République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Faculté des sciences Exactes et Informatique

Département De Physique

Polycopié de Cours

Destiné aux étudiants en 2ème année Licence Chimie

Vibrations, Ondes et Optique

Préparé et Présenté par :

Dr. *Hadj Mouloudj* — *Maître de Conférences B*

Université Hassiba Ben Bouali Chlef UHBBC

Année universitaire : 2024/2025

Avant-propos

Le présent polycopié porte sur les mouvements oscillatoires, les phénomènes de propagation et les phénomènes optiques. Il est particulièrement destiné aux étudiants de deuxième année universitaire en sciences de la matière (SM), notamment en licence de Chimie, concernés par le module *"**Vibrations, Ondes et Optique**"* à l'université de Chlef. Ce document rassemble toute la matière des notes de cours, ainsi que quelques exercices corrigés. Il a été préparé pour atténuer le maximum les difficultés inscrites dans le langage scientifique tout en conservant la rigueur exigée. Par ailleurs, il donne à l'étudiant des points de repère et les bases fondamentales de la physique.

Ce polycopié est structuré en huit chapitres :

La première partie (chapitres 1 à 4), traite des vibrations mécaniques en se concentrant sur les oscillateurs linéaires, leurs conditions d'oscillation et le formalisme de Lagrange. Elle aborde les notions de degré de liberté et de coordonnées généralisées, en se limitant aux oscillations linéaires de faible amplitude. L'étude porte sur des systèmes à un ou deux degrés de liberté, dont les équations de mouvement sont linéaires, permettant d'analyser des phénomènes comme la résonance et d'examiner les vibrations libres et forcées, avec ou sans amortissement.

La deuxième partie (chapitres 5 et 6) est traite des ondes mécaniques en introduisant les notions fondamentales de leur propagation. L'étude commence par les ondes transversales sur une corde, abordant l'équation d'onde d'Alembert, la solution sinusoïdale, la vitesse de l'onde et de la particule, ainsi que l'impédance. Elle se termine par l'analyse des coefficients de réflexion et de transmission dans des milieux finis. Enfin, les ondes élastiques dans les milieux continus et les ondes acoustiques dans les fluides sont explorées.

Enfin, la troisième partie (chapitres 7 et 8) est porte sur l'optique géométrique et les instruments d'optique. Elle traite de la réfraction, de la réflexion, de la dispersion et de la formation des images, ainsi que de dispositifs tels que le prisme. L'étude inclut également la construction des images dans un système optique centré pour mieux comprendre les principes fondamentaux de l'optique, tels que les dioptres, les miroirs et lentilles minces.

Table des matières

Chapitre I : Équation différentielles du second ordre à coefficients constants 8

I. Généralités sur les oscillations 8

1.1 Définitions sur les vibrations 8

1.2 Mouvement périodique et ses caractéristiques 8

1.3 Mouvement sinusoïdal 9

1.4 Coordonnées généralisées et degré de liberté 10

1.5 La représentation complexe 11

1.6 Superposition des grandeurs périodiques 13

1.6.1 Grandeurs sinusoïdales de même pulsation 13

1.6.2 Grandeurs sinusoïdales de même amplitude 13

1.6.3 Grandeurs sinusoïdales quelconques 14

1.7 La représentation de Fresnel 14

1.8 Séries de Fourier 15

II. Équation différentielles du second ordre à coefficients constants 16

1.9 Solutions d'équations différentielles de second ordre à coefficients constants 16

1.9.1 Solution générale d'équation homogène (sans second membre) 16

- Régime apériodique 17
- Régime critique 17
- Régime pseudo période 18

1.10 Équation différentielles avec second membre 18

1.10.1 Solution d'équation différentielle du mouvement 18

1.10.2 Solution particulière d'un second membre 20

Exercices 22

Chapitre II : Oscillations libres des Système à un degré de liberté 24

I. Oscillations non amorties 24

2. Oscillateur Linéaires 24

2.1 Equation différentielle du mouvement 24

2.1.1 Oscillateurs harmoniques 25

- Exemple du système masse-ressort vertical 25

- Pulsation propre et période propre 26

2.1.2 Pendule simple 26

2.1.3 Solution de l'équation du mouvement 29

2.1.4 Oscillations électriques 29

2.1.4.1Equation différentielle du (LC) 29

2.1.5 Analogie entre le système mécanique et le système électrique 30

II. Oscillations libres des Système amorties à un degré de liberté 30

2.2 Force d'amortissement (frottement visqueux) 30

2.2.1 Equation différentielle du mouvement (Equation de Lagrange) 31

2.2.2 Exemple du Système masse-ressort-amortisseur 31

2.2.3 Résolution de l'équation du mouvement 32

2.2.4 Décrément logarithmique 35

- Facteur de qualité système masse-ressort-amortisseur 35
- Facteur de qualité système $(R.L.C)$ 35
- Degré de dissipation 35
- Constante de temps 35

2.2.5 Oscillateur électrique 35

2.2.6. Analogie entre le système mécanique et le système électrique 37

2.2.6.1 Énergie de condensateur 37

2.2.6.2 Énergie de la bobine 37

2.2.6.3 Énergie totale 37

Exercices et solutions 37

Chapitre III : Oscillations forcées amorties des systèmes à un degré de liberté 38

3.1 Définitions 38

3.2 Equation différentielle des systèmes forcés 38

3.2.1 Exemple du système masse-ressort-amortisseur 39

3.3 Solution de l'équation différentielle du mouvement 40

3.3.1 Solution homogène (La solution transitoire) 40

3.3.2 Solution particulière 41

3.4 Phénomène de résonance 44

3.4.1 Etude des variations de l'amplitude A et de la phase Φ en fonction de la pulsation de l'excitation 44

3.4.1.1 Résonance d'amplitude 44

3.4.1.2 Résonance de phase 47

3.4.2 Bande passante et facteur de qualité 47

3.5 Oscillations électriques 48
3.5.1 Analogie entre le système mécanique et le système électrique 50
- Facteur de qualité 50
- Impédance 50
Exercices et Solutions 50
Chapitre IV : Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté 51
4.1 Systèmes à deux degrés de liberté 51
4.2 Type de couplage 51
4.3 Exemples de systèmes à deux degrés de liberté 52
4.3.1 Système masses-ressorts en translation 52
4.3.2 Equations différentielles du mouvement 53
4.3.3 Résolution des équations différentielles 54
4.3.4 Les Modes propres d'oscillations 54
- Pulsations propres 54
4.3.5 Cas particulier de deux oscillateurs identiques 58
- Pulsations propres 58
- Phénomène de battements 60
4.4 Pendules couplés 61
4.4.1 Équations différentielles du système 61
4.4.2 Résolution des équations différentielles 62
- Pulsations propres 63
Exercices et Solutions 63
Chapitre V : Généralités sur les phénomènes de propagation 64
5. propagation à une dimension 64
Introduction 64
5.1. Généralités et définitions de base 64
5.1.1. Définition d'une onde 64
5.1.2. Types d'ondes 65
5.1.2.1. Ondes mécaniques 65
- Onde mécanique à une dimension 65
- Onde mécanique à deux dimensions 65
- Onde mécanique à trois dimensions 66
5.1.2.2 Onde électromagnétiques 66
5.1.3 Modes de propagations 66

5.1.3.1 Ondes transversales 66
5.1.3.2 Ondes mécaniques longitudinales 67
5.1.3.3 Ondes progressives 67
5.1.3.4 Ondes stationnaires 67
5.2 Propagation à une dimension 68
5.2.1 Equation de propagation 68
5.2.1 Solution de l'équation de propagation 68
- Méthode D'Alembert 68
5.2.2 Propriétés des solutions particulières 70
5.2.4 Onde progressive sinusoïdale 73
5.2.4 .1 Longueur d'onde, nombre d'onde et vecteur d'onde 74
5.2.5 Superposition de deux ondes progressive sinusoïdale : 75
- Cas de deux ondes de même fréquence se propageant dans le même sens 76
- Cas de deux ondes de même fréquence se propageant dans des sens opposés 76
5.2.6 Vitesse de phase 77
5.2.7 Vitesse de groupe 77
5.3 Modèle de la chaine linéaire 78
5.3.1 Équation d'onde 78
Chapitre VI : Ondes acoustiques dans les fluides 83
Introduction 83
6.1 Equation de propagation des ondes acoustiques dans les fluides 83
6.1.1 Vitesse du son 85
6.2 Onde progressive sinusoïdale 86
Définition 86
6.2.1 Pression acoustique 87
6.2.2 Impédance acoustique 87
6.2.3 Energie acoustique 87
6.2.4 Intensité acoustique 88
6.3 Réflexion-Transmission des ondes acoustiques en incidence normale 89
Chapitre VII : Principe et lois de l'optique géométrique 91
7. Introduction sur notions fondamentales sur la lumière 91
7.1 La nature de la lumière 92
7.2 La double propriété de la lumière 92
7.3 Faisceaux lumineux 93

7.4 Caractéristiques d'un milieu optique 94
7.4.1 Milieux transparent, homogène, isotrope 94
7.4.2 Indice de réfraction 94
7.5 Les sources de lumière 95
7.6 Lois de Snell-Descartes 95
a. Loi de Réflexion 95
b. Loi de Réfraction 95
c. Réfraction limite - Réflexion totale 98
7.7 Prisme 99
7.7.1 Marche d'un rayon lumineux traversant un prisme 100
7.7.1.1 Dispersion de la lumière dans un prisme 102
Exercices et solutions 102
Chapitre VIII : Construction des images 103
Introduction 103
8.1 Stigmatisme 103
8.2 Systèmes optiques simples à faces planes 104
8.2.1Miroir plan 104
2.2.2 Dioptre plan 105
8.3 Systèmes optiques à faces sphériques 106
8.3.1 Miroir sphérique 106
8.3.2 Dioptre sphérique 107
8.3.3 Grandissement 108
8.4 Lentilles minces 110
8.4.2 Définitions 110
8.4.2 Marche d'un rayon lumineux 111
8.4.3 Les différents types de lentilles 114
8.4.3.1 Lentilles convergentes 114
8.4.3.2 Lentilles divergentes 115
Exercices et solutions 115
Bibliographie 116

Chapitre I

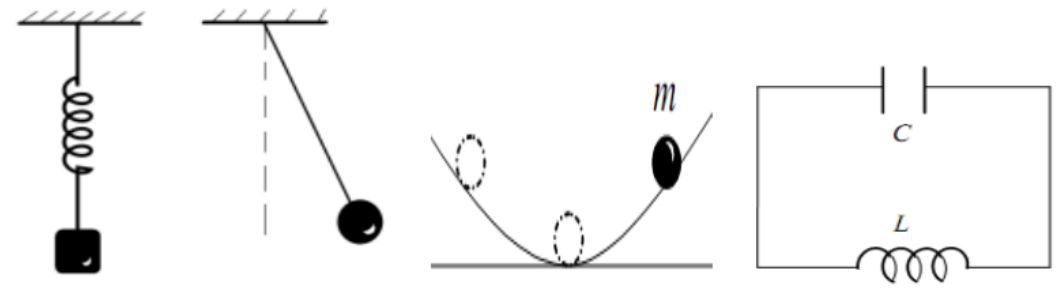
Équations différentielles du second ordre à coefficients constants

I. Généralités sur les oscillations

1.1 Définitions sur les vibrations

1.1.1 La vibration : est un phénomène oscillatoire d'un corps en mouvement autour de sa position d'équilibre. Ou c'est un mouvement de va-et-vient répétitif autour d'une position d'équilibre.

Exemple sur d'oscillations:



a. masse ressort. **b.** pendule simple. **c.** masse en fond d'une vallée. **d.** circuit électrique oscillant.

☞ **Vérification des conditions d'équilibres et de stabilité**

Il existe deux types d'équilibre :

- Equilibre stable et instable : La condition nécessaire est que

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial p^2}|_{p=0} > 0 \qquad \text{Et} \qquad \frac{\partial^2 E_p}{\partial p^2}|_{p=0} < 0$$

1.2 Mouvement périodique

On appelle un mouvement périodique qui se répète identique à lui-même à des intervalles de temps successifs de même durée **T**.

1.2.1 La période T : est défini comme suit

$$\mathbf{T_0} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\boldsymbol{\omega_0}} \quad on\ mesure\ en\ seconde\ (s)$$

Où $\boldsymbol{\omega_0}$est appelée la pulsation du mouvement.

1.2.2 La fréquence f_0 : c'est le nombre de période où nombre d'oscillations par seconde, et est mesurée en Hertz (Hz) ou s^{-1}, est donnée par :

$$\boldsymbol{N = f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}}$$

1.2.3 La pulsation $\boldsymbol{\omega_0}$: c'est le nombre de tours par seconde, mesuré en radian par seconde (rad/s) est donnée par :

$$\boldsymbol{\omega_0 = 2\pi . f_0}$$

1.3 Mouvement sinusoïdal

Sa loi horaire (équation du mouvement) est une fonction sinusoïdal**e** du temps écrite sous les formes voir le Figure 1**.**

$$\boldsymbol{x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad ou \quad y(t) = Y_m \cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

Avec :

$$\begin{cases} X_m \text{ ou } Y_m : amplitude\ , (m)\ toujour\ > 0\ (positive) \\ \omega_0 : pulsation\ propre, \left(rd/_s\right) > 0 \\ \varphi : phase\ initiale\ \ à\ l'instant\ t = 0s\ , (rd) \\ (\omega_0 t + \varphi) : La\ phase\ instantané\ \ à\ l'instant\ t, (rd) \\ x(t)\ ou\ y(t) : L'élongation\ ou\ la\ position\ à\ l'instant\ t \\ x(t)\ verie\ entre \qquad +X_m et -X_m \end{cases}$$

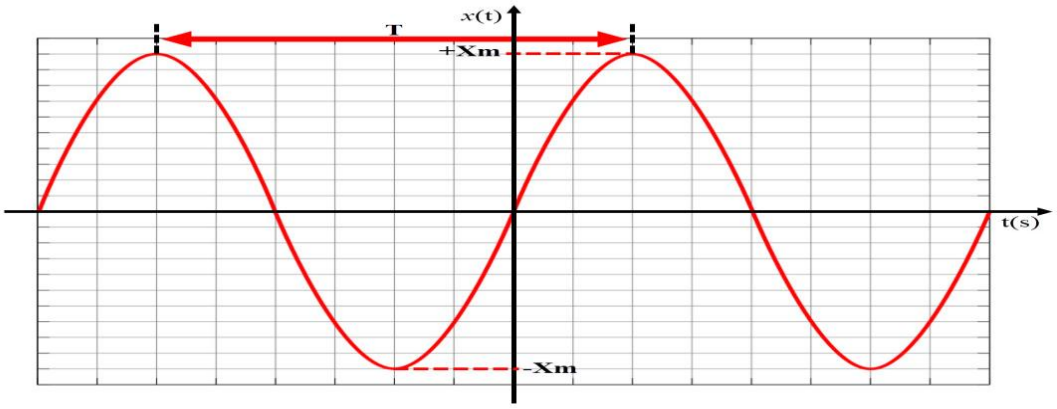


Figure 1 : Mouvement sinusoïdale

Exemple : Les grandeurs caractéristiques d'une vibration harmonique sont :

Soit l'oscillateur harmonique dont l'équation est :

$$x(t) = 2.10^{-2}\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (m)$$

Est de la forme : $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$,

Avec : $X_m = 2.10^{-2}m,\ \omega_0 = 100\pi\frac{rd}{s},\ \varphi = -\frac{\pi}{2}rd,\quad N = f_0 = 50Hz,$ $T_0 = 0.02s$

1.4 Coordonnées généralisées d'un système physique

1.4.1 Définition : On appelle coordonnées généralisées le plus petit nombre de coordonnées indépendantes (système holonomes) qui peuvent déterminer le mouvement du système et le nombre de coordonnées généralisées est égale au degré de liberté du système et on les note par : $\boldsymbol{q_1(t), q_2(t), \ldots\ldots q_n(t)}$.

Exemples :

Considérons un point matériel libre, la position de ce point peut être définie par des coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou par les trois coordonnées sphériques (ρ, θ, φ) ou par les 3 coordonnées liées aux angles d'Euler (φ, ψ, θ) et d'une manière générale par trois coordonnées $(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$ appelées les coordonnées généralisées.

Les vitesses généralisées sont noté par : $\dot{q}_1(t),\ \dot{q}_2(t),\ \dot{q}_3(t)$.

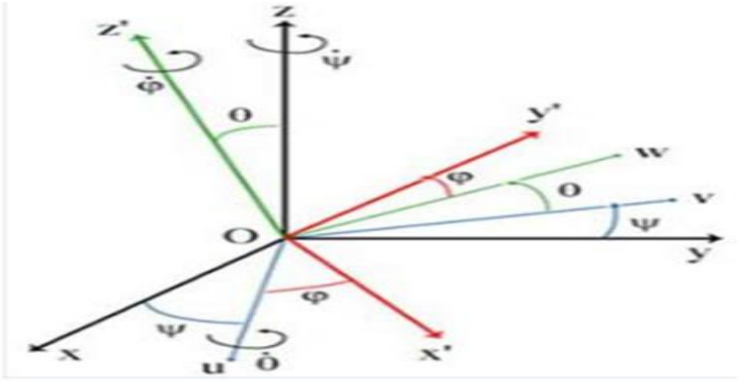


Figure 2 : Les différentes coordonnées généralisées d'un système en mouvement.

1.4.2 Degré de liberté : On définit le nombre de degrés de liberté **N** est le nombre de mouvements indépendants d'un système physique (détermine le nombre d'équations différentielles du mouvement.) et donnée par la relation suivante :

$$\mathbf{d = N - r}$$

d : Degré de liberté.

N : Nombre de coordonnées généralisées.

r : Nombre de relations reliant ces cordonnées entre elle.

Exemples :

- Système à 1d d l : Un disque de masse m et de rayon r, roule sans glisser sur un plan horizontal.

Il y a deux coordonnées généralisées x et θ donc $\mathrm{N} = 2$

x et θ sont liées avec une relation : $x = R.\theta$ donc : $r = 1$.

Le nombre de degrés de liberté $\mathrm{d} = \mathrm{N} - \mathrm{r} = 2 - 1 = 1$ d d l

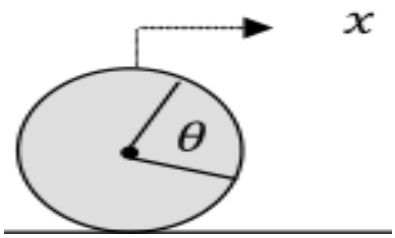


Figure 3: Système à 1 d d l

- Système à 2 d d l : voir le figure ce contre. On a 2 coordonnées généralisées x_1 et x_2 donc $\mathrm{N} = 2$ et x_1 et x_2 sont indépendant donc $r = 0$. Le nombre de degré de liberté $\mathrm{d} = \mathrm{N} - \mathrm{r} = 2 - 0 = 2$ d d l.

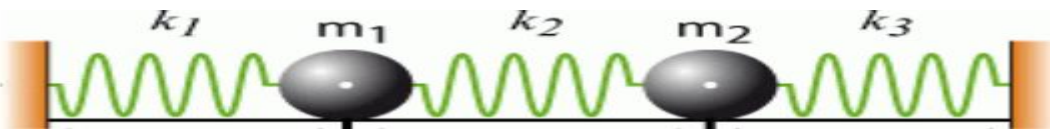


Figure 4: Système à 2 d d l

1.5 Représentation complexe

3.1 Rappel :

*- Soit un nombre complexe $\underline{Z} = x + jy$ forme algébrique, et
$\underline{Z} = r(\cos\theta + j\sin\theta)$ forme trigonométrique (en coordonnées polaires), ou
$\underline{Z} = re^{j\theta}$ forme exponentielle.

*- On dit complexe conjugué de Z chaque nombre complexe de la forme :

$\underline{Z}^* = x - jy = re^{-j\theta}$.

*- Module Z : $r = \|\underline{Z}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\underline{Z}\,\underline{Z}^*}$

*- Argument θ : $\tan\theta = \frac{Im\underline{Z}}{Re\underline{Z}} = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = arg\ \tan$

*- Proportions trigonométriques :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	π
$Cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	-1
$Sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1	0

Exemples :

1/ Soit le mouvement $x(t) = x_0\cos(3t + 5)$ trouver à l'aide de la représentation complexe la vitesse $\dot{x}(t)$ et l'accélération $\ddot{x}(t)$.

La solution :

$x(t) = x_0\cos(3t + 5) \longrightarrow \underline{x}(t) = x_0e^{j(3t+5)}$

$\dot{x}(t) = 3x_0\cos\left(3t + 5 + \frac{\pi}{2}\right) \leftarrow \underline{\dot{x}}(t) = 3jx_0e^{j(3t+5)} = 3x_0e^{j\left(3t+5+\frac{\pi}{2}\right)}$ Car $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$

$\ddot{x}(t) = -9x_0\cos(3t + 5) \leftarrow \underline{\ddot{x}}(t) = -9x_0e^{j(3t+5)}$

2/ Ecrire les nombres complexes sous la forme exponentielle, $Z = re^{j\varphi}$

$Z = 1 + 2j,\ Z = 1,\ Z = -1,\quad Z = -j,\quad Z = \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2},$ (1+j2)(3+j4)

Solutions : $Z = 1 + 2j$, Module de Z : $r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$,
Argument θ est $\tan\theta = \frac{y}{x}$

$$\tan\theta = \frac{2}{1} \Rightarrow \theta = arc\tan 2 \quad donc\ Z = \sqrt{5}e^{j\ arc\tan 2}$$

De même : $1 = e^{j2\pi}$, $-1 = e^{j2\pi} = e^{j\pi}$, $-j = e^{j\frac{3\pi}{2}} = e^{-j\frac{\pi}{2}}$

1.6 Superposition des grandeurs périodiques :

1.6.1 Grandeurs sinusoïdales de même pulsation :

Soit les deux grandeurs sinusoïdales :

$x_1(t) = a\cos(\omega t + \varphi_1)$ Et $x_2(t) = b\cos(\omega t + \varphi_2)$

On utilise la représentation complexe pour trouver $X(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$$x_1(t) + x_2(t) = a\cos(\omega t + \varphi_1) + b\cos(\omega t + \varphi_2) = ae^{j(\omega t+\varphi_1)} + be^{j(\omega t+\varphi_2)}$$

$$X(t) = ae^{j\varphi_1}e^{j(\omega t)} + be^{j\varphi_2}e^{j(\omega t)} = \left(ae^{j\varphi_1} + be^{j\varphi_2}\right)e^{j(\omega t)} = Ce^{j\varphi}e^{j(\omega t)}$$
$$= Ce^{j(\omega t+\varphi)} = C\cos(\omega t + \varphi)$$

C'est une grandeur sinusoïdale de pulsation ω.

- **L'amplitude C :**

$$C = \left\|ae^{j\varphi_1} + be^{j\varphi_2}\right\| = \sqrt{(ae^{j\varphi_1} + be^{j\varphi_2})(ae^{-j\varphi_1} + be^{-j\varphi_2})}$$

$$C = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\varphi_1 - \varphi_1)}$$

- **La Phase φ:**

$$\tan\varphi = \frac{Im\left(ae^{j\varphi_1} + be^{j\varphi_2}\right)}{Re(ae^{j\varphi_1} + be^{j\varphi_2})} = \frac{a\sin\varphi_1 + b\sin\varphi_2}{a\cos\varphi_1 + b\cos\varphi_2}$$

Donc la superposition de deux grandeurs sinusoïdales de même pulsation ω est une grandeur sinusoïdale de pulsation ω .

1.6.2 Grandeurs sinusoïdales de même amplitude

Soit les deux grandeurs sinusoïdales :

$x_1(t) = a\cos(\omega_1 t)$ et $x_2(t) = a\cos(\omega_2 t)$

$$X(t) = a\cos(\omega_1 t) + a\,cos(\omega_2 t) = 2a\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\,t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\,t\right)$$

La superposition de deux grandeurs sinusoïdales de même amplitude est une grandeur sinusoïdale à amplitude modulée si les deux pulsations sont différentes.

1.6.3 Grandeurs sinusoïdales quelconques :

La superposition de deux grandeurs sinusoïdales de pulsations différentes ω_1 et ω_2 ne sera une grandeur périodique que si le rapport entre leur périodes est un nombre rationnel: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{k}{m} \Longrightarrow T = mT_1 = kT_2 \ll$

Exemple :

Soit les deux grandeurs sinusoïdales : $x_1(t) = 6\cos(5t + 3)$ et $x_2(t) = 3\cos(7t + 4)$

La superposition de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ est : $X(t) = x_1(t) + x_1(t)$

Comme $\frac{T_1}{T_2} = \frac{k}{m} = \frac{2\pi/5}{2\pi/7} = \frac{7}{5}$, c'est une grandeur périodique de période

$$T = mT_1 = kT_2 = m(2\pi/5) = k(2\pi/7) = 2\pi\ (s)$$

1.7 La représentation de Fresnel :

La représentation de Fresnel est la version géométrique de la représentation complexe. On associe à cette grandeur un vecteur tournant dit de Fresnel dont les caractéristiques sont les suivantes :

- sa vitesse de rotation est égale à $\boldsymbol{\omega}$.
- sa norme est égale à l'amplitude de la grandeur sinusoïdale.
- l'angle par rapport à l'origine des phases est égal à la valeur instantanée $(\omega_0 t + \varphi)$ de la grandeur sinusoïdale.

Par exemple :

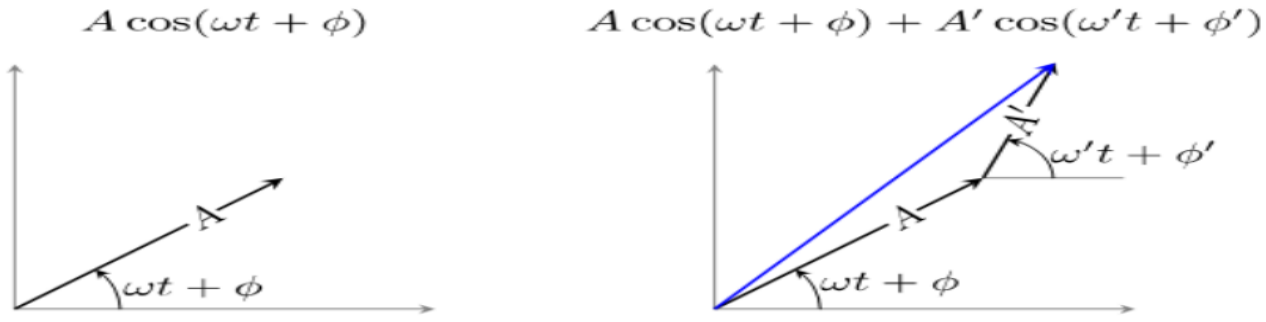


Figure 5 : La représentation de Fresnel

On se trouve :

$$x(t) = A\cos(\omega t + \Phi) + A'\cos(\omega' t + \Phi') = A_1\cos(\omega_1 t + \Phi_1)$$

1.8 Séries de Fourier :

On montre mathématiquement que toute oscillation périodique se décompose en une somme d'oscillations harmoniques (décomposition de Fourrier). Pour simplifier l'étude, L'oscillateur est dit **anharmonique** Pour des petites variations est définie par :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

Où

*- a_0 , a_n et b_n sont appelés les coefficients de Fourier.

*- La pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est appelée la pulsation fondamentale.

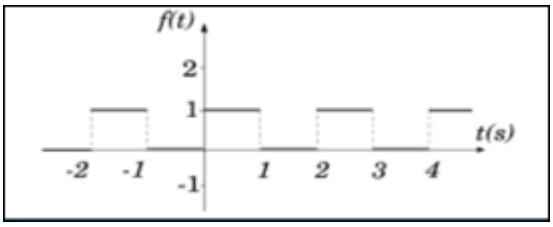
*- Les pulsations supérieures $n\omega$ (multiples de ω) sont appelées les harmoniques.

*- Les coefficients de Fourier sont définis par:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \ , \ a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt \ , \ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

Exemples de fonctions périodiques :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \in [0,1] \\ 0 & si \quad t \in [1,2] \end{cases}$$



On peut déduire la période du graphe $T = 2s, \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\ rd/s$, les coefficients de Fourier de cette fonction sont donnés par :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 dt = \frac{1}{2}[t]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{2}\int_0^1 \cos(n\pi t)\,dt = \frac{1}{n\pi}[\sin(\pi n t)]_0^1 = \frac{\sin(n\pi)}{n\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt = \frac{2}{2}\int_0^1 \sin(n\omega t)\,dt = -\frac{1}{n\pi}[\cos(\pi n t)]_0^1 = \frac{1-\cos(\pi n)}{n\pi}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 \ \ si\ n\ pair \\ \dfrac{2}{n\pi} \ \ si\ n\ impair \end{cases} = \frac{2}{(2k+1)\pi} \quad , \qquad k = 0, 1, 2 \ldots\ldots$$

La fonction f(t) s'écrit : Si n impair, alors

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin(2k+1)\,\pi\, t$$

II. Équation différentielles du second ordre à coefficients constants

1.9. Solutions d'équations différentielles de second ordre à coefficients constants:

1.9.1 Solution générale d'équation homogène (sans second membre)

* Si l'équation différentielle du mouvement de la forme :

$$\boldsymbol{\ddot{x} + \omega_0{}^2 x = 0} \ldots. (1.1)$$

du second ordre sans second membre alors la solution générale $x(t)$ sous la forme complexe est de la forme : $x(t) = Ae^{rt}$ ou de la forme $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$ ou $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, Où A, φ sont coefficients à déterminer par les condition initial.

* Si l'équation différentielle du mouvement est de la forme :

$$\boldsymbol{\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \ldots (1.2)$$

Avec λ : coefficient d'amortissement et $\omega_0$la pulsation propre.

On recherche à l'équation caractéristique : $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$ et on calcul le discriminant Δ' tel que $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$, on distingue 3 cas pour la solution.

1ère cas :

Si $\Delta' > 0 \Rightarrow \lambda > \omega_0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \\ r_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \end{cases}$ **,** alors la solution générale de cette équation est :

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(A_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}t}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (1.3)$$

Où

$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$. Le système est appelé régime apériodique (fortement amorti). Voir figure 6,

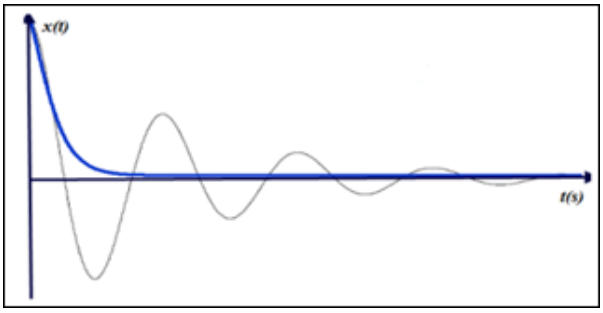


Figure 6: Régime apériodique

2ème cas :

Si $\Delta' = 0 \Rightarrow \lambda = \omega_0 \Rightarrow \quad r_1 = r_2 = \boldsymbol{r} = \frac{-\boldsymbol{\lambda}}{\mathbf{1}} = -\boldsymbol{\lambda}$

La solution s'écrit comme suit

$$x(t) = e^{-\lambda t}(A_1 t + A_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.4)$$

ou A_1, A_2 à déterminer par les conditions initiales. Le système est appelé critique régime ou l'amortissement est critique. Voir figure 7.

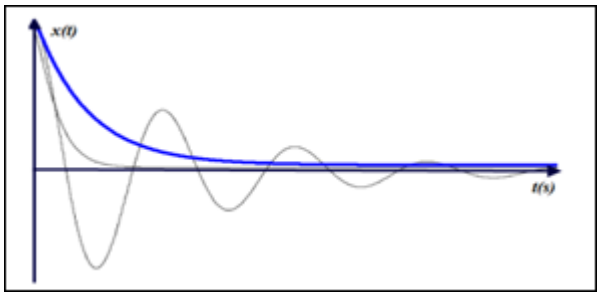


Figure 7: Régime critique

3ème cas :

Si $\Delta' < 0 \Rightarrow \lambda < \omega_0 \Rightarrow$ il y a 2 solutions complexes

$$\begin{cases} r_1 = -\lambda - j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda - j\omega_a \\ r_2 = -\lambda + j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda + j\omega_a \end{cases}$$

La solution générale s'écrit :

$$x(t) = Ce^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \varphi) \text{ ..... (1.5)}$$

Avec $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$: est appelé pseudo pulsation. tel que λ, C et φ sont des constantes à déterminer par les conditions initiales, $T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$ le régime est appelé pseudo période ou l'amortissement est faible amplitude (faiblement amortie). Voir figure 8.

