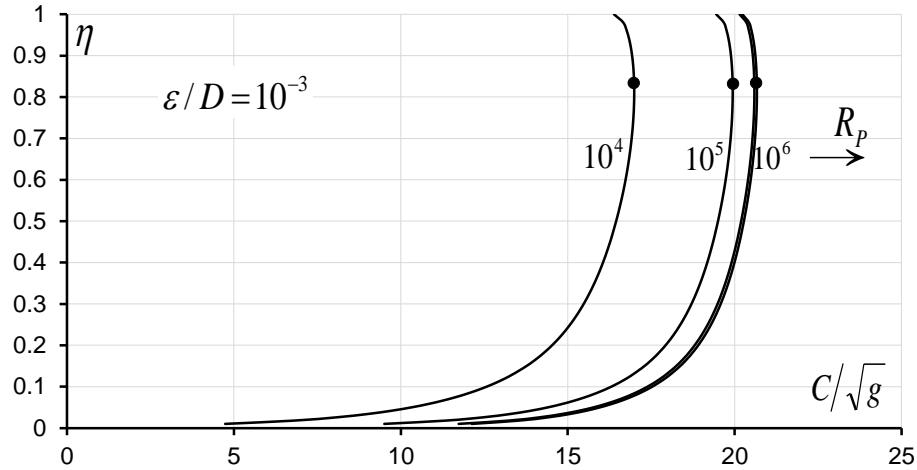


Figure 2.16 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-3}$

Tableau 2.15 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 10^{-2}$

$0 \leq \eta \leq 1/8$							
$\varepsilon/D = 10^{-2}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$E(\eta)$	$F(\eta)$	$F(\eta)/E(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,010	0,85068	0,00816	0,00959	3,84873	6,07698	6,46957	6,51251
0,050	0,98182	0,04449	0,04531	8,75120	10,11971	10,31005	10,32992
0,075	1,03982	0,06864	0,06601	9,88387	11,07902	11,23799	11,25447
0,100	1,09236	0,09334	0,08544	10,64867	11,73390	11,87428	11,88877
0,120	1,13270	0,11329	0,10002	11,11063	12,13240	12,26249	12,27589
0,125	1,14270	0,11829	0,10352	11,21101	12,21930	12,34724	12,36041
$1/8 \leq \eta \leq 1/2$							
η	$G(\eta)$	$H(\eta)$	$H(\eta)/G(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,125	1,14270	0,11829	0,10352	11,21101	12,21930	12,34724	12,36041
0,250	1,39270	0,24329	0,17469	12,71769	13,53688	13,63609	13,64623
0,300	1,49270	0,29329	0,19649	13,05110	13,83188	13,92555	13,93512
0,350	1,59270	0,34329	0,21554	13,31236	14,06391	14,15344	14,16258
0,400	1,69270	0,39329	0,23235	13,52345	14,25196	14,33826	14,34706
0,450	1,79270	0,44329	0,24728	13,69802	14,40785	14,49156	14,50009
0,500	1,89270	0,49329	0,26063	13,84506	14,53942	14,62101	14,62932
$1/2 \leq \eta \leq 1$							
η	$I(\eta)$	$J(\eta)$	$J(\eta)/I(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,500	1,89270	0,49329	0,26063	13,84506	14,53942	14,62101	14,62932
0,650	2,19739	0,64101	0,29172	14,15898	14,82113	14,89833	14,90618
0,750	2,41630	0,73245	0,30313	14,26554	14,91702	14,99278	15,00048
0,812	2,56655	0,78366	0,30534	14,28568	14,93515	15,01064	15,01831
0,900	2,81999	0,84512	0,29969	14,23387	14,88850	14,96469	14,97244
1,000	3,46350	0,88599	0,25581	13,79290	14,49272	14,57505	14,58344

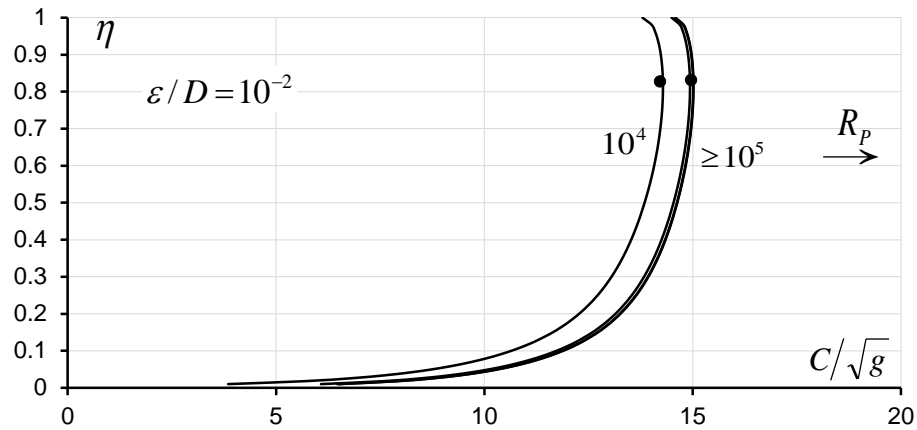


Figure 2.17 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-2}$

D'après les figures (2.13), (2.14), (2.15), (2.16) et (2.17), nous observons clairement que pour une même valeur du nombre de Reynolds R_p à l'état plein, et quelque soit la valeur de la rugosité relative ε/D , le coefficient C/\sqrt{g} augmente au fur et à mesure que le taux de remplissage η augmente jusqu'à $\eta = 0,812$, puis il diminue au-delà de cette valeur. Ceci signifie que le coefficient C/\sqrt{g} augmente lorsque la profondeur y_n de l'écoulement augmente jusqu'à $\eta = 0,812$, puis il diminue. Nous pouvons également observer que pour un taux de remplissage η fixé, le coefficient C/\sqrt{g} augmente avec l'augmentation du nombre de Reynolds R_p à l'état plein. Pour la plus forte rugosité relative considérée, les courbes de variation de C/\sqrt{g} sont extrêmement proches les unes des autres et se confondent au-delà du nombre de Reynolds $R_p = 10^5$. Ceci correspond au régime turbulent rugueux pour lequel C/\sqrt{g} est indépendant du nombre de Reynolds R_p et donc de la viscosité cinématique du liquide en écoulement. Cela peut se justifier par le fait que plus la rugosité relative ε/D augmente et plus le régime d'écoulement turbulent rugueux est atteint rapidement. Une conclusion peut être tirée au regard des tableaux 2.11 à 2.15 et même des figures 2.13 à 2.17, c'est que plus la rugosité relative ε/D augmente et plus le coefficient C/\sqrt{g} diminue, quelle que soit la valeur du nombre de Reynolds R_p à l'état plein. Le coefficient de résistance à l'écoulement maximal C_{\max} de Chézy est régi par la relation (2.155), pour cela on introduit la valeur $\eta \cong 0,812$ dans la relation (2.155). Les fonctions $I(\eta)$ et $J(\eta)$ sont régies par les relations (2.133) et (2.141) respectivement :

- $I(\eta = 0,812) = 1,8927 + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(2 \times 0,812 - 1) = 2,56655$
- $J(\eta = 0,812) = 0,49329 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2 \times 0,812 - 1) + \left(0,812 - \frac{1}{2}\right) \sqrt{0,812 \times (1 - 0,812)} = 0,78366$

Ainsi, selon la relation (2.155), le coefficient de résistance à l'écoulement C_{\max} de Chézy est :

$$C_{\max} = -4\sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[0,78366/2,56655]} + \frac{1,29899}{R_p[0,78366/2,56655]^{3/2}} \right)$$

Soit :

$$C_{\max} = -4\sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{4,51896} + \frac{7,69912}{R_p} \right) \quad (2.156)$$

Pour l'état plein de la conduite, correspondant à $\eta = 1$, la relation (2.155) permet d'exprimer le coefficient de résistance à l'écoulement C_p de Chézy. Pour $\eta = 1$, les fonctions $I(\eta)$ et $J(\eta)$ sont régies par les relations (2.133) et (2.141) respectivement, elles prennent les valeurs :

- $I(\eta = 1) = 1,8927 + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(2\eta - 1) = 1,8927 + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(2 \times 1 - 1) = 3,46350$
- $J(\eta = 1) = 0,49329 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2\eta - 1) + \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \sqrt{\eta(1-\eta)}$
 $= 0,49329 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2 \times 1 - 1) + \left(1 - \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 \times (1-1)} = 0,88599$

Ainsi, selon la relation (2.155), le coefficient de résistance à l'écoulement C_p de Chézy à l'état plein est donné par la relation :

$$C_p = -4\sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[0,88599/3,4635]} + \frac{1,29899}{R_p[0,88599/3,4635]^{3/2}} \right)$$

Soit :

$$C_p = -4\sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,78597} + \frac{10,04}{R_p} \right) \quad (2.157)$$

III.2. Conductivité relative

Dans la relation (2.55) de Chézy que nous avons montré dans le chapitre I de cette deuxième partie, l'aire de la section mouillée A est déterminée par les relations (2.101), (2.114), et (2.142) ainsi que le rayon hydraulique R_h s'exprime par les relations (2.102), (2.115) et (2.144), selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η . C'est ainsi que pour :

$$i. \quad 0 \leq \eta \leq 1/8$$

L'aire de la section mouillée A est donnée par la relation par la relation (2.101), tandis que le rayon hydraulique R_h s'exprime par la relation (2.102). Les fonctions $E(\eta)$ et $F(\eta)$ sont définies par les relations (2.94) et (2.100) respectivement.

En tenant compte de toutes ces relations, la relation (2.55) devient :

$$Q = CD^{5/2} \frac{[F(\eta)]^{3/2}}{[E(\eta)]^{1/2}} \sqrt{i} \quad (2.158)$$

En faisant appel à la relation (2.57) de la conductivité relative cité dans le chapitre précédent, la relation (2.158) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$Q^* = \frac{[F(\eta)]^{3/2}}{[E(\eta)]^{1/2}} \quad (2.159)$$

ii. $1/8 \leq \eta \leq 1/2$

Dans cet intervalle du taux de remplissage η , l'aire de la section mouillée A ainsi que le rayon hydraulique R_h sont respectivement donnés par les relations (2.114) et (2.115). Dans ces relations, les fonctions $G(\eta)$ et $H(\eta)$ sont définies par les relations (2.108) et (2.113) respectivement. En ayant recours à ces relations, la relation (2.55) devient :

$$Q = CD^{5/2} \frac{[H(\eta)]^{3/2}}{[G(\eta)]^{1/2}} \sqrt{i} \quad (2.160)$$

La relation (2.160) s'écrit, en termes adimensionnels, en tenant compte de relations (2.57):

$$Q^* = \frac{[H(\eta)]^{3/2}}{[G(\eta)]^{1/2}} \quad (2.161)$$

iii. $1/2 \leq \eta \leq 1$

Dans cet intervalle de η , l'aire de la section mouillée A et le rayon hydraulique R_h sont donnés par les relations (2.142) et (2.144) respectivement. Dans ces relations, la fonction $I(\eta)$ est définie par la relation (2.133), tandis que la fonction $J(\eta)$ est donnée par la relation (2.141). Ainsi, en tenant compte de ces relations, la relation (2.55) devient :

$$Q = CD^{5/2} \frac{[J(\eta)]^{3/2}}{[I(\eta)]^{1/2}} \sqrt{i} \quad (2.162)$$

En ayant recours à la relation (2.57), la relation (2.162) s'écrit, en termes adimensionnels :

$$Q^* = \frac{[J(\eta)]^{3/2}}{[I(\eta)]^{1/2}} \quad (2.163)$$

III.3. Calcul du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy par la méthode MMR

Pour déterminer le coefficient de résistance C de Chézy, caractérisant l'écoulement dans la conduite en forme de voûte de type II considérée, admettons les conditions suivantes :

- i. $\bar{D} \neq D$
- ii. $\bar{Q} = Q$
- iii. $\bar{i} = i$

$$iv. \quad \bar{\eta} = \eta$$

$$v. \quad \bar{v} = v$$

En tenant compte des conditions (ii) et (iii), la conductivité relative dans le modèle rugueux \bar{Q}^* est régie par des relations similaires aux relations (2.159), (2.161) et (2.163) selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η . Ainsi, pour :

$$i. \quad 0 \leq \eta \leq 1/8$$

$$\bar{Q}^* = \frac{[F(\eta)]^{3/2}}{[E(\eta)]^{1/2}} \quad (2.164)$$

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128 g \bar{D}^5 i}} \quad (2.62)$$

La relation (2.62) du chapitre précédent et la relation (2.164) permettent de déduire la relation du diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence. Soit :

$$\bar{D} = \frac{[E(\eta)]^{0.2}}{2,639[F(\eta)]^{0.6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0.4} \quad (2.165)$$

Pour : $0 \leq \eta \leq 1/8$, le nombre de Reynolds \bar{R} , caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, s'exprime par une relation similaire à la relation (2.148), soit :

$$\bar{R} = 7,72906 \left[\frac{F(\eta)}{E(\eta)} \right]^{3/2} \bar{R}_p \quad (2.166)$$

$$ii. \quad 1/8 \leq \eta \leq 1/2$$

$$\bar{Q}^* = \frac{[H(\eta)]^{3/2}}{[G(\eta)]^{1/2}} \quad (2.167)$$

Les relations (2.62) et (2.167) permettent d'écrire que :

$$\bar{D} = \frac{[G(\eta)]^{0.2}}{2,639[H(\eta)]^{0.6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0.4} \quad (2.168)$$

Dans la gamme : $1/8 \leq \eta \leq 1/2$, le nombre de Reynolds \bar{R} , caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, s'exprime par une relation similaire à la relation (2.151), soit :

$$\bar{R} = 7,72906 \left[\frac{H(\eta)}{G(\eta)} \right]^{3/2} \bar{R}_p \quad (2.169)$$

$$iii. \quad 1/2 \leq \eta \leq 1$$

$$\bar{Q}^* = \frac{[J(\eta)]^{3/2}}{[I(\eta)]^{1/2}} \quad (2.170)$$

Nous pouvons déduire des relations (2.62) et (2.170) que :

$$\bar{D} = \frac{[I(\eta)]^{0,2}}{2,639[J(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} \quad (2.171)$$

Dans la gamme : $1/2 \leq \eta \leq 1$, le nombre de Reynolds \bar{R} , caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, s'exprime par une relation similaire à la relation (2.154), soit :

$$\bar{R} = 7,72906 \left[\frac{J(\eta)}{I(\eta)} \right]^{3/2} \bar{R}_p \quad (2.172)$$

Ainsi, avec les valeurs connues des paramètres Q , η et i , le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence peut être explicitement évalué par l'une des relations (2.165), (2.168) ou (2.171). Les valeurs des paramètres i , η , \bar{D} et ν permettent d'évaluer le nombre de Reynolds \bar{R} de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, par application de l'une des relations (2.166), (2.169) et (2.172). Dans ces relations, le nombre de Reynolds \bar{R}_p à l'état plein s'exprime par une relation similaire à la relation (2.146), soit :

$$\bar{R}_p \cong 5,85515 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} \quad (2.173)$$

En outre, le facteur de correction des dimensions linéaires s'exprime par la relation (1.72) de la première partie. Dans cette relation, le rayon hydraulique \bar{R}_h est défini par des relations similaires aux relations (2.102), (2.115) et (2.144) selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η . De même, le nombre de Reynolds \bar{R} est donné par l'une des relations (2.166), (2.169) et (2.172). Ainsi :

i. $0 \leq \eta \leq 1/8$

$$\bar{R}_h = \bar{D} \frac{F(\eta)}{E(\eta)} \quad (2.174)$$

La relation (1.72) s'écrit, en tenant compte des relations (2.166) et (2.174) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[F(\eta)/E(\eta)]} + \frac{1,09975}{[F(\eta)/E(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.175)$$

ii. $1/8 \leq \eta \leq 1/2$

$$\bar{R}_h = \bar{D} \frac{H(\eta)}{G(\eta)} \quad (2.176)$$

Tenant compte des relations (2.169) et (2.176), la relation (1.72) s'écrit :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[H(\eta)/G(\eta)]} + \frac{1,09975}{[H(\eta)/G(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.177)$$

iii. $1/2 \leq \eta \leq 1$

$$\overline{R}_h = \overline{D} \frac{J(\eta)}{I(\eta)} \quad (2.178)$$

La relation (1.72) devient alors, en tenant compte des relations (2.172) et (2.178) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}}{19[J(\eta)/I(\eta)]} + \frac{1,09975}{[J(\eta)/I(\eta)]^{3/2} \overline{R}_p} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.179)$$

Les étapes suivantes indiquent la procédure de calcul du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy. Nous rappelons que les paramètres connus du problème sont Q , η , i , ε et ν .

- a) Avec les valeurs connus du débit volume Q , de la pente géométrique i et du taux de remplissage η , l'une des relations (2.165), (2.168) ou (2.171) permet d'évaluer le diamètre \overline{D} du modèle rugueux de référence.
- b) Les paramètres connus de \overline{D} , i et ν sont introduits dans la relation (2.173) pour le calcul du nombre de Reynolds à l'état plein \overline{R}_p .
- c) Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ peut alors être évalué par l'une des relations (2.175), (2.177) ou (2.179).
- d) Finalement, le coefficient C de Chézy est déduit de la relation (1.96) de la première partie :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \quad (1.96)$$

III.4. Exemple d'application

On souhaite calculer la valeur du coefficient C de Chézy pour le cas d'une conduite en forme de voûte de type II représentée par la figure (2.12), connaissant les données suivantes :

$$Q = 3,3 \text{ m}^3/\text{s}, \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, i = 5 \cdot 10^{-4}, \varepsilon = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}, \eta = 0,65.$$

Solution

i. Puisque : $1/2 \leq \eta = 0,65 \leq 1$, alors le diamètre \overline{D} du modèle rugueux de référence est donné par la relation (2.171). Les fonctions $I(\eta)$ et $J(\eta)$ sont données par les relations (2.133) et (2.141) respectivement et prennent pour valeurs :

- $I(\eta = 0,65) = 1,8927 + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(2\eta - 1) = 1,8927 + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(2 \times 0,65 - 1) = 2,19739265$
- $J(\eta = 0,65) = 0,49329 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2\eta - 1) + \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \sqrt{\eta(1-\eta)}$
 $= 0,49329 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2 \times 0,65 - 1) + \left(0,65 - \frac{1}{2} \right) \sqrt{0,65 \times (1 - 0,65)} = 0,6410086$

Selon la relation (2.171), le diamètre \bar{D} est tel que :

$$\bar{D} = \frac{[I(\eta)]^{0,2}}{2,639[J(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} = \frac{2,19739265^{0,2}}{2,639 \times 0,6410086^{0,6}} \left(\frac{3,3}{\sqrt{9,81 \times 5 \times 10^{-4}}} \right)^{0,4} = 2,70459102 \text{ m}$$

ii. Le nombre de Reynolds \bar{R}_p à l'état plein est, selon la relation (2.173) :

$$\bar{R}_p \cong 5,85515 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 5,85515 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \times 10^{-4} \times 2,70459102^3}}{10^{-6}} = 1823937,42$$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est par suite, selon la relation (2.179) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[J(\eta)/I(\eta)]} + \frac{1,09975}{[J(\eta)/I(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5}$$

Soit :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{0,0005 / 2,70459102}{19 \times [0,6410086 / 2,19739265]} + \frac{1,09975}{[0,6410086 / 2,19739265]^{3/2} \times 1823937,42} \right) \right]^{-2/5} = 0,74436374$$

Le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy est, selon la relation (1.96) :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8\sqrt{2 \times 9,81}}{0,74436374^{5/2}} = 74,1270069 \text{ m}^{1/2} / \text{s}$$

iv. Le diamètre D aurait pu être également évalué par la relation fondamentale de la MMR, applicable à toute forme de profil géométrique de conduites et canaux :

$$D = \psi \bar{D} = 0,74436374 \times 2,70459102 = 2,01319949 \cong 2 \text{ m}$$

v. Vérifions la valeur ainsi calculée de C par celle issue de la relation (2.155). Pour cela, évaluons d'abord le nombre de Reynolds R_p à l'état plein, en ayant recours à la relation (2.146)

$$R_p \cong 5,85515 \frac{\sqrt{giD^3}}{\nu} = 5,85515 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \times 10^{-4} \times 2,01319949^3}}{10^{-6}} = 1171352,88$$

Ainsi, selon la relation (2.155), le coefficient C est :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{14,8[J(\eta)/I(\eta)]} + \frac{1,29899}{R_p[J(\eta)/I(\eta)]^{3/2}} \right)$$

Ou bien :

$$C = -4\sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{14,8[J(\eta)/I(\eta)]} + \frac{1,29899}{R_p[J(\eta)/I(\eta)]^{3/2}} \right)$$

Alors:

$$C = -4\sqrt{2 \times 9,81} \log \left(\frac{0,0005 / 2,01319949}{14,8[0,6410086 / 2,19739265]} + \frac{1,29899}{1171352,88 \times [0,6410086 / 2,19739265]^{3/2}} \right) \\ = 74,2376157 \text{ m}^{0,5} / \text{s}$$

Ainsi, nous pouvons constater que l'écart relatif entre les valeurs de C calculées selon la

méthode que nous avons présentée et selon la méthode MMR est de :

$$\frac{\Delta C}{C} = 100 \times \frac{|74,1270069 - 74,2376157|}{74,1270069} = 0,15\% .$$

Nous pouvons alors conclure, tenant compte du faible écart relatif obtenu, que les deux méthodes aboutissent pratiquement au même résultat.

IV. Expression du coefficient de Manning dans une conduite en forme de voûte de type II

Rappelons que la relation générale du coefficient n de Manning, applicable à tous les profils géométriques, est définie par la relation (2.75) mentionnée dans le chapitre précédent. Soit :

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} R_h^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.75)$$

Le nombre de Reynolds R est, pour rappel, donné par les relations (2.148), (2.151) et (2.154), tandis que le rayon hydraulique R_h est donné par les relations (2.102), (2.115) et (2.144). La relation (2.75) montre bien que le coefficient n de Manning est fonction de la rugosité absolue ε , du nombre de Reynolds R et du rayon hydraulique R_h . Cette dépendance de n vis-à-vis de R_h traduit bien le fait que n varie en fonction du taux de remplissage η .

En tenant compte de toutes ces relations, nous pouvons écrire que pour :

$$i. \quad 0 \leq \eta \leq 1/8$$

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} D^{-1/6} \left[\frac{F(\eta)}{E(\eta)} \right]^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[F(\eta)/E(\eta)]} + \frac{1,29899}{[F(\eta)/E(\eta)]^{3/2} R_p}\right) \quad (2.180)$$

En introduisant le paramètre adimensionnel :

$$N = \frac{D^{1/6}}{n\sqrt{g}} \quad (2.181)$$

La relation (2.180) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$N = -4\sqrt{2} \left[\frac{F(\eta)}{E(\eta)} \right]^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[F(\eta)/E(\eta)]} + \frac{1,29899}{[F(\eta)/E(\eta)]^{3/2} R_p}\right) \quad (2.182)$$

$$ii. \quad 1/8 \leq \eta \leq 1/2$$

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} D^{-1/6} \left[\frac{H(\eta)}{G(\eta)} \right]^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[H(\eta)/G(\eta)]} + \frac{1,29899}{[H(\eta)/G(\eta)]^{3/2} R_p}\right) \quad (2.183)$$

Ou bien, selon la relation (2.181) :

$$N = -4\sqrt{2} \left[\frac{H(\eta)}{G(\eta)} \right]^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[H(\eta)/G(\eta)]} + \frac{1,29899}{[H(\eta)/G(\eta)]^{3/2} R_p}\right) \quad (2.184)$$

iii. $1/2 \leq \eta \leq 1$

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g}D^{-1/6} \left[\frac{J(\eta)}{I(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[J(\eta)/I(\eta)]} + \frac{1,29899}{[J(\eta)/I(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.185)$$

Ou bien, en terme adimensionnel :

$$N = -4\sqrt{2} \left[\frac{J(\eta)}{I(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[J(\eta)/I(\eta)]} + \frac{1,29899}{[J(\eta)/I(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.186)$$

Lorsque les paramètres η , ε , D , i et ν sont connus, l'une des relations (2.180), (2.183) ou (2.185) permet d'évaluer le coefficient n de Manning. Au regard des ces relations, nous pouvons écrire la relation fonctionnelle suivante : $N = f(\varepsilon/D ; \eta ; R_p)$.

IV.1. Variation du coefficient de Manning

Les tableaux suivants montrent la valeur du paramètre adimensionnel N , pour des valeurs fixées de la rugosité relative ε/D et en faisant varier le nombre de Reynolds à l'état plein R_p . En-dessous de chaque tableau, nous avons présenté la variation de N en fonction du taux de remplissage η (Figures 2.18 à 2.22), et chacune des courbes obtenues est discutée.

Tableau 2.16 : Valeurs de N pour : $\varepsilon/D = 0$

$0 \leq \eta \leq 1/8$							
$\varepsilon/D = 0$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$E(\eta)$	$F(\eta)$	$F(\eta)/E(\eta)$	N	N	N	N
0,010	0,85068	0,00816	0,00959	10,54415	22,81666	35,08916	47,36167
0,050	0,98182	0,04449	0,04531	17,72342	27,19753	36,67165	46,14576
0,075	1,03982	0,06864	0,06601	18,82696	27,72532	36,62367	45,52203
0,100	1,09236	0,09334	0,08544	19,46741	27,99110	36,51480	45,03850
0,120	1,13270	0,11329	0,10002	19,81498	28,11780	36,42063	44,72346
0,125	1,14270	0,11829	0,10352	19,88668	28,14205	36,39742	44,65280
$1/8 \leq \eta \leq 1/2$							
η	$G(\eta)$	$H(\eta)$	$H(\eta)/G(\eta)$	N	N	N	N
0,125	1,14270	0,11829	0,10352	19,88668	28,14205	36,39742	44,65280
0,250	1,39270	0,24329	0,17469	20,80484	28,37078	35,93671	43,50265
0,300	1,49270	0,29329	0,19649	20,96936	28,38849	35,80763	43,22676
0,350	1,59270	0,34329	0,21554	21,08887	28,39442	35,69997	43,00552
0,400	1,69270	0,39329	0,23235	21,17949	28,39420	35,60891	42,82361
0,450	1,79270	0,44329	0,24728	21,25047	28,39068	35,53089	42,67110
0,500	1,89270	0,49329	0,26063	21,30751	28,38541	35,46331	42,54121
$1/2 \leq \eta \leq 1$							
η	$I(\eta)$	$J(\eta)$	$J(\eta)/I(\eta)$	N	N	N	N
0,500	1,89270	0,49329	0,26063	21,30751	28,38541	35,46331	42,54121
0,650	2,19739	0,64101	0,29172	21,42097	28,36719	35,31341	42,25963
0,750	2,41630	0,73245	0,30313	21,45694	28,35888	35,26081	42,16274
0,812	2,56655	0,78366	0,30534	21,46360	28,35719	35,25078	42,14437
0,900	2,81999	0,84512	0,29969	21,44639	28,36146	35,27653	42,19161
1,000	3,46350	0,88599	0,25581	21,28756	28,38752	35,48748	42,58743

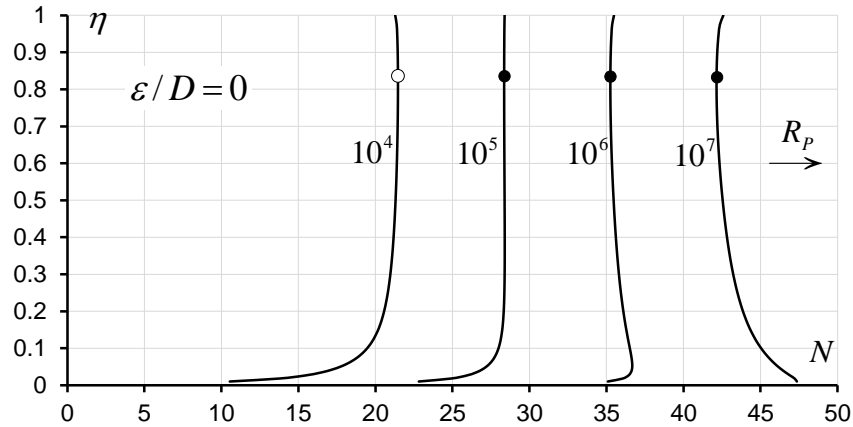


Figure 2.18 : Variation de N en fonction de η , pour : $\varepsilon/D = 0$ (Ecoulement lisse)

(o) Valeur maximale de N obtenues pour : $\eta \cong 0,812$

(•) Valeur minimale de N obtenues pour $\eta \cong 0,812$

Tableau 2.17 : Valeurs de N pour : $\varepsilon/D = 10^{-5}$

$0 \leq \eta \leq 1/8$							
$\varepsilon/D = 10^{-5}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$E(\eta)$	$F(\eta)$	$F(\eta)/E(\eta)$	N	N	N	N
0,010	0,85068	0,00816	0,00959	10,54144	22,78958	34,82435	45,16730
0,050	0,98182	0,04449	0,04531	17,71887	27,15223	36,23957	43,07886
0,075	1,03982	0,06864	0,06601	18,82180	27,67402	36,13895	42,24262
0,100	1,09236	0,09334	0,08544	19,46178	27,93524	35,99085	41,61642
0,120	1,13270	0,11329	0,10002	19,80905	28,05897	35,87147	41,21607
0,125	1,14270	0,11829	0,10352	19,88068	28,08255	35,84263	41,12699
$1/8 \leq \eta \leq 1/2$							
η	$G(\eta)$	$H(\eta)$	$H(\eta)/G(\eta)$	N	N	N	N
0,125	1,14270	0,11829	0,10352	19,88068	28,08255	35,84263	41,12699
0,250	1,39270	0,24329	0,17469	20,79770	28,30011	35,29032	39,70748
0,300	1,49270	0,29329	0,19649	20,96194	28,31504	35,13912	39,37431
0,350	1,59270	0,34329	0,21554	21,08122	28,31871	35,01367	39,10891
0,400	1,69270	0,39329	0,23235	21,17164	28,31661	34,90791	38,89183
0,450	1,79270	0,44329	0,24728	21,24246	28,31149	34,81753	38,71058
0,500	1,89270	0,49329	0,26063	21,29936	28,30485	34,73939	38,55674
$1/2 \leq \eta \leq 1$							
η	$I(\eta)$	$J(\eta)$	$J(\eta)/I(\eta)$	N	N	N	N
0,500	1,89270	0,49329	0,26063	21,29936	28,30485	34,73939	38,55674
0,650	2,19739	0,64101	0,29172	21,41251	28,28361	34,56649	38,22489
0,750	2,41630	0,73245	0,30313	21,44837	28,27424	34,50595	38,11120
0,812	2,56655	0,78366	0,30534	21,45501	28,27235	34,49441	38,08967
0,900	2,81999	0,84512	0,29969	21,43785	28,27714	34,52404	38,14504
1,000	3,46350	0,88599	0,25581	21,27946	28,30745	34,76732	38,61144

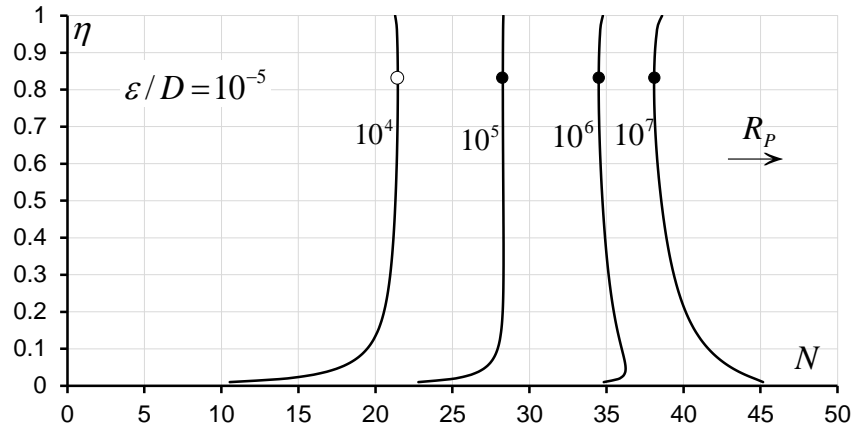


Figure 2.19 : Variation de N en fonction de η , pour : $\varepsilon / D = 10^{-5}$

Tableau 2.18 : Valeurs de N pour : $\varepsilon / D = 10^{-4}$

$0 \leq \eta \leq 1/8$							
$\varepsilon / D = 10^{-4}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$E(\eta)$	$F(\eta)$	$F(\eta)/E(\eta)$	N	N	N	N
0,010	0,85068	0,00816	0,00959	10,51707	22,55184	32,89480	37,72898
0,050	0,98182	0,04449	0,04531	17,67812	26,76546	33,60475	35,89673
0,075	1,03982	0,06864	0,06601	18,77566	27,24059	33,34426	35,22426
0,100	1,09236	0,09334	0,08544	19,41155	27,46716	33,09272	34,72793
0,120	1,13270	0,11329	0,10002	19,75614	27,56865	32,91324	34,41295
0,125	1,14270	0,11829	0,10352	19,82717	27,58726	32,87161	34,34307
$1/8 \leq \eta \leq 1/2$							
η	$G(\eta)$	$H(\eta)$	$H(\eta)/G(\eta)$	N	N	N	N
0,125	1,14270	0,11829	0,10352	19,82717	27,58726	32,87161	34,34307
0,250	1,39270	0,24329	0,17469	20,73417	27,72438	32,14154	33,23720
0,300	1,49270	0,29329	0,19649	20,89591	27,71999	31,95517	32,97919
0,350	1,59270	0,34329	0,21554	21,01316	27,70812	31,80336	32,77396
0,400	1,69270	0,39329	0,23235	21,10190	27,69320	31,67712	32,60625
0,450	1,79270	0,44329	0,24728	21,17128	27,67732	31,57037	32,46633
0,500	1,89270	0,49329	0,26063	21,22695	27,66149	31,47884	32,34763
$1/2 \leq \eta \leq 1$							
η	$I(\eta)$	$J(\eta)$	$J(\eta)/I(\eta)$	N	N	N	N
0,500	1,89270	0,49329	0,26063	21,22695	27,66149	31,47884	32,34763
0,650	2,19739	0,64101	0,29172	21,33739	27,62027	31,27867	32,09175
0,750	2,41630	0,73245	0,30313	21,37231	27,60402	31,20927	32,00413
0,812	2,56655	0,78366	0,30534	21,37876	27,60082	31,19608	31,98754
0,900	2,81999	0,84512	0,29969	21,36206	27,60897	31,22997	32,03021
1,000	3,46350	0,88599	0,25581	21,20749	27,66736	31,51148	32,38983

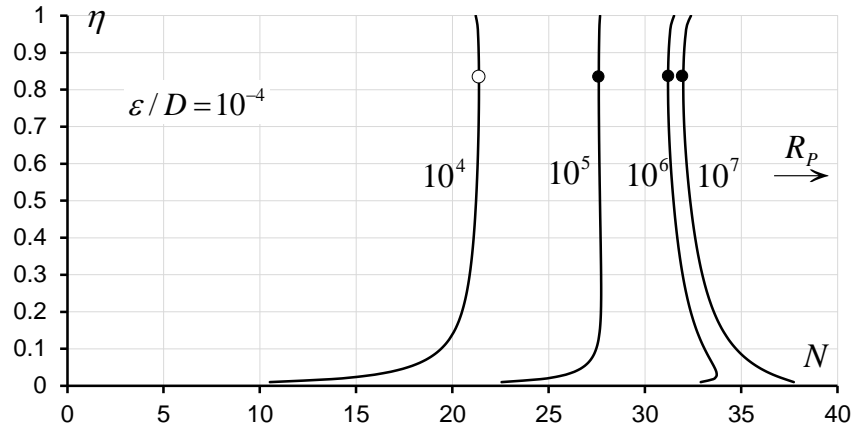


Figure 2.20 : Variation de N en fonction de η , pour : $\varepsilon / D = 10^{-4}$

Tableau 2.19 : Valeurs de N pour : $\varepsilon / D = 10^{-3}$

$0 \leq \eta \leq 1/8$							
$\varepsilon / D = 10^{-3}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$E(\eta)$	$F(\eta)$	$F(\eta)/E(\eta)$	N	N	N	N
0,010	0,85068	0,00816	0,00959	10,27934	20,62229	25,45647	26,30819
0,050	0,98182	0,04449	0,04531	17,29135	24,13064	26,42262	26,74140
0,075	1,03982	0,06864	0,06601	18,34223	24,44590	26,32591	26,57597
0,100	1,09236	0,09334	0,08544	18,94346	24,56903	26,20423	26,41576
0,120	1,13270	0,11329	0,10002	19,26582	24,61041	26,11012	26,30106
0,125	1,14270	0,11829	0,10352	19,33188	24,61624	26,08770	26,27441
$1/8 \leq \eta \leq 1/2$							
η	$G(\eta)$	$H(\eta)$	$H(\eta)/G(\eta)$	N	N	N	N
0,125	1,14270	0,11829	0,10352	19,33188	24,61624	26,08770	26,27441
0,250	1,39270	0,24329	0,17469	20,15844	24,57561	25,67126	25,80395
0,300	1,49270	0,29329	0,19649	20,30086	24,53604	25,56006	25,68291
0,350	1,59270	0,34329	0,21554	20,40256	24,49781	25,46841	25,58403
0,400	1,69270	0,39329	0,23235	20,47849	24,46241	25,39155	25,50162
0,450	1,79270	0,44329	0,24728	20,53711	24,43016	25,32612	25,43178
0,500	1,89270	0,49329	0,26063	20,58359	24,40094	25,26974	25,37181
$1/2 \leq \eta \leq 1$							
η	$I(\eta)$	$J(\eta)$	$J(\eta)/I(\eta)$	N	N	N	N
0,500	1,89270	0,49329	0,26063	20,58359	24,40094	25,26974	25,37181
0,650	2,19739	0,64101	0,29172	20,67406	24,33245	25,14553	25,24032
0,750	2,41630	0,73245	0,30313	20,70208	24,30734	25,10220	25,19463
0,812	2,56655	0,78366	0,30534	20,70723	24,30249	25,09395	25,18594
0,900	2,81999	0,84512	0,29969	20,69389	24,31490	25,11514	25,20827
1,000	3,46350	0,88599	0,25581	20,56741	24,41152	25,28987	25,39321

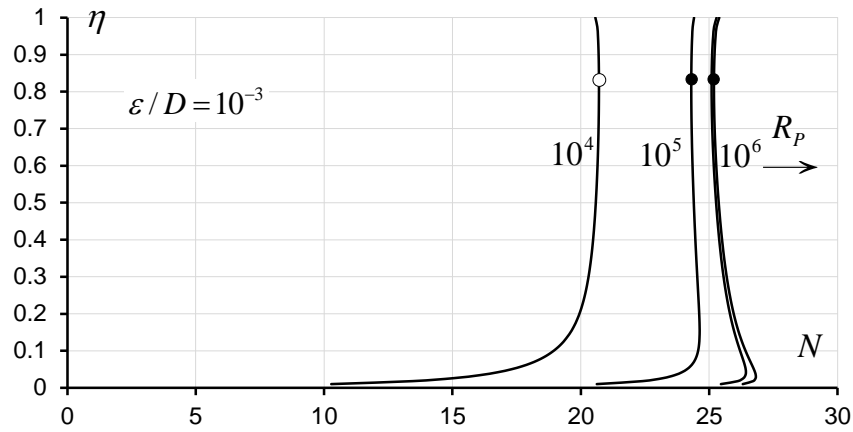


Figure 2.21 : Variation de N en fonction de η , pour : $\varepsilon / D = 10^{-3}$

Tableau 2.20 : Valeurs de N pour : $\varepsilon / D = 10^{-2}$

$0 \leq \eta \leq 1/8$							
$\varepsilon / D = 10^{-2}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$E(\eta)$	$F(\eta)$	$F(\eta)/E(\eta)$	N	N	N	N
0,010	0,85068	0,00816	0,00959	8,34978	13,18396	14,03569	14,12885
0,050	0,98182	0,04449	0,04531	14,65653	16,94851	17,26729	17,30057
0,075	1,03982	0,06864	0,06601	15,54754	17,42755	17,67761	17,70353
0,100	1,09236	0,09334	0,08544	16,04533	17,68054	17,89206	17,91390
0,120	1,13270	0,11329	0,10002	16,30759	17,80730	17,99823	18,01790
0,125	1,14270	0,11829	0,10352	16,36087	17,83232	18,01904	18,03825
$1/8 \leq \eta \leq 1/2$							
η	$G(\eta)$	$H(\eta)$	$H(\eta)/G(\eta)$	N	N	N	N
0,125	1,14270	0,11829	0,10352	16,36087	17,83232	18,01904	18,03825
0,250	1,39270	0,24329	0,17469	17,00967	18,10532	18,23801	18,25158
0,300	1,49270	0,29329	0,19649	17,11690	18,14092	18,26378	18,27632
0,350	1,59270	0,34329	0,21554	17,19226	18,16286	18,27848	18,29028
0,400	1,69270	0,39329	0,23235	17,24770	18,17684	18,28691	18,29813
0,450	1,79270	0,44329	0,24728	17,28995	18,18591	18,29158	18,30234
0,500	1,89270	0,49329	0,26063	17,32305	18,19184	18,29391	18,30431
$1/2 \leq \eta \leq 1$							
η	$I(\eta)$	$J(\eta)$	$J(\eta)/I(\eta)$	N	N	N	N
0,500	1,89270	0,49329	0,26063	17,32305	18,19184	18,29391	18,30431
0,650	2,19739	0,64101	0,29172	17,38623	18,19931	18,29410	18,30375
0,750	2,41630	0,73245	0,30313	17,40540	18,20027	18,29270	18,30210
0,812	2,56655	0,78366	0,30534	17,40890	18,20036	18,29235	18,30171
0,900	2,81999	0,84512	0,29969	17,39982	18,20006	18,29319	18,30267
1,000	3,46350	0,88599	0,25581	17,31156	18,18991	18,29325	18,30378

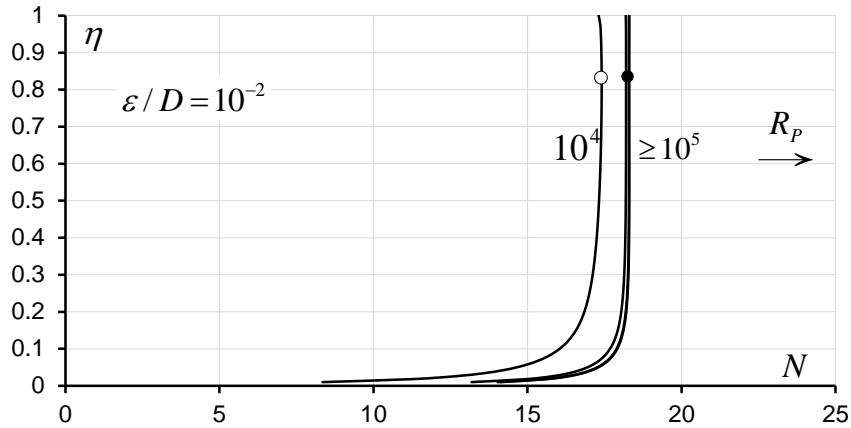


Figure 2.22 : Variation de N en fonction de η , pour : $\varepsilon/D = 10^{-2}$

Dans les figures 2.18 à 2.22 a été tracée la variation du coefficient N en fonction du taux de remplissage η pour des valeurs fixées de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p .

