République algérienne démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Hassiba Benbouali de Chlef

Faculté des Sciences Exactes & Informatique

Département de Tronc Commun

Polycopié de Cours

Physique1
Mécanique des points

Présenté par :

Dr. ZEGGAI Oussama

(Maitre conférences classe -A-)

Ce cours est destiné aux étudiants de première année licence SM et MI

Algérie

2025

AVANT-PROPOS

Conforme aux programmes LMD (Licence-Master-Doctorat) définis par arrêté ministériel du ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique, ce fascicule s'adresse aux étudiants de première année Licence dans le domaine des Sciences de la Matière (SM) et des Mathématiques et Informatique (MI). Il est conçu pour atténuer au mieux les difficultés inhérentes au discours scientifique tout en conservant la rigueur nécessaire. Cet ouvrage présente l'ensemble des notions et des bases abordées en mécanique du point durant la première année de Licence SM et MI. De plus, des exercices corrigés sont proposés en fin de chaque chapitre afin de permettre aux étudiants de tester leurs connaissances et de se préparer efficacement aux partiels et aux examens.

Le premier chapitre est consacré à des rappels mathématiques essentiels, incluant les équations aux dimensions, le calcul des erreurs et les notions vectorielles. Ces concepts fondamentaux permettent d'établir les bases nécessaires à l'expression des lois physiques. L'objectif est d'introduire des définitions claires et des notations appropriées pour une meilleure compréhension.

Le deuxième chapitre est dédié à la cinématique du point matériel. Il vise à décrire les mouvements des objets sans s'intéresser aux causes qui les produisent. Ce chapitre se focalise exclusivement sur les mouvements des points matériels.

Le troisième chapitre traite de la dynamique du point matériel dans le cadre de la mécanique newtonienne, en s'appuyant sur les trois lois de Newton : la loi d'inertie, la loi fondamentale de la dynamique et la loi des actions réciproques. Il aborde également les lois de forces régissant certaines interactions, ainsi que la notion de moment cinétique d'une particule par rapport à un point de référence.

Le quatrième chapitre introduit une troisième approche d'analyse : celle du travail et de l'énergie. Cette méthode permet d'éliminer le calcul direct de l'accélération en établissant un lien entre la force, la masse, la vitesse et le déplacement. Ce chapitre traite du travail d'une force, de l'énergie cinétique d'un point matériel, ainsi que des notions d'énergie potentielle et totale. Il aborde également les concepts de champ de forces, ainsi que la distinction entre forces conservatives et non conservatives.

Le cours présenté dans ce polycopié est le fruit de plusieurs années d'enseignement dispensé aux étudiants de première année Licence Sciences de la Matière (SM) et des Mathématiques et Informatique (MI) à l'Université Hassiba Ben Bouali de Chlef. Il constitue un support essentiel pour le module de Physique 1 : "Mécanique du Point Matériel".

Nous souhaitons à tous les étudiants un excellent parcours universitaire et une pleine réussite dans leurs études.

Table de matière

Chapitre I : Rappel mathématique

1. Analyse dimensionnelle

1.1. Grandeur physique

L'observation des phénomènes physiques est incomplète si elle n'aboutit pas à des informations quantitatives c'est-à-dire la mesure des grandeurs physiques. Pour étudier les phénomènes physiques, il est nécessaire de bien définir certaines grandeurs utiles à leur compréhension. Une grandeur physique mesurée ou calculée est liée à un aspect ou un phénomène particulier de la physique, elle peut être scalaire ou vectorielle.

1.1.1. Grandeur scalaire

Une grandeur scalaire est une quantité physique qui n'est spécifiée que par sa grandeur. On peut l'exprimer avec un nombre, suivi ou non d'une unité (75 Kg, 40 Watt, 30 seconde ...)

1.1.2. Grandeur vectorielle

Grandeur physique dont la définition exige l'énoncé d'un nombre, d'une direction et d'un sens sur une direction comme la vitesse $\vec{v}$, accélération $\vec{a}$, la force $\vec{F}$….

1.2. Unités de base du système international :

Toutes les grandeurs physiques ont une unité. Sans unité, une grandeur n'a aucun sens. L'ensemble de toutes les unités forme un système cohérent défini à partir de quelques grandeurs fondamentales, et toutes les autres grandeurs ont des unités dérivées. Nous utilisons le système international (SI), qui est basé sur les grandeurs suivantes : le mètre m (unité de longueur), le kilogramme kg (unité de masse), la seconde s (unité de temps) et l'ampère A (unité de courant électrique), on l'appelle également le système MKSA.

Dans des domaines particuliers de la physique, il est commun de définir des unités supplémentaires, par exemple, la température « absolue » s'exprime en kelvins (K) en thermodynamique bien qu'elle résulte de l'agitation thermique des molécules et puisse de définir à partir des unités de la mécanique.

En pratique, il n'est pas rare de faire ses mesures avec d'autres unités plus pratiques ; le système CGS. (Centimètre, Gramme, Seconde) correspond à la pratique courante.

Le système international d'unités est composé de sept unités de base correspondant aux sept grandeurs de base.

Le problème que posent les unités est celui de l'universalité et de la cohérence, d'où l'intérêt du choix d'un système international qui définit les unités étalonnées de façon identique en tout point du globe.

- Le système CGS est fondé sur le Centimètre, le Gramme et la Seconde.

- Le système MKSA est basé sur le Mètre, le Kilogramme, la Seconde et l'Ampère. C'est le système précurseur du système international d'unités (SI).
- Les unités légales du système international (SI) : Le SI est fondé sur le MKSA à qui on a ajouté le kelvin (K), la mole (mol), la candela (cd), le radian (rd) et le stéradian (sr).

1.3.Equations aux Dimensions

1.3.1. Définition

L'équation aux dimensions et une relation entre la quantité étudiée et les grandeurs fondamentales qui représentent l'unité de cette quantité. La dimension d'une autre grandeur G Est notée [G]

Si une quantité physique G est mesurée en $kg^{\alpha}m^{\beta}s^{\gamma}$, sa dimension est :

$$[G] = M^{\alpha}\, L^{\beta} T^{\gamma}$$

Où M : Masse, L : Longueur et T : Temps

On obtient ainsi une équation dite équation aux dimensions.

L'équation aux dimensions permet :

- De déterminer l'unité composée d'une grandeur en fonction des grandeurs fondamentales.
- De tester si une formule est homogène.
- Prédire une formule correspondante a une grandeur physique.
- De faire des conversions d'unités.

Tableau 1.1 Des unités fondamentales du SI

Grandeur	*Symbole*	*Unité*	*Symbole*
Masse	M	Kilogramme	kg
Longueur	L	Mètre	m
Temps	T	Seconde	s
Intensité du courant électrique	I	Ampère	A
Température thermodynamique	θ	Kelvin	K
Intensité lumineuse	J	Candela	cd
Quantité de matière	µ	Mole	mol.

1.2 Tableau des unités supplémentaires

Grandeur	*Symbole*	*Unité*	*Symbole*
Angle plan	α	Radian	rd
Angle solide	Ω	Stéradian	sr

1.3.2. Utilisation des équations aux dimensions ''analyse dimensionnelle'' pour vérifier l'homogénéité d'une formule

Soit les deux formules :

- $T = \sqrt{\frac{l}{g}}$ Ou $T = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Ces deux expressions donnent la période d'oscillation d'un pendule simple de longueur *l* et *g* est l'accélération de la pesanteur. Le premier membre a la dimension d'un temps ; il faut que le deuxième membre ait la même dimension, sinon la formule est fausse.

1er cas : $\left[\frac{l}{g}\right]^{1/2} = [g]^{-1/2}[l]^{1/2} = (LT^{-2})^{-1/2}.L^{1/2} = T$ homogène (pas juste)

2iéme cas : $\left[\frac{g}{l}\right]^{1/2} = [g]^{1/2}[l]^{-1/2} = (LT^{-2})^{1/2}.L^{-1/2} = T^{-1}$ pas homogène (pas juste)

1.3.3. Règles sur les équations aux dimensions

- Tous les termes d'une somme ou d'une différence ont la même dimension. Dans le cas contraire, l'équation est forcément fausse. On ne peut additionner que des termes ayant la même dimension : $[A + B] = [A] = [B]$
- La dimension du produit de deux grandeurs est le produit des dimensions de chacune des grandeurs : $[A.B] = [A].[B]$
- La dimension de A^n est égale à $[A]^n$ où n est un nombre rationnel sans dimension,
- Les nombres et les angles sont des grandeurs sans dimension. En particulier, un angle, exprimé en radians, est le rapport de la longueur de l'arc intercepté au rayon du cercle.
- Le rapport de deux grandeurs de même dimension est sans dimension.
- Les fonctions mathématiques (cos, sin, tan, exp, ln ...) et leurs arguments sont sans dimension. Par exemple cos(x) et x sont sans dimensions ; [cos(x)] =1, [2π]=1…

- L'équation aux dimensions de toute grandeur X peut se mettre sous la forme :

.

$$[X] \ = \ L^a \ M^b T^c I^d J^e q^f N^g$$

- Si $[X] \ = 1$ est dite sans dimension ou de dimension 1.
- $\left[\frac{dx}{dt}\right] = \left[\frac{x}{t}\right] = L\,T^{-1}$

- **Exercice 1**

En utilisant les dimensions des grandeurs de base, compléter le tableau suivant :

Grandeur physique	Symbole	Formule utilisée	Dimension	Unité (SI)
Vitesse linéaire	v			
Vitesse angulaire	ω			
Accélération	a			
Force	F			
Pression	P			
Travail	W			
Energie	E			
Charge électrique	q			
Champ électrique	E			
Différence de potentiel	U			
Résistance électrique	R			
Puissance électrique	P			

- **Exercice 2**

L'équation d'état d'un gaz parfait est (p.V=n.R.T), où : p est la pression du gaz, V le volume qu'il occupe, n le nombre de moles de gaz et T sa température.