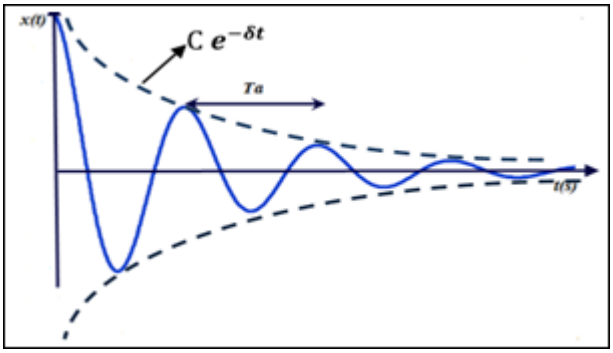


Figure 8: Régime pseudo période

1.10 Équations différentielles avec second membre:

Nous étudiant les equations comme suivantes :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0\cos\Omega t \qquad \text{ou} \qquad \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0\sin\Omega t$$

Donc l'équation différentielle de mouvement s'écrit sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{f_0}{m}\cos\Omega t \iff \ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = A(t) \text{.....} (1.6)$$

C'est une équation différentielle du second ordre linéaire non homogène à coefficients constants avec second membre.

Avec :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\alpha}{2m} \text{ ... ... } (3-5) \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ ... ... } (3-6) \\ A(t) = \frac{f_0}{m}\cos\Omega t \equiv A_0\cos\Omega t \end{cases} \text{ ..... (1.7)}$$

1.10.1 Solution d'équation différentielle du mouvement

La solution générale de cette équation Elle admet deux solutions :

- Une solution de l'équation sans second membre : solution homogène $X_H(t)$.

- Une solution de l'équation avec second membre : solution particulière $X_P(t)$.

La solution totale ou générale est :

$$X_g(t) = X(t) = X_H(t) + X_P(t) \text{ ……. (1.8)}$$

1.10.2 Solution homogène (La solution transitoire)

Nous avons déjà étudié l'équation sans seconde membre (système oscillateur harmonique amortie)

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \iff \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ ……. (1.9)}$$

$$\Downarrow$$

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \text{ ……. (1.10)}$$

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$$

On distingue trois cas suivant le signe du discriminant réduit.

$\Delta' > 0 \implies \lambda > \omega_0$ Le système est fortement amorti

$\Delta' < 0 \implies \lambda < \omega_0$ L'amortissement est faible

$\Delta' = 0 \implies \lambda = \omega_0$ L'amortissement est critique

La solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$X_H(t) = A' e^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \varphi) \text{ ……. (1.11)}$$

Avec : $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ pseudo-pulsation, on dit que le systèmme à un mouvement oscillatoire amortie correspond à un **régime transitoire,** (en régime libre dans le cas des oscillations faiblement amorties).

Remarque :

1/ La solution générale de l'équation sans second membre correspond à un régime transitoire (qui ne dure qu'un certain temps).

2/ Si $\lambda < \omega_0$: la limite de $X_H(t)$ est toujours nulle quand t tend vers l'infini:

$$t \longrightarrow +\infty \implies e^{(-\lambda).(+\infty)} = 0$$

La solution homogène devient négligeable devant la solution perticulière (le regime permanent ou la solution permanente, ou régime stationnaire).

La solution générale devient :

$$X_g(t) = X(t) = X_P(t)$$

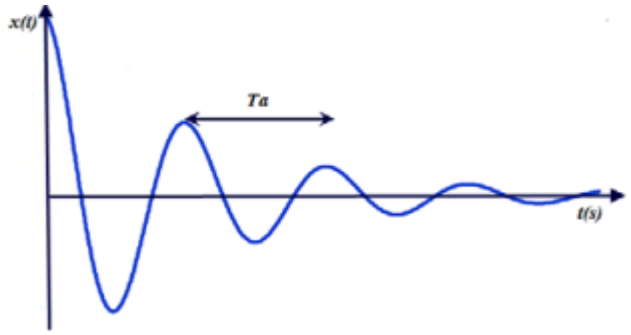


Figure 9: Régime amortie (transitoire).

1.10.3 Solution particulière d'un second membre

$X_P(t)$: est la solution permanente (stationaire) de l'équation nonhomogène avec seconde terme $F(t)$. alors la solution particulière $X_P(t)$ sera une fonction sinusoïdale de même pulsation Ω , si $F(t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation Ω, la solution elle est de la forme :

$$X_P(t) = A\cos(\Omega\,t + \Phi) \;\; ou \;\; X_P(t) = A\sin(\Omega\,t + \Phi) \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1.12)$$

On trouve A et Φ à l'aide de la représentation complexe comme suit :

$$F(t) = f_0\cos\Omega t \quad \longrightarrow \quad f_0 e^{j\Omega t}$$

$$q_P(t) = X_P(t) = A\cos(\Omega\,t + \Phi) \longrightarrow \underline{q}_P(t) = \underline{X}_P(t) = Ae^{j(\Omega t+\Phi)}$$

$$\underline{X}_P(t) = Ae^{j\Phi}e^{j\Omega t}$$

$$\underline{X}_P(t) = \underline{A}e^{j\Omega t}$$

Avec : $\underline{A} = Ae^{j\Phi}$

On calculs $\dot{\underline{X}}_p(t)\; et\; \ddot{\underline{X}}_p(t)$

$$\dot{\underline{X}}_p(t) = \dot{\underline{q}}_p(t) = \frac{d\underline{X}_P(t)}{dt} = j\Omega\underline{A}e^{j\Omega t} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1.13)$$

$$\ddot{\underline{X}}_p(t) = \ddot{\underline{q}}_p(t) = \frac{d^2\underline{X}_P(t)}{dt^2} = -\Omega^2\underline{A}e^{j\Omega t} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1.14)$$

Alor l'équation

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{f_0}{m}\cos\Omega t = A_0\cos\Omega t \iff \ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = A(t) = A_0\cos\Omega t$$

Telle que :

$$A_0 = \frac{f_0}{m} \ldots\ldots\ldots\ldots (1.15)$$

Déterminer les grandeurs A et Φ revient à chercher le module de l'amplitude complexe.

(1.6) devient l'équation :

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = A(t) = A_0 e^{j\Omega t}$$

Après remplacement : $\underline{X_P}(t),\ \underline{\dot{X}_p}(t)\ \ et\ \underline{\ddot{X}_p}(t)$, on trouve :

$$\left(-\Omega^2\underline{A} + 2\lambda j\Omega\,\underline{A} + \omega_0^2\,\underline{A}\right)e^{j\Omega t} = A_0 e^{j\Omega t}$$

On divise sur "$e^{j\Omega t}$" et on trouve:

$$(-\Omega^2 + 2\lambda j\Omega\ + \omega_0^2\ )\underline{A} = A_0$$

$$\underline{A} = \frac{A_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + j2\lambda\Omega} = Ae^{j\Phi}$$

- **Calcul de l'amplitude A**

L'amplitude du mouvement est donc :

$$A = \left|\underline{A}\right| = \frac{\|A_0\|}{\|(\omega_0^2 - \Omega^2) + j2\lambda\Omega\ \|}$$

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2}} = Cte \ldots\ldots\ldots\ldots (1.16)$$

La phase (déphasage) Φ du mouvement entre $q(t)$ et $F(t)$ est donner par:

On à $$\underline{A} = \frac{A_0}{(\omega_0^2-\Omega^2)+j2\lambda\Omega} = Ae^{j\Phi}$$

Le conjugué de cette équation est la suivante :

$$\underline{A}^* = \frac{A_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2) - j2\lambda\Omega} = Ae^{-j\Phi}$$

Nous multiplions la formule de $\underline{A}$ à l'nversé et on trouve :

$$\underline{A} = \frac{A_0}{[(\omega_0^2 - \Omega^2) + j2\lambda\Omega]} * \frac{[(\omega_0^2 - \Omega^2) - j2\lambda\Omega]}{[(\omega_0^2 - \Omega^2) - j2\lambda\Omega]} = Ae^{j\Phi}$$

$$\underline{A} = \frac{A_0(\omega_0^2 - \Omega^2) - A_0(j2\lambda\Omega)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2} = Ae^{j\Phi}$$

$$\underline{A} = \frac{A_0(\omega_0^2 - \Omega^2)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2} - j\frac{2A_0\lambda\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}$$

$$\tan\Phi = \frac{Im\,\underline{A}}{Re\,\underline{A}} = -\frac{2\lambda\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}$$

- **Calcul la phase Φ**

$$\Phi = \text{arc tan}\frac{2\lambda\Omega}{(\Omega^2 - \omega_0^2)} \text{ ..... (1.17)}$$

Donc la solution en régime **permanant** est :

$$X_P(t) = q_P(t) = A\cos(\Omega t + \Phi) \text{ ..... (1.18)}$$

$$X_P(t) = \frac{\boldsymbol{A_0}}{\sqrt{(\boldsymbol{\omega_0^2 - \Omega^2})^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}\cos\left(\boldsymbol{\Omega}\, t + \boldsymbol{arc\ tan}\frac{\boldsymbol{2\lambda\Omega}}{(\boldsymbol{\Omega^2 - \omega_0^2})}\right) \text{ ..... (1.19)}$$

En cas la solution homogène négligeable pas, la solution générale est donner par :

$$X_g = A'e^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \varphi) + \frac{\boldsymbol{A_0}}{\sqrt{(\boldsymbol{\omega_0^2 - \Omega^2})^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}\cos\left(\boldsymbol{\Omega}\, t + \boldsymbol{arc\ tan}\frac{\boldsymbol{2\lambda\Omega}}{(\boldsymbol{\Omega^2 - \omega_0^2})}\right) \text{ ... (1.20)}$$

Avec : $\begin{cases} \boldsymbol{\omega_a} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \\ \boldsymbol{T_a} = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \\ \boldsymbol{A_0} = \frac{f_0}{m} \end{cases}$ ..... (1.21)

Exerces et solutions :

Trouver la solution de chacune des équations différentielles suivantes. $5\ddot{x} + 3x = 0$, $3\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 0$, $2\ddot{x} + 6\dot{x} + 2x = 0$, $2\ddot{x} + \sqrt{48}\dot{x} + 6x = 0$

Solutions : on à

a. $5\ddot{x} + 3x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{3}{5}x = 0$. L'equation est de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{3}{5}$

La solution général de l'équation est de la forme : $x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\ t + \emptyset\right)$ ou

$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\ t + \emptyset\right)$

b. $3\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{5}{3}\dot{x} + \frac{4}{3}x = 0$. L'equation est de la forme

$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\lambda = \frac{5}{6}$ et $\omega_0^2 = \frac{4}{3}$.

Puisque $\lambda^2 - \omega_0^2 = -\frac{23}{36} < 0$, La solustion general de l'quation est de la forme :

$x(t) = Ae^{-\frac{5}{2}t}\cos\left(\sqrt{\frac{23}{36}}t + \emptyset\right)$.

c. $2\ddot{x} + 6\dot{x} + 2x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + 3\dot{x} + x = 0$. L'equation est de la forme

$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $= \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega_0^2 = 1$

Puisque $\lambda^2 - \omega_0^2 = \frac{5}{4} > 0$, La solustion general de l'quation est :

$$x(t) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}(A_1 e^{-\sqrt{\frac{5}{4}}t} + A_2 e^{+\sqrt{\frac{5}{4}}t})$$

d. $2\ddot{x} + \sqrt{48}\dot{x} + 6x = 0 \ \Leftrightarrow\ \ddot{x} + \sqrt{12}\dot{x} + 3x = 0$. L'equation est de la forme

$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\lambda = \sqrt{3}$ et $\omega_0^2 = 3$

Puisque $\lambda^2 - \omega_0^2 = 0$, La solustion general de l'quation est: $x(t) = e^{-\sqrt{3}t}(A_1 + A_2 t)$.

Où les quantités ϕ, A, A_1, A_2 sont déterminées des conditions initiales.

Chapitres II

Oscillations libres des Système à un degré de liberté

I. Oscillations non amorties

2. Oscillateur linéaire

2.1 Equation différentielle du mouvement

Le calcul de l'équation du mouvement pour un système **conservatif** peut être déterminé par trois méthodes :

- La loi dynamique de Newton(PFD):

$$\sum \vec{f} = m\vec{a} = m\ddot{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.1)$$

f Représente l'ensemble des forces appliquées à l'objet, $\vec{a}$ son accélération et m est la masse de solide.

- Principe de la conservation d'énergie mécanique (totale):

$$E_T = E_c + E_p \Rightarrow \frac{dE_T}{dt} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.2)$$

Où E_c Représentent l'énergie cinétique du système et E_p l'énergie de potentiel.

- Formalisme de Lagrange (méthode de Lagrange-Euler):
  On définit la fonction de Lagrange

$$L = T - U \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.3)$$

L'équation d'Euler-Lagrange pour un **système conservatif** est donnée comme suit:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = 0 \quad i = 1, \ldots n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4)$$

- L : Fonction de Lagrange ou Lagrangien.
- T : L'énergie cinétique du système.
- U : L'énergie potentielle du système.
- q_i : La coordonnée généralisée.
- $\dot{q}_i$: est la vitesse généralisée du système.

L'équation d'Euler-Lagrange pour un **système non conservatif** (système dissipatif) est donnée :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = \sum \vec{f}_{ext} \quad i = 1, \ldots n, \ en\ translation \quad \ldots\ldots\ldots (2.5)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = \sum \mathcal{M}_{/\Delta}\left(\vec{f}_{ext}\right) \quad i = 1, \dots n, \ en\ rotation \ \dots\dots (2.6)$$

Où $\vec{f}_{ext}$: sont les forces extérieures appliquées au système.

$\mathcal{M}_{/\Delta}\left(\vec{f}_{ext}\right)$: sont les moments extérieurs appliqués au système.

Dans ce cas les forces ne dérivent pas d'un potentiel

- Pour un mouvement unidimensionnel$x$, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0 \ \dots\dots\dots\dots\dots (2.7)$$

- Pour un mouvement rotationnel, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0 \ \dots\dots\dots\dots\dots (2.8)$$

2.1.1 Oscillateurs harmoniques

- **Exemple de ressort-masse (Pendule élastique vertical) voir le figure 1**

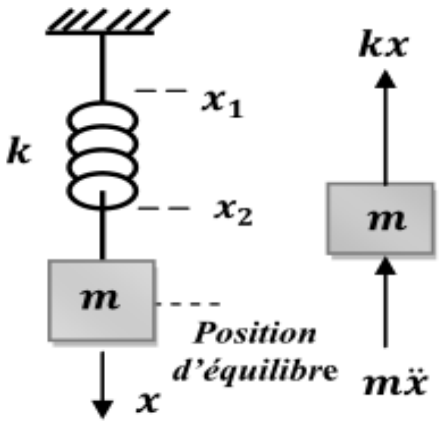


Figure 1 : Pendule élastique vertical

L'énergie cinétique s'écrit : $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ ……. (1)

L'énergie potentielle pour des petites oscillations, s'écrit : $U = \frac{1}{2}kx^2$ ……(2)

Le Lagrangien du système s'écrit sous la forme: $L = T - U$ …… (3)

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

L'équation de mouvement est de la forme:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \ldots\ldots (5) \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (5) - (6) = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0, \qquad \text{On divisant par } m \text{ on trouve}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

C'est une équation différentielle du second ordre son solution générale sous la forme

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{Ou} \quad x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \ldots\ldots\ldots (2.9)$$

Où A, φ sont coefficients à déterminer par les conditions initiales.

- La pulsation propre est: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\frac{rd}{s})$ …….. (2.10)
- La période propre est : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (s)$ …… (2.11)

2.1.2 Pendule simple

Un pendule simple est constitué comme le montre la figure 2.

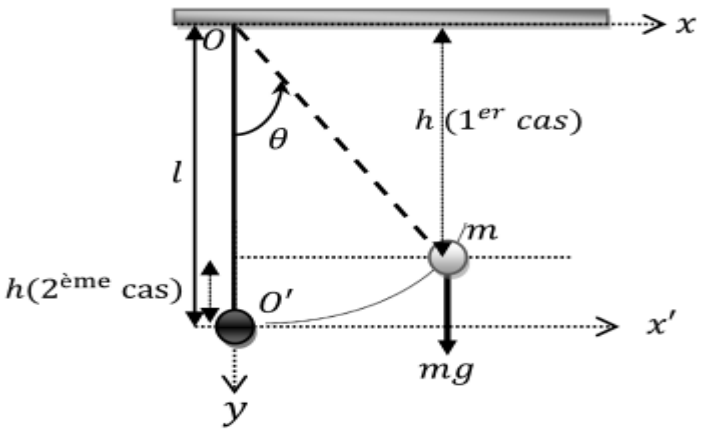


Figure 2 : Pendule simple

L'énergie cinétique du système : $T = \frac{1}{2}mV_m^2 \ldots\ldots\ldots (8)$

Les coordonnées de système sont :

$$m\begin{cases} x = l\sin\theta \Longrightarrow \dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta \\ y = l\cos\theta \Longrightarrow \dot{y} = l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \text{…….. (9)}$$

$$V_m^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(l\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(l\dot{\theta}\sin\theta\right)^2 = l^2\dot{\theta}^2 \text{ ……. (10)}$$

De (8) $\Leftrightarrow$ $T = \frac{1}{2}mV_m^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}j_{/\Delta}\dot{\theta}^2$ ……. (2.12)

Où $j_{/\Delta} = ml^2$: est le moment initial.

$$T = \frac{1}{2}j_{/\Delta}\dot{\theta}^2 \text{ ……. (2.13)}$$

- **2ème cas** : L'énergie potentielle du système est : $U = mgh$
  Il faut choisi repère pour calculer l'énergie de potentiel, par exemple on choisit comme origine des énergies potentielles $(U(h = 0) = 0)$ l'axe $(O'x')$, h devient
  $$h = l - l\cos\theta \text{ ……(11)}$$
  L'énergie potentielle devient :
  $$U = mgl(1 - \cos\theta) \text{ ……. (2.14)}$$
- Le Lagrangien du système s'écrit sous la forme:

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta) \text{ …….. (2.15)}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} \text{ … … … … … … … (12)} \\ \left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right) = -mgl\sin\theta \text{ … … … … … . . (13)} \end{cases}$$

$$(12) - (13) \rightarrow ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

On utilisé l'approximation suivante : $\sin\theta \approx \theta$

D'où

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

On divisant par ml^2 on trouve :

$$\ddot{\theta} + m\frac{g}{l}\theta = 0 \text{ …….. (2.16)}$$

Est une équation différentielle linéaire de second ordre à coefficient constant sans second membre de la forme

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Est sa solution de forme :

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \emptyset) \text{ …….(2.17)}$$

Avec

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$: Est la pulsation propre d'un pendule simple.

- **1ere cas :** En cas Si on prend la référence (le repère) comme origine des énergies potentielles ($U(h = 0) = 0$) l'axe ($O\ x$), h devient :

  $$h = l\cos\theta \text{ ……. (14)}$$

  L'énergie potentielle devient :

  $$U = -mgl\cos\theta \text{ ……. (2.18)}$$

  Lagrange devient :

  $$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta \text{ ……. (2.19)}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} \text{ … … … … … … … (15)} \\ \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -mgl\sin\theta \text{ … … … … … . (16)} \end{cases}$$

$$(15) - (16) \rightarrow\ ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

Cas des faible oscillations, les angles sont très petits on a : $\begin{cases} \sin\theta \approx \theta \\ \cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \end{cases}$ ……. (17)

Donc

$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$, on divisant par ml^2 on trouve :

$$\ddot{\theta} + m\frac{g}{l}\theta = 0 \text{ ……. (2.20)}$$

De même l'équation précédente, c'est une équation différentielle de la forme

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Est sa solution de forme :

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \emptyset) \text{ ……. (2.21)}$$

2.1.3 Solution de l'équation différentielle du mouvement

L'équation différentielle du mouvement est de la forme :

$$\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0 \text{ ……. (2.22)}$$

C'est une équation différentielle du second ordre sans second membre dont la solution sous la forme complexe est de la forme : $x(t) = Ae^{\lambda t}$ ou de la forme

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) \text{ Ou } x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ …….. (2.23)}$$

Où A, φ sont coefficients à déterminer par les conditions initiales.

2.1.4 Oscillations électriques

On considère un circuit électrique (L, C) parcouru par un courant $i(t)$ représenté par a figure 3 ci-contre :

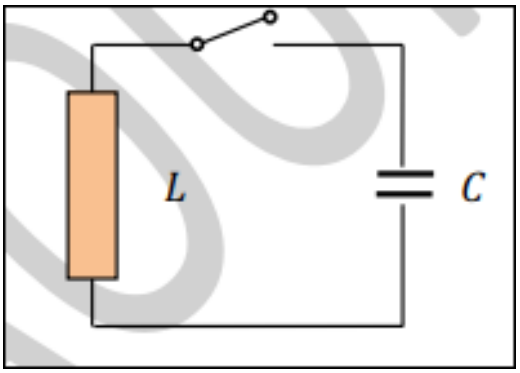


Figure 3 : Circuit (L, C).

2.14.1 Equation différentielle du (LC)

À l'aide de la loi des mailles du Kirchhoff, le bilan de tension s'écrit comme suit :

$$U_L + U_C = 0 \text{ …….. (2.24)}$$

$$L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{c}\int i(t)dt = 0 \text{ …….. (2.25)}$$

En divisant par L, nous trouvons l'équation du mouvement qui s'écrit :

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{Lc}\int i(t)dt = 0 \text{ … … … … … … . (2.26)}$$

Où : $i(t)$ le courant pendant un temps dt apporte une charge dq:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \Rightarrow q(t) = \int i(t)dt \quad et \quad \frac{di(t)}{dt} = \frac{d^2q(t)}{dt^2}$$

(2.26) Devient :

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{1}{Lc}\, q(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{q}(t) + {\omega_0}^2 q(t) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2.27)$$

On remarque que cette équation est équivalente à l'équation d'un mouvement oscillatoire harmonique.

$$\ddot{q}(t) + \frac{1}{Lc} q(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x \ = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.28)$$

La pulsation propre et la période propre comme suit: $\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{Lc}} \\ T_0 = 2\pi\sqrt{Lc} \end{cases}$ ……(2.29)

La solution générale de l'équation pour des oscillations faible s'écrit:

$$q(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.30)$$

2.1.5 Analogie entre le système mécanique et le système électrique (électromécanique)

Système mécanique	**Système électrique**
Déplacement : $x(t)$	$q(t)$: Charge électrique
Masse : m	L : Inductance de bobine
Constante de raideur : k	$1/c$: Inverse de la capacité

II. Oscillations libres des Système amorties à un degré de liberté (1.D.D.L)

Dans cette partie on doit tenir compte de l'influence de la force de frottement visqueuse proportionnelle à la vitesse des oscillations du système.

2.2 Force d'amortissement

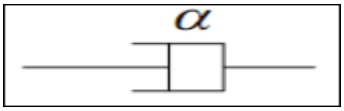
Un système soumis à un frottement est dit amorti. Le frottement le plus simple est le frottement **visqueux**. Le frottement visqueux est de la forme :

$$\vec{f} = -\alpha\vec{V} \; ou \; f_q = -\alpha\dot{q} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.31)$$

Avec α : est le coefficient de frottement et V : est la vitesse du mobile ou particule.

f_q :la force de frottement visqueux, q : la coordonnée généralisée du système et $\dot{q}$: la vitesse généralisée du système.

En mécanique, l'amortisseur est schématisé par:



2.2.1 Equation différentielle du mouvement (Equation de Lagrange)

S'il existe un frottement $f_q = -\alpha\dot{q}$, l'quation de Lagrange devient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = -\alpha\dot{q} \quad i = 1, \dots n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.32)$$

On défint la fonction dissipation D

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{q}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.33)$$

La force de frottement devient

$$f_q = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.34)$$

La fonction dissipation D en électricité :

$$D = \frac{1}{2}Ri^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.35)$$

L'quation de Lagrange dans une cordonnée généralisée q_i s'écrit sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.36)$$

Avec $$L(q, \dot{q}) = T - U \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.37)$$

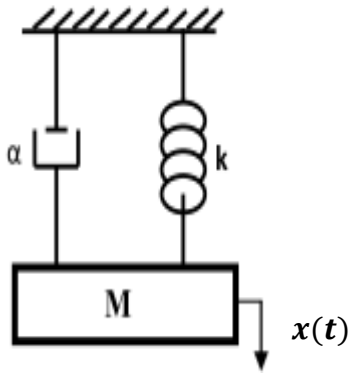
2.2.2 Exemle du système masse-ressort-amortisseur

L'étude de l'oscillateur amorti se fait de la même façon que précédemment mais en ajoutant la force de frottement visqueux.

- l'énergie cinétique de la masse m : $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \ldots\ldots\ldots$ (18)
- l'énergie emmagasinée dans le ressort : $U = \frac{1}{2}kx^2$ ... (19)

- La fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 \ldots\ldots\ldots$ (20)

Lagrangienne s'écrit :



$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \text{ …….. (21)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \text{ … … (22)} \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = -kx \text{ … … … . (23)} \\ \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha\dot{x} \text{ … … … … (24)} \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation de Lagrange on aura : $(22) + (24) - (23) = 0$

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \implies \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \text{ …… (2.38)}$$

C'est un équation différentielle du mouvement de système libre amorti est de la forme :

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \text{ …… (2.39)}$$

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{\alpha}{2m} : \textit{Facteur d'amortissement} \\ \omega_0^2 = \dfrac{k}{m} \quad : \textit{Est la pulsation propre.} \end{cases} \text{ …… (2.40)}$$

2.2.3 Résolution de l'équation du mouvement :

L'équation $\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + {\omega_0}^2 q = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre.

$x(t) = Ae^{rt}$: est une solution de cette équation différentielle. En injectant ceci dans L'équation $\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$ on obtient l'équation caractéristique :

$$r^2 Ae^{rt} + 2\lambda r Ae^{rt} + \omega_0^2 Ae^{rt} = 0 \implies \begin{cases} r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \\ Ae^{rt} \neq 0 \end{cases} \text{ ……. (2.41)}$$

Pour résoudre l'équation caractéristique il faut calculer son discriminant réduit

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$$

On distingue trois cas suivant le signe du discriminant réduit.

1er cas : $\lambda^2 - \omega_0^2 > 0 \implies \lambda > \omega_0$ Ou $Q < 0.5$ (amortissement important)

Deux solutions réelles pour l'équation caractéristique :

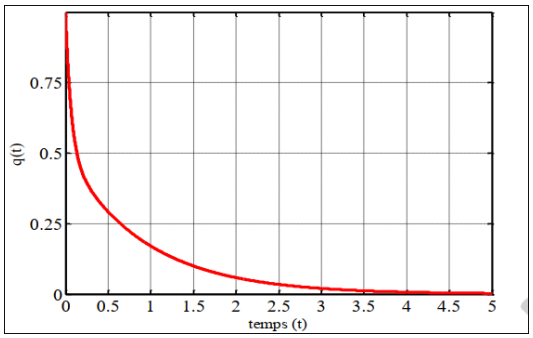
$$r_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad et \quad r_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

Le mouvement résultant est : $q(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$

D'où

$$q(t) = e^{-\lambda t}\left(A_1 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\ t} + A_2 e^{+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\ t}\right) \text{ ..... (2.42)}$$

Le mouvement est dit **apériodique**.



2eme cas : $\lambda^2 - \omega_0^2 = 0 \implies \lambda = \omega_0$ Ou $Q = 0$ (amortissement critique), une solution double pour l'équation caractéristique :

$$r_1 = r_0 = r = -\lambda$$

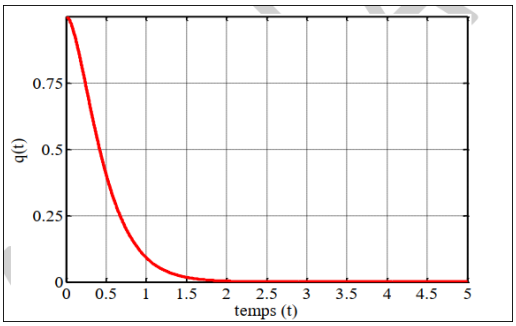
Le mouvement résultant est :

$$q(t) = (A_1 + A_2 t)e^{rt}$$

D'où

$$q(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\lambda t} \text{ ..... (2.43)}$$

Le mouvement est dit en **régime critique**.



3eme cas : Si $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0 \implies \lambda < \omega_0$ ou $Q < 0$ (amortissement faible)

Deux solutions complexe pour l'équation caractéristique :

$$r_1 = -\lambda - j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad et \quad r_2 = -\lambda + j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

Le mouvement résultant est : $q(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$

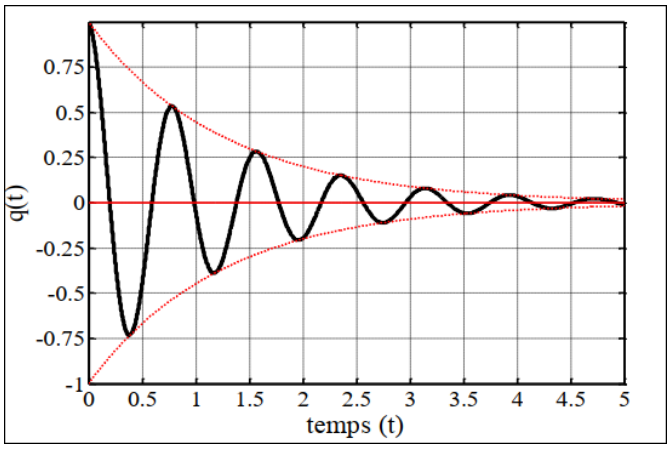
D'où

$$q(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \emptyset) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.44)$$

Le mouvement est dit **pseudo-périodique**.

Où

$$\begin{cases} \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} & est\ appelé\ pseudo - pulsation. \\ T_a = \dfrac{2\pi}{\omega_a} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} & est\ appelé\ pseudo - période. \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.45)$$



2.2.4 Décrément logarithmique :

C'est le logarithme du rapport de 2 amplitudes successives des oscillation amorties, pour évaluer la diminution exponentielle de l'amplitude du mouvement pseudo-périodique.

$$\delta = \ln \frac{q(t)}{q(t+T)} \text{ ..... (2.46)}$$

En utilisant

$$q(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \emptyset)$$

Car $\Delta' < 0$ et $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. On trouve :

$$\delta = \ln \frac{Ae^{-\lambda t}}{Ae^{-\lambda(t+T)}} = \lambda T_a \text{ ..... (2.47)}$$

- **Facteur de qualité** système masse-ressort-amortisseur (m, k, α) est donnée par :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} \text{ ..... (2.48)}$$

- **Facteur de qualité** système $(R.L.C)$ est donnée par :

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \text{ ..... (2.49)}$$

- **Dégré de dissipation** :

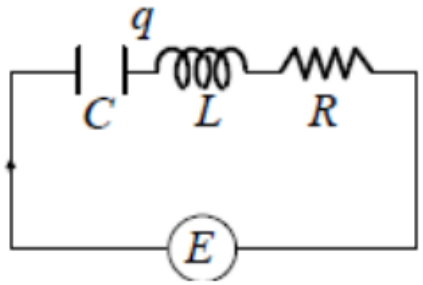
$$D = \frac{\omega_0}{2\lambda} \text{ ..... (2.50)}$$

- **Constante de temps** :

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \text{ ..... (2.51)}$$

2.2.5 Oscillateur électrique:

un circuit oscillant $(R.L.C)$ représentée ci-contre



À l'aide de la loi des mailles du Kirchhoff, le bilan de tension s'écrit comme suit :

$$U_L + U_C + U_R = 0 \text{ ..... (2.52)}$$

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{c}\int i(t)dt = 0 \text{ ..... (2.53)}$$

On divisant par L, on trouve :

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) + \frac{1}{Lc} \int i(t)dt = 0 \text{ ..... (2.54)}$$

Avec : le courant $i(t)$ pendant un temps dt apporte une charge dq:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \Rightarrow q(t) = \int i(t)dt \quad et \quad \frac{di(t)}{dt} = \frac{d^2q(t)}{dt^2}$$

(2.54) Devient :

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\dot{q}(t) + \frac{1}{Lc}\, q(t) = 0$$

$$\ddot{q}(t) + \frac{R}{L}\dot{q}(t) + \frac{1}{Lc} q(t) = 0$$

$$\ddot{q}(t) + 2\lambda\dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0$$

Cette équation est équivalente à l'équation d'un mouvement oscillatoire amorti représentée comme suit:

$$\ddot{q}(t) + \frac{R}{L}\dot{q}(t) + \frac{1}{Lc} q(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; \ddot{x(t)} + \frac{\alpha}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m} x\,(t) = 0 \text{..... (2.55)}$$

La pulsation propre et la période propre est donnée comme suit:
$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{Lc}} \\ T_0 = 2\pi\sqrt{Lc} \\ \lambda = \frac{R}{2L} \end{cases} \dots (2.56)$$

Pour des oscillations faibles, La solution générale de l'équation s'écrit:

$$q(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \emptyset) \text{ ..... (2.57)}$$

Remarque : Pour un amortissement critique, $\lambda = \omega_0 \implies \frac{R}{2L} = \sqrt{\frac{1}{Lc}}$

La résistance critique est donnée par :

$$R = R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \text{ ..... (2.58)}$$

2.2.6. Analogie entre le système mécanique et le système électrique

On obtient :

Système mécanique	Système électrique
Déplacement : $x(t)$	$q(t)$: Charge électrique
Masse : m	L : Inductance de bobine
Constante de raideur : k	$1/c$: Inverse de la capacité
Coefficient de frottement : α	R : Résistance

2.2.6.1 Énergie de condensateur :

L'énergie stockée dans le condensateur d'une capacité C à un instant t est donnée par :

$$E_C(t) = \frac{1}{2}Vq(t) = \frac{1}{2C}q^2(t) = \frac{1}{2C}q_0^2\cos^2(\omega_a t + \emptyset) \text{ ..... (2.59)}$$

2.2.6.2 Énergie de la bobine:

Pour une bobine d'inductance L

$$E_L(t) = \frac{1}{2}L\,I = \frac{1}{2}L\left(\frac{dq(t)}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2C}q_0^2\sin^2(\omega_a t + \emptyset) \text{ ..... (2.60)}$$

Où

2.2.6.3 Énergie totale

Qui est donnée par :

$$E_T(t) = E_c(t) + E_L(t) = \frac{1}{2C}q_0^2(\cos^2 + \sin^2) = \frac{1}{2C}q_0^2 \text{ ..... (2.61)}$$

Chapitre III

Oscillations forcées amorties des systèmes à un degré de liberté

3.1 Définitions:

On définit une oscillation forcée, tout système en mouvement sous l'action d'une force extérieure pour compenser les pertes d'énergie dû à l'amortissement, voir la figure. **Exemples :** Système vibratoire à un seul degré de liberté forcé et amorti

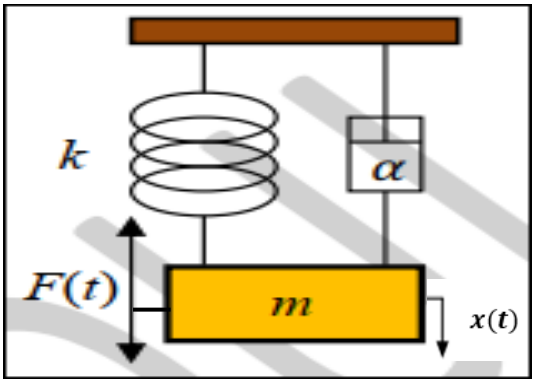


Figure 1: Système forcé et amorti

Pour étudier ce type d'oscillations, on considère un oscillateur harmonique amorti sur lequel agit une force extérieure, qu'on appelle **excitation** de la forme sinusoïdale:

$$F(t) = f_0 \cos \Omega t \quad ou \quad F(t) = f_0 \sin \Omega t \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1)$$

3.2 Equation différentielle des systèmes forcés

Rappelons la forme générale de l'équation de Lagrange pour les systèmes à un degré de liberté dans une cordonnée généralisée q s'écrit sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) = \sum \vec{f}_{qext} = F(t) \qquad \text{En translation } \ldots\ldots\ldots (3.2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) = \sum \mathcal{M}_{/\Delta}\left(\vec{f}_{qext}\right) \qquad \text{En rotation } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.3)$$

$\mathcal{M}_{/\Delta}\left(\vec{f}_{qext}\right)$: Est le moment de la force appliquée [N.m] est égal $\vec{f}_{qext}.L$

L: Le bras du levier : est la distance droite d'action de la force.