Il ressort des figures obtenues que :

i. Quelles que soient les valeurs de R_p et de ε/D , le coefficient N subit une variation très rapide pour les faibles valeurs du taux de remplissage η ($\eta \leq 0,1$). Pour ces faibles valeurs de η , le coefficient N peut augmenter ou diminuer avec l'augmentation de η , selon la valeur du nombre de Reynolds R_p . C'est ainsi que N augmente avec l'accroissement de η pour des valeurs de R_p inférieures ou égales à 10^6 environ, mais diminue avec l'accroissement de η lorsque R_p est supérieur à 10^6 sauf pour le cas de la rugosité relative $\varepsilon/D = 10^{-2}$ où η continue à augmenter pour les valeurs de $R_p > 10^6$.

ii. Pour : $\eta > 0,1$, le coefficient N subit une variation très faible et tend à devenir constant au fur et à mesure de l'augmentation de η . La variation de η n'a que peu d'influence sur la valeur du coefficient N . La constance du paramètre N est remarquable pour la valeur $R_p = 10^5$. Cette dernière valeur de R_p , qui est par ailleurs la plus faible valeur pratique, semble être la limite au-delà de laquelle s'opère un changement de concavité des courbes. Ce changement de concavité est ponctué par l'apparition d'une valeur minimale du paramètre N . Mais, notons que la valeur minimale de N n'est pas remarquable lorsqu'on la compare aux autres valeurs que prend le paramètre N . En effet, l'écart entre la valeur minimale de N et les autres valeurs que peut prendre ce paramètre n'est pas significatif. Notons, également, que les valeurs minimales du paramètre N apparaissent pour le taux de remplissage $\eta = 0,812$, valeur pour laquelle le coefficient C de Chézy atteint son maximum.

iii. Pour une valeur fixée de η , le coefficient N augmente avec l'accroissement du nombre de Reynolds R_p .

iv. Au fur et à mesure de l'augmentation de la rugosité relative ε/D et de celle du nombre de Reynolds R_p , les courbes des figures 2.18 à 2.22 se resserrent et tendent à se confondre au-delà d'une valeur donnée de R_p indiquée sur les figures. A titre indicatif, les courbes de la figure 2.21, correspondant à la rugosité relative $\varepsilon/D = 10^{-3}$, se confondent pour les valeurs de $R_p \geq 10^6$. Pour la plus forte rugosité relative considérée, soit $\varepsilon/D = 10^{-2}$, les courbes de la figure 2.22 se confondent pour $R_p \geq 10^5$.

Pour exprimer le coefficient de résistance à l'écoulement N_{\min} , pour les valeurs pratiques du nombre de Reynolds $R_p \geq 10^5$, introduisons la valeur $\eta = 0,812$ dans les relations (2.133) et (2.141) on obtient, respectivement : $I(\eta = 0,812) = 2,56655$ et $J(\eta = 0,812) = 0,78366$. Injectons ces deux dernières valeurs dans la relation (2.186), nous pouvons écrire pour $R_p \geq 10^5$:

$$N_{\min} = N(\eta = 0,812) = -4\sqrt{2} \left[\frac{0,78366}{2,56655} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[0,78366/2,56655]} + \frac{1,29899}{[0,78366/2,56655]^{3/2} R_p} \right)$$

Soit alors:

$$N_{\min} = -6,89359 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{4,51896} + \frac{7,69912}{R_p} \right) \quad (2.187)$$

Ou bien, compte tenu de la relation (2.181) :

$$n_{\max} = - \frac{0,14506 D^{1/6}}{\sqrt{g} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{4,51896} + \frac{7,69912}{R_p} \right)} \quad (2.188)$$

IV.2. Calcul du coefficient de résistance à l'écoulement de n Manning par la méthode MMR

Les relations (2.180), (2.183) ou (2.185) permettent de calculer le coefficient n de Manning dans le cas où le diamètre D de la conduite soit une donnée du problème. Dans le cas contraire, où D n'est pas une donnée, il est possible de calculer la valeur de n , en faisant appel à la méthode du modèle rugueux (MMR).

Pour déterminer le coefficient n de Manning, admettons les conditions suivantes :

- i. $\bar{D} = D$
- ii. $\bar{Q} = Q$
- iii. $\bar{i} = i$
- iv. $\bar{\eta} = \eta$
- v. $\bar{v} = v$

Le coefficient n de *Manning* s'exprime par la relation (1.103) :

$$n = \frac{\psi^{8/3} \bar{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}} \quad (1.103)$$

Le coefficient de correction des dimensions linéaires ψ est donné par l'une des relations (2.175), (2.177) ou (2.179) selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η , tandis que \bar{R}_h s'exprime par l'une des relations (2.174), (2.176) ou (2.178). Ainsi :

i. $0 \leq \eta \leq 1/8$

$$n = \frac{0,19677}{\sqrt{g}} \bar{D}^{1/6} \left[\frac{F(\eta)}{E(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[F(\eta)/E(\eta)]} + \frac{1,09975}{[F(\eta)/E(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \quad (2.189)$$

ii. $1/8 \leq \eta \leq 1/2$

$$n = \frac{0,19677}{\sqrt{g}} \bar{D}^{1/6} \left[\frac{H(\eta)}{G(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[H(\eta)/G(\eta)]} + \frac{1,09975}{[H(\eta)/G(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \quad (2.190)$$

iii. $1/2 \leq \eta \leq 1$

$$n = \frac{0,19677}{\sqrt{g}} \bar{D}^{1/6} \left[\frac{J(\eta)}{I(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[J(\eta)/I(\eta)]} + \frac{1,09975}{[J(\eta)/I(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \quad (2.191)$$

Selon les relations (2.189), (2.190) et (2.191), le coefficient n de *Manning* s'exprime en fonction du taux de remplissage η , de la rugosité absolue ε et des caractéristiques \bar{D} et \bar{R}_p du modèle rugueux de référence. Suivant la valeur de η , le diamètre \bar{D} est donné par l'une des relations (2.165), (2.168) ou (2.171), tandis que le nombre de *Reynolds* \bar{R}_p est régi par la relation (2.173).

IV.3. Exemple d'application

Reprenons donc les données de l'exemple d'application précédent, soient :

$$Q = 3,3 \text{ m}^3 / \text{s}, i = 5 \cdot 10^{-4}, \varepsilon = 0,0005 \text{ m}, \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}, \eta = 65\% .$$

Calculer la valeur du coefficient n de *Manning* dans la conduite en forme de voûte de type II étudiée.

Solution

i. Puisque : $1/2 \leq \eta = 0,65 \leq 1$, alors le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est donné par la relation (2.171). Les fonctions $I(\eta)$ et $J(\eta)$ sont données par les relations (2.133) et (2.141) respectivement et prennent pour valeurs :

- $I(\eta = 0,65) = 1,8927 + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(2\eta - 1) = 1,8927 + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(2 \times 0,65 - 1) = 2,19739265$

$$\begin{aligned} \bullet \quad J(\eta = 0,65) &= 0,49329 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2\eta - 1) + \left(\eta - \frac{1}{2}\right) \sqrt{\eta(1-\eta)} \\ &= 0,49329 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2 \times 0,65 - 1) + \left(0,65 - \frac{1}{2}\right) \sqrt{0,65 \times (1 - 0,65)} = 0,6410086 \end{aligned}$$

Selon la relation (2.171), le diamètre \bar{D} est :

$$\bar{D} = \frac{[I(\eta)]^{0,2}}{2,639[J(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}}\right)^{0,4} = \frac{2,19739265^{0,2}}{2,639 \times 0,6410086^{0,6}} \left(\frac{3,3}{\sqrt{9,81 \times 5 \times 10^{-4}}}\right)^{0,4} = 2,70459102 \text{ m}$$

ii. Le nombre de Reynolds \bar{R}_p à l'état plein est, en vertu de la relation (2.173) :

$$\bar{R}_p \cong 5,85515 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 5,85515 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \times 10^{-4} \times 2,70459102^3}}{10^{-6}} = 1823937,42$$

iii. Puisque : $1/2 \leq \eta \leq 1$, alors le coefficient n de Manning est régi par la relation (2.191), soit :

$$\begin{aligned} n &= \frac{0,19677}{\sqrt{g}} \bar{D}^{1/6} \left[\frac{J(\eta)}{I(\eta)}\right]^{1/6} \left[-\log\left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{19[J(\eta)/I(\eta)]} + \frac{1,09975}{[J(\eta)/I(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p}\right)\right]^{-16/15} \\ &= \frac{0,19677}{\sqrt{9,81}} \times 2,70458^{1/6} \times \left[\frac{0,64101}{2,19739}\right]^{1/6} \\ &\quad \times \left[-\log\left(\frac{0,0005/2,70459102}{19[0,6410086/2,19739265]} + \frac{1,09975}{[0,6410086/2,19739265]^{3/2} \times 1823937,42}\right)\right]^{-16/15} = 0,01235 \text{ m}^{-1/3} \text{ s} \end{aligned}$$

Vérifions nos calculs en déterminant, pour le diamètre ainsi obtenu, la pente de la conduite par application la relation (1.36) de Darcy-Weisbach.

Puisque : $\eta = 0,65 > 0,5$, le facteur de correction des dimensions linéaires est évalué par la relation (2.179). Soit :

$$\psi = 1,35 \left[-\log\left(\frac{0,0005/2,70459102}{19 \times [0,6410086/2,19739265]} + \frac{1,09975}{[0,6410086/2,19739265]^{3/2} \times 1823937,42}\right)\right]^{-2/5} = 0,74436374$$

Le diamètre de la conduite est donnée par la relation fondamentale de la méthode MMR :

$$D = \psi \bar{D} = 0,74436374 \times 2,70459102 = 2,01319949 \cong 2 \text{ m}$$

L'aire de la section mouillée se calcule par la relation (2.142). Soit :

$$A = D^2 J(\eta) = 2,01319949^2 \times 0,6410086 = 2,59799003 \text{ m}^2$$

Le périmètre mouillé peut être évalué par la relation (2.134) :

$$P = I(\eta)D = 2,19739265 \times 2,01319949 = 4,423789762 \text{ m}$$

Le coefficient de frottement peut être évalué par la relation (1.61) de la partie bibliographique :

$$f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0,74436374^5}{16} = 0,01428256$$

La relation se Darcy – Weisbach s'exprime par la relation (1.36) :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2}$$

Le diamètre hydraulique est tel que : $D_h = 4A/P$. Soit :

$$i = \frac{f}{8g} \frac{P}{A^3} Q^2 = \frac{0,01428256}{8 \times 9,81} \times \frac{4,423789762}{2,59799003^3} \times 3,3^2 = 0,00049998$$

L'écart relatif entre la valeur ainsi calculée de la pente de la conduite et celle donnée dans les énoncés du problème ne dépasse guère 1 % ce qui est très satisfaisant. Cela mène à conclure à la validité de la démarche de calcul du coefficient de *Manning* proposée.

V. Conclusion

Ce chapitre s'est intéressé à l'étude des coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning* en écoulement uniforme dans une conduite en forme de voûte de type II. Les caractéristiques géométriques de la conduite et les propriétés hydrauliques de l'écoulement ont été présentées. Ces caractéristiques et propriétés dépendent du lieu géométrique de l'écoulement et dépendent ainsi du taux de remplissage de la conduite. Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η , nous avons déterminé le paramètre adimensionnel C/\sqrt{g} . Il se présente en fonction du taux de remplissage η , de la rugosité relative ε/D et du nombre de *Reynolds* R_p à l'état plein. La représentation graphique du coefficient de *Chézy* adimensionnel C/\sqrt{g} , en fonction de η , ε/D et R_p , a montré que C/\sqrt{g} passe par un maximum pour $\eta = 0,812$. Les courbes obtenues ont montré que le nombre de *Reynolds* R_p joue un rôle important. Plus la rugosité relative ε/D augmente et plus l'écoulement turbulent rugueux est atteint rapidement, se traduisant par la non influence du nombre de *Reynolds* R_p ou de la viscosité cinématique ν . Les courbes se resserrent d'autant plus que la rugosité relative ε/D augmente. Elles finissent par se confondre à partir d'une certaine valeur de nombre de *Reynolds* R_p . En ce qui concerne le coefficient de résistance n de *Manning*, son expression générale a été déterminée. La représentation graphique du paramètre adimensionnel N a montré, pour des valeurs de nombre de *Reynolds* $R_p \geq 10^5$, un minimum atteint pour $\eta = 0,812$. Pour cette même valeur de η , le coefficient n de *Manning* atteint alors sa valeur maximale et dont l'expression a été déterminée.

Les relations obtenues ne permettent d'évaluer le coefficient C de *Chézy* et n de *Manning* que si le diamètre D du conduit est une donnée du problème. Dans le cas où D n'est pas connu, il est tout de même possible de calculer les valeurs de C et de n , à condition d'avoir recours à la méthode (MMR). C'est l'un des avantages de cette méthode. Deux exemples d'application ont été proposés pour illustrer la démarche à suivre.

Chapitre III

Etude des coefficients de *Chézy* et de *Manning* dans une conduite fermée de forme semi-elliptique

Chapitre III

Etude des coefficients de *Chézy* et de *Manning* dans une conduite fermée de forme semi-elliptique

I. Introduction

Dans ce chapitre nous allons aborder une autre forme de conduite complexe qui est la forme semi-elliptique et les coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning* seront mis en étude. Nous commençons tout d'abord par l'exposition du profil de la conduite et ses caractéristiques géométriques pour pouvoir tirer par la suite ses caractéristiques hydrauliques particulièrement le périmètre mouillé, l'aire de la section mouillée et le rayon hydraulique. Le coefficient de résistance de *Chézy* ou de *Manning* peut être déterminé par rapport aux quatre cas d'écoulement qui peuvent être distingués selon la profondeur d'eau dans la conduite. L'étude de ces deux coefficients de résistance dévoile ainsi, deux cas d'étude après avoir comparé les deux expressions de débit en écoulement uniforme de *Chézy* et de *Manning* avec l'expression de [Achour et Bedjaoui \(2006\)](#) dont le diamètre générateur de la conduite peut être une donnée du problème ou non. Dans le premier cas, les coefficients de résistance sont exprimés par des relations qui sont nécessaires pour mener une étude de variations en fonction du taux de remplissage. Cette étude de variation est affectée par des courbes permettant de déterminer le coefficient de résistance maximal en fonction d'un taux de remplissage donné. Dans le deuxième cas, où le diamètre générateur de la conduite est exclu des paramètres donnés du problème, l'étude montre que les coefficients de résistance peuvent être calculés en utilisant la méthode du modèle rugueux de référence (MMR). Cette dernière nous facilite le calcul de ces coefficients d'une façon simple et précise avec l'utilisation de moindres données.

II. Caractéristiques de l'écoulement

La conduite considérée est schématiquement représentée sur la figure (2.23) ([Swamee et Swamee, 2008](#)). Dans la conduite quatre zones peuvent se présenter selon la position de la profondeur normale. C'est ainsi que si :

- $0 \leq \eta \leq 0,09605$, l'écoulement, de plan d'eau \vec{ab} , se situe dans la partie circulaire la plus basse de la conduite.

$$e = \frac{5}{2} D \times \sin \alpha'$$

Ou bien :

$$e = \frac{5}{2} D \sqrt{1 - \cos^2(\alpha')}$$

Où l'angle (α') est le demi-angle au centre du cercle C_1 , tel que :

$$\cos(\alpha') = \frac{C_1 C - kC}{C_1 a} = \frac{5/4 D - y_n}{5/4 D} = 1 - \frac{4}{5} \eta \quad (2.192)$$

Avec : $\eta = y_n / D$.

Ou tel que :

$$\sin \alpha' = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha')}$$

Alors :

$$\sin \alpha' = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{4}{5} \eta\right)^2} \quad (2.193)$$

Finalement, la largeur du plan d'eau e s'écrit :

$$e = \frac{5}{2} D \times \sqrt{1 - \left(1 - \frac{4}{5} \eta\right)^2}$$

Ou bien :

$$e = D \sqrt{\eta(10 - 4\eta)} \quad (2.194)$$

b) Périmètre mouillé

Le périmètre mouillé P correspond à la longueur de l'arc $a\widehat{C}b$, appartenant au cercle (C_1), de centre C_1 et de diamètre $d_1 = \frac{5}{2} D$. Ainsi :

$$P = 2 \times \left(\frac{5}{4} D\right) \times \alpha'$$

En tenant compte de la relation (2.192), l'angle $\alpha' = \cos^{-1}\left(1 - \frac{4}{5} \eta\right)$. Soit :

$$P = 2,5 D \times \cos^{-1}(1 - 0,8\eta) \quad (2.195)$$

Définissons la fonction :

$$\sigma(\eta) = 2,5 \cos^{-1}(1 - 0,8\eta) \quad (2.196)$$

La relation (2.195) devient alors :

$$P = D \sigma(\eta) \quad (2.197)$$

c) Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A correspond à l'aire du segment circulaire $aCba$, appartenant au cercle (C_1) , de centre C_1 et de diamètre $d_1 = \frac{5}{2}D$. Ainsi :

$$A = \frac{\left(\frac{5}{2}D\right)^2}{4} [\alpha' - \cos(\alpha') \sin(\alpha')] = \frac{25}{16} D^2 [\alpha' - \cos(\alpha') \sqrt{1 - \cos^2(\alpha')}]$$

Ou bien, en tenant compte de la relation (2.192) :

$$A = \frac{25}{16} D^2 \left[\cos^{-1}(1 - 0,8\eta) - (1 - 0,8\eta) \sqrt{1 - (1 - 0,8\eta)^2} \right]$$

Soit :

$$A = 1,5625 D^2 \left[\cos^{-1}(1 - 0,8\eta) - 2(1 - 0,8\eta) \sqrt{0,4\eta(1 - 0,4\eta)} \right] \quad (2.198)$$

Définissons la fonction :

$$\varphi(\eta) = 1,5625 \left[\cos^{-1}(1 - 0,8\eta) - 2(1 - 0,8\eta) \sqrt{0,4\eta(1 - 0,4\eta)} \right] \quad (2.199)$$

Tenons compte de cette dernière relation, la relation (2.198) prendra la forme suivante :

$$A = D^2 \varphi(\eta) \quad (2.200)$$

d) Rayon hydraulique

Les relations (2.197) et (2.200) permettent de déduire que le rayon hydraulique $R_h = A/P$ est :

$$R_h = D \frac{\varphi(\eta)}{\sigma(\eta)} \quad (2.201)$$

ii. $0,09605 \leq \eta \leq 5/24$

a) Largeur du plan d'eau

Lorsque : $0,09605 \leq \eta \leq 5/24$, la largeur du plan d'eau e correspond à la corde \overrightarrow{ed} (figure 2.23). Le point d appartient au cercle C_2 de centre C_2 et de rayon $D/3$. L'équation de ce cercle est :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (D/3)^2 \quad (2.202)$$

Où x_0 et y_0 sont les coordonnées du point C_2 . Dans le système d'axes XY de la figure 2.23, le point C_2 a pour coordonnées : $x_0 = D/6$ et $y_0 = \frac{5}{24}D$. Dans le même système d'axes, le point d a pour coordonnées : $x = e/2$ et $y = y_n$ (Figure 2.23). La relation (2.202) s'écrit alors :

$$\left(\frac{e}{2} - \frac{D}{6}\right)^2 + \left(y_n - \frac{5}{24}D\right)^2 = \left(\frac{D}{3}\right)^2$$

En divisant les deux membres de cette équation par $\left(\frac{D}{3}\right)^2$, il vient que :

$$\left(\frac{3e}{2D} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3y_n}{D} - \frac{5}{8}\right)^2 = 1$$

Ou bien, tenons compte que $\eta = y_n/D$:

$$\left(\frac{3e}{2D} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(3\eta - \frac{5}{8}\right)^2 = 1$$

La largeur du plan d'eau e est donc :

$$e = D \left[\frac{1}{3} + 2\sqrt{\frac{1}{9} - \left(\eta - \frac{5}{24}\right)^2} \right] \quad (2.203)$$

b) Périmètre mouillé

Lorsque : $0,09605 \leq \eta \leq 5/24$, le périmètre mouillé P correspond à deux fois la longueur de l'arc \widehat{Bd} , à laquelle il faut ajouter la longueur de l'arc de cercle \widehat{ACB} . La longueur de l'arc \widehat{Bd} est égale à la différence des longueurs des arcs $\widehat{D'B}$ et $\widehat{D'd}$. La longueur de l'arc \widehat{ACB} est calculée par la relation (2.195) pour $\eta = 0,09605$, soit:

$$\widehat{ACB} = 0,98644D \quad (2.204)$$

La longueur de l'arc $\widehat{D'B}$ est tel que.

$$\widehat{D'B} = \frac{2D}{3} \times \frac{\theta}{2} = \frac{1}{3} D\theta \quad (2.205)$$

Avec :

$$\sin(\theta) = \frac{(5/24)D - 0,09605D}{D/3} = (5/24 - 0,09605) \times 3$$

Ou bien :

$$\sin(\theta) = 0,33685$$

Soit :

$$\theta = \sin^{-1}(0,33685) = 0,34357 \text{ radian} = 19,68507^\circ \quad (2.206)$$

$$\widehat{D'B} = \frac{2D}{3} \times \frac{\theta}{2} = \frac{1}{3} D\theta \quad (2.205)$$

En vertu de la relation (2.206), la relation (2.205) s'écrit alors :

$$\widehat{D'B} = \frac{0,34357}{3} D = 0,11452D$$

Pour évaluer la longueur de l'arc Bd , écrivons d'abord que :

$$\sin(\gamma) = \frac{\left(\frac{5}{24}D - y_n\right)}{D/3}$$

Soit, en tenant compte que $\eta = y_n/D$:

$$\sin(\gamma) = \left(\frac{5}{8} - 3\eta\right) \quad (2.207)$$

Ou bien :

$$\gamma = \sin^{-1}\left(\frac{5}{8} - 3\eta\right) \quad (2.208)$$

L'angle γ ainsi défini varie entre 0° et $19,68507^\circ$, valeur correspondant à celle de l'angle θ .

En tenant compte de la relation (2.207) :

$$\cos(\gamma) = \sqrt{1 - \sin^2(\gamma)} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{8} - 3\eta\right)^2} \quad (2.209)$$

La longueur de l'arc $\widehat{D'd}$ est par suite :

$$\widehat{D'd} = \frac{2D}{3} \frac{\gamma}{2} = \frac{D}{3} \gamma$$

Ou bien, en vertu de la relation (2.208) :

$$\widehat{D'd} = \frac{D}{3} \sin^{-1}\left(\frac{5}{8} - 3\eta\right)$$

On a : $\widehat{D'B} = 0,11452D$, la longueur de l'arc \widehat{Bd} est par conséquent :

$$\widehat{Bd} = \widehat{D'B} - \widehat{D'd} = 0,11452D - \frac{D}{3} \sin^{-1}\left(\frac{5}{8} - 3\eta\right) = D \left[0,11452 - \frac{1}{3} \sin^{-1}\left(\frac{5}{8} - 3\eta\right) \right]$$

Le périmètre mouillé P , est donc, tel que :

$$P = 2\widehat{Bd} + \widehat{ACB}$$

Ou bien, en tenant compte de l'expression ci-dessus de \widehat{Bd} et de la relation (2.204) :

$$P = 2D \left[0,11452 - \frac{1}{3} \sin^{-1}\left(\frac{5}{8} - 3\eta\right) \right] + 0,98644D$$

Ou bien :

$$P = D \left[1,21548 - \frac{2}{3} \sin^{-1}(0,625 - 3\eta) \right] \quad (2.210)$$

Définissons la fonction :

$$\zeta(\eta) = 1,21548 - \frac{2}{3} \sin^{-1}(0,625 - 3\eta) \quad (2.211)$$

La relation (2.210) s'écrit alors plus simplement :

$$P = D\zeta(\eta) \quad (2.212)$$

c) Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A correspondant à : $0,09605 \leq \eta \leq 5/24$ est définie par l'espace $deCd$ de la figure 2.23. L'aire de la section mouillée A peut être décomposée en trois aires partielles qui sont :

- $2A_0$, où A_0 est l'aire de la section du segment circulaire BdB .
- A_1 , l'aire du trapèze $deABd$ dont les caractéristiques sont :
 - Grande base = largeur du plan d'eau $\overrightarrow{de} = e$, définie par la relation (2.203)
 - Petite base = \overrightarrow{AB} .
 - Hauteur = $y_n - 0,09605D$
- A_2 , l'aire du segment circulaire $ACBA$ qui s'exprime par la relation (2.198) pour $\eta = 0,09605$.

L'aire de la section A recherchée est donc :

$$A = 2A_0 + A_1 + A_2$$

L'aire du segment circulaire BdB appartient au cercle C_2 de centre C_2 , de rayon $D/3$ et d'angle au centre $\theta - \gamma$. Nous pouvons ainsi écrire que, pour θ et γ exprimés en radian :

$$A_0 = \frac{(D/3)^2}{2} [(\theta - \gamma) - \sin(\theta - \gamma)]$$

Ou bien :

$$2A_0 = \left(\frac{D}{3}\right)^2 [(\theta - \gamma) - \sin(\theta - \gamma)] \quad (2.213)$$

La quantité $\sin(\theta - \gamma)$ peut s'écrire :

$$\sin(\theta - \gamma) = \sin(\theta)\cos(\gamma) - \cos(\theta)\sin(\gamma) \quad (2.214)$$

L'angle θ a été évalué par la relation (2.206), soit $\theta = 0,34357$ radian. Ceci permet d'écrire que :

$$\sin(\theta) = \sin(0,34357) = 0,33685$$

Et :

$$\cos(\theta) = \cos(0,34357) = 0,94156$$

En tenant compte de ces deux dernières considérations et des relations (2.207) et (2.209), la relation (2.214) s'écrit alors :

$$\sin(\theta - \gamma) = 0,33685 \sqrt{1 - \left(\frac{5}{8} - 3\eta\right)^2} - 0,94156 \left(\frac{5}{8} - 3\eta\right) \quad (2.215)$$

Avec la valeur de $\theta = 0,34357$ radian et en ayant recours aux relations (2.208) et (2.215), la relation (2.213) devient :

$$2A_0 = \left(\frac{D}{3}\right)^2 \left\{ \left[0,34357 - \sin^{-1}\left(\frac{5}{8} - 3\eta\right) \right] - 0,33685 \sqrt{1 - \left(\frac{5}{8} - 3\eta\right)^2} + 0,94156 \left(\frac{5}{8} - 3\eta\right) \right\}$$

Ou bien :

$$2A_0 = \left(\frac{D}{3}\right)^2 \left[0,93204 - 2,82467\eta - \sin^{-1}\left(\frac{5}{8} - 3\eta\right) - 0,33685 \sqrt{1 - \left(\frac{5}{8} - 3\eta\right)^2} \right] \quad (2.216)$$

L'aire de la section mouillée A_1 du trapèze $deABd$ s'écrit (Figure 2.23) :

$$A_1 = \frac{(\overrightarrow{AB} + e)}{2} (y_n - 0,09605D) \quad (2.217)$$

La petite base \overrightarrow{AB} est exprimée par la relation (2.194) pour $\eta = 0,09605$. Soit :

$$\overrightarrow{AB} = D \sqrt{0,09605 \times (10 - 4 \times 0,09605)} = 0,96104D \quad (2.218)$$

En substituant la relation (2.218) dans la relation (2.217), il vient que :

$$A_1 = \left(\frac{0,96104D + e}{2} \right) (y_n - 0,09605D)$$

Ou bien :

$$A_1 = \left\{ \left(\frac{e}{2D} + 0,48052 \right) (\eta - 0,09605) \right\} D^2 \quad (2.219)$$

En tenant compte de la relation (2.203), la relation (2.219) devient :

$$A_1 = \left\{ \left[0,64719 + \sqrt{\frac{1}{9} - \left(\frac{5}{24} - \eta\right)^2} \right] (\eta - 0,09605) \right\} D^2 \quad (2.220)$$

Après réarrangements, la relation (2.220) mène à :

$$A_1 = \left\{ 0,64719\eta + \frac{1}{3}\eta \sqrt{1 - \left(\frac{5}{8} - 3\eta\right)^2} - 0,03202 \sqrt{1 - \left(\frac{5}{8} - 3\eta\right)^2} - 0,06216 \right\} D^2 \quad (2.221)$$

L'aire A_2 du segment circulaire $ACBA$ est donnée par la relation (2.198) pour $\eta = 0,09605$, soit :

$$\begin{aligned} A_2 &= 1,5625D^2 \left[\cos^{-1}(1 - 0,8\eta) - 2(1 - 0,8\eta) \sqrt{0,4\eta(1 - 0,4\eta)} \right] \\ &= 1,5625D^2 \left[\cos^{-1}(1 - 0,8 \times 0,09605) - 2(1 - 0,8 \times 0,09605) \times \sqrt{0,4 \times 0,09605 \times (1 - 0,4 \times 0,09605)} \right] \end{aligned}$$

Le calcul mène à :

$$A_2 = 0,06203D^2 \quad (2.222)$$

Finalement, l'aire recherchée $A = 2A_0 + A_1 + A_2$ est, compte tenu des relations (2.216), (2.221) et (2.222) :

$$A = D^2 \left[0,10343 + \frac{\eta}{3} - \left(\frac{1}{9} \right) \sin^{-1}(0,625 - 3\eta) - \left(\frac{1}{9} \right) (0,625 - 3\eta) \sqrt{1 - (0,625 - 3\eta)^2} \right] \quad (2.223)$$

Définissons, par souci de simplification d'écriture, la fonction $\mathcal{A}(\eta)$:

$$\mathcal{A}(\eta) = 0,10343 + \frac{\eta}{3} - \left(\frac{1}{9} \right) \sin^{-1}(0,625 - 3\eta) - \left(\frac{1}{9} \right) (0,625 - 3\eta) \sqrt{1 - (0,625 - 3\eta)^2} \quad (2.224)$$

La relation (2.223) s'écrit alors :

$$A = D^2 \mathcal{A}(\eta) \quad (2.225)$$

d) Rayon hydraulique

Le rayon hydraulique $R_h = A / P$ s'écrit, en ayant recours aux relations (2.212) et (2.225) :

$$R_h = D \frac{\mathcal{A}(\eta)}{\zeta(\eta)} \quad (2.226)$$

iii. $5/24 \leq \eta \leq 0,85441$

a) Largeur du plan d'eau

Lorsque : $5/24 \leq \eta \leq 0,85441$, la largeur du plan d'eau e correspond à \overline{gf} (Figure 2.23). Le point g appartient au cercle O de centre O et de rayon $\frac{25}{24} D$. L'équation de ce cercle est :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \left(\frac{25}{24} D \right)^2 \quad (2.227)$$

Où x_0 et y_0 sont les coordonnées du point O . Dans le système d'axes XCY de la figure 2.23, le

point O a pour coordonnées : $x_0 = \frac{13}{24} D$ et $y_0 = \frac{5}{24} D$. Dans le même système d'axes, le point

g a pour coordonnées $x = -e/2$ et $y = y_n$. La relation (2.227) s'écrit alors :

$$\left(-\frac{e}{2} - \frac{13}{24} D \right)^2 + \left(y_n - \frac{5}{24} D \right)^2 = \left(\frac{25}{24} D \right)^2$$

En divisant les deux membres de cette équation par $\left(\frac{25}{24} D \right)^2$, il vient que :

$$\left(\frac{12e}{25D} + \frac{13}{25} \right)^2 + \left(\frac{24y_n}{25D} - \frac{1}{5} \right)^2 = 1$$

Ou bien, en tenant compte que $\eta = y_n/D$:

$$\left(\frac{12e}{25D} + \frac{13}{25} \right)^2 + \left(\frac{24}{25} \eta - \frac{1}{5} \right)^2 = 1$$

La largeur du plan d'eau e est donc :

$$e = D \left[-\frac{13}{12} + \frac{25}{12} \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25} \eta - \frac{1}{5} \right)^2} \right]$$

Ou bien :

$$e = D \left[-\frac{13}{12} + \frac{25}{12} \sqrt{1 - (0,96\eta - 0,2)^2} \right] \quad (2.228)$$

b) Périmètre mouillé

Lorsque: $5/24 \leq \eta \leq 0,85441$, le périmètre mouillé P correspond à deux fois la longueur de l'arc \widehat{Eg} , à laquelle il faut ajouter la longueur ECD' . La longueur ECD' est calculée par la relation (2.210) pour $\eta = 5/24$, soit $ECD' = 1,21548D$.

En considérant le triangle droit $\Delta OGG'$, nous pouvons écrire que :

$$\sin(\beta) = \frac{\overline{GG'}}{\overline{OG}} = \frac{0,85441D - (5/24)D}{(25/24)D}$$

Soit :

$$\sin(\beta) = 0,62023 \quad (2.229)$$

Soit alors :

$$\beta = 38,3332^\circ, \text{ ou bien } \beta = 0,66904 \text{ radian} \quad (2.230)$$

Pour évaluer la longueur de l'arc \widehat{Eg} , écrivons d'abord que dans le triangle droit $\Delta Og'g$:

$$\sin(\omega) = \frac{\overline{gg'}}{\overline{Og}} = \frac{y_n - (5/24)D}{(25/24)D}$$

Soit, compte tenu que $\eta = y_n / D$:

$$\sin(\omega) = \frac{24}{25} \eta - \frac{1}{5} \quad (2.231)$$

Ou bien :

$$\omega = \sin^{-1} \left(\frac{24}{25} \eta - \frac{1}{5} \right) \quad (2.232)$$

L'angle ω ainsi défini varie entre 0° et $38,3332^\circ$, valeur correspondant à celle de l'angle β .

La longueur de l'arc \widehat{Eg} est par suite :

$$\widehat{Eg} = 2 \times \left(\frac{25}{24} D \right) \times \frac{\omega}{2} = \frac{25}{24} D \omega$$

Ou bien, en vertu de la relation (2.232) :

$$\widehat{Eg} = \frac{25}{24} D \sin^{-1} \left(\frac{24}{25} \eta - \frac{1}{5} \right)$$

Le périmètre mouillé P est donc tel que :

$$P = 2\widehat{E}g + ECD'$$

En tenant compte de l'expression ci-dessus de $\widehat{E}g$ et que $ECD' = 1,21548D$, le périmètre mouillé s'écrit :

$$P = 2D \left[\frac{25}{24} \sin^{-1} \left(\frac{24}{25} \eta - \frac{1}{5} \right) \right] + 1,21548D$$

Ou bien :

$$P = D \left[1,21548 + \frac{25}{12} \sin^{-1} \left(\frac{24}{25} \eta - \frac{1}{5} \right) \right] \quad (2.233)$$

Définissons la fonction $\lambda(\eta)$:

$$\lambda(\eta) = 1,21548 + \frac{25}{12} \sin^{-1} \left(\frac{24}{25} \eta - \frac{1}{5} \right) \quad (2.234)$$

La relation (2.233) s'écrit alors plus simplement :

$$P = D\lambda(\eta) \quad (2.235)$$

c) Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A , dans le cas où : $5/24 \leq \eta \leq 0,85441$, correspond à l'espace $ECD'fgE$ de la figure 2.23. L'aire de la section mouillée A peut être décomposée en trois aires partielles qui sont :

- $2A_0$, où A_0 est l'aire de la section du segment circulaire gEg .
- A_1 , l'aire du trapèze $ED'fgE$ dont les caractéristiques sont :
 - Petite base = largeur du plan d'eau = e , définie par la relation (2.228).
 - Grande base = $\overline{ED'}$.
 - Hauteur = $y_n - \frac{5}{24}D$.
- A_2 , est définie par l'espace $ECD'E$.

L'aire de la section A recherchée est donc :

$$A = 2A_0 + A_1 + A_2$$

L'aire du segment circulaire gEg est appartient au cercle O de centre O , de rayon $\frac{25}{24}D$ et

d'angle au centre ω . Nous pouvons ainsi écrire que, pour ω exprimé en radian :

$$A_0 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{25}{24}D \right)^2 [\omega - \sin(\omega)]$$

Ou bien :

$$2A_0 = \frac{625}{576} D^2 [\omega - \sin(\omega)] \quad (2.236)$$

En substituant les relations (2.231) et (2.232) dans la relation (2.236), il vient que :

$$2A_0 = \frac{625}{576} D^2 \left[\sin^{-1} \left(\frac{24}{25} \eta - \frac{1}{5} \right) - \left(\frac{24}{25} \eta - \frac{1}{5} \right) \right]$$

Ainsi, et après réarrangements, cette dernière relation devient :

$$2A_0 = \left[\frac{625}{576} \sin^{-1} \left(\frac{24}{25} \eta - \frac{1}{5} \right) - \frac{25}{24} \eta + \frac{125}{576} \right] D^2 \quad (2.237)$$

L'aire de la section mouillée A_1 du trapèze $ED'fgE$ s'écrit :

$$A_1 = \left(\frac{e + \overline{ED'}}{2} \right) \left(y_n - \frac{5}{24} D \right) \quad (2.238)$$

La longueur $\overline{ED'}$ est exprimée par la relation (2.203) pour $\eta = 5/24$. Soit :

$$\overline{ED'} = D \left[\frac{1}{3} + 2 \sqrt{\frac{1}{9} - \left(\frac{5}{24} - \frac{5}{24} \right)^2} \right] = D$$

La relation (2.238) s'écrit alors :

$$A_1 = \left(\frac{e + D}{2} \right) \left(y_n - \frac{5}{24} D \right)$$

Ou bien, en tenant compte que $\eta = y_n/D$:

$$A_1 = \left(\frac{e}{2D} + \frac{1}{2} \right) \left(\eta - \frac{5}{24} \right) D^2 \quad (2.239)$$

En tenant compte de la relation (2.228), la relation (2.239) devient :

$$A_1 = \left[\frac{25}{24} \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25} \eta - \frac{1}{5} \right)^2} - \frac{1}{24} \right] \left(\eta - \frac{5}{24} \right) D^2 \quad (2.240)$$

Après réarrangements, la relation (2.240) mène à :

$$A_1 = \left[\frac{5}{576} + \frac{25}{24} \eta \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25} \eta - \frac{1}{5} \right)^2} - \frac{125}{576} \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25} \eta - \frac{1}{5} \right)^2} - \frac{1}{24} \eta \right] D^2 \quad (2.241)$$

L'aire A_2 est définie par l'espace $ECD'E$ qui s'exprime par la relation (2.223) pour $\eta = \frac{5}{24}$, soit :

$$\begin{aligned} A_2 &= D^2 \left[0,10342 + \frac{\eta}{3} - \left(\frac{1}{9} \right) \sin^{-1} (0,625 - 3\eta) - \left(\frac{1}{9} \right) (0,625 - 3\eta) \sqrt{1 - (0,625 - 3\eta)^2} \right] \\ &= D^2 \left\{ 0,10342 + \frac{(5/24)}{3} - \left(\frac{1}{9} \right) \sin^{-1} [0,625 - 3(5/24)] - \left(\frac{1}{9} \right) [0,625 - 3(5/24)] \sqrt{1 - [0,625 - 3(5/24)]^2} \right\} \end{aligned}$$

Le calcul mène à :

$$A_2 = 0,17287 D^2 \quad (2.242)$$

Finalement, l'aire recherchée : $A = 2A_0 + A_1 + A_2$ est, compte tenu des relations (2.237), (2.241) et (2.242) :

$$A = \left\{ 0,39856 - \frac{13}{12}\eta + \frac{625}{576} \left[\sin^{-1} \left(\frac{24}{25}\eta - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{24}{25}\eta - \frac{1}{5} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\eta - \frac{1}{5} \right)^2} \right] \right\} D^2 \quad (2.243)$$

Définissons, par souci de simplification d'écriture, la fonction $\tau(\eta)$:

$$\tau(\eta) = 0,39856 - \frac{13}{12}\eta + \frac{625}{576} \left[\sin^{-1} \left(\frac{24}{25}\eta - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{24}{25}\eta - \frac{1}{5} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\eta - \frac{1}{5} \right)^2} \right] \quad (2.244)$$

La relation (2.243) s'écrit alors :

$$A = D^2 \tau(\eta) \quad (2.245)$$

d) Rayon hydraulique

Le rayon hydraulique $R_h = A / P$ s'écrit, en ayant recours aux relations (2.235) et (2.245) :

$$R_h = D \frac{\tau(\eta)}{\lambda(\eta)} \quad (2.246)$$

iv. $0,85441 \leq \eta \leq 1$

a) Largeur du plan d'eau

Lorsque : $0,85441 \leq \eta \leq 1$, la largeur du plan d'eau e correspond à la longueur du segment \vec{ij} .