1- Quelle est la dimension de la constante universelle des gaz parfait R ? Quelle est son unité dans le système international ?
2- L'équation d'état d'une molécule de gaz réel est donnée par :

$$p = \left(\frac{R.T}{V-b}\right).exp\left(\frac{-a}{R.T.V}\right)$$

Dans cette expression a et b sont des coefficients tels que a=3,5 .10^{-3} SI et b=2,5 .10^{-5} SI

- Donner les équations aux dimensions de a et b et déduire leurs unités dans le système international ?

Solution

- **Exercice 1**

En utilisant les dimensions des grandeurs de base, compléter le tableau suivant :

Grandeur physique	Symbole	Formule utilisée	Dimension	Unité (SI)
Vitesse linéaire	v	$v = x/t$	$[v] = L\,T^{-1}$	$m\,s^{-1}$
Vitesse angulaire	ω	$\omega = v/r$	$[\omega] = T^{-1}$	$rd.s^{-1}$
Accélération	a	$a = v/t$	$[a] = L\,T^{-2}$	$m\,s^{-2}$
Force	F	$F = m.a$	$[F] = ML\,T^{-2}$	$Kg.m\,s^{-2}(Newton\ N)$
Pression	P	$P = F/s$	$[F] = ML^{-1}\,T^{-2}$	$Kg.m^{-1}\,s^{-2}(Pscal\ Pa)$
Travail	W	$W = F.l$	$[W] = ML^2\,T^{-2}$	$Kg.m^2\,s^{-2}(Joule\ J)$
Energie	E	$E = 1/2\,m.v^2$	$[E] = ML^2\,T^{-2}$	$Kg.m^2\,s^{-2}(Joule\ J)$
Charge électrique	q	$dq = i.dt$	$[q] = IT$	$Coulomb$
Champ électrique	E	$E = F/q$	$[E] = ML\,T^{-3}I^{-1}$	$Volt/m$
Différence de potentiel	U	$U = r.F$	$[U] = ML^2\,T^{-3}I^{-1}$	$Volt$
Résistance Electrique	R	$R = U/i$	$[R] = ML^2\,T^{-3}I^{-2}$	Ohm
Puissance électrique	P	$P = R.i^2$	$[P] = ML^2\,T^{-3}$	$Watt$

- **Exercice 2**

a. $[R] = ?$

$p.V = n.R.T \quad \Rightarrow \quad R = \frac{p.V}{n.T}$ (1)

L'équation (1) nous permet d'écrire $[R] = \frac{[p].[V]}{[n].[T]}$ (2)

Sachant que :

$$\begin{cases} p: perssion \Rightarrow [p] = ML^{-1}\,T^{-2} \\ V: volume \;\Rightarrow [V] = L^3 \\ n: nombre\ de\ mole \;\Rightarrow [n] = N \\ T: température \Rightarrow \; [T] = \theta \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow [R] = \frac{(ML^{-1}\,T^{-2}).(L^3)}{(N).(\theta)} = ML^2\,T^{-2}N^{-1}\theta^{-1} \Rightarrow [R] = ML^2\,T^{-2}N^{-1}\theta^{-1}$

- L'unité de (R) dans le SI est donc : $Kg.m^2\,s^{-2}\,mol^{-1}K^{-1}$ ou $J.K^{-1}\,mol^{-1}$

b. $[a] = ?\quad et \quad [b] = ?$

$p = \left(\frac{R.T}{V-b}\right).exp\left(\frac{-a}{R.T.V}\right)$ (3)

- On sait que deux grandeurs physiques ne s'additionnent que si elles ont la même dimension

$$[V] = [b] = L^3 \Rightarrow [b] = L^3$$

- On sait aussi que l'argument $f = \frac{-a}{R.T.V}$ de la fonction exponentielle est sans dimension :

$\Rightarrow [f] = \left[\frac{-a}{R.T.V}\right] = 1 \Rightarrow [-a] = [R.T.V] \Rightarrow [a] = [R].[T].[V]$

$\Rightarrow [a] = (ML^2\,T^{-2}N^{-1}\theta^{-1})(\,\theta)(L^3) \Rightarrow [a] = ML^5\,T^{-2}N^{-1}$

2. Calcul d’incertitudes

2.1.Introduction

En sciences expérimentales il n’existe pas de mesures exactes, puisque toute mesure d’une grandeur quelconque est nécessairement entachée d’erreur. On ne peut parler que d’estimation de l’erreur de mesure car la valeur vraie est inconnue.

Les erreurs de mesure peuvent provenir de plusieurs sources :

- Qualité des instruments ;
- L’expérimentateur (l’erreur est humaine !) ;
- La variabilité de la grandeur mesurée.

Par conséquent, lors du mesurage d’une grandeur, on évaluera son incertitude. On distingue deux types d’erreur de mesure ; l’erreur de mesure aléatoire et l’erreur de mesure systématique. En conséquence :

- L’erreur de mesure est égale à la somme de l’erreur aléatoire et systématique.
- L’incertitude sur un résultat peut être écrite sous forme d’incertitude absolue ou relative.

2.2.Les Erreurs De Mesures Systématiques

Ce sont des erreurs constantes qui possèdent la même valeur à chaque fois que la mesure est effectuée. Par conséquence, elles ne seront pas diminuées par une série de mesures répetées. Plus généralement les erreurs systématiques ont des origines diverses :

- Erreur d’´étalonnage ;
- Oubli d’un paramètre ;
- Procédure erronée ;
- Dispositif inadapté ou mal utilisé (exemple : une règle dont il manque le premier centimètre).

Les erreurs systématiques sont souvent difficiles à détecter.

2.3. Les Erreurs De Mesures Aléatoires

Elles proviennent d'une déviation aléatoire de la valeur d'une mesure. Cette déviation est différente à chaque fois qu'une même mesure est effectuée. Ainsi, Lors de mesures répétées nous obtenons généralement une dispersion des résultats. Contrairement à l'erreur systématique, l’erreur aléatoire ne peut être corrigée. Une répétition des mesures peut l’atténuer.

Exemple : Erreur de lecture sur un appareil à aiguille entraine une erreur aléatoire

2.4. Incertitude Absolue

Quelque soit la précision de la mesure d'une grandeur X, nous n'obtenons qu'une valeur approchée X. La différence entre la valeur exacte et la valeur approchée s'appelle erreur absolue qu'on désigne par δX :

$$\delta X = X - X_0$$

Cette erreur est en général inconnue. Partant des caractéristiques de l'appareil utilisé et de la méthode utilisée, nous pouvons toujours nous assurer que l'erreur commise ne dépasse pas une valeur limite absolue connue sous le nom de **incertitude absolue** de la grandeur X.

$$|\delta X| \leq \Delta X$$

Nous déduisons que la valeur exacte est comprise entre deux valeurs limites connues :

$$X + \Delta X \quad \text{et} \quad X - \Delta X \quad \Longrightarrow X_0 = X \pm \Delta X$$

Pour plus de précision, nous pouvons donner une définition mathématique à l'incertitude absolue en suivant le raisonnement suivant :

Soit une grandeur $X = f(x, y, z)$ où, x, y et z représentent des grandeurs mesurables comportant des incertitudes.

L'incertitude absolue de X, c'est-à-dire ΔX , est matérialisée par la différentielle dX telle que $\Delta X \leq dX$

Puisque le signe de l'erreur est inconnu il est tout à fait logique de prendre la valeur absolue pour les différentielles.

Sachant que

$$dX = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

L'incertitude absolue ΔX de X s'écrit donc :

$$\Delta X \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \Delta z$$

2.5.Incertitude Relative

On appelle incertitude relative d'une grandeur X le rapport entre l'incertitude absolue et la valeur approchée, soit $\frac{\Delta X}{X}$ **,** et elle est égale au module de la différentielle logarithmique :

$$\frac{\Delta X}{X} = \left|\frac{dX}{X}\right|$$

L'incertitude relative n'a pas d'unités, elle s'exprime en général en %.

2.5.1. Calcul d'incertitude sur une mesure indirecte

Dans la pratique, il arrive souvent que l'on ne puisse mesurer directement la valeur d'une grandeur X. Toutefois, celle-ci est généralement liée à un certain nombre d'autres grandeurs x, y, z, …, etc. directement ou indirectement mesurables. Il existe deux techniques simples pour le calcul de l'incertitude relative :

2.5.1.1.Méthode de la différentielle totale d'une fonction

La différentielle *dX* d'une fonction *X=f(x,y,z)* est définie par :

$$dX = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Le calcul de l'incertitude relative $\frac{\Delta X}{X}$ on suit les étapes suivantes :

- Calcul de la différentielle de la fonction (dX)
- On divise la différentielle de la fonction sur la fonction ($\frac{X}{X}$)
- Sommation des incertitudes c-à-d, passons de **d** à **Δ**.

2.5.1.2.Méthode de la différentielle logarithmique d'une fonction

Pour déterminer l'incertitude relative $\frac{\Delta X}{X}$, à partir de la méthode de la différentielle logarithmique d'une fonction, on suit les étapes suivantes :

- Calcul du logarithme de la fonction, ***logX***,
- Calcul de la différentielle du logarithme de la fonction ***d***(***logX***),
- Sommation des incertitudes c-à-d, passons de **d** à **Δ**.