3.2.1 Exemple de système masse-ressort-amortisseur

Dans la figure 1, la masse m est fixée à un ressort de constante de raideur k et un amortisseur de coefficient α.

L'énergie cinétique de systèmme : $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$

L'énergie potentielle de systèmme : $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}ky^2$

La fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$

La fonction de Lagrange :

$$L = T - U \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Formalisme Lagrangien s'écrit : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = F(t)$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \ldots\ldots (1) \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \ldots\ldots\ldots (2) \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha\dot{x} \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ F(t) = f_0 \cos\Omega t \ldots (4) \end{cases}$$

$(1) + (3) - (2) = (4) \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = f_0 \cos\Omega t$

$$\Longrightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{f_0}{m}\cos\Omega t$$

Donc l'équation différentielle de mouvement s'écrit sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{f_0}{m}\cos\Omega t \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = A(t) \ldots\ldots\ldots (3.4)$$

C'est une équation différentielle du second ordre linéaire non homogène à coefficients constants avec second membre.

Avec :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\alpha}{2m} \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ A(t) = \frac{f_0}{m}\cos\Omega t \equiv A_0 \cos\Omega t \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.5)$$

3.3 Solution de l'équation différentielle du mouvement

La solution générale de cette équation Elle admet deux solutions :

- Une solution de l'équation sans second membre : solution homogène $X_H(t)$.
- Une solution de l'équation avec second membre : solution particulière $X_P(t)$.

La solution totale ou générale est :

$$X_g(t) = X(t) = X_H(t) + X_P(t) \text{ .....(3.6)}$$

3.3.1 Solution homogène (La solution transitoire):

Nous avons déjà étudié l'équation sans seconde membre (systèmme l'ooscilleur harmonique amortie)

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \iff \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ .....(3.7)}$$

$$\Downarrow$$

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \text{ ..... (3.8)}$$

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$$

On distingue trois cas suivant le signe du discriminant réduit.

$\Delta' > 0 \implies \lambda > \omega_0$ le système est fortement amorti

$\Delta' < 0 \implies \lambda < \omega_0$ l'amortissement est faible

$\Delta' = 0 \implies \lambda = \omega_0$ l'amortissement est critique

La solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$X_H(t) = A' e^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \varphi) \text{ ..... (3.9)}$$

Avec : $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ pseudo-pulsation, on dit que le systèmme à un mouvement oscillatoire amortie correspond à un **régime transitoire,** (en régime libre dans le cas des oscillations faiblement amorties).

Remarque :

1/ La solution générale de l'équation sans second membre correspond à un régime transitoire (qui ne dure qu'un certain temps).

2/ Si $\lambda < \omega_0$: la limite de $X_H(t)$ est toujours nulle quand t tend vers l'infini:

$$t \longrightarrow +\infty \implies e^{(-\lambda).(+\infty)} = 0$$

La solution homogène devient négligeable devant la solution perticulière (le regime permanent ou la solution permanente, ou régime stationnaire).

La solution générale devient :

$$X_g(t) = X(t) = X_P(t)$$

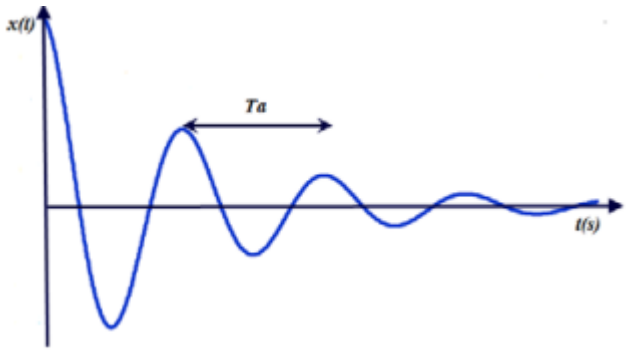


Figure 2 : Regime amortie (transitoire)

3.3.2 Solution particulière

$X_P(t)$: est la solution permanente (stationaire) de l'équation nonhomogène avec seconde terme $F(t)$. alors la solution particulière $X_P(t)$ sera une fonction sinusoïdale de même pulsation Ω , si $F(t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation Ω, la solution elle est de la forme :

$$X_P(t) = A\cos(\Omega t + \Phi) \quad ou \quad X_P(t) = A\sin(\Omega t + \Phi) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.10)$$

On trouve A et Φ à l'aide de la représentation complexe comme suit :

$$F(t) = f_0 \cos \Omega t \quad \longrightarrow \quad f_0 e^{j\Omega t}$$

$$q_P(t) = X_P(t) = A\cos(\Omega t + \Phi) \longrightarrow \underline{q}_P(t) = \underline{X}_P(t) = Ae^{j(\Omega t+\Phi)}$$

$$\underline{X}_P(t) = Ae^{j\Phi}e^{j\Omega t}$$

$$\underline{X}_P(t) = \underline{A}e^{j\Omega t}$$

Avec : $\underline{A} = Ae^{j\Phi}$

On calculs $\dot{\underline{X}}_p(t)\ et\ \ddot{\underline{X}}_p(t)$

$$\dot{\underline{X}}_p(t) = \dot{\underline{q}}_p(t) = \frac{d\underline{X}_P(t)}{dt} = j\Omega\underline{A}e^{j\Omega t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.11)$$

$$\ddot{\underline{X}}_p(t) = \ddot{\underline{q}}_p(t) = \frac{d^2\underline{X}_P(t)}{dt^2} = -\Omega^2\underline{A}e^{j\Omega t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.12)$$

Alor l'équation

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{f_0}{m}\cos\Omega t = A_0\cos\Omega t \iff \ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = A(t) = A_0\cos\Omega t$$

Tell que :

$$A_0 = \frac{f_0}{m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.13)$$

Déterminer les grandeurs A et Φ revient à chercher le module de l'amplitude complexe.

(3.4) devient l'équation :

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = A(t) = A_0 e^{j\Omega t}$$

Après remplaçement de $\underline{X}_P(t), \underline{\dot{X}}_p(t)\ et\ \underline{\ddot{X}}_p(t)$, on trouve :

$$\left(-\Omega^2\underline{A} + 2\lambda j\Omega\,\underline{A} + \omega_0^2\,\underline{A}\right)e^{j\Omega t} = A_0 e^{j\Omega t}$$

On divise sur "$e^{j\Omega t}$" et on trouve:

$$(-\Omega^2 + 2\lambda j\Omega\ + \omega_0^2\ )\underline{A} = A_0$$

$$\underline{A} = \frac{A_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + j2\lambda\Omega} = Ae^{j\Phi}$$

- **Calcul de l'amplitude A**

L'amplitude du mouvement est donc :

$$A = |\underline{A}| = \frac{\|A_0\|}{\|(\omega_0^2 - \Omega^2) + j2\lambda\Omega\,\|}$$

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2}} = Cte \ldots\ldots\ldots (3.14)$$

La phase (déphasage) Φ du mouvement entre $q(t)$ et $F(t)$ est donner par:

On à $$\underline{A} = \frac{A_0}{(\omega_0^2-\Omega^2)+j2\lambda\Omega} = Ae^{j\Phi}$$

Le conjugué de cette équation est la suivante :

$$\underline{A}^* = \frac{A_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2) - j2\lambda\Omega} = Ae^{-j\Phi}$$

Nous multiplions la formiule de $\underline{A}$ à l'nversé et on trouve :

$$\underline{A} = \frac{A_0}{[(\omega_0^2 - \Omega^2) + j2\lambda\Omega]} * \frac{[(\omega_0^2 - \Omega^2) - j2\lambda\Omega]}{[(\omega_0^2 - \Omega^2) - j2\lambda\Omega]} = Ae^{j\Phi}$$

$$\underline{A} = \frac{A_0(\omega_0^2 - \Omega^2) - A_0(j2\lambda\Omega)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2} = Ae^{j\Phi}$$

$$\underline{A} = \frac{A_0(\omega_0^2 - \Omega^2)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2} - j\frac{2A_0\lambda\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}$$

$$\tan\Phi = \frac{Im\,\underline{A}}{Re\,\underline{A}} = -\frac{2\lambda\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}$$

- **Calcul de la phase Φ**

$$\Phi = \text{arc tan}\frac{2\lambda\Omega}{(\Omega^2 - \omega_0^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3.15)}$$

Donc la solution en régime **permanant** est :

$$X_P(t) = q_P(t) = A\cos(\Omega\,t + \Phi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3.16)}$$

$$X_P(t) = \frac{\boldsymbol{A_0}}{\sqrt{(\boldsymbol{\omega_0^2 - \Omega^2})^2 + 4\boldsymbol{\lambda^2\Omega^2}}}\cos\left(\boldsymbol{\Omega}\,t + \boldsymbol{arc\ tan}\frac{\boldsymbol{2\lambda\Omega}}{(\boldsymbol{\Omega^2 - \omega_0^2})}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3.17)}$$

En cas la solution homogène négligeable pas, la solution générale est donner par :

$$X_g = A'e^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \varphi) + \frac{\boldsymbol{A_0}}{\sqrt{(\boldsymbol{\omega_0^2 - \Omega^2})^2 + 4\boldsymbol{\lambda^2\Omega^2}}}\cos\left(\boldsymbol{\Omega}\,t + \boldsymbol{arc\ tan}\frac{\boldsymbol{2\lambda\Omega}}{(\boldsymbol{\Omega^2 - \omega_0^2})}\right) \ldots$$

(3.18)

Avec :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega_a} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \\ \boldsymbol{T_a} = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \\ \boldsymbol{A_0} = \frac{f_0}{m} \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3.19)}$$

Remarques :

- Régime permanent (stationnaire) car il subsiste aussi longtemps que la force extérieure ($Fext$) est appliquée. Nous notons la dépendance de l'amplitude A de la pulsation $\boldsymbol{\omega}$.
- Il faut signaler qu'au début du mouvement $X(t)$ représente le **régime *transitoire***. Au fil du temps la solution $X_H(t)$ devient négligeable devant la solution $X_P(t)$ qui définit le régime ***permanent*** , d'après les figures suivantes:

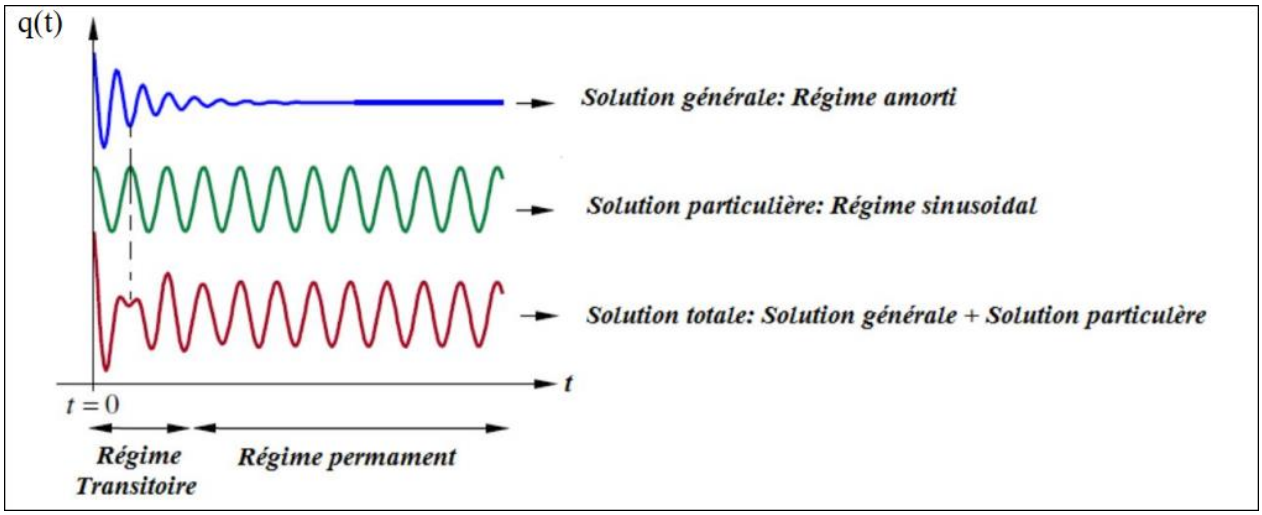


Figure 3: Superposition du régime transitoire et du régime permanent.

* Nous constatons que l'amplitude est la plus grande lorsque la fréquence de la force appliquée est presque la même que la fréquence naturelle d'oscillation du même système lorsque la force appliquée et l'amortissement sont tous deux absents. Nous appelons ce phénomène résonance et nous l'étudierons plus en détail dans la section suivante.

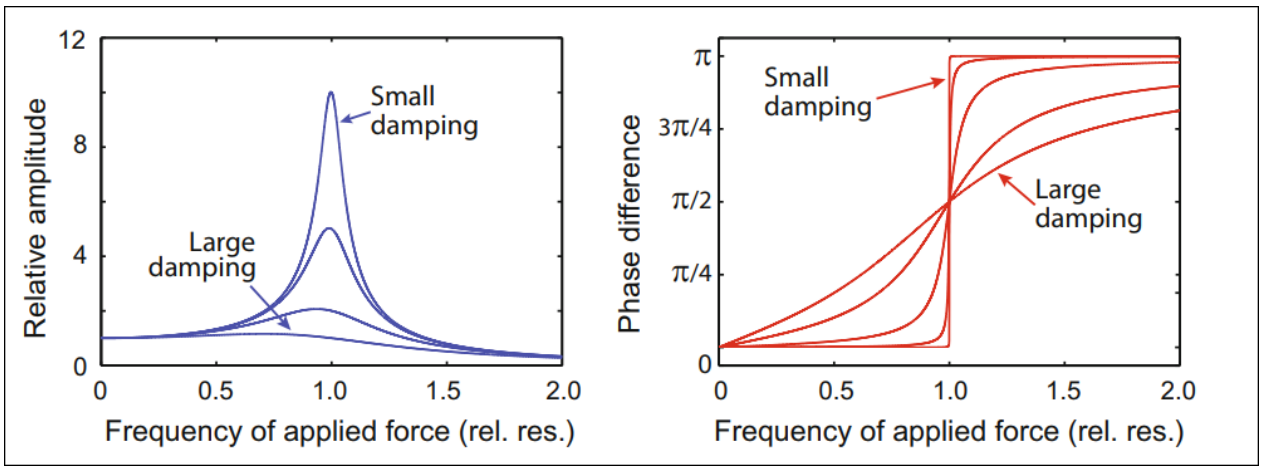


Figure 4 : L'amplitude d'une oscillation forcée (à gauche) et la différence de phase entre la sortie et la force appliquée (à droite) en fonction de la fréquence de la force appliquée.

3.4 Phénomène de résonance

3.4.1 Etude des variations de l'amplitude $\underline{A}$ et de la phase Φ en fonction de la pulsationde l'excitaion

3.4.1.1 Résonance d'amplitude:

$$\begin{cases} A(\Omega) = f(\Omega) \\ \tan\Phi = f_1(\Omega) \quad ou \quad \Phi = \mathrm{Arc}\, f_1(\Omega) \end{cases}$$

1- Il y a résonance mécanique lorsque la période de l'excitateur est voisine de la période propre du résonateur.

2- Le phénomène de résonance est observé dans le cadre des oscillations forcées. La pulsation d'excitation Ω est appelée pulsation de **résonance** Ω_R lorsque l'amplitude des oscillations A est maximale.

A est maximale lorsque :

$$\frac{dA(\Omega)}{d\Omega} = 0 \text{ ……. (3.20)}$$

On a

$$A(\Omega) = |\underline{A}| = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2}}$$

$$\frac{dA(\Omega)}{d\Omega} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A_0[-4\Omega(\omega_0^2-\Omega^2)+8\lambda^2\Omega\,]}{2[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2]^{3/2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_0 \neq 0 \\ -4[(\omega_0^2-\Omega^2)+2\lambda^2]\Omega = 0 \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} \Omega_1 = 0 \\ \Omega_2 = \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \\ Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \Omega_R = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} \text{ …….. (3.21)}$$

Donc on a dans ce cas le phénomène de résonnance

Dans ce cas, l'amplitude maximale est donnée par :

$$A_{max} = \frac{A_0}{\sqrt{4\lambda^2\omega_0^2 - 4\lambda^4}}$$

$$A_{max} = \frac{f_0}{m\,\omega_0^2}\frac{Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \text{ …….. (3.22)}$$

Pour déterminer le maximum et le minimum de A

*- pour $\Omega_1 = 0 \Longrightarrow A(\Omega_1)$: l'amplitude est minimum(etude le signe de la deuxième dirivée)

*- pour $\Omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \Longrightarrow A(\Omega_2)$: l'amplitude est maximum $\longrightarrow$ on obtient la réponse maximale du système.

Donc on a dans ce cas le phénomène de **résonance**.

$$\Omega_2 = \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \text{…….. (3.23)}$$

Pour qu'il y ait résonance il faut que :

$$\omega_0^2 - 2\lambda^2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

A la fréquence de résonnance, l'amplitude est donne par :

$$A_{max}(\Omega_R) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega_R^2)^2 + 4\lambda^2\Omega_R^2}} \text{ ……. (3.24)}$$

Apré remplaçent $\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ on trouve :

$$A_{max}(\Omega_R) = \frac{A_0}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} = \frac{f_0}{m\,\omega_0^2}\frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \text{ …… (3.25)}$$

Pour des très faibles amortissements $\lambda \ll \Omega_R \approx \omega_0$,

λ : néglégable devent ω_0 Devient l'amplitude maximale est égale à :

$$A_{max}(\Omega_R) = \frac{A_0}{2\lambda\omega_0} \quad pour\ \lambda \ll \omega_0 \text{ …….. (3.26)}$$

La variation de l'amplitude en fonction de la pulsation de la force d'excitation pour différentes valeurs de Q est représentée dans la Figure 5.

Plus le facteur de qualité est grand (faible amortissement), plus la courbe est aigue et plus le maximum est grand.

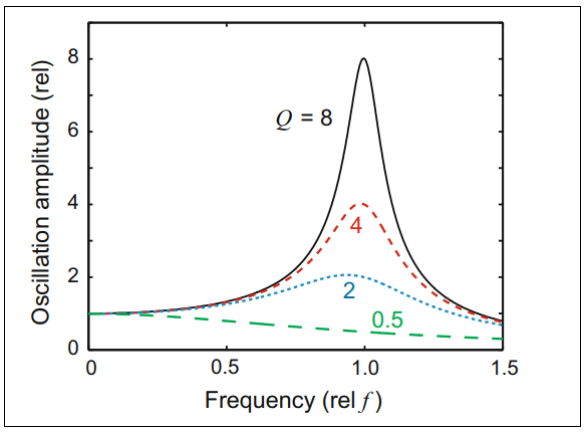


Figure 5 : La variation de l'amplitude en fonction de la pulsation ou fréquence

Lorsque la fréquence de la force appliquée change par rapport à la fréquence propre du système, l'amplitude est la plus grande lorsque les deux fréquences sont presque égales. Plus le facteur de qualité Q est élevé (c'est-à-dire que la perte est faible), plus l'amplitude de la résonance est élevée.

3.4.1.2 Résonance de phase :

La phase (déphasage) Φ du mouvement devient : On a

Lorsque $\Omega_R \approx \omega_0$: Cette pulsation est appelée pulsation de résonance de phase.

$$\tan \Phi = \frac{Im\ \underline{A}}{Re\ \underline{A}} = -\frac{2\lambda\Omega_R}{\left(\omega_0^2 - \Omega_R^2\right)} = -\infty \Longrightarrow \Phi = -\frac{\pi}{2}$$

L'oscillateur est en résonance de phase

- L'oscillateur est toujours en retard de phase par rapport à la force et ce retard augmente lorsque la pulsation augmente. $(-\pi < \Phi < 0)$.

Si $\lambda = 0 \Longrightarrow \tan \Phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi = 0 \quad$ ou $\quad \Phi = -\pi$

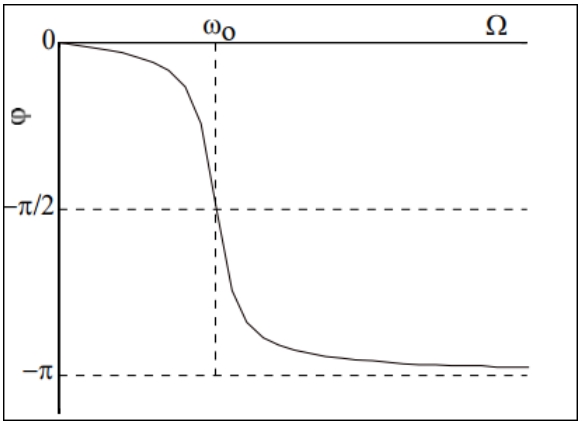


Figure 6 : Déphasage Φ en fonction de Ω

3.4.2 Bande passante et facteur de qualité

On donnent le graphe de $A(\Omega)$ en fonction de la pulsation d'excitation Ω ou f, Ici $(\omega \equiv \Omega)$ est :

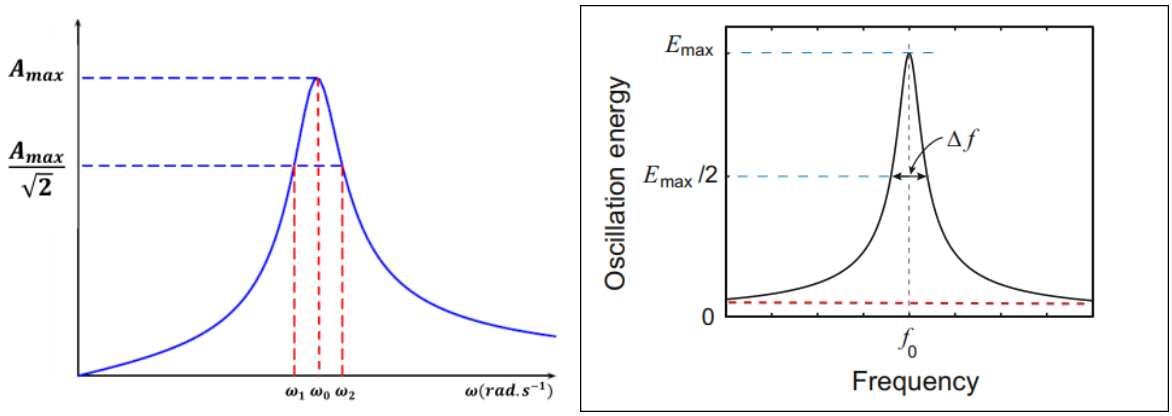


Figure 7 : Courbes résonances en $\omega\ et\ f$.

Pour caractériser l'acuité (intensité) de la réponse d'un oscillateur en fonction de la pulsation, on définit une bande passante **(largeur de la bande passante)** $\Delta\Omega\ \ ou\ \ \Delta\omega$ comme suit :

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 \ \ ou \ \ \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3.27)$$

Où Ω_1 , Ω_2 sont des pulsations déduites par l'intersection de la courbe de l'amplitude de la réponse du système $A(\Omega)$ et la droite : $\frac{A_{max}(\Omega_R)}{\sqrt{2}}$

$\Omega_R = \omega_0$: La pulsation de **résonance.**

- **Le facteur de qualité Q** pour un faible amortissement est :

$$Q = \frac{\Omega_R}{\Omega_2 - \Omega_1} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0}{2\lambda} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3.28)$$

3.5 Oscillations électriques

On considère le circuit oscillant (R,L,C) alimenté par une source de tension sinusoïdale extérieure $E(t)$ tel que :

$$E(t) = U_0 e^{j\omega t} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3.29)$$

Un circuit oscillant $(R.L.C)$ représentée ci-déssous

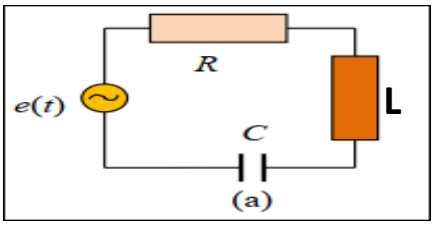


Figure 8 : Circuit oscillant $R.L.C$

La figure 8: Circuit oscillant $R.L.C$ alimenté par Une source de tension extérieure. À l'aide de la loi des mailles du Kirchhoff, le bilan de tension s'écrit comme suit :

$$U_L + U_C + U_R = E(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.30)$$

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{c}\int i(t)dt = E(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.31)$$

On divisant par L on trouve

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{Lc}\int i(t)dt = \frac{E(t)}{L} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.32)$$

Tel que : le courant $i(t)$ pendant un temps dt apporte une charge dq:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \Rightarrow q(t) = \int i(t)dt \quad et \quad \frac{di(t)}{dt} = \frac{d^2q(t)}{dt^2}$$

On remarque que cette équation(3.32) est équivalente à l'équation d'un mouvement oscillatoire forcé comme suit :

$$\ddot{q}(t) + \frac{R}{L}\dot{q}(t) + \frac{1}{Lc}q(t) = \frac{E(t)}{L} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x}(t) + \frac{\alpha}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x\,(t) = \frac{F(t)}{m} \ldots\ldots (3.33)$$

Remarque :

La figure 9 : montre l'évolution temporelle de la tension et du courant dans un diagramme temporel. Le courant dans le circuit est légèrement supérieur à la tension appliquée. Pour un circuit RCL en série avec une tension appliquée, cela signifie que la fréquence appliquée est inférieure à la fréquence de résonance du circuit. Notez que les phaseurs ne peuvent être utilisés qu'une fois que le schéma oscillatoire initial, plutôt compliqué, est terminé et que nous avons une sortie sinusoïdale stable correspondant à la solution particulière de l'équation différentielle.

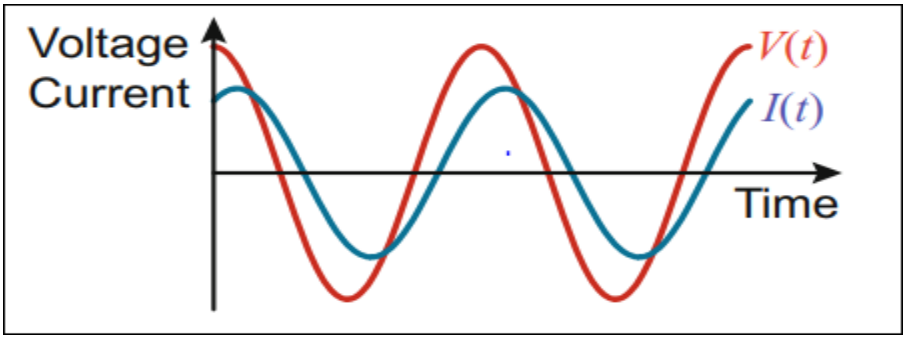


Figure 9 : Un diagramme temporel dans lequel le courant est légèrement supérieur à la tension appliquée.

3.5.1 Analogie entre le système mécanique et le système électrique

Système mécanique	Système électrique
Déplacement : $x(t)$	$q(t)$: Charge électrique
Masse : m	L : Inductance de bobine
Constante de raideur : k	$1/c$: Inverse de la capacité
Coefficient de frottement : α	R : Résistance
La tension extérieure : E(t)	F(t) la force excitation extérieure

- **L'impédance** équivalente totale est égale :

$$Z_{éq} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \text{ …… (3.34)}$$

- **Le module du courant** s'écrit:

$$I_0 = \frac{|E(t)|}{|Z_{éq}|} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \text{ …… (3.35)}$$

- Le **courant** est maximum pour

$$I_0 = \frac{U_0}{R} \text{ …… (3.36)}$$

- Dans le cas de résonance :

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \text{ ……(3.37)}$$

On obtient alors la valeur de la pulsation correspondante:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \text{ …….. (3.38)}$$

- **la pulsation de résonance** qui ne dépend que de l'inductance et de la capacité, qui correspondante la valeur :

$$\omega_R = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ …… (3.39)}$$

- **La bande passante** est définit:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \text{ …… (3.40)}$$

- **Le facteur de qualité** s'écrit:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{L\omega_0}{R} \text{ …… (3.41)}$$

Chapitre IV

Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté

Un système à plusieurs degrés de libertés est Un systèmes qui nécessite plusieurs coordonnées indépendantes pour décrire son mouvement. Le nombre de degré de liberté détermine le nombre des équations de Lagrange et le nombre des modes propres.

4.1 Systèmes à 2 degrés de liberté

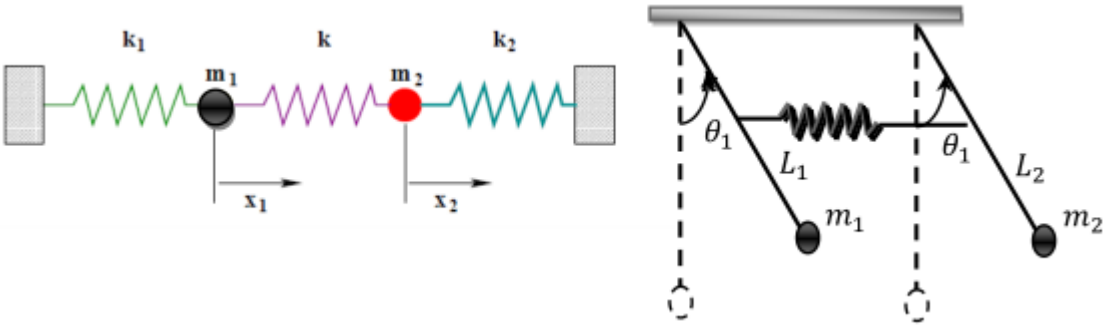
Pour l'étude des systèmes à deux degrés de liberté, il est nécessaire d'écrire deux équations différentielles du mouvement que l'on peut obtenir à partir des équations de Lagrange (en absence de tout frottement) :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial q_1}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4.1) \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial q_2}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4.2) \end{cases}$$

Un système à 2 degrés de liberté possède 02 coordonnées généralisées, 02 équations différentielles et 02 pulsations propres(ω_1, ω_2).