Soit, d'après la figure 2.23 :

$$e = \frac{2D}{3} \sin(\delta)$$

Dans le triangle droit ΔC_3nj , nous pouvons écrire que :

$$\cos(\delta) = \frac{C_3H - Hn}{D/3} = \frac{(D/3) - Hn}{D/3} = 1 - 3 \frac{Hn}{D} \quad (2.247)$$

Où :

$$Hn = D - y_n$$

La relation (2.247) s'écrit alors :

$$\cos(\delta) = 1 - 3 \frac{(D - y_n)}{D} = 3 \frac{y_n}{D} - 2$$

Ou bien, en tenant compte que $\eta = y_n/D$:

$$\cos(\delta) = 3\eta - 2 \quad (2.248)$$

Or :

$$\sin(\delta) = \sqrt{1 - \cos^2(\delta)} = \sqrt{1 - (3\eta - 2)^2} \quad (2.249)$$

La largeur du plan d'eau s'écrit alors :

$$e = \frac{2D}{3} \sin(\delta) = \frac{2D}{3} \sqrt{1 - (3\eta - 2)^2}$$

Ou bien :

$$e = 2D \sqrt{\frac{1}{9} - \left(\eta - \frac{2}{3}\right)^2} \quad (2.250)$$

b) Périmètre mouillé

Lorsque : $0,85441 \leq \eta \leq 1$, le périmètre mouillé P correspond à deux fois la longueur de l'arc \widehat{Fj} , à laquelle il faut ajouter la longueur $GECD'F$. Deux fois la longueur de l'arc \widehat{Fj} est égale à la différence des longueurs des arcs $F\widehat{HG}$ et $j\widehat{Hi}$.

Désignons par P_0 le périmètre correspondant à la longueur de l'arc $j\widehat{Hi}$. Ainsi :

$$P_0 = \frac{2D}{3} \delta \quad (2.251)$$

En tenant compte de la relation (2.248), nous pouvons écrire que :

$$\delta = \cos^{-1}(3\eta - 2) \quad (2.252)$$

Ainsi, la relation (2.251) s'écrit :

$$P_0 = \frac{2D}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) \quad (2.253)$$

Désignons par P_1 le périmètre correspondant à la longueur de l'arc $F\widehat{HG}$. Ainsi :

$$P_1 = \frac{2D}{3} \phi \quad (2.254)$$

L'angle ϕ est calculé par la relation (2.252) pour $\eta = 0,85441$. Soit :

$$\phi = \cos^{-1}(3 \times 0,85441 - 2) = 55,72053^\circ, \text{ ou bien } 0,97251 \text{ radian.}$$

La relation (2.254) s'écrit alors:

$$P_1 = \frac{2D}{3} \times 0,97251 = 0,64834D \quad (2.255)$$

Désignons par P_2 le périmètre correspondant à la longueur $GECD'F$ qui peut être définie à partir de la relation (2.233) pour : $\eta = 0,85441$, soit :

$$P_2 = D \left[1,21548 + \frac{25}{12} \sin^{-1} \left(\frac{24}{25} \times 0,85441 - \frac{1}{5} \right) \right] = 2,60932D \quad (2.256)$$

Le périmètre recherché est, $P = (P_1 - P_0) + P_2$, en ayant recours aux relations (2.253), (2.255) et (2.256) :

$$P = \left[0,64834D - \frac{2D}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) \right] + 2,60932D$$

Ou bien, plus simplement :

$$P = D \left[3,25766 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) \right] \quad (2.257)$$

Définissons la fonction $\chi(\eta)$:

$$\chi(\eta) = 3,25766 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) \quad (2.258)$$

La relation (2.257) s'écrit alors :

$$P = D\chi(\eta) \quad (2.259)$$

c) Aire de la section mouillée

Lorsque : $0,85441 \leq \eta \leq 1$, l'aire de la section mouillée A est définie par l'espace $iGFji$ de la figure 2.23, à laquelle il faut ajouter l'aire $GECD'FG$. L'espace $iGFji$ est égal à la différence des aires $GFHG$ et $ijHi$.

Définissons A_0 comme aire de la section du segment circulaire $GFHG$. Soit

$$A_0 = \left(\frac{D}{3} \right)^2 [\phi - \sin(\phi)\cos(\phi)] \quad (2.260)$$

Rappelons que l'angle $\phi = 0,97251$ radian.

Soit :

$$\sin(\phi) = 0,82630 \quad (2.261)$$

$$\cos(\phi) = 0,56323 \quad (2.262)$$

En tenant compte des relations (2.261) et (2.262) et que $\phi = 0,97251$ radian, la relation (2.260) s'écrit alors :

$$A_0 = \left(\frac{D}{3} \right)^2 [0,97251 - (0,82630 \times 0,56323)]$$

Le calcul mène à :

$$A_0 = 0,05635D^2 \quad (2.263)$$

A_1 : est l'aire de la section du segment circulaire $ijHi$.

$$A_1 = \left(\frac{D}{3} \right)^2 [\delta - \sin(\delta)\cos(\delta)] \quad (2.264)$$

Tenant compte des relations (2.248), (2.249) et (2.252), la relation (2.264) devient :

$$A_1 = \left(\frac{D}{3} \right)^2 \left[\cos^{-1}(3\eta - 2) - \sqrt{1 - (3\eta - 2)^2} (3\eta - 2) \right] \quad (2.265)$$

A_2 : est l'aire de l'espace $GECD'FG$ qui s'exprime par la relation (2.243) pour : $\eta = 0,85441$, soit :

$$A_2 = \left\{ 0,39856 - \frac{13}{12}\eta + \frac{625}{576} \left[\sin^{-1} \left(\frac{24}{25}\eta - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{24}{25}\eta - \frac{1}{5} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\eta - \frac{1}{5} \right)^2} \right] \right\} D^2$$

$$= \left\{ 0,39856 - \frac{13}{12}(0,85441) + \frac{625}{576} \left[\sin^{-1} \left(\frac{24}{25}(0,85441) - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{24}{25}(0,85441) - \frac{1}{5} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}(0,85441) - \frac{1}{5} \right)^2} \right] \right\} D^2$$

Soit :

$$A_2 = 0,72682D^2 \quad (2.266)$$

Finalement, l'aire recherchée, $A = A_0 - A_1 + A_2$, est compte tenu des relations (2.263), (2.265) et (2.266) :

$$A_0 = 0,05635D^2 \quad (2.263)$$

$$A_1 = \left(\frac{D}{3} \right)^2 \left[\cos^{-1}(3\eta - 2) - \sqrt{1 - (3\eta - 2)^2} (3\eta - 2) \right] \quad (2.265)$$

$$A = 0,05635D^2 - \left(\frac{D}{3} \right)^2 \left[\cos^{-1}(3\eta - 2) - \sqrt{1 - (3\eta - 2)^2} (3\eta - 2) \right] + 0,72682D^2$$

Ou bien :

$$A = \left\{ 0,78316 - \frac{1}{9} \left[\cos^{-1}(3\eta - 2) - \sqrt{1 - (3\eta - 2)^2} (3\eta - 2) \right] \right\} D^2 \quad (2.267)$$

Définissons la fonction $\psi(\eta)$:

$$\psi(\eta) = 0,78316 - \frac{1}{9} \left[\cos^{-1}(3\eta - 2) - \sqrt{1 - (3\eta - 2)^2} (3\eta - 2) \right] \quad (2.268)$$

La relation (2.267) s'écrit alors plus simplement :

$$A = D^2 \psi(\eta) \quad (2.269)$$

d) Rayon hydraulique

Lorsque : $0,85441 \leq \eta \leq 1$, le rayon hydraulique $R_h = A / P$ s'exprime, compte tenu des relations (2.259) et (2.269), par :

$$R_h = D \frac{\psi(\eta)}{\chi(\eta)} \quad (2.270)$$

III. Expression du coefficient de Chézy dans une conduite de forme semi-elliptique

Le coefficient de résistance à l'écoulement de Chézy, en termes adimensionnels est déterminé par la relation (2.45), où le nombre de Reynolds R figurant dans cette relation est, pour rappel, donné par la relation (2.41), tandis que les relations (2.201), (2.226), (2.246) et (2.270) expriment le rayon hydraulique R_h selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η .

Pour la conduite de forme semi-elliptique représentée par la figure 2.23, les fonctions $\chi(\eta)$ et $\psi(\eta)$ figurant dans la relation (2.270) sont données par les relations (2.258) et (2.268) respectivement, et l'on peut aisément montrer que : $\chi(\eta=1) \cong 3,25766$ et $\psi(\eta=1) \cong 0,78316$. Par suite, le rayon hydraulique $R_{h,p}$ à l'état plein est, en vertu de la relation (2.270) :

$$R_{h,p} \cong 0,24041D \quad (2.271)$$

Le nombre de Reynolds R_p à l'état plein de la conduite est, selon la relation (2.41) :

$$R_p \cong 5,33441 \frac{\sqrt{giD^3}}{\nu} \quad (2.272)$$

En ayant recours aux relations (2.201), (2.226), (2.246) et (2.270), nous pouvons écrire que pour :

$$i. \quad 0 \leq \eta \leq 0,09605$$

La relation (2.41) mène à :

$$R = 32\sqrt{2} \left[\frac{\varphi(\eta)}{\sigma(\eta)} \right]^{3/2} \frac{\sqrt{giD^3}}{\nu} \quad (2.273)$$

Ou bien :

$$R = 8,48356 \left[\frac{\varphi(\eta)}{\sigma(\eta)} \right]^{3/2} R_p \quad (2.274)$$

La relation (2.45) mène à :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[\varphi(\eta)/\sigma(\eta)]} + \frac{1,18347}{R_p[\varphi(\eta)/\sigma(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.275)$$

$$ii. \quad 0,09605 \leq \eta \leq 5/24$$

La relation (2.41) mène à écrire que :

$$R = 32\sqrt{2} \left[\frac{\vartheta(\eta)}{\zeta(\eta)} \right]^{3/2} \frac{\sqrt{giD^3}}{\nu} \quad (2.276)$$

Ou bien :

$$R = 8,48356 \left[\frac{\vartheta(\eta)}{\zeta(\eta)} \right]^{3/2} R_p \quad (2.277)$$

La relation (2.45) permet d'écrire que :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[\vartheta(\eta)/\zeta(\eta)]} + \frac{1,18347}{R_p[\vartheta(\eta)/\zeta(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.278)$$

$$iii. \quad 5/24 \leq \eta \leq 0,85441$$

La relation (2.41) mène à :

$$R = 32\sqrt{2} \left[\frac{\tau(\eta)}{\lambda(\eta)} \right]^{3/2} \frac{\sqrt{giD^3}}{\nu} \quad (2.279)$$

Ou bien :

$$R = 8,48356 \left[\frac{\tau(\eta)}{\lambda(\eta)} \right]^{3/2} R_p \quad (2.280)$$

La relation (2.45) mène à :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[\tau(\eta)/\lambda(\eta)]} + \frac{1,18347}{R_p[\tau(\eta)/\lambda(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.281)$$

$$iv. \quad 0,85441 \leq \eta \leq 1$$

La relation (2.41) mène à :

$$R = 32\sqrt{2} \left[\frac{\psi(\eta)}{\chi(\eta)} \right]^{3/2} \frac{\sqrt{giD^3}}{\nu} \quad (2.282)$$

Ou bien :

$$R = 8,48356 \left[\frac{\psi(\eta)}{\chi(\eta)} \right]^{3/2} R_p \quad (2.283)$$

La relation (2.45) mène à :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[\psi(\eta)/\chi(\eta)]} + \frac{1,18347}{R_p[\psi(\eta)/\chi(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.284)$$

Dans les relations (2.275), (2.278), (2.281) et (2.284), ε/D représente la rugosité relative de la conduite étudiée. Au regard de ces relations, il apparaît que C/\sqrt{g} dépend de trois paramètres qui sont la rugosité relative ε/D , le taux de remplissage η et le nombre de Reynolds R_p à l'état plein. Nous pouvons alors écrire la relation fonctionnelle suivante :

$$C/\sqrt{g} = f(\varepsilon/D ; \eta ; R_p) \quad (2.285)$$

III.1. Variation du coefficient de Chézy

Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η , les relations (2.275), (2.278), (2.281) et (2.284) ont été graphiquement représentées sur les figures (2.24 à 2.28) pour quelques valeurs de la rugosité relative ε/D et de nombre de Reynolds à l'état plein R_p .

Tableau 2.21 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 0$

$0 < \eta < 0,09605$							
$\varepsilon/D = 0$				$R_p=10^4$	$R_p=10^5$	$R_p=10^6$	$R_p=10^7$
η	$\sigma(\eta)$	$\varphi(\eta)$	$\varphi(\eta)/\sigma(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,00500	0,22368	0,00074	0,00333	1,19107	6,84793	12,50478	18,16164
0,02500	0,50084	0,00831	0,01659	7,10822	12,76507	18,42193	24,07878
0,04500	0,67285	0,02002	0,02975	9,26039	14,91724	20,57409	26,23095
0,06500	0,80976	0,03466	0,04281	10,60152	16,25838	21,91523	27,57209
0,09605	0,98644	0,06203	0,06288	12,01865	17,67550	23,33236	28,98921
$0,09605 < \eta < 5/24$							
η	$\zeta(\eta)$	$\vartheta(\eta)$	$\vartheta(\eta)/\zeta(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,09605	0,98644	0,06203	0,06288	12,01865	17,67550	23,33236	28,98921
0,10605	1,00756	0,07167	0,07113	12,47317	18,13002	23,78687	29,44373
0,11605	1,02847	0,08138	0,07913	12,86565	18,52250	24,17936	29,83621
0,12605	1,04920	0,09115	0,08687	13,20981	18,86666	24,52352	30,18037
0,20833	1,21548	0,17287	0,14222	15,02631	20,68316	26,34001	31,99687
$5/24 < \eta < 0,85441$							
η	$\lambda(\eta)$	$\tau(\eta)$	$\tau(\eta)/\lambda(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,20833	1,21548	0,17287	0,14222	15,02631	20,68316	26,34001	31,99687
0,30833	1,41579	0,27255	0,19251	16,14191	21,79877	27,45562	33,11247
0,40833	1,61798	0,37030	0,22886	16,77940	22,43625	28,09311	33,74996
0,44887	1,70094	0,40892	0,24041	16,96074	22,61760	28,27445	33,93131
0,77212	2,40695	0,67648	0,28105	17,53641	23,19326	28,85012	34,50697
0,85441	2,60932	0,72682	0,27855	17,50340	23,16026	28,81711	34,47396
$0,85441 < \eta < 1$							
η	$\chi(\eta)$	$\psi(\eta)$	$\psi(\eta)/\chi(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,85441	2,60932	0,72682	0,27855	17,50340	23,16026	28,81711	34,47396
0,88441	2,68502	0,74268	0,27660	17,47757	23,13442	28,79128	34,44813
0,90441	2,73986	0,75241	0,27462	17,45104	23,10789	28,76474	34,42160
0,92441	2,79974	0,76133	0,27193	17,41476	23,07162	28,72847	34,38532
0,96941	2,96981	0,77742	0,26177	17,27453	22,93139	28,58824	34,24510
1,00000	3,25766	0,78316	0,24041	16,96076	22,61761	28,27446	33,93132

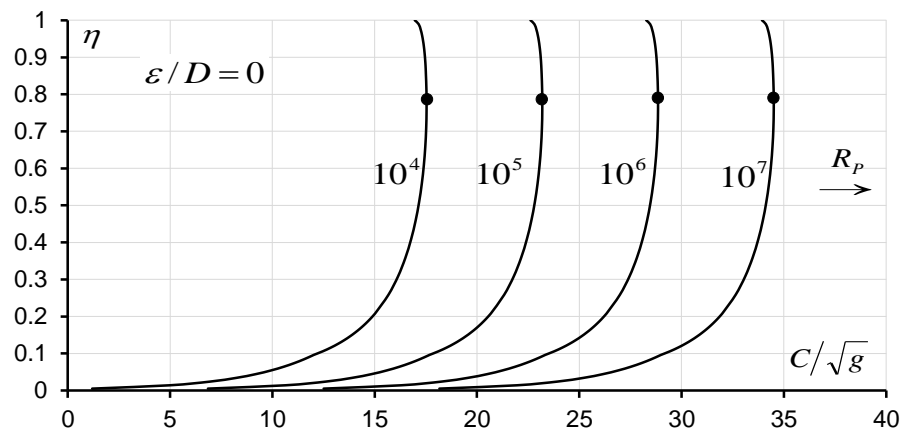


Figure 2.24 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 0$ (Ecoulement lisse).

(●) Valeurs maximales $C_{\max.}/\sqrt{g}$ obtenues pour $\eta \cong 0,77212$

Tableau 2.22 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 10^{-5}$

0 < η < 0,09605							
$\varepsilon/D = 10^{-5}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$\sigma(\eta)$	$\varphi(\eta)$	$\varphi(\eta)/\sigma(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,00500	0,22368	0,00074	0,00333	1,19027	6,83985	12,42514	17,46200
0,02500	0,50084	0,00831	0,01659	7,10641	12,74707	18,24760	22,72461
0,04500	0,67285	0,02002	0,02975	9,25797	14,89317	20,34336	24,54692
0,06500	0,80976	0,03466	0,04281	10,59862	16,22953	21,64093	25,65610
0,09605	0,98644	0,06203	0,06288	12,01514	17,64058	23,00364	26,80621
0,09605 < η < 5/24							
η	$\zeta(\eta)$	$\vartheta(\eta)$	$\vartheta(\eta)/\zeta(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,09605	0,98644	0,06203	0,06288	12,01513	17,64058	23,00364	26,80621
0,10605	1,00756	0,07167	0,07113	12,46943	18,09289	23,43867	27,17040
0,11605	1,02847	0,08138	0,07913	12,86171	18,48336	23,81345	27,48309
0,12605	1,04920	0,09115	0,08687	13,20568	18,82567	24,14142	27,75592
0,20833	1,21548	0,17287	0,14222	15,02102	20,63082	25,86095	29,17557
5/24 < η < 0,85441							
η	$\lambda(\eta)$	$\tau(\eta)$	$\tau(\eta)/\lambda(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,20833	1,21548	0,17287	0,14222	15,02102	20,63082	25,86095	29,17557
0,30833	1,41579	0,27255	0,19251	16,13576	21,73798	26,90643	30,03126
0,40833	1,61798	0,37030	0,22886	16,77270	22,37005	27,49986	30,51503
0,44887	1,70094	0,40892	0,24041	16,95388	22,54977	27,66811	30,65198
0,77212	2,40695	0,67648	0,28105	17,52899	23,12001	28,20051	31,08483
0,85441	2,60932	0,72682	0,27855	17,49601	23,08732	28,17005	31,06009
0,85441 < η < 1							
η	$\chi(\eta)$	$\psi(\eta)$	$\psi(\eta)/\chi(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,85441	2,60932	0,72682	0,27855	17,49601	23,08732	28,17005	31,06009
0,88441	2,68502	0,74268	0,27660	17,47020	23,06174	28,14621	31,04071
0,90441	2,73986	0,75241	0,27462	17,44370	23,03546	28,12171	31,02081
0,92441	2,79974	0,76133	0,27193	17,40746	22,99954	28,08822	30,99360
0,96941	2,96981	0,77742	0,26177	17,26737	22,86065	27,95864	30,88827
1,00000	3,25766	0,78316	0,24041	16,95389	22,54978	27,66812	30,65199

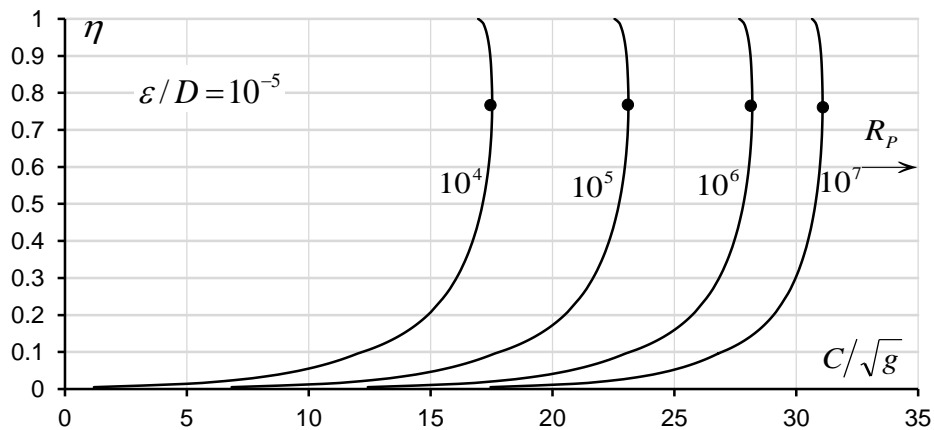


Figure 2.25 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-5}$.

Tableau 2.23 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 10^{-4}$

$0 < \eta < 0,09605$							
$\varepsilon/D = 10^{-4}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$\sigma(\eta)$	$\varphi(\eta)$	$\varphi(\eta)/\sigma(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,00500	0,22368	0,00074	0,00333	1,18299	6,76829	11,80515	14,58121
0,02500	0,50084	0,00831	0,01659	7,09022	12,59075	17,06776	18,86392
0,04500	0,67285	0,02002	0,02975	9,23631	14,68650	18,89007	20,37433
0,06500	0,80976	0,03466	0,04281	10,57267	15,98408	19,99924	21,30640
0,09605	0,98644	0,06203	0,06288	11,98373	17,34679	21,14936	22,28492
$0,09605 < \eta < 5/24$							
η	$\zeta(\eta)$	$\vartheta(\eta)$	$\vartheta(\eta)/\zeta(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,09605	0,98644	0,06203	0,06288	11,98372	17,34679	21,14936	22,28492
0,10605	1,00756	0,07167	0,07113	12,43604	17,78181	21,51355	22,59754
0,11605	1,02847	0,08138	0,07913	12,82651	18,15660	21,82623	22,86706
0,12605	1,04920	0,09115	0,08687	13,16881	18,48456	22,09907	23,10308
0,20833	1,21548	0,17287	0,14222	14,97397	20,20409	23,51871	24,34436
$5/24 < \eta < 0,85441$							
η	$\lambda(\eta)$	$\tau(\eta)$	$\tau(\eta)/\lambda(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,20833	1,21548	0,17287	0,14222	14,97397	20,20409	23,51871	24,34436
0,30833	1,41579	0,27255	0,19251	16,08113	21,24958	24,37441	25,10347
0,40833	1,61798	0,37030	0,22886	16,71320	21,84300	24,85817	25,53628
0,44887	1,70094	0,40892	0,24041	16,89292	22,01125	24,99513	25,65929
0,77212	2,40695	0,67648	0,28105	17,46315	22,54365	25,42797	26,04944
0,85441	2,60932	0,72682	0,27855	17,43047	22,51320	25,40323	26,02709
$0,85441 < \eta < 1$							
η	$\chi(\eta)$	$\psi(\eta)$	$\psi(\eta)/\chi(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,85441	2,60932	0,72682	0,27855	17,43047	22,51320	25,40323	26,02709
0,88441	2,68502	0,74268	0,27660	17,40488	22,48935	25,38386	26,00958
0,90441	2,73986	0,75241	0,27462	17,37861	22,46486	25,36396	25,99161
0,92441	2,79974	0,76133	0,27193	17,34269	22,43137	25,33674	25,96704
0,96941	2,96981	0,77742	0,26177	17,20380	22,30178	25,23142	25,87202
1,00000	3,25766	0,78316	0,24041	16,89293	22,01126	24,99513	25,65930

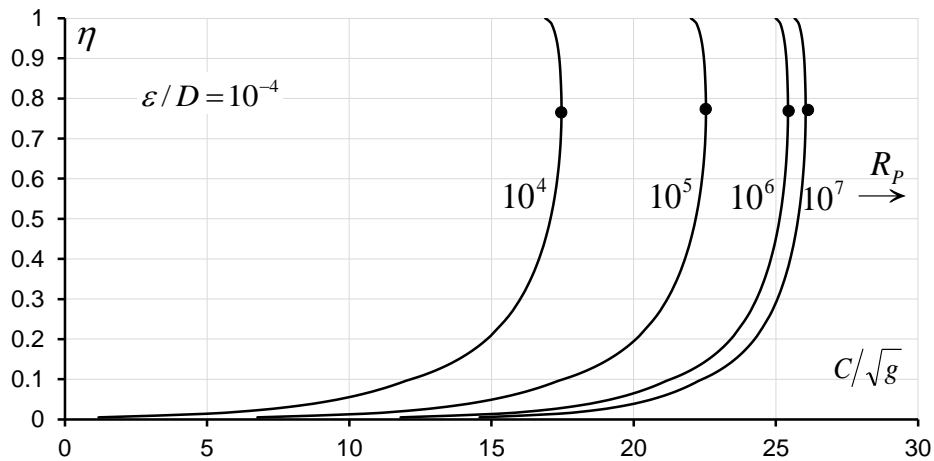


Figure 2.26 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-4}$

Tableau 2.24 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 10^{-3}$

0 < η < 0,09605							
$\varepsilon/D = 10^{-3}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$\sigma(\eta)$	$\varphi(\eta)$	$\varphi(\eta)/\sigma(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,00500	0,22368	0,00074	0,00333	1,11144	6,14829	8,92436	9,50210
0,02500	0,50084	0,00831	0,01659	6,93390	11,41090	13,20707	13,48713
0,04500	0,67285	0,02002	0,02975	9,02965	13,23321	14,71748	14,93027
0,06500	0,80976	0,03466	0,04281	10,32722	14,34239	15,64954	15,82848
0,09605	0,98644	0,06203	0,06288	11,68993	15,49251	16,62807	16,77684
0,09605 < η < 5/24							
η	$\xi(\eta)$	$\vartheta(\eta)$	$\vartheta(\eta)/\xi(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,09605	0,98644	0,06203	0,06288	11,68993	15,49250	16,62806	16,77684
0,10605	1,00756	0,07167	0,07113	12,12496	15,85670	16,94069	17,08087
0,11605	1,02847	0,08138	0,07913	12,49974	16,16938	17,21021	17,34335
0,12605	1,04920	0,09115	0,08687	12,82771	16,44221	17,44623	17,57349
0,20833	1,21548	0,17287	0,14222	14,54724	17,86186	18,68751	18,78766
5/24 < η < 0,85441							
η	$\lambda(\eta)$	$\tau(\eta)$	$\tau(\eta)/\lambda(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,20833	1,21548	0,17287	0,14222	14,54724	17,86186	18,68751	18,78766
0,30833	1,41579	0,27255	0,19251	15,59272	18,71755	19,44661	19,53299
0,40833	1,61798	0,37030	0,22886	16,18615	19,20132	19,87943	19,95879
0,44887	1,70094	0,40892	0,24041	16,35440	19,33827	20,00244	20,07991
0,77212	2,40695	0,67648	0,28105	16,88680	19,77112	20,39259	20,46434
0,85441	2,60932	0,72682	0,27855	16,85634	19,74638	20,37023	20,44230
0,85441 < η < 1							
η	$\chi(\eta)$	$\psi(\eta)$	$\psi(\eta)/\chi(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,85441	2,60932	0,72682	0,27855	16,85634	19,74638	20,37023	20,44230
0,88441	2,68502	0,74268	0,27660	16,83250	19,72701	20,35273	20,42505
0,90441	2,73986	0,75241	0,27462	16,80801	19,70711	20,33476	20,40733
0,92441	2,79974	0,76133	0,27193	16,77451	19,67989	20,31018	20,38311
0,96941	2,96981	0,77742	0,26177	16,64493	19,57457	20,21516	20,28946
1,00000	3,25766	0,78316	0,24041	16,35441	19,33828	20,00244	20,07991

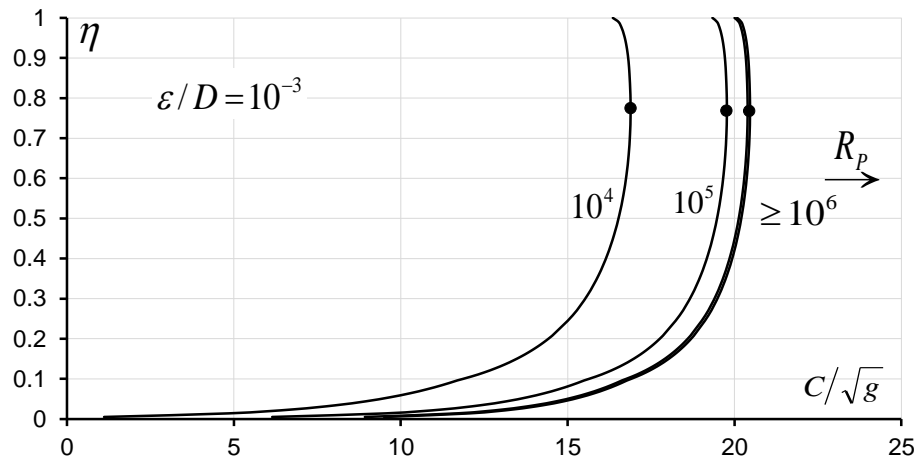


Figure 2.27 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-3}$

Tableau 2.25 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 10^{-2}$

0 < η < 0,09605							
$\varepsilon/D = 10^{-2}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$\sigma(\eta)$	$\varphi(\eta)$	$\varphi(\eta)/\sigma(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,00500	0,22368	0,00074	0,00333	0,49144	3,26750	3,84524	3,91125
0,02500	0,50084	0,00831	0,01659	5,75405	7,55021	7,83028	7,86012
0,04500	0,67285	0,02002	0,02975	7,57636	9,06062	9,27342	9,29575
0,06500	0,80976	0,03466	0,04281	8,68554	9,99269	10,17162	10,19025
0,09605	0,98644	0,06203	0,06288	9,83565	10,97121	11,11998	11,13537
0,09605 < η < 5/24							
η	$\zeta(\eta)$	$\vartheta(\eta)$	$\vartheta(\eta)/\zeta(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,09605	0,98644	0,06203	0,06288	9,83565	10,97121	11,11998	11,13537
0,10605	1,00756	0,07167	0,07113	10,19984	11,28383	11,42401	11,43848
0,11605	1,02847	0,08138	0,07913	10,51252	11,55335	11,68650	11,70022
0,12605	1,04920	0,09115	0,08687	10,78536	11,78937	11,91663	11,92973
0,20833	1,21548	0,17287	0,14222	12,20500	13,03066	13,13080	13,14105
5/24 < η < 0,85441							
η	$\lambda(\eta)$	$\tau(\eta)$	$\tau(\eta)/\lambda(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,20833	1,21548	0,17287	0,14222	12,20500	13,03066	13,13080	13,14105
0,30833	1,41579	0,27255	0,19251	13,06070	13,78976	13,87614	13,88494
0,40833	1,61798	0,37030	0,22886	13,54447	14,22258	14,30194	14,31002
0,44887	1,70094	0,40892	0,24041	13,68142	14,34558	14,42305	14,43094
0,77212	2,40695	0,67648	0,28105	14,11427	14,73573	14,80749	14,81478
0,85441	2,60932	0,72682	0,27855	14,08952	14,71338	14,78545	14,79277
0,85441 < η < 1							
η	$\chi(\eta)$	$\psi(\eta)$	$\psi(\eta)/\chi(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,85441	2,60932	0,72682	0,27855	14,08952	14,71338	14,78545	14,79277
0,88441	2,68502	0,74268	0,27660	14,07015	14,69588	14,76819	14,77554
0,90441	2,73986	0,75241	0,27462	14,05025	14,67790	14,75048	14,75785
0,92441	2,79974	0,76133	0,27193	14,02303	14,65333	14,72625	14,73367
0,96941	2,96981	0,77742	0,26177	13,91771	14,55831	14,63261	14,64016
1,00000	3,25766	0,78316	0,24041	13,68143	14,34559	14,42306	14,43094

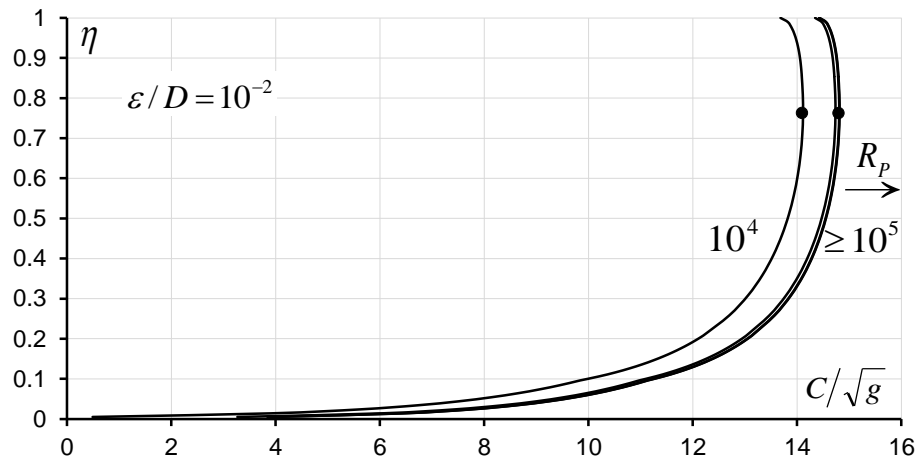


Figure 2.28 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-2}$

Comme dans le cas des conduites que nous l'avons présentées dans les chapitres (I) et (II) de cette deuxième partie de notre thèse, dans ce chapitre, il ressort des figures 2.24 à 2.28 que pour une même valeur du nombre de Reynolds R_p , le coefficient C/\sqrt{g} augmente au fur et à mesure que le taux de remplissage η augmente jusqu'à une valeur maximale pour $\eta \cong 0,77212$, puis il diminue au-delà de cette valeur. Ceci signifie que le coefficient C/\sqrt{g} augmente puis diminue lorsque la profondeur y_n de l'écoulement augmente. Nous pouvons également observer que pour une valeur du taux de remplissage η fixé, le coefficient C/\sqrt{g} augmente avec l'augmentation de nombre de Reynolds R_p .

Parmi toutes les courbes obtenues, les courbes de la figure (2.24) présentent la variation du coefficient C/\sqrt{g} en fonction du taux de remplissage η et de nombre de Reynolds à l'état plein R_p , pour $\varepsilon/D=0$ qui correspond à une paroi interne de conduite lisse. Tandis que, la figure (2.28) présente le changement de C/\sqrt{g} en fonction du η et R_p , pour $\varepsilon/D=10^{-2}$ d'où la conduite est à l'état rugueux, et les courbes de variation du coefficient C/\sqrt{g} se confondent à partir de la valeur $R_p=10^5$. Dans ce cas l'écoulement turbulent est atteint plus tôt que dans le cas des figures 2.25, 2.26 et 2.27. Cela peut se justifier par le fait que plus la rugosité relative ε/D augmente et plus le régime d'écoulement turbulent rugueux est atteint rapidement.

D'autre part, le calcul montre que le coefficient de Chézy est le même pour les valeurs du taux de remplissage $\eta=1$ et $\eta=0,44887$. Dans l'intervalle : $0,44887 < \eta < 1$ on trouve deux valeurs de la profondeur normale qui donnent la même valeur du coefficient C de Chézy.

Le résultat le plus significatif, obtenu lors du tracé de la variation de C/\sqrt{g} en fonction du taux de remplissage η et du nombre de Reynolds R_p , est que la valeur maximale C_{\max}/\sqrt{g} est atteinte pour le taux de remplissage $\eta \cong 0,77212$, quelle que soit la valeur de la rugosité relative ε/D et de celle du nombre de Reynolds R_p .

Le coefficient de résistance à l'écoulement C_{\max} de Chézy est régi par la relation (2.281). Pour cela on introduit la valeur : $\eta \cong 0,77212$ dans la relation (2.281). Les fonctions $\lambda(\eta)$ et $\tau(\eta)$ sont régies par les relations (2.234) et (2.244) respectivement :

- $\lambda(\eta = 0,77212) = 1,21548 + \frac{25}{12} \sin^{-1}\left(\frac{24}{25}\eta - \frac{1}{5}\right) = 1,21548 + \frac{25}{12} \sin^{-1}\left(\frac{24}{25} \times 0,77212 - \frac{1}{5}\right) = 2,40695$
- $\tau(\eta = 0,77212) = 0,39856 - \frac{13}{12}\eta + \frac{625}{576} \left[\sin^{-1}\left(\frac{24}{25}\eta - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{24}{25}\eta - \frac{1}{5}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\eta - \frac{1}{5}\right)^2} \right]$

$$= 0,39856 - \frac{13}{12} \times 0,77212 + \frac{625}{576} \left[\sin^{-1} \left(\frac{24}{25} \times 0,77212 - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{24}{25} \times 0,77212 - \frac{1}{5} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25} \times 0,77212 - \frac{1}{5} \right)^2} \right]$$

$$= 0,67648$$

Ainsi, selon la relation (2.281), le coefficient de résistance à l'écoulement maximal C_{\max} de Chézy est :

$$C_{\max} = -4\sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[0,67648/2,40695]} + \frac{1,18347}{R_p[0,67648/2,40695]^{3/2}} \right)$$

Soit :

$$C_{\max} = -4\sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{4,15960} + \frac{7,94276}{R_p} \right) \quad (2.286)$$

Pour l'état plein de la conduite, correspondant à $\eta=1$, la relation (2.284) permet d'exprimer le coefficient de résistance à l'écoulement C_p de Chézy. Pour $\eta=1$, les fonctions $\chi(\eta)$ et $\psi(\eta)$ sont régies par les relations (2.258) et (2.268) respectivement, elles prennent les valeurs :

- $\chi(\eta=1) = 3,25766 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta-2) = 3,25766 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3 \times 1 - 2) = 3,25766$
- $\psi(\eta=1) = 0,78316 - \frac{1}{9} \left[\cos^{-1}(3\eta-2) - \sqrt{1-(3\eta-2)^2} (3\eta-2) \right]$
 $= 0,78316 - \frac{1}{9} \left[\cos^{-1}(3 \times 1 - 2) - \sqrt{1-(3 \times 1 - 2)^2} (3 \times 1 - 2) \right] = 0,78316$

Ainsi, selon la relation (2.284), le coefficient de résistance à l'écoulement C_p de Chézy à l'état plein est donné par la relation :

$$C_p = -4\sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[0,78316/3,25766]} + \frac{1,18347}{R_p[0,78316/3,25766]^{3/2}} \right)$$

Soit :

$$C_p = -4\sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,55803} + \frac{10,04}{R_p} \right) \quad (2.287)$$

III.2. Conductivité relative

L'aire de la section mouillée A ainsi que le rayon hydraulique R_h s'exprime par les relations que nous avons établies précédemment, selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η . C'est ainsi que pour :

i. $0 \leq \eta \leq 0,09605$

L'aire de la section mouillée A est donnée par la relation (2.200), tandis que le rayon hydraulique R_h s'exprime par la relation (2.201). Les fonctions $\sigma(\eta)$ et $\varphi(\eta)$ sont définies par les relations (2.196) et (2.199) respectivement.

En tenant compte de toutes ces relations, la relation (2.55) de Chézy devient :

$$Q = CD^{5/2} \frac{[\varphi(\eta)]^{3/2}}{[\sigma(\eta)]^{1/2}} \sqrt{i} \quad (2.288)$$

En faisant appel à la relation (2.57) de la conductivité relative, la relation (2.288) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$Q^* = \frac{[\varphi(\eta)]^{3/2}}{[\sigma(\eta)]^{1/2}} \quad (2.289)$$

ii. $0,09605 \leq \eta \leq 5/24$

Dans cet intervalle du taux de remplissage η , l'aire de la section mouillée A ainsi que le rayon hydraulique R_h sont respectivement donnés par les relations (2.225) et (2.226). Dans ces relations, les fonctions $\zeta(\eta)$ et $\mathcal{G}(\eta)$ sont définies par les relations (2.211) et (2.224) respectivement.