- Exemple

Soit : $x = \frac{ab}{c}$

La fonction logarithmique : $logx = loga + lagb - logc$

- La différentielle logarithmique :

$$\frac{dx}{x} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b} - \frac{dc}{c}$$

- L'incertitude relative est :

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$$

2.6.Opérations et incertitudes

Tableau I.3 Opérations et incertitudes

Opérations	$\boldsymbol{X}$	$\boldsymbol{\Delta X}$	$\boldsymbol{\Delta X/X}$
Somme	$a + b$	$\Delta a + \Delta b$	$(\Delta a + \Delta b)/(a + b)$
Différence	$a - b$	$\Delta a + \Delta b$	$(\Delta a + \Delta b)/(a - b)$
Produit	$a * b$	$b * \Delta a + a * \Delta b$	$\Delta a/a + \Delta b/b$
Quotient	a/b	$(b * \Delta a + a * \Delta b)b^2$	$\Delta a/a + \Delta b/b$
Puissance	a^n	$n.a^{n-1} * \Delta a$	$n\Delta a/a$

- **<u>Démonstrations</u>**

- $X = a + b \Longrightarrow lnX = \ln(a + b) \Longrightarrow \frac{dX}{X} = \frac{d(a+b)}{(a+b)} \Longrightarrow \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta(a+b)}{(a+b)}$
- $X = a - b \Longrightarrow lnX = \ln(a - b) \Longrightarrow \frac{dX}{X} = \frac{d(a-b)}{(a-b)} \Longrightarrow \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta(a+b)}{(a-b)}$
- $X = a * b \Longrightarrow lnX = \ln(a) + \ln(b) \Longrightarrow \frac{dX}{X} = \frac{d(a)}{a} + \frac{d(b)}{b} \Longrightarrow \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$
- $X = \frac{a}{b} \Longrightarrow lnX = \ln(a) - \ln(b) \Longrightarrow \frac{dX}{X} = \frac{d(a)}{a} - \frac{d(b)}{b} \Longrightarrow \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$
- $X = a^n \Longrightarrow lnX = \ln(a^n) = n.\ln(a) \Longrightarrow \frac{dX}{X} = \frac{nd(a)}{a} \Longrightarrow \frac{\Delta X}{X} = \frac{n,(\Delta a)}{a}$

- **<u>Exercice 3</u>**

On cherche à déterminer l'accélération de la pesanteur (g) à partir d'un pendule simple, en utilisant la relation de la période (T) donnée par :

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, où L est la longueur du pendule

On mesure L=15 cm à 2% prés et T=0,8 s à 3% prés. ($\pi^2 = 10$)

- Calculer la valeur de g ainsi que sa précision et écrire g sous forme :$g = (g_0 \pm \Delta g)$ avec Δg son erreur absolue.
- **Exercice 4**

1- La résistance électrique (ρ) d'un fil électrique de cuivre, de diamètre (D), de longueur (L) et de résistance (R) est donnée par la formule :

$$\rho = \frac{\pi . R . D^2}{4 . L}$$

Donnez l'incertitude sur la résistivité électrique (ρ) en utilisant :

a- La méthode de la différentielle totale.

b- La méthode logarithmique.

2- On donne pour l'application numérique :

R = (0,4562±0,0002) Ω, L= (2.0000±0.0001) m et D= (0.30±0.01) mm

- Calculer (ρ), l'erreur absolue ($\Delta\rho$) et donner la précision de la mesure $\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)$
- D'après vous, quelle mesure serait-il souhaitable d'améliorer.

Solution

- **Exercice 3**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} L_0 = 15cm = 0.15m \\ \frac{\Delta L}{L_0} = 2\% = 0.02 \end{cases} \qquad \begin{cases} T_0 = 15cm = 0.15m \\ \frac{\Delta T}{T_0} = 3\% = 0.03 \end{cases}$$

A partir de la relation (1) , on peut écrire :

$$(1) \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \qquad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} g_0 = \frac{4\pi^2 L_0}{T_0^2} \\ \frac{\Delta g}{g_0} = \underbrace{\frac{\Delta(4\pi^2)}{4\pi^2}}_{0} + \frac{\Delta L}{L_0} + 2\frac{\Delta T}{T_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_0 = 9.375\, ms^{-1} \\ \dfrac{\Delta g}{g_0} = 0.08 = 8\% \Rightarrow \Delta g = g_0 * 0.08 = 9.375 * 0.08 \Rightarrow \Delta g = 0.75\, ms^{-1} \end{cases}$$

D'où

$g = (9.375 \pm 0.75\,)ms^{-1}$ ou $(8.625 \leq g \leq 10.125)\, ms^{-1}$

- **<u>Exercice 4</u>**

1- L'incertitude sur la résistivité électrique (ρ)

$$\rho = \frac{\pi . R . D^2}{4 . L}$$

$\Delta\rho = ?$

a. La méthode de la différentielle totale

On voit que ρ est fonction de trois variables $R, D, et\ L$

$\Rightarrow\ d\rho(R, D, L) = \left(\frac{\partial\rho}{\partial R}\right) dR + \left(\frac{\partial\rho}{\partial L}\right) dL + \left(\frac{\partial\rho}{\partial D}\right) dD$ (1)

Comme π et 4 sont des constantes, elles ne subissent aucune variation : $d\pi = d4 = 0$

Dérivons $\rho(R, D, L)$ par rapport à (R) à $(L)\ et$ à (D)

- $\left(\frac{\partial\rho}{\partial R}\right)$= ?

$\rho = \frac{\pi.R.D^2}{4.L} \Longrightarrow \left(\frac{\pi.D^2}{4.L}\right) R \Longrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial R} = \left(\frac{\pi.D^2}{4.L}\right) \frac{\partial(R)}{\partial R} \Longrightarrow\ \frac{\partial\rho}{\partial R} = \frac{\pi.D^2}{4.L}$ (2)

- $\left(\frac{\partial\rho}{\partial L}\right)$= ?

$\rho = \frac{\pi.R.D^2}{4.L} \Longrightarrow \left(\frac{\pi.R.D^2}{4}\right) . \frac{1}{L} \Longrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial R} = \left(\frac{\pi.R.D^2}{4}\right) \frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{1}{L}\right) \Longrightarrow\ \frac{\partial\rho}{\partial L} = \frac{\pi.R.D^2}{4}\left(\frac{-1}{L^2}\right) \Longrightarrow\ \frac{\partial\rho}{\partial L} = \frac{-\pi.R.D^2}{4.L^2}$
(3)

Car $\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{1}{L}\right) = \left(\frac{1}{L}\right)'$

- $\left(\frac{\partial\rho}{\partial D}\right) = ?$

$$\rho = \frac{\pi.R.D^2}{4.L} \Rightarrow \left(\frac{\pi.R}{4.L}\right)D^2 \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial D} = \left(\frac{\pi.R}{4.L}\right)\frac{\partial(D^2)}{\partial D} \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial R} = \frac{\pi.R.2.D}{4.L}$$

$\Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial D} = \frac{\pi.R.D}{2.L}$ (4)

Lorsqu'on remplace les équations (2), (3) et (4) dans l'équation (1) on obtient :

$(1) \Rightarrow d\rho(R,D,L) = \left(\frac{\pi.D^2}{4.L}\right)dR + \left(\frac{-\pi.R.D^2}{4.L^2}\right)dL + \left(\frac{\pi.R.D}{2.L}\right)dD$

On passe à la notation absolue :

$\Rightarrow \Delta\rho = \left|\frac{\pi.D^2}{4.L}\right|\Delta R + \left|\frac{-\pi.R.D^2}{4.L^2}\right|\Delta L + \left|\frac{\pi.R.D}{2.L}\right|\Delta D$

$\Rightarrow \Delta\rho = \left(\frac{\pi.D^2}{4.L}\right)\Delta R + \left(\frac{\pi.R.D^2}{4.L^2}\right)\Delta L + \left(\frac{\pi.R.D}{2.L}\right)\Delta D$ (5)

On peut écrire la relation (6) sous la forme suivante :

$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\pi.D^2}{4.L}\right)\Delta R + \left(\frac{\pi.R.D^2}{4.L^2}\right)\Delta L + \left(\frac{\pi.R.D}{2.L}\right)\Delta D\right]$

$\Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta D}{D}$

b. Méthode du logarithme :

$$\rho = \frac{\pi.R.D^2}{4.L} \Rightarrow \log(\rho) = \log\left(\frac{\pi.R.D^2}{4.L}\right)$$

$$\Rightarrow \log(\rho) = \log(\pi) + log(R) + log(D^2) - log(4) - log(L)$$

$$\Rightarrow \log(\rho) = \log(\pi) + log(R) + 2.log(D) - log(4) - log(L)$$

Dérivons cette expression :

$$\Rightarrow [\log(\rho)]' = [\log(\pi)]' + [log(R)]' + [2.log(D)]' - [log(4)]' - [log(L)]'$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \underbrace{\frac{d(\pi)}{\pi}}_{0} + \frac{d(R)}{R} + 2\frac{d(D)}{D} - \underbrace{\frac{d(4)}{4}}_{0} - \frac{d(L)}{L}$$

$d\pi = d4 = 0$ Car π et 4 sont des constantes

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dR}{R} + 2\frac{dD}{D} - \frac{dL}{L}$$

Passons à la notation absolue :

$$\Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta R}{R} + 2\frac{\Delta D}{D} + |-1|\frac{\Delta L}{L}$$

Obtient en définitif,

$$\Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta R}{R} + 2\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta L}{L}$$

2- Application numérique

$$\rho = \frac{\pi.R.D^2}{4.L} \Rightarrow \rho = \frac{3.14 * 0.4562 * (0.3 * 10^{-3})^2}{4 * 2} \Rightarrow \rho = 1.6115 * 10^{-8}\Omega.m$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{0.0002}{0.4562} + 2 * \frac{0.01}{0.30} + \frac{0.0001}{2} \Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} = 6.716 * 10^{-2} = 6.716\%$$

On remarque que la valeur de D est déterminé avec moins de précision, il faut donc augmenter la précision (diminuer l'erreur absolue) de D pour améliorer le resultat.

Le résultat final de ρ

$$\Delta\rho = \rho * 6.716 * 10^{-2} = 1.0823 * 10^{-9} \Rightarrow \rho(1.6115 \pm 0.1082) * 10^{-8}\ \Omega.m$$

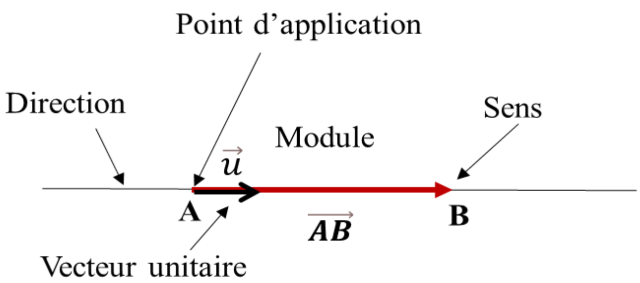
3. Calcul vectoriel

L'usage des vecteurs en mécanique est fondamental. Il permet de représenter les vitesses et les accélérations des points, les rotations des solides, le déplacement, les forces exercées.