4.2 type de couplage

4.2.1 Couplage élastique



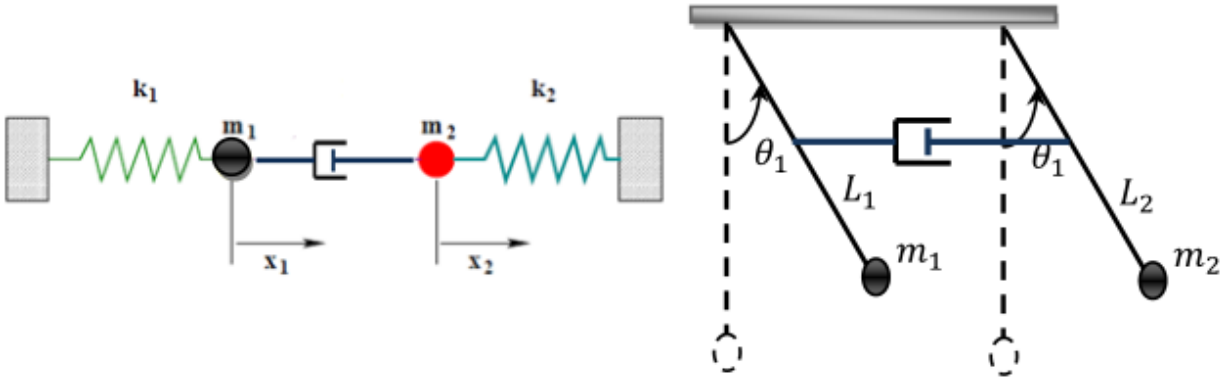
Les équations du mouvement s'écrit (état couplage élastique):

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + a_1 q_1 - a_2 q_2 = 0 \\ \ddot{q}_2 + a_1 q_2 - a_2 q_1 = 0 \end{cases} \ldots\ldots\ldots (4.3)$$

Tel que : $q_1 \equiv x_1\,, q_2 \equiv x_2 \quad Ou \quad q_1 \equiv \theta_1\,, q_2 \equiv \theta_2.$

a_2q_2, a_2q_1, sont les termes de couplage. a_1, a_2 **:** Sont des constantes.

4.2.2 Couplage Visqueux :

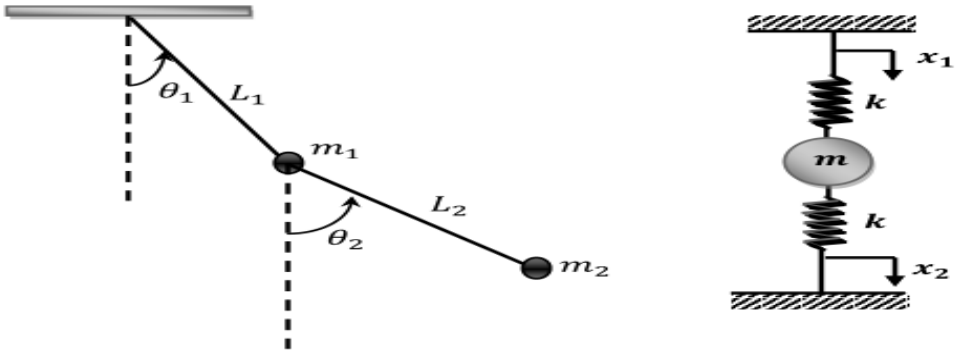


Les équations différentielles correspondantes sont :

$$\begin{cases} \ddot{q_1} + 2\lambda_1\dot{q_1} + \omega_0^2 q_1 = b_1\dot{q_2} \\ \ddot{q_2} + 2\lambda_2\dot{q_2} + \omega_0^2 q_2 = b_2\dot{q_1} \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots (4.4)$$

Tels que : $b_1\dot{q_2}$ et $b_2\dot{q_1}$ sont les termes de couplage. b_1 et b_2 sont des Constantes.

4.2.3 Couplage Inertiel :



Les équations différentielles correspondantes sont :

4.3 Exemples de systèmes à 2 degrés de liberté

4.3.1 Système masses-ressorts en translation

Nous négligeons tout frottement voire la figure 1sur ci-dessous

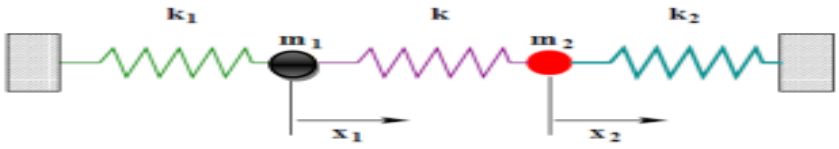


Figure 1 : Systèmes à 2 degrés de liberté

4.3.2 Equations différentielles du mouvement

Considérons deux ressorts de constantes de raideurs k_1, k_2 qui sont couplés par un ressort horizontal de constante de raideur k, représentés dans la figure dessus.

On peuvent être obtenues à partir des équations de Lagrange pour chaque coordonnée $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

L'énergie cinétique est $T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$

L'énergie potentielle est $U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$

$$U = \frac{1}{2}(k_1 + k)x_1^2 + \frac{1}{2}(k_2 + k)x_2^2 - kx_1x_2$$

Le lagrangien $L = T - U$ s'écrit alors :

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}(k_1 + k)x_1^2 - \frac{1}{2}(k_2 + k)x_2^2 + kx_1x_2$$

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = 0 \end{cases}$$

D'où le système d'équations différentielles du mouvement sont :

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k)x_1 - kx_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k)x_2 - kx_1 = 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (4.5)$$

D'où

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \left(\frac{k_1 + k}{m_1}\right) x_1 - \left(\frac{k}{m_1}\right) x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \left(\frac{k_2 + k}{m_2}\right) x_2 - \left(\frac{k}{m_2}\right) x_1 = 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (4.6)$$

Les termes $-\boldsymbol{kx_2}$ et $-\boldsymbol{kx_1}$ qui apparaissent dans la première et la seconde équation sont appelés termes de couplage, et les deux équations différentielles sont dites couplées.

4.3.3 Résolution des équations différentielles

Les deux solutions de ces deux équations différentielles sont des fonctions périodiques et sont composées de deux fonctions harmoniques de pulsations différentes et d'amplitudes différentes. Supposons que l'une de ces composantes harmoniques s'écrive :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \\ x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi_2) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (4.7)$$

Où A_1, A_2 et ϕ_1, ϕ_2 sont des constantes, dépendent des conditions initiales et ω l'une des pulsations propres du système.

Pour trouver la solution, on utilise la représentation complexe comme précédemment et s'écrivent :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \longrightarrow \underline{x}_1(t) = \underline{A}_1 e^{j\omega t} \\ x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi_2) \longrightarrow \underline{x}_2(t) = \underline{A}_2 e^{j\omega t} \end{cases} \dots\dots\dots (4.8)$$

Avec : $\begin{cases} \dot{\underline{x}}_1(t) = \underline{A}_1\, j\omega\, e^{j\omega t} \\ \dot{\underline{x}}_2(t) = \underline{A}_2\, j\omega\, e^{j\omega t} \end{cases}$ et $\begin{cases} \ddot{\underline{x}}_1(t) = -\underline{A}_1\, \omega^2\, e^{j\omega t} \\ \ddot{\underline{x}}_2(t) = -\underline{A}_2\, \omega^2\, e^{j\omega t} \end{cases}$ et $\begin{cases} \underline{A}_1 = A_1 e^{j\phi_1} \\ \underline{A}_2 = A_2 e^{j\phi_2} \end{cases}$

En injectant dans l'équation précédente $(4-5)$:

4.3.4 Les Modes propres d'oscillations :

Le mode c'est l'état dans lequel les éléments dynamiques du système effectuent une oscillation harmonique avec la même pulsation qui correspond à une de ses deux pulsations.

- **Calcul les pulsations propres** $\omega_i \quad i = 1, 2 \dots\dots$

En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système linéaire symétrique suivant, qui s'écrie :

$$\begin{cases} (-m_1\omega^2 + k_1 + k)A_1 - kA_2 = 0 \\ -kA_1 + (-m_2\omega^2 + k_2 + k)A_2 = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (4.9)$$

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + \dfrac{k_1 + k}{m_1}\right)A_1 - \left(\dfrac{k}{m_1}\right)A_2 = 0 \\ -\left(\dfrac{k}{m_2}\right)A_1 + \left(-\omega^2 + \dfrac{k_2 + k}{m_2}\right)A_2 = 0 \end{cases}$$

L'équation (4.9) équivalente matrice comme suit

$$\begin{bmatrix} \left(-\omega^2 + \dfrac{k_1 + k}{m_1}\right) & \left(-\dfrac{k}{m_1}\right) \\ \left(-\dfrac{k}{m_2}\right) & \left(-\omega^2 + \dfrac{k_2 + k}{m_2}\right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \dots\dots\dots (4.10)$$

Le système admet une solution non identiquement nulle (solution non trivial), seulement si le déterminant des coefficients de $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$ est égal à zéro.

$$\Delta(\omega) = 0$$

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} (k_1 + k - m_1\omega^2) & -k \\ -k & (k_2 + k - m_2\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

Ou d'autre formule (phrase)

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} \left(-\omega^2 + \dfrac{k_1 + k}{m_1}\right) & -\left(\dfrac{k}{m_1}\right) \\ -\left(\dfrac{k}{m_2}\right) & \left(-\omega^2 + \dfrac{k_2 + k}{m_2}\right) \end{vmatrix} = 0$$

Ceci nous donne l'équation **caractéristique** ou équation **aux pulsations propres** (on obtient l'équation **paramétrique** suivante) :

$$\left(-\omega^2 + \frac{k_1 + k}{m_1}\right)\left(-\omega^2 + \frac{k_2 + k}{m_2}\right) - \left(\frac{k}{m_2}\right)\left(\frac{k}{m_1}\right) = 0$$

$$(-m_1\omega^2 + k_1 + k)(-m_2\omega^2 + k_2 + k) - \left(\frac{k}{m_2}\right)\left(\frac{k}{m_1}\right) = 0$$

Ou encoure :

$$\omega^4 - \left(\frac{k_1 + k}{m_1} + \frac{k_2 + k}{m_2}\right)\omega^2 + \frac{k_1k_2 + k_1k + k_2k}{m_1m_2} = 0 \ldots\ldots\ldots (4.11)$$

Cette équation est une équation quadratique en ω qui admettent deux solutions réelles positives ω_1 et ω_2 appelées les pulsations propres du système. Chacune des coordonnées, x_1 et x_2, possède deux composantes harmoniques de pulsations $\omega_1$et ω_2

Après calcul, on obtient les deux pulsations propres :

$$\begin{cases} \omega_{1P}^2 = \frac{1}{2} \times \left[\left(\frac{k_1 + k}{m_1} + \frac{k_2 + k}{m_2}\right) + \sqrt{\left(\frac{k_1 + k}{m_1} + \frac{k_2 + k}{m_2}\right)^2 - 4\left(\left(\frac{k_1 + k}{m_1}\right)\left(\frac{k_2 + k}{m_2}\right) - \left(\frac{k}{m_1}\right)\left(\frac{k}{m_2}\right)\right)}\right] \\ \omega_{2P}^2 = \frac{1}{2} \times \left[\left(\frac{k_1 + k}{m_1} + \frac{k_2 + k}{m_2}\right) - \sqrt{\left(\frac{k_1 + k}{m_1} + \frac{k_2 + k}{m_2}\right)^2 - 4\left(\left(\frac{k_1 + k}{m_1}\right)\left(\frac{k_2 + k}{m_2}\right) - \left(\frac{k}{m_1}\right)\left(\frac{k}{m_2}\right)\right)}\right] \end{cases} (4.12)$$

La solution générale du système est une combinaison de deux modes s'écrit sous la forme d'une superposition des deux modes propres comme suit :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = A_{21}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \ldots\ldots\ldots (4.13)$$

Les constantes $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, \varphi_1, \varphi_2$ et sont déterminées à partir des conditions initiales.

Nous avons **quatre** conditions pour **six** inconnues. Les amplitudes dans chaque mode sont liées par des relations que nous appelons rapports d'amplitudes.

Remarque :

1. Le terme de plus basse fréquence correspondant à la pulsation ω_1 est appelé le fondamental. L'autre terme, de pulsation ω_2, est appelé harmonique.
2. le premier indice se réfère à la coordonnée et le second à la pulsation. Par exemple A_{12} est l'amplitude de $x_1(t)$ à la pulsation ω_2.

<u>Mode 1</u> $(\omega = \omega_1 = \omega_{1P})$
Lorsque $A_{12} = A_{22} = 0$, $x_1(t)$ et $x_2(t)$ correspondant à la première solution particulière sont des fonctions sinusoïdales, **en phase**, de pulsation $\boldsymbol{\omega_1}$, on dit que le système oscille dans le premier mode. Dans ce cas la solution s'écrit :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2(t) = A_{21}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \end{cases} \ldots\ldots\ldots (4.14)$$

$x_1(t)$ et $x_2(t)$ Elles satisfont aux équations du mouvement ou doivent vérifier le système d'équations différentielles, ce qui donne :

$$\begin{cases} (-m_1\omega_1^2 + k_1 + k)A_{11} - kA_{21} = 0 \\ -kA_{11} + (-m_2\omega_1^2 + k_2 + k)A_{21} = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (4.15)$$

Ces deux équations permettent d'obtenir le rapport des amplitudes dans le premier mode ou **fondamental** et nous remplaçons ω_1^2 par son expression, pour trouver le premier rapport :

$$\mu_1 = \frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{-m_1\omega_1^2 + k_1 + k}{k} = \frac{k}{-m_2\omega_1^2 + k_2 + k} > 0$$

<u>Mode 2</u> $(\omega = \omega_2 = \omega_{2P})$

Lorsque $A_{11} = A_{21} = 0$, $x_1(t)$ et $x_2(t)$ correspondant à la seconde solution particulière et sont des fonctions sinusoïdales, **en opposition de phase**, de pulsation $\boldsymbol{\omega_2}$, on dit que le système oscille dans le deuxièmes mode. Dans ce cas la solution s'écrit :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = A_{22}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \dots\dots (4.16)$$

$x_1(t)$ et $x_2(t)$ Elles satisfont aux équations du mouvement ou doivent vérifier le système d'équations différentielles, ce qui donne :

$$\begin{cases} (-m_1\omega_2^2 + k_1 + k)A_{12} - kA_{22} = 0 \\ -kA_{12} + (-m_2\omega_2^2 + k_2 + k)A_{22} = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (4.17)$$

Ces deux équations permettent d'obtenir le rapport des amplitudes dans le premier mode ou **fondamental** et nous remplaçons ω_2^2 par son expression, pour trouver le premier rapport :

$$\mu_2 = \frac{A_{22}}{A_{12}} = \frac{-m_1\omega_2^2 + k_1 + k}{k} = \frac{k}{-m_2\omega_2^2 + k_2 + k} < 0$$

Ces rapports permet d'écrire la solution générale, la solution générale $x_1(t)$, $x_2(t)$ est une combinaison linéaire de ces deux solutions particulières. $x_1(t)$ et $x_2(t)$ s'écrivent comme suit :

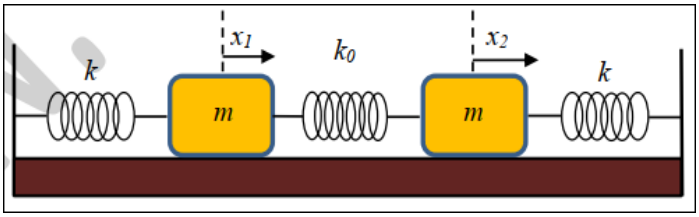
$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = \mu_1 A_{11}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \mu_2 A_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \dots\dots (4.18)$$

Les constantes $A_{11}, A_{12}, \varphi_1, \varphi_2$ sont des constantes d'intégration dont les valeurs sont fixées par les conditions initiales.

4.3.5 Cas particulier de deux oscillateurs identiques

❖ Calcul les pulsations propres et des constantes d'intégration

On suppose que : $m_1 = m_2 = m$ et $k_1 = k_2 = k_0$ voire le figure ci-dessous



On a

$$\begin{bmatrix} \left(-\omega^2 + \frac{k_0 + k}{m}\right) & \left(-\frac{k}{m}\right) \\ \left(-\frac{k}{m}\right) & \left(-\omega^2 + \frac{k_0 + k}{m}\right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(-\omega^2 + \frac{k_0 + k}{m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0$$

Dans ce cas les pulsations propres sont respectivement égales à

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{k_0}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{k_0+2k}{m}} = \omega_1\sqrt{1 + \frac{2k}{k_0}} \end{cases} \text{ ..... (4.19)}$$

Nous remplaçons ω_1 et ω_2 par son expressions, pour trouver les rapports d'amplitude :

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{A_{21}}{A_{11}} = 1 \\ \mu_2 = \frac{A_{22}}{A_{12}} = -1 \end{cases} \text{ ..... (4.20)}$$

A partir des conditions initiales nous pouvons déterminer les constantes $A_{11}, A_{12}, \varphi_1, \varphi_2$ l'éq (4.18).

Soit x_{10}, x_{20}, $\dot{x}_{10}$ et $\dot{x}_{20}$ les valeurs initiales respectives de x_1, x_2, $\dot{x}_1$ et $\dot{x}_2$

$$t = 0s \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_{10} \\ x_2 = x_{20} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_1 = \dot{x}_{10} \end{cases} \text{ ..... (4.21)}$$

On obtient le système d'équations suivant après le dérivé et remplaçant :

$$\begin{cases} A_{11}\cos(\varphi_1) + A_{12}\cos(\varphi_2) = x_{10} \\ A_{11}\cos(\varphi_1) - A_{12}\cos(\varphi_2) = x_{20} \end{cases} \text{ ..... (4.22)}$$

Et

$$\begin{cases} -\omega_1 A_{11}\sin(\varphi_1) - \omega_2 A_{12}\sin(\varphi_2) = \dot{x}_{10} \\ -\omega_1 A_{11}\sin(\varphi_1) + \omega_2 A_{12}\sin(\varphi_2) = \dot{x}_{20} \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots (4.23)$$

Les solutions de ce système d'équations sont

$$\begin{cases} A_{11} = \frac{x_{10}+x_{20}}{2\cos(\varphi_1)} \\ A_{12} = \frac{x_{10}-x_{20}}{2\cos(\varphi_2)} \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots (4.24)$$

Et

$$\begin{cases} A_{11} = \frac{\dot{x}_{10}+\dot{x}_{20}}{2\sin(\varphi_1)} \\ A_{12} = \frac{\dot{x}_{20}-\dot{x}_{10}}{2\sin(\varphi_2)} \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots (4.25)$$

Considérons le cas particulier suivant :

Cas 1 ($x_{10} = x_{20} = x_0$ et $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$)

On obtient dans ce cas

$$\begin{cases} A_{11} = x_0 \\ A_{12} = 0 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = 0 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots (4.26)$$

Ces conditions donnent :

$$x_1(t) = x_2(t) = x_0\cos(\omega_1 t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.27)$$

Les deux masses oscillent **en phase** à la même pulsation ω_1. On dit que le système oscille dans le premier mode (figure 1).

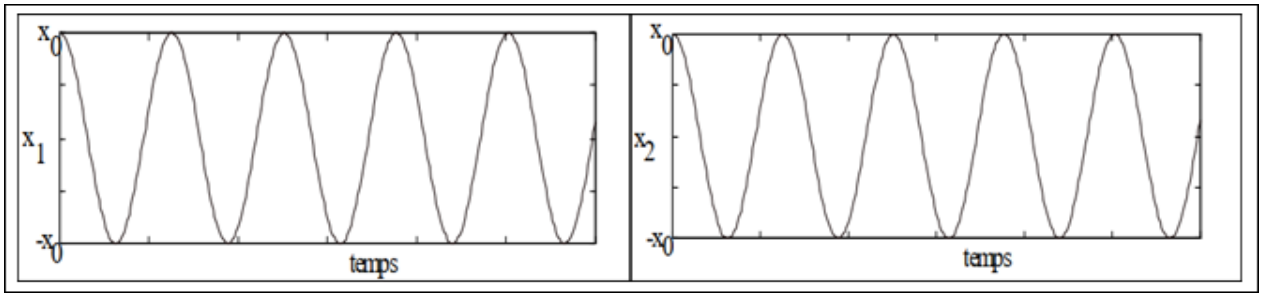


Figure 1 : Oscillations dans le mode fondamental

Cas 2 ($x_{10} = -x_{20} = x_0$ et $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$)

On obtient dans ce cas

$$\begin{cases} A_{11} = 0 \\ A_{12} = x_0 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = 0 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots (4.28)$$

Ces conditions donnent :

$$\begin{cases} x_1(t) = x_0\cos(\omega_2 t) \\ x_2(t) = -x_0\cos(\omega_2 t) \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.29)$$

le système oscille dans le second mode car les deux masses sont oscillent **en opposition de phase** avec le même pulsation ω_2(figure 2).

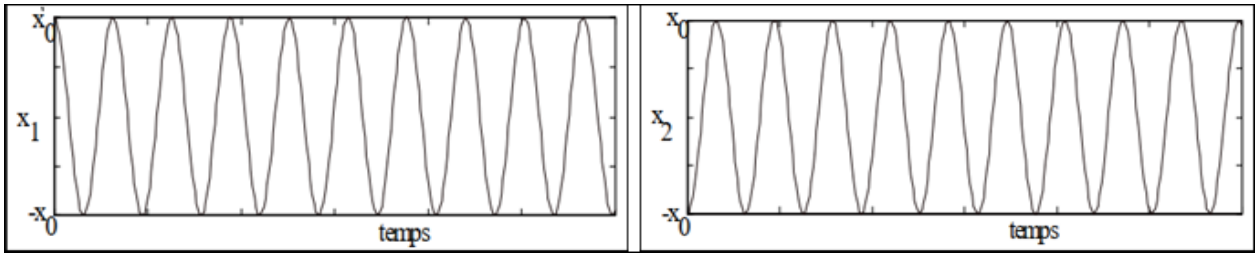


Figure 2 : Oscillations dans le mode harmonique

Cas 3 ($x_{10} = x_0, x_{20} = 0$ et $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$)

On obtient dans ce cas

$$\begin{cases} A_{11} = {}^{x_0}/_2 \\ A_{12} = {}^{x_0}/_2 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = 0 \end{cases} \ldots\ldots\ldots (4.30)$$

Ces conditions donnent les solutions qui s'écrivent sous la forme:

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{x_0}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{x_0}{2}\cos(\omega_2 t) \\ x_2(t) = \frac{x_0}{2}\cos(\omega_1 t) - \frac{x_0}{2}\cos(\omega_2 t) \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.31)$$

Les solutions ne sont plus des fonctions purement sinusoïdales du temps mais des combinaisons linéaires de deux fonctions sinusoïdales de pulsations respectives ω_1 et ω_2. $x_1(t)$ et $x_2(t)$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} x_1(t) = x_0 \cos\left[\left(\frac{\omega_2 - 1}{2}\right)t\right] \cos\left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t\right] \\ x_2(t) = x_0 \sin\left[\left(\frac{\omega_2 - 1}{2}\right)t\right] \sin\left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t\right] \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.32)$$

- **Phénomène de battements**

Nous appelons ce mode d'oscillation, **le mode de battement** qui obtenu dans le cas où ω_1 est très différent de ω_2 (c'est-à -dire si $K \gg k_0$), on obtient (Figure 3).

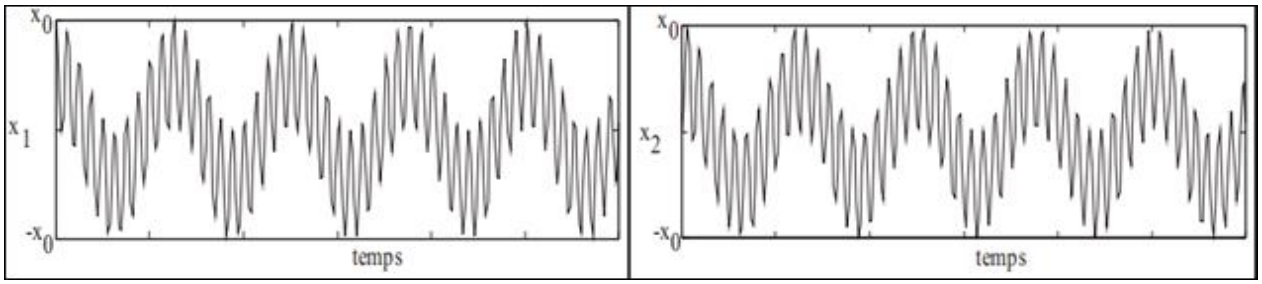


Figure 3 : Oscillations dans le mode de battement

Si ω_1 est peu différent de ω_2 (c'est-à -dire si $K \ll k_0$), on observe un phénomène de battement (voir figure 4 ci-dessous).

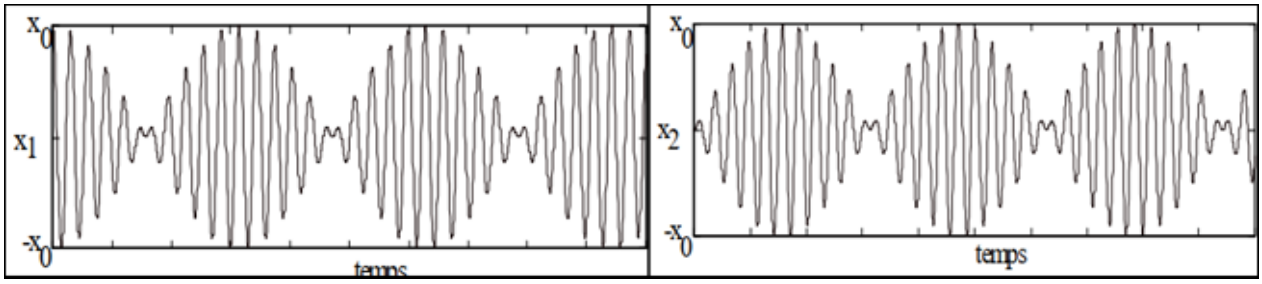


Figure 4 : Phénomène de battements

4.4 Pendules couplés

Considérons le cas de deux pendules simples identiques couplés par un ressort de raideur K et qui effectuent des oscillations de faible amplitude repérées par les angles θ_1 et θ_2. Les tiges de longueurs $l_1$et l_2 ($l = l_1 = l_2$) **s**ont des masses négligeables.

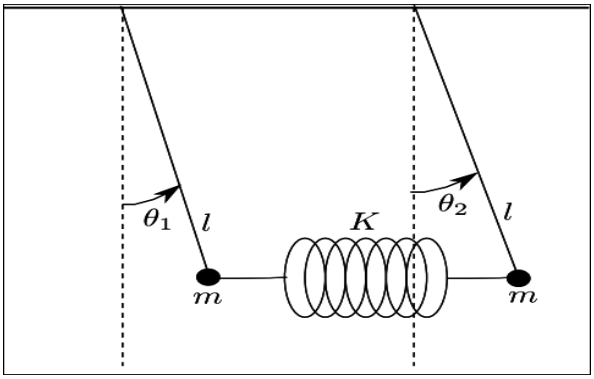


Figure 5 : Pendules couplés.

4.4.1 Équations différentielles du système

Etablissons les équations différentielles du mouvement dans le cas des oscillations de faible amplitude. L'énergie cinétique et l'énergie potentielle s'écrivent sous les formes suivantes :

L'énergie cinétique : $T = \frac{1}{2} j_{/\Delta_1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} j_{/\Delta_2} \dot{\theta}_2^2$

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_2^2 \text{ …….. (4.32)}$$

Avec : $\begin{cases} x_1 = l\theta_1 \\ x_2 = l\theta_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = l\dot{\theta}_1 \\ \dot{x}_2 = l\dot{\theta}_2 \end{cases}$ et $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} = -\frac{\theta^2}{2}$

The potential energy : $U = -mgl\cos\theta_1 - mgl\cos\theta_2 + \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2$

$$U = -mgl\left(-\frac{\theta_1^2}{2}\right) - mgl\left(-\frac{\theta_2^2}{2}\right) + \frac{1}{2}K(l\theta_1 - l\theta_2)^2$$

$$U = \frac{1}{2}(Kl^2 + mgl)\theta_1^2 + \frac{1}{2}(Kl^2 + mgl)\theta_2^2 - Kl^2\theta_1\theta_2 \text{ ..... (4.33)}$$

Le terme $-Kl^2\theta_1\theta_2$ est le terme de couplage

Le lagrangien $L = T - U$ s'écrit alors :

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}(Kl^2 + mgl)\theta_1^2 + \frac{1}{2}(Kl^2 + mgl)\theta_2^2 - Kl^2\theta_1\theta_2 \ldots \text{ (4.34)}$$

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1}\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2}\right) = 0 \end{cases}$$

D'où le système d'équations différentielles du mouvement est :

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\theta}_1^2 + (Kl^2 + mgl)\theta_1 - Kl^2\theta_2 = 0 \\ ml^2\ddot{\theta}_2^2 - Kl^2\theta_1 + (Kl^2 + mgl)\theta_2 = 0 \end{cases} \text{ ..... (4.35)}$$

4.4.2 Résolution des équations différentielles

La solution de ce système d'équations différentielles est de la forme :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1\ \cos(\omega t + \phi_2) \\ \theta_2(t) = A_2\cos(\omega t + \phi_2) \end{cases} \text{ ..... (4.36)}$$

En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système qui s'écrie :

$$\begin{cases} [(Kl^2 + mgl - ml^2\omega^2)]A_1 - Kl^2A_2 = 0 \\ -Kl^2A_1 + [(Kl^2 + mgl - ml^2\omega^2)]A_2 = 0 \end{cases} \text{ ..... (4.37)}$$

Ce système d'équations admet des solutions non nulles seulement si ω est solution de l'équation aux fréquences

$$(Kl^2 + mgl - ml^2\omega^2)^2 - (Kl^2)^2 = 0$$

❖ **pulsations propres**

On calculer l'expression des pulsations propres $\omega_1$et ω_2 :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ et } \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{m}}$$

Les solutions du système d'équations différentielles sont donc

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_{11}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) = A_{21}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \ldots\ldots (4.38)$$

Pour calculer les rapports des amplitudes dans les modes, on suppose que le système oscille soit dans le premier mode soit dans le second mode. Dans le premier mode, on obtient le système

$$\begin{cases} (Kl^2 + mgl - ml^2\omega_1^2) - Kl^2\mu_1 = 0 \\ -Kl^2 + (Kl^2 + mgl - ml^2\omega_1^2)\mu_1 = 0 \end{cases}$$

Dans le second mode, on obtient

$$\begin{cases} (Kl^2 + mgl - ml^2\omega_2^2) - Kl^2\mu_2 = 0 \\ -Kl^2 + (Kl^2 + mgl - ml^2\omega_2^2)\mu_2 = 0 \end{cases}$$

Les solutions du système d'équations différentielles, pour les valeurs du rapport des amplitudes dans les modes $\mu_1 = 1$ et $\mu_2 = -1$ s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_{11}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) = A_{11}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \ldots\ldots (4.39)$$

Partie II Ondes

Chapitre V

Généralités sur les phénomènes de propagation

5. propagation à une dimension

Introduction

Dans les phénomènes vibratoires traités dans les chapitres précédents, nous nous sommes intéressés à des phénomènes ou des grandeurs physiques qui dépendaient d'une seule variable, le temps. Nous allons maintenant examiner toute une série de phénomènes qui sont décrits par une fonction qui dépend à la fois du temps **t** et d'une variable d'espace, ***r*** par exemple.

5.1. Généralités et définitions de base

5.1.1. Définition d'une onde : est une propagation d'une perturbation locale temporaire qui se déplace dans un milieu matériel avec transport d'énergie mais sans transport de matière (il n'y a pas de transport de matière).

Une onde : est la propagation d'une perturbation produisant sur son passage une variation réversible des propriétés physiques locales du milieu.

Une onde : est caractérisée par sa fréquence f, sa longueur d'onde λ et son amplitude $A(r\,,t)$ (définie en tout point de l'espace-temps avec les trois coordonnées d'espace et celle du temps).

Exemple : Transfert d'énergie sans transport de matière : Figure 1, ci-contre illustre ces propriétés. Au passage de l'onde le bateau s'élève son énergie potentielle augmente mais le bateau reste à la même abscisse.

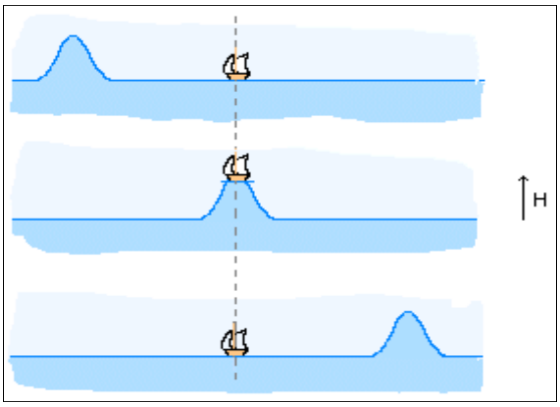


Figure 1 : Mouvement de la vague

5.1.2. Types d'ondes : Il existe différents types d'ondes

5.1.2.1. Ondes mécaniques : Elles se propagent dans un milieu matériel solide, liquide ou gazeux.

Exemples : Propagation du son, Vagues sur l'eau, ondes élastiques dans un barreau, corde de piano, la corde, le ressort, …….

a. **Onde mécanique à une dimension**
Exemples : Une perturbation qui se déplace le long d'une corde ou qui se déplace le long d'un ressort est une onde mécanique à une dimension (figure 2).