En ayant recours à ces relations, la relation (2.55) devient :

$$Q = CD^{5/2} \frac{[\mathcal{G}(\eta)]^{3/2}}{[\zeta(\eta)]^{1/2}} \sqrt{i} \quad (2.290)$$

La relation (2.290) s'écrit, en termes adimensionnels, en tenant compte de relations (2.57):

$$Q^* = \frac{[\mathcal{G}(\eta)]^{3/2}}{[\zeta(\eta)]^{1/2}} \quad (2.291)$$

iii. $5/24 \leq \eta \leq 0,85441$

Dans cet intervalle de η , l'aire de la section mouillée A et le rayon hydraulique R_h sont donnés par les relations (2.245) et (2.246) respectivement. Dans ces relations, la fonction $\lambda(\eta)$ est définie par la relation (2.234), tandis que la fonction $\tau(\eta)$ est donnée par la relation (2.244). Ainsi, en tenant compte de ces relations, la relation (2.55) devient :

$$Q = CD^{5/2} \frac{[\tau(\eta)]^{3/2}}{[\lambda(\eta)]^{1/2}} \sqrt{i} \quad (2.292)$$

En ayant recours à la relation (2.57), la relation (2.292) s'écrit, en termes adimensionnels :

$$Q^* = \frac{[\tau(\eta)]^{3/2}}{[\lambda(\eta)]^{1/2}} \quad (2.293)$$

iv. $0,85441 \leq \eta \leq 1$

Dans la gamme : $0,85441 \leq \eta \leq 1$, l'aire de la section mouillée A et le rayon hydraulique R_h sont donnés par les relations (2.269) et (2.270) respectivement, Où les fonctions $\chi(\eta)$ et $\psi(\eta)$ sont régies par les relations (2.258) et (2.268) respectivement.

En ayant recours à ces relations, la relation (2.55) devient :

$$Q = CD^{5/2} \frac{[\psi(\eta)]^{3/2}}{[\chi(\eta)]^{1/2}} \sqrt{i} \quad (2.294)$$

La relation (2.294) s'écrit, en termes adimensionnels, en tenant compte de la relation (2.57):

$$Q^* = \frac{[\psi(\eta)]^{3/2}}{[\chi(\eta)]^{1/2}} \quad (2.295)$$

III.3. Calcul du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy par la méthode MMR

En l'absence de la valeur du diamètre générateur D de la conduite, la méthode MMR peut être utile pour la détermination explicite du coefficient de résistance à l'écoulement. En effet, le coefficient de résistance C de Chézy, caractérisant l'écoulement dans la conduite considérée sera déterminé en considérant les conditions suivantes :

i. $\bar{D} \neq D$

ii. $\bar{Q} = Q$

iii. $\bar{i} = i$

iv. $\bar{\eta} = \eta$

v. $\bar{v} = v$

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} \quad (2.57)$$

Selon la relation (2.57) et tenant compte des conditions (i), (ii) et (iii), la conductivité relative dans le modèle rugueux \bar{Q}^* est régie par des relations similaires aux relations (2.289), (2.291), (2.293) et (2.295) selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η . Ainsi, pour :

i. $0 \leq \eta \leq 0,09605$

$$\bar{Q}^* = \frac{[\varphi(\eta)]^{3/2}}{[\sigma(\eta)]^{1/2}} \quad (2.296)$$

Les relations (2.62) et (2.296) permettent de déduire que le diamètre générateur \bar{D} du modèle rugueux de référence est :

$$\bar{D} = \frac{[\sigma(\eta)]^{0,2}}{2,639[\varphi(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} \quad (2.297)$$

Pour : $0 \leq \eta \leq 0,09605$, le nombre de Reynolds \bar{R} , caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, s'exprime par une relation similaire à la relation (2.274), soit :

$$\bar{R} = 8,48356 \left[\frac{\varphi(\eta)}{\sigma(\eta)} \right]^{3/2} \bar{R}_p \quad (2.298)$$

ii. $0,09605 \leq \eta \leq 5/24$

$$\bar{Q}^* = \frac{[\varrho(\eta)]^{3/2}}{[\zeta(\eta)]^{1/2}} \quad (2.299)$$

Les relations (2.62) et (2.299) permettent d'écrire que :

$$\bar{D} = \frac{[\zeta(\eta)]^{0,2}}{2,639[\varrho(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} \quad (2.300)$$

Dans la gamme : $0,09605 \leq \eta \leq 5/24$, le nombre de Reynolds \bar{R} , caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, s'exprime par une relation similaire à la relation (2.277), soit :

$$\bar{R} = 8,48356 \left[\frac{\varrho(\eta)}{\zeta(\eta)} \right]^{3/2} \bar{R}_p \quad (2.301)$$

iii. $5/24 \leq \eta \leq 0,85441$

$$\bar{Q}^* = \frac{[\tau(\eta)]^{3/2}}{[\lambda(\eta)]^{1/2}} \quad (2.302)$$

Nous pouvons déduire des relations (2.62) et (2.302) que :

$$\bar{D} = \frac{[\lambda(\eta)]^{0,2}}{2,639[\tau(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} \quad (2.303)$$

Dans la gamme : $5/24 \leq \eta \leq 0,85441$, le nombre de Reynolds \bar{R} , caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, s'exprime par une relation similaire à la relation (2.280), soit :

$$\bar{R} = 8,48356 \left[\frac{\tau(\eta)}{\lambda(\eta)} \right]^{3/2} \bar{R}_p \quad (2.304)$$

iv. $0,85441 \leq \eta \leq 1$

$$\bar{Q}^* = \frac{[\psi(\eta)]^{3/2}}{[\chi(\eta)]^{1/2}} \quad (2.305)$$

Les relations (2.62) et (2.305) permettent d'écrire que :

$$\bar{D} = \frac{[\chi(\eta)]^{0,2}}{2,639[\psi(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} \quad (2.306)$$

Dans la gamme : $0,85441 \leq \eta \leq 1$, le nombre de Reynolds \bar{R} , caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, s'exprime par une relation similaire à la relation (2.283), soit :

$$\bar{R} = 8,48356 \left[\frac{\psi(\eta)}{\chi(\eta)} \right]^{3/2} \bar{R}_p \quad (2.307)$$

Ainsi, avec les valeurs connues des paramètres Q , η et i , le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence peut être explicitement évalué par l'une des relations (2.297), (2.300), (2.303) ou (2.306). Ces paramètres permettent également d'évaluer le nombre de Reynolds \bar{R} de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, par application de l'une des relations (2.298), (2.301), (2.304) ou (2.307). Dans ces relations, le nombre de Reynolds \bar{R}_p à l'état plein de l'écoulement dans le modèle rugueux s'exprime par une relation similaire à la relation (2.272), soit :

$$\bar{R}_p \cong 5,33441 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} \quad (2.308)$$

Le facteur de correction des dimensions linéaires est donnée par la relation (1.72) dont on rappelle son expression :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon}{19R_h} + \frac{8,5}{R} \right) \right]^{-2/5} \quad (1.72)$$

Dans cette dernière relation, le rayon hydraulique \bar{R}_h est défini par des relations similaires aux relations (2.201), (2.226), (2.246) et (2.270) selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η . De même que le nombre de Reynolds \bar{R} est donné par l'une des relations (2.298), (2.301), (2.304) et (2.307). Ainsi :

i. $0 \leq \eta \leq 0,09605$

$$\bar{R}_h = \bar{D} \frac{\varphi(\eta)}{\sigma(\eta)} \quad (2.309)$$

La relation (1.72) s'écrit, en tenant compte des relations (2.298) et (2.309) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[\varphi(\eta)/\sigma(\eta)]} + \frac{1,00194}{[\varphi(\eta)/\sigma(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.310)$$

ii. $0,09605 \leq \eta \leq 5/24$

$$\bar{R}_h = \bar{D} \frac{\vartheta(\eta)}{\zeta(\eta)} \quad (2.311)$$

Tenant compte des relations (2.301) et (2.311), la relation (1.72) s'écrit:

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[\varrho(\eta)/\zeta(\eta)]} + \frac{1,00194}{[\varrho(\eta)/\zeta(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.312)$$

iii. $5/24 \leq \eta \leq 0,85441$

$$\bar{R}_h = \bar{D} \frac{\tau(\eta)}{\lambda(\eta)} \quad (2.313)$$

La relation (1.72) devient alors, en tenant compte des relations (2.304) et (2.313) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[\tau(\eta)/\lambda(\eta)]} + \frac{1,00194}{[\tau(\eta)/\lambda(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.314)$$

iv. $0,85441 \leq \eta \leq 1$

$$\bar{R}_h = \bar{D} \frac{\psi(\eta)}{\chi(\eta)} \quad (2.315)$$

La relation (1.72) s'écrit, en tenant compte des relations (2.307) et (2.315) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[\psi(\eta)/\chi(\eta)]} + \frac{1,00194}{[\psi(\eta)/\chi(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.316)$$

Les étapes suivantes indiquent la procédure de calcul du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy. Nous rappelons que les paramètres connus du problème sont Q , η , i , ε et ν .

- a) Avec la valeur du taux de remplissage η , l'une des relations (2.297), (2.300), (2.303) ou (2.306) permet d'évaluer le diamètre générateur \bar{D} du modèle rugueux de référence.
- b) Les paramètres connus \bar{D} , i et ν sont introduits dans la relation (2.308) pour le calcul du nombre de Reynolds \bar{R}_p à l'état plein de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence.
- c) Le coefficient ψ peut alors être évalué par l'une des relations (2.310), (2.312), (2.314) ou (2.316).
- d) Finalement, le coefficient C de Chézy est déduit de la relation (1.96) dont on rappelle son expression :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \quad (1.96)$$

III.4. Exemple d'application (01)

La conduite de forme semi-elliptique représentée par la figure 2.23 est le siège d'un écoulement uniforme. Elle écoule un débit volume $Q = 3m^3/s$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} m^2/s$, sous une pente longitudinale $i = 5.10^{-4}$. La paroi interne de la conduite est caractérisée par la rugosité absolue $\varepsilon = 0,0005 m$ et le taux de remplissage est $\eta = 0,68$.

- i. Calculer la valeur du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy.
ii. Déduire la valeur du diamètre générateur D de la conduite.

Solution

- i. Puisque : $5/24 \leq \eta = 0,68 \leq 0,85441$, alors le diamètre générateur \bar{D} du modèle rugueux de référence est donné par la relation (2.303). Les fonctions $\lambda(\eta)$ et $\tau(\eta)$ sont données par les relations (2.234) et (2.244) respectivement et prennent pour valeurs :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lambda(\eta) &= 1,21548 + \frac{25}{12} \sin^{-1} \left(\frac{24}{25} \eta - \frac{1}{5} \right) = 1,21548 + \frac{25}{12} \sin^{-1} \left(\frac{24}{25} \times 0,68 - \frac{1}{5} \right) = 2,19445 \\ \bullet \quad \tau(\eta) &= 0,39856 - \frac{13}{12} \eta + \frac{625}{576} \left[\sin^{-1} \left(\frac{24}{25} \eta - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{24}{25} \eta - \frac{1}{5} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25} \eta - \frac{1}{5} \right)^2} \right] \\ &= 0,39856 - \left(\frac{13}{12} \times 0,68 \right) + \frac{625}{576} \left[\sin^{-1} \left(\frac{24}{25} \times 0,68 - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{24}{25} \times 0,68 - \frac{1}{5} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25} \times 0,68 - \frac{1}{5} \right)^2} \right] \\ &= 0,60984 \end{aligned}$$

Selon la relation (2.303), le diamètre générateur \bar{D} est tel que :

$$\bar{D} = \frac{[\lambda(\eta)]^{0,2}}{2,639[\tau(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} = \frac{2,19445^{0,2}}{2,639 \times 0,60984^{0,6}} \left(\frac{3}{\sqrt{9,81 \times 5,10^{-4}}} \right)^{0,4} = 2,68174m$$

Le nombre de Reynolds \bar{R}_p à l'état plein de l'écoulement dans le modèle rugueux est, selon la relation (2.308) :

$$\bar{R}_p \cong 5,33441 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 5,33441 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5,10^{-4} \times 2,68174^3}}{10^{-6}} = 1640704,36$$

Le facteur ψ est par suite, selon la relation (2.314) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[\tau(\eta) / \lambda(\eta)]} + \frac{1,00194}{[\tau(\eta) / \lambda(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5}$$

Soit :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{0,0005 / 2,68174}{19[0,60984 / 2,19445]} + \frac{1,00194}{[0,60984 / 2,19445]^{3/2} \times 1640704,36} \right) \right]^{-2/5} = 0,74612$$

Le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy est, selon la relation (1.96) :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8\sqrt{2 \times 9,81}}{0,74612^{5/2}} = 73,69125m^{0,5} / s$$

ii. Le diamètre générateur D peut être évalué par la relation fondamentale de la MMR, applicable à toute forme de profil géométrique de conduites et canaux :

$$D = \psi \bar{D} = 0,74612 \times 2,68174 = 2,0009 \cong 2m$$

iii. Vérifions la valeur ainsi calculée de C par celle issue de la relation (2.281). Pour cela, évaluons d'abord le nombre de Reynolds R_p à l'état plein, en ayant recours à la relation (2.272) :

$$R_p \cong 5,33441 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 5,33441 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 2,0009^3}}{10^{-6}} = 1057412,57$$

Ainsi, selon la relation (2.281), le coefficient C est :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[\tau(\eta)/\lambda(\eta)]} + \frac{1,18347}{R_p[\tau(\eta)/\lambda(\eta)]^{3/2}} \right)$$

Alors:

$$C = -4\sqrt{2 \times 9,81} \log \left(\frac{0,0005/2,0009}{14,8[0,60984/2,19445]} + \frac{1,18347}{1057412,57 \times [0,60984/2,19445]^{3/2}} \right) \\ = 73,794052 m^{0,5} / s$$

Ainsi, nous pouvons constater que l'écart relatif entre les valeurs de C calculées selon la méthode que nous avons présentée et la MMR est de :

$$\frac{\Delta C}{C} = 100 \times \frac{(73,794052 - 73,69125)}{73,794052} = 0,14\% .$$

Nous pouvons alors conclure, tenant compte du faible écart relatif obtenu, que les deux méthodes aboutissent pratiquement au même résultat.

IV. Expression du coefficient n de Manning dans une conduite de forme semi-elliptique

rappelons que le coefficient de résistance n de Manning s'écrit :

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} R_h^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right) \quad (2.75)$$

En ayant recours à la relation (2.75), le coefficient n de Manning est exprimé en fonction du rayon hydraulique R_h , de la rugosité absolue ε et du nombre de Reynolds R . Ce dernier est, pour rappel, donné par les relations (2.274), (2.277), (2.280) et (2.283), tandis que le rayon hydraulique R_h est donné par les relations (2.201), (2.226), (2.246) et (2.270). La dépendance de n vis-à-vis de R_h traduit bien le fait que n varie en fonction du taux de remplissage η .

En tenant compte de toutes ces relations, nous pouvons écrire que pour :

$$i. \quad 0 \leq \eta \leq 0,09605$$

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g}D^{-1/6} \left[\frac{\varphi(\eta)}{\sigma(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[\varphi(\eta)/\sigma(\eta)]} + \frac{1,18347}{[\varphi(\eta)/\sigma(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.317)$$

En introduisant le paramètre adimensionnel :

$$N = \frac{D^{1/6}}{n\sqrt{g}} \quad (2.318)$$

La relation (2.317) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$N = -4\sqrt{2} \left[\frac{\varphi(\eta)}{\sigma(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[\varphi(\eta)/\sigma(\eta)]} + \frac{1,18347}{[\varphi(\eta)/\sigma(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.319)$$

$$ii. \quad 0,09605 \leq \eta \leq 5/24$$

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g}D^{-1/6} \left[\frac{\varrho(\eta)}{\zeta(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[\varrho(\eta)/\zeta(\eta)]} + \frac{1,18347}{[\varrho(\eta)/\zeta(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.320)$$

Ou bien :

$$N = -4\sqrt{2} \left[\frac{\varrho(\eta)}{\zeta(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[\varrho(\eta)/\zeta(\eta)]} + \frac{1,18347}{[\varrho(\eta)/\zeta(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.321)$$

$$iii. \quad 5/24 \leq \eta \leq 0,85441$$

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g}D^{-1/6} \left[\frac{\tau(\eta)}{\lambda(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[\tau(\eta)/\lambda(\eta)]} + \frac{1,18347}{[\tau(\eta)/\lambda(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.322)$$

Ou bien :

$$N = -4\sqrt{2} \left[\frac{\tau(\eta)}{\lambda(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[\tau(\eta)/\lambda(\eta)]} + \frac{1,18347}{[\tau(\eta)/\lambda(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.323)$$

$$iv. \quad 0,85441 \leq \eta \leq 1$$

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g}D^{-1/6} \left[\frac{\psi(\eta)}{\chi(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[\psi(\eta)/\chi(\eta)]} + \frac{1,18347}{[\psi(\eta)/\chi(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.324)$$

Ou bien :

$$N = -4\sqrt{2} \left[\frac{\psi(\eta)}{\chi(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[\psi(\eta)/\chi(\eta)]} + \frac{1,18347}{[\psi(\eta)/\chi(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.325)$$

Lorsque les paramètres η, ε, D, i et ν sont connus, la relation (2.317), (2.320), (2.322) ou (2.324) permet d'évaluer le coefficient de résistance n de Manning. Au regard des ces relations, nous pouvons écrire la relation fonctionnelle suivante :

$$N = f(\varepsilon/D ; \eta ; R_p)$$

IV.1. Variation du coefficient de Manning

Les tableaux suivants donnent la valeur du paramètre adimensionnel N , pour des valeurs fixées de la rugosité relative ε/D et en faisant varier le taux de remplissage η et le nombre de Reynolds à l'état plein R_p . En-dessous de chaque tableau, nous avons présenté la variation de N en fonction du taux de remplissage η (Figures 2.29 à 2.33), et chacune des courbes obtenues est discutée.

Tableau 2.26 : Valeurs de N pour $\varepsilon/D = 0$

0 < η < 0,09605							
$\varepsilon/D = 0$				$R_p=10^4$	$R_p=10^5$	$R_p=10^6$	$R_p=10^7$
η	$\sigma(\eta)$	$\varphi(\eta)$	$\varphi(\eta)/\sigma(\eta)$	N	N	N	N
0,00500	0,22368	0,00074	0,00333	3,08219	17,72068	32,35916	46,99765
0,02500	0,50084	0,00831	0,01659	14,07532	25,27672	36,47813	47,67953
0,04500	0,67285	0,02002	0,02975	16,63619	26,79868	36,96116	47,12365
0,06500	0,80976	0,03466	0,04281	17,92465	27,48905	37,05344	46,61783
0,09605	0,98644	0,06203	0,06288	19,05913	28,02975	37,00037	45,97099
0,09605 < η < 5/24							
η	$\zeta(\eta)$	$\vartheta(\eta)$	$\vartheta(\eta)/\zeta(\eta)$	N	N	N	N
0,09605	0,98644	0,06203	0,06288	19,05913	28,02975	37,00037	45,97100
0,10605	1,00756	0,07167	0,07113	19,37745	28,16555	36,95365	45,74175
0,11605	1,02847	0,08138	0,07913	19,63553	28,26900	36,90248	45,53596
0,12605	1,04920	0,09115	0,08687	19,84940	28,34954	36,84968	45,34981
0,20833	1,21548	0,17287	0,14222	20,79810	28,62783	36,45756	44,28728
5/24 < η < 0,85441							
η	$\lambda(\eta)$	$\tau(\eta)$	$\tau(\eta)/\lambda(\eta)$	N	N	N	N
0,20833	1,21548	0,17287	0,14222	20,79810	28,62783	36,45756	44,28728
0,30833	1,41579	0,27255	0,19251	21,24291	28,68738	36,13185	43,57633
0,40833	1,61798	0,37030	0,22886	21,45428	28,68718	35,92008	43,15298
0,44887	1,70094	0,40892	0,24041	21,50901	28,68283	35,85666	43,03048
0,77212	2,40695	0,67648	0,28105	21,66752	28,65697	35,64643	42,63589
0,85441	2,60932	0,72682	0,27855	21,65904	28,65894	35,65884	42,65874
0,85441 < η < 1							
η	$\chi(\eta)$	$\psi(\eta)$	$\psi(\eta)/\chi(\eta)$	N	N	N	N
0,85441	2,60932	0,72682	0,27855	21,65904	28,65894	35,65884	42,65874
0,88441	2,68502	0,74268	0,27660	21,65236	28,66044	35,66852	42,67661
0,90441	2,73986	0,75241	0,27462	21,64545	28,66194	35,67844	42,69494
0,92441	2,79974	0,76133	0,27193	21,63592	28,66394	35,69195	42,71997
0,96941	2,96981	0,77742	0,26177	21,59825	28,67098	35,74371	42,81644
1,00000	3,25766	0,78316	0,24041	21,50902	28,68283	35,85665	43,03047

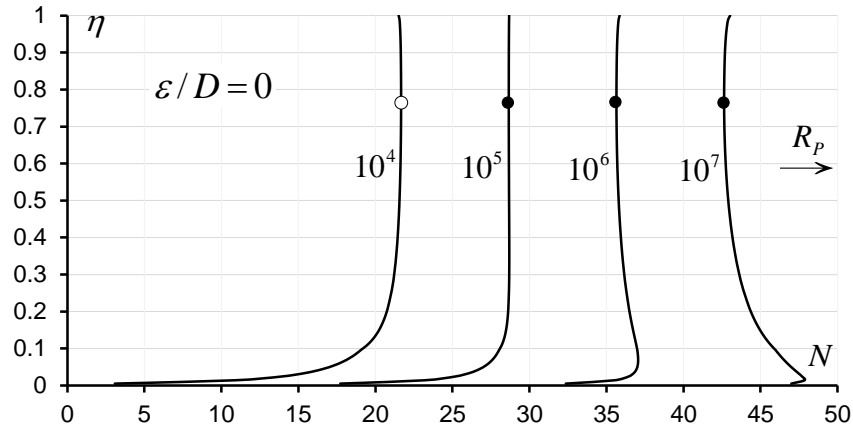


Figure 2.29 : Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 0$. (Ecoulement lisse)

(o) Valeurs maximales de N obtenues pour $\eta \cong 0,77212$

(•) Valeur minimale de N obtenue pour $\eta \cong 0,77212$

Tableau 2.27 : Valeurs de N pour $\varepsilon/D = 10^{-5}$

$0 < \eta < 0,09605$							
$\varepsilon/D = 10^{-5}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$\sigma(\eta)$	$\varphi(\eta)$	$\varphi(\eta)/\sigma(\eta)$	N	N	N	N
0,00500	0,22368	0,00074	0,00333	3,08010	17,69977	32,15308	45,18717
0,02500	0,50084	0,00831	0,01659	14,07174	25,24108	36,13294	44,99808
0,04500	0,67285	0,02002	0,02975	16,63185	26,75543	36,54665	44,09831
0,06500	0,80976	0,03466	0,04281	17,91975	27,44027	36,58967	43,37836
0,09605	0,98644	0,06203	0,06288	19,05356	27,97437	36,47910	42,50920
$0,09605 < \eta < 5/24$							
η	$\zeta(\eta)$	$\vartheta(\eta)$	$\vartheta(\eta)/\zeta(\eta)$	N	N	N	N
0,09605	0,98644	0,06203	0,06288	19,05356	27,97437	36,47910	42,50921
0,10605	1,00756	0,07167	0,07113	19,37164	28,10787	36,41269	42,21007
0,11605	1,02847	0,08138	0,07913	19,62951	28,20927	36,34404	41,94463
0,12605	1,04920	0,09115	0,08687	19,84320	28,28793	36,27552	41,70676
0,20833	1,21548	0,17287	0,14222	20,79079	28,55539	35,79447	40,38228
$5/24 < \eta < 0,85441$							
η	$\lambda(\eta)$	$\tau(\eta)$	$\tau(\eta)/\lambda(\eta)$	N	N	N	N
0,20833	1,21548	0,17287	0,14222	20,79079	28,55539	35,79447	40,38228
0,30833	1,41579	0,27255	0,19251	21,23482	28,60739	35,40912	39,52142
0,40833	1,61798	0,37030	0,22886	21,44571	28,60254	35,16155	39,01677
0,44887	1,70094	0,40892	0,24041	21,50030	28,59682	35,08771	38,87175
0,77212	2,40695	0,67648	0,28105	21,65834	28,56646	34,84379	38,40758
0,85441	2,60932	0,72682	0,27855	21,64990	28,56869	34,85816	38,43434
$0,85441 < \eta < 1$							
η	$\chi(\eta)$	$\psi(\eta)$	$\psi(\eta)/\chi(\eta)$	N	N	N	N
0,85441	2,60932	0,72682	0,27855	21,64990	28,56869	34,85816	38,43434
0,88441	2,68502	0,74268	0,27660	21,64323	28,57040	34,86937	38,45528
0,90441	2,73986	0,75241	0,27462	21,63634	28,57211	34,88086	38,47676
0,92441	2,79974	0,76133	0,27193	21,62685	28,57439	34,89651	38,50612
0,96941	2,96981	0,77742	0,26177	21,58929	28,58254	34,95652	38,61943
1,00000	3,25766	0,78316	0,24041	21,50031	28,59682	35,08771	38,87174

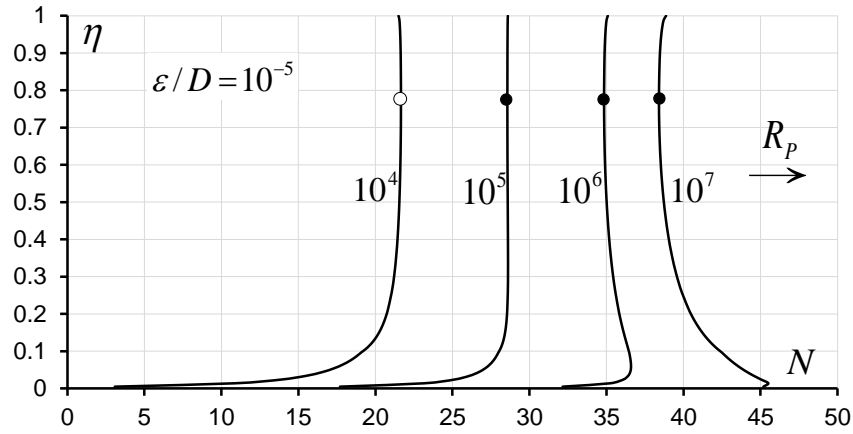


Figure 2.30 : Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon / D = 10^{-5}$

Tableau 2.28 : Valeurs de N pour $\varepsilon / D = 10^{-4}$

$0 < \eta < 0,09605$							
$\varepsilon / D = 10^{-4}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$\sigma(\eta)$	$\varphi(\eta)$	$\varphi(\eta)/\sigma(\eta)$	N	N	N	N
0,00500	0,22368	0,00074	0,00333	3,06128	17,51460	30,54869	37,73243
0,02500	0,50084	0,00831	0,01659	14,03968	24,93154	33,79667	37,35335
0,04500	0,67285	0,02002	0,02975	16,59295	26,38417	33,93582	36,60229
0,06500	0,80976	0,03466	0,04281	17,87587	27,02527	33,81396	36,02404
0,09605	0,98644	0,06203	0,06288	19,00375	27,50848	33,53858	35,33935
$0,09605 < \eta < 5/24$							
η	$\zeta(\eta)$	$\varrho(\eta)$	$\varrho(\eta)/\zeta(\eta)$	N	N	N	N
0,09605	0,98644	0,06203	0,06288	19,00375	27,50848	33,53858	35,33935
0,10605	1,00756	0,07167	0,07113	19,31977	27,62459	33,42197	35,10598
0,11605	1,02847	0,08138	0,07913	19,57579	27,71056	33,31115	34,89966
0,12605	1,04920	0,09115	0,08687	19,78780	27,77538	33,20663	34,71529
0,20833	1,21548	0,17287	0,14222	20,72567	27,96475	32,55255	33,69535
$5/24 < \eta < 0,85441$							
η	$\lambda(\eta)$	$\tau(\eta)$	$\tau(\eta)/\lambda(\eta)$	N	N	N	N
0,20833	1,21548	0,17287	0,14222	20,72567	27,96475	32,55255	33,69535
0,30833	1,41579	0,27255	0,19251	21,16292	27,96465	32,07695	33,03640
0,40833	1,61798	0,37030	0,22886	21,36963	27,92865	31,78387	32,65091
0,44887	1,70094	0,40892	0,24041	21,42300	27,91389	31,69793	32,54020
0,77212	2,40695	0,67648	0,28105	21,57700	27,85433	31,41812	32,18599
0,85441	2,60932	0,72682	0,27855	21,56879	27,85826	31,43444	32,20641
$0,85441 < \eta < 1$							
η	$\chi(\eta)$	$\psi(\eta)$	$\psi(\eta)/\chi(\eta)$	N	N	N	N
0,85441	2,60932	0,72682	0,27855	21,56879	27,85826	31,43444	32,20641
0,88441	2,68502	0,74268	0,27660	21,56231	27,86129	31,44719	32,22238
0,90441	2,73986	0,75241	0,27462	21,55561	27,86436	31,46027	32,23878
0,92441	2,79974	0,76133	0,27193	21,54638	27,86850	31,47811	32,26118
0,96941	2,96981	0,77742	0,26177	21,50981	27,88379	31,54670	32,34763
1,00000	3,25766	0,78316	0,24041	21,42300	27,91389	31,69793	32,54019

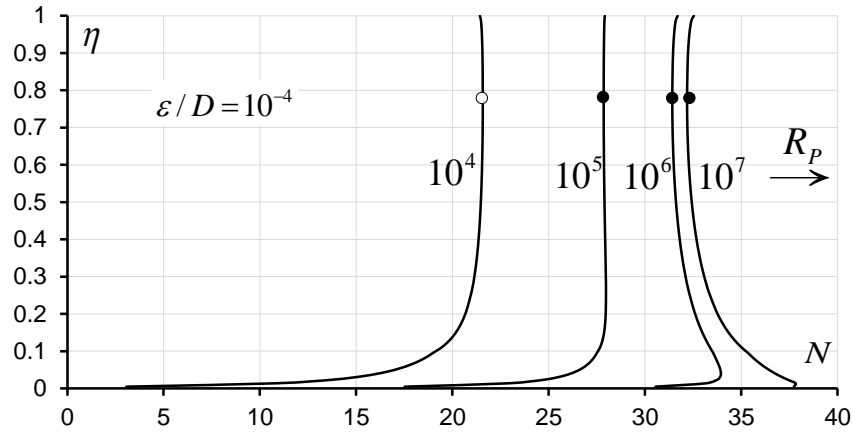


Figure 2.31 : Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon / D = 10^{-4}$

Tableau 2.29 : Valeurs de N pour $\varepsilon / D = 10^{-3}$

$0 < \eta < 0,09605$							
$\varepsilon / D = 10^{-3}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$\sigma(\eta)$	$\varphi(\eta)$	$\varphi(\eta)/\sigma(\eta)$	N	N	N	N
0,00500	0,22368	0,00074	0,00333	2,87611	15,91020	23,09395	24,58899
0,02500	0,50084	0,00831	0,01659	13,73013	22,59527	26,15194	26,70651
0,04500	0,67285	0,02002	0,02975	16,22168	23,77334	26,43981	26,82209
0,06500	0,80976	0,03466	0,04281	17,46088	24,24957	26,45965	26,76219
0,09605	0,98644	0,06203	0,06288	18,53786	24,56796	26,36873	26,60465
$0,09605 < \eta < 5/24$							
η	$\zeta(\eta)$	$\vartheta(\eta)$	$\vartheta(\eta)/\zeta(\eta)$	N	N	N	N
0,09605	0,98644	0,06203	0,06288	18,53786	24,56796	26,36873	26,60465
0,10605	1,00756	0,07167	0,07113	18,83650	24,63387	26,31788	26,53566
0,11605	1,02847	0,08138	0,07913	19,07708	24,67767	26,26618	26,46939
0,12605	1,04920	0,09115	0,08687	19,27525	24,70649	26,21515	26,40638
0,20833	1,21548	0,17287	0,14222	20,13502	24,72283	25,86563	26,00424
$5/24 < \eta < 0,85441$							
η	$\lambda(\eta)$	$\tau(\eta)$	$\tau(\eta)/\lambda(\eta)$	N	N	N	N
0,20833	1,21548	0,17287	0,14222	20,13502	24,72283	25,86563	26,00424
0,30833	1,41579	0,27255	0,19251	20,52017	24,63247	25,59192	25,70560
0,40833	1,61798	0,37030	0,22886	20,69574	24,55097	25,41801	25,51948
0,44887	1,70094	0,40892	0,24041	20,74007	24,52411	25,36638	25,46462
0,77212	2,40695	0,67648	0,28105	20,86487	24,42866	25,19653	25,28519
0,85441	2,60932	0,72682	0,27855	20,85836	24,43454	25,20651	25,29569
$0,85441 < \eta < 1$							
η	$\chi(\eta)$	$\psi(\eta)$	$\psi(\eta)/\chi(\eta)$	N	N	N	N
0,85441	2,60932	0,72682	0,27855	20,85836	24,43454	25,20651	25,29569
0,88441	2,68502	0,74268	0,27660	20,85320	24,43911	25,21430	25,30389
0,90441	2,73986	0,75241	0,27462	20,84786	24,44377	25,22228	25,31230
0,92441	2,79974	0,76133	0,27193	20,84048	24,45009	25,23316	25,32376
0,96941	2,96981	0,77742	0,26177	20,81106	24,47396	25,27490	25,36780
1,00000	3,25766	0,78316	0,24041	20,74007	24,52411	25,36638	25,46462

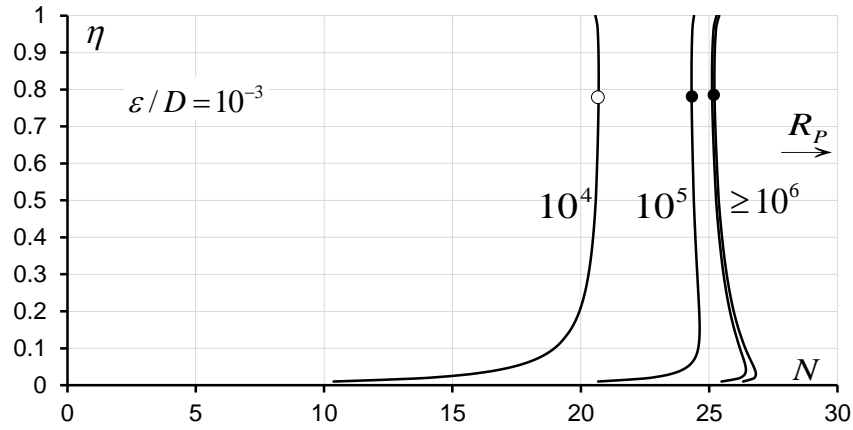


Figure 2.32 : Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon / D = 10^{-3}$

Tableau 2.30 : Valeurs de N pour $\varepsilon / D = 10^{-2}$

$0 < \eta < 0,09605$							
$\varepsilon / D = 10^{-2}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$\sigma(\eta)$	$\varphi(\eta)$	$\varphi(\eta)/\sigma(\eta)$	N	N	N	N
0,00500	0,22368	0,00074	0,00333	1,27172	8,45546	9,95050	10,12132
0,02500	0,50084	0,00831	0,01659	11,39386	14,95054	15,50510	15,56420
0,04500	0,67285	0,02002	0,02975	13,61085	16,27732	16,65961	16,69972
0,06500	0,80976	0,03466	0,04281	14,68517	16,89526	17,19779	17,22929
0,09605	0,98644	0,06203	0,06288	15,59734	17,39811	17,63403	17,65843
$0,09605 < \eta < 5/24$							
η	$\zeta(\eta)$	$\mathcal{G}(\eta)$	$\mathcal{G}(\eta)/\zeta(\eta)$	N	N	N	N
0,09605	0,98644	0,06203	0,06288	15,59734	17,39811	17,63403	17,65843
0,10605	1,00756	0,07167	0,07113	15,84577	17,52979	17,74756	17,77004
0,11605	1,02847	0,08138	0,07913	16,04419	17,63270	17,83591	17,85685
0,12605	1,04920	0,09115	0,08687	16,20636	17,71502	17,90624	17,92592
0,20833	1,21548	0,17287	0,14222	16,89310	18,03590	18,17452	18,18869
$5/24 < \eta < 0,85441$							
η	$\lambda(\eta)$	$\tau(\eta)$	$\tau(\eta)/\lambda(\eta)$	N	N	N	N
0,20833	1,21548	0,17287	0,14222	16,89310	18,03590	18,17452	18,18869
0,30833	1,41579	0,27255	0,19251	17,18800	18,14745	18,26113	18,27272
0,40833	1,61798	0,37030	0,22886	17,31807	18,18510	18,28658	18,29691
0,44887	1,70094	0,40892	0,24041	17,35029	18,19256	18,29080	18,30080
0,77212	2,40695	0,67648	0,28105	17,43921	18,20708	18,29573	18,30474
0,85441	2,60932	0,72682	0,27855	17,43464	18,20661	18,29579	18,30485
$0,85441 < \eta < 1$							
η	$\chi(\eta)$	$\psi(\eta)$	$\psi(\eta)/\chi(\eta)$	N	N	N	N
0,85441	2,60932	0,72682	0,27855	17,43464	18,20661	18,29579	18,30485
0,88441	2,68502	0,74268	0,27660	17,43103	18,20622	18,29581	18,30491
0,90441	2,73986	0,75241	0,27462	17,42727	18,20578	18,29580	18,30495
0,92441	2,79974	0,76133	0,27193	17,42207	18,20514	18,29575	18,30496
0,96941	2,96981	0,77742	0,26177	17,40123	18,20217	18,29507	18,30451
1,00000	3,25766	0,78316	0,24041	17,35029	18,19256	18,29080	18,30080

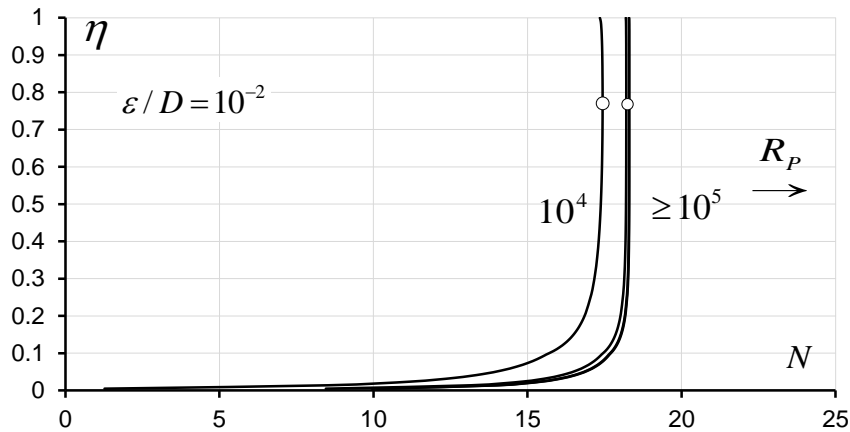


Figure 2.33 : Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon / D = 10^{-2}$

Dans les figures 2.29 à 2.33 a été tracée la variation du coefficient de résistance adimensionnel de Manning N en fonction du taux de remplissage η pour des valeurs fixées de la rugosité relative ε / D et du nombre de Reynolds R_p . Il ressort des figures obtenues que :

- i. Quelles que soient les valeurs de R_p et de ε / D , le coefficient N subit une variation très rapide pour les faibles valeurs du taux de remplissage η ($\eta \leq 0,1$). Pour ces faibles valeurs de η , le coefficient N peut augmenter ou diminuer avec l'augmentation de η , selon la valeur du nombre de Reynolds R_p . C'est ainsi que N augmente avec l'accroissement de η pour des valeurs de R_p inférieures ou égales à 10^6 environ, mais diminue avec l'accroissement de η lorsque R_p est supérieur à 10^6 sauf pour le cas de la rugosité relative $\varepsilon/D = 10^{-2}$ où η continue à augmenter pour les valeurs de $R_p > 10^6$. Il est à noter que pour quelques cas, N augmente lorsque η augmente pour $R_p > 10^6$ mais pour de très faibles valeurs de η .
- ii. Pour : $\eta > 0,1$, le coefficient N subit une variation très faible et tend à devenir constant au fur et à mesure de l'augmentation de η . La variation de η n'a que peu d'influence sur la valeur du coefficient N . La constance du paramètre N est remarquable pour la valeur $R_p = 10^5$. Cette dernière valeur de R_p , qui est par ailleurs la plus faible valeur pratique, semble être la limite au-delà de laquelle s'opère un changement de concavité des courbes. Ce changement de concavité est ponctué par l'apparition d'une valeur minimale du paramètre N . Mais, notons que la valeur minimale de N n'est pas remarquable lorsqu'on la compare aux autres valeurs que prend le paramètre N . En effet, l'écart entre la valeur minimale de N et les autres valeurs que peut prendre ce paramètre n'est pas significatif. Notons, également, que les valeurs minimales du paramètre N apparaissent pour le taux de remplissage $\eta = 0,77212$, valeur pour

laquelle le coefficient C de Chézy atteint son maximum.

- iii. Pour une valeur fixée de η , le coefficient N augmente avec l'accroissement du nombre de Reynolds R_p .
- iv. Au fur et à mesure de l'augmentation de la rugosité relative ε/D et de celle du nombre de Reynolds R_p , les courbes des figures 2.30 à 2.33 se resserrent et tendent à se confondre au-delà d'une valeur donnée de R_p indiquée sur les figures. A titre indicatif, les courbes de la figure 2.32, correspondant à la rugosité relative $\varepsilon/D = 10^{-3}$, se confondent pour les valeurs de $R_p \geq 10^6$. Pour la plus forte rugosité relative considérée, soit $\varepsilon/D = 10^{-2}$, les courbes de la figure 2.33 se confondent pour $R_p \geq 10^5$.