3.1.Définition

Un vecteur est segment de droite AB, ayant une origine A et une extrémité B. On le note symboliquement par $\overrightarrow{AB}$. Il est complètement défini si l'on se donne :

- Son origine ou point d'application A.
- Sa direction qui est celle de la droite (Δ).
- Son sens qui est le sens du mouvement d'un mobile allant de A vers B.
- - Sa norme (ou module) toujours positive qui est la longueur AB. On le note $\|\overrightarrow{AB}\|$
- Un vecteur unitaire $\vec{u}$ est un vecteur dont le module est égal à 1 ($\|\vec{u}\| = 1$). On peut exprimer un vecteur unitaire sous la forme : $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$



.

Figure1.1Caractéristique d'un vecteur

3.2.Propriétés

3.2.1. Vecteur libre

Si l'on se donne simplement la direction, le sens et le module.

3.2.2. Vecteur lié : un vecteur lié est un vecteur dont le support et le point d'application sont fixes.

Figure 1.2 Vecteur lié

3.2.3. Vecteur glissant

Un vecteur glissant est un vecteur caractérisé par son module, son sens et son support. On peut glisser ce vecteur sur son support sans changer son effet physique.

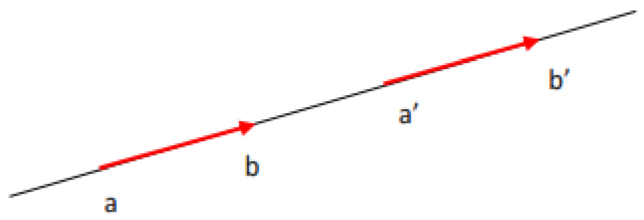


Figure 1.3 Vecteur glissant

3.2.4. Vecteur unitaire

A chaque vecteur on peut associer un vecteur unitaire qui a la même direction et de norme égale à un. On obtient le vecteur unitaire en divisant le vecteur initial par son module :

$$\vec{A} = |\vec{A}|\vec{u} = \vec{A} = \|\vec{A}\|\vec{u} = A.\vec{u}$$

Avec : $|\vec{A}| = \|\vec{A}\| = A$

3.3. Système de coordonnées cartésiennes

3.3.1. Repère cartésien

Dans un espace tridimensionnel, le repère cartésien se compose d'une origine (point O) et des axes orientés et orthogonaux (perpendiculaires entre eux) passant par cette origine.

- Axe des abscisses (noté Ox) ;
- Axe des ordonnées (noté Oy) ;
- Axe des cotes (noté Oz) ;

Le repère cartésien est constitué de trois vecteurs unitaires et orthogonaux notés comme suivant :

- $\vec{\imath}$: porté par l'axe *Ox* et orienté selon son orientation.
- $\vec{\jmath}$: porté par l'axe *Oy* et orienté selon son orientation.
- $\vec{k}$: porté par l'axe *Oz* et orienté selon son orientation.

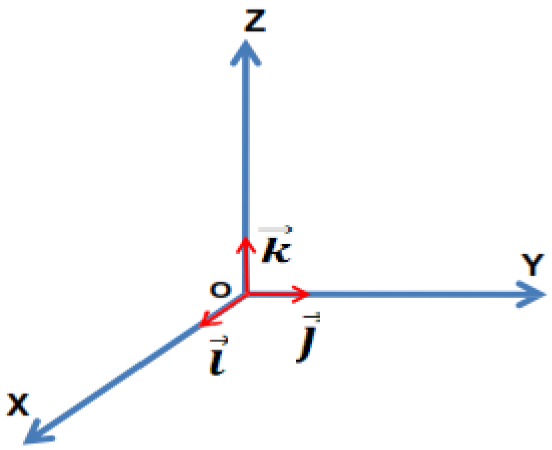


Figure 1.4 : Repère orthonormé

3.3.2. Composantes cartésiennes d'un vecteur

Soit $\vec{V}$ un vecteur, la projection de ce dernier sur les axes Ox, Oy et Oz donne :

$$\vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}$$

Les composantes du vecteur sont les valeurs algébriques des projections orthogonales de $\vec{A}$ sur les directions définies par les vecteurs de base. Les valeurs algébriques sont respectivement V_x , V_y et V_z ; sont appelées les composantes de vecteur $\vec{V}$

Donc : $\vec{A} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}$ et en peut l'écrire sous la forme suivante $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$

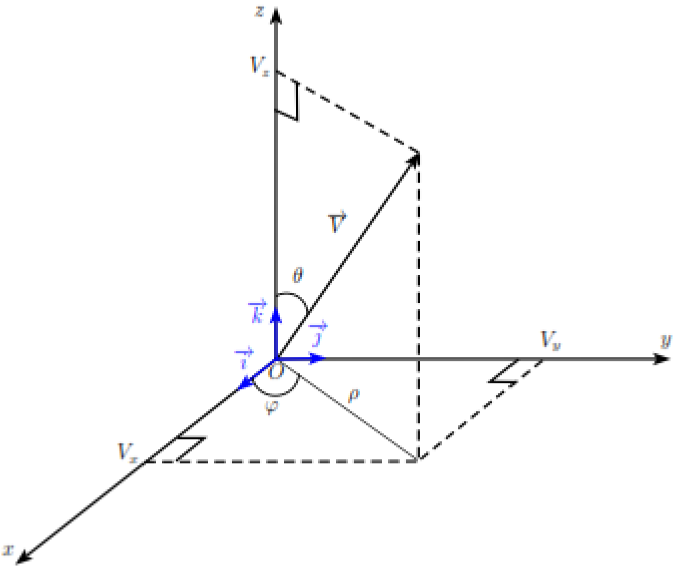


Figure 1.6 Composantes d'un vecteur.

Le module d'un vecteur $\vec{V}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$ est donné par : $V = |\vec{V}| = \|\vec{V}\| = \sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2 + V_z{}^2}$

Dans ce repère cartésien, nous définissons.

- ρ la projection du vecteur $\vec{V}$ dans le plan (Oxy),
- φ l'angle formé par cette projection avec l'axe (Ox),
- θ l'angle formé par le vecteur $\vec{V}$ avec l'axe (Oz)

Tel que :

$$\begin{cases} cos\varphi = \dfrac{V_x}{\rho} \\ sin\varphi = \dfrac{V_y}{\rho} \\ cos\theta = \dfrac{V_z}{V} \\ sin\theta = \dfrac{\rho}{V} \end{cases}$$

D'ou :

$$\begin{cases} V_x = V.sin\theta.cos\varphi \\ V_y = V.sin\theta.sin\varphi \\ V_z = V.cos\theta \end{cases}$$

En considérant, en plus, les angles α, β et γ formés par le vecteur $\vec{V}$ avec les axes (Ox) (Oy) et (Oz) respectivement, on peut déduire que :

$$\begin{cases} V_x = V.cos\alpha \\ V_y = V.cos\beta \\ V_z = V.cos\gamma \end{cases}$$

En sommant les carrés, on obtient :

$$cos^2\alpha + \ cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$$

On pourra écrire le vecteur $\vec{V}$ comme suit :

$$\vec{V} = V\vec{u} = V(cos\alpha\vec{\imath} + cos\beta\vec{\jmath} + cos\gamma\vec{k})$$

On en déduit l'expression du vecteur unitaire :

$$\vec{u} = cos\alpha\vec{\imath} + sin\beta\vec{\jmath} + cos\gamma\vec{k}$$

On note :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} cos\alpha \\ cos\beta \\ cos\gamma \end{pmatrix}$$

Les coordonnées du vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur $\vec{V}$ s'appellent les cosinus directeurs du vecteur $\vec{V}$. α, β et γ sont les angles directeurs.

3.4. Addition de vecteurs

Plusieurs méthodes sont utilisées pour additionner des vecteurs. Lorsque les vecteurs sont dans un plan, on peut utiliser la méthode du triangle, la méthode du parallélogramme ou la relation de Chasles.

3.4.1 Méthode du triangle

Le vecteur $\vec{v} + \vec{w}$ relie le point initial de $\vec{v}$ au point final de $\vec{w}$ (figure I.4).

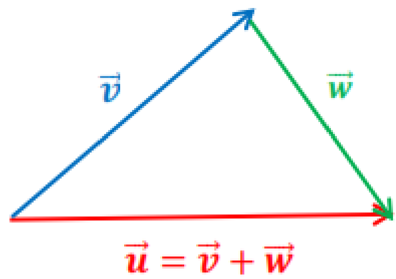


Figure 1.7 : Méthode du triangle

3.4.2 Méthode du parallélogramme

Lorsque les vecteurs ont la même origine, la résultante est alors la diagonale du parallélogramme formé (figure I.5).

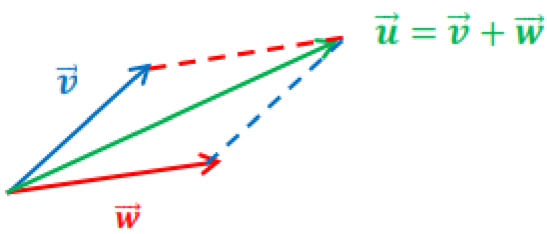


Figure 1.8 Méthode du parallélogramme

- ***Exemple***

$\vec{V}_1 = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$ et $\vec{V}_2 = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$

$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (x_1 + x_2)\vec{\imath} + (y_1 + y_2)\vec{\jmath} + (z_1 + z_2)\vec{k}$

✓ **Propriétés**

- L'addition de vecteurs est commutative. Cela signifie que, si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs, alors $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
- L'addition de vecteurs est aussi associative. Cela veut dire que, si si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs, alors $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- L'addition a un élément neutre : le vecteur nul. En effet : $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
- Enfin, si $\vec{v}$ est un vecteur, alors $-\vec{v}$ est le vecteur ayant la même direction et la même intensité que $\vec{v}$, mais de sens opposé. Donc $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

La différence $\vec{v} - \vec{w}$ de deux vecteurs est définie comme $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w})$

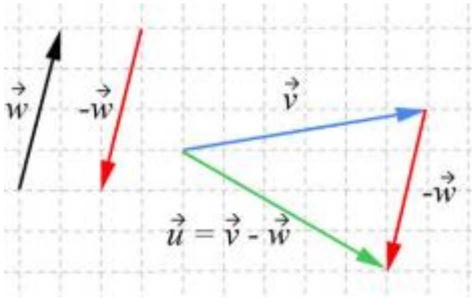


Figure 1.9 La différence de deux vecteurs

- **Exemple**

$\vec{V_1} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$ et $\vec{V_2} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$