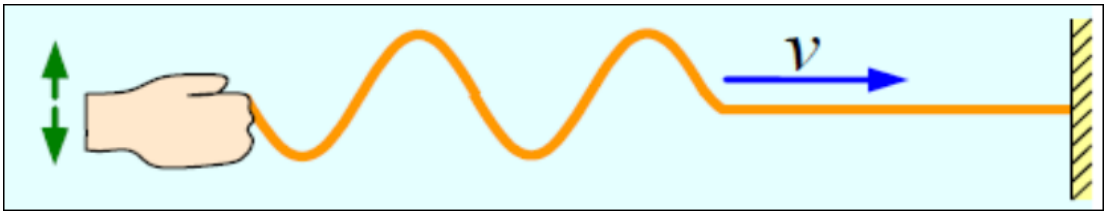


Figure 2 : Mouvement d'une perturbation à une corde

b. **Onde mécanique à deux dimensions**

Exemple : à la surface de l'eau

Les vagues à la surface de l'eau constituent des ondes mécaniques à deux dimensions, On observe une série de cercles concentriques sombres et lumineux, (figure 3).

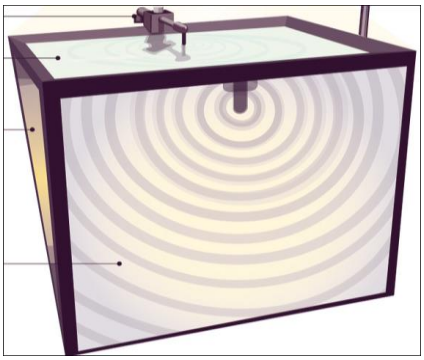


Figure 3 : Cuve à ondes pour l'étude de la propagation des ondes

c. Onde mécanique à trois dimensions

Le son est une onde à trois dimensions. On associe aux **ondes sonores** une fréquence comprise entre 20 Hz et 20 000 Hz. Pour visualiser la propagation d'un son, on utilise des microphones reliés à des systèmes informatisés de traitement des données.

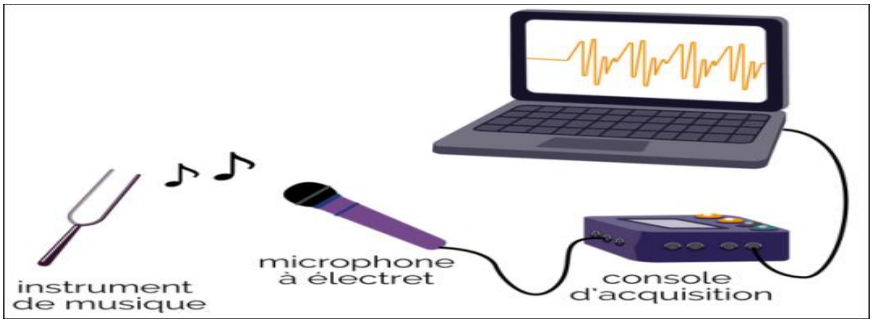


Figure 4 : L'onde sonore

5.1.2.2 Onde électromagnétiques

C'est une propagation dans un champ électromagnétique variable et ne nécessite pas un milieu matériel pour sa propagation.

Exemples : Ondes radios, micro-ondes, lumière…..

5.1.3 Modes de propagations

5.1.3.1 Ondes transversales

Une onde est *transversale* lorsque la direction de la déformation (ou perturbation) et la direction de la propagation de l'onde sont perpendiculaires.

Exemple: À la surface de l'eau et l'onde qui se propage le long d'une corde élastique.

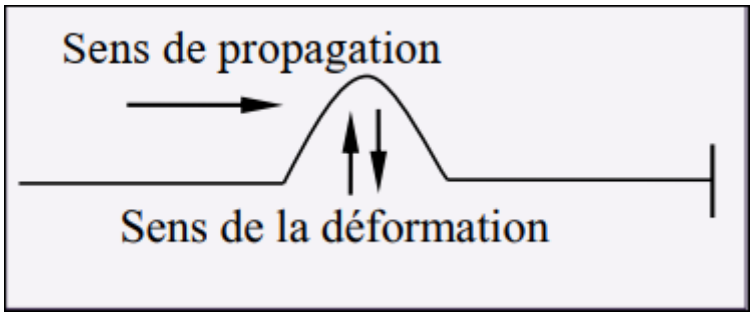


Figure 5 : Mouvement le long d'une corde et d'un ressort

5.1.3.2 Ondes mécaniques longitudinales

Une onde est *longitudinale* lorsque la direction de la déformation (ou perturbation) et la direction de la propagation de l'onde ont la même direction.
Exemple: l'onde qui se propage le long d'un ressort lorsque nous comprimons quelques spires à son extrémité.

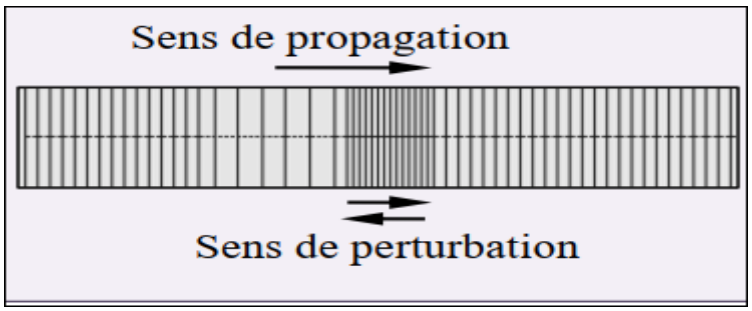


Figure 6 : Propagation d'une perturbation le long d'un ressort

5.1.3.3 Ondes progressives : La grandeur perturbée se propage dans une direction comme l'onde incidente. Est une succession entretenue des signaux mécaniques qui se propagent dans un milieu supposé infini. Nous pouvons générer une onde mécanique progressive par la vibration entretenue d'une source. (Il n y'a pas d'ondes dans le sens opposé).

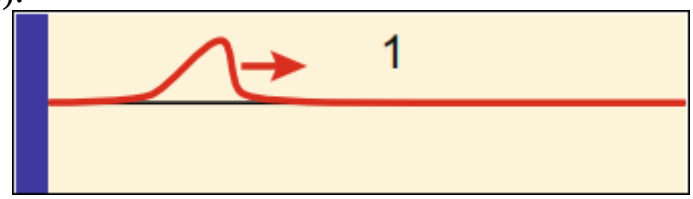


Figure 7 : L'onde incidente

5.1.3.4 Ondes stationnaires
C'est la superposition d'une onde incidente et une onde réfléchie. La grandeur physique perturbée ne se propage pas.

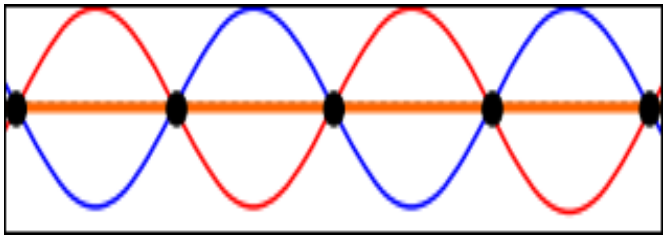


Figure 8 : L'onde stationnaire

5.2 Propagation à une dimension

5.2.1 Equation de propagation

Les phénomènes précédents sont régis par une équation aux dérivées partielles, appelée équation d'Alembert où encore équation d'onde $\psi(x,t)$ qui dépend à la fois du temps t et d'une variable d'espace x, décrite comme suit

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = V^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.1)$$

Où

$\psi(x,t)$: est l'onde qui se propage dans la direction (ox).

V : Est la vitesse de propagation est constante (Uniforme).

5.2.1 Solution de l'équation de propagation

- **Méthode D'Alembert**

Pour résoudre l'équation des ondes à une dimension, on utilise la méthode changement de variable suivant :

$$\begin{cases} g = t + \dfrac{x}{V} \\ h = t - \dfrac{x}{V} \end{cases}$$

Calculons les dérivées partielles par rapport à t et x, on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial t} = 1 \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} = 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{1}{V} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} = -\dfrac{1}{V} \end{cases}$$

On calcule les quantités $\frac{\partial\psi}{\partial t}, \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ en fonction des nouvelles variables g et h, $\psi(g,h)$:

- Pour le premier terme de l'équation (5.1), on a :

1. $\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial t}$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial g} + \frac{\partial \psi}{\partial h} \text{ ..... (5.2)}$$

Car : $\frac{\partial g}{\partial t} = 1 \ et \ \frac{\partial h}{\partial t} = 1$

2. $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial g} + \frac{\partial \psi}{\partial h}\right) = \frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{\partial \psi}{\partial g} + \frac{\partial \psi}{\partial h}\right)\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial \psi}{\partial g} + \frac{\partial \psi}{\partial h}\right)\frac{\partial h}{\partial t}$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial g^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial h^2} + 2\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial g \partial h} \text{ ..... (5.3)}$$

- Pour le deuxième terme de l'équation (5.1), on a :

3. $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial \psi}{\partial g} - \frac{\partial \psi}{\partial h}\right)$, d'où

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial \psi}{\partial g} - \frac{\partial \psi}{\partial h}\right) \text{ ..... (5.4)}$$

Car : $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{V} \ \ et \ \ \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{V}$

4. $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial g} + \frac{\partial \psi}{\partial h}\right) = \frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{\partial \psi}{\partial g} + \frac{\partial \psi}{\partial h}\right)\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial \psi}{\partial g} + \frac{\partial \psi}{\partial h}\right)\frac{\partial h}{\partial x}$

En tenant compte de ces résultats et sachant que

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial g \partial h} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial h \partial g}$$

D'où

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial g^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial h^2} - 2\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial g \partial h}\right) \text{ ..... (5.5)}$$

En remplaçant les relations (5.3)et (5.5)dans la relation (5.1), on trouve :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial g^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial h^2} + 2\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial g \partial h} = V^2\left[\frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial g^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial h^2} - 2\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial g \partial h}\right)\right]$$

Autre part :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial g \partial h} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{\partial \psi}{\partial h}\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial \psi}{\partial g}\right) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial h} = \acute{f}(h) \\ \frac{\partial \psi}{\partial g} = \acute{f}(g) \end{cases}$$

Cette expression indique que :

$\frac{\partial \psi}{\partial h}$: ne dépend de h et $\frac{\partial \psi}{\partial g}$: ne dépend de g.

C'est impliqué que :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial h} = \acute{f}(h) \\ \frac{\partial \psi}{\partial g} = \acute{f}(g) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \psi_1(h) = \int \frac{\partial \psi}{\partial h} = f(h) + C_1(g) \\ \psi_2(g) = \int \frac{\partial \psi}{\partial g} = f(g) + C_1(h) \end{cases}$$

Les constantes d'intégration s'annule aux point $x = 0$ et $t = 0$

Alors la solution générale (totale) s'écrit comme la forme :

$$\psi(x,t) = \psi_1(h) + \psi_2(g)$$

$$\psi(x,t) = F\left(t - \frac{x}{V}\right) + L\left(t + \frac{x}{V}\right) \text{ ..... (5.6)}$$

Ou

$$\psi(x,t) = F(Vt - x) + L(Vt + x)$$

Les fonctions $\mathrm{F}\left(\mathrm{t} - \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{V}}\right)$, $\mathrm{L}\left(\mathrm{t} + \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{V}}\right)$ sont des fonctions dont la nature est fixée par les conditions aux frontières (conditions initiales) imposées à la solution $\psi(x,t)$.

Remarque :

En régime Sinusoïdal la solution s'écrit comme suit :

$$\psi(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right] + B\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{V}\right)\right] \text{ ..... (5.7)}$$

5.2.2 Propriétés des solutions particulières $\boldsymbol{\psi_1\left(t - \frac{x}{V}\right), \psi_2\left(t + \frac{x}{V}\right)}$

a) Propriétés de $\boldsymbol{\psi_1\left(t - \frac{x}{V}\right)}$

Si on considère la fonction $\mathrm{F}\left(\mathrm{t} - \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{V}}\right)$, la perturbation à l'abscisse x_1 à l'instant t_1 est le même à l'abscisse x_2 à l'instant $t_2 > t_1$. Pour cela on suppose que les conditions aux frontières sont telles que $F\left(t - \frac{x}{V}\right)$ est constamment nulle, c'est.a.dire Ce problème est formulé par l'égalité suivante :

$$\psi(x_1, t_1) = \psi(x_2, t_2)$$

Ce qui se traduit par

$$F\left(t_1 - \frac{x_1}{V}\right) = F\left(t_2 + \frac{x_2}{V}\right)$$

Cette équation est satisfaite si

$$t_1 - \frac{x_1}{V} = t_2 + \frac{x_2}{V} \implies x_2 - x_1 = V(t_2 - t_1) > 0$$

D'où, Comme $t_2 + t_1 > 0 \implies x_2 > x_1$ ces deux points sont distants :

$$x_2 = x_1 + V(t_2 - t_1) > 0$$

Cette fonction $F\left(t_1 - \frac{x_1}{V}\right)$ est appelée onde progressive, correspond donc à une perturbation qui se propage dans le sens x positifs (Voir la figure 8).

Avec $V = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} > 0$

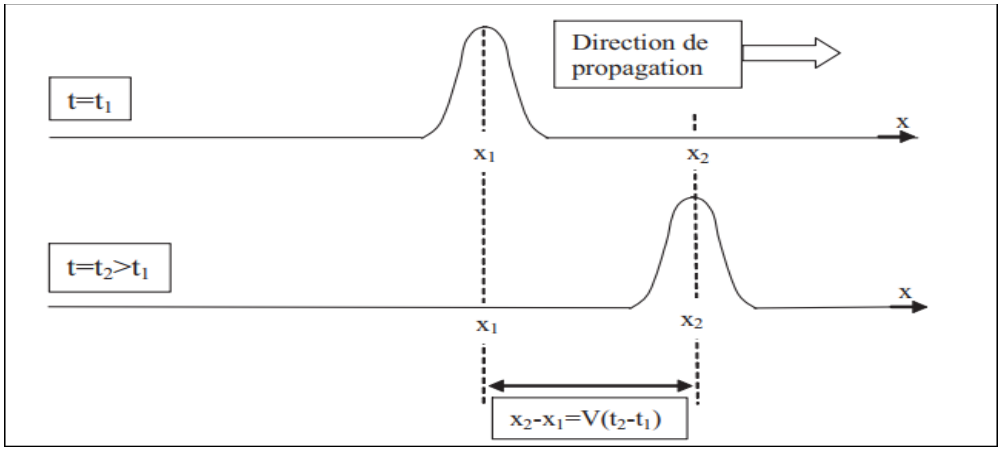


Figure 9 : Onde progressive dans le sens des x Croissants (positifs)

b) Propriétés de $L\left(t + \frac{x}{V}\right)$

Si on considère la fonction $L\left(t + \frac{x}{V}\right)$, la perturbation à l'abscisse x_1 à l'instant t_1 est le même à l'abscisse x_2 à l'instant $t_2 > t_1$. Pour cela on suppose que les conditions aux frontières sont telles que $L\left(t + \frac{x}{V}\right)$ est constamment nulle, c'est.a.dire Ce problème est formulé par l'égalité suivante :

$$\psi(x_1, t_1) = \psi(x_2, t_2)$$

Ce qui se traduit par

$$L\left(t_1 + \frac{x_1}{V}\right) = L\left(t_2 + \frac{x_2}{V}\right)$$

Cette équation est satisfaite si

$$t_1 + \frac{x_1}{V} = t_2 + \frac{x_2}{V} \implies x_2 - x_1 = -V(t_2 - t_1) < 0$$

D'où, Comme $t_2 + t_1 > 0 \implies x_2 < x_1$ (x_2 est inférieure à x_1), ces deux points sont distants de :

$$x_1 = x_2 + V(t_2 - t_1) > 0$$

Cette fonction $L\left(t + \frac{x}{V}\right)$ est appelée onde progressive inverse, ou rétrograde.Il correspond alors à un signal qui se déplace dans le sens des x négatifs.

Cette fonction $L\left(t + \frac{x}{V}\right)$ correspond à une onde progressive qui se propage dans le sens x décroissants (Voir la figure 9).

Avec $$V = \frac{x_1 - x_2}{t_2 - t_1} < 0$$

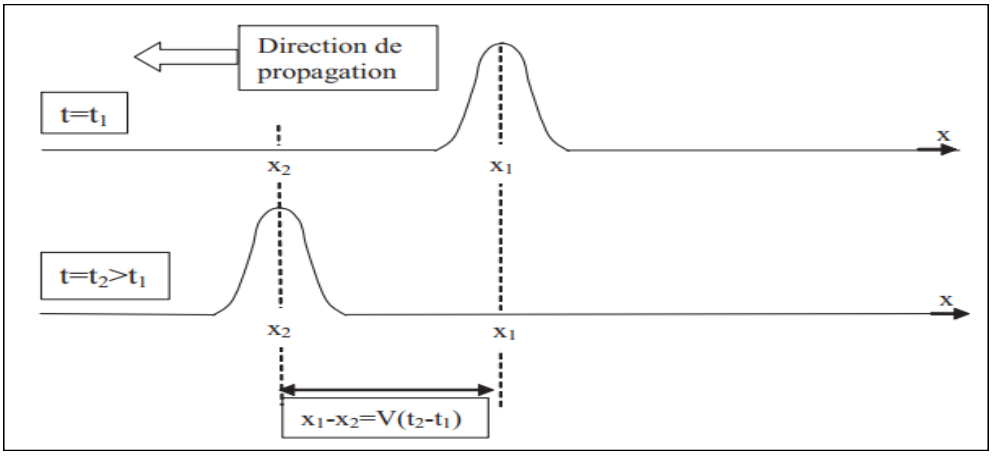


Figure 10 : Onde progressive dans le sens des x décroissants (négatif).

En général, le déplacement de la corde est une superposition d'ondes progressives et rétrogrades.

5.2.3 Notions des fonctions *F* et *L*

La fonction F est produite par l'onde incidente à une distance $x = 0$ (la source) donc la fonction F représente une onde dite « onde incidente » (figure 10).

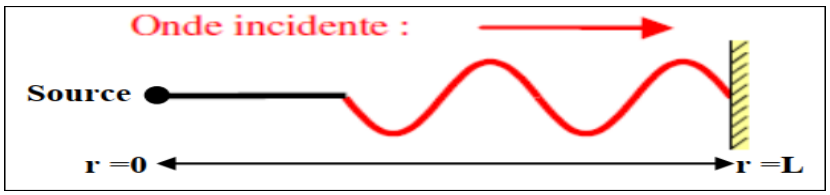


Figure 11 : Onde incidente

La fonction L est produite par la réflexion à une distance $x = L$(l'obstacle), donc la fonction L représente une onde dite « onde réfléchie » (figure 11).

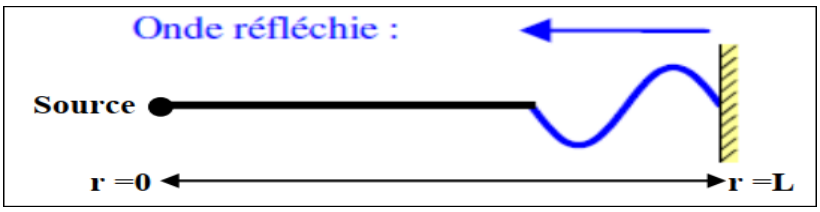


Figure 12 : Onde réfléchie

5.2.4 Onde progressive sinusoïdale

Une fonction sinusoïdale est un cas particulier de fonction périodique. En physique, on parle d'onde sinusoïdale si la perturbation du milieu évolue, dans le temps et dans l'espace, de manière sinusoïdale. Les graphiques ci-dessous permettent alors de définit la période, la longueur d'onde et l'amplitude d'une onde sinusoïdale :

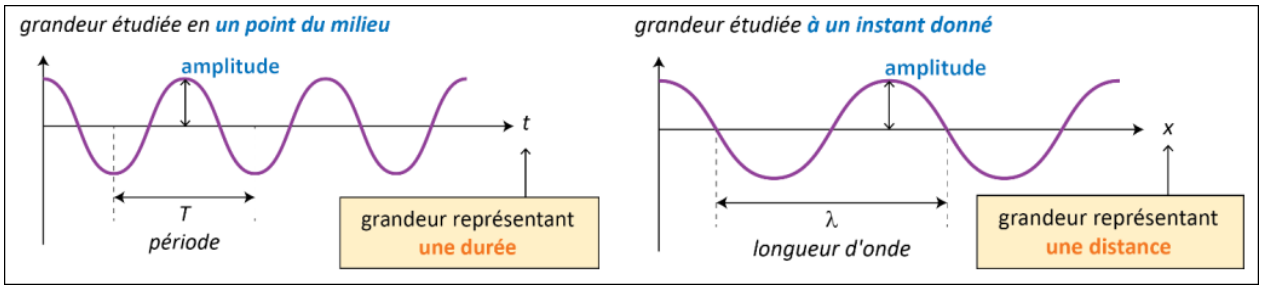


Figure 13 : ces deux graphiques se ressemblent mais ne montrent pas du tout la même chose : le premier montre une évolution temporelle alors que l'autre montre une évolution spatiale.

On considère une onde progressive se propageant dans la direction de l'axe des x, quand le point A d'abscisse $x = 0$ est soumis à une vibration sinusoïdale de la forme (mouvement de la source) :

$$S(x = 0, t) = A\cos(\omega t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.8)$$

Le point **(*M*)** se trouvant à l'abscisse $x > 0$ aura la même vibration que celle du point $x = 0$ mais avec un retard égal à $\frac{x}{V}$, (figure 13) :

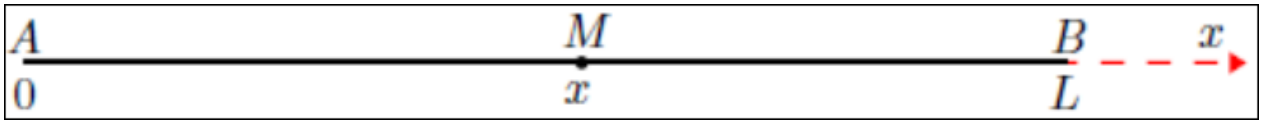


Figure 14 : M point matériel d'une corde homogène (AB) tendue de longueur L, qui se trouve à distance de la point A (source).

$$S_M(x,t) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right) = A\cos\left(\omega t - \omega\frac{x}{V}\right)$$

$$S_M(x,t) = \left(\omega t - \emptyset(x)\right) \text{ …….. (5.9)}$$

Où $\emptyset(x) = \omega\frac{x}{V}$: Représente le déphasage lié au temps de propagation, L'onde progressive sinusoïdale s'écrit sous la forme qui permet de mettre en évidence la double périodicité (dans le temps et dans l'espace) :

$$S_M(x,t) = A\cos\left(\omega t - \omega\frac{x}{V}\right)$$

On obtient

$$S_M(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{T}\frac{x}{V}\right)$$

5.2.4 .1 Longueur d'onde, nombre d'onde et vecteur d'onde

$$\begin{cases} \lambda = VT \\ k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{V} \\ \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \end{cases} \text{ …….. (5.10)}$$

Où

λ : est la longueur d'onde

T : La période temporelle

k est appelé le module du vecteur d'onde $\vec{k}$ qui s'exprime en m^{-1}, $\left(\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}\right)$.

f : Est la fréquence.

D'où **l'onde progressive plane harmonique** s'écrit

$$S_M(x,t) = A\cos(\omega t - kx) \text{ …….. (5.11)}$$

On utilise la représentation (notation) de complexe d'une onde progressive sinusoïdale

$$S_M(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$

$$\begin{cases} S_M(x,t) = Ae^{j(\omega t - kx)} \\ S_M(x,t) = \underline{A}e^{j(\omega t)} \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.12)$$

Où $\underline{A} = Ae^{-jkx}$.

Remarques :

- ✓ La quantité $\frac{\omega}{V}$ est perpendiculaire au plan d'onde est désigné par le vecteur $\vec{k}$ porté par le vecteur normale au plan $\vec{n}$ (figure 13)

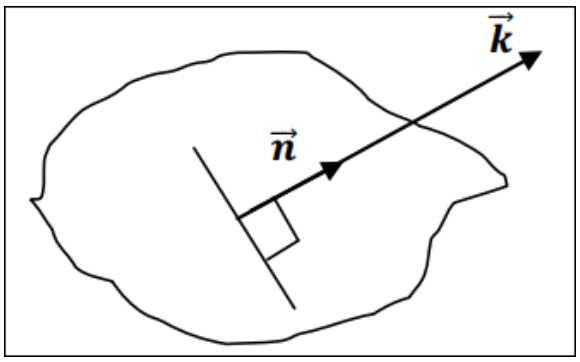


Figure 15 : Vecteur $\vec{k}$ perpendiculaire au plan d'onde

- ✓ On peut l'onde progressive plane harmonique peut s'écrire sous la forme :

$$S_M(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.13)$$

- Cette expression caractérise une onde plane progressive monochromatique (OPPM) ou harmonique,
- **Plane** : parce que l'onde se propage dans une seule direction (ox).
- **Monochromatique** : l'onde se propage avec une fréquence unique.
- Elle est caractérisée par sa pulsation ω et son vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}_x$, elle possède deux périodes, une période temporelle T et une période spatiale (longueur d'onde) λ.

▪ ***Il existe deux types de milieux***

Milieu dispersif et Milieu non dispersif

On définit aussi le nombre d'onde σ, inverse de longueur d'onde et donnée par :

$$\sigma = 1/k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.14)$$

5.2.5 Superposition de deux ondes progressive sinusoïdale

- **Cas de deux ondes de même fréquence se propageant dans le même sens**

Considérons deux ondes de même fréquence et de même direction de propagation, d'amplitudes respectives A_1 et A_2, et de phases respectives $\emptyset_1$ et $\emptyset_2$. L'onde résultante sera alors :

$$S(x,t) = A_1 e^{j(\omega t - kx + \emptyset_1)} + A_2 e^{j(\omega t - kx + \emptyset_2)} = A e^{j(\omega t - kx + \emptyset)} = A\cos(\omega t - kx + \emptyset)$$

D'où on obtient

$$S(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \emptyset) \text{ …….. (5.15)}$$

Avec

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2(A_1.A_2)\cos(\emptyset_1 - \emptyset_2)}$$

$$\emptyset = Arc\ \tan\left(\frac{A_1 \sin\emptyset_1 + A_2 \sin\emptyset_2}{A_1\cos\emptyset_1 + A_1\cos\emptyset_2}\right)$$

La superposition de deux ondes harmoniques de même fréquence, et qui se propagent dans la même direction, donne une autre onde harmonique progressive de même fréquence, d'amplitude A et de phase $\emptyset$.

- **Cas de deux ondes de même fréquence se propageant dans des sens opposé**

La superposition $S(x,t)$ de deux ondes harmoniques progressives S_1 et S_1 de même fréquence, même amplitude $A_0 = A_1 = A_2$, le résultat est tout autre

$$S(x,t) = A_1 e^{j(\omega t - kx + \emptyset_1)} + A_2 e^{j(\omega t - kx + \emptyset_2)} = A_0 e^{j\omega t} e^{-jkx} e^{j\emptyset_1} + A_0 e^{j\omega t} e^{jkx} e^{j\emptyset_2}$$

$$S(x,t) = 2A_0 \cos\left(kx + \frac{\emptyset_1 - \emptyset_2}{2}\right) e^{j\left(\omega t + \frac{\emptyset_1 + \emptyset_2}{2}\right)}$$

Et donc en notation réelle :

$$S(x,t) = 2A_0 \cos\left(\omega t + \frac{\emptyset_1 + \emptyset_2}{2}\right)\cos\left(kx + \frac{\emptyset_1 - \emptyset_2}{2}\right) \text{ …….. (5.16)}$$

Si $\emptyset_1 = \emptyset_1 = 0$ l'équation (5.15) devient

$$S(x,t) = 2A_0\cos(\omega t)\cos(kx)$$

Ce mode de vibration est très différent d'une onde progressive puisque tous les points x de la corde vibrent en phase avec des amplitudes différentes. Il existe une série de points : $x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$ si $\emptyset_1 = \emptyset_2 = 0$, avec $n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots\ldots$

Nœud : Endroit où l'**amplitude** de l'oscillation du milieu est **nulle**. Est déterminer par :

$$\cos(kx) = 0 \implies x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad ou \quad x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k}$$

Ventre : Endroit où l'**amplitude** de l'oscillation du milieu est **maximale** et égale à $2A_0$. Entre chaque paire de nœuds existe un ventre, est déterminer par :

$$\cos(kx) = \pm1 \implies x_n = n\frac{\lambda}{2} = \quad ou \quad x_n = n\frac{\pi}{k}$$

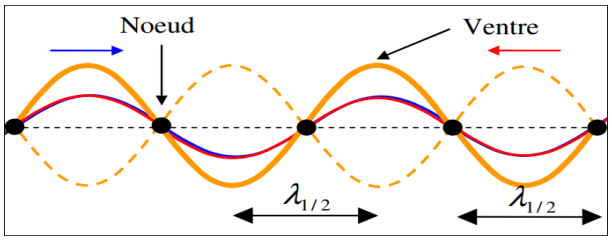


Figure 16 : Onde stationnaire

5.2.6 Vitesse de phase

On définit la vitesse de phase $V_\phi = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ qui s'exprime en fonction de ω et k par :

$$V_\phi = \frac{\omega}{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(5.17)}$$

Si la vitesse de phase ne dépend pas de ω, **le milieu** est dit non dispersif. Dans le cas contraire il est dit dispersif.

5.2.7 Vitesse de groupe

Définition: Dans la propagation du signal, le point d'amplitude maximal, c'est à dire celui ou les ondes harmoniques se groupent pour former l'onde physique se déplace à la vitesse de groupe V_G

La vitesse de groupe est définie par :

$$V_G = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(5.18)}$$

L’amplitude du battement se propage à une vitesse qui est la vitesse de groupe, tandis que la sinusoïde contenue à l’intérieur du battement se propage à la vitesse de phase voir la figure 16 :

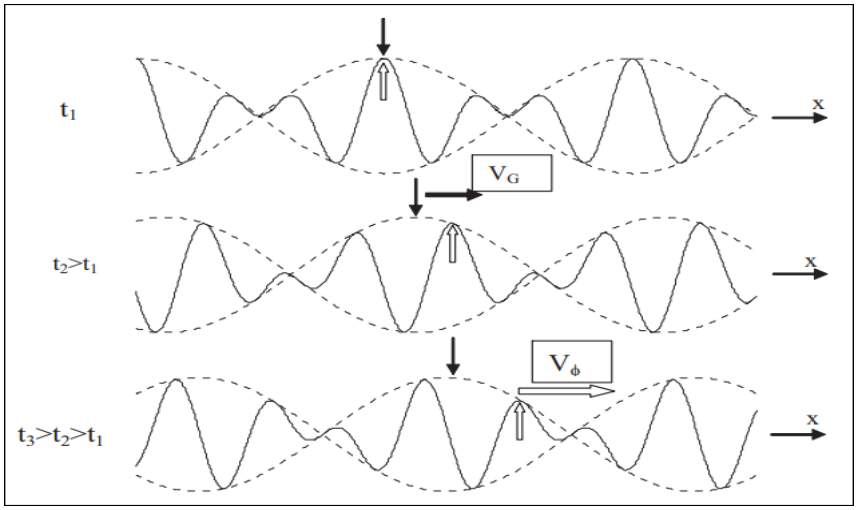


Figure 17 : Les flèches verticales noires correspondent au maximum des battements qui se propagent à la vitesse de groupe. Les flèches verticales blanches correspondent au maximum des vibrations qui se propagent à la vitesse de phase.

Remarque :

Quand la vitesse de phase est indépendante de ω, alors $V_G = V_\phi$

5.3 Modèle de la chaine linéaire

5.3.1 Équation d’onde

Nous allons considérer une chaine d'atomes $\boldsymbol{A_n}$ de masse $\boldsymbol{m}$ positionnés en $\boldsymbol{X_n = na}$ et son longueur est $\boldsymbol{L = (n+1)a}$, tel que $\boldsymbol{a}$ est la distance entre les atomes. Chaque atome vibre autour de sa position d'équilibre, (les forces interatomiques sont assimilées à des ressorts de constante $\boldsymbol{k}$).Voir le figure 17.