Pour exprimer le coefficient adimensionnel de résistance à l'écoulement N_{\min} de Manning, pour des valeurs du nombre de Reynolds $R_p \geq 10^5$, introduisons la valeur $\eta \cong 0,77212$ dans la relation (2.323). En vertu de cette dernière relation, nous pouvons écrire que pour $R_p \geq 10^5$:

$$N_{\min} = N_{(0,77212)} = -4\sqrt{2} \left[\frac{0,67648}{2,40695} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[0,67648/2,40695]} + \frac{1,18347}{R_p [0,67648/2,40695]^{3/2}} \right)$$

Alors:

$$N_{\min} = -6,98946 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{4,15960} + \frac{7,94276}{R_p} \right) \quad (2.326)$$

Ou bien, compte tenu de la relation (2.318) :

$$n_{\max} = - \frac{0,14307 D^{1/6}}{\sqrt{g} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{4,15960} + \frac{7,94276}{R_p} \right)} \quad (2.327)$$

IV.2. Calcul du coefficient de résistance à l'écoulement n de Manning par la méthode MMR

Les relations (2.317), (2.320), (2.322) ou (2.324) permettent de calculer le coefficient n de Manning dans le cas où le diamètre générateur D de la conduite soit une donnée du problème. Dans le cas contraire, où D n'est pas une donnée, il est possible de calculer la valeur de n , en faisant appel à la méthode du modèle rugueux (MMR).

Pour déterminer le coefficient n de Manning, admettons les conditions suivantes :

- i. $\bar{D} \neq D$
- ii. $\bar{Q} = Q$

iii. $\bar{i} = i$

iv. $\bar{\eta} = \eta$

v. $\bar{\nu} = \nu$

Rappelons que le coefficient n de *Manning* peut s'écrire par la relation (1.103) :

$$n = \frac{\psi^{8/3} \bar{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}} \quad (1.103)$$

Le coefficient de correction des dimensions linéaires ψ est donné par l'une des relations (2.310), (2.312), (2.314) ou (2.316) selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η , tandis que le rayon hydraulique du modèle rugueux \bar{R}_h s'exprime par l'une des relations (2.309), (2.311), (2.313) ou (2.315). Ainsi :

i. $0 \leq \eta \leq 0,09605$

$$n = \frac{0,19677}{\sqrt{g}} \bar{D}^{1/6} \left[\frac{\varphi(\eta)}{\sigma(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[\varphi(\eta)/\sigma(\eta)]} + \frac{1,00194}{[\varphi(\eta)/\sigma(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \quad (2.328)$$

ii. $0,09605 \leq \eta \leq 5/24$

$$n = \frac{0,19677}{\sqrt{g}} \bar{D}^{1/6} \left[\frac{\varrho(\eta)}{\zeta(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[\varrho(\eta)/\zeta(\eta)]} + \frac{1,00194}{[\varrho(\eta)/\zeta(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \quad (2.329)$$

iii. $5/24 \leq \eta \leq 0,85441$

$$n = \frac{0,19677}{\sqrt{g}} \bar{D}^{1/6} \left[\frac{\tau(\eta)}{\lambda(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[\tau(\eta)/\lambda(\eta)]} + \frac{1,00194}{[\tau(\eta)/\lambda(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \quad (2.330)$$

iv. $0,85441 \leq \eta \leq 1$

$$n = \frac{0,19677}{\sqrt{g}} \bar{D}^{1/6} \left[\frac{\psi(\eta)}{\chi(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[\psi(\eta)/\chi(\eta)]} + \frac{1,00194}{[\psi(\eta)/\chi(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \quad (2.331)$$

Selon les relations (2.328), (2.329), (2.330) et (2.331), le coefficient n de *Manning* s'exprime en fonction du taux de remplissage η , de la rugosité absolue ε et des caractéristiques \bar{D} et \bar{R}_p du modèle rugueux de référence. Suivant la valeur de η , le diamètre \bar{D} est donné par l'une des relations (2.297), (2.300), (2.303) ou (2.306), tandis que le nombre de *Reynolds* \bar{R}_p est régi par la relation (2.308).

Les étapes suivantes montrent la procédure de calcul du coefficient de résistance n de *Manning*, pour les données suivantes : Q , ε , i , η et ν . Notons que le diamètre générateur D de la conduite semi-elliptique considérée n'est pas requis pour le calcul de n . Soit :

a) Avec la valeur connue des paramètres Q , i et $\eta = y_n / D$, on calcule le diamètre générateur \bar{D}

du modèle rugueux de référence par l'une des relations (2.297), (2.300), (2.303) ou (2.306).

b) Avec la valeur connue des paramètres i, \bar{D} et ν , on calcule le nombre de Reynolds \bar{R}_p à l'état plein de l'écoulement dans le modèle rugueux, par application de la relation (2.308).

c) Pour la valeur connue des paramètres $\eta, \bar{D}, \varepsilon$ et \bar{R}_p , l'une des relations (2.328), (2.329), (2.330) ou (2.331) permet de calculer la valeur recherchée du coefficient de résistance n de Manning.

IV.3. Exemple d'application (02)

Reprenons les données de l'exemple d'application précédent, soient :

$$Q = 3 \text{ m}^3 / \text{s}, i = 5 \cdot 10^{-4}, \varepsilon = 0,0005 \text{ m}, \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}, \eta = 0,68.$$

Il s'agit de calculer la valeur du coefficient n de Manning dans la conduite semi-elliptique étudiée.

Solution

i. Puisque : $5/24 \leq \eta = 0,68 \leq 0,85441$, alors le diamètre générateur \bar{D} du modèle rugueux de référence est donné par la relation (2.303). Les fonctions $\lambda(\eta)$ et $\tau(\eta)$ sont données par les relations (2.234) et (2.244) respectivement et prennent pour valeurs :

$$\bullet \lambda(\eta) = 1,21548 + \frac{25}{12} \sin^{-1} \left(\frac{24}{25} \eta - \frac{1}{5} \right) = 1,21548 + \frac{25}{12} \sin^{-1} \left(\frac{24}{25} \times 0,68 - \frac{1}{5} \right) = 2,19445$$

$$\bullet \tau(\eta) = 0,39856 - \frac{13}{12} \eta + \frac{625}{576} \left[\sin^{-1} \left(\frac{24}{25} \eta - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{24}{25} \eta - \frac{1}{5} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25} \eta - \frac{1}{5} \right)^2} \right]$$

$$= 0,39856 - \left(\frac{13}{12} \times 0,68 \right) + \frac{625}{576} \left[\sin^{-1} \left(\frac{24}{25} \times 0,68 - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{24}{25} \times 0,68 - \frac{1}{5} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25} \times 0,68 - \frac{1}{5} \right)^2} \right]$$

$$= 0,60984$$

Selon la relation (2.303), le diamètre générateur \bar{D} est :

$$\bar{D} = \frac{[\lambda(\eta)]^{0,2}}{2,639[\tau(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} = \frac{2,19445^{0,2}}{2,639 \times 0,60984^{0,6}} \left(\frac{3}{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4}}} \right)^{0,4} = 2,68174 \text{ m}$$

Le nombre de Reynolds \bar{R}_p à l'état plein est, en vertu de la relation (2.308) :

$$\bar{R}_p \cong 5,33441 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 5,33441 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 2,68174^3}}{10^{-6}} = 1640704,36$$

Puisque : $5/24 \leq \eta = 0,68 \leq 0,85441$, alors le coefficient n de Manning est régi par la relation (2.330), soit :

$$\begin{aligned} n &= \frac{0,19677}{\sqrt{g}} \bar{D}^{1/6} \left[\frac{\tau(\eta)}{\lambda(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 [\tau(\eta) / \lambda(\eta)]} + \frac{1,00194}{[\tau(\eta) / \lambda(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \\ &= \frac{0,19677}{\sqrt{9,81}} \times 2,68174^{1/6} \times \left[\frac{0,60984}{2,19445} \right]^{1/6} \\ &\quad \times \left[-\log \left(\frac{0,0005 / 2,68174}{19 [0,60984 / 2,19445]} + \frac{1,00194}{[0,60984 / 2,19445]^{3/2} \times 1640704,36} \right) \right]^{-16/15} = 0,01231 m^{-1/3} s \end{aligned}$$

ii. La vérification des calculs peut porter sur la détermination du débit volume Q par la relation générale (2.40) de *Achour et Bedjaoui (2006)*. Pour cela, évaluons d'abord le diamètre générateur D , en ayant recours à la relation (2.74) :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (2.74)$$

En tenant compte des relations (2.245) et (2.246) (Puisque : $5/24 \leq \eta = 0,68 \leq 0,85441$), la relation (2.74) s'écrit :

$$Q = \frac{1}{n} \frac{[\tau(\eta)]^{5/3}}{[\lambda(\eta)]^{2/3}} D^{8/3} \sqrt{i}$$

Le diamètre D de la conduite est par conséquent :

$$D = \frac{[\lambda(\eta)]^{1/4}}{[\tau(\eta)]^{5/8}} \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{3/8}$$

Soit :

$$D = \frac{2,19445^{1/4}}{0,60984^{5/8}} \left(\frac{0,01231 \times 3}{\sqrt{5 \cdot 10^{-4}}} \right)^{3/8} = 2,00089 m$$

Puisque la valeur du diamètre générateur D est telle que $D = 2,00089 m$, alors l'aire de la section mouillée A est donnée par la relation (2.245). Ainsi :

$$A = D^2 \tau(\eta) = 2,00089^2 \times 0,60984 = 2,44154 m^2$$

Le rayon hydraulique R_h est régi par la relation (2.246). Soit :

$$R_h = D \frac{\tau(\eta)}{\lambda(\eta)} = 2,00089 \times \frac{0,60984}{2,19445} = 0,55605 m$$

Le nombre de Reynolds R est, selon la relation (2.279) :

$$R = 32\sqrt{2} \left[\frac{\tau(\eta)}{\lambda(\eta)} \right]^{3/2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \left[\frac{0,60984}{2,19445} \right]^{3/2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 2,00089^3}}{10^{-6}} = 1314185,56$$

Par suite, selon la relation (2.40), le débit volume Q est :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

Soit:

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 2,44154 \times \sqrt{0,55605 \times 5 \cdot 10^{-4}} \times \log \left(\frac{0,0005}{14,8 \times 0,55605} + \frac{10,04}{1314185,56} \right) = 3,00419 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Nous pouvons constater que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est de 0,14% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

V. Conclusion

Ce chapitre s'est intéressé à l'étude des coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning* en écoulement uniforme dans une conduite de forme semi-elliptique. Les caractéristiques géométriques de la conduite ont été développées ainsi que les propriétés hydrauliques de l'écoulement ont été établies. Ces caractéristiques et propriétés dépendent du lieu géométrique de l'écoulement dans la conduite et dépendent ainsi du taux de remplissage de la conduite.

Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage de la conduite η , nous avons déterminé le coefficient de résistance adimensionnel de *Chézy* C / \sqrt{g} . Il se présente en fonction du taux de remplissage η , de la rugosité relative ε / D et du nombre de *Reynolds* à l'état plein R_p . La représentation graphique du paramètre C / \sqrt{g} , en fonction de η , de ε / D et de R_p , a montré que C / \sqrt{g} passe par un maximum pour $\eta = 0,77212$.

Les courbes obtenues ont montré que le nombre de *Reynolds* R_p joue un rôle important. Plus la rugosité relative ε / D augmente et plus l'écoulement turbulent rugueux est atteint rapidement, se traduisant par la non influence du nombre de *Reynolds* R_p ou de la viscosité cinématique ν . Les courbes se resserrent d'autant plus que la rugosité relative ε / D augmente. Elles finissent par se confondre à partir d'une certaine valeur de nombre de *Reynolds* R_p .

En ce qui concerne le coefficient de résistance n de *Manning*, son expression générale a été déterminée. La représentation graphique du paramètre adimensionnel $N = D^{1/6} / (n \sqrt{g})$ a montré un minimum, atteint pour $\eta = 0,77212$ pour les valeurs pratiques $R_p > 10^5$. Pour cette même valeur de η , le coefficient n de *Manning* atteint alors sa valeur maximale et dont l'expression a été déterminée.

Les relations obtenues ne permettent d'évaluer le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* et n de *Manning* que si le diamètre générateur D de la conduite est une donnée du

problème. Dans le cas où D n'est pas connu, il est tout de même possible de calculer les valeurs de C et de n , à condition d'avoir recours à la méthode du modèle rugueux (MMR). C'est l'un des avantages de cette méthode. Deux exemples d'application ont été proposés pour illustrer la démarche à suivre.

Chapitre IV

Etude des coefficients de *Chézy* et de *Manning* dans une conduite elliptique

Chapitre IV

Etude des coefficients de *Chézy* et de *Manning* dans une conduite elliptique

I. Introduction

Dans ce dernier chapitre de notre thèse nous contribuerons à l'étude d'une conduite en forme d'arc. La section transversale de cette conduite se compose d'un arc supérieur de rayon d_3 , d'un arc inférieur de rayon d_1 et de deux arcs latéraux de rayons d_2 . La forme générale de la conduite considérée est caractérisée par la largeur S et la hauteur ou diamètre générateur D (figure 2.34).

Tout d'abord nous allons commencer par la présentation du profil de la conduite et ses caractéristiques géométriques pour pouvoir tirer par la suite ses caractéristiques hydrauliques particulièrement le périmètre mouillé, la section mouillée et le rayon hydraulique. Les relations obtenues seront en fonction des dimensions de la conduite, afin d'avoir une validité générale.

Ce chapitre sera suivi d'une étude de cas de la conduite elliptique qui est un cas particulier de la conduite en arc où on l'obtient en substituant le rayon d_3 par le rayon d_1 (figure 2.35). Dans ce cas, les caractéristiques géométriques de la conduite et hydrauliques de l'écoulement seront directement déduites à partir de celles qui seront obtenues pour la conduite en arc. Ces caractéristiques seront utilisées par la suite afin d'étudier les coefficients des résistances à l'écoulement de *Chézy* et de *Manning* à partir de la relation générale de *Achour et Bedjaoui (2006)*. Les relations permettant le calcul explicite de ces deux coefficients en fonction du taux de remplissage, de la rugosité relative et du nombre de *Reynolds* à l'état plein, seront alors développées. La représentation graphique de ces coefficients se traduit par une série de courbes passant chacune par un maximum ou un minimum. Les courbes obtenues seront discutées et analysées et des conclusions intéressantes seront tirées. En outre, des relations pour les coefficients de *Chézy* et de *Manning* seront proposées en ayant recours à la méthode du modèle rugueux de référence. Cette dernière méthode permet le calcul des coefficients de résistance avec moins de paramètres régissant l'écoulement. Des exemples d'application pratiques seront proposés pour mieux illustrer la démarche à suivre pour le calcul des coefficients de *Chézy* et de *Manning*.

II. Caractéristiques de l'écoulement dans une conduite en forme d'arc

La figure 2.34 montre la conduite en forme d'arc (Arch Pipes) de diamètre générateur D . Dans la conduite trois cas d'études peuvent se présenter selon la position de la profondeur normale ([Perez et al. 2015](#)). C'est ainsi que si :

- $0 \leq y_n \leq y_1$, l'écoulement, de plan d'eau \overline{ac} , se situe dans la partie circulaire la plus basse de la conduite.
- $y_1 \leq y_n \leq y_2$, l'écoulement, de plan d'eau \overline{bd} , se situe dans l'espace délimité par les arcs de cercle \widehat{HA} et \widehat{EC} .
- $y_2 \leq y_n \leq D$, l'écoulement, de plan d'eau \overline{kh} , se situe dans la partie circulaire la plus haute de la conduite.

Les hauteurs y_1 et y_2 , s'expriment respectivement par les relations suivantes :

$$y_1 = d_1 - d_1 \cos \beta = d_1(1 - \cos \beta) \quad (2.332)$$

Et :

$$y_2 = D - d_3 + d_3 \cos \alpha = D - d_3(1 - \cos \alpha) \quad (2.333)$$

Les caractéristiques de l'écoulement doivent donc être déterminées pour chacun des trois cas ci-dessus indiqués.

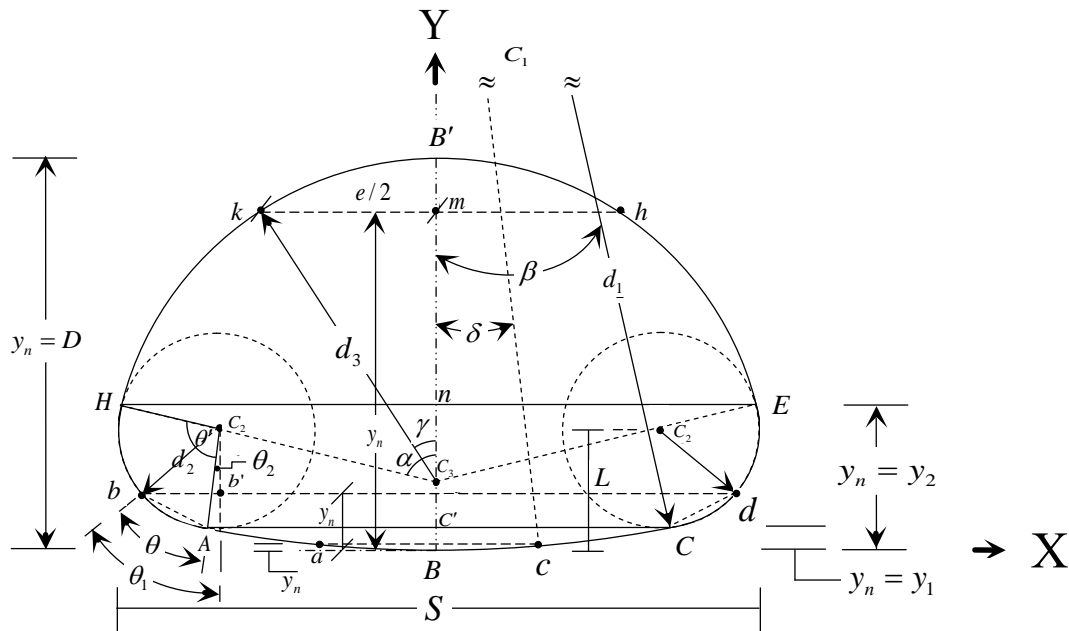


Figure 2.34 : Schéma de définition de l'état de l'écoulement dans la conduite en arc.

$$i. \quad 0 \leq y_n \leq y_1$$

a) Largeur du plan d'eau

Lorsque $0 \leq y_n \leq y_1$, la largeur du plan d'eau e correspond à la corde \overline{ac} . Les points a et c appartiennent au cercle (C_1) , de centre C_1 et de rayon d_1 . Ainsi :

L'angle δ est le demi angle au centre, tel que :

$$\sin(\delta) = \sqrt{1 - \cos^2(\delta)} \quad (2.334)$$

Et :

$$\cos(\delta) = \frac{d_1 - y_n}{d_1} = 1 - \frac{y_n}{d_1} \quad (2.335)$$

Alors :

$$\sin(\delta) = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{y_n}{d_1}\right)^2} = \sqrt{\frac{y_n}{d_1} \left(2 - \frac{y_n}{d_1}\right)} \quad (2.336)$$

La largeur du plan d'eau e est :

$$e = 2d_1 \sin(\delta) \quad (2.337)$$

Dans cette relation " $\sin(\delta)$ " est défini par la relation (2.336)

b) Périmètre mouillé

Le périmètre mouillé P correspond à la longueur de l'arc $a\widehat{B}c$, appartenant au cercle (C_1) , de centre C_1 et de rayon d_1 , tenant en compte la relation (2.335), l'angle δ est :

$$\delta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{y_n}{d_1}\right) \quad (2.338)$$

Le périmètre mouillé P est par suite :

$$P = 2d_1\delta \quad (2.339)$$

c) Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A correspond à l'aire du segment circulaire $aBca$, appartenant au cercle (C_1) , de centre C_1 et de rayon d_1 . Ainsi :

$$A = d_1^2 [\delta - \sin(\delta)\cos(\delta)] \quad (2.340)$$

Où, les valeurs de $\cos(\delta)$, $\sin(\delta)$ et δ sont définis par les relations: (2.335), (2.336) et (2.338) respectivement.

$$ii. \quad y_1 \leq y_n \leq y_2$$

a) Largeur du plan d'eau

Lorsque: $y_1 \leq y_n \leq y_2$, la largeur du plan d'eau e correspond à \overline{bd} (figure 2.34). Le point b appartient au cercle de centre C_2 et de rayon d_2 . L'équation de ce cercle est :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (d_2)^2 \quad (2.341)$$

Où : x_0 et y_0 sont les coordonnées du point C_2 . Dans le système d'axes XBY de la figure (2.34), le point C_2 a pour coordonnées :

- $x_0 = -(S/2) + d_2$.
- $y_0 = L$.

Dans le même système d'axes, le point b a pour coordonnées $x = -e/2$ et $y = y_n$. La relation (2.341) s'écrit alors :

$$\left(-\frac{e}{2} + (S/2) - d_2\right)^2 + (y_n - L)^2 = (d_2)^2$$

Ou bien :

$$\left(\frac{e}{2} - (S/2) + d_2\right)^2 + (L - y_n)^2 = (d_2)^2 \quad (2.342)$$

La largeur du plan d'eau e est donc :

$$e = 2 \left[(S/2) - d_2 + \sqrt{(d_2)^2 - (L - y_n)^2} \right] \quad (2.343)$$

Ou bien :

$$e = 2d_2 \sin \theta_1 + S - 2d_2 \quad (2.344)$$

$$\text{Avec : } \sqrt{(d_2)^2 - (L - y_n)^2} = d_2 \sin \theta_1$$

b) Périmètre mouillé

Lorsque : $y_1 \leq y_n \leq y_2$, le périmètre mouillé P correspond à deux fois la longueur de l'arc bA , à laquelle il faut ajouter la longueur de l'arc de cercle $P_0 = \widehat{ABC}$. La longueur de l'arc \widehat{ABC} peut être évaluée à partir de la relation (2.337) pour $\delta = \beta$. Soit :

$$P_0 = 2d_1\beta \quad (2.345)$$

L'angle β figurant dans la relation (2.345) a été évaluée à partir de la relation (2.338) pour :

$y_n = y_1$, soit :

$$\beta = \cos^{-1} \left(1 - \frac{y_1}{d_1} \right) \quad (2.346)$$

D'où :

$$\cos \beta = 1 - \frac{y_1}{d_1} \quad (2.347)$$

La longueur de l'arc bA est tel que.

$$bA = 2d_2 \times \frac{\theta}{2} = d_2\theta \quad (2.348)$$

Où, l'angle θ est égal à la différence des angles θ_1 et θ_2 .

Pour évaluer l'angle θ_1 , écrivons d'abord que dans le triangle droit $\Delta C_2bb'$:

$$\cos(\theta_1) = \frac{L - y_n}{d_2} \quad (2.349)$$

Ou bien :

$$\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{L - y_n}{d_2}\right) \quad (2.350)$$

L'angle θ_2 a été évaluée à partir de la relation (2.350) pour $y_n = y_1$, soit :

$$\theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{L - y_1}{d_2}\right) \quad (2.351)$$

Tenant compte des relations (2.350) et (2.351), l'angle θ s'écrit :

$$\theta = \theta_1 - \theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{L - y_n}{d_2}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{L - y_1}{d_2}\right) \quad (2.352)$$

En tenant compte des relations (2.345) et (2.348), le périmètre mouillé P est donc tel que :

$$P = 2d_2\theta + 2d_1\beta \quad (2.353)$$

c) Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A correspondant à $y_1 \leq y_n \leq y_2$ est définie par l'espace $bBdb$ de la figure (2.34). L'aire de la section mouillée A peut être décomposée en trois aires qui sont :

- $2A_0$, où A_0 est l'aire de la section du segment circulaire bAb .
- A_1 , l'aire du trapèze $bACdb$ dont les caractéristiques sont :
 - Grande base = largeur du plan d'eau = e , définie par la relation (2.344)
 - Petite base = \overline{AC}
 - Hauteur = $y_n - y_1$
- A_b , l'aire du segment circulaire $ABCA$.

L'aire du segment circulaire bAb appartient au cercle (C_2) de centre C_2 et de rayon d_2 et d'angle au centre θ . Nous pouvons ainsi écrire que, pour θ exprimé en radian :

$$A_0 = \frac{(d_2)^2}{2}(\theta - \sin \theta)$$

Ou bien :

$$2A_0 = d_2^2(\theta - \sin \theta) \quad (2.354)$$

Où, l'angle θ est déterminé par la relation (2.352).

L'aire de la section mouillée A_1 du trapèze $bACdb$ s'écrit :

$$A_1 = \frac{(e + \overrightarrow{AC})}{2}(y_n - y_1) \quad (2.355)$$

Pour exprimer la longueur \overrightarrow{AC} , on considère le triangle $\Delta C_1 C' C$, nous pouvons écrire que :

$$\sin \beta = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} / d_1$$

Soit :

$$\overrightarrow{AC} = 2d_1 \sin \beta \quad (2.356)$$

La quantité $(\sin \beta)$ est déterminée à partir de la relation (2.336) pour $y_n = y_1$, soit :

$$\sin(\beta) = \sqrt{\frac{y_1}{d_1} \left(2 - \frac{y_1}{d_1} \right)} \quad (2.357)$$

En tenant compte des relations (2.344) et (2.356), la relation (2.355) s'écrit :

$$A_1 = \frac{(2d_2 \sin \theta_1 + S - 2d_2 + 2d_1 \sin \beta)(y_n - y_1)}{2}$$

Ou bien :

$$A_1 = (d_2 \sin \theta_1 + S/2 - d_2 + d_1 \sin \beta)(y_n - y_1) \quad (2.358)$$

L'aire A_b du segment circulaire $ABCA$ appartient au cercle (C_1) de centre C_1 et de rayon d_1 et de demi-angle au centre β . Nous pouvons ainsi écrire que, pour β exprimé en radian :

$$A_b = d_1^2 [\beta - \sin(\beta) \cos(\beta)] \quad (2.359)$$

Le demi-angle au centre β a été évalué par la relation (2.346), tandis que les quantités $\cos(\beta)$ et $\sin(\beta)$ sont exprimées par les relations (2.347) et (2.357) respectivement.

Nous prenons en compte les relations (2.354), (2.358) et (2.359), l'aire de la section A recherchée est donc :

$$A = 2A_0 + A_1 + A_b \quad (2.360)$$

Alors :

$$A = d_2^2 (\theta - \sin \theta) + (d_2 \sin \theta_1 + S/2 - d_2 + d_1 \sin \beta)(y_n - y_1) + d_1^2 [\beta - \sin(\beta) \cos(\beta)] \quad (2.361)$$

iii. $y_2 \leq y_n \leq D$

a) Largeur du plan d'eau

Lorsque : $y_2 \leq y_n \leq D$, la largeur du plan d'eau e correspond à la longueur du segment \overrightarrow{kh} . Soit :

$$e = 2d_3 \sin(\gamma)$$

Dans le triangle droit ΔC_3mk , nous pouvons écrire que :

$$\cos(\gamma) = \frac{y_n - (BB' - d_3)}{d_3} = \frac{y_n - (D - d_3)}{d_3} \quad (2.362)$$

Or :

$$\sin(\gamma) = \sqrt{1 - \cos^2(\gamma)} = \sqrt{1 - \left(\frac{y_n - (D - d_3)}{d_3} \right)^2} \quad (2.363)$$

La largeur du plan d'eau s'écrit alors :

$$e = 2d_3 \sqrt{1 - \left(\frac{y_n - (D - d_3)}{d_3} \right)^2} \quad (2.364)$$

b) Périmètre mouillé

Lorsque : $y_2 \leq y_n \leq D$, le périmètre mouillé P correspond à deux fois la longueur de l'arc kH , à laquelle il faut ajouter la longueur $HABCE$. Alors, le double de la longueur de l'arc kH est égale à la différence des longueurs des arcs $\widehat{EB'H}$ et $\widehat{hB'k}$.

Désignons par P_0 le périmètre correspondant à la longueur de l'arc $\widehat{hB'k}$. On peut écrire ainsi :

$$P_0 = 2d_3\gamma \quad (2.365)$$

En tenant compte de la relation (2.362), nous pouvons écrire que :

$$\gamma = \cos^{-1} \left[\frac{y_n - (D - d_3)}{d_3} \right] \quad (2.366)$$

Désignons par P_1 le périmètre correspondant à la longueur de l'arc $\widehat{EB'H}$. Soit ainsi :

$$P_1 = 2d_3\alpha \quad (2.367)$$

Le demi-angle au centre α peut être calculé à partir de la relation (2.366) pour $y_n = y_2$. Soit :

$$\alpha = \cos^{-1} \left[\frac{y_2 - (D - d_3)}{d_3} \right] \quad (2.368)$$

Désignons par P_2 le périmètre correspondant à la longueur $HABCE$. Soit :

$$P_2 = 2d_2\theta' + 2d_1\beta \quad (2.369)$$

Où, le demi-angle au centre β est donné par la relation (2.346), tandis que l'angle θ' est évalué par la relation (2.352) pour $y_n = y_2$, soit :

$$\theta' = \cos^{-1} \left(\frac{L - y_2}{d_2} \right) - \cos^{-1} \left(\frac{L - y_1}{d_2} \right) \quad (2.370)$$

En ayant recours aux relations (2.365), (2.367) et (2.369), le périmètre recherché est :

$$P = (P_1 - P_0) + P_2 = (2d_3\alpha - 2d_3\gamma) + 2d_2\theta' + 2d_1\beta$$

Ou bien, plus simplement :

$$P = 2d_3(\alpha - \gamma) + 2d_2\theta' + 2d_1\beta \quad (2.371)$$

c) Aire de la section mouillée

Lorsque : $y_2 \leq y_n \leq D$, l'aire de la section mouillée A est définie par l'espace $kHEhk$ de la figure (2.34), à laquelle il faut ajouter l'aire $HABCEH$. L'espace $kHEhk$ est égale à la différence des aires $HEB'H$ et $khB'k$. Soit ainsi :

A_0 : Est l'aire de la section du segment circulaire $HEB'H$. Alors :

$$A_0 = (d_3)^2 [\alpha - \sin(\alpha)\cos(\alpha)] \quad (2.372)$$

Avec :

- Le demi-angle au centre α est donné par la relation (2.368).
- La quantité $\cos(\alpha)$ est déterminée à partir de la relation (2.362) pour $y_n = y_2$. Par conséquent :

$$\cos(\alpha) = \frac{y_2 - (D - d_3)}{d_3}$$

- La quantité $\sin(\alpha)$ s'exprime à partir de la relation (2.363) pour $y_n = y_2$. Soit :

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \left(\frac{y_2 - (D - d_3)}{d_3} \right)^2} \quad (2.373)$$

A_1 : Est l'aire de la section du segment circulaire $khB'k$.

$$A_1 = (d_3)^2 [\gamma - \sin(\gamma)\cos(\gamma)] \quad (2.374)$$

Avec :

- Le demi-angle au centre γ est donné par la relation (2.366),
- La quantité $\cos(\gamma)$ est déterminée par la relation (2.362),
- La quantité $\sin(\gamma)$ est déterminée par la relation (2.363).

A_b : Est l'aire de l'espace $ABCA$ qui s'exprime par la relation (2.359).

A_c : L'aire de la section mouillée $HbACdEH$ est égale à la somme des aires des sections des segments $2A_{c1} = 2 \times (HAH)$ et le trapèze $A_{c2} = HACEH$ (Figure 2.34). Par conséquent :

- L'aire du segment A_{c1} s'écrit :

$$A_{c1} = \frac{(d_2)^2}{2} (\theta' - \sin \theta') \quad (2.375)$$

L'angle (θ') figurant dans cette dernière relation est donné par la relation (2.370).

- L'aire du trapèze A_{c2} s'écrit :

$$A_{c2} = \frac{(\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{AC})}{2}(y_2 - y_1) \quad (2.376)$$

Rappelons que la longueur \overrightarrow{AC} est donnée par la relation (2.356) comme suit :

$$\overrightarrow{AC} = 2d_1 \sin \beta \quad (2.356)$$

La longueur \overrightarrow{HE} peut être déduite à partir de la relation (2.343) pour $y_n = y_2$, soit :

$$\overrightarrow{HE} = 2 \left[(S/2) - d_2 + \sqrt{(d_2)^2 - (L - y_2)^2} \right] \quad (2.377)$$

En tenant compte des relations (2.356) et (2.377), la relation (2.376) s'écrit :

$$A_{c2} = \frac{2 \left[(S/2) - d_2 + \sqrt{(d_2)^2 - (L - y_2)^2} \right] + 2d_1 \sin \beta}{2} (y_2 - y_1)$$

Ou bien :

$$A_{c2} = \left[(S/2) - d_2 + \sqrt{(d_2)^2 - (L - y_2)^2} + d_1 \sin \beta \right] (y_2 - y_1) \quad (2.378)$$

En tenant compte des relations (2.375) et (2.378), l'aire de la section mouillée $HbACdEH$ est :

$$A_c = 2A_{c1} + A_{c2} = 2 \left[\frac{(d_2)^2}{2} (\theta' - \sin \theta') \right] + \left[(S/2) - d_2 + \sqrt{(d_2)^2 - (L - y_2)^2} + d_1 \sin \beta \right] (y_2 - y_1)$$

Ou bien :

$$A_c = \left[(d_2)^2 (\theta' - \sin \theta') \right] + \left[(S/2) - d_2 + \sqrt{(d_2)^2 - (L - y_2)^2} + d_1 \sin \beta \right] (y_2 - y_1) \quad (2.379)$$

Finalement, l'aire recherchée $A = A_0 - A_1 + (A_b + A_c)$. Où les sections A_b et A_c , sont données par les relations (2.359) et (2.379) respectivement. Compte tenu des relations (2.372) et (2.374) l'aire A recherchée, s'écrit :

$$A = (d_3)^2 [\alpha - \sin(\alpha)\cos(\alpha)] - (d_3)^2 [\gamma - \sin(\gamma)\cos(\gamma)] + A_b + A_c$$

Ou bien, plus simplement :

$$A = d_3^2 (\alpha - \gamma) - d_3^2 [\sin(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\gamma)\cos(\gamma)] + A_b + A_c \quad (2.380)$$

III. Caractéristiques de l'écoulement d'une conduite elliptique

La forme elliptique peut être déduite à partir de la forme en arc représentée par la figure 2.34. Dans ce cas il suffit de remplacer le rayon d_3 par le rayon d_1 et L par $D/2$. Où D est la hauteur ou le diamètre générateur de la conduite et L est la distance verticale entre le centre de cercle C_2 et le fond de la conduite. La forme elliptique obtenue est représentée dans la figure 2.35. Il convient toutefois de noter qu'en raison des rayons des segments des cercles, la forme elliptique n'est pas complètement formée ; la forme obtenue est considérée, plutôt, comme une pseudo-ellipse (Perez et al. 2015). Contrairement aux conduites en arc, les conduites elliptiques sont installées

horizontalement ou verticalement. Les conduites elliptiques horizontales sont installées avec le grand axe horizontal. Cette orientation offre l'avantage hydraulique de véhiculer un plus grand débit Q , pour la même profondeur y_n d'écoulement (*American Concrete Pipe Association (ACPA), 2007*). Les sections elliptiques peuvent transporter environ 25% plus d'eau que les sections d'arc typiques en raison de la plus grande section transversale et du rayon hydraulique. Les sections elliptiques verticales sont installées avec le grand axe vertical. Cette orientation fournit des vitesses d'auto curage plus élevées que celle horizontale pour le même débit.

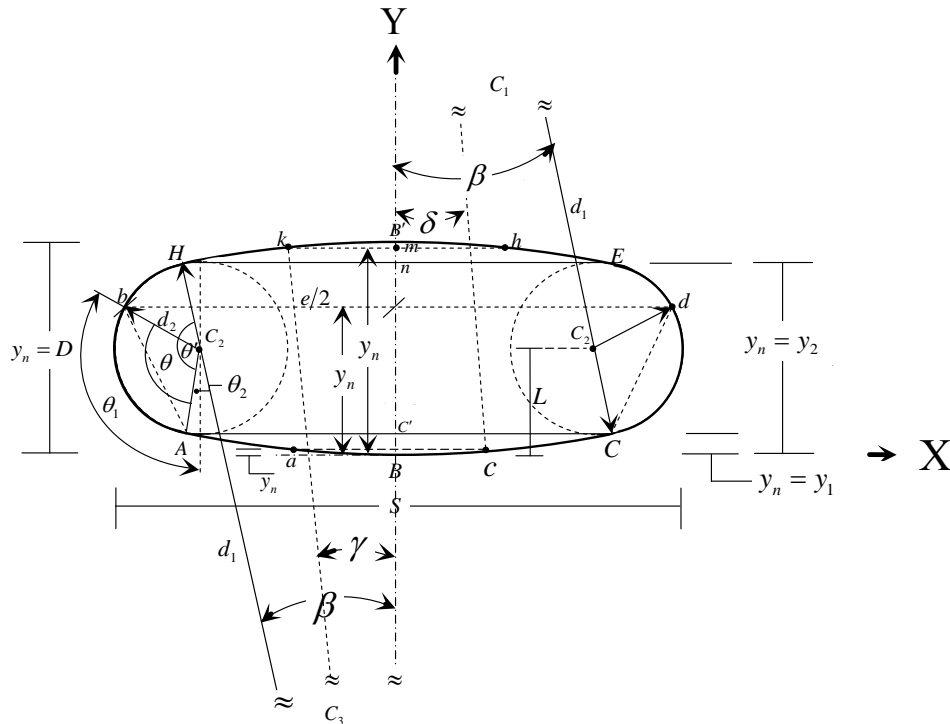


Figure 2.35 : Schéma de définition de l'état de l'écoulement dans la conduite elliptique.

Dans la conduite elliptique trois cas d'études peuvent se présenter selon la position de la profondeur normale y_n , où y_1 et y_2 définissent les limites des zones d'écoulement (Figure 2.35). La caractérisation d'une conduite en forme elliptique dépend principalement des rayons des segments des cercles, et puisque la conduite elliptique est un cas particulier de la conduite en arc, la différence réside, seulement, dans la partie la plus haute de la conduite.

Les caractéristiques géométriques des trois zones sont exposées ci-dessous, soit :

$$i. \quad 0 \leq y_n \leq y_1$$

Pour la première zone, où : $0 \leq y_n \leq y_1$, les expressions de la largeur du plan d'eau e , du périmètre mouillé P et de l'aire de la section mouillée A sont données par les relations (2.337), (2.339) et (2.340) respectivement, soit :

a) Largeur du plan d'eau

$$e = 2d_1 \sin(\delta) \quad (2.337)$$

b) Périmètre mouillé

$$P = 2d_1\delta \quad (2.339)$$

c) Aire de la section mouillée

$$A = d_1^2[\delta - \sin(\delta)\cos(\delta)] \quad (2.340)$$

$$ii. \quad y_1 \leq y_n \leq y_2$$

Pour la deuxième zone de la conduite elliptique, où : $y_1 \leq y_n \leq y_2$, les expressions de la largeur e , du périmètre mouillé P et de l'aire de la section mouillée A sont données par les relations (2.343), (2.353) et (2.361) respectivement, soit :

a) Largeur du plan d'eau

$$e = 2 \left[(S/2) - d_2 + \sqrt{(d_2)^2 - (L - y_n)^2} \right] \quad (2.343)$$

b) Périmètre mouillé

$$P = 2d_2\theta + 2d_1\beta \quad (2.353)$$

c) Aire de la section mouillée

$$A = d_2^2(\theta - \sin\theta) + (d_2 \sin\theta_1 + S/2 - d_2 + d_1 \sin\beta)(y_n - y_1) + d_1^2[\beta - \sin(\beta)\cos(\beta)] \quad (2.361)$$

$$iii. \quad y_2 \leq y_n \leq D$$

Dans la zone la plus haute de la conduite elliptique, les caractéristiques géométriques peuvent être déterminées avec les mêmes relations de la zone supérieure de la conduite en arc tout en remplaçant d_3 soit par d_1 et L par $D/2$. L'égalité $d_3 = d_1$ permet de conclure que le demi-angle au centre α devient égal à celui β , soit alors :

a) Largeur du plan d'eau

La largeur du plan d'eau pour cette zone peut, alors, être déduite de la relation (2.364) en remplaçant d_3 par d_1 , soit :

$$e = 2d_1 \sqrt{1 - \left(\frac{y_n - (D - d_1)}{d_1} \right)^2} \quad (2.381)$$

b) Périmètre mouillé

La relation (2.371) développée pour la conduite en arc permet de déduire l'expression du périmètre mouillé de la troisième zone de la conduite elliptique. Cela peut se faire en remplaçant d_3 par d_1 et α par β , soit :

$$P = 2d_1(2\beta - \gamma) + 2d_2\theta' \quad (2.382)$$

L'angle β est donné par la relation (2.346) et l'angle γ s'exprime à partir de la relation (2.366) pour $d_3 = d_1$, soit :

$$\gamma = \cos^{-1} \left[\frac{y_n - (D - d_1)}{d_1} \right] \quad (2.383)$$

L'angle θ' est déduit à partir de la relation (2.370) pour $L = D/2$, soit :

$$\theta' = \cos^{-1} \left(\frac{D - 2y_2}{2d_2} \right) - \cos^{-1} \left(\frac{D - 2y_1}{2d_2} \right) \quad (2.384)$$

c) Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée dans cette troisième zone est déduite de la relation (2.380) pour :

$d_3 = d_1$ et $\alpha = \beta$, soit :

$$A = d_1^2(\beta - \gamma) - d_1^2[\sin(\beta)\cos(\beta) - \sin(\gamma)\cos(\gamma)] + A_b + A_c$$

Cette dernière relation peut s'écrire en vertu de la relation (2.359) de l'aire partielle A_b , soit :

$$A = d_1^2(2\beta - \gamma) - d_1^2[2\sin(\beta)\cos(\beta) - \sin(\gamma)\cos(\gamma)] + A_c$$

Ou tel que :

$$A = d_1^2[(2\beta - \gamma) - 2\sin(\beta)\cos(\beta) + \sin(\gamma)\cos(\gamma)] + A_c \quad (2.385)$$

Où, l'aire partielle A_c est donnée par la relation (2.379).