$\vec{V_1} - \vec{V_2} = (x_1 - x_2)\vec{\imath} + (y_1 - y_2)\vec{\jmath} + (z_1 - z_2)\vec{k}$

3.5.Multiplication par un scalaire

Si λ est un scalaire et $\vec{V}$ un vecteur, alors le produit $\lambda\vec{V}$ est défini comme suit :

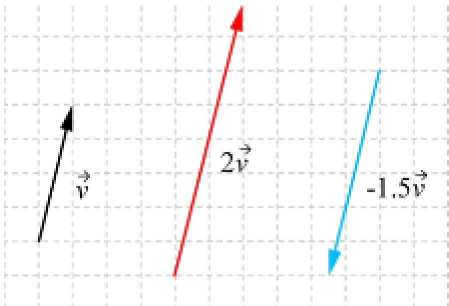


Figure 1.9 Multiplication vecteur par un scalaire

- \- Si **λ > 0**, alors le produit $\lambda\vec{V}$ est le vecteur dont l'intensité a **λ** fois l'intensité de V et dont le sens est le même que $\vec{V}$
- \- Si **λ < 0**,, alors le produit $\lambda\vec{V}$ est le vecteur dont l'intensité a **λ** fois l'intensité de V et dont le sens est l'opposé de celui de $\vec{V}$
- Si **λ = 0** ou si $\vec{V} = \vec{0}$, alors le produit $\lambda\vec{V}$ est le vecteur nul.

3.6.Produit scalaire

Le produit scalaire entre deux vecteurs donnés $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ non nuls est un produit qui donne comme résultat un scalaire (nombre réel).

3.6.1. Forme géométrique du produit scalaire

Par définition du produit scalaire :

$$V = \vec{V}_1 * \vec{V}_2 = |\vec{V}_1|.|\vec{V}_2|.cos\theta$$

Où, $\theta = (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ est l'angle entre les deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$

$$\begin{cases} \theta > 0 \Rightarrow \vec{V}_1 * \vec{V}_2 < 0 \\ \theta < 0 \Rightarrow \vec{V}_1 * \vec{V}_2 > 0 \\ \theta = 0 \Rightarrow \vec{V}_1 * \vec{V}_2 = 0 \end{cases}$$

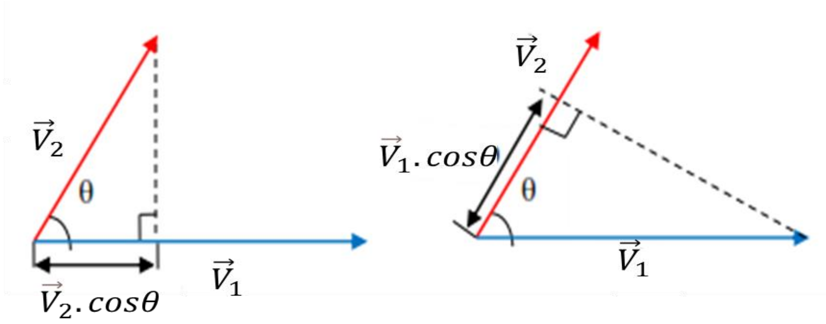


Figure 1.10 : Illustration du produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit du module d'un vecteur avec la projection du l'autre vecteur sur celui-là, ou vice versa.

- $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2)^2 = V_1^2.V_2^2 + 2V_1.V_2.cos\ \theta$
- $(\vec{V}_1 - \vec{V}_2)^2 = V_1^2.V_2^2 - 2V_1.V_2.cos\ \theta$

3.6.2. Forme analytique du produit scalaire

En posant (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) les composantes respectives de $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ dans la base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$:

$\vec{V}_1 = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$ et $\vec{V}_2 = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$

Le produit scalaire de ces deux vecteurs est le scalaire défini par la relation :

$$\vec{V_1} * \vec{V_2} = \left(x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}\right) * \left(x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}\right)$$

$$\Longrightarrow \vec{V_1} * \vec{V_2} = (x_1 * x_2) + (y_1 * y_2) + (z_1 * z_2)$$

Car la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est une base orthonormée directe :

$$\begin{cases} \vec{\imath} * \vec{\imath} = \vec{\jmath} * \vec{\jmath} = \vec{k} * \vec{k} = 1 \\ \vec{\imath} * \vec{\jmath} = \vec{\imath} * \vec{k} = \vec{\jmath} * \vec{k} = 0 \\ \|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1 \end{cases}$$

3.6.3. Propriétés du produit scalaire

Si $\vec{V_1}, \vec{V_2}\ et\ \vec{V_3}$ sont des vecteurs non nuls et si α et β sont des scalaires, on a alors :

- Commutativité :

$$\vec{V_1} * \vec{V_2} = \vec{V_2} * \vec{V_1}$$

- Orthogonalité : Si $\vec{V_1} \neq \vec{0}\ et\ \vec{V_2} \neq \vec{0}$, alors $\vec{V_1} \perp \vec{V_2} \Longrightarrow \left(\vec{V_1}, \vec{V_2}\right) = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \vec{V_1} * \vec{V_2} = 0$

$$\vec{V_1} \perp \vec{V_2} \Longrightarrow (x_1 * x_2) + (y_1 * y_2) + (z_1 * z_2) = 0$$

- Distributivité par rapport à l'addition :

$$\vec{V_1} * (\vec{V_2} + \vec{V_3}) = \vec{V_1} * \vec{V_2} + \vec{V_1} * \vec{V_3}$$

- Distributivité par rapport à la multiplication :

$$\alpha\left(\beta\vec{V}\right) = (\alpha.\beta)\vec{V} = \beta\left(\alpha\vec{V}\right)$$

  Linéarité :

$$\left(\alpha\vec{V_1}\right).\left(\beta\vec{V_2}\right) = (\alpha.\beta)\left(\vec{V_1}.\vec{V_2}\right)$$

- $\vec{V} * \vec{V} = V^2$
- Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls colinélaires est égale le produit de leurs modules.

  Si $\vec{V_1} \neq \vec{0}\ et\ \vec{V_2} \neq \vec{0}$ alors $\vec{V_1} \parallel \vec{V_2} \Longrightarrow \left(\vec{V_1}, \vec{V_2}\right) = 0 \Longrightarrow \vec{V_1} * \vec{V_2} = \left|\vec{V_1}\right|.\left|\vec{V_2}\right|$
- L'angle formé entre les vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ est donné par :

$$\cos\left(\vec{V_1}, \vec{V_2}\right) = \frac{\vec{V_1} * \vec{V_2}}{\left|\vec{V_1}\right|.\left|\vec{V_2}\right|} = \frac{(x_1 * x_2) + (y_1 * y_2) + (z_1 * z_3)}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} * \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$$

3.7. Produit vectoriel

Le produit vectoriel entre deux vecteurs donnés $\vec{A}$ et $\vec{B}$ non nuls est un produit qui donne comme résultat un autre vecteur $\vec{C}$

3.7.1. Forme géométrique du produit vectoriel

Par définition du produit vectoriel :

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|.\sin(\theta).\vec{u}$$

$\theta = (\vec{A}, \vec{B})$ est l'angle entre les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$

$\vec{u}$: le vecteur unitaire

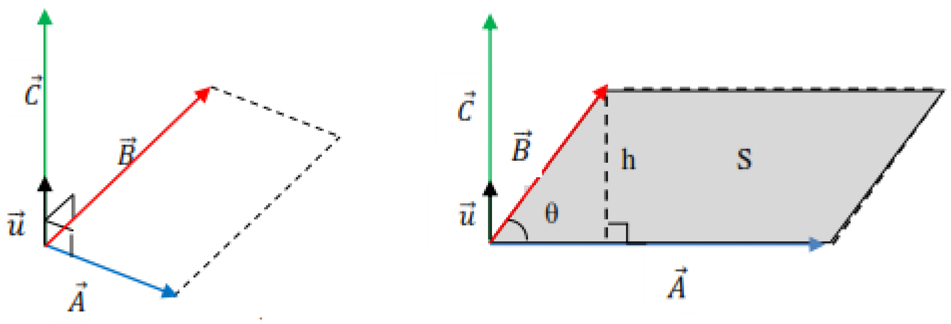


Figure 1.11 Produit vectoriel

Le vecteur $\vec{C}$ est perpendiculaire au plan construit par $\vec{A}$ et $\vec{B}$. La direction de $\vec{C}$ est donné par la règle des trois doigts de la main droite

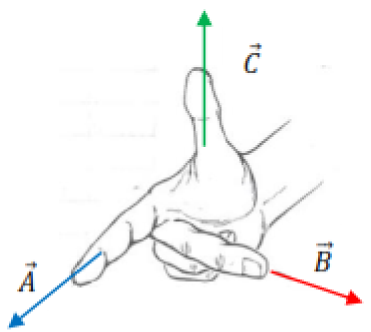


Figure 1.12 Règle des trois doigts de la main droite

La norme de produit vectoriel représente l'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$. :

$$|\vec{C}| = |\vec{A} \wedge \vec{B}| = |\vec{A}|.|\vec{B}|\sin(\vec{A}, \vec{B})$$

$h = |\vec{B}|\sin(\vec{A}, \vec{B})$, donc la surface :

$$S = |\vec{A} \wedge \vec{B}| = h.|\vec{A}|$$

3.7.2. Forme analytique du produit vectoriel

Le produit vectoriel peut être calculé par la méthode directe en coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormé direct : $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \left(A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}\right) \wedge \left(B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} +\vec{\imath} & -\vec{\jmath} & +\vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \left(A_y.B_z - B_yA_z\right)\vec{\imath} - (A_x.B_z - B_xA_z)\vec{\jmath} + \left(A_x.B_y - B_xA_y\right)\vec{k}$$

3.7.3. Propriétés du produit vectoriel

Si $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ sont des vecteurs et si α et β sont des scalaires, on a alors :