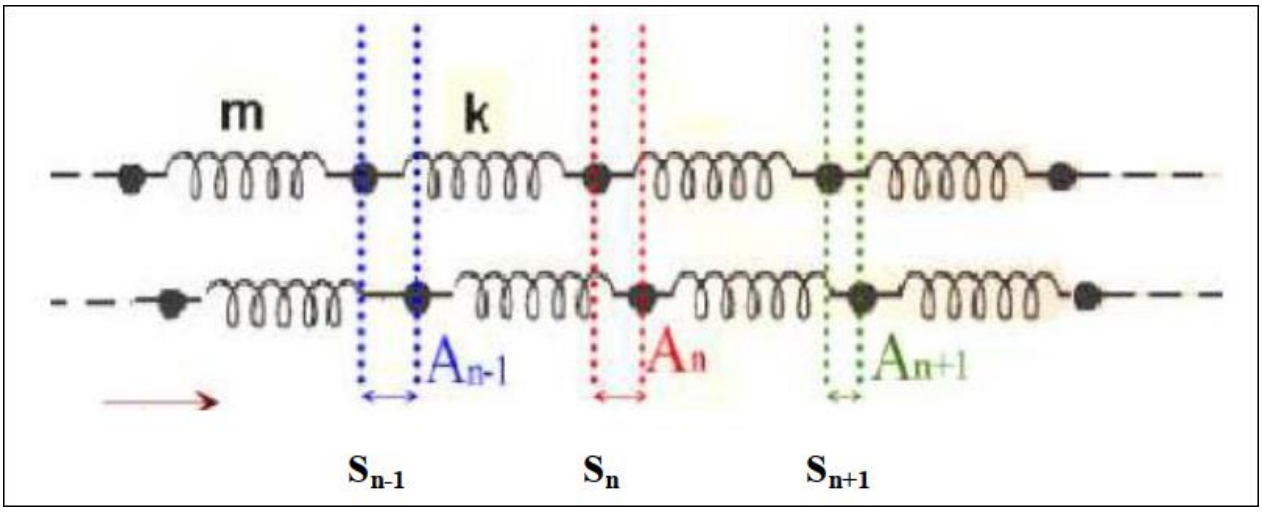


Figure 18 : Chaine d'atomes A_n.

On applique Lagrangien à l'atome A_n (supposant le déplacement de la chaine d'atomes sera horizontalement).

Energie cinétique : $T_n = \frac{1}{2} m \dot{S}_n^2$

Energie potentielle : $U_n = T_0 \Delta l$

$$\Delta l_{n,n-1} = \frac{1}{2a}(S_n - S_{n-1})^2$$

$$\Delta l_{n,n+1} = \frac{1}{2a}(S_{n+1} - S_n)^2$$

L'énergie potentielle pour la masse n est :

$$U_n = T_0 \frac{1}{2a}\left[\Delta l_{n,n-1} + \Delta l_{n,n+1}\right]$$

$$U_n = \frac{T_0}{2a}\left[(S_n - S_{n-1})^2 + (S_{n+1} - S_n)^2\right]$$

Lagrangien s'écrit par:

$$L_n = T_n - U_n = \frac{1}{2} m \dot{S}_n^2 - \frac{1}{2}\frac{T_0}{a}\left[(S_n - S_{n-1})^2 + (S_{n+1} - S_n)^2\right]$$

Lagrangien du système s'écrit sous la forme:

$$L = \sum_1^N L_n = \frac{1}{2}\left[\sum_1^N \left(m \dot{S}_n^2\right) - \frac{T_0}{a}\sum_1^N \left[(S_n - S_{n-1})^2 + (S_{n+1} - S_n)^2\right]\right]$$

L'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{S_n}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial S_n}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{S_n}}\right) = m\ddot{S}_n \quad \ldots\ldots\ldots (1) \\ \dfrac{\partial L}{\partial S_n} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{T_0}{a}[2S_n - 2S_{n-1} + 2S_n - 2S_{n+1}] \quad \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) = 0$$

$m\ddot{S}_n + \frac{1}{2}\frac{T_0}{a}[2S_n - 2S_{n-1} + 2S_n - 2S_{n+1}]$ on devise par m on trouve :

$$\ddot{S}_n + \frac{T_0}{ma}(2S_n - S_{n-1} - S_{n+1}) = 0 \iff \ddot{S}_n + \omega_0^2(2S_n - S_{n-1} - S_{n+1}) = 0 \ldots (5.19)$$

C'est une équation de mouvement pour la masse m de ordre ***n.***

Avec

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{T_0}{ma}$$

Pour $a = \delta x \Longrightarrow \ddot{S}_n = \frac{T_0}{m}\left(\frac{S_{n+1}-S_n}{\delta x} - \frac{S_n - S_{n-1}}{\delta x}\right) = \frac{T_0}{m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{n+1} - \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_n\right] = \frac{T_0}{m}\frac{d^2S}{dx^2}dx$

$$\ddot{S}_n = \frac{T_0}{m}\frac{d^2S}{dx^2}dx = \frac{T_0}{\mu}\frac{d^2S}{dx^2}$$

D'où on obtient à **l'équation de propagation d'onde**:

$$\frac{d^2S}{dt^2} = \frac{T_0}{\mu}\frac{d^2S}{dx^2} = V^2\frac{d^2S}{dx^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (5.20)$$

Où

μ : est la vitesse linéaire

$V = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$: La vitesse de propagation d'onde dans la corde.

5.3.2 Relation entre les amplitudes

Pour la solution d'équation de propagation d'onde on utilise la représentation complexe suivant :

$$\begin{cases} S_n = A_r e^{jwt} \\ S_{n-1} = A_{r-1} e^{jwt} \\ S_{n+1} = A_{r+1} e^{jwt} \end{cases}$$

Après la dérivation et remplaçant dans l'équation (5.19) on obtient :

$$(2\omega_0^2 - \omega^2)A_r - \omega_0^2(A_{r+1} + A_{r-1}) = 0$$

On devise à ω_0^2 on obtient a **l'équation d'amplitudes**

$$\left(2 - \omega^2 \frac{ma}{T_0}\right) A_r - A_{r-1} + A_{r+1} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.21)$$

$$\frac{A_{n+1}+A_{n-1}}{A_n} = \frac{2\omega_0^2-\omega^2}{\omega_0^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (5.22)$$

Pour $\boldsymbol{n}$ masse on obtient $\boldsymbol{n}$ équations alors on a $\boldsymbol{n}$ valeurs à ω, d'où n modes propres

5.3.3 Déduction de la relation entre la pulsation et la dispersion

On a

$$\begin{cases} A_n = A\, sin(nka) \\ A_{n-1} = A\, sin\big((n-1)ka\big) \\ A_{n+1} = A\, sin\big((n+1)ka\big) \end{cases}$$

$$\frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = \frac{A_{r+1} + A_{r-1}}{A_r} = \frac{A\, sin\big((n+1)ka\big) + A\, sin\big((n-1)ka\big)}{A\, sin(nka)}$$

$\frac{2\omega_0^2-\omega^2}{\omega_0^2} = 2\cos(ka) \implies \omega^2 = 2\omega_0^2(1 - cos(ka))$

- D'où les pulsations propres de mouvement pour $\boldsymbol{n}$ masses identique est donnée par :

$$\omega_k^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) = 4\omega_0^2\, sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) \quad , n = 1.2 \ldots\ldots n \ldots\ldots\ldots\ldots (5.23)$$

- Amplitude de la masse d'ordre n dans mode propre est donnée par :

$$A_{n,k} = C_n \sin\left(\frac{nk\pi}{n+1}\right) \quad , \; k = 1,2, \ldots \ldots n \ \ldots\ldots\ldots (5.24)$$

Exemples :

Pour une masse : $n = 1 \Longrightarrow k = 1$

$$\begin{cases} \omega^2 = 4\omega_0^2 \, sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\omega_0^2 = 2\frac{T_0}{ma} \\ A = C_n \, sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = C \end{cases}$$

Pour deux masses : $n = 2 \Longrightarrow k = 1,2$

$$\begin{cases} k = 1 \implies \omega_1^2 = 4\omega_0^2 \, sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \omega_0^2 = \frac{T_0}{ma} \\ k = 2 \implies \omega_2^2 = 4\omega_0^2 \, sin^2\left(\frac{2\pi}{6}\right) = 3\omega_0^2 = 3\frac{T_0}{ma} \end{cases}$$

Problème :

Montre que la fonction $s(x,t) = 12 \, cos \, (10\pi(t + 5x))$ est solution de l'équation de propagation suivante : $\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0.04 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$

Solution :

On peut écrit $S(x,t)$ comme une fonction complexe : $S(x,t) = 12e^{j(10\pi t + 50\pi x)}$ après remplacement on trouve :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = 120\pi j e^{j(10\pi t + 50\pi x)} \implies \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = -1200\pi^2 e^{j(10\pi t + 50\pi x)} \\ \frac{\partial S}{\partial x} = 600\pi j e^{j(10\pi t + 50\pi x)} \implies \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = -310^4 \pi^2 e^{j(10\pi t + 50\pi x)} \end{cases}$$

$$\implies \left[-1200\pi^2 e^{j(10\pi t + 50\pi x)}\right] = 0.04\left[-310^4 \pi^2 e^{j(10\pi t + 50\pi x)}\right]$$

$\implies 1 = 1$ Et c'est tout.

Chapitre VI

6. Ondes acoustiques dans les fluides

Introduction

Les ondes acoustiques sont des ondes élastiques comme des ondes mécaniques qui se propagent dans un fluide (gaz ou liquides). Dans un fluide parfait (sans viscosité, il n'y aura pas d'absorption), l'onde acoustique est longitudinale. Considérons une onde acoustique de faible amplitude se propageant dans la direction x. Cette onde s'accompagne de variations infinitésimales de la pression $\mathrm{p(x,t)}$ et de la masse volumique $\rho(x,t)$.
Dans la suite, nous utiliserons les symboles suivants pour étudier l'onde acoustique qui se propage suivant l'axe des x :
x : Coordonnée à l'équilibre d'une particule du milieu.
u : Le déplacement de particule par rapport à la position d'équilibre.
ρ_0 : Masse volumique du fluide à l'équilibre.
P : Pression instantanée en un point quelconque
P_0 : pression à l'équilibre (au repos).
$p = P - P_0$: Surpression ou pression acoustique
C: vitesse de propagation de l'onde (Célérité du son dans l'air qui est égale à $344m/s$ à $20°c$ par exemple).

Pour établir l'équation de propagation des ondes, nous négligerons les effets de la gravitation de telle sorte que P_0 et ρ_0 sont uniformes dans tout le milieu. On suppose d'autre part que le milieu est homogène, isotrope et parfaitement élastique, c'est-à-dire non dissipatif.

Le fluide est caractérisé par trois champs : Vitesse V, pression P et masse volumique μ.

6.1 Equation de propagation des ondes acoustiques dans les fluides

- On considère une tranche de fluide d'épaisseur Δx située aux abscisses x et $(x + dx)$. Soient les pressions) $P(x)$ et $P(x + dx)$ agissant sur les plans x et $(x + dx)$ respectivement qui génèrent le mouvement de la tranche comme le montre la figure 1.
- Soient $U(x,t)$ et $U(x + dx, t)$ les déplacements à l'instant t des plans d'abscisse x et $(x + dx)$ respectivement.

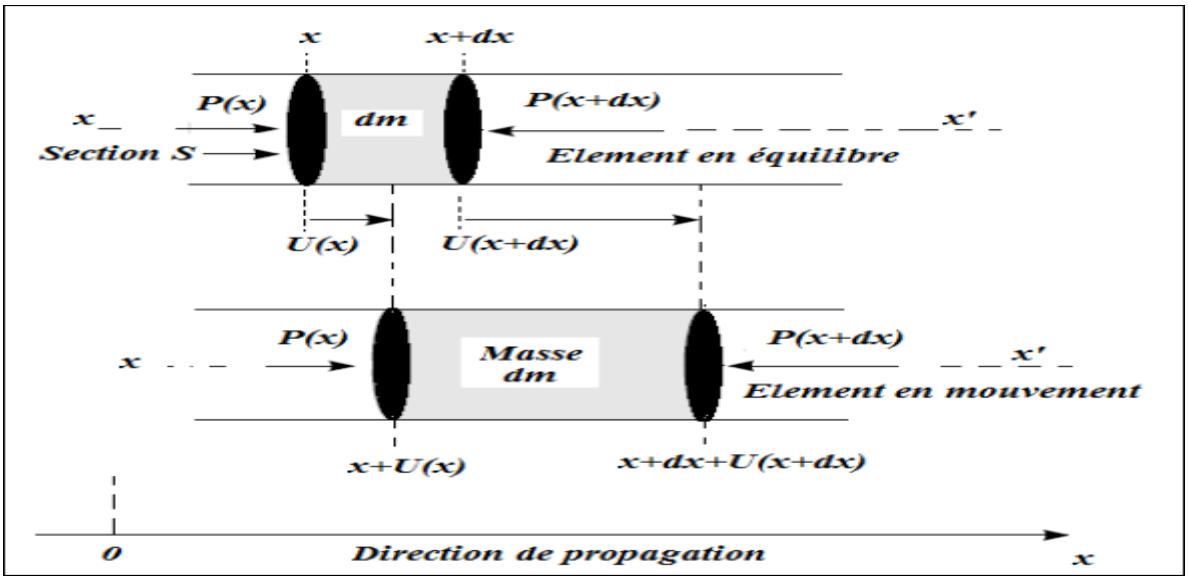


Figure 1: Propagation d'onde acoustique dans un fluide

- En appliquant la loi de la dynamique de Newton :

$$F(x+dx,t) - F(x,t) = dm\frac{\partial U^2}{\partial t^2} \ldots\ldots (6.1)$$

Où $F(x,t)$ et $F(x+dx,t)$ sont des forces d'actions appliquée aux plans d'abscisse x et $(x+dx)$ respectivement.

La résultante de ces deux forces est :

$$\big(F(x+dx,t) - F(x,t)\big) = -S\big(P(x+dx,t) - P(x,t)\big) \ldots\ldots\ldots (6.2)$$

S : section de tuyau.

L'équation du mouvement s'écrit alors :

$$-S\big(P(x+dx,t) - P(x,t)\big) = dm\frac{\partial U^2}{\partial t^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (6.3)$$

En faisant un développement en série de Taylor au premier ordre de $P(x,t)$, on obtient :

$$P(x+dx,t) - P(x,t) = dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx \ldots\ldots\ldots\ldots (6.4)$$

Où

$$dm\frac{\partial U^2}{\partial t^2} = -S\frac{\partial P}{\partial x}dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6.5)$$

Comme $P = P_0 + p$, la force résultant s'exprime par donc :

$$dm\frac{\partial U^2}{\partial t^2} = -S\frac{\partial P}{\partial x}dx = -S\frac{\partial p}{\partial x}dx \text{ ..... (6.6)}$$

On définit la surpression p d'un fluide compressible comme suit :

$$p = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial U}{\partial x} \text{ ..... (6.7)}$$

Où χ est appelé le coefficient de compressibilité.

En injectant la valeur de surpression à l'équation du mouvement (6.5), on obtient :

$$\rho_0 S dx \frac{\partial U^2}{\partial t^2} = -S\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{\chi}\frac{\partial U}{\partial x}\right)dx$$

D'où l'équation de propagation des ondes sonores dans le fluide s'écrit:

$$\frac{\partial U^2}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi\rho_0}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial U^2}{\partial t^2} = V^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \text{ ..... (6.8)}$$

Avec :

$V = \sqrt{\frac{1}{\chi\rho_0}}$: Est appelée la célérité de l'onde sonore ou la vitesse de propagation dans le fluide.

6.1.1 Vitesse du son

La vitesse des ondes sonores s'écrit :

Les variations de pression sont donc adiabatiques et l'évolution d'un volume $\mathcal{V}$ est reliée à celle de la pression P comme suit :

$$P\mathcal{V}^\gamma = constante$$

Où $\gamma = \frac{C_p}{c_v}$: est le rapport des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant.
En calculant la différentielle, on obtient :

$$\mathcal{V}^\gamma dP + P\gamma\mathcal{V}^{\gamma-1}d\mathcal{V} = 0$$

Si l'on considère que dP représente la varaiation de pression au voisinage de la pression à l'équilibre P_0, on obtient :

$$\mathcal{V}^\gamma p + P_0\gamma\mathcal{V}^{\gamma-1}\Delta\mathcal{V} = 0 \implies p = -\gamma P_0\frac{\Delta\mathcal{V}}{\mathcal{V}} \text{ ..... (6.9)}$$

En tenant compte de la définition du module de compressibilité χ, on obtient :

$$p = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial U}{\partial x} \; et \; p = -\gamma P_0 \frac{\Delta \mathcal{V}}{\mathcal{V}}$$ Par conformité identification on

Obtient :

$$\frac{1}{\chi} = \gamma P_0 \ldots\ldots\ldots \text{(6.10)}$$

D'où la vitesse du son dans un fluide :

$$V = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(6.11)}$$

Dans le cas des fluides parfaits :

$$V = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$$

γ est le rapport des chaleurs massiques Cp/Cv, R est la constante molaire des gaz parfaits,T_0 la température du gaz au repos et M la masse molaire.

6.2 Onde progressive sinusoïdale

- **Définition** : Une onde acoustique sinusoïdale, s'écrit :

$$p(x,t) = p_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right]$$

On définit le module du vecteur d'onde k par :

$$k = \frac{\omega}{V}$$

D'où

$$p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx) \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(6.12)}$$

En utilisent la représentation de complexe, l'onde progressive sinusoïdale s'écrit :

$$p(x,t) = p_0 e^{j(\omega t - kx)} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(6.13)}$$

La relation entre la pression acoustique et la compressibilité χ, à savoir :

$$p = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial U}{\partial x}$$

Permet d'écrire

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\chi p \quad \Longrightarrow \quad U(x,t) = -\chi \int p(x,t)dx$$

$$U(x,t) = -\chi \int p_0 e^{j(\omega t - kx)}\, dx = \frac{\chi p_0}{jk} \int e^{j(\omega t - kx)}\, dx$$

D'où

$$U(x,t) = \frac{p_0}{j\omega\rho_0 V} \int e^{j(\omega t - kx)}\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(6.14)}$$

La vitesse de particules :

$$\dot{U}(x,t) = \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \frac{p_0}{\rho_0 V} \int e^{j(\omega t - kx)}\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(6.15)}$$

On constate que pour une onde progressive la vitesse de particules est en phase avec la pression acoustique.

6.2.1 Pression acoustique

Est définit par :

$$p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx) = p_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

6.2.2 Impédance acoustique

- On définit l'impédance acoustique en un point, le rapport de l'amplitude complexe de la pression $p(x,t)$ à l'amplitude complexe de la vitesse de particule $\dot{U}(x,t)$, (kg/m2s) comme suit :

$$Z(x,t) = \frac{p(x,t)}{\dot{U}(x,t)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(6.16)}$$

- On définit le produit $\rho_0 V$ par l'impédance caractéristique du fluide.

6.2.3 Energie acoustique

- **L'énergie cinétique** est définit :

$$E_c = \frac{1}{2}\rho_0 v_0 \dot{u}^2 \text{ ……. (6.17)}$$

On définit l'énergie cinétique par unité de volume ou densité d'énergie cinétique :

$$\epsilon_c = \frac{E_c}{v_0} = \frac{1}{2}\rho_0 \dot{u}^2 \text{ ……. (6.18)}$$

Où v_0 : élément de volume.

- **Densité d'énergie potentielle**

L'énergie potentielle emmagasinée est égale au travail fourni par la pression pour comprimer ou dilater le volume v_0 :

$$E_p = \int -p dv$$

Sachant que

$$p = -\frac{1}{\chi}\frac{v - v_0}{v_0} \implies dv = -\chi v_0 dp$$

$$E_p = \frac{\chi v_0}{2} p^2 \text{ ……. (6.19)}$$

On en déduit la densité d'énergie potentielle :

$$\epsilon_c = \frac{E_p}{v_0} = \frac{1}{2}\chi p^2$$

$$\epsilon = \epsilon_c + \epsilon_c$$

$$\epsilon = \frac{1}{2}\rho_0 \dot{u}^2 + \frac{1}{2}\chi p^2 \text{ ……. (6.20)}$$

Dans le cas particulier d'une onde plane progressive sinusoïdale

$$\epsilon_c = \epsilon_p = \frac{1}{2\rho_0 V^2} p_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \text{ ……. (6.21)}$$

Et

$$\epsilon = \frac{1}{\rho_0 V^2} p_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \text{ ……. (6.22)}$$

6.2.4 Intensité acoustique

On appelle intensité de l'onde acoustique la puissance qui traverse, par unité de temps une surface unité perpendiculaire à la direction de propagation.

Nous calculons l'énergie qui traverse pendant un intervalle de temps t une surface S perpendiculaire à la direction de propagation x.

Cette énergie dE est égale à l'énergie contenue dans un volume $S\,V dt$ et elle égale à

$$dE = \epsilon\, S\, V dt$$

La puissance $\mathcal{P}$ traversant cette surface est donnée par :

$$\mathcal{P} = \frac{dE}{dt} = \epsilon\, S\, V$$

D'où l'expression de l'intensité de l'onde acoustique est :

$$I(t) = \frac{1}{S}\mathcal{P} = \frac{1}{S}\,\epsilon\, S\, V$$

$$I(t) = \epsilon\, V$$

$$I(t) = \frac{1}{\rho_0 V} p_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

On appelle intensité de l'onde acoustique la valeur moyenne

$$I = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} I(t) = \frac{1}{\rho_0 V} p_0^2$$

$$I = \frac{p_0^2}{2Z_c} \text{ ..... (6.23)}$$

6.3 Réflexion-Transmission des ondes acoustiques en incidence normale

Soit deux milieux fluides semi-infinis séparés par une surface plane (interface de séparation). Lorsque une onde acoustique provenant de $-\infty$, se propageant dans le premier dans la direction de l'axe des $\boldsymbol{x}$ arrive à la surface de séparation, elle donne naissance à deux ondes :

1) Une onde réfléchie dans le sens des $x < 0$ vers le milieu 1.
2) Une onde transmise vers le milieu 2 dans le sens des $x > 0$

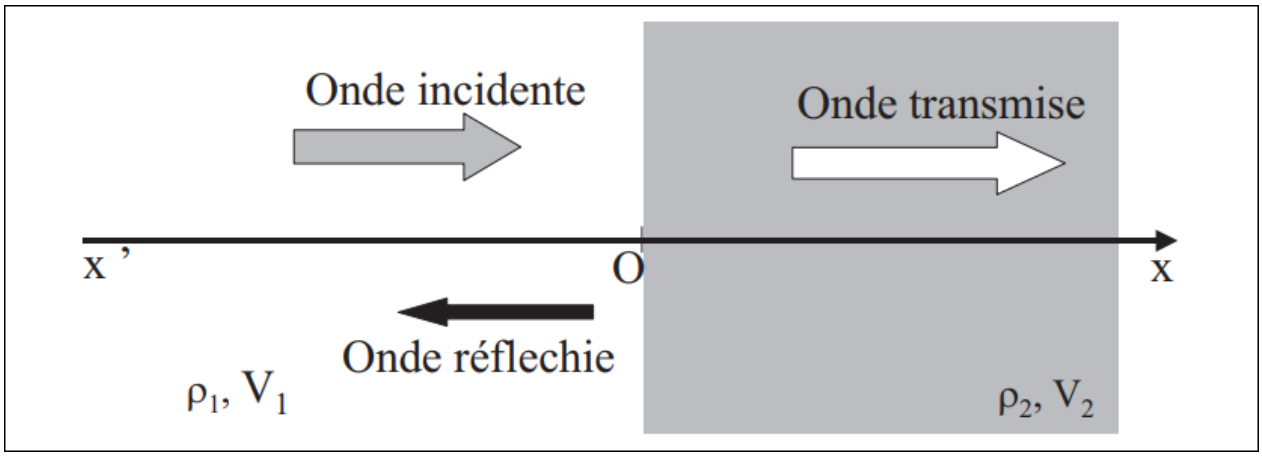


Figure 2: Réflexion et transmission à une interface fluide-fluide

- Les types d'ondes acoustiques se présentent dans le premier milieu et le deuxième milieu respectivement est donné comme suit :

$$\begin{cases} P_1(x,t) = P_i(x,t) + P_r(x,t) \\ P_i(x,t) = p_{0i}e^{j(\omega t - k_1 x)} \quad Onde\ \ incidente \\ P_r(x,t) = p_{0r}e^{j(\omega t + k_1 x)} \quad Onde\ \ réfléchie \\ \dot{u}_1(x,t) = \frac{1}{Z_1}\left(P_i(x,t) - P_r(x,t)\right) \\ P_2(x,t) = P_t(x,t) \\ P_t(x,t) = p_{0t}e^{j(\omega t - k_2 x)} \quad Onde\ transmise \\ \dot{u}_2(x,t) = \frac{1}{Z_2}p_{0t}e^{j(\omega t - k_2 x)} \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots (6.24)$$

- Les relations de continuités à l'interface sont :

$$\begin{cases} P_1(x=0,t) = P_2(x=0,t) \\ \dot{u}_1(x=0,t) = \dot{u}_2(x=0,t) \end{cases} \ldots\ldots\ldots (6.25)$$

On en déduit les équations de continuités à l'interface en fonctions des caractéristiques :

$$\begin{cases} P_i(x,t) - P_r(x,t) = P_t(x,t) \\ \frac{1}{Z_1}\left(P_i(x,t) - P_r(x,t)\right) = \frac{1}{Z_2}P_t(x,t) \end{cases} \ldots\ldots\ldots (6.26)$$

Ou encore

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{p_r}{p_t} = \dfrac{p_t}{p_i} \\ 1 - \dfrac{p_r}{p_i} = \dfrac{Z_1}{Z_2}\dfrac{p_t}{p_i} \end{cases}$$

On définit

Le coefficient de réflexion pour la pression

$$R_P = \frac{P_r}{P_i} \text{ ..... (6.27)}$$

Le coefficient de transmission pour la pression

$$T_P = \frac{P_t}{P_i} \text{ ..... (6.28)}$$

Les deux relations de continuité s'écrivent alors

$$\begin{cases} 1 + R_P = T_P \\ 1 - R_P = \frac{Z_1}{Z_2} T_P \end{cases} \text{ ..... (6.29)}$$

On en déduit les coefficients de réflexion et de transmission

$$\begin{cases} R_P = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \\ T_P = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \end{cases} \text{ ..... (6.30)}$$

En tenant compte des relations $p_i = Z_1 \dot{u}_i,\ p_r = -Z_1 \dot{u}_r \ et \ p_t = Z_2 \dot{u}_t$, on peut calculer les coefficients de réflexion et de transmission pour la vitesse de particules et pour le déplacement de particules :

$$\begin{cases} R_{\dot{u}} = R_u = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ T_{\dot{u}} = T_u = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \end{cases} \text{ ..... (6.31)}$$

En tenant compte des relations, $I_i = P_i^2 / 2Z_1 , I_r = P_r^2 / 2Z_1 \ \ et \ I_t = P_t^2 / 2Z_2$, on peut calculer les coefficients de réflexion et de transmission pour l'intensité acoustique :

$$\begin{cases} \beta_R = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \\ \beta_T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \end{cases} \text{ ..... (6.32)}$$

Chapitre VII

Principe et lois de l'optique géométrique

7. Introduction sur notions fondamentales sur la lumière

L'optique étudie les phénomènes lumineux, c'est à dire principalement les phénomènes perçus par l'œil. La cause de ces phénomènes est la lumière car pour être visible un objet doit faire parvenir de la lumière à l'œil.

L'optique géométrique est une branche qui s'appuie sur la notion de rayon lumineux. Cette approche simple permet notamment des constructions géométriques d'images, elle permet d'expliquer la formation des images produites ce lui.

7.1 La nature de la lumière

Jusqu'au XVIe siècle après, la plupart des physiciens considéraient la lumière comme un flux continu de particules de matière émises par des sources lumineuses, et nombre d'entre eux, comme Galilée, ont essayé de mesurer la vitesse de la lumière C, mais toutes leurs tentatives ont été infructueuses. La théorie de la lumière s'est ensuite développée, surtout au XIXe siècle, pour montrer la théorie ondulatoire de la lumière, représentée par la théorie de Young, Maxwell, Huygens et Hertz. La lumière peut être décrite comme une onde électromagnétique constituée d'un champ électrique et d'un champ magnétique qui oscillent en phase, perpendiculairement l'un par rapport à l'autre et perpendiculairement à la direction de propagation. (Figure 1). Et se propagent dans le vide.

7.2 La double propriété de la lumière

Il existe différents modèles pour définir comportement la lumière :

- Le modèle corpusculaire : selon laquelle la lumière est constituée de corpuscules matériels soumis à la gravitation universelle.
- Le modèle ondulatoire : selon laquelle la lumière se propage comme une onde mécanique (comme, par exemple, le son dans l'air)
- Un photon possède une énergie : $E = h\nu$ avec $h = 6..62\ .10^{-34}\ (j.s\ )$: la constante de PLANCK, $\nu = \frac{1}{T}$ la fréquence de l'onde et T la période.

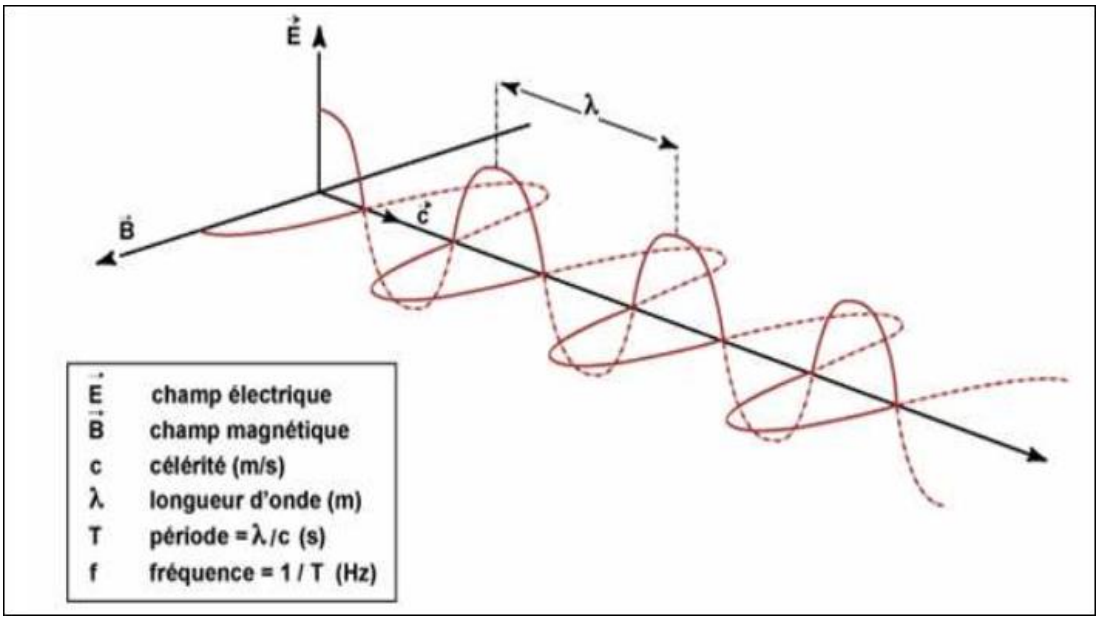


Figure 1 : Nature et propagation d'une onde électromagnétique

- L'ensemble des longueurs d'ondes visibles par l'œil humain est appelé **spectre visible** (de 400 à 780 nm) comme représenté sur la figure2.

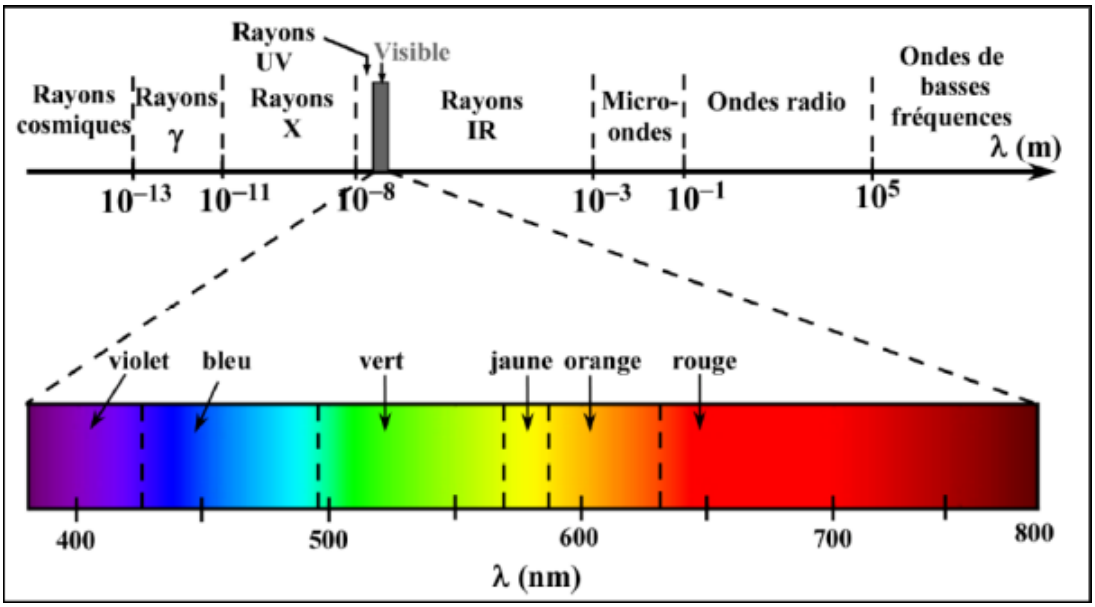


Figure 2 : Spectre visible

7.3 Faisceaux lumineux

Un faisceau lumineux est constitué d'un ensemble de rayons. Il peut être :

- parallèle si les rayons qui le constituent sont parallèles,

- convergent si les rayons qui le constituent, convergent vers un même point

- divergent si les rayons qui le constituent, semblent provenir d'un même point.