Les angles γ et θ' sont donnés par les relations (2.383) et (2.384) respectivement.

IV. Etude de cas sur la forme elliptique

IV.1. Dimensions de la conduite

Les rayons d_1 et d_2 et la largeur S de la conduite représentés dans la figure 2.35 peuvent être exprimés en fonction de la hauteur totale de la conduite D . Les proportions d_1/D et d_2/D et S/D peuvent prendre différentes valeurs. Dans cette partie de ce chapitre, nous prenons le cas d'une conduite elliptique dont les dimensions D , d_1 , d_2 et S sont déduites à partir du travail de [Perez et al. \(2015\)](#) sur le calcul des profondeurs normale et critique dans les conduites en arc et elliptiques. Ces dernières dimensions D , d_1 , d_2 et S ainsi que les proportions d_1/D et d_2/D et S/D sont regroupées dans le tableau 2.31.

Tableau 2.31 : Dimensions de la conduite elliptique étudiée.

$D = 2L$	11 pouces	
d_1	55 pouces	$d_1/D = 5$
d_2	4,5 pouces	$d_2/D = 9/22$
S	28,9 pouces	$S/D = 289/110$

Les limites des zones y_1 et y_2 (Figure 2.35) sont données comme suit :

La limite entre la première zone et la deuxième zone y_1 s'écrit d'après [Perez et al. \(2015\)](#) :

$$y_1 = \frac{1}{2}(d_1 + L) + \frac{(L - d_1)(d_1^2 - d_2^2)}{2 \left[\left(\frac{S}{2} - d_2 \right)^2 + (L - d_1)^2 \right]}$$

Tenant compte que $L = D/2$, cette dernière relation s'écrit :

$$y_1 = \frac{1}{2} \left(d_1 + \frac{D}{2} \right) + \frac{\left(\frac{D}{2} - d_1 \right) (d_1^2 - d_2^2)}{2 \left[\left(\frac{S}{2} - d_2 \right)^2 + \left(\frac{D}{2} - d_1 \right)^2 \right]} \quad (2.386)$$

A partir des paramètres du tableau 2.31, la limite y_1 devient :

$$y_1 = \frac{1}{2} \left(5D + \frac{D}{2} \right) + \frac{\left(\frac{D}{2} - 5D \right) \left[(5D)^2 - \left(\frac{9D}{22} \right)^2 \right]}{2 \left[\left(\frac{1}{2} \times \frac{289D}{110} - \frac{9D}{22} \right)^2 + \left(\frac{D}{2} - 5D \right)^2 \right]} \quad (2.387)$$

Ou bien :

$$y_1 = 0,09797D \quad (2.388)$$

D'après la figure 2.35, on peut déduire la limite entre la deuxième zone et la troisième zone, soit :

$$y_2 = D - y_1$$

Ou bien, en tenant compte de la relation (2.388) :

$$y_2 = 0,90203D \quad (2.389)$$

IV.2. Caractéristiques de l'écoulement

Les caractéristiques géométriques de la conduite et hydrauliques de l'écoulement pour les trois zones sont : la largeur du plan d'eau e , le périmètre mouillé P , l'aire de la section mouillée A et le rayon hydraulique R_h . Ces caractéristiques peuvent s'exprimer en fonction du taux de remplissage $\eta = y_n / D$. Où y_n est la profondeur de l'écoulement et D est la hauteur totale de la conduite ou diamètre générateur. Rappelons que les trois zones sont limitées par les intervalles suivants : $0 \leq y_n \leq y_1$, $y_1 \leq y_n \leq y_2$ et $y_2 \leq y_n \leq D$. en divisant tous les membres de ces derniers intervalles par la hauteur D et en tenant compte des expressions de y_1 et y_2 données par les relations (2.388) et (2.389) respectivement, on obtient les intervalles adimensionnels suivants : $0 \leq \eta \leq 0,09797$, $0,09797 \leq \eta \leq 0,90203$ et $0,90203 \leq \eta \leq 1$. Soit :

i. $0 \leq \eta \leq 0,09797$

a) Largeur du plan d'eau

Lorsque : $0 \leq \eta \leq 0,09797$, la largeur du plan d'eau e correspond à la corde \overrightarrow{ac} (figure 2.35) peut être déduite à partir des relations (2.336) et (2.337) pour $d_1 = 5D$, soit :

$$e = 2d_1 \sin(\delta) = 2 \times d_1 \sqrt{\frac{y_n}{d_1} \left(2 - \frac{y_n}{d_1} \right)}$$

Ou bien en tenant compte que $d_1 = 5D$:

$$e = 2 \times 5D \sqrt{\frac{y_n}{5D} \left(2 - \frac{y_n}{5D} \right)} = 2D \sqrt{\frac{y_n}{D} \left(10 - \frac{y_n}{D} \right)} \quad (2.390)$$

On sait que : $\eta = y_n / D$ d'où :

$$e = 2\sqrt{\eta(10 - \eta)}D \quad (2.391)$$

b) Périmètre mouillé

Conformément à la relation (2.339), le périmètre mouillé P correspond à la longueur de l'arc \widehat{aBc} , appartenant au cercle (C_1) , de centre C_1 et de rayon $d_1 = 5D$, soit :

$$P = 2 \times 5D \times \delta$$

Selon la relation (2.338), l'angle $\delta = \cos^{-1} \left(1 - \frac{y_n}{5D} \right) = \cos^{-1}(1 - 0,2\eta)$. Le périmètre mouillé P

s'écrit alors :

$$P = [10 \cos^{-1}(1 - 0,2\eta)]D \quad (2.392)$$

Définissons la fonction :

$$U(\eta) = 10 \cos^{-1}(1 - 0,2\eta) \quad (2.393)$$

La relation (2.392) devient :

$$P = D \times U(\eta) \quad (2.394)$$

c) Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A correspond à l'aire du segment circulaire $aBca$ appartenant au cercle (C_1) , de centre C_1 et de rayon $d_1 = 5D$. De ce fait, la relation (2.340) s'écrit :

$$A = (5D)^2 [\delta - \sin(\delta)\cos(\delta)]$$

En tenant en compte des relations (2.335), (2.336) et (2.338) et que $d_1 = 5D$, l'expression de l'aire de la section mouillée devient :

$$A = (5D)^2 \times \left[\cos^{-1} \left(1 - \frac{y_n}{5D} \right) - \sqrt{\frac{y_n}{5D} \left(2 - \frac{y_n}{5D} \right)} \times \left(1 - \frac{y_n}{5D} \right) \right]$$

Ou bien, en considérant que $\eta = y_n / D$:

$$A = (5D)^2 \times \left[\cos^{-1} \left(1 - \frac{\eta}{5} \right) - \sqrt{\frac{\eta}{5} \left(2 - \frac{\eta}{5} \right)} \times \left(1 - \frac{\eta}{5} \right) \right] \quad (2.395)$$

Après simplification et réarrangement, la relation (2.395) mène à :

$$A = 25 \left[\cos^{-1}(1 - 0,2\eta) - 0,2(1 - 0,2\eta) \sqrt{\eta(10 - \eta)} \right] D^2 \quad (2.396)$$

Définissons la fonction :

$$\Gamma(\eta) = 25 \left[\cos^{-1}(1 - 0,2\eta) - 0,2(1 - 0,2\eta) \sqrt{\eta(10 - \eta)} \right] \quad (2.397)$$

La relation (2.396) s'écrit alors :

$$A = D^2 \times \Gamma(\eta) \quad (2.398)$$

d) Rayon hydraulique

Les relations (2.394) et (2.398) permettent de déduire l'expression du rayon hydraulique

$R_h = A / P$, soit :

$$R_h = D \frac{\Gamma(\eta)}{U(\eta)} \quad (2.399)$$

ii. $0,09797 \leq \eta \leq 0,90203$

a) Largeur du plan d'eau

Lorsque : $0,09797 \leq \eta \leq 0,90203$, la largeur du plan d'eau e correspond à \overline{bd} (figure 2.35). Le point b appartient au cercle de centre C_2 et de rayon $d_2 = \frac{9}{22}D$. En ayant recours à la relation

(2.343), la largeur du plan d'eau s'écrit pour $L = D/2$, $d_2 = (9/22)D$ et $S = (289/110)D$:

$$\begin{aligned} e &= 2 \left[(S/2) - d_2 + \sqrt{(d_2)^2 - (L - y_n)^2} \right] = 2 \left[\left(\frac{289}{110} D / 2 \right) - \frac{9}{22} D + \sqrt{\left(\frac{9}{22} D \right)^2 - \left(\frac{D}{2} - y_n \right)^2} \right] \\ &= \left(\sqrt{\frac{81}{121} - \left(2 \frac{y_n}{D} - 1 \right)^2} + \frac{199}{110} \right) D \end{aligned}$$

Ou bien, en tenant compte que : $\eta = y_n/D$, la largeur du plan d'eau e prend la forme définitive suivante :

$$e = \left(\sqrt{\frac{81}{121} - (2\eta - 1)^2} + \frac{199}{110} \right) D \quad (2.400)$$

b) Périmètre mouillé

Lorsque : $0,09797 \leq \eta \leq 0,90203$, le périmètre mouillé P correspond à la longueur $bABcd$. Son expression peut être tirée à partir de la relation (2.353) pour $d_1 = 5D$ et $d_2 = (9/22)D$, soit :

$$P = 2 \times \frac{9}{22} D \times \theta + 2 \times 5D \times \beta$$

Ou bien :

$$P = \frac{9}{11} D \times \theta + 10D \times \beta \quad (2.401)$$

Le demi-angle (β) et l'angle (θ) sont donnés par les relations (2.346) et (2.352) respectivement.

Ils prennent pour valeurs, pour $y_1 = 0,09797$, $d_1 = 5D$, $d_2 = (9/22)D$, $L = D/2$ et $\eta = y_n/D$:

$$\beta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{y_1}{d_1}\right) = \cos^{-1}\left(1 - \frac{0,09797D}{5D}\right) = 0,19829 \text{ radians} \quad (2.402)$$

Et :

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{L - y_n}{d_2}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{L - y_1}{d_2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\frac{D}{2} - y_n}{(9/22)D}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{\frac{D}{2} - 0,09797D}{(9/22)D}\right)$$

Ou bien :

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9}\eta\right) - 0,18610 \quad (2.403)$$

En tenant compte des relations (2.402) et (2.403), la relation (2.401) s'écrit alors :

$$P = \left[\frac{9}{11} D \times \cos^{-1}\left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9}\eta\right) - 0,15226D \right] + (10D \times 0,19829)$$

Ou bien, plus simplement :

$$P = \left[\frac{9}{11} \cos^{-1}\left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9}\eta\right) + 1,83061 \right] D \quad (2.404)$$

Définissons la fonction :

$$W(\eta) = \frac{9}{11} \cos^{-1}\left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9}\eta\right) + 1,83061 \quad (2.405)$$

La relation (2.404) s'écrit alors plus simplement :

$$P = D \times W(\eta) \quad (2.406)$$

c) Aire de la section mouillée

Puisque : $0,09797 \leq \eta \leq 0,90203$, l'aire de la section mouillée A correspondant à l'espace $bBdb$ de la figure (2.35) est définie par la relation (2.361) pour : $y_1 = 0,09797$, $d_1 = 5D$, $d_2 = (9/22)D$ et $S = (289/110)D$, Soit :

$$A = \left(\frac{9}{22}D\right)^2 (\theta - \sin \theta) + \left[\frac{9}{22} D \sin \theta_1 + \frac{(289/110)D}{2} - \frac{9}{22} D + 5D \sin \beta \right] \times (y_n - 0,09797D) + (5D)^2 [\beta - \sin(\beta)\cos(\beta)] \quad (2.407)$$

Tenant compte de la relation (2.349), nous pouvons écrire que :

$$\sin \theta_1 = \sqrt{1 - (\cos \theta_1)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{L - y_n}{d_2} \right)^2} = \sqrt{1 - \left[\frac{(D/2) - y_n}{(9/22)D} \right]^2}$$

Ou bien :

$$\sin(\theta_1) = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9}\eta \right)^2} \quad (2.408)$$

En tenant compte des relations (2.402), (2.403) et (2.408), la relation (2.407) s'écrit :

$$A = \left(\frac{9}{22}D \right)^2 \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9}\eta \right) - 0,1861 - \sin \left[\cos^{-1} \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9}\eta \right) - 0,1861 \right] \right\} \\ + \left[\frac{9}{22}D \sqrt{1 - \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9}\eta \right)^2} + \frac{(289/110)D}{2} - \frac{9}{22}D + 5D \sin(0,19829) \right] (y_n - 0,09797D) + (5D)^2 [0,19829 - \sin(0,19829) \cos(0,19829)]$$

Ou bien, en tenant compte que $\eta = y_n/D$:

$$A = \left\langle \begin{array}{l} \frac{81}{484} \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9}\eta \right) - 0,1861 - \sin \left[\cos^{-1} \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9}\eta \right) - 0,1861 \right] \right\} \\ + \left[\frac{9}{22} \sqrt{1 - \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9}\eta \right)^2} + 1,8895 \right] (\eta - 0,09797) + 0,12892 \end{array} \right\rangle D^2 \quad (2.409)$$

Définissons, par souci de simplification d'écriture, la fonction :

$$X(\eta) = \frac{81}{484} \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9}\eta \right) - 0,1861 - \sin \left[\cos^{-1} \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9}\eta \right) - 0,1861 \right] \right\} \\ + \left[\frac{9}{22} \sqrt{1 - \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9}\eta \right)^2} + 1,8895 \right] (\eta - 0,09797) + 0,12892 \quad (2.410)$$

La relation (2.409) s'écrit alors :

$$A = X(\eta) \times D^2 \quad (2.411)$$

d) Rayon hydraulique

Le rayon hydraulique $R_h = A/P$ s'écrit, en ayant recours aux relations (2.406) et (2.411) :

$$R_h = \frac{X(\eta)}{W(\eta)} D \quad (2.412)$$

iii. $0,90203 \leq \eta \leq 1$

a) Largeur du plan d'eau

Dans cet intervalle du taux de remplissage η , la largeur du plan d'eau e est déduite à partir de la relation (2.381) pour $d_1 = 5D$ et $\eta = y_n/D$, ainsi :

$$e = 2d_1 \sqrt{1 - \left(\frac{y_n + (d_1 - D)}{d_1} \right)^2} = 2 \times 5D \sqrt{1 - \left(\frac{y_n + (5D - D)}{5D} \right)^2}$$

Ou bien :

$$e = 2D \sqrt{25 - (\eta + 4)^2} \quad (2.413)$$

b) Périmètre mouillé

Lorsque : $0,90203 \leq \eta \leq 1$, le périmètre mouillé P peut donc être évalué en vertu de la relation (2.382) pour : $d_1 = 5D$ et $d_2 = (9/22)D$, soit :

$$P = 2(5D)(2\beta - \gamma) + 2 \left(\frac{9}{22} D \right) \theta'$$

Ou bien :

$$P = \left[10(2\beta - \gamma) + \frac{9}{11} \theta' \right] D \quad (2.414)$$

L'angle (θ') est évalué par la relation (2.384) pour : $d_2 = (9/22)D$, $y_1 = 0,09797D$ et $y_2 = 0,90203D$, soit :

$$\theta' = \cos^{-1} \left[\frac{D - 2 \times 0,90203D}{2 \times (9D/22)} \right] - \cos^{-1} \left[\frac{D - 2 \times 0,09797D}{2 \times (9D/22)} \right] = 2,76940 \text{ radians} \quad (2.415)$$

En plus, le demi-angle (γ) est exprimé par la relation (2.383) pour : $d_1 = 5D$ et $\eta = y_n/D$, soit :

$$\gamma = \cos^{-1} \left[\frac{y_n - (D - 5D)}{5D} \right] = \cos^{-1}(0,2\eta + 0,8) \quad (2.416)$$

En tenant compte que : $\beta = 0,19829$ radians et en ayant recours aux relations (2.415) et (2.416), la relation (2.414) devient :

$$P = \left\{ 10 \left[2 \times 0,19829 - \cos^{-1}(0,2\eta + 0,8) \right] + \frac{9}{11} \times 2,76940 \right\} D$$

Ou bien :

$$P = \left[6,23161 - 10 \cos^{-1}(0,2\eta + 0,8) \right] D \quad (2.417)$$

Définissons la fonction :

$$Y(\eta) = 6,23161 - 10 \cos^{-1}(0,2\eta + 0,8) \quad (2.418)$$

La relation (2.417) s'écrit alors :

$$P = D \times Y(\eta) \quad (2.419)$$

c) Aire de la section mouillée

Lorsque : $0,90203 \leq \eta \leq 1$, l'aire de la section mouillée A correspondant à l'espace $kHABCEhk$ de la figure (2.35) est définie par la relation (2.385) pour : $d_1 = 5D$, soit :

$$A = 25D^2 \left[(2\beta - \gamma) - 2 \sin(\beta) \cos(\beta) + \sin(\gamma) \cos(\gamma) \right] + A_c \quad (2.420)$$

Notons que $\beta = 0,19829$ radians et le demi-angle γ est donné par la relation (2.416) qui peut s'écrire :

$$\cos(\gamma) = 0,2\eta + 0,8 \quad (2.421)$$

Et :

$$\sin(\gamma) = \sqrt{1 - \cos^2(\gamma)} = \sqrt{1 - (0,2\eta + 0,8)^2} \quad (2.422)$$

En tenant compte de toutes ces dernières considérations et de la relation (2.416), la relation (2.420) s'écrit alors:

$$A = 25D^2 \left\{ \left[2 \times 0,19829 - \cos^{-1}(0,2\eta + 0,8) \right] - 2 \sin(0,19829) \cos(0,19829) \right\} + A_c$$

Ou bien :

$$A = 25D^2 \left\{ 0,01031 - \cos^{-1}(0,2\eta + 0,8) + (0,2\eta + 0,8) \sqrt{1 - (0,2\eta + 0,8)^2} \right\} + A_c \quad (2.423)$$

Où, l'aire A_c est exprimée par la relation (2.379) pour : $y_1 = 0,09797D$, $y_2 = 0,90203D$, $d_1 = 5D$ et $d_2 = (9/22)D$, $S = (289/110)D$, $L = D/2$, $\beta = 0,19829$ radians et $\theta' = 2,76940$ radians, soit :

Ou bien plus simplement:

$$A_c = 1,98273D^2 \quad (2.424)$$

En vertu de cette dernière relation, la relation (2.423) devient :

$$A = 25D^2 \left\{ 0,01031 - \cos^{-1}(0,2\eta + 0,8) + (0,2\eta + 0,8) \sqrt{1 - (0,2\eta + 0,8)^2} \right\} + 1,98273D^2 \quad (2.425)$$

Ou bien, finalement :

$$A = \left[2,24057 - 25 \cos^{-1}(0,2\eta + 0,8) + 25(0,2\eta + 0,8) \sqrt{1 - (0,2\eta + 0,8)^2} \right] D^2 \quad (2.426)$$

Définissons, par souci de simplification d'écriture, la fonction :

$$Z(\eta) = 2,24057 - 25 \cos^{-1}(0,2\eta + 0,8) + 25(0,2\eta + 0,8) \sqrt{1 - (0,2\eta + 0,8)^2} \quad (2.427)$$

La relation (2.426) s'écrit alors plus simplement :

$$A = D^2 Z(\eta) \quad (2.428)$$

d) Rayon hydraulique

Lorsque : $0,90203 \leq \eta \leq 1$, le rayon hydraulique $R_h = A / P$ s'exprime, compte tenu des relations (2.419) et (2.428), comme suit :

$$R_h = D \frac{Z(\eta)}{Y(\eta)} \quad (2.429)$$

V. Etude du coefficient de résistance à l'écoulement de Chézy

L'objectif de ce paragraphe est l'étude du coefficient de résistance à l'écoulement de Chézy dans une conduite elliptique et plus particulièrement dans le type de la conduite étudié dans le paragraphe IV.

V.1 Expression du coefficient de Chézy dans une conduite de forme elliptique

Pour déterminer les expressions du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy, on recourt toujours à la relation (2.45) présentée dans le chapitre I de cette deuxième partie, soit :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.45)$$

Le nombre de Reynolds R figurant dans cette relation est, pour rappel, donné par la relation (2.41) qui s'écrit :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} \quad (2.41)$$

Le rayon hydraulique R_h figurant dans les relations (2.45) et (2.41) s'exprime par les relations (2.399), (2.412) et (2.429) selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η .

Pour le cas particulier de la conduite de forme elliptique représentée par la figure 2.35 et étudiée dans le paragraphe IV, les fonctions $Y(\eta)$ et $Z(\eta)$ figurant dans la relation (2.429) sont données par les relations (2.418) et (2.427) respectivement, et l'on peut aisément montrer que : $Y(\eta=1) \cong 6,23161$ et $Z(\eta=1) \cong 2,24057$. Par suite, le rayon hydraulique $R_{h,p}$ à l'état plein est, en vertu de la relation (2.429) :

$$R_{h,p} \cong 0,35955D \quad (2.430)$$

Le nombre de Reynolds R_p à l'état plein de la conduite s'écrit en vertu des relations (2.41) et (2.430), soit :

$$R_p \cong 9,75668 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} \quad (2.431)$$

En ayant recours aux relations (2.399), (2.412) et (2.429), nous pouvons écrire que pour :

$$i. \quad 0 \leq \eta \leq 0,09797$$

La relation (2.41) mène à :

$$R = 32\sqrt{2} \left[\frac{\Gamma(\eta)}{U(\eta)} \right]^{3/2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} \quad (2.432)$$

Ou bien, en tenant compte de la relation (2.431) :

$$R = 4,63834 \left[\frac{\Gamma(\eta)}{U(\eta)} \right]^{3/2} R_p \quad (2.433)$$

En vertu des relations (2.399) et (2.433), la relation (2.45) mène à :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[\Gamma(\eta)/U(\eta)]} + \frac{2,16457}{R_p[\Gamma(\eta)/U(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.434)$$

ii. $0,09797 \leq \eta \leq 0,90203$

La relation (2.41) permet d'écrire que :

$$R = 32\sqrt{2} \left[\frac{X(\eta)}{W(\eta)} \right]^{3/2} \frac{\sqrt{giD^3}}{\nu} \quad (2.435)$$

Ou bien, en vertu de la relation (2.431) :

$$R = 4,63834 \left[\frac{X(\eta)}{W(\eta)} \right]^{3/2} R_p \quad (2.436)$$

En vertu des relations (2.412) et (2.436), la relation (2.45) mène à :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[X(\eta)/W(\eta)]} + \frac{2,16457}{R_p[X(\eta)/W(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.437)$$

iii. $0,90203 \leq \eta \leq 1$

La relation (2.41) mène à la relation suivante :

$$R = 32\sqrt{2} \left[\frac{Z(\eta)}{Y(\eta)} \right]^{3/2} \frac{\sqrt{giD^3}}{\nu} \quad (2.438)$$

Ou bien, d'après la relation (2.431) :

$$R = 4,63834 \left[\frac{Z(\eta)}{Y(\eta)} \right]^{3/2} R_p \quad (2.439)$$

La relation (2.45) conduit à, selon les relations (2.429) et (2.439) :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[Z(\eta)/Y(\eta)]} + \frac{2,16457}{R_p[Z(\eta)/Y(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.440)$$

Dans les relations (2.434), (2.437) et (2.440), ε/D représente la rugosité relative de la conduite étudiée. Au regard de ces relations, il apparaît que C/\sqrt{g} dépend de trois paramètres qui sont la rugosité relative ε/D , le taux de remplissage η et le nombre de Reynolds R_p à l'état plein. Nous pouvons alors écrire la relation fonctionnelle suivante :

$$C/\sqrt{g} = f(\varepsilon/D ; \eta ; R_p) \quad (2.441)$$

V.2. Variation du coefficient de Chézy

Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η , les relations (2.434), (2.437) et (2.440) ont été représentées graphiquement sur les figures (2.36 à 2.40) pour quelques valeurs de la rugosité relative ε/D et de nombre de Reynolds à l'état plein R_p . Les figures 2.36 à 2.40 ont été tracées en tenant compte des tableaux 2.32 à 2.36 respectivement. Ces tableaux ont été obtenus à partir des relations (2.434), (2.437) et (2.440).

Tableau 2.32 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 0$

$0 \leq \eta \leq 0,09797$							
$\varepsilon/D = 0$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$U(\eta)$	$\Gamma(\eta)$	$\Gamma(\eta)/U(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,01000	0,63256	0,00422	0,00666	2,26381	7,92066	13,57751	19,23437
0,02000	0,89473	0,01192	0,01332	4,81641	10,47326	16,13012	21,78697
0,03000	1,09599	0,02189	0,01997	6,30887	11,96572	17,62258	23,27943
0,04000	1,26576	0,03369	0,02662	7,36729	13,02414	18,68099	24,33785
0,05000	1,41539	0,04707	0,03326	8,18787	13,84472	19,50158	25,15843
0,09797	1,98287	0,12892	0,06502	10,65842	16,31528	21,97213	27,62898
$0,09797 \leq \eta \leq 0,90203$							
η	$W(\eta)$	$X(\eta)$	$X(\eta)/W(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,09797	1,98287	0,12892	0,06502	10,65842	16,31528	21,97213	27,62898
0,10000	2,00342	0,13292	0,06635	10,73318	16,39003	22,04688	27,70374
0,30000	2,69786	0,60066	0,22264	15,19456	20,85142	26,50827	32,16512
0,50000	3,11580	1,12028	0,35955	16,96076	22,61761	28,27446	33,93132
0,70000	3,53374	1,63991	0,46407	17,90114	23,55800	29,21485	34,87171
0,86281	4,00805	2,02943	0,50634	18,22237	23,87922	29,53608	35,19293
0,90203	4,24874	2,11165	0,49701	18,15382	23,81067	29,46753	35,12438
$0,90203 \leq \eta \leq 1$							
η	$Y(\eta)$	$Z(\eta)$	$Z(\eta)/Y(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,90203	4,24874	2,11165	0,49701	18,15382	23,81067	29,46753	35,12438
0,92000	4,44036	2,14539	0,48316	18,04968	23,70653	29,36338	35,02024
0,94000	4,68086	2,17871	0,46545	17,91209	23,56895	29,22580	34,88265
0,96000	4,96585	2,20688	0,44441	17,74163	23,39848	29,05533	34,71219
0,98000	5,33688	2,22865	0,41759	17,51227	23,16912	28,82597	34,48283
1,00000	6,23161	2,24057	0,35955	16,96076	22,61761	28,27446	33,93132

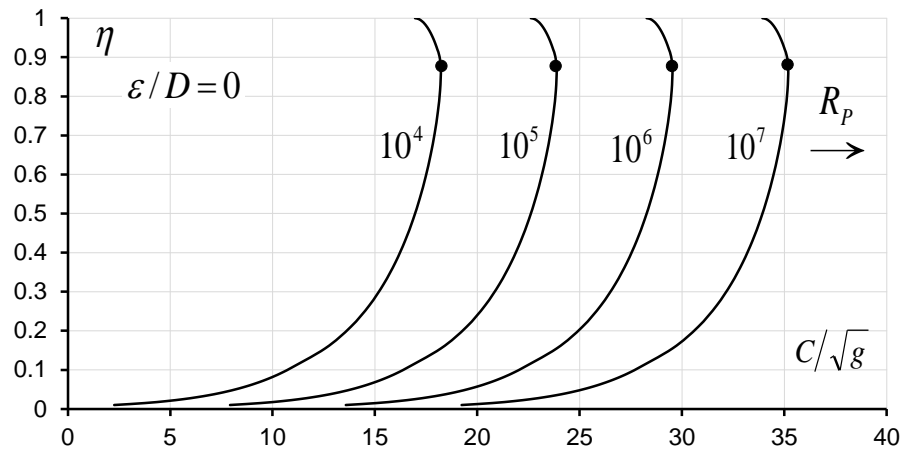


Figure 2.36 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 0$ (Ecoulement lisse).

(●) Valeurs maximales $c_{max.}/\sqrt{g}$ obtenues pour $\eta \cong 0,86281$

Tableau 2.33 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 10^{-5}$

0 ≤ η ≤ 0,09797							
ε/D = 10 ⁻⁵				R _p = 10 ⁴	R _p = 10 ⁵	R _p = 10 ⁶	R _p = 10 ⁷
η	U(η)	Γ(η)	Γ(η)/U(η)	C/√g	C/√g	C/√g	C/√g
0,01000	0,63256	0,004215	0,00666	2,26318	7,91441	13,51570	18,67672
0,02000	0,89473	0,011919	0,01332	4,81552	10,46443	16,04316	21,03106
0,03000	1,09599	0,021889	0,01997	6,30779	11,95491	17,51652	22,38165
0,04000	1,26576	0,033690	0,02662	7,36604	13,01166	18,55896	23,32659
0,05000	1,41539	0,047070	0,03326	8,18647	13,83078	19,36557	24,05144
0,09797	1,98287	0,128918	0,06502	10,65647	16,29580	21,78398	26,19050
0,09797 ≤ η ≤ 0,90203							
η	W(η)	X(η)	X(η)/W(η)	C/√g	C/√g	C/√g	C/√g
0,09797	1,98287	0,12892	0,06502	10,65647	16,29580	21,78398	26,19050
0,10000	2,00342	0,13292	0,06635	10,73120	16,37036	21,85689	26,25418
0,30000	2,69786	0,60066	0,22264	15,19095	20,81549	26,17071	29,94081
0,50000	3,11580	1,12028	0,35955	16,95616	22,57205	27,85295	31,33965
0,70000	3,53374	1,63991	0,46407	17,89593	23,50630	28,74118	32,07126
0,86281	4,00805	2,02943	0,50634	18,21692	23,82525	29,04329	32,31915
0,90203	4,24874	2,11165	0,49701	18,14842	23,75719	28,97887	32,26633
0,90203 ≤ η ≤ 1							
η	Y(η)	Z(η)	Z(η)/Y(η)	C/√g	C/√g	C/√g	C/√g
0,90203	4,24874	2,11165	0,49701	18,14842	23,75719	28,97887	32,26633
0,92000	4,44036	2,14539	0,48316	18,04435	23,65379	28,88096	32,18600
0,94000	4,68086	2,17871	0,46545	17,90687	23,51718	28,75149	32,07972
0,96000	4,96585	2,20688	0,44441	17,73652	23,34788	28,59090	31,94778
0,98000	5,33688	2,22865	0,41759	17,50732	23,12006	28,37454	31,76979
1,00000	6,23161	2,24057	0,35955	16,95616	22,57205	27,85295	31,33965

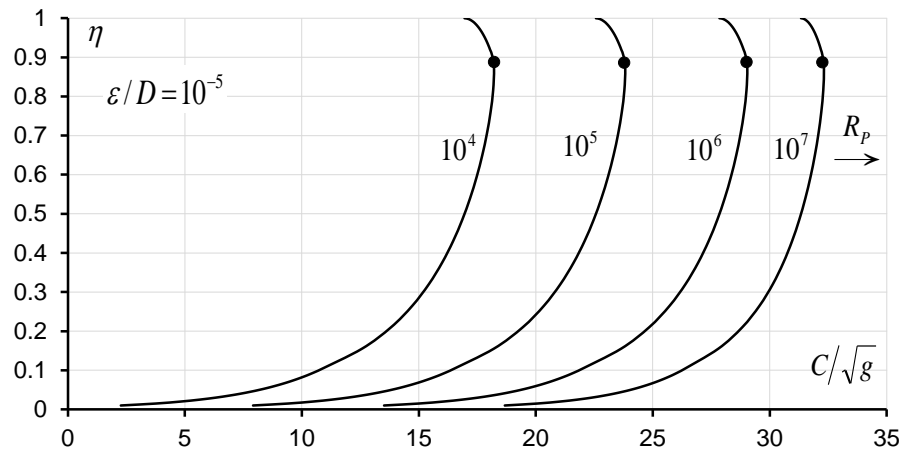


Figure 2.37 : Variation de C / \sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon / D = 10^{-5}$.

Tableau 2.34 : Valeurs de C / \sqrt{g} pour $\varepsilon / D = 10^{-4}$

$0 \leq \eta \leq 0,09797$							
$\varepsilon / D = 10^{-4}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$U(\eta)$	$\Gamma(\eta)$	$\Gamma(\eta)/U(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,01000	0,63256	0,00422	0,00666	2,25755	7,85884	13,01987	16,12311
0,02000	0,89473	0,01192	0,01332	4,80757	10,38631	15,37421	18,03638
0,03000	1,09599	0,02189	0,01997	6,29806	11,85967	16,72480	19,13120
0,04000	1,26576	0,03369	0,02662	7,35481	12,90211	17,66974	19,89830
0,05000	1,41539	0,04707	0,03326	8,17392	13,70871	18,39458	20,48822
0,09797	1,98287	0,12892	0,06502	10,63895	16,12713	20,53364	22,24209
$0,09797 \leq \eta \leq 0,90203$							
η	$W(\eta)$	$X(\eta)$	$X(\eta)/W(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,09797	1,98287	0,12892	0,06502	10,63895	16,12713	20,53364	22,24209
0,10000	2,00342	0,13292	0,06635	10,71350	16,20004	20,59732	22,29470
0,30000	2,69786	0,60066	0,22264	15,15864	20,51385	24,28396	25,39556
0,50000	3,11580	1,12028	0,35955	16,91520	22,19609	25,68280	26,60654
0,70000	3,53374	1,63991	0,46407	17,84945	23,08433	26,41440	27,24843
0,86281	4,00805	2,02943	0,50634	18,16840	23,38643	26,66230	27,46729
0,90203	4,24874	2,11165	0,49701	18,10034	23,32202	26,60948	27,42061
$0,90203 \leq \eta \leq 1$							
η	$Y(\eta)$	$Z(\eta)$	$Z(\eta)/Y(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,90203	4,24874	2,11165	0,49701	18,10034	23,32202	26,60948	27,42061
0,92000	4,44036	2,14539	0,48316	17,99694	23,22410	26,52915	27,34966
0,94000	4,68086	2,17871	0,46545	17,86032	23,09463	26,42287	27,25590
0,96000	4,96585	2,20688	0,44441	17,69103	22,93405	26,29092	27,13968
0,98000	5,33688	2,22865	0,41759	17,46320	22,71769	26,11294	26,98321
1,00000	6,23161	2,24057	0,35955	16,91520	22,19609	25,68280	26,60654

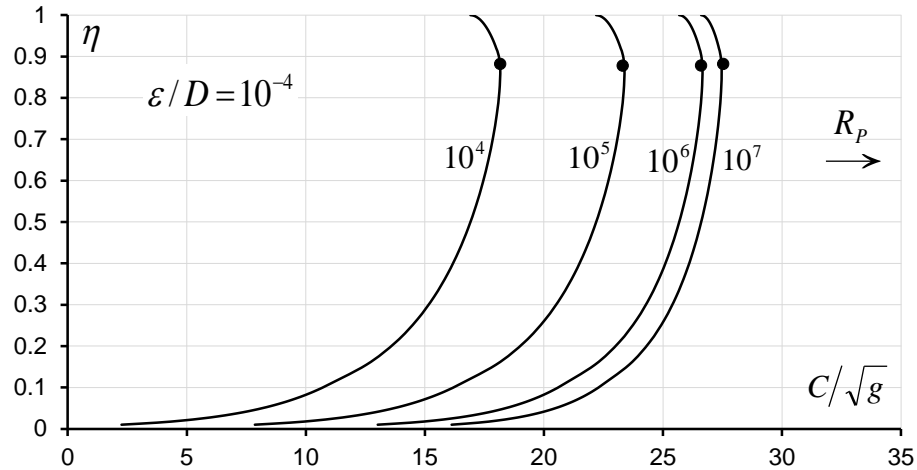


Figure 2.38 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-4}$

Tableau 2.35 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 10^{-3}$

$0 \leq \eta \leq 0,09797$							
$\varepsilon/D = 10^{-3}$				$R_p=10^4$	$R_p=10^5$	$R_p=10^6$	$R_p=10^7$
η	$U(\eta)$	$\Gamma(\eta)$	$\Gamma(\eta)/U(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,01000	0,63256	0,00422	0,00666	2,20199	7,36301	10,46625	11,18501
0,02000	0,89473	0,01192	0,01332	4,72946	9,71736	12,37953	12,91406
0,03000	1,09599	0,02189	0,01997	6,20282	11,06794	13,47434	13,92123
0,04000	1,26576	0,03369	0,02662	7,24525	12,01289	14,24145	14,63413
0,05000	1,41539	0,04707	0,03326	8,05186	12,73773	14,83136	15,18618
0,09797	1,98287	0,12892	0,06502	10,47027	14,87679	16,58524	16,84532
$0,09797 \leq \eta \leq 0,90203$							
η	$W(\eta)$	$X(\eta)$	$X(\eta)/W(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,09797	1,98287	0,12892	0,06502	10,47027	14,87679	16,58524	16,84532
0,10000	2,00342	0,13292	0,06635	10,54318	14,94047	16,63784	16,89547
0,30000	2,69786	0,60066	0,22264	14,85700	18,62711	19,73871	19,88347
0,50000	3,11580	1,12028	0,35955	16,53924	20,02595	20,94968	21,06446
0,70000	3,53374	1,63991	0,46407	17,42747	20,75755	21,59158	21,69295
0,86281	4,00805	2,02943	0,50634	17,72958	21,00544	21,81044	21,90759
0,90203	4,24874	2,11165	0,49701	17,66517	20,95262	21,76375	21,86179
$0,90203 \leq \eta \leq 1$							
η	$Y(\eta)$	$Z(\eta)$	$Z(\eta)/Y(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,90203	4,24874	2,11165	0,49701	17,66517	20,95262	21,76375	21,86179
0,92000	4,44036	2,14539	0,48316	17,56725	20,87230	21,69280	21,79220
0,94000	4,68086	2,17871	0,46545	17,43778	20,76601	21,59904	21,70027
0,96000	4,96585	2,20688	0,44441	17,27719	20,63407	21,48282	21,58635
0,98000	5,33688	2,22865	0,41759	17,06083	20,45609	21,32636	21,43308
1,00000	6,23161	2,24057	0,35955	16,53924	20,02595	20,94968	21,06446

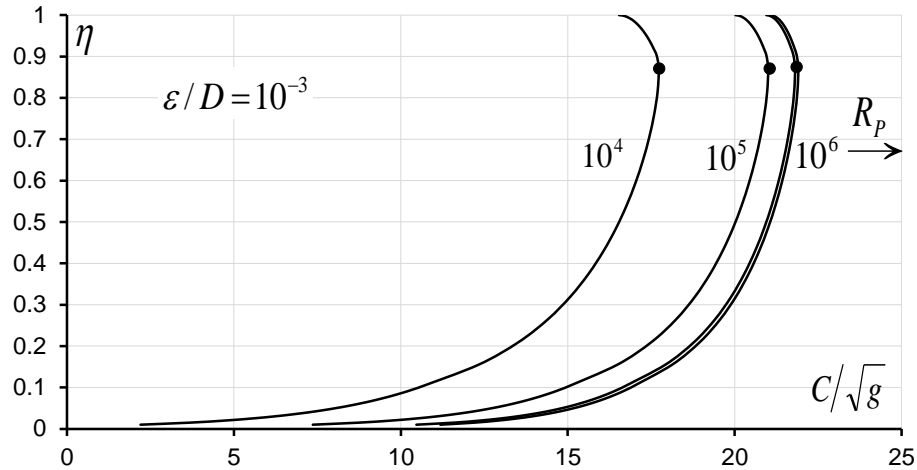


Figure 2.39 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-3}$

Tableau 2.36 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/D = 10^{-2}$

$0 \leq \eta \leq 0,09797$							
$\varepsilon/D = 10^{-2}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$U(\eta)$	$\Gamma(\eta)$	$\Gamma(\eta)/U(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,01000	0,63256	0,00422	0,00666	1,70616	4,80940	5,52816	5,61311
0,02000	0,89473	0,01192	0,01332	4,06050	6,72267	7,25720	7,31766
0,03000	1,09599	0,02189	0,01997	5,41109	7,81749	8,26437	8,31388
0,04000	1,26576	0,03369	0,02662	6,35603	8,58460	8,97728	9,02023
0,05000	1,41539	0,04707	0,03326	7,08088	9,17451	9,52932	9,56779
0,09797	1,98287	0,12892	0,06502	9,21994	10,92839	11,18847	11,21606
$0,09797 \leq \eta \leq 0,90203$							
η	$W(\eta)$	$X(\eta)$	$X(\eta)/W(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,09797	1,98287	0,12892	0,06502	9,21994	10,92839	11,18847	11,21606
0,10000	2,00342	0,13292	0,06635	9,28362	10,98099	11,23861	11,26592
0,30000	2,69786	0,60066	0,22264	12,97025	14,08186	14,22661	14,24157
0,50000	3,11580	1,12028	0,35955	14,36909	15,29283	15,40761	15,41938
0,70000	3,53374	1,63991	0,46407	15,10069	15,93473	16,03610	16,04647
0,86281	4,00805	2,02943	0,50634	15,34859	16,15359	16,25074	16,26067
0,90203	4,24874	2,11165	0,49701	15,29577	16,10690	16,20493	16,21496
$0,90203 \leq \eta \leq 1$							
η	$Y(\eta)$	$Z(\eta)$	$Z(\eta)/Y(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0,90203	4,24874	2,11165	0,49701	15,29577	16,10690	16,20493	16,21496
0,92000	4,44036	2,14539	0,48316	15,21544	16,03595	16,13535	16,14551
0,94000	4,68086	2,17871	0,46545	15,10916	15,94219	16,04341	16,05377
0,96000	4,96585	2,20688	0,44441	14,97722	15,82597	15,92950	15,94010
0,98000	5,33688	2,22865	0,41759	14,79923	15,66950	15,77622	15,78715
1,00000	6,23161	2,24057	0,35955	14,36909	15,29283	15,40761	15,41938

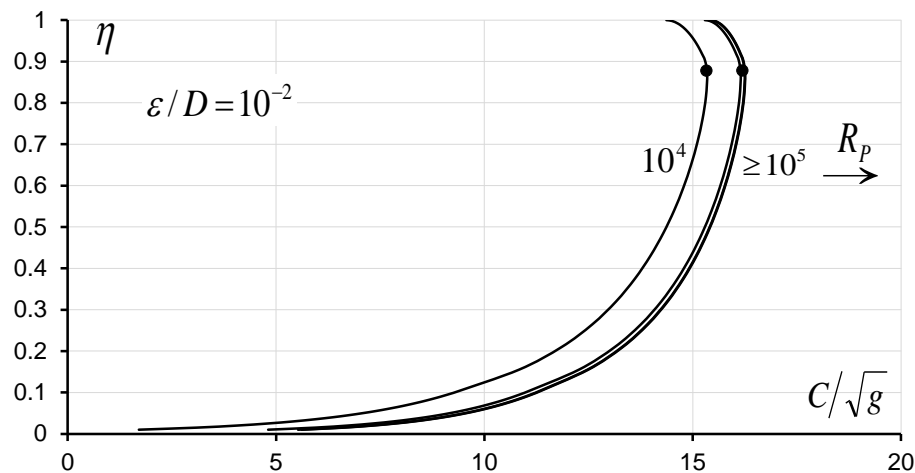


Figure 2.40 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-2}$

Les figures 2.36 à 2.40 montrent clairement que pour une même valeur du nombre de *Reynolds* R_p , le coefficient de *Chézy* adimensionnel C/\sqrt{g} augmente au fur et à mesure que le taux de remplissage η augmente jusqu'à une valeur maximale pour $\eta \cong 0,86281$, au-delà de cette valeur, on observe une décroissance relativement rapide du coefficient adimensionnel C/\sqrt{g} . Cette constatation n'a pas été marquée pour les formes des conduites étudiées précédemment, cela est dû à la forme spéciale de la conduite elliptique. La décroissance de la valeur du coefficient adimensionnel C/\sqrt{g} s'accompagne d'une augmentation de la profondeur normale y_n . Nous pouvons également observer que pour une valeur donnée du taux de remplissage η , le coefficient adimensionnel C/\sqrt{g} augmente avec l'augmentation de nombre de *Reynolds* R_p . Pour la valeur de la rugosité relative $\varepsilon/D = 10^{-2}$ d'où la conduite est à l'état rugueux, les courbes de variation du coefficient adimensionnel C/\sqrt{g} se confondent à partir de la valeur $R_p = 10^5$ et l'écoulement turbulent rugueux est atteint rapidement. Dans l'intervalle : $0,5 < \eta < 1$, on trouve deux valeurs de la profondeur normale de l'écoulement y_n pour la même valeur du coefficient de résistance C de *Chézy*.