- Nul si et seulement si l'un des vecteurs est nul ou si les deux vecteurs sont colinéaires :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{A} = \vec{0} \; ou \; \vec{B} = \vec{0} \; ou \; \vec{A} \parallel \vec{B}$$

- Non commutatif : $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$
- Non associatif : $\vec{A} \wedge \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) \neq \left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) \wedge \vec{C}$

- Distributif par rapport à la somme vectorielle :

$$\vec{C} \wedge (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C} \wedge \vec{A} + \vec{C} \wedge \vec{B}$$

- Linéarité : pour tout réel *n* : $n.\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = \left(n.\vec{A}\right) \wedge \vec{B} = \vec{A} \wedge \left(n.\vec{B}\right)$
- $\vec{A} \wedge \vec{A} = \vec{0}$
- Dans ma base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$: $\begin{cases} \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \\ \vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath} \\ \vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} \end{cases}$ and $\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$

Doivent respecter la règle de tire-bouchon (On place un tire-bouchon le long de l'axe (oz), et on le fait tourner dans le sens trigonométrique, qui ramène (ox) vers (oy) ⇒(oz) est dirigé vers le haut)

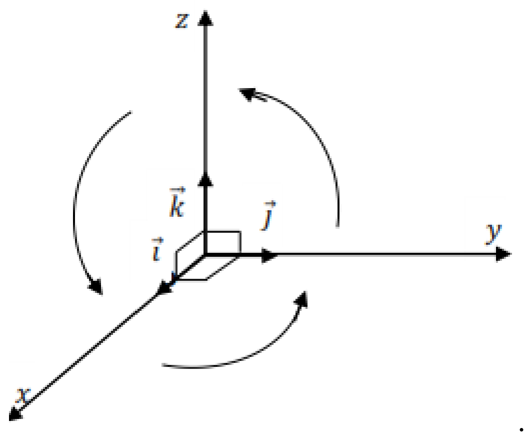


Figure 1.13 : Permutation circulaire

3.8.Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel des vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ est un vecteur défini par :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} * \vec{C}) * \vec{B} - (\vec{A} * \vec{B}) * \vec{C}$$

3.9. Produit mixte

3.9.1. Forme géométrique du produit mixte

Par définition le produit mixte des vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ est la quantité scalaire :

$$\vec{A} * (\vec{B} \wedge \vec{C}) = |\vec{A}|.|\vec{B} \wedge \vec{C}|.cos(\vec{A} \wedge \vec{D})$$

Ou $\vec{D}$: le vecteur perpendiculaire aux plan formé par les deux vecteurs $\vec{B} et\ \vec{C}$

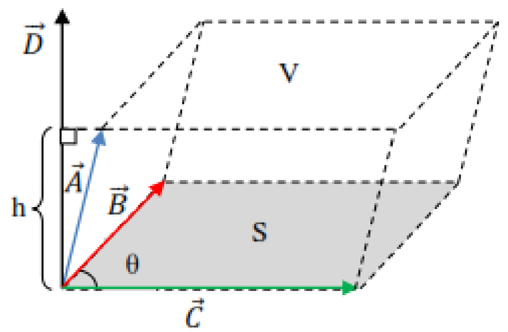


Figure 1.14 Produit mixte.

La valeur absolue du produit mixte mesuré représente le volume du parallélépipède construit par les trois vecteurs.

3.9.2. Forme analytique du produit mixte

Soient trois vecteurs dans un repère orthonormé directe $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ et $\vec{C} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix}$

Le produit mixte peut être calculé par la méthode suivante :

$$\vec{A} * (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= A_x(B_y.C_z - C_y.B_z) - A_y(B_x.C_z - C_xB_z) + A_z(B_x.C_y - C_xB_y)$$

3.9.3. Propretés du produit mixte

Le produit mixte est invariant par permutation circulaire :

$\vec{A} * (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} * (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} * (\vec{A} \wedge \vec{B})$

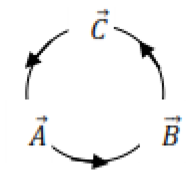


Figure 1.15 : Permutation des vecteur

3.10. Dérivée d'un vecteur

Soit un vecteur :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

La dérivée du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base fixe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$) est définie par :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

Et la dérivée seconde est donnée par :

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k}$$

Il est important de noter que dans ce cas les vecteurs de la base sont considérés fixe ; c.à.d.

$$\frac{d\vec{\imath}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$$

Les règles habituelles de dérivation peuvent se généraliser aux vecteurs, Mais l'ordre des facteurs dans le produit est très important. Ainsi, si $f(t)$ est une fonction scalaire et si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont des fonctions vectorielles, on a alors :

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}\right)=\alpha\frac{d\vec{A}}{dt}+\beta\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}*\vec{B}\right)=\left(\frac{d\vec{A}}{dt}*\vec{B}+\vec{A}*\frac{d\vec{B}}{dt}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)=\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\wedge\vec{B}+\vec{A}\wedge\frac{d\vec{B}}{dt}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(f\vec{A}\right)=\frac{df}{dt}*\vec{A}+f*\frac{d\vec{A}}{dt}$$

3.11. Moment d'un vecteur par rapport à un point

Le moment de vecteur $\vec{V}$ par rapport au point A est défini par :

$$\vec{M}_A(\vec{V})=\overrightarrow{AB}\wedge\vec{V}$$

Où B est un point quelconque de la ligne d'action de vecteur $\vec{V}$

De par les propriétés du produit vectoriel, le vecteur moment est ***perpendiculaire*** à la fois au vecteur $\vec{V}$ et au vecteur$\overrightarrow{AB}$. Son sens est donné par la règle du tourne-vise.

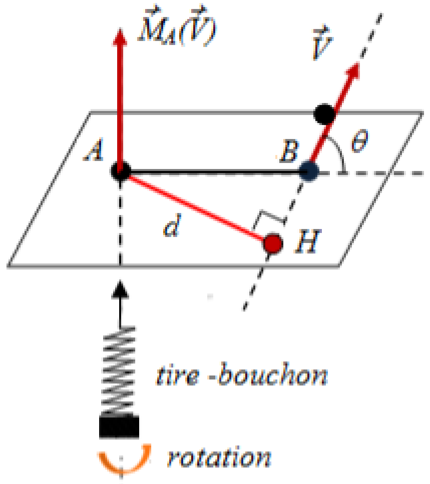


Figure 1.16 Moment d'un vecteur par rapport à un point

3.12. Moment d'un vecteur par rapport à un axe

Le moment d'un vecteur $\vec{V}$ par rapport à un axe orienté (Δ) est défini par :

$$\vec{M}_u(\vec{V}) = \vec{u}.\vec{M} \wedge (\vec{V}) = \vec{u}(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{V})$$

Où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de l'axe (Δ).

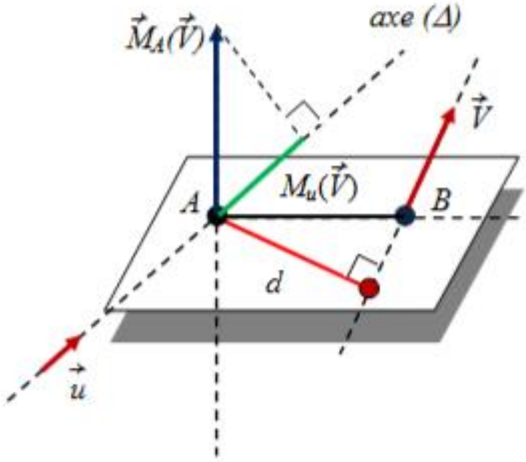


Figure 1.17 Moment d'un vecteur par rapport à un axe

Le moment d'un vecteur $\vec{V}$ par rapport à un axe, c'est donc une grandeur ***scalaire.***

3.13. Les Opérateurs :

On dit que la fonction *f (x, y, z)* est un champ scalaire si elle prend une valeur scalaire en tout point de l'espace *M (x, y, z)*.

Exemple : $f\ (x, y, z) = \ 3x^2y - xz^2 + \ 3y$

On dit que la fonction $\vec{V}(x, y, z)$ est un champ vectoriel si elle prend une valeur vectorielle en tout point de l'espace *M (x, y, z)*.

Exemple : $\vec{V}(x, y, z) = (2x - \ y^2)\vec{\imath} + (3x^2 - 2z)\vec{\jmath} \ + \ 2xyz^2\vec{k}$

On définit l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$ par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Tel que :

$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$: ont les dérivées partielles par rapport à (x*, y, z*)

Nous allons définir le gradiant, la divergence et le rotationnel à l'aide de cet opérateur.

3.13.1. Gradient : $\overrightarrow{grad}$

On appelle gradient d'une fonction scalaire *f (x, y, z)* un vecteur défini comme étant :

$$\overrightarrow{grad}f = \vec{\nabla}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

- **Exemple :** calculer le gradient de la fonction suivante : $f\,(x,y,z) = 3x^2y^3z$

$$\overrightarrow{grad}f = 6xy^3z\,\vec{\imath} + 9x^2y^2z\,\vec{\jmath} + 3x^2y^3\vec{k}$$

3.13.2. Divergence : div

On appelle divergence de la fonction vectorielle $\vec{V}$=(V_x,V_y,V_z) un scalaire défini comme étant

$$div\vec{V} = \vec{\nabla} * \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

- **Exemple** : calculer la divergence de la fonction vectorielle :

$\vec{V}(x,y,z) = x^2y\vec{\imath} - 3yz^2\vec{\jmath} + 4xy^2\vec{k}$

$\Longrightarrow div\vec{V} = \vec{\nabla} * \vec{V} = 6xy - 3z^2$

3.13.3. Rotationnel : $\overrightarrow{rot}$

Soit un champ vectoriel $\vec{V}$=(V_x,V_y,V_z) on définit le rotationnel de $\vec{V}$ comme suit :

$$\overrightarrow{rot(\vec{V})} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} +\vec{\imath} & -\vec{\jmath} & +\vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

- **Exemple :** calculer le rotationnel du vecteur :

$$\vec{V}(x,y,z) = 3x^2y\vec{\imath} - 3yz^2\vec{\jmath} + 4xy^2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot(\vec{V})} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = (8xy - 6yz)\vec{\imath} - (4y^2 - 0)\vec{\jmath} + (0 - 3x^2)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{rot(\vec{V})} = (8xy - 6yz)\vec{\imath} - 4y^2\vec{\jmath} - 3x^2\vec{k}$$