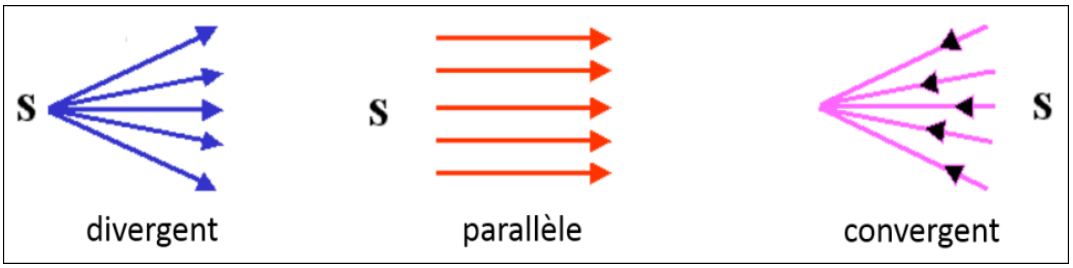


Figure 3 : Ensemble de rayons des lumineux

- Dans le vide, la lumière se propage en ligne droite avec une vitesse C indépendante de la direction adoptée

$$C = \lambda_0 \nu$$

ν: est la fréquence

λ_0 : La longueur d'onde.

7.4 Caractéristiques d'un milieu optique

7.4.1 Milieux transparent, homogène, isotrope

- ✓ **Transparent** s'il laisse passer la lumière (par opposition à un milieu opaque).
- ✓ **Homogène** si ses caractéristiques optiques sont indépendantes de l'espace
- ✓ **Isotrope** si ses caractéristiques optiques sont indépendantes de la direction selon laquelle se propage le rayon lumineux.

7.4.2 Indice de réfraction

C'est une caractéristique intrinsèque du milieu, on définit l'indice optique $\boldsymbol{n}$ d'un milieu par :

$$n = \frac{C}{V} \qquad n \geq 1$$

C : La vitesse de la lumière dans le vide égal 3.10^8 $(m.s^{-1})$

V : Vitesse de propagation dans le milieu considéré

Le tableau 1 donne les valeurs des indices $\boldsymbol{n}$ pour quelque milieu matériels

Matériels	Air	Eau	Verre
n	1	1.33	1.51

Tableau 1 : Indice de réfraction

7.5 Les sources de lumière

7.5.1 Sources primaires

Une source primaire de lumière est un corps qui crée et émet de la lumière dans toutes les directions. (soleil, étoiles, bougie…).

7.5.2 Sources secondaires

Une source de lumière secondaire est un corps qui renvoie la lumière reçue dans toutes les directions. (La Lune, les planètes, un écran de cinéma,...).

7.6 Lois de Snell-Descartes

a. Loi de Réflexion

Considérons un rayon lumineux SI incident sur l'interface de deux milieux distincts. La lumière se réfléchit dans une seule direction, formant le rayon réfléchi IR. Angle d'incidence i_1, angle de réflexion i'_1 de la figure 4.

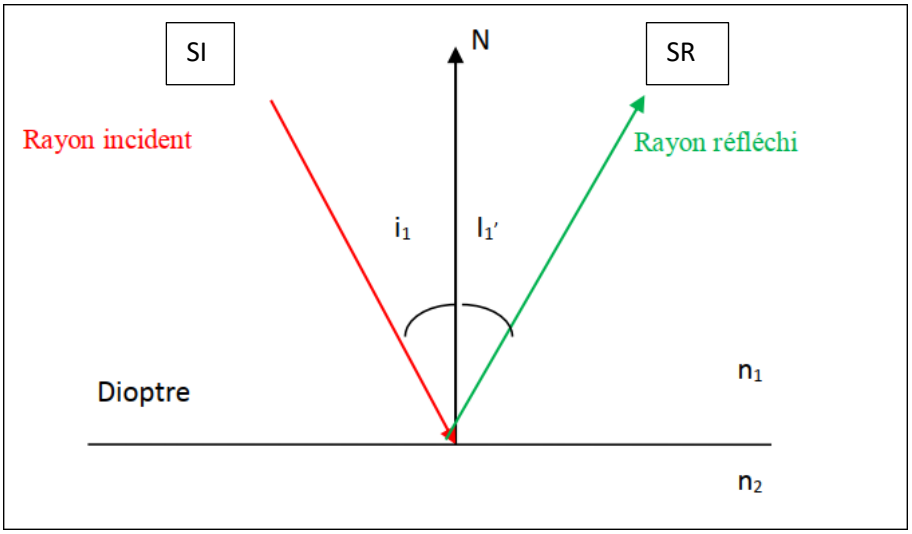


Figure 4 : La réflexion

- **1ère loi de Descartes** il énonce ce que l'angle d'incidence $\mathbf{i_1}$ est la même l'angle de réflexion $\mathbf{i'_1}$.

$$i_1 = i'_1$$

b. Loi de Réfraction

Lorsqu'un rayon lumineux tombe sur la surface de séparation entre deux milieux, une partie de la lumière est réfléchie selon la loi de réflexion dans le milieu 1 d'indice (n_1) et une partie pénètre dans le milieu 2 d'indice (n_2). Le rayon lumineux change de direction de propagation lors du passage du milieu 1 au le milieu 2, il est réfracté. Ce processus est appelé "réfraction de la lumière".

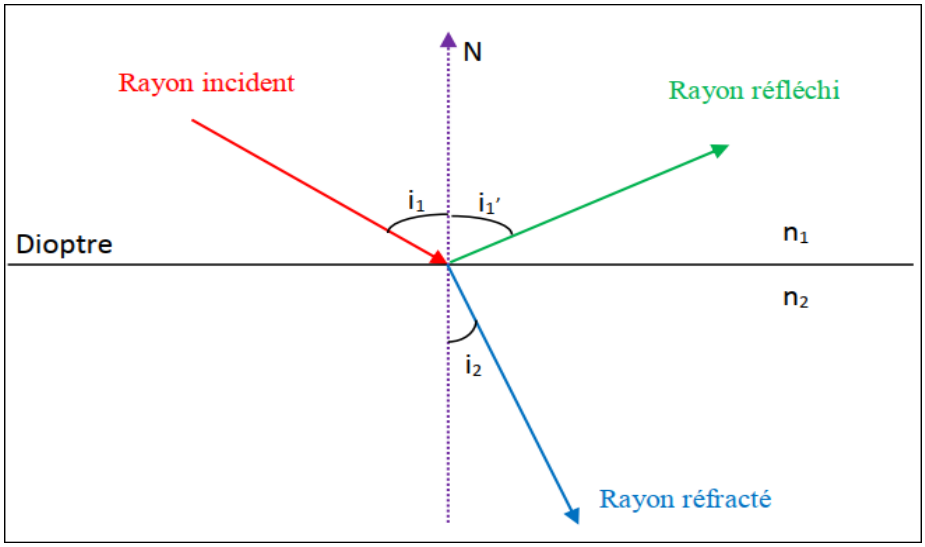


Figure 5 : La réfraction

- **1ère loi :** Le rayon incident, le rayon réfracté et la normale à la surface sont dans le même plan (plan d'incidence).
- **2ème loi de Snell-Descartes:** l'angle d'incidence $\mathbf{i_1}$ et l'angle de réfraction $\mathbf{i_2}$ sont liés par:

$$n_1 \sin \boldsymbol{i_1} = n_2 \sin \boldsymbol{i_2}$$

Exemple : sur l'effet de la réfraction lors du passage de la lumière entre l'eau et l'air comme montré par la figure ci-dessous.

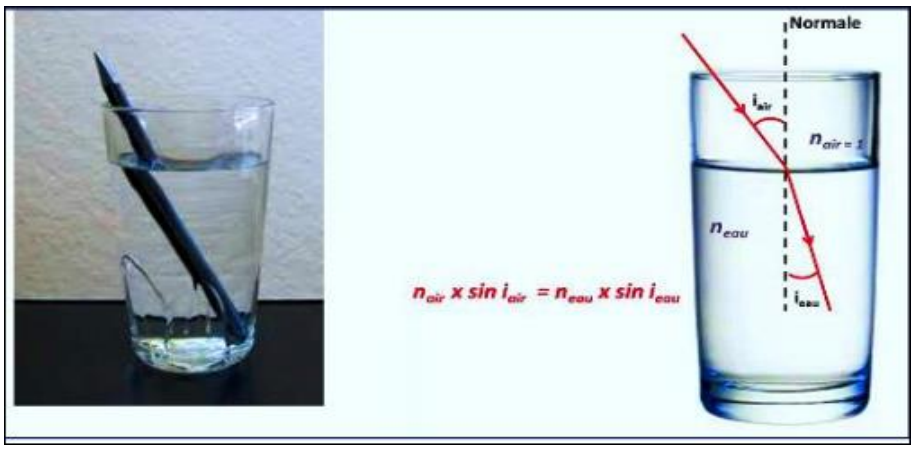


Figure 6 : Les effets de la réfraction entre de millions l'eau et l'air.

Exercice 1 :

Un rayon lumineux dans l'air tombe sur la surface d'un liquide ; il fait un angle $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{56}^{\circ}$ avec le plan horizontal. La déviation entre le rayon incident et le rayon réfracté est $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{13,5}^{\circ}$. Quel est l'indice n du liquide n_2?

Solution : on a

$$n_1 \sin \boldsymbol{i_1} = n_2 \sin \boldsymbol{i_2} \quad Avec \quad n_1 = 1$$

D'où

$$n_2 = \frac{\sin \boldsymbol{i_1}}{sin\, \boldsymbol{i_2}} = \frac{sin\, \boldsymbol{\alpha}}{sin\, \boldsymbol{\theta}} = \frac{sin\, \mathbf{56}}{sin\, \mathbf{13.5}} = 1.6$$

Exercice 2 :

Un dioptre plan sépare l'air d'indice n0 = 1 d'un milieu d'indice n. Pour quelle valeur de l'angle d'incidence i1 le rayon réfléchi est-il perpendiculaire au rayon réfracté ?

Solution

Le rayon IT devant être perpendiculaire au rayon IR : On a:

$$i2 + \pi\, 2 + r \;=\; \pi \qquad avec \qquad r \;=\; -i1$$

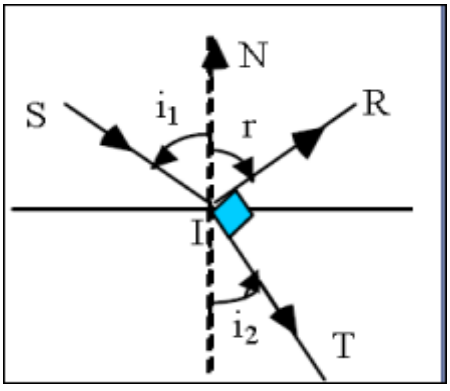
Soit:

$$i1 + i2 = \pi\, 2 \qquad et \qquad i2 \;=\; \pi\, 2 \;-\; i1$$

En appliquant la 2ème loi de Descartes on trouve:

$$sin\, i1 = n\, sin\, i2 = n\, sin\, (\pi 2 \;-\; i1) = n\, cos\, i1\; tgi1 = n$$

L'angle d'incidence doit avoir une valeur telle que sa tangente soit égale à **n** .



c. Réfraction limite - Réflexion totale

❖ réfraction limite, cas un milieu plus réfringent ($n_1 < n_2$)

Si un rayon se propage vers un milieu plus réfringent après avoir traversé une surface de séparation (Figure 7), les angles d'incidence $\boldsymbol{i_1}$ et de réfraction $\boldsymbol{i_2}$ sont liés par la relation :

$$n_1 \sin \boldsymbol{i_1} = n_2 \sin \boldsymbol{i_2} \quad \text{Avec} \quad n = \frac{n_2}{n_1} > 1$$

Il en résulte que $\sin i_2 < \sin i_1$, les angles $\boldsymbol{i_1}$ et $\boldsymbol{i_2}$ étant compris entre 0^0 et $\pi/2$, soit $\boldsymbol{i_2} < \boldsymbol{i_1}$. Le rayon réfracté se rapproche donc de la normale.

Un rayon incident normal (S_1I), pour lequel $\boldsymbol{i_1} = 0$, entre sans déviation ($\boldsymbol{i_2} = 0$). Lorsque $\boldsymbol{i_1}$ croît, $\boldsymbol{i_2}$ croît aussi tout en restant inférieur à $\boldsymbol{i_1}$, ($\boldsymbol{i_2} < \boldsymbol{i_1}$).

A l'incidence **rasante** ($\boldsymbol{i_1} = \pi/2$), l'angle de réfraction est maximal (angle de réfraction limite noté $\boldsymbol{i_{lim}}$) et vaut :

$$\sin \boldsymbol{i_{lim}} = \frac{n_1}{n_2}$$

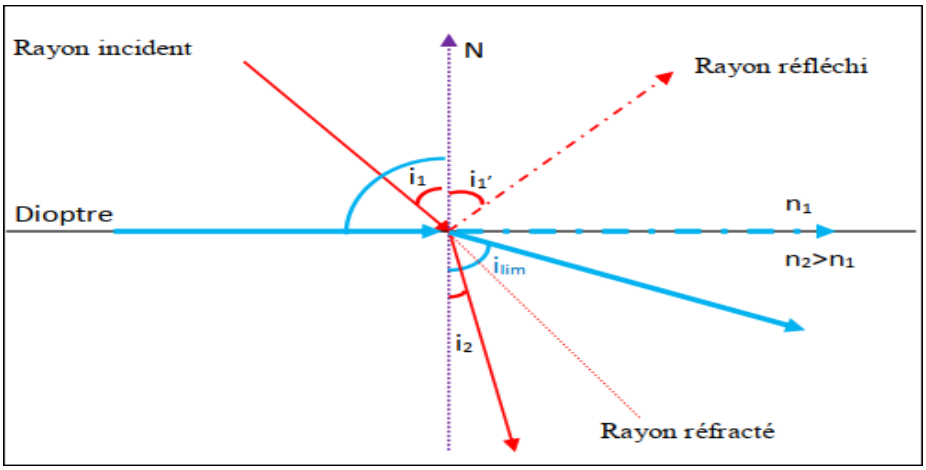


Figure 7 : Propagation vers un milieu plus réfringent.

❖ réfraction limite, cas un milieu moins réfringent ($n_1 > n_2$):

Si un rayon traverse une surface de séparation et se propage vers un milieu moins réfringent (Figure 7), les angles d'incidence i1 et de réfraction i2 sont toujours liés par la relation suivante :

$$n_1 \sin \boldsymbol{i_1} = n_2 \sin \boldsymbol{i_2} \quad \text{Avec} \quad n = \frac{n_2}{n_1} < 1$$

La troisième loi de Snell-Descartes implique alors que :

$$\boldsymbol{i_1 < i_2}$$

Le rayon réfracté s'écarte donc de la normale et l'angle de réfraction est maximal ($i_2 = \pi/2$) pour un angle d'incidence limite $\boldsymbol{i_r}$ tel que :

$$\sin \boldsymbol{i_r} = sin\, \boldsymbol{i_{lim}} = \frac{n_2}{n_1}$$

On est alors en situation de réflexion totale, il n'y a plus de rayon réfracté.

Alors si l'angle d'incidence est supérieur à $\boldsymbol{i_r}$, il n'y a plus de rayon réfracté (en effet, on a alors $sin\, \boldsymbol{i_2} > \boldsymbol{i_1}$, $\boldsymbol{i_2}$ n'est donc plus défini), le rayon incident est totalement réfléchi : on parle de **réflexion totale**. Le dioptre se comporte comme un miroir.

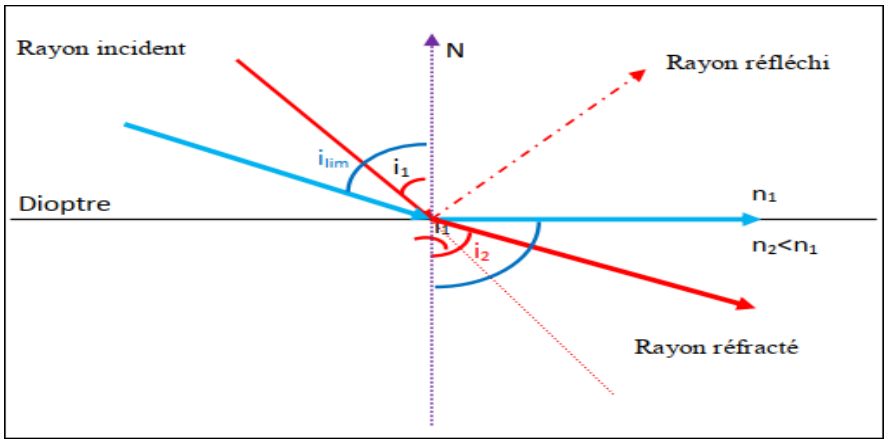


Figure 8 : Propagation vers un milieu moins réfringent.

7.7 Prisme

Définition

Le prisme est un milieu transparent, homogène isotrope et réfringent, contient deux faces planes non parallèles (dioptres plans) qui forment l'arête du prisme. Il est constitué de verre.

L'intersection des deux faces du prisme forme l'arête du prisme, caractérisée par un angle $\boldsymbol{A}$. La base du prisme est la troisième face, dont les bords sont généralement parallèles à l'arête et par son indice de réfraction $\boldsymbol{n}$.

Le prisme est utilisé soit pour analyser une lumière polychromatique grâce à ses propriétés dispersives, soit pour changer le sens ou la direction de propagation d'un rayon lumineux à la suite de réfractions ou de réflexions. (Figure 9).

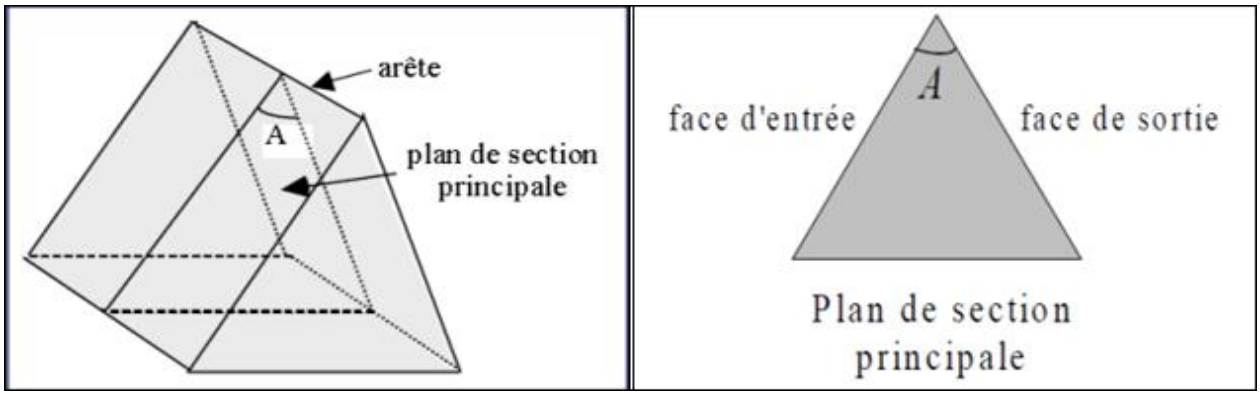


Figure 9 : Le prisme.

7.7.1 Marche d'un rayon lumineux traversant un prisme

Soit SI un rayon incident quelconque qui frappe en I la face d'entrée AB du prisme ; provenant d'un milieu moins réfringent que celui du prisme, ce rayon subit en I le phénomène de réfraction en respectant les deux lois de Descartes.

Si n est l'indice du prisme plongé dans l'aire d'indise pris à 1. En appliquant la relation de Snell-Descartes sur l'entrée et à la sortie du prisme en I et I', on obtient les relations suivantes voir (figure 9):

$$\begin{cases} sin\, \boldsymbol{i} = n\, sin\, \boldsymbol{r} \\ sin\, \boldsymbol{i}' = n\, sin\, \boldsymbol{r}' \end{cases}$$

L'angle de déviation $\boldsymbol{D}$ est par définition l'angle dont il faut faire tourner le rayon incident $\boldsymbol{SI}$ pour l'amener dans la direction du rayon émergent $\boldsymbol{I'R}$. Cette déviation est donc la somme de deux déviations successives qui ont lieu dans le même sens, l'une à l'entrée, l'autre à la sortie du prisme, soit :

$$\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{i}' - \boldsymbol{r}')$$

D'autre part, dans le quadrilatère $AIHI'$, on a:

$$A + \frac{\pi}{2} + H + \frac{\pi}{2} \gg H = \pi - A$$

Dans le triangle IHI', on a :

$$r + H + r' = \pi \gg H = \pi - (r + r')$$

Soit

$$r + r' = A$$

Dans le triangle IKI', on a :

$$(i - r) + k + (i' - r') = \pi$$

Comme, $k = \pi - D$ alors

$$(i + i') - (r + r') + \pi - D = \pi$$

Soit

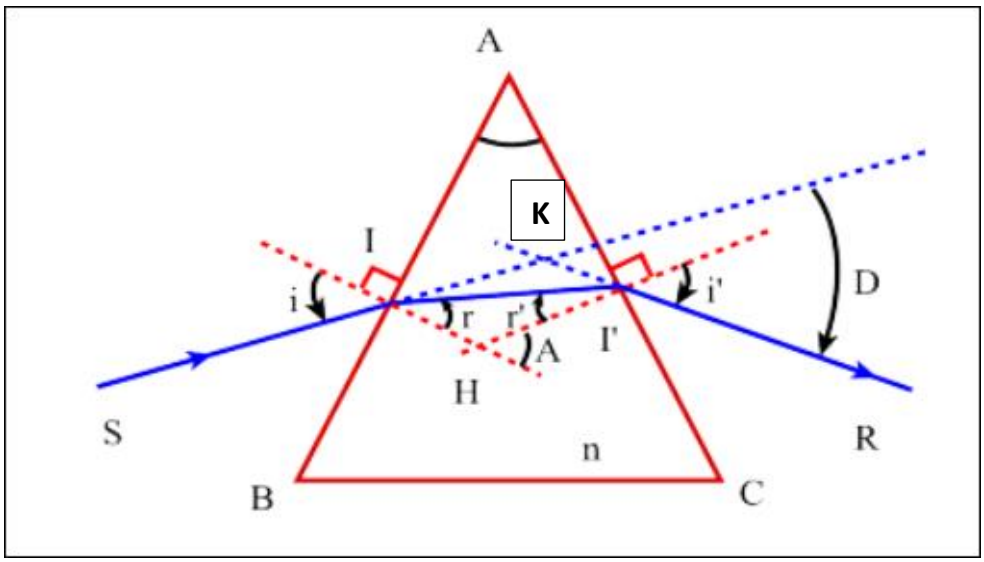
$$D = (i + i') - A$$

Les formules du prisme sont donc :

$$\begin{cases} \sin \boldsymbol{i} = n \sin \boldsymbol{r} \\ \sin \boldsymbol{i'} = n \sin \boldsymbol{r'} \\ \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r'} = \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{D} = (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{i'}) - \boldsymbol{A} \end{cases}$$

L'indice $\boldsymbol{n}$ de réfraction du prisme d'angle **A** peut être exprimé en fonction du $\boldsymbol{D}$ selon la formule suivante :

$$\boldsymbol{n} = \frac{\sin\left(\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{2}}\right)}{\sin\left(\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{2}}\right)}$$



Exercice 3

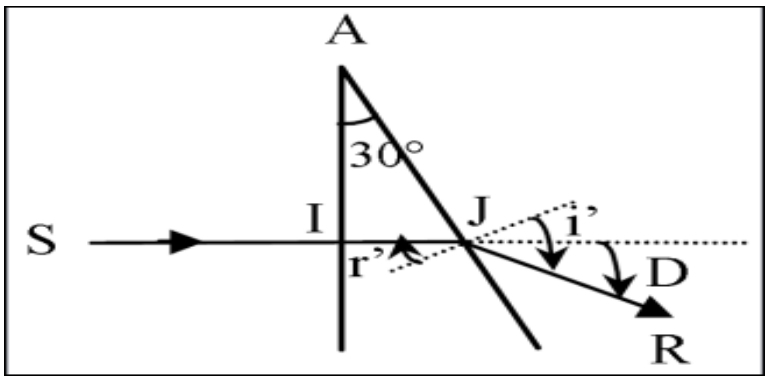
Un prisme d'angle $\boldsymbol{A}$ et d'indice $\boldsymbol{n} = 1{,}5$ est éclairé par un rayon incident perpendiculaire à la face d'entrée du prisme. Tracer la marche du rayon lumineux et calculer la déviation $\boldsymbol{D}$ dans le cas $A = 30°$.

Solution

- ✓ L'angle d'incidence $\boldsymbol{i}$ étant nul, l'angle $\boldsymbol{r}$ est également nul. On a donc : $\boldsymbol{r' = A}$

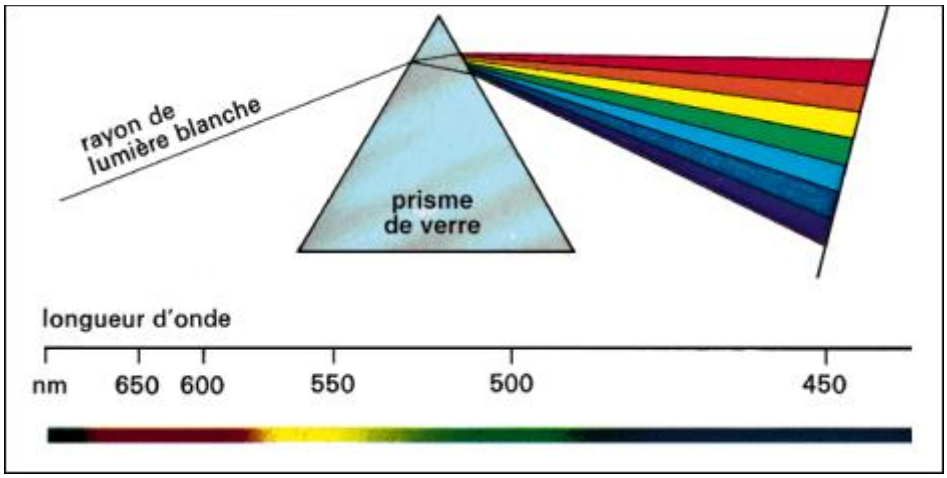
$$\boldsymbol{A = r' = 30°}$$

- ✓ L'angle $\boldsymbol{i'}$ est alors donné par : $sin\ \boldsymbol{i'} = n\ sin\ \boldsymbol{r'} = \ n\ sin\ \boldsymbol{A} = 0{,}75$
- ✓ Soit $\boldsymbol{i' = 48°.6}$
- ✓ La déviation est : $D = i' - r' = \boldsymbol{18°.6}$



7.7.1.1 Dispersion de la lumière dans un prisme

Nous avons vu au ce chapitre que l'indice de réfraction dépendait de la longueur d'onde (couleur) de la lumière visible. C'est ce que l'on appelle la dispersion. A cause de ce phénomène, un prisme disperse (décompose) une lumière blanche en ses différentes composantes. L'ensemble de ces composantes constituent le spectre de la lumière blanche (on répertorie généralement sept couleurs dominantes : rouge, orangé, jaune, vert, bleu, indigo, violet).



Chapitre VIII

Construction des images

8. Introduction

L'optique étudie les phénomènes lumineux, c'est à dire principalement les phénomènes perçus par l'œil. La cause de ces phénomènes est la lumière car pour être visible un objet doit faire parvenir de la lumière à l'œil.

L'optique géométrique est une branche qui s'appuie sur la notion de rayon lumineux. Cette approche simple permet notamment des constructions géométriques d'images, elle permet d'expliquer la formation des images produites ce lui.

8.1 Stigmatisme

Un système optique est de bonne qualité si 'il donne d'une source ponctuelle une image ponctuelle : c'est la condition de stigmatisme.

a- Stigmatisme rigoureux :

Un système optique est dit rigoureusement stigmatique pour un couple de points *A* et *A'*, si tout rayon lumineux passant par le point objet *A* émerge du système optique en passant par le point *A'*. *A'* est alors l'image de *A* par le système optique ; on dit encore que *A* et *A'* sont conjugués par rapport au système optique. Voire la figure 1.

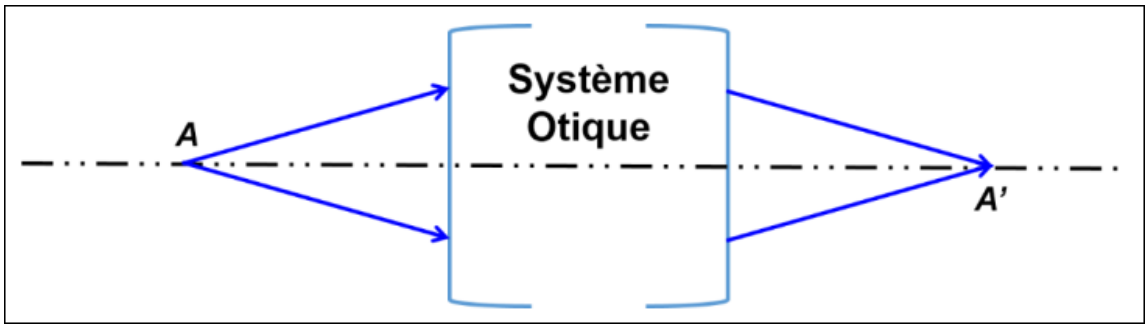


Figure 1 : les conditions de stigmatisme rigoureux.

b- Stigmatisme approché - Approximation de Gauss

Nous ne considérerons que des systèmes optiques centrés, c'est-à-dire des systèmes pour lesquels il existe un axe de symétrie de révolution appelé axe optique. On montre alors qu'un tel instrument d'optique donnera une image de

bonne qualité d'un objet si les deux conditions suivantes, dites conditions de Gauss, sont satisfaites :

- ✓ Les objets sont de faible étendue, situés au voisinage de l'axe optique.
- ✓ Les rayons lumineux incidents font un angle faible avec l'axe optique. On dit qu'il y a stigmatisme approché. Dans ces conditions, l'image d'un objet plan perpendiculaire à l'axe optique est plane et perpendiculaire à l'axe optique (aplanétisme).

8.2 Systèmes optiques simples à faces planes

8.2.1 Miroir plan

Un miroir est un objet possédant une surface réfléchissante (surface métallisée) les rayons lumineux incidents sur sa surface.

Le miroir plan est le seul système réalisant le stigmatisme rigoureux pour tout point de l'espace. Voire figure 2 ci-dessous.

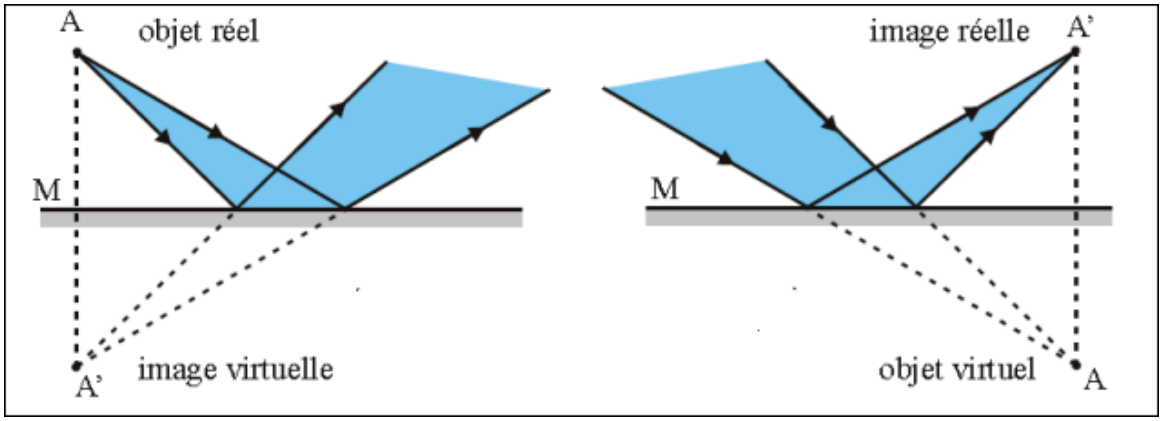


Figure 2 : Miroir plan

a. Relation de conjugaison :

L'image *A'* est symétrique de l'objet *A* par rapport au miroir (M). L'objet et l'image sont de natures différentes :

- Objet Réel-Image Virtuelle.
- Objet Virtuel-Image Réelle.

La taille de l'image égale la taille de l'objet.