En outre, on remarque que quelle que soit la valeur de la rugosité relative ε/D et de celle du nombre de *Reynolds* R_p , la valeur maximale C_{\max}/\sqrt{g} est atteinte pour le taux de remplissage $\eta \cong 0,86281$. On introduit cette dernière valeur de η dans la relation (2.437), on peut déterminer la valeur maximale du coefficient C de *Chézy*. Les fonctions $W(\eta)$ et $X(\eta)$ sont régies par les relations (2.405) et (2.410) respectivement, soit :

$$\bullet W(\eta=0,86281) = \frac{9}{11} \cos^{-1}\left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9}\eta\right) + 1,83061 = \frac{9}{11} \cos^{-1}\left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \times 0,86281\right) + 1,83061 = 4,00805$$

$$\bullet X(\eta=0,86281) = \frac{81}{484} \left\{ \cos^{-1}\left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9}\eta\right) - 0,1861 - \sin\left[\cos^{-1}\left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9}\eta\right) - 0,18610\right] \right\}$$

$$+ \left[\frac{9}{22} \sqrt{1 - \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9}\eta\right)^2} + 1,8895 \right] (\eta - 0,09797) + 0,12892$$

$$= \frac{81}{484} \left\{ \cos^{-1}\left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \times 0,86281\right) - 0,1861 - \sin\left[\cos^{-1}\left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \times 0,86281\right) - 0,18610\right] \right\}$$

$$+ \left[\frac{9}{22} \sqrt{1 - \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \times 0,86281\right)^2} + 1,8895 \right] (0,86281 - 0,09797) + 0,12892$$

$$= 2,02943$$

Ainsi, selon la relation (2.437), le coefficient de résistance à l'écoulement maximal C_{\max} de Chézy est :

$$C_{\max} = -4\sqrt{2g} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[2,02943/4,00805]} + \frac{2,16457}{R_p[2,02943/4,00805]^{3/2}}\right)$$

Soit :

$$C_{\max} = -4\sqrt{2g} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{7,49381} + \frac{6,00772}{R_p}\right) \quad (2.442)$$

Pour l'état plein de la conduite, correspondant à $\eta=1$, la relation (2.440) permet d'exprimer le coefficient de résistance à l'écoulement C_p de Chézy. Pour $\eta=1$, les fonctions $Y(\eta)$ et $Z(\eta)$ sont régies par les relations (2.418) et (2.427) respectivement, elles prennent les valeurs suivantes :

$$\bullet Y(\eta=1) = 6,23161 - 10 \cos^{-1}(0,2\eta + 0,8) = 6,23161 - 10 \cos^{-1}(0,2 \times 1 + 0,8) = 6,23161$$

$$\bullet Z(\eta=1) = 2,24057 - 25 \cos^{-1}(0,2\eta + 0,8) + 25(0,2\eta + 0,8) \sqrt{1 - (0,2\eta + 0,8)^2}$$

$$= 2,24057 - 25 \cos^{-1}(0,2 \times 1 + 0,8) + 25(0,2 \times 1 + 0,8) \sqrt{1 - (0,2 \times 1 + 0,8)^2} = 2,24057$$

Ainsi, selon la relation (2.440), le coefficient de résistance à l'écoulement à l'état plein C_p de Chézy s'écrit :

$$C_p = -4\sqrt{2g} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[2,24057/6,23161]} + \frac{2,16457}{R_p[2,24057/6,23161]^{3/2}}\right)$$

Soit :

$$C_p = -4\sqrt{2g} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{5,32133} + \frac{10,04}{R_p}\right) \quad (2.443)$$

V.3. Conductivité relative

L'aire de la section mouillée A ainsi que le rayon hydraulique R_h s'exprime par les relations que nous avons établies précédemment, selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η . C'est ainsi que pour :

$$i. \quad 0 \leq \eta \leq 0,09797$$

L'aire de la section mouillée A est donnée par la relation (2.398), tandis que le rayon hydraulique R_h s'exprime par la relation (2.399). Les fonctions $U(\eta)$ et $\Gamma(\eta)$ sont définies par les relations (2.393) et (2.397) respectivement.

En tenant compte de toutes ces relations, la relation (2.55) de Chézy citée dans le chapitre I de cette deuxième partie :

$$Q = CA\sqrt{R_h}i \quad (2.55)$$

devient :

$$Q = CD^{5/2} \frac{[\Gamma(\eta)]^{3/2}}{[U(\eta)]^{1/2}} \sqrt{i} \quad (2.444)$$

En faisant appel à la relation (2.57) de la conductivité relative :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} \quad (2.57)$$

la relation (2.444) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$Q^* = \frac{[\Gamma(\eta)]^{3/2}}{[U(\eta)]^{1/2}} \quad (2.445)$$

$$ii. \quad 0,09797 \leq \eta \leq 0,90203$$

Dans cet intervalle du taux de remplissage η , l'aire de la section mouillée A ainsi que le rayon hydraulique R_h sont donnés respectivement par les relations (2.411) et (2.412). Dans ces relations, les fonctions $W(\eta)$ et $X(\eta)$ sont définies par les relations (2.405) et (2.410) respectivement.

En ayant recours à ces relations, la relation (2.55) devient :

$$Q = CD^{5/2} \frac{[X(\eta)]^{3/2}}{[W(\eta)]^{1/2}} \sqrt{i} \quad (2.446)$$

La relation (2.446) s'écrit, en termes adimensionnels, en tenant compte de la relation (2.57):

$$Q^* = \frac{[X(\eta)]^{3/2}}{[W(\eta)]^{1/2}} \quad (2.447)$$

La relation (2.447) donne ainsi la conductivité relative de la deuxième zone.

iii. $0,90203 \leq \eta \leq 1$

Dans la gamme : $0,90203 \leq \eta \leq 1$, l'aire de la section mouillée A et le rayon hydraulique R_h sont donnés par les relations (2.428) et (2.429) respectivement, Où les fonctions $Y(\eta)$ et $Z(\eta)$ sont régies par les relations (2.418) et (2.427) respectivement.

En ayant recours à ces relations, la relation (2.55) devient :

$$Q = CD^{5/2} \frac{[Z(\eta)]^{3/2}}{[Y(\eta)]^{1/2}} \sqrt{i} \quad (2.448)$$

La relation (2.448) s'écrit, en termes adimensionnels, en tenant compte de la relation (2.57) :

$$Q^* = \frac{[Z(\eta)]^{3/2}}{[Y(\eta)]^{1/2}} \quad (2.449)$$

C'est la conductivité relative de la troisième zone.

V.4. Méthode de calcul du coefficient de résistance à l'écoulement

de Chézy par la méthode MMR

La relation (2.434), (2.437) ou (2.440) ne permet d'évaluer le coefficient C de Chézy que si le diamètre générateur D de la conduite elliptique est une donnée du problème. Comme pour les trois chapitres précédents, dans le cas où D n'est pas connu, il est tout de même possible de calculer la valeur de C , à condition d'avoir recours à la méthode du modèle rugueux (MMR). On doit rappeler que c'est l'un des avantages de cette méthode. Pour déterminer le coefficient C de Chézy, admettons les conditions suivantes :

- i. $\bar{D} \neq D$
- ii. $\bar{Q} = Q$
- iii. $\bar{i} = i$
- iv. $\bar{\eta} = \eta$
- v. $\bar{v} = v$

Rappelons que la conductivité relative est définie par la relation (2.57), soit :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} \quad (2.57)$$

Selon cette dernière relation et en tenant compte des conditions (ii) et (iii), la conductivité relative dans le modèle rugueux \bar{Q}^* est régie par des relations similaires aux relations (2.445), (2.447) et (2.449) selon la gamme de valeurs du taux de remplissage $\bar{\eta} = \eta$. Ainsi, pour :

$$i. \quad 0 \leq \eta \leq 0,09797$$

$$\bar{Q}^* = \frac{[\Gamma(\eta)]^{3/2}}{[U(\eta)]^{1/2}} \quad (2.450)$$

Les relations (2.62) :

$$\bar{Q} = \frac{Q}{\sqrt{128 g \bar{D}^5 i}} \quad (2.62)$$

et la relation (2.450) permettent de déduire que le diamètre générateur \bar{D} du modèle rugueux de référence peut s'écrire :

$$\bar{D} = \frac{[U(\eta)]^{0,2}}{2,639[\Gamma(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} \quad (2.451)$$

Pour : $0 \leq \eta \leq 0,09797$, le nombre de Reynolds \bar{R} , caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, s'exprime par une relation similaire à la relation (2.433), soit :

$$\bar{R} = 4,63834 \left[\frac{\Gamma(\eta)}{U(\eta)} \right]^{3/2} \bar{R}_p \quad (2.452)$$

$$ii. \quad 0,09797 \leq \eta \leq 0,90203$$

$$\bar{Q}^* = \frac{[X(\eta)]^{3/2}}{[W(\eta)]^{1/2}} \quad (2.453)$$

Les relations (2.62) et (2.453) permettent d'écrire que :

$$\bar{D} = \frac{[W(\eta)]^{0,2}}{2,639[X(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} \quad (2.454)$$

Dans la gamme : $0,09797 \leq \eta \leq 0,90203$, le nombre de Reynolds \bar{R} , caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, s'exprime par une relation similaire à la relation (2.436), soit :

$$\bar{R} = 4,63834 \left[\frac{X(\eta)}{W(\eta)} \right]^{3/2} \bar{R}_p \quad (2.455)$$

$$iii. \quad 0,90203 \leq \eta \leq 1$$

$$\bar{Q}^* = \frac{[Z(\eta)]^{3/2}}{[Y(\eta)]^{1/2}} \quad (2.456)$$

Nous pouvons déduire des relations (2.62) et (2.456) que :

$$\bar{D} = \frac{[Y(\eta)]^{0,2}}{2,639[Z(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} \quad (2.457)$$

Dans la gamme : $0,90203 \leq \eta \leq 1$, le nombre de Reynolds \bar{R} , caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, s'exprime par une relation similaire à la relation (2.439), soit :

$$\bar{R} = 4,63834 \left[\frac{Z(\eta)}{Y(\eta)} \right]^{3/2} \bar{R}_p \quad (2.458)$$

Les relations (2.451), (2.454) ou (2.457), permettent de calculer le diamètre générateur \bar{D} du modèle rugueux de référence, pour les valeurs connues du débit volume Q , de la pente i et du taux de remplissage η . Le diamètre générateur \bar{D} , la pente i , la viscosité cinématique ν et le taux de remplissage η permettent d'évaluer le nombre de Reynolds \bar{R} de l'écoulement dans le modèle rugueux, par application de l'une des relations (2.452), (2.455) ou (2.458). Dans ces relations, le nombre de Reynolds à l'état plein \bar{R}_p de l'écoulement dans le modèle rugueux s'exprime par une relation similaire à la relation (2.431), soit :

$$\bar{R}_p \cong 9,75668 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} \quad (2.459)$$

On rappelle que le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est donné par la relation (1.72) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon}{19R_h} + \frac{8,5}{R} \right) \right]^{-2/5} \quad (1.72)$$

Dans cette relation, le rayon hydraulique \bar{R}_h est défini par des relations similaires aux relations (2.399), (2.412) et (2.429) selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η . De même, le nombre de Reynolds \bar{R} est donné par l'une des relations (2.452), (2.455) ou (2.458). Ainsi :

i. $0 \leq \eta \leq 0,09797$

$$\bar{R}_h = \bar{D} \frac{\Gamma(\eta)}{U(\eta)} \quad (2.460)$$

La relation (1.72) s'écrit, en tenant compte des relations (2.452) et (2.460) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[\Gamma(\eta)/U(\eta)]} + \frac{1,83255}{[\Gamma(\eta)/U(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.461)$$

ii. $0,09797 \leq \eta \leq 0,90203$

$$\bar{R}_h = \bar{D} \frac{X(\eta)}{W(\eta)} \quad (2.462)$$

Tenant compte des relations (2.455) et (2.462), la relation (1.72) s'écrit :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[X(\eta)/W(\eta)]} + \frac{1,83255}{[X(\eta)/W(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.463)$$

iii. $0,90203 \leq \eta \leq 1$

$$\bar{R}_h = \bar{D} \frac{Z(\eta)}{Y(\eta)} \quad (2.464)$$

La relation (1.72) devient alors, en tenant compte des relations (2.458) et (2.464) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[Z(\eta)/Y(\eta)]} + \frac{1,83255}{[Z(\eta)/Y(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.465)$$

Ainsi, pour évaluer le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy, pour les valeurs connues des paramètres Q , η , ε , i et ν , les étapes suivantes sont recommandées :

- a) selon la valeur du taux de remplissage η , l'une des relations (2.451), (2.454) ou (2.457) permet d'évaluer le diamètre générateur \bar{D} du modèle rugueux de référence.
- b) Les paramètres connus \bar{D} , i et ν sont introduits dans la relation (2.459) pour le calcul du nombre de *Reynolds* à l'état plein \bar{R}_p de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence.
- c) Le facteur de correction ψ peut alors être évalué par l'une des relations (2.461), (2.463) ou (2.465) selon la valeur du taux de remplissage η .
- d) Enfin, le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy est déduit à partir de la relation (1.96), soit :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \quad (1.96)$$

V.5. Exemple d'application (01)

Pour le taux de remplissage $\eta = 0,7$, le débit $Q = 2,9 \text{ m}^3 / \text{s}$ et la pente de la conduite elliptique $i = 3 \cdot 10^{-5}$, calculer le coefficient de résistance C de Chézy, lorsque :

La viscosité cinématique : $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$;

La rugosité absolue : $\varepsilon = 10^{-4} \text{ m}$

Solution

- i. Pour la valeur du taux de remplissage $\eta = 0,7$, la surface libre de l'écoulement se trouve dans la deuxième zone de la conduite elliptique étudiée, alors : $0,09797 \leq \eta = 0,7 \leq 0,90203$, pour cet intervalle, le diamètre générateur \bar{D} du modèle rugueux de référence est donné par la

relation (2.454) et les fonctions $W(\eta)$ et $X(\eta)$ sont données par les relations (2.405) et (2.410) respectivement. Ainsi :

$$\begin{aligned} \bullet \quad W(\eta) &= \frac{9}{11} \cos^{-1} \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \eta \right) + 1,83061 = \frac{9}{11} \cos^{-1} \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \times 0,7 \right) + 1,83061 = 3,53374 \\ \bullet \quad X(\eta) &= \frac{81}{484} \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \eta \right) - 0,1861 - \sin \left[\cos^{-1} \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \eta \right) - 0,18610 \right] \right\} \\ &\quad + \left[\frac{9}{22} \sqrt{1 - \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \eta \right)^2} + 1,8895 \right] (\eta - 0,09797) + 0,12892 \\ &= \frac{81}{484} \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \times 0,7 \right) - 0,1861 - \sin \left[\cos^{-1} \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \times 0,7 \right) - 0,18610 \right] \right\} \\ &\quad + \left[\frac{9}{22} \sqrt{1 - \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \times 0,7 \right)^2} + 1,8895 \right] (0,7 - 0,09797) + 0,12892 \\ &= 1,63991 \end{aligned}$$

En considérant la relation (2.454), nous pouvons écrire que :

$$\bar{D} = \frac{[W(\eta)]^{0,2}}{2,639[X(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} = \frac{3,53374^{0,2}}{2,639 \times 1,63991^{0,6}} \left(\frac{2,9}{\sqrt{9,81 \times 3,10^{-5}}} \right)^{0,4} = 2,82174m$$

Par la suite, le nombre de *Reynolds* à l'état plein \bar{R}_p de l'écoulement dans le modèle rugueux est, selon la relation (2.459) :

$$\bar{R}_p = 9,75668 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 9,75668 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3,10^{-5} \times 2,82174^3}}{10^{-6}} = 793365,44$$

Le facteur ψ est par suite, selon la relation (2.463) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[X(\eta)/W(\eta)]} + \frac{1,83255}{[X(\eta)/W(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5}$$

Soit :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{0,0001/2,82174}{19[1,63991/3,53374]} + \frac{1,83255}{[1,63991/3,53374]^{3/2} \times 793365,44} \right) \right]^{-2/5} = 0,71225$$

Le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy est, selon la relation (1.96) :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8\sqrt{2 \times 9,81}}{0,71225^{5/2}} = 82,76628m^{0,5} / s$$

ii. Le diamètre D de la conduite est égal au diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence, corrigé par les effets du facteur ψ . Soit :

$$D = \psi \bar{D} = 0,71225 \times 2,82174 = 2,00979 \cong 2m$$

iii. Vérifions nos calculs en évaluant le coefficient C de Chézy par la relation (2.437). Le nombre de Reynolds R_p à l'état plein est, en vertu de la relation (2.431) :

$$R_p = 9,75668 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 9,75668 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3 \cdot 10^{-5} \times 2,00979^3}}{10^{-6}} = 476897,349$$

Ainsi, selon la relation (2.437), le coefficient C est :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[X(\eta)/W(\eta)]} + \frac{2,16457}{R_p[X(\eta)/W(\eta)]^{3/2}} \right)$$

Alors :

$$C = -4\sqrt{2 \times 9,81} \log \left(\frac{0,0001/2,00979}{14,8[1,63991/3,53374]} + \frac{2,16457}{476897,349 \times [1,63991/3,53374]^{3/2}} \right) \\ = 82,66258 m^{0,5} / s$$

Nous pouvons constater que l'écart relatif entre les valeurs de C calculées selon la méthode que nous avons présentée et la MMR est de :

$$\frac{\Delta C}{C} = 100 \times \frac{(82,76628 - 82,66258)}{82,76628} = 0,13\%$$

Ainsi, la valeur calculée du coefficient C de Chézy correspond à la relation (1.96), avec un écart relatif inférieur à 0,13%, à celle donnée par la relation (2.437).

VI. Etude du coefficient de résistance à l'écoulement de Manning

A travers ce paragraphe nous allons étudier le coefficient de résistance à l'écoulement n de Manning pour la conduite elliptique schématisée par la figure (2.35).

VI.1. Expression du coefficient de Manning dans une conduite elliptique

Afin de déterminer les relations qui définissent le coefficient n de Manning, nous considérons la relation (2.75) présentée au cours du chapitre I de cette deuxième partie, soit :

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} R_h^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right) \quad (2.75)$$

Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η , les relations (2.433), (2.436) et (2.439) permettent d'évaluer le nombre de Reynolds R , et le rayon hydraulique R_h s'exprime par les relations (2.399), (2.412) et (2.429). Au regard de la relation (2.75), il apparaît que le coefficient n de Manning s'exprime en fonction à la fois de la rugosité absolue ε , du nombre de Reynolds R et du rayon hydraulique R_h . Cette dépendance de n vis-à-vis de R_h traduit bien le fait que n varie en fonction du taux de remplissage η .

En tenant compte de toutes ces relations, nous pouvons écrire que pour :

i. $0 \leq \eta \leq 0,09797$

En vertu des relations (2.399), (2.433), la relation (2.75) mène à :

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g}D^{-1/6} \left[\frac{\Gamma(\eta)}{U(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[\Gamma(\eta)/U(\eta)]} + \frac{2,16457}{R_p [\Gamma(\eta)/U(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.466)$$

Définissons le paramètre adimensionnel :

$$N = \frac{D^{1/6}}{n\sqrt{g}} \quad (2.467)$$

En en tenant compte de la relation du paramètre adimensionnel N , la relation (2.466) s'écrit en termes adimensionnels :

$$N = -4\sqrt{2} \left[\frac{\Gamma(\eta)}{U(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[\Gamma(\eta)/U(\eta)]} + \frac{2,16457}{[\Gamma(\eta)/U(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.468)$$

ii. $0,09797 \leq \eta \leq 0,90203$

Tenant en compte des relations (2.412), (2.436), la relation (2.75) s'écrit :

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g}D^{-1/6} \left[\frac{X(\eta)}{W(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[X(\eta)/W(\eta)]} + \frac{2,16457}{R_p [X(\eta)/W(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.469)$$

En ayant recours à la relation (2.467), la relation (2.469) s'écrit, en termes adimensionnels :

$$N = -4\sqrt{2} \left[\frac{X(\eta)}{W(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[X(\eta)/W(\eta)]} + \frac{2,16457}{[X(\eta)/W(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.470)$$

iii. $0,90203 \leq \eta \leq 1$

La relation (2.75) conduit à, selon les relations (2.429) et (2.439) :

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g}D^{-1/6} \left[\frac{Z(\eta)}{Y(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[Z(\eta)/Y(\eta)]} + \frac{2,16457}{R_p [Z(\eta)/Y(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.471)$$

En faisant appel à la relation (2.467), la relation (2.471) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$N = -4\sqrt{2} \left[\frac{Z(\eta)}{Y(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[Z(\eta)/Y(\eta)]} + \frac{2,16457}{R_p [Z(\eta)/Y(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.472)$$

Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η , le coefficient n de Manning s'exprime selon la relation (2.468), (2.470) ou (2.472) lorsque les paramètres η , ε , D , i et ν sont connus.

Nous pouvons écrire que :

$$N = f(\varepsilon/D; \eta; R_p)$$

VI.2. Variation du coefficient de Manning

Pour représenter la variation du coefficient sans dimension N en fonction du taux de remplissage η , nous pouvons faire appel aux relations (2.468), (2.470) et (2.472). On fixe une valeur de la rugosité relative ε/D et du nombre Reynolds à l'état plein R_p et l'on fait varier le coefficient de

Manning adimensionnel N en fonction du taux de remplissage η . Les tableaux 2.37 à 2.41 ont été établis selon cette procédure. En-dessous de chaque tableau, la variation de N en fonction du taux de remplissage η sera présentée sur les figures (2.41 à 2.45), et chacune des courbes obtenues est discutée.

Tableau 2.37 : Valeurs de N pour $\varepsilon/D = 0$

$0 \leq \eta \leq 0,09797$							
$\varepsilon/D = 0$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$U(\eta)$	$\Gamma(\eta)$	$\Gamma(\eta)/U(\eta)$	N	N	N	N
0,01000	0,63256	0,00422	0,00666	5,21861	18,25900	31,29939	44,33979
0,02000	0,89473	0,01192	0,01332	9,89239	21,51096	33,12953	44,74811
0,03000	1,09599	0,02189	0,01997	12,11197	22,97217	33,83238	44,69259
0,04000	1,26576	0,03369	0,02662	13,48284	23,83543	34,18801	44,54060
0,05000	1,41539	0,04707	0,03326	14,43866	24,41408	34,38950	44,36491
0,09797	1,98287	0,12892	0,06502	16,80826	25,72908	34,64990	43,57072
$0,09797 \leq \eta \leq 0,90203$							
η	$W(\eta)$	$X(\eta)$	$X(\eta)/W(\eta)$	N	N	N	N
0,09797	1,98287	0,12892	0,06502	16,80826	25,72908	34,64990	43,57072
0,10000	2,00342	0,13292	0,06635	16,86902	25,75973	34,65044	43,54115
0,30000	2,69786	0,60066	0,22264	19,51730	26,78349	34,04968	41,31587
0,50000	3,11580	1,12028	0,35955	20,11340	26,82174	33,53009	40,23843
0,70000	3,53374	1,63991	0,46407	20,34465	26,77366	33,20267	39,63169
0,86281	4,00805	2,02943	0,50634	20,41102	26,74731	33,08360	39,41988
0,90203	4,24874	2,11165	0,49701	20,39738	26,75334	33,10930	39,46527
$0,90203 \leq \eta \leq 1$							
η	$Y(\eta)$	$Z(\eta)$	$Z(\eta)/Y(\eta)$	N	N	N	N
0,90203	4,24874	2,11165	0,49701	20,39738	26,75334	33,10930	39,46527
0,92000	4,44036	2,14539	0,48316	20,37611	26,76208	33,14805	39,53402
0,94000	4,68086	2,17871	0,46545	20,34701	26,77284	33,19867	39,62450
0,96000	4,96585	2,20688	0,44441	20,30935	26,78491	33,26047	39,73604
0,98000	5,33688	2,22865	0,41759	20,25583	26,79891	33,34200	39,88508
1,00000	6,23161	2,24057	0,35955	20,11340	26,82174	33,53009	40,23843

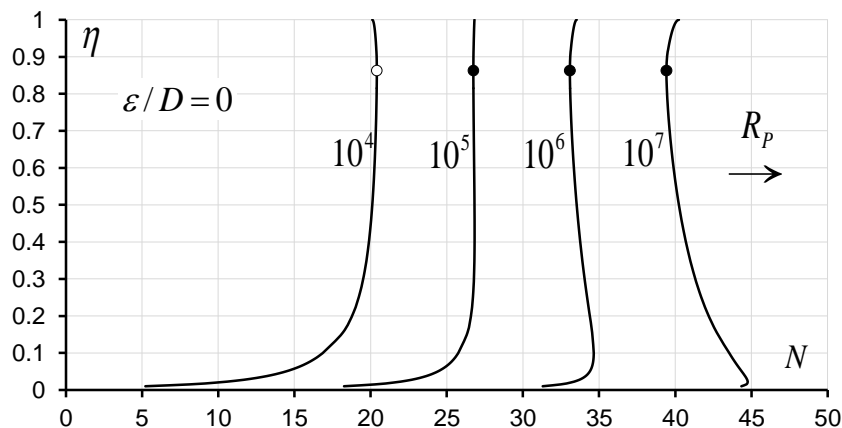


Figure 2.41 : Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 0$ (Ecoulement lisse).

(o) Valeur maximale de N obtenue pour $\eta \cong 0,86281$

(●) Valeur minimale de N obtenue pour $\eta \cong 0,86281$

Tableau 2.38 : Valeurs de N pour $\varepsilon/D = 10^{-5}$

$0 \leq \eta \leq 0,09797$							
$\varepsilon/D = 10^{-5}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$U(\eta)$	$\Gamma(\eta)$	$\Gamma(\eta)/U(\eta)$	N	N	N	N
0,01000	0,63256	0,00422	0,00666	5,21717	18,24459	31,15689	43,05428
0,02000	0,89473	0,01192	0,01332	9,89057	21,49281	32,95094	43,19556
0,03000	1,09599	0,02189	0,01997	12,10989	22,95141	33,62877	42,96900
0,04000	1,26576	0,03369	0,02662	13,48055	23,81259	33,96468	42,68990
0,05000	1,41539	0,04707	0,03326	14,43620	24,38949	34,14965	42,41282
0,09797	1,98287	0,12892	0,06502	16,80518	25,69837	34,35319	41,30224
$0,09797 \leq \eta \leq 0,90203$							
η	$W(\eta)$	$X(\eta)$	$X(\eta)/W(\eta)$	N	N	N	N
0,09797	1,98287	0,12892	0,06502	16,80518	25,69837	34,35319	41,30224
0,10000	2,00342	0,13292	0,06635	16,86591	25,72881	34,35183	41,26292
0,30000	2,69786	0,60066	0,22264	19,51266	26,73735	33,61608	38,45876
0,50000	3,11580	1,12028	0,35955	20,10795	26,76772	33,03022	37,16503
0,70000	3,53374	1,63991	0,46407	20,33871	26,71491	32,66434	36,44897
0,86281	4,00805	2,02943	0,50634	20,40492	26,68685	32,53162	36,20094
0,90203	4,24874	2,11165	0,49701	20,39131	26,69325	32,56026	36,25400
$0,90203 \leq \eta \leq 1$							
η	$Y(\eta)$	$Z(\eta)$	$Z(\eta)/Y(\eta)$	N	N	N	N
0,90203	4,24874	2,11165	0,49701	20,39131	26,69325	32,56026	36,25400
0,92000	4,44036	2,14539	0,48316	20,37010	26,70255	32,60344	36,33448
0,94000	4,68086	2,17871	0,46545	20,34107	26,71403	32,65988	36,44055
0,96000	4,96585	2,20688	0,44441	20,30350	26,72699	32,72883	36,57154
0,98000	5,33688	2,22865	0,41759	20,25010	26,74216	32,81984	36,74701
1,00000	6,23161	2,24057	0,35955	20,10795	26,76772	33,03022	37,16503

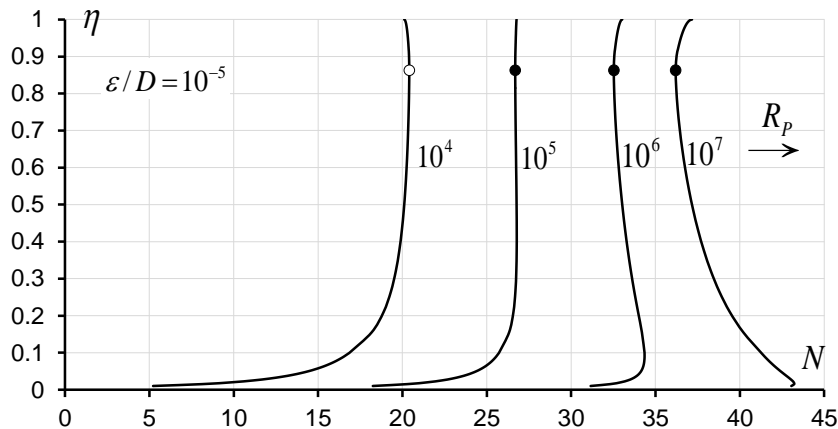


Figure 2.42 : Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-5}$

Tableau 2.39 : Valeurs de N pour $\varepsilon/D = 10^{-4}$

$0 \leq \eta \leq 0,09797$							
$\varepsilon/D = 10^{-4}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$U(\eta)$	$\Gamma(\eta)$	$\Gamma(\eta)/U(\eta)$	N	N	N	N
0,01000	0,63256	0,00422	0,00666	5,20420	18,11650	30,01389	37,16759
0,02000	0,89473	0,01192	0,01332	9,87424	21,33237	31,57698	37,04479
0,03000	1,09599	0,02189	0,01997	12,09121	22,76857	32,10879	36,72868
0,04000	1,26576	0,03369	0,02662	13,46000	23,61210	32,33732	36,41581
0,05000	1,41539	0,04707	0,03326	14,41407	24,17423	32,43740	36,12936
0,09797	1,98287	0,12892	0,06502	16,77755	25,43237	32,38142	35,07563
$0,09797 \leq \eta \leq 0,90203$							
η	$W(\eta)$	$X(\eta)$	$X(\eta)/W(\eta)$	N	N	N	N
0,09797	1,98287	0,12892	0,06502	16,77755	25,43237	32,38142	35,07563
0,10000	2,00342	0,13292	0,06635	16,83809	25,46112	32,37221	35,03992
0,30000	2,69786	0,60066	0,22264	19,47116	26,34990	31,19257	32,62042
0,50000	3,11580	1,12028	0,35955	20,05937	26,32188	30,45669	31,55213
0,70000	3,53374	1,63991	0,46407	20,28589	26,23533	30,01996	30,96784
0,86281	4,00805	2,02943	0,50634	20,35057	26,19533	29,86465	30,76633
0,90203	4,24874	2,11165	0,49701	20,33729	26,20430	29,89804	30,80941
$0,90203 \leq \eta \leq 1$							
η	$Y(\eta)$	$Z(\eta)$	$Z(\eta)/Y(\eta)$	N	N	N	N
0,90203	4,24874	2,11165	0,49701	20,33729	26,20430	29,89804	30,80941
0,92000	4,44036	2,14539	0,48316	20,31658	26,21747	29,94851	30,87477
0,94000	4,68086	2,17871	0,46545	20,28820	26,23405	30,01472	30,96099
0,96000	4,96585	2,20688	0,44441	20,25143	26,25326	30,09598	31,06757
0,98000	5,33688	2,22865	0,41759	20,19908	26,27676	30,20393	31,21054
1,00000	6,23161	2,24057	0,35955	20,05937	26,32188	30,45669	31,55213

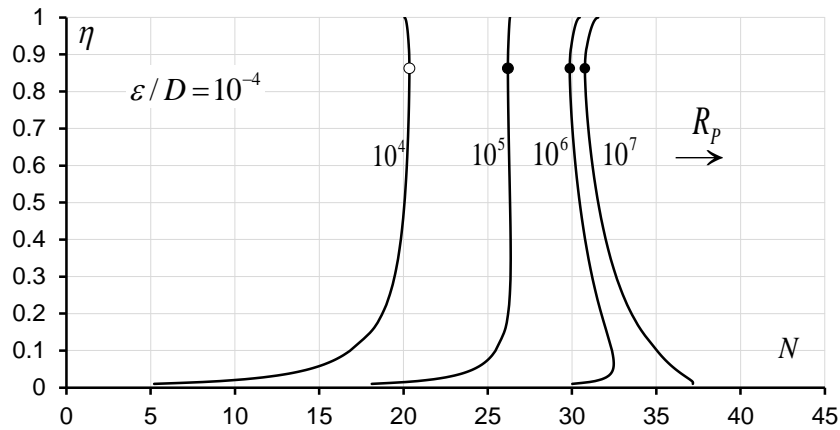


Figure 2.43 : Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-4}$

Tableau 2.40 : Valeurs de N pour $\varepsilon/D = 10^{-3}$

$0 \leq \eta \leq 0,09797$							
$\varepsilon/D = 10^{-3}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$U(\eta)$	$\Gamma(\eta)$	$\Gamma(\eta)/U(\eta)$	N	N	N	N
0,01000	0,63256	0,00422	0,00666	5,07611	16,97350	24,12720	25,78411
0,02000	0,89473	0,01192	0,01332	9,71380	19,95841	25,42622	26,52409
0,03000	1,09599	0,02189	0,01997	11,90836	21,24859	25,86847	26,72641
0,04000	1,26576	0,03369	0,02662	13,25951	21,98473	26,06322	26,78186
0,05000	1,41539	0,04707	0,03326	14,19881	22,46198	26,15394	26,77963
0,09797	1,98287	0,12892	0,06502	16,51155	23,46060	26,15481	26,56496
$0,09797 \leq \eta \leq 0,90203$							
η	$W(\eta)$	$X(\eta)$	$X(\eta)/W(\eta)$	N	N	N	N
0,09797	1,98287	0,12892	0,06502	16,51155	23,46060	26,15481	26,56496
0,10000	2,00342	0,13292	0,06635	16,57041	23,48150	26,14921	26,55411
0,30000	2,69786	0,60066	0,22264	19,08371	23,92638	25,35423	25,54017
0,50000	3,11580	1,12028	0,35955	19,61353	23,74835	24,84379	24,97990
0,70000	3,53374	1,63991	0,46407	19,80632	23,59095	24,53882	24,65403
0,86281	4,00805	2,02943	0,50634	19,85904	23,52836	24,43005	24,53887
0,90203	4,24874	2,11165	0,49701	19,84833	23,54208	24,45345	24,56360
$0,90203 \leq \eta \leq 1$							
η	$Y(\eta)$	$Z(\eta)$	$Z(\eta)/Y(\eta)$	N	N	N	N
0,90203	4,24874	2,11165	0,49701	19,84833	23,54208	24,45345	24,56360
0,92000	4,44036	2,14539	0,48316	19,83150	23,56254	24,48880	24,60101
0,94000	4,68086	2,17871	0,46545	19,80822	23,58889	24,53515	24,65014
0,96000	4,96585	2,20688	0,44441	19,77770	23,62041	24,59200	24,71052
0,98000	5,33688	2,22865	0,41759	19,73367	23,66084	24,66745	24,79089
1,00000	6,23161	2,24057	0,35955	19,61353	23,74835	24,84379	24,97990

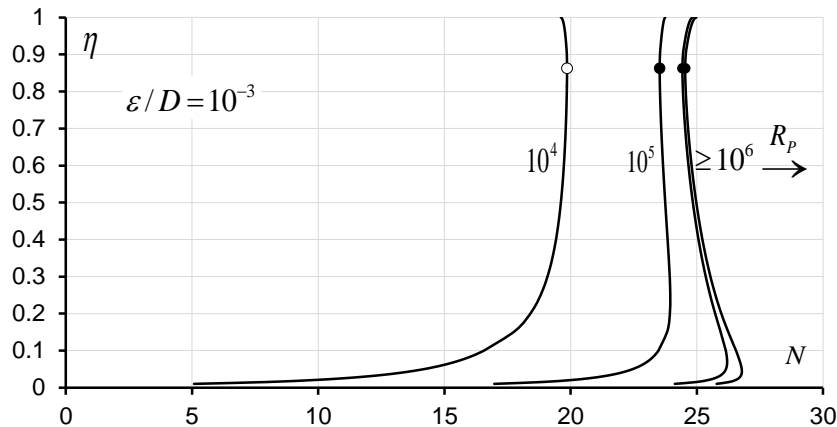
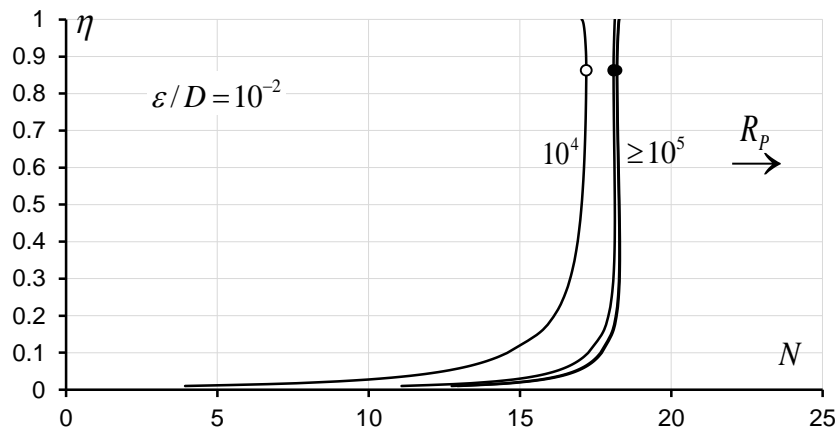


Figure 2.44 : Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-3}$

Tableau 2.41 : Valeurs de N pour $\varepsilon/D = 10^{-2}$

$0 \leq \eta \leq 0,09797$							
$\varepsilon/D = 10^{-2}$				$R_p = 10^4$	$R_p = 10^5$	$R_p = 10^6$	$R_p = 10^7$
η	$U(\eta)$	$\Gamma(\eta)$	$\Gamma(\eta)/U(\eta)$	N	N	N	N
0,01000	0,63256	0,00422	0,00666	3,93310	11,08680	12,74372	12,93955
0,02000	0,89473	0,01192	0,01332	8,33984	13,80765	14,90552	15,02968
0,03000	1,09599	0,02189	0,01997	10,38838	15,00826	15,86620	15,96124
0,04000	1,26576	0,03369	0,02662	11,63215	15,71063	16,42928	16,50789
0,05000	1,41539	0,04707	0,03326	12,48657	16,17852	16,80421	16,87205
0,09797	1,98287	0,12892	0,06502	14,53978	17,23399	17,64414	17,68765
$0,09797 \leq \eta \leq 0,90203$							
η	$W(\eta)$	$X(\eta)$	$X(\eta)/W(\eta)$	N	N	N	N
0,09797	1,98287	0,12892	0,06502	14,53978	17,23399	17,64414	17,68765
0,10000	2,00342	0,13292	0,06635	14,59079	17,25850	17,66339	17,70632
0,30000	2,69786	0,60066	0,22264	16,66019	18,08804	18,27398	18,29319
0,50000	3,11580	1,12028	0,35955	17,04000	18,13544	18,27155	18,28552
0,70000	3,53374	1,63991	0,46407	17,16193	18,10981	18,22502	18,23681
0,86281	4,00805	2,02943	0,50634	17,19207	18,09376	18,20258	18,21370
0,90203	4,24874	2,11165	0,49701	17,18611	18,09748	18,20764	18,21890
$0,90203 \leq \eta \leq 1$							
η	$Y(\eta)$	$Z(\eta)$	$Z(\eta)/Y(\eta)$	N	N	N	N
0,90203	4,24874	2,11165	0,49701	17,18611	18,09748	18,20764	18,21890
0,92000	4,44036	2,14539	0,48316	17,17657	18,10283	18,21504	18,22652
0,94000	4,68086	2,17871	0,46545	17,16305	18,10932	18,22431	18,23607
0,96000	4,96585	2,20688	0,44441	17,14485	18,11644	18,23496	18,24709
0,98000	5,33688	2,22865	0,41759	17,11776	18,12437	18,24780	18,26045
1,00000	6,23161	2,24057	0,35955	17,04000	18,13544	18,27155	18,28552

Figure 2.45 : Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon/D = 10^{-2}$

La variation du paramètre N pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds à l'état plein R_p conformément aux relations (2.468), (2.470) et (2.472), montre que :

- i. Dans un premier temps et pour les faibles valeur des taux de remplissage (où $\eta \leq 0,1$), le paramètre N augmente, majoritairement, avec l'accroissement de η pour des valeurs de $R_p \leq 10^6$, alors que N diminue, principalement, avec l'augmentation de η lorsque R_p est supérieur à 10^6 , la figure (2.45) montre que pour de $R_p > 10^6$ et avec des valeurs plus élevées de rugosité relative, les valeurs du N continuent d'augmenter avec l'accroissement de η .
- ii. Dans un seconde temps, lorsque $\eta \geq 0,1$, et pour $R_p = 10^4$, les figures obtenues montrent que le nombre adimensionnel N augmente avec l'accroissement du taux de remplissage η , puis diminue même si η continue à augmenter en passant par un maximum pour $\eta \cong 0,86281$, tandis que pour $R_p \geq 10^5$, le nombre adimensionnel N diminue avec l'accroissement du taux de remplissage η , puis augmente même si η continue à augmenter en passant par un minimum pour $\eta \cong 0,86281$ également. Ces deux dernières constatations ont été enregistrées pour toutes les valeurs de la rugosité relative. Les valeurs maximale et minimale de N indiquent la présence de concavité des courbes.
- iii. En outre, les figures montrent aussi que plus la rugosité relative augmente et plus les courbes de variation de N se resserrent pour ensuite se confondre quasiment à partir de la valeur $R_p = 10^5$, lorsque la rugosité relative atteint la valeur $\varepsilon/D = 0,01$. Au-delà de la valeur $R_p = 10^5$, le nombre de Reynolds R_p n'a aucune influence sur le paramètre N et l'écoulement est alors dans le domaine turbulent rugueux. Le coefficient n de Manning ne dépend, ainsi, que de la rugosité relative ε/D .