3.13.4. Laplacien :

Le Laplacien d'une fonction scalaire f (x, y, z) est égale à la divergence de son gradient donné par la relation suivante :

:

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}(f) = \vec{\nabla}^2(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- **<u>Exercice 5</u>**

Soit deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ repérés dans le trièdre (Oxyz), définis par :

$\vec{A} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 5\vec{k}$ et $\vec{B} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$

1- Calculez leurs modules, puis représentez les deux vecteurs
2- Calculez :$\vec{A} + \vec{B}$ et $\vec{A} - \vec{B}$
3- a-Calculez les produits scalaires ($\vec{A}.\vec{B}$) et ($\vec{B}.\vec{A}$). Que remarquez-vous ?
   b-Déterminez l'angle $\theta = (\vec{A},\vec{B})$
4- Calculez les produits vectoriels $(\vec{A}\Lambda\vec{B})$ et ($\vec{B}\Lambda\vec{A}$). Que remarquez-vous, et que représente $|\vec{A}\Lambda\vec{B}|$?
5- On considère un vecteur$\vec{C} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$. Trouvez les variables x,y et z pour que

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$$

6- Calculez le produit mixte $\vec{C}.(\vec{A}\Lambda\vec{B})$. Que présente ce scalaire,
   avec $\vec{D} = -2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 4\vec{k}$

- **<u>Exercice 6</u>**

Soit un vecteur $\vec{A}$ défini par : $\vec{A} = (2xy + z^3)\vec{\imath} + (x^2 + 2y)\vec{\jmath} + (3xz^2 - 2)\vec{k}$.

1- Calculez div($\vec{A}$).
2- Montrez que $\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{0}$
3- Trouvez une fonction scalaire$\varphi(x,y,z)$, telle que $\vec{A} = \overrightarrow{grad}(\varphi)$

4-

Solution

- **Exercice 5**

1- Les modules pour les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$

$$|\vec{A}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(-12)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

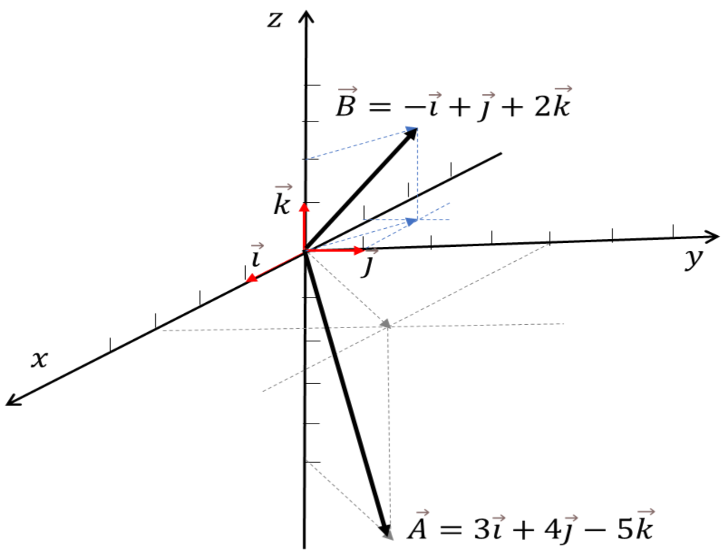


Figure 1.18 Présentation graphique

2- Calcul :$\vec{A} + \vec{B}$ et $\vec{A} - \vec{B}$

$$\vec{A} + \vec{B} = \big(3 + (-1)\big)\vec{\imath} + (4 + 1)\vec{\jmath} + \big((-5) + 2\big)\vec{k} = 2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 3\vec{k}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = \big(3 - (-1)\big)\vec{\imath} + (4 - 1)\vec{\jmath} + \big((-5) - 2\big)\vec{k} = 4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 7\vec{k}$$

3-

a- Calcul les produits scalaires $(\vec{A}.\vec{B})$ et $(\vec{B}.\vec{A})$

✓ $\vec{A}.\vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3.(-1) + 4.1 + (-5).2 = -9$

✓ $\vec{B}.\vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = (-1).3 + 1.4 + 2.(-5) = -9$

$\Longrightarrow \vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$ le produit scalaire est commutatif b- L'angle $\theta = (\vec{A}, \vec{B})$

On sait que : $\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|.cos(\theta) \Rightarrow cos(\theta)\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|.|\vec{B}|} = \frac{-9}{5\sqrt{2}\sqrt{6}} = -0.5196$

Ou encore $\theta = 121^{\circ}$

4- Calculez les produits vectoriels $(\vec{A}\Lambda\vec{B})$ et $(\vec{B}\Lambda\vec{A})$.

✓ $\vec{A}\Lambda\vec{B} = \begin{vmatrix} +\vec{\imath} & -\vec{\jmath} & +\vec{k} \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (8+5)\vec{\imath} - (6-5)\vec{\jmath} + (3+4)\vec{k} = 13\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 7\vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{A}\Lambda\vec{B} = 13\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 7\vec{k}$$

✓ $\vec{B}\Lambda\vec{A} = \begin{vmatrix} +\vec{\imath} & -\vec{\jmath} & +\vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = (-5-8)\vec{\imath} - (5-6)\vec{\jmath} + (-4-3)\vec{k}$

$$= -13\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 7\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{B}\Lambda\vec{A} = -13\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 7\vec{k}$$

$\Rightarrow \vec{B}\Lambda\vec{A} = -13\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 7\vec{k} = \vec{A}\Lambda\vec{B}$ $\Rightarrow$ le produit vectoriel n'est pas commutatif

On sait que aussi : $|\vec{A}\Lambda\vec{B}| = |\vec{A}|.|\vec{B}|.sin(\vec{A}, \vec{B})$=A.h=S

Cette valeur absolue représente la surface S de parallélogramme

$$|\vec{A}\Lambda\vec{B}| = \sqrt{13^2 + 1^2 + 7^2} = \sqrt{219} \approx 14.798$$

En utilisant la relation (2) on obtient :

$$|\vec{A}\Lambda\vec{B}| = 5\sqrt{2}.\sqrt{6}.sin(121^{\circ}) \approx 14.846$$

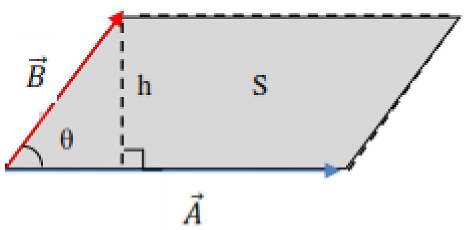


Figure 1.19 La surface S de parallélogramme

5- Trouver les variables x,y et z pour le vecteur $\vec{C} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

Pour : $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$

$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-1+x\\4+1+y\\-5+2+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+x\\5+y\\-3+z\end{pmatrix}=\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2+x=0\\5+y=0\\-4+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-5\\z=3\end{cases}\Rightarrow\vec{C}=-2.\vec{\imath}-5.\vec{\jmath}+3.\vec{k}$$

6- Calcul le produit mixte $\overrightarrow{D}.\left(\vec{A}\Lambda\vec{B}\right)$

$$\overrightarrow{C}.\left(\vec{A}\Lambda\vec{B}\right)=\begin{pmatrix}-2\\-5\\4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}13\\-1\\7\end{pmatrix}=(-2).13+(-5).(-1)+4.7=7$$

La valeur de ce produit mixite $\overrightarrow{C}.\left(\vec{A}\Lambda\vec{B}\right)$: présente le volume de parallélépipède

- **<u>Exercice 6</u>**

$\vec{A}=(2xy+z^3)\vec{\imath}+(x^2+2y)\vec{\jmath}+(3xz^2-2)\vec{k}.$

On sait que : $\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

1- $$div(\vec{A})=\vec{\nabla}*\vec{A}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2xy+z^3\\x^2+2y\\3xz^2-2\end{pmatrix}=\frac{\partial(2xy+z^3)}{\partial x}+\frac{\partial(x^2+2y)}{\partial y}+\frac{\partial(3xz^2-2)}{\partial z}$$

$$\Rightarrow div(\vec{A})=2y+2+6xz$$

2- $$\overrightarrow{rot}(\vec{A})=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\begin{vmatrix}+\vec{\imath}&-\vec{\jmath}&+\vec{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\2xy+z^3&x^2+2y&3xz^2-2\end{vmatrix}=(0-0)\vec{\imath}-(3z^2-3z^2)\vec{\jmath}+$$

$(2x-2x)\vec{k}=\vec{0}$

$$\Rightarrow\overrightarrow{rot}(\vec{A})=\vec{0}$$

3- Trouver la fonction scalaire $\varphi(x,y,z)$, telle que $\vec{A}=\overrightarrow{grad}(\varphi)$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=2xy+z^3 & \dots(1)\\\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=x^2+2y & \dots(2)\\\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=3xz^2-2 & \dots(3)\end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2xy + z^3 \Rightarrow \varphi(x,y,z) = \int (2xy + z^3)\,dx$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y,z) = x^2y + xz^3 + f(y,z) \qquad \dots(4)$$

$$(2) et\ (4) \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = x^2 + 2y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = 2y \Rightarrow f(y,z) = \int 2y dy = y^2 + g(z) \qquad \dots(5)$$

En remplaçant (5) dans (4), $\varphi(x,y,z)$ devient :

$$\varphi(x,y,z) = x^2y + xz^3 + y^2 + g(z) \qquad \dots(6)$$

$$(3) et\ (6) \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 3xz^2 + \frac{\partial g(z)}{\partial z} = 3xz^2 - 2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g(z)}{\partial z} = -2 \Rightarrow g(z) = -2z + C^{st} \qquad \dots(7)$$

D'où l'expression final de $\varphi(x,y,z)$:

$$\Rightarrow \varphi(x,y,z) == x^2y + xz^3 + y^2 - 2z + C^{st}$$

Chapitre II : Cinématique du point

1. Introduction

Le mouvement d'un objet correspond à un changement continu de positions occupées par cet objet. La branche de la physique qui étudie les mouvements est la mécanique qui se subdivise en deux sous-branches que sont la cinématique et la dynamique.

La cinématique (du grec kinhma «kinéma» signifiant mouvement) qui consiste à décrire ce mouvement sans s'attacher aux causes qui le produisent, alors que la dynamique relie les causes du mouvement, que sont les forces, au mouvement lui-même.

Nous nous limiterons dans tout ce qui suit à l'étude du mouvement des points matériels. Par définition un point matériel est un objet sans dimensions spatiales. Bien entendu, dans la plupart des cas, il s'agit d'une approche (approximation), les objets réels occupant généralement un certain espace. Néanmoins, ce concept est utile dans bon nombre de situations réelles ou on ne s'intéresse pas aux rotations de l'objet sur lui-même ou lorsque les dimensions de l'objet peuvent être négligées. Par exemple, si nous souhaitons d'écrire le mouvement de la terre autour du soleil, nous pouvons considérer la terre comme un point matériel. Nous obtenons ainsi des données correctes sur son orbite. Cette approximation est justifiée par le fait que le rayon de l'orbite de la terre est très grand par rapport aux dimensions de la terre et du soleil.

2. Référentiel

Un référentiel absolu ou Galiléen est la donnée d'un corps matériel, réel ou imaginaire, considéré comme immobile, auquel sont associés un système de coordonnées lié rigidement au solide de référence, permettant de déterminer les positions successives du point matériel étudié, et un repère de temps. On distingue, ainsi les repères galiléens suivant :

- **2.1. Référentiel du laboratoire** : il s'agit d'un référentiel lié à un point quelconque de la Terre. C'est celui qui est en général utilisé pour parler du mouvement dans la vie quotidienne ;
- **2.2. Référentiel géocentrique :** il s'agit d'un référentiel dont l'origine est au centre d'inertie de la Terre, les axes pointent vers trois étoiles considérées comme fixe ;
- **2.3. Référentiel héliocentrique :** il s'agit d'un référentiel lié au centre d'inertie du Soleil et ses axes pointant vers trois étoiles considérées comme immobiles ;
- **2.4. Référentiel de Copernic :** il s'agit d'un référentiel lié au centre de masse du système solaire, dont les axes du repère pointent vers trois étoiles considérées comme immobiles.

3. Trajectoire

La trajectoire d'un point est l'ensemble des positions successives que le point occupe au cours du temps et au cours de son déplacement par rapport à un référentiel donné. Une trajectoire est donc une ligne imaginaire (voir la figure ci-dessous).

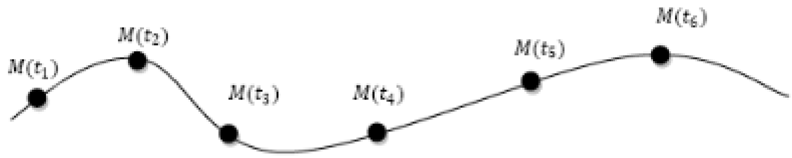


Figure 2.1 Trajectoire.

- Si la trajectoire est un cercle ou un arc de cercle on dit que le mouvement est circulaire.
- Si la trajectoire est une droite on dit que le mouvement est rectiligne.
- Si la trajectoire est une courbe on dit que le mouvement est curviligne

Cette trajectoire dépend du référentiel d'étude. L'équation cartésienne de la trajectoire, dans le cas d'un mouvement plan, est la donnée de y en fonction de x. On obtient l'équation de la trajectoire par élimination du temps entre les deux équations horaires.

4. Vecteur Position

La position du mobile est entièrement déterminée par son vecteur position à chaque instant.

Soit le mobile M repéré par des coordonnées cartésiennes x, y et z sur les axes X, Y et Z. dans le repère R, à l'instant t.

Où x, y et z sont respectivement les projections du point M sur les axes Ox, Oy et Oz.
Le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ s'écrit en fonction de ses coordonnées dans la référence (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$,$\vec{k}$) :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

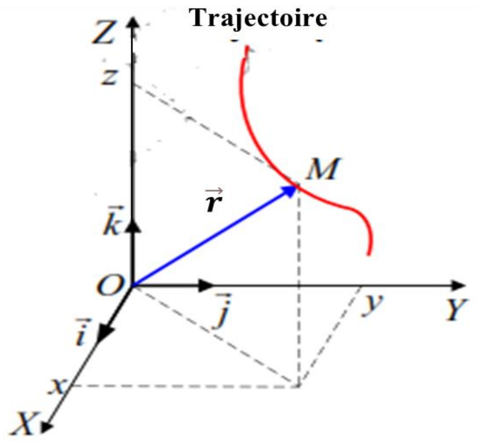


Figure 2.2 Vecteur Position

5. Vecteur Déplacement

Un point matériel M en mouvement occupe des positions différentes. A l'instant t_1, il est au point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et à un instant t_2, il est au point $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (figure II-1). Le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ s'appelle le vecteur de déplacement.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|\vec{u}$$

Avec $\vec{u}$ vecteur unitaire porté par le vecteur$\overrightarrow{M_1M_2}$

$$\Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}} - \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}}$$

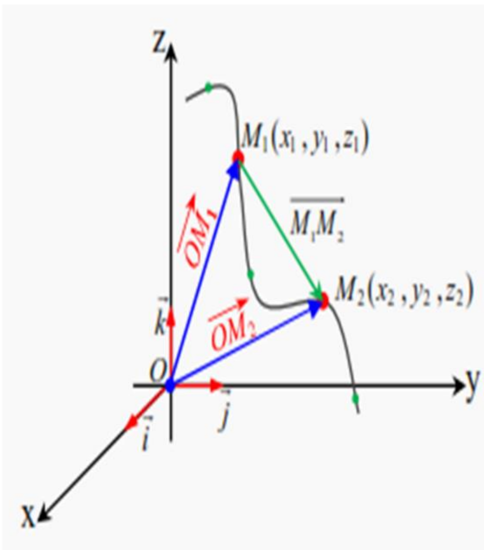


Figure 2.3 Vecteur Déplacement

Avec :

$\overrightarrow{OM_1}$: $\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}}$ **:** Vecteur position à l'instant t_1

$\overrightarrow{OM_2}$: $\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}}$ **:** Vecteur position à l'instant t_2

Avec $\begin{cases} \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}} = x_2(t_2)\vec{\imath} + y_2(t_2)\vec{\jmath} + z_2(t_2)\vec{k} \\ \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}} = x_1(t_1)\vec{\imath} + y_1(t_1)\vec{\jmath} + z_1(t_1)\vec{k} \end{cases}$

$$\Rightarrow \Delta\vec{\boldsymbol{r}} = (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{\jmath} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \Delta x\vec{\imath} + \Delta y\vec{\jmath} + \Delta z\vec{k}$$

6. Vecteur vitesse

La vitesse d'un mobile est le rapport entre la variation de sa position (ou la distance parcourue) et le temps écoulé pendant ce changement de position.

Dans les mesures cinématiques, il faut distinguer deux types de vitesses :

6.1.La vitesse moyenne

Soit un mobile *M* qui se trouve à l'instant t_1 en position $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et à l'instant t_2 en position $M_2(x_2, y_2, z_2)$

La vitesse moyenne de *M* est définie sur l'intervalle de temps$[t_1, t_2]$ par les grandeurs :

Une grandeur vectorielle :

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{(x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{\jmath} + (z_2 - z_1)\vec{k}}{t_2 - t_1}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{moy} = \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta\boldsymbol{t}} = \frac{\Delta x\vec{\imath} + \Delta y\vec{\jmath} + \Delta z\vec{k}}{\Delta t}$$

Une grandeur scalaire (la valeur) :

$$\Rightarrow v_{moy} = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{t_2 - t_1} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}{\Delta t}$$

Dans la système cartésien (O,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$,$\vec{k}$)

$$\vec{v}_{moy}\colon \begin{cases} v_{moy(x)} = \dfrac{(x_2 - x_1)}{t_2 - t_1} \\ v_{moy(y)} = \dfrac{(y_2 - y_1)}{t_2 - t_1} \\ v_{moy(z)} = \dfrac{(z_2 - z_1)}{t_2 - t_1} \end{cases}$$

Si le mouvement est sur une droite, donc :

$$\vec{v}_{moy} = \frac{(x_2 - x_1)}{t_2 - t_1}\vec{i} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}$$

La vitesse s'exprime, dans le système international, en *s/m* ou *sm*$^{-1}$

6.2.Vitesse instantanée

En réalité ce mouvement ne se fait pas à une vitesse constante, à chaque instant on aura une situation de la vitesse, on parlera de vitesse instantanée. C'est la limite de la vitesse moyenne lorsque la différence du temps est très petite cela veut dire qu'elle tend vers zéro.

$$\vec{v}_t = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\boldsymbol{r}}}{\boldsymbol{\Delta t}} = \frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt} = \frac{\boldsymbol{d\vec{r}}}{\boldsymbol{dt}}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \Longrightarrow \vec{v}_t = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Soit une fonction y=f(x) ; on appelle sa dérivée la quantité égale à

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ce n'est autre que la définition de la dérivée d'une fonction.
Le vecteur vitesse est donc la dérivée du vecteur position par rapport au temps. Il en résulte que le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.

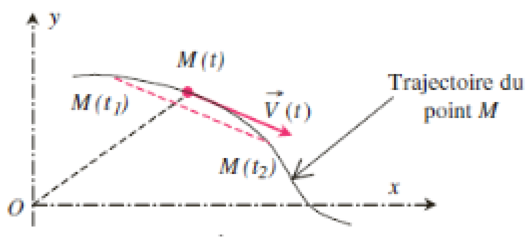


Figure 2.4 Vitesse instantanée

Expression du vecteur position en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Le vecteur vitesse du point M s'obtient en dérivant son vecteur position par rapport au temps :

$$v_t = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}}\vec{\imath} + \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}}\vec{\jmath} + \frac{\boldsymbol{dz}}{\boldsymbol{dt}}\vec{k}$$

Sa norme est :

$$v_t = \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{dz}}{\boldsymbol{dt}}\right)^2}$$

- **Exemple**

Une particule se déplace le long de l'axe des (x) de telle sorte que sa position à chaque instant est