L'angle d'incidence égale de réflexion ($i = r$).

b. Miroirs parallèles

M1 et M2 sont deux miroirs plans en parallèles avec ses surfaces réfléchissantes se font face à face comme illustré dans la figure 3 ci-dessous. On commence par le miroir M1, qui donne l'image d'un objet A, c'est A_1 symétrique de A par rapport à M1, et ainsi de suite, le miroir M2 donne de A_1 une image $A_{1/2}$dont l'image à travers M1 est $A_{12/1}$,…. etc.

Et d'autre part, le miroir M2 donne l'image de A est A_2 symétrique de A par rapport à M2; les images de A_2 données successivement par M1 , M2 sont $A_{2/1}$, $A_{21/2}$,… etc.

On peut en conclure que les deux miroirs donnent donc une double infinité d'images alignées sur x'Ax.

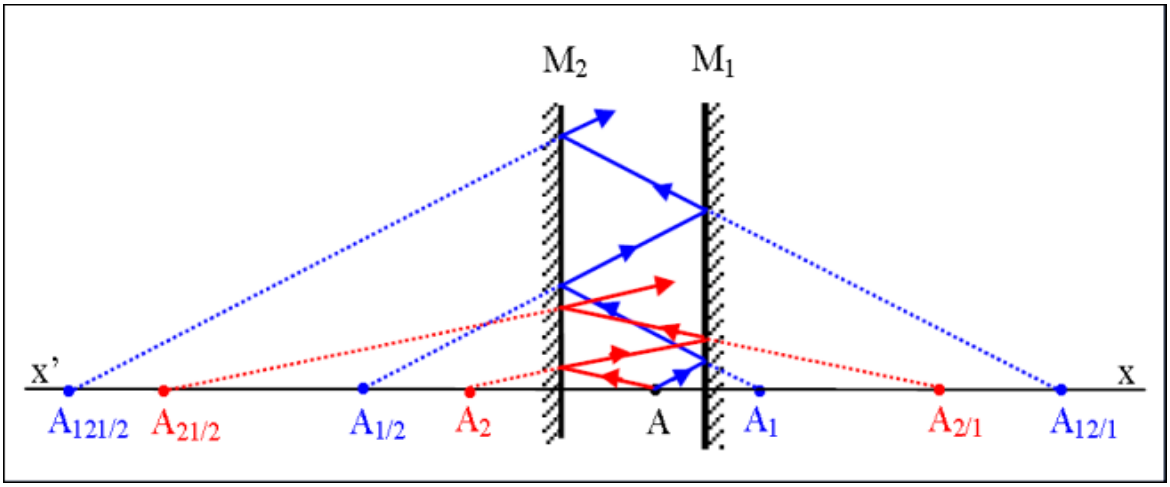


Figure 3

8.2.2 Dioptre plan

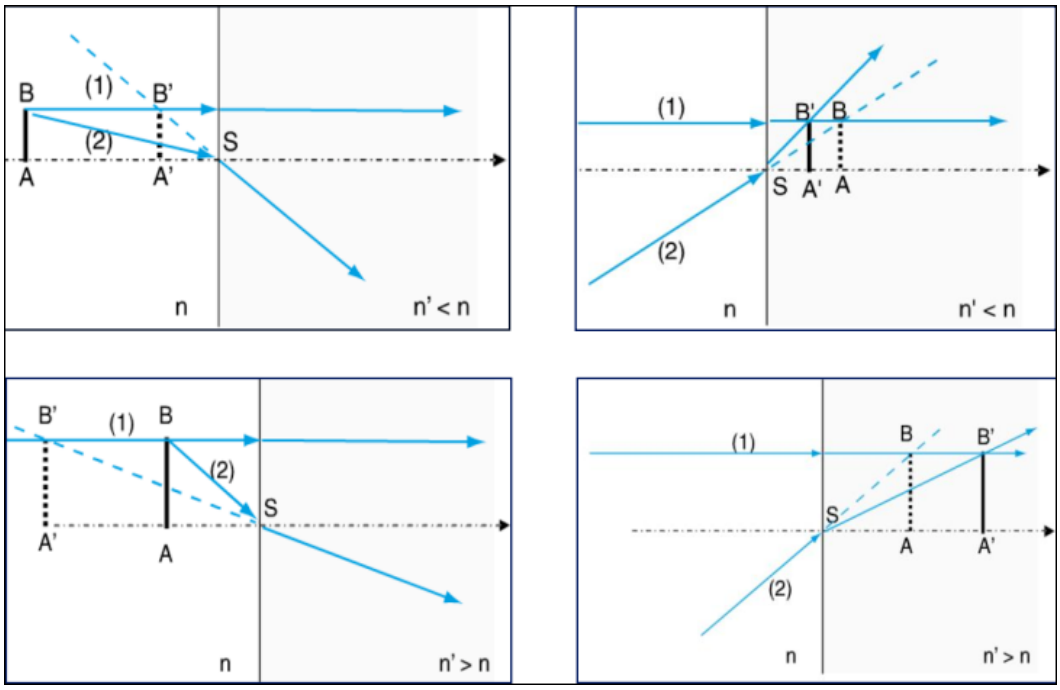
Un dioptre plan c'est une surface plane qui sépare deux milieux homogènes, transparents et isotropes avec leurs indices de réfraction différents. comme souligné précédemment dans le chapitre 7.

Exemples :

1. Entre le verre d'une vitre et l'air.

2. Entre l'eau de mer et l'air.

3. Deux schémas de dioptre plan pour les deux cas ($n' < n$ et $n' > n$) sont montrés par les figures 4 ci-dessous.



Figures 4 : Deux dioptres plans pour les deux cas ($n' < n$ et $n' > n$).

La relation de **conjugaison** du dioptre plan relie la position de A sur l'axe principal à celle de son image conjuguée A' s'écrit :

$$\frac{n'}{SA'} - \frac{n}{SA} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8.1)$$

La taille de l'image égale la taille de l'objet :

$$A'B' = AB \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8.2)$$

8.3 Systèmes optiques à faces sphériques

8.3.1 Miroir sphérique

Un miroir sphérique est une portion de surface sphérique de centre C rendue réfléchissante par un dépôt métallique et il est caractérisé par un sommet S, rayon $R = \overline{SC}$ et par l'axe principal du miroir CS.

On a deux types de miroir sphérique qui sont :

- **Miroir concave :** la surface intérieure est réfléchissante (figure a).
- **Miroir convexe :** la surface extérieure est réfléchissante (figure b).

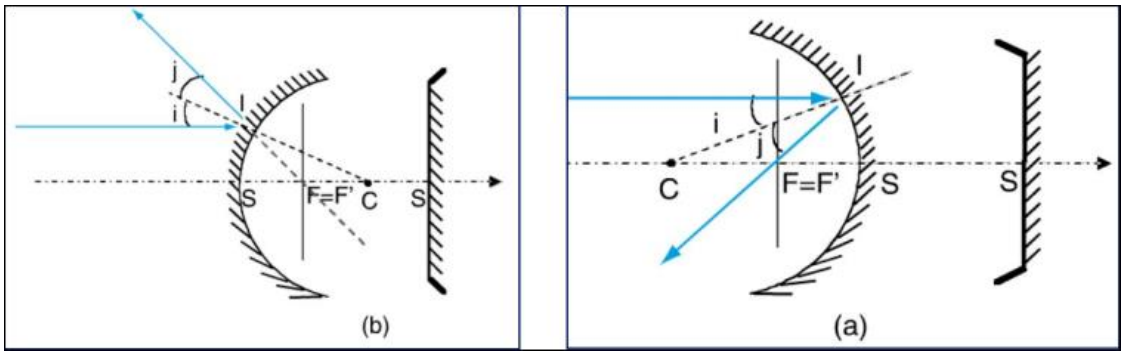


Figure 5, (a) et (b) : Types de miroir sphérique

Le foyer objet F et foyer image F' d'un miroir sphérique est situé au milieu de CS c-à d ($F = F'$).

$$SF = \frac{\overline{SC}}{2} = \frac{[SC]}{2} \text{ ..... (8.3)}$$

a. Relations de conjugaison

☞ **Relation entre les positions de l'objet et de l'image**

- **Origine au centre C**

La relation de conjugaison s'écrit pour le miroir sphérique :

$$\frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{CS} \text{ ..... (8.4)}$$

- **Origine au sommet S**

La relation est connue sous le nom de "**Formule de Descartes**" elle s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{CS} \text{ ..... (8.5)}$$

8.3.2 Dioptre sphérique

Un dioptre sphérique est une portion de surface sphérique réfringente qui sépare deux milieux transparents, homogènes d'indices n_1 et n_2 différents. Il est caractérisé par son axe principal (optique), son centre C, son rayon de courbure $r = \overline{SC}$ et son sommet S.

Il existe deux types de dioptre sphérique soit convexe soit concave.

- Dioptre sphérique convexe son rayon de courbure $r > 0$ et la lumière rencontre la surface bombée. Voire figure 6

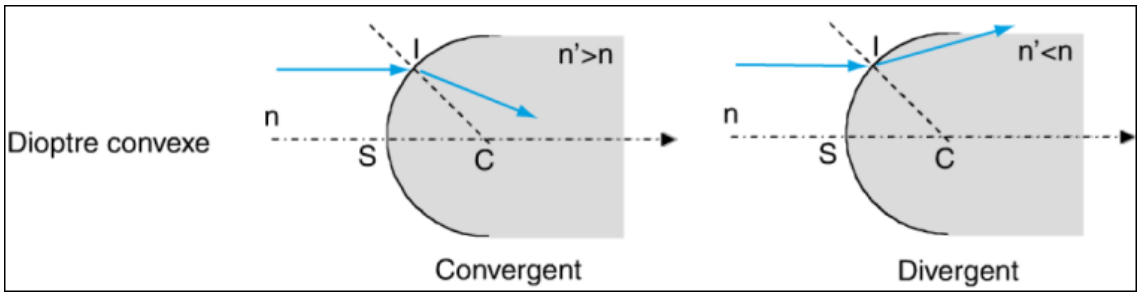


Figure **6** : Dioptre sphérique convexe.

- Dioptre sphérique concave, son rayon de courbure $r < 0$ et la lumière rencontre la surface en creux. Voire figure 7.

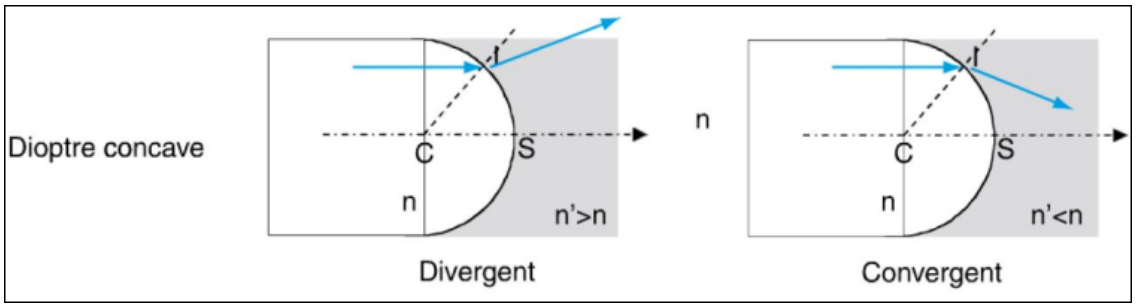


Figure 7 : Dioptre sphérique concave.

a. Relations de conjugaison

- **Origine au centre C**

Les relations de conjugaison s'écrivent :

$$\frac{n_1}{\overline{CA'}} - \frac{n_2}{\overline{CA}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}} \quad \text{..... (8.6)}$$

- **Origine au sommet *S***

$$\frac{n_1}{\overline{SA}} - \frac{n_2}{\overline{SA'}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}} \quad \text{..... (8.7)}$$

8.3.3 Grandissement

Si AB a pour image $A'B'$, le grandissement γ est le rapport algébrique de la taille de l'image à celle de l'objet :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{AB} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \quad \text{..... (8.8)}$$

Exercice :

On considère un miroir sphérique concave, de centre C, de sommet S de rayon de courbure $R = \overline{SC} = -30cm$ et un objet AB de hauteur 1 cm.

1. Donner la position du foyer F.

2. Déterminer l'image $\overline{A'B'}$ de $\overline{AB}$ en précisant sa position, sa nature, son sens et sa taille dans le cas suivant : $SA = -60\ cm$.

3. Préciser la nature de l'objet. Faire la construction de l'image.

Solution

1. Le foyer F du miroir se trouve au milieu du segment $[SC]$ et $SF = \frac{\overline{SC}}{2} = \frac{[SC]}{2} = -15$ cm.

2. La position de A' est obtenue à partir de la formule de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{\overline{SF}} \implies \overline{SA'} = \frac{\overline{SF}.\overline{SA}}{\overline{SA} - \overline{SF}}$$

Le grandissement est donné par :

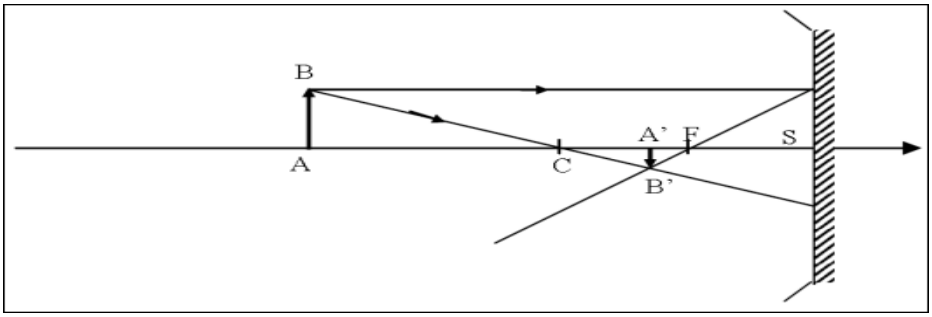
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{AB} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

$$\overline{SA} = -60cm \implies \overline{SA'} = -20\ cm$$

On trouve :

$$\gamma = \frac{1}{3}\ et\ \overline{A'B'} = 0.33\ cm$$

3. L'image et l'objet sont réels. L'image est renversée et trois fois plus petite que l'objet.



8.4 Lentilles minces

8.4.1 Définitions

- C’est une association de deux dioptres sphériques dont les sommets sont pratiquement confondus en un sommet S. L’axe optique de la lentille est l’axe passant par les centres des deux dioptres sphériques. On note $\boldsymbol{n}$ l’indice du milieu constituant la lentille ($\boldsymbol{n} > 1$).
- Une lentille est un milieu transparent homogène d’indice $\boldsymbol{n}$ limité par deux dioptres dont l'un au moins est sphérique, l'autre pouvant être, à la limite, plan. C’est un système centré dont l’axe est la droite qui joint les deux centres des dioptres respectifs.
  L’épaisseur d’une lentille est la distance S_1S_2 où S_1 et S_2 sont les sommets des deux dioptres. Une lentille est dite mince ou épaisse selon que son épaisseur est ou n’est pas petite devant les rayons de courbure de ses deux faces et devant leur différence si ceux-ci sont de même sens.

Il existe six formes possibles de lentilles voire figure ci-dessous:

- lentilles biconvexes,
- lentilles biconcaves,
- lentilles plan-convexe,
- lentilles plan-concaves,
- ménisques à bords minces,
- ménisques à bords épais.

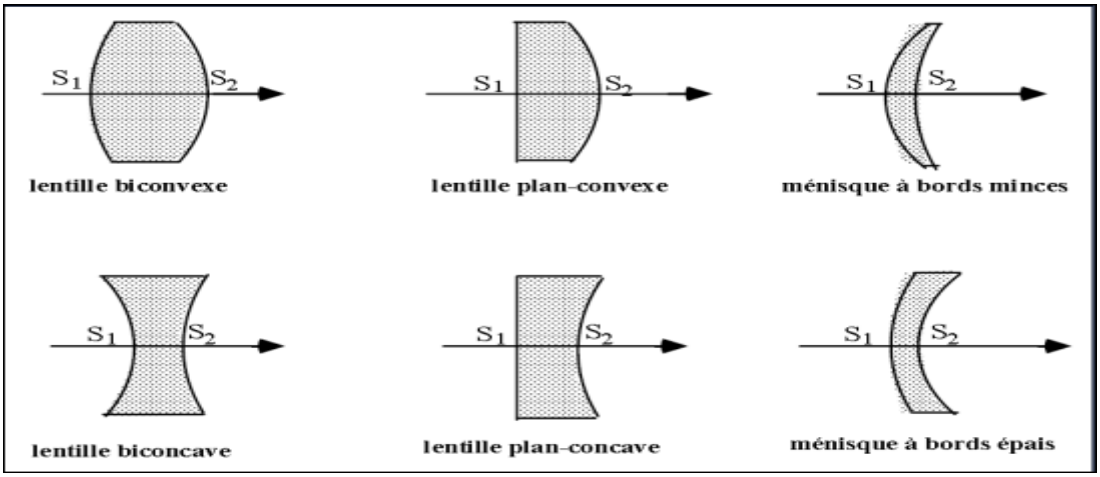


Figure 8 : Les formes possibles de lentilles.

Les trois premières sont à bords minces, c'est-à-dire que le pourtour de la lentille est plus mince que son centre, et les trois dernières sont à bords épais.

Une lentille est caractérisée par :

- les sommets S_1 et S_2 des dioptres dans l'ordre où la lumière les rencontre,
- l'axe optique (Δ) orienté dans le sens de propagation de la lumière,
- les centres C_1 et C_2 des dioptres qui sont portés par l'axe optique,
- les rayons de courbure $R_1 = \overline{S_1C_1}$ et $R_2 = \overline{S_2C_2}$ des dioptres dont l'un est infini si l'un des dioptres est plan,
- l'indice $\boldsymbol{n}$ de la lentille et ceux des milieux extrêmes.

Nous différencierons les lentilles minces à bords minces des lentilles minces à bords épais par des flèches de sens opposés placées aux extrémités de cette droite comme la montre la figure ci-après.

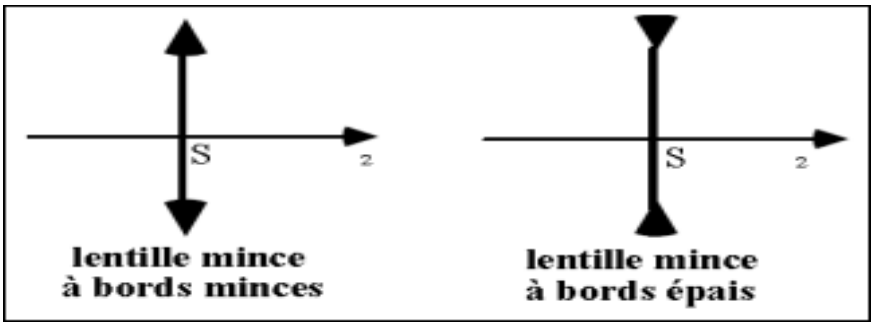


Figure 8 : les lentilles minces.

8.4.2 Marche d'un rayon lumineux

Un rayon incident A_1I_1 sur le premier dioptre donne un rayon réfracté $I_1I_2A"$ dans le milieu d'indice n. Ce rayon donne, après réfraction sur le deuxième dioptre, un rayon I_2A_2 dans l'air.

$A"$ Est l'image intermédiaire de A_1 et A_2 est l'image définitive de A_1 donnée par la lentille comme la montre la figure ci-contre.

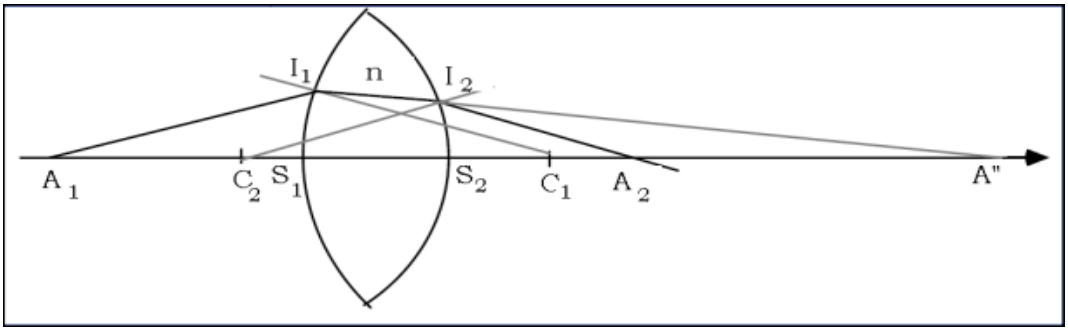


Figure 8 : Trajectoire d'un rayon lumineux dans la lentille.

Dans le cas des lentilles minces pour les quelles S_1, S_2 et S sont Confondus, la relation de conjugaison avec origine au centre optique S s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{SA_2}} - \frac{1}{\overline{SA_1}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = V \text{ …….. (8.9)}$$

Avec $SA_2 \equiv S_2A'$

❖ **Démonstration la formule (8.9):**

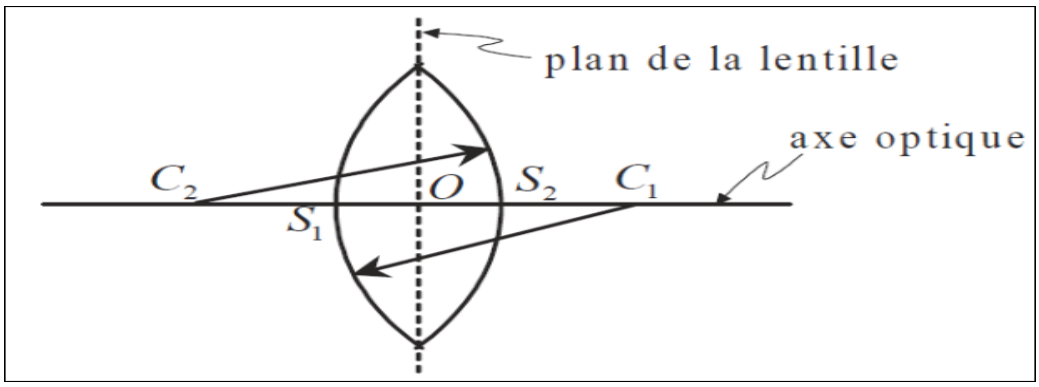
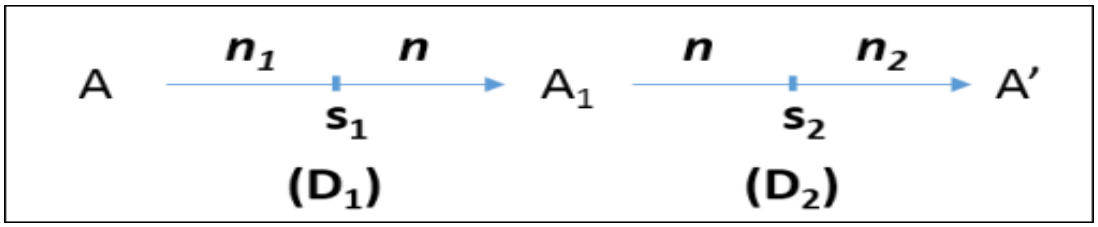


Figure 9 : Lentilles minces

☞ **Formule de Conjugaison :**



- **Dioptre (D1) :**

$$\frac{n}{\overline{S_1A_1}} - \frac{n_1}{\overline{S_1A}} = \frac{n-n_1}{\overline{S_1C_1}} = V_1 \text{ ……. (8.10)}$$

$$\gamma_1 = \frac{n_1}{n}\frac{\overline{S_1A_1}}{\overline{S_1A}} \text{ ……. (8.11)}$$

- **Dioptre (D2) :**

$$\frac{n_2}{\overline{S_2A'}} - \frac{n}{\overline{S_2A_1}} = \frac{n_2-n}{\overline{S_2C_2}} = V_2 \text{ ……. (8.12)}$$

$$\gamma_2 = \frac{n}{n_2}\frac{\overline{S_2A'}}{\overline{S_2A_1}} \text{ ……. (8.13)}$$

❖ **Lentille épaisse :**

En sommant les équations (8.10) et (8.12), on trouve :

$$\left(\frac{n}{\overline{S_1A_1}}-\frac{n_1}{\overline{S_1A}}\right)+\left(\frac{n_2}{\overline{S_2A'}}-\frac{n}{\overline{S_2A_1}}\right)=\left(\frac{n-n_1}{\overline{S_1C_1}}\right)+\left(\frac{n_2-n}{\overline{S_2C_2}}\right)=V_1+V_2 \quad \ldots\ldots \text{(8.14)}$$

$$\gamma=\gamma_1\times\gamma_2=\frac{n_1}{n}\frac{\overline{S_1A_1}}{\overline{S_1A}}\times\frac{n}{n_2}\frac{\overline{S_2A'}}{\overline{S_2A_1}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(8.15)}$$

❖ **Lentille mince :** $S_1\equiv S_2\equiv S$

$$\left(\frac{n_2}{\overline{S_2A'}}-\frac{n_1}{\overline{S_1A}}\right)=\left(\frac{n-n_1}{\overline{S_1C_1}}\right)+\left(\frac{n_2-n}{\overline{S_2C_2}}\right)=V_1+V_2$$

On obtient

$$\left(\frac{n_2}{\overline{SA'}}-\frac{n_1}{\overline{SA}}\right)=\left(\frac{n-n_1}{\overline{SC_1}}\right)+\left(\frac{n_2-n}{\overline{SC_2}}\right)=V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(8.16)}$$

$$\gamma=\frac{n_1}{n_2}\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(8.17)}$$

Avec : V est la vergence ou la puissance du dioptre (unité : Dioptrie = m^{-1}).

❖ **Lentille mince d'indice *n* :** Dans deux milieux n_1 et n_2

✍ **Cas où n1 = n2 (même milieu) :**

$$\left(\frac{n_1}{\overline{SA'}}-\frac{n_1}{\overline{SA}}\right)=\left(\frac{n-n_1}{\overline{SC_1}}\right)+\left(\frac{n_1-n}{\overline{SC_2}}\right)=V$$

$$=(n-n_1)\left[\frac{1}{\overline{SC_1}}-\frac{1}{\overline{SC_2}}\right]$$

$$\frac{n_1}{\overline{SA'}}-\frac{n_1}{\overline{SA}}=(n-n_1)\left[\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \text{(8.18)}$$

$$\gamma=\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(8.19)}$$

❖ **Lentille mince d'indice n dans l'air :** $(n_1=n_2)$

$$\frac{1}{\overline{SA'}}-\frac{1}{\overline{SA}}=(n-1)\left[\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right]=V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(8.20)}$$

$$\gamma=\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(8.21)}$$

Remarque :

- Si V > 0 : Dioptre convergent
- Si V < 0 : Dioptre divergent

❖ **Foyer Image F'**

$$\overline{SF'} = \frac{1}{V}$$

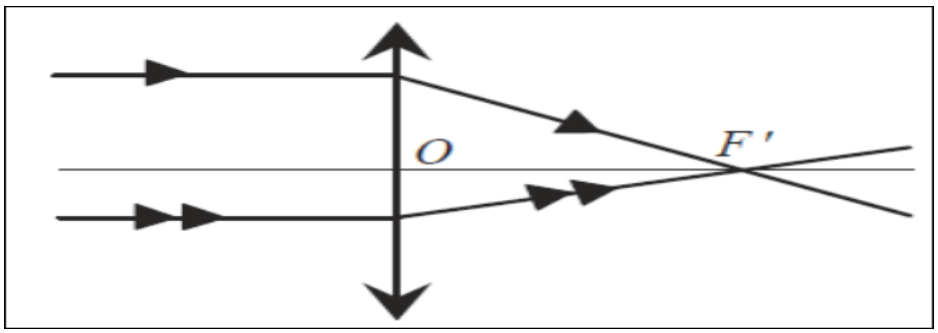


Figure 10 :

❖ **Foyer Image F**

$$\overline{SF} = -\frac{1}{V}$$

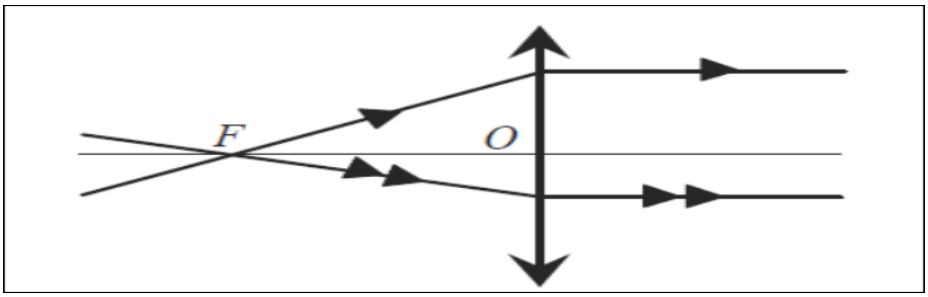


Figure 11 :

F et F' sont symétriques par rapport à S.

Pour une lentille convergente, F et F' sont réels, alors que pour une lentille divergente, ils sont virtuels.

8.4.3 Les différents types de lentilles :

8.4.3.1 Lentilles convergentes

Les lentilles convergentes transforment un faisceau de rayons lumineux parallèles à l'axe optique en un faisceau convergent. Voire le figure 10, qui est vérifié :

$$V > 0, \ \overline{SF'} > 0 \quad et \quad \overline{SF} < 0$$

8.4.3.2 Lentilles divergentes

Les lentilles divergentes transforment un faisceau de rayons lumineux parallèles à l'axe optique en un faisceau divergent. Comme dans le figure 11et le figure 12

Tout rayon lumineux passant par le centre optique d'une lentille mince ne subit aucune déviation en la traversant. Qui est vérifié :

$$V < 0, \ \overline{SF'} < 0 \quad et \quad \overline{SF} > 0$$

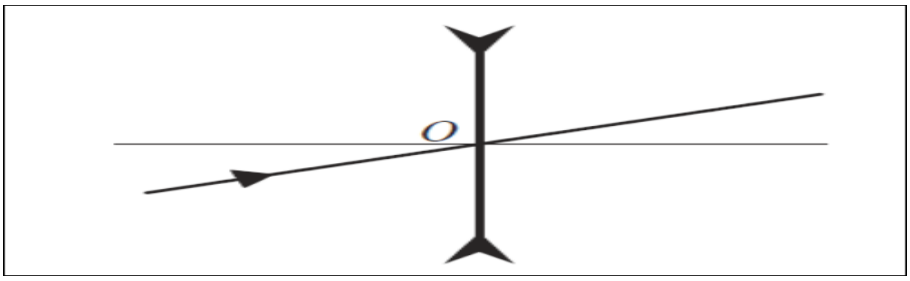


Figure 12 : Lentilles divergentes.

Exercice :

❖ Un objet réel est placé à 10 cm d'une lentille convergente (1) de 5 cm de distance focale. Une deuxième lentille convergente (2) de distance focale 15 cm est disposée à 34 cm de la première.

1/ Déterminer la position de l'image donnée par ce système ainsi que l'agrandissement total.

❖ On rapproche cette fois cette lentille (2) de la lentille (1) et on suppose les centres confondus.

a. Déterminer la distance focale.

b. Les caractéristiques de l'image obtenue pour le même objet.

Solution

1/ $V_1 = 20$ Dioptrie, $S_1A_1 = 0.1m, \quad \gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1.67, \gamma = \gamma_1 \times \gamma_2 = +1.6$

a. $S_2F_2' = 6.67$ Dioptrie, $S_2A_1 = -0.24\ m$, $S_2A_2 = +0.4\ m$, $S_1A_2 = -0.74\ m$.
b. Image réelle, droite et agrandie.

Références de bibliographie

[1] H. Djelouah, Vibrations et ondes-cours et exercices corrigés, (année 2008-2009).

[2] T. Becherrawy, Vibrations et ondes, Tomes 1-4, Ed. Hermes-Lavoisier, (2010).

[3] C. George. King, Vibrations and waves (Manchester Physics Series).1st Edition. Publisher Wiley Publication date July 13, 2009.

[4] Georges C, King, Vibrations and waves (A john Wiley and Sons, Ltd. Publication, 2008).

[5] Cours Ondes et Vibrations par Jean-Marc Richard, Laboratoire de Physique Subatomique et Cosmologie, année 2008–09.

[6] Cours Physique 3 (Vibrations) par Dr. N. Aklouche, année 2011-2012.

[7] J. Bruneaux, Vibrations, ondes, Ellipses, 2008.

[8] J. Brac, Propagation d'ondes acoustiques et élastiques, Hermès science publ. Lavoisier, 2003.

[9] Pantazis Mouroulis, John Macdonald, Geometrical optics and optical design, New York oxford, Oxford University press, 1997.

[10] Agnès Maurel, Optique géométrique, 8, rue Férou 75278 Paris cedex 06 www.editionsbelin.com.2002.

[11] J-P. Parisot, P. Segonds, S. Le Boiteux. Cours Physique Optique. Sciences Sup, Dunod 2003.

[12] N. AWANOU. Cours de Physique. Optique. Fascicule. Cotonou 1996.

[13] J.L. QUEYREL et J. MESPLEDE –Les Nouveaux Précis de Physique. Optique-Cours et exercices résolus. Editions Bréal, Paris 1999.