Puisque la valeur $\eta = 0,86281$, correspondant à N_{\min} appartient à l'intervalle $[0,09797;0,90203]$, alors N_{\min} est régie par la relation (2.470). Pour $\eta = 0,86281$, les fonctions $W(\eta)$ et $X(\eta)$ régies par les relations (2.405) et (2.410) respectivement, prennent les valeurs :

$$\bullet \quad W(\eta = 0,86281) = \frac{9}{11} \cos^{-1}\left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \eta\right) + 1,83061 = \frac{9}{11} \cos^{-1}\left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \times 0,86281\right) + 1,83061 = 4,00805$$

$$X(\eta = 0,86281) = \frac{81}{484} \left\{ \cos^{-1}\left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \eta\right) - 0,1861 - \sin \left[\cos^{-1}\left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \eta\right) - 0,18610 \right] \right\}$$

$$+ \left[\frac{9}{22} \sqrt{1 - \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \eta\right)^2} + 1,8895 \right] (\eta - 0,09797) + 0,12892$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{81}{484} \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \times 0,86281 \right) - 0,1861 - \sin \left[\cos^{-1} \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \times 0,86281 \right) - 0,18610 \right] \right\} \\
&+ \left[\frac{9}{22} \sqrt{1 - \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \times 0,86281 \right)^2} + 1,8895 \right] (0,86281 - 0,09797) + 0,12892 \\
&= 2,02943
\end{aligned}$$

Lorsque les valeurs du nombre de Reynolds $R_p \geq 10^5$, le paramètre N_{\min} est par suite, selon la relation (2.470) :

$$N_{\min} = N_{(\eta=0,8628)} = -4\sqrt{2} \left[\frac{2,02943}{4,00805} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8[2,02943/4,00805]} + \frac{2,16457}{[2,02943/4,00805]^{3/2} R_p} \right)$$

Alors :

$$N_{\min} = -6,33629 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{7,49381} + \frac{6,00772}{R_p} \right) \quad (2.473)$$

Tenant compte de la relation (2.467), nous pouvons alors écrire que :

$$n_{\max} = - \frac{0,15782 D^{1/6}}{\sqrt{g} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{7,49381} + \frac{6,00772}{R_p} \right)} \quad (2.474)$$

VI.3. Calcul du coefficient de résistance à l'écoulement n

de Manning par la méthode MMR

Selon la valeur du taux de remplissage, la relation (2.468), (2.470) ou (2.472) permet de calculer le coefficient n de Manning dans le cas où le diamètre générateur D de la conduite soit une donnée du problème. Dans le cas contraire, où D n'est pas une donnée, il est possible de calculer la valeur de n , en faisant appel à la méthode du modèle rugueux (MMR).

Dans ce cas, afin de déterminer le coefficient de résistance n de Manning, admettons les conditions suivantes :

- i. $\bar{D} \neq D$
- ii. $\bar{Q} = Q$
- iii. $\bar{i} = i$
- iv. $\bar{\eta} = \eta$
- v. $\bar{v} = v$

On rappelle que le coefficient n de Manning s'écrit par la relation (1.103) :

$$n = \frac{\psi^{8/3} \bar{R}_h^{1/6}}{8\sqrt{2g}} \quad (1.103)$$

Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est donné par l'une des relations (2.461), (2.463) ou (2.465) selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η , tandis que le rayon hydraulique du modèle rugueux \bar{R}_h s'exprime par l'une des relations (2.460), (2.462) ou (2.464). En tenant en compte de toutes ces considérations, la relation (1.103) permet d'écrire que :

$$i. \quad 0 \leq \eta \leq 0,09797$$

$$n = \frac{0,19677}{\sqrt{g}} \bar{D}^{1/6} \left[\frac{\Gamma(\eta)}{U(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[\Gamma(\eta)/U(\eta)]} + \frac{1,83255}{[\Gamma(\eta)/U(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \quad (2.475)$$

$$ii. \quad 0,09797 \leq \eta \leq 0,90203$$

$$n = \frac{0,19677}{\sqrt{g}} \bar{D}^{1/6} \left[\frac{X(\eta)}{W(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[X(\eta)/W(\eta)]} + \frac{1,83255}{[X(\eta)/W(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \quad (2.476)$$

$$iii. \quad 0,90203 \leq \eta \leq 1$$

$$n = \frac{0,19677}{\sqrt{g}} \bar{D}^{1/6} \left[\frac{Z(\eta)}{Y(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[Z(\eta)/Y(\eta)]} + \frac{1,83255}{[Z(\eta)/Y(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \quad (2.477)$$

Les relations (2.475), (2.476) et (2.477) montrent que le coefficient de résistance n de *Manning* s'exprime en fonction du taux de remplissage η , de la rugosité absolue ε et des caractéristiques \bar{D} et \bar{R}_p du modèle rugueux de référence. Suivant la valeur de η , le diamètre générateur \bar{D} est donné par l'une des relations (2.451), (2.454) ou (2.457), tandis que le nombre de *Reynolds* à l'état plein \bar{R}_p est régi par la relation (2.459).

Afin de calculer le coefficient de résistance à l'écoulement n de *Manning* dans la conduite elliptique considérée, les étapes suivantes sont recommandées, à condition que les paramètres Q , ε , i , η et ν soient donnés. Soit :

a) La première étape consiste à évaluer le diamètre générateur \bar{D} du modèle rugueux de référence par application de l'une des relations (2.451), (2.454) ou (2.457), pour les valeurs connues de Q , i et $\eta = y_n / D$.

b) Pour les valeurs connues des paramètres i , \bar{D} et ν , appliquons la relation (2.459) pour calculer le nombre de *Reynolds* à l'état plein \bar{R}_p caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux.

c) Puisque les valeurs de η , \bar{D} , ε et \bar{R}_p sont maintenant connues, l'une des (2.475), (2.476) ou (2.477) permet de calculer la valeur recherchée du coefficient de résistance n de Manning.

Afin d'illustrer la démarche de calcul que nous venons d'exposer et qui mène au calcul du coefficient de résistance à l'écoulement n de Manning, l'exemple d'application suivant est proposé.

VI.4. Exemple d'application (02)

Reprenons l'exemple d'application précédent et recherchons la valeur du coefficient n de Manning pour les données suivantes :

$$\eta = 0,7 ; Q = 2,9 \text{ m}^3 / \text{s} ; i = 3.10^{-5} ; \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s} ; \varepsilon = 10^{-4} \text{ m} .$$

Solution

i. Puisque : $0,09797 \leq \eta = 0,7 \leq 0,90203$ les fonctions $W(\eta)$ et $X(\eta)$ ont déjà été calculées et vaux selon les relations (2.405) et (2.410) respectivement :

$$\bullet W(\eta) = \frac{9}{11} \cos^{-1} \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \eta \right) + 1,83061 = \frac{9}{11} \cos^{-1} \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \times 0,7 \right) + 1,83061 = 3,53374$$

$$\begin{aligned} \bullet X(\eta) &= \frac{81}{484} \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \eta \right) - 0,1861 - \sin \left[\cos^{-1} \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \eta \right) - 0,18610 \right] \right\} \\ &\quad + \left[\frac{9}{22} \sqrt{1 - \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \eta \right)^2} + 1,8895 \right] (\eta - 0,09797) + 0,12892 \\ &= \frac{81}{484} \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \times 0,7 \right) - 0,1861 - \sin \left[\cos^{-1} \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \times 0,7 \right) - 0,18610 \right] \right\} \\ &\quad + \left[\frac{9}{22} \sqrt{1 - \left(\frac{11}{9} - \frac{22}{9} \times 0,7 \right)^2} + 1,8895 \right] (0,7 - 0,09797) + 0,12892 \\ &= 1,63991 \end{aligned}$$

Le diamètre générateur \bar{D} est selon la relation (2.454) :

$$\bar{D} = \frac{[W(\eta)]^{0,2}}{2,639[X(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} = \frac{3,53374^{0,2}}{2,639 \times 1,63991^{0,6}} \left(\frac{2,9}{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-5}}} \right)^{0,4} = 2,82174 \text{ m}$$

Valeur déjà calculée lors de l'exemple d'application précédent.

De même que le nombre de Reynolds à l'état plein \bar{R}_p dans le modèle rugueux de référence a été évalué à partir de la relation (2.459) :

$$\bar{R}_p = 9,75668 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 9,75668 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-5} \times 2,82174^3}}{10^{-6}} = 793365,44$$

Puisque : $0,09797 \leq \eta \leq 0,90203$, alors le coefficient n de Manning est régi par la relation (2.476), soit :

$$n = \frac{0,19677}{\sqrt{g}} \bar{D}^{1/6} \left[\frac{X(\eta)}{W(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[X(\eta)/W(\eta)]} + \frac{1,83255}{[X(\eta)/W(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15}$$

$$= \frac{0,19677}{\sqrt{9,81}} \times 2,82174^{1/6} \times \left[\frac{1,63991}{3,53374} \right]^{1/6}$$

$$\times \left[-\log \left(\frac{0,0001/2,82174}{19[1,63991/3,53374]} + \frac{1,83255}{[1,63991/3,53374]^{3/2} \times 793365,44} \right) \right]^{-16/15} = 0,01194 m^{-1/3} s$$

ii. Vérifions la validité de nos calculs en déterminant la pente de la conduite, selon la relation (1.36) de Darcy-Weisbach, pour le diamètre ainsi obtenu. Puisque : $0,09797 \leq \eta \leq 0,90203$, les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement dans la conduite considérée sont par suite :

- Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ et le diamètre de la conduite D ont été évalués au cours de l'exemple précédent soit : $\psi = 0,71225$ et $D = 2,00979m$.

- L'aire de la section mouillée se calcule par relation (2.411). Soit :

$$A = X(\eta) \times D^2 = 1,63991 \times 2,00979^2 = 6,62403 m^2$$

- Le périmètre mouillé peut être évalué par la relation (2.406) :

$$P = W(\eta) \times D = 3,53374 \times 2,00979 = 7,10210 m$$

- Le coefficient de frottement peut être évalué par la relation (1.61) :

$$f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0,71225^5}{16} = 0,01146$$

Enfin, la pente longitudinale i de la conduite s'exprime par la relation (1.36) :

$$i = \frac{f}{8g} \frac{P}{A^3} Q^2 = \frac{0,01146}{8 \times 9,81} \times \frac{7,10210}{6,62403^3} \times 2,9^2 = 0,00002999$$

Nous retrouvons ainsi la valeur de i donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré (Avec un écart relatif insignifiant de 0,003 % environ). Cela mène à conclure à la validité de la démarche proposée dans cette étude pour le calcul du coefficient de résistance n de Manning.

VII. Conclusion

A travers ce dernier chapitre de notre thèse, nous avons étudié la conduite en forme d'arc et celle de forme elliptique. Les caractéristiques géométriques de la conduite ainsi que les propriétés hydrauliques de l'écoulement ont été développées, telles que la largeur du plan d'eau, le périmètre mouillé, l'aire de la section mouillée et le rayon hydraulique. Ces caractéristiques et propriétés dépendent du lieu géométrique qu'occupe l'écoulement et dépendent ainsi du taux de

remplissage de la conduite. Les caractéristiques obtenues ont une validité générale, quelles que soient les proportions des différentes dimensions de la conduite. La conduite en arc peut prendre de nombreuses formes, parmi lesquelles on a la forme elliptique, qui constitue l'axe principal de ce chapitre, où les propriétés géométriques de la conduite et hydrauliques de l'écoulement ont été déduites à partir de celles de la conduite en arc après avoir remplacé, principalement, le rayon inférieur d_3 par celui supérieur d_1 . Les limites entre les différentes zones d'écoulement ont été déterminées à l'aide des relations proposées par *Perez et al.* (2015). Ensuite, nous avons fait une étude de cas pour la conduite en forme elliptique, où les dimensions ont été indiquées dans le tableau 2.31. Après avoir déduit les caractéristiques géométriques de la conduite du cas d'étude ainsi que les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement, nous avons explicitement défini les relations qui déterminent les coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning* selon la gamme de valeurs du taux de remplissage. Les relations obtenues étaient fonction à la fois de la rugosité relative ε/D , du taux de remplissage η et du nombre de *Reynolds* à l'état plein R_p . La représentation graphique du coefficient de *Chézy* adimensionnel C/\sqrt{g} en fonction de ε/D , de η et de R_p , a montré que le paramètre C/\sqrt{g} diminue lorsque la rugosité relative augmente en même temps qu'il augmente avec l'augmentation de R_p . Lorsque le paramètre C/\sqrt{g} atteint la valeur 10^5 pour une valeur de rugosité relative $\varepsilon/D = 10^{-2}$, le nombre de *Reynolds* à l'état plein R_p n'a aucune influence sur la variation de C/\sqrt{g} . Les courbes passent par un maximum pour la même valeur $\eta = 0,86281$ et le coefficient de *Chézy* maximal C_{\max} a été exprimé par la relation (2.442).

Ce chapitre s'est poursuivi par l'établissement des relations explicites au calcul du coefficient adimensionnel N de *Manning* selon le lieu géométrique qu'occupe l'écoulement dans la conduite. Ainsi, la représentation graphique du paramètre adimensionnel $N = D^{1/6} / (n\sqrt{g})$, pour quelques valeurs de ε/D et de R_p , a montré que le coefficient n de *Manning* augmente au fur et à mesure que ε/D augmente, alors que le paramètre n diminue avec l'augmentation de R_p . Les graphes ont montré, à partir de $R_p = 10^5$, un minimum de N , atteint pour $\eta = 0,86281$. Pour cette même valeur de η , le coefficient n de *Manning* atteint alors sa valeur maximale dont l'expression a été déterminée explicitement.

Par ailleurs, lorsque le diamètre générateur D de la conduite n'est pas une donnée du problème, le calcul des coefficients C de *Chézy* et n de *Manning* a été possible en ayant recours à la méthode du modèle rugueux (MMR). Deux exemples d'application ont été proposés pour illustrer la démarche à suivre pour le calcul de ces deux derniers coefficients de résistance.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Notre recherche s'est intéressée à l'étude des coefficients de résistance à l'écoulement dans quelques profils des conduites fermées, qui contribuent au calcul de l'écoulement uniforme. L'objectif principal était d'étudier d'une manière approfondie les coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning* dans des conduites fermées en forme voûte de type I et II, semi-elliptique et elliptique.

Pour atteindre notre objectif, nous avons suggéré de subdiviser notre thèse en deux parties.

La première partie comporte une synthèse de recherche bibliographique qui a nécessité deux chapitres. Le premier chapitre a eu pour objectif principal de donner un aperçu sur l'écoulement uniforme, englobant ses propriétés, sa définition ainsi que la théorie qui le gouverne. Nous avons également exposé les conditions d'établissement d'un écoulement uniforme qui présente des caractéristiques constantes dans le temps et dans l'espace. Au cours de ce chapitre, nous avons exposé les différentes relations actuellement en vigueur régissant l'écoulement uniforme, telles que les relations de *Chézy*, de *Manning* et de *Darcy-Weisbach* qui sont les relations les plus utilisées en pratique. Dans ces relations, les coefficients de résistance et le coefficient de frottement sont présentés et les principales relations qui les gouvernent sont exposées et discutées.

A travers le diagramme de *Moody*, nous avons expliqué en détail la formule usuelle de *Colebrook-White* qui exprime le coefficient de frottement f en fonction du nombre de *Reynolds* et de la rugosité relative. Lorsque l'écoulement est dans le domaine pratiquement lisse, l'approche de *Blasius (1913)* pour exprimer le coefficient f en fonction du nombre de *Reynolds* a été présentée et discutée. On outre, la formule de *Nikuradse* est utilisée lorsque l'écoulement est en régime turbulent rugueux.

A travers le second chapitre de la première partie, nous avons présenté la méthode du modèle rugueux de référence. L'application des relations de *Darcy-Weisbach* et du nombre de *Reynolds* au modèle rugueux a abouti à des relations exprimant la pente du modèle ainsi que le nombre de *Reynolds* et applicables à tout profil géométrique et dans l'ensemble du domaine

de l'écoulement turbulent. En outre, la relation fondamentale exprimant la dimension linéaire d'une conduite ou d'un canal donné a été exposée. Cette dimension linéaire correspond à celle du modèle rugueux de référence corrigée par les effets d'un facteur adimensionnel appelé facteur de correction des dimensions linéaires. Celui-ci a été explicitement exprimé, avec une excellente approximation, en fonction des caractéristiques du modèle rugueux de référence. En outre, on a exposé la relation générale du débit volume de *Achour et Bedjaoui (2006)*, valable pour toutes les formes de conduites et de canaux. Cette relation a été utilisée avec les formules de *Chézy* et *Manning* comme relations de base au développement de notre approche théorique au calcul des coefficients de résistance à l'écoulement. La combinaison de la relation de *Chézy* avec celle de *Achour et Bedjaoui* et la combinaison de la relation de *Manning* avec celle de *Achour et Bedjaoui* ont abouti à exprimer les coefficients de résistance à l'écoulement de *Chézy* et de *Manning* respectivement. Les relations obtenues ont un caractère de validité générale.

Par ailleurs, l'absence des relations des coefficients de résistance à l'écoulement qui s'appliquent directement au cas des conduites fermées en forme de voûte de type I et II, elliptique et semi-elliptique, nous a amené à réfléchir à prendre sur nous de proposer une étude particulière qui a constitué l'objet de la deuxième partie de notre thèse.

En effet, la deuxième partie de notre thèse a nécessité quatre chapitres qui ont été consacrés à l'étude des coefficients de résistance à l'écoulement de *Chézy* et de *Manning* dans les quatre formes de conduites citées ci-dessus.

Alors, le premier chapitre a comporté une contribution à l'étude du problème des coefficients de résistance à l'écoulement dans une conduite fermée en forme de voûte de type I. L'étude a été faite en considérant un écoulement uniforme à coefficient de résistance variable qui représente l'aspect pratique. En effet, le coefficient de résistance ne peut demeurer constant avec la variation de la profondeur de l'écoulement ou avec celle du rayon hydraulique. A notre connaissance, cet aspect du problème n'a pas été examiné par le passé pour la forme choisie. Au cours de ce chapitre, nous avons développé les caractéristiques géométriques de la conduite et hydrauliques de l'écoulement selon les intervalles de variation du taux de remplissage. A coefficient de résistance à l'écoulement variable et selon la valeur du taux de remplissage, la relation générale du débit volume de *Achour et Bedjaoui (2006)* et les relations de *Chézy* et de *Manning* ont permis de déduire celles du coefficient de résistance de *Chézy* et celles du coefficient de résistance de *Manning* en fonction de la rugosité relative, du taux de remplissage et de nombre de *Reynolds* à l'état plein. Les relations obtenues ont été

représentées graphiquement en considérant quelques valeurs dans la gamme pratique du nombre de *Reynolds* à l'état plein et de la rugosité relative. Ainsi, les courbes obtenues passent par un maximum pour la même valeur du taux de remplissage $\eta = 0,82$. Les valeurs maximales des coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning* ont été explicitement exprimées. Cependant, pour la valeur particulière du nombre de *Reynolds* à l'état plein $R_p = 10^4$, la courbe de variation du coefficient de résistance n de *Manning* en fonction du taux de remplissage η passe par un minimum pour toutes les valeurs choisies des rugosités relatives ε/D . Ce minimum est marqué également pour $\eta = 0,82$. Les coefficients de résistance C et n ont pu être exprimés en l'absence de la dimension linéaire en ayant recours à la méthode du modèle rugueux de référence.

Le deuxième chapitre s'est intéressé à l'étude des coefficients de résistance à l'écoulement de *Chézy* et de *Manning* dans une conduite en forme de voûte de type II. L'écoulement uniforme dans une conduite en de forme de voûte de type II n'a fait l'objet que de très peu d'études. Son analyse se base sur les relations de type *Chézy* ou *Manning*. A notre connaissance, il n'existe de nos jours aucune étude se rapportant à l'analyse de l'écoulement dans ce type de conduites lorsque le coefficient de résistance est variable. La variabilité du coefficient de résistance repose sur des considérations purement physiques, puisque ce coefficient devrait varier lorsque la profondeur de l'écoulement change.

A coefficient de résistance variable, l'étude s'effectue en se basant toujours sur la relation générale du débit de *Achour* et *Bedjaoui* applicable à l'ensemble du domaine de l'écoulement turbulent. Dans cette relation, le débit volume dépend de l'aire de la section mouillée, du rayon hydraulique, de la pente de la conduite, de la rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite et de la viscosité cinématique du liquide en écoulement. Selon la valeur du taux de remplissage, la conduite étudiée est composée en trois parties. Après avoir établi les caractéristiques géométriques de la conduite et hydrauliques de l'écoulement pour chaque intervalle du taux de remplissage, la relation générale du débit volume a permis de déduire l'expressions du coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* et celle du coefficient de résistance de *Manning*. Il a été montré que ces coefficients dépendent de la rugosité relative, du taux de remplissage de la conduite et du nombre de *Reynolds* à l'état plein. La représentation graphique de ces coefficients montre que pour la plus forte valeur de la rugosité relative, les courbes de variation du coefficient de *Chézy* adimensionnel C/\sqrt{g} et celui de *Manning* adimensionnel N se confondent pratiquement à partir de la valeur $R_p = 10^5$, et l'écoulement turbulent rugueux est alors atteint. L'étude montre que, quel que soit la valeur

du nombre de *Reynolds* à l'état plein et de la rugosité relative, les valeurs extrêmes des coefficients de résistance C de *Chézy* et n de *Manning* ont été enregistrées à un taux de remplissage $\eta = 0,812$. Dans le cas où le diamètre générateur de la conduite n'est pas une donnée du problème, l'application de la méthode du modèle rugueux a permis d'exprimer explicitement les coefficients de résistance à l'écoulement.

Le troisième chapitre s'est consacré à l'étude des coefficients de résistance à l'écoulement de *Chézy* et de *Manning* dans une conduite fermée de forme semi-elliptique. Dans ce chapitre l'objectif principal était d'analyser l'écoulement uniforme dans la conduite considérée en tenant compte de tous les paramètres qui le régissent, en particulier le coefficient de résistance à l'écoulement. Le principe consiste à combiner d'une part la relation de *Achour et Bedjaoui* et celle de *Chézy* et d'autre part la relation de *Achour et Bedjaoui* et celle de *Manning*. Les caractéristiques géométriques de la conduite et hydrauliques de l'écoulement ont été développées pour les quatre lieux géométriques que peut occuper l'écoulement. Les relations des coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning* ont été, alors, proposées pour les quatre zones. La représentation graphique de ces relations a été commentée et les points particuliers montrant les valeurs extrêmes des coefficients de résistance ont été déterminés. En effet, ces valeurs ont été atteintes à un taux de remplissage $\eta \approx 0,772$. Cette dernière valeur a mené à l'établissement des relations permettant le calcul explicite des valeurs extrêmes des coefficients de résistance en fonction de la rugosité relative et du nombre de *Reynolds* à l'état plein. En outre, on a constaté que les courbes obtenues se rapprochent les unes des autres au fur et à mesure de l'augmentation de la rugosité relative, indiquant ainsi l'état turbulent rugueux de l'écoulement. Lorsque le diamètre générateur de la conduite n'est pas connu, la méthode du modèle rugueux a permis d'exprimer d'une manière pratique les coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning*.

Le quatrième et dernier chapitre de cette partie, a été dédié à l'étude des coefficients de résistance à l'écoulement de *Chézy* et de *Manning* dans une conduite de forme elliptique. On a indiqué que cette forme constitue un cas particulier de la conduite en forme d'arc. Les caractéristiques géométriques de la conduite en arc et hydrauliques de l'écoulement ont été d'abord développées pour les trois zones que peut occuper l'écoulement. Par la suite, on a déduit les propriétés hydrauliques de l'écoulement et géométriques de la conduite elliptique ou bien plus précisément pseudo-elliptique. L'écoulement uniforme a été analysé avec des coefficients de résistance variables. Ceci a été rendu possible en se basant sur les relations de

Achour et Bedjaoui, de *Chézy* et de *Manning*. Les relations des coefficients de *Chézy* et de *Manning* ont été établies pour chaque zone que peut occuper l'écoulement dans la conduite. Les courbes de variation du coefficient de résistance de *Chézy* et celle de *Manning*, en fonction du taux de remplissage, de la rugosité relative et du nombre de *Reynolds* à l'état plein, a montré que ces coefficients passent par un maximum ou par un minimum correspondant au taux de remplissage $\eta \approx 0,863$. Les relations qui donnent les valeurs extrêmes des coefficients de résistance ont été explicitement développées. En l'absence du diamètre générateur de la conduite, la méthode du modèle rugueux a permis de proposer des relations explicite pour le calcul des coefficients de résistance dans chaque zone dans la conduite.

Des exemples d'application pratiques ont été proposés afin de montrer la fiabilité des démarches de calcul adoptées et de vérifier la validité des différentes approches proposées.

Il est important de signaler qu'à l'époque, les relations de *Chézy* de *Manning* ont été réservées exclusivement au calcul des écoulements turbulents rugueux car l'effet de la viscosité cinématique a été toujours laissé hors considération. Cependant, l'étude de l'écoulement uniforme à coefficients de résistance variables a permis de généraliser ces relations pour tout le domaine de l'écoulement turbulent.

Enfin, on recommande de poursuivre les études sur les coefficients de résistance à l'écoulement et sur les écoulements uniformes en général pour d'autres formes géométriques des conduites, afin de mettre à la disposition des ingénieurs des solutions directes selon la nature du problème rencontré dans la pratique.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Références bibliographiques

- ACHOUR, B. (2007). *Calcul des conduites et canaux par la MMR – Conduites et canaux en charge*, Larhyss Edition Capitale, Tome 1, 610 p.
- ACHOUR, B. (2013). *Écoulement uniforme à surface libre dans une conduite de forme circulaire*. Partie II, Editions Al-Djazair, 82p.
- ACHOUR, B. (2014.a), *Canal rectangulaire en charge et à surface libre*. Chapitre II, Editions Al-Djazair, 63p.
- ACHOUR, B. (2014.b). *Écoulement uniforme dans la conduite de forme ovoïdale*. Cours et applications corrigées, Editions Al-Djazair, 118p.
- ACHOUR, B. (2015). *Chezy's resistance coefficient in a circular conduit*. Open Civ. Eng. J. N°9, pp.187-195.
- ACHOUR, B., AMARA, L. (2020). *Proper relationship of Manning's coefficient in a partially filled circular pipe*, Larhyss/Journal, N°42, pp. 107-119.
- ACHOUR, B., BEDJAOUI, A. (2006). *Discussion of «Explicit Solutions for Normal Depth problem»* by Prabhata K. Swamee, Pushpa N. Rathie, J. Hydraulic Research, Vol.44, 5, pp. 715-717.
- ACHOUR, B., BEDJAOUI, A., KHATTAOUI, M., DEBABECHE, M. (2002). *Contribution au calcul des écoulements uniformes à surface libre et en charge*, Larhyss/Journal, N°1, pp.7-36.
- ACPA (American Concrete Pipe Association). (2007). *Concrete pipe design manual*. Irving, TX.
- BADRI, T. (2010). *Contribution à l'étude de l'écoulement uniforme dans une conduite fermée de forme ovoïdale*, Mémoire de magister en hydraulique, Univ. Biskra, Algérie, 164p.
- BARNES, H.H. (1967). *Roughness characteristics of natural channels*. USGS Water Supply Paper 1849, 213 p.
- Bazin, H. (1897). *Étude d'une nouvelle formule pour calculer le débit des canaux découverts*, Mémoire n°41, Annales des ponts et chaussées, Vol.14, ser.7, 4ème trimestre, pp.20-70.
- BLASIUS, H. (1913). *Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten*, Forschungsheft des Vereinsdeutscher Ingenieure, (*La loi des similitudes pour les processus de frottement dans les fluides*, Manuel de recherche de la Société allemande des ingénieurs) N°131, Berlin, pp 1-41.
- CHEZY, A. (1775). *Mémoire sur la vitesse de l'eau conduite dans une rigole*. *J. MS reprinted in Annales des ponts et chaussées*, Vol.60, 1921

- CHOW, V.T. (1955). A note on the Manning formula. *Transactions of the American Geophysical Union*, 36(4), 688 p.
- CHOW, V.T. (1973). *Open-Channel Hydraulics*, Ed. McGraw Hill, N.Y.
- COLEBROOK, C.F. (1939). *J. Inst. Civil Eng.*, Vol.11, pp.133-156.
- CRAUSSE, E. (1951). *Hydraulique des canaux découverts*, Ed. Eyrolles, Paris.
- DARCY, H. (1854). *Sur des recherches expérimentales relatives au mouvement des eaux dans les tuyaux*. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Vol.38, pp.1109- 1121, Paris.
- FORCHHEIMER, P. (1930). *Hydraulik (Hydraulique)*, 3rd edn. B.G (Bibliothèque Grecque), Teubner Verlagsgesellschaft (Edition Teubner), Leipzig and Berlin, pp. 139-163.
- GANGUILLET, E., KUTTER, W.R. (1869). *Versuch Zur Aufstellung Einer Neuenallegemeinen Formel für die gleichförmige Bewegung des wassers in canälenund Flüssen (Tentative de développement d'une nouvelle formule générale pour le mouvement uniforme de l'eau dans les canaux et les rivières)*, Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieurund Architektenvereins, Vol. 21, N° 1, pp. 6-25; N° 2-3, pp. 46-59, Vienna.
- GERMANO, S.C.A.,DYKENLOVE, M.,JOÃO, C.V. H. F.,DENIS. J. S.,MARCELO. S. D.C. (2020). *Friction factor equations accuracy for single and two-phase flows* ,International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering, Vol.11, pp 1-20.
- GRAF, W. H., ALTINAKAR, M.S. (2000). *Hydraulique fluviale: écoulement et phénomènes de transport dans les canaux à géométrie simple*, Traité de Génie Civil, Ed. Presses Polytechniques Romandes, Vol.16, Suisse, 613 p.
- HAMA, F.R. (1954). *Boundary Layer growth characteristics for smooth and rough surfaces*, Transactions, Society of Naval Architects and Marine Engineers, Vol. 62, pp. 333-351.
- HENDERSON, F.M. (1966). *Open channel flow*, New York, Macmillan, 522p.
- HERSCHEL, C.(1897). *On the origin of the Chézy formula*. Journal of the Association of Engineering Societies, Vol. 18, pp. 363-69.
- HEY, R.D. (1979). *Flow resistance in gravel-bed rivers*. *Journal of the Hydraulics Division*, American Society of Civil Engineers, Vol. 105, pp.365-79.
- HOUK, I.E. (1918). *Calculation of flow in open channels*, Miami Conservancy District, Technical report, Pt. IV, Dayton, Ohio, 283 p.
- HUNTER, R. (1943). *Evaluation of Boundary Roughness*, Proceedings Second Hydraulics Conference, University of Iowa Bulletin 27, pp 105-116.
- IWASA, Y. (1957). *Boundary layer growth of open channel flows on a smooth bed and its contribution to practical application to channel design*, Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University, Japan, Vol. XIX, N° III, pp. 229-254.

- JEAN, L., BERTRAND, K. (2006). *MANNING Robert*, Short Historical Dictionary on Urban Hydrology and Drainage, 11p.
- KEULEGAN, H.G. (1938). *Laws of turbulent flow in open channels*, Research Paper RP 1151, Journal of Research, U.S. National Bureau of Standards, Vol. 21, pp. 707-741.
- LAMRI, A. A. (2013). *Contribution à l'étude de l'écoulement uniforme dans un canal de forme trapézoïdal*, Mémoire de magister en hydraulique, Univ. Biskra, Algérie, 81 p.
- LAWRENCE, D.S.L. (2000). *Hydraulic resistance in overland flow during partial and marginal surface inundation*, Experimental observations and modeling, Water Resources Research, Vol. 36, N°8, pp. 2381-2393.
- LINDQUIST, E. (1933). *On velocity formulas for open channels and pipes*, Transactions of the World Power Conférence, Sectional Meeting, Scandinavia, Stockholm, Vol. 1, pp.177-234.
- LOUKAM, I. (2018). *Coefficient de résistance des écoulements uniformes*. Thèse de Doctorat en hydraulique, Univ. Biskra, Algérie, 157 p.
- MANNING, R. (1891). *On the flow of water in open channels and pipes*, Transactions, Institution of Civil Engineers of Ireland, Vol. 20, pp.161-207, Dublin.
- MOODY, L.F. (1944). *Friction factors for pipe flow*, Transactions of the ASME, vol. 66 (8), pp. 671–684.
- MORRIS, H.M. (1955). *A new concept of flow in rough conduits*, Transactions, American Society of Civil Engineers, Vol. 120, pp. 373-398.
- NIKURADSE, J. (1933). *Strömungsgesetze in rauhen Rohren*. Forschungsarbeit des Ingenieurwesens (*Les lois de l'écoulement dans les conduites rugueuses*. Travaux de recherche en ingénierie), Vol. 361, pp. 1-20.
- PEREZ, M.A., BUTLER, C.G., FANG, X. (2015). *Compute critical and normal depths of arch and elliptical pipes*, Journal of Irrigation and Drainage Engineering, Vol.141,9, pp.1-8.
- PIGOTT, R. J. S. (1933). *The Flow of Fluids in Closed Conduits*, Mechanical Engineering, vol. 55, pp. 497-501.
- POWELL, R.W. (1950). *Résistance to flow in rough channels*, Transactions, American Geophysical Union, Vol.31, n°4, pp. 575-582.
- PRANDTL, L. (1926). *Über die ausgebildete Turbulenz (À propos de la turbulence développée)*. Proceedings of the 2nd International Congress of Applied Mechanics, Zürich, pp. 62-74.
- SCHLICHTING, H. (1955). *Boundary Layer Theory*, McGraw Hill Book Company, New York, Pergamon Press Ltd., London.
- SCHNACKENBERG, E.C. (1951). *Slope discharge formulae for alluvial streams and rivers*. *Prôceeding*, New Zealand Institution of Engineers, Vol. 37, pp. 340-409, Wellington.

- SINNIGER, R.O., HAGER, W.H. (1989). *Constructions hydrauliques*, Traité de Génie Civil, Ed. Presses Polytechniques Romandes, Vol.15, Suisse.
- SMITH, M.W., NICHOLAS, J. C., LOUISE, J. B. (2007). *Applying flow resistance equations to overland flows*, *J. Progress in Physical Geography*, Vol. 31, n°4, pp. 363-387.
- STRICKLER, A. (1923). *Beiträge zur Frage der Geschwindigkeitsformel und der Rauheitszahlen für Ströme, Kanäle und geschlossene Leitungen (Contributions au problème de l'équation de vitesse et des valeurs de rugosité des écoulements, canaux et conduites fermées)*, *Mitteilungen des eidgenössischen Amtes für Wasserwirtschaft*, n° 16, Bern.
- SWAMEE, P.K., JAIN, A.K. (1976). *Explicit equations for pipe-flow problems*. *Journal of the Hydraulics Division*. ASCE m Vol. 102, N°. HY5, pp. 657-664.
- SWAMEE, P.K., RATHIE, P.N. (2004). *Exact solutions for normal depth problem*, *J. Hydraulic Research*, Vol.42, 5, pp. 541-547.
- SWAMEE, P.K., SWAMEE, N. (2008). *Design of noncircular sewer sections*, *Journal of Hydraulic Research* Vol. 46, N° 2, pp. 277-281.
- VATANKHAH, A.R. (2012). *Direct solutions for normal and critical depths in standard city-gate sections*, *Flow Measurement and Instrumentation*, Vol. 28, pp. 16-21.
- VLADISLAVLJEVITCH, Z. (1951). *Aperçu critique sur les formules pour la prédétermination de la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme*, *Transactions of the 1st Congress, International Commission on Irrigation and Drainage*, New Delhi, Vol.2, rept.12, question 2, pp.405- 428.
- VON KÁRMÁN, T. (1930). *Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz (Similitude mécanique et turbulence)*, *Proceeding of the 3d International Congress for Applied Mechanics*, Vol. I, pp.85-93, Stockholm.
- WEISBACH, J. (1845). *Lehrbuch der Ingenieur und Maschinenmechanik (Manuel d'ingénierie et de mécanique des machines)*, Brunswick, Germany. *Hydraulics Division*, Vol.102, HY5.pp.657-664.
- ZEGAIT, R. (2012). *Contribution à l'étude de l'écoulement uniforme dans une conduite en fer à cheval*, Mémoire de magister en hydraulique, Univ. Biskra, Algérie, 132 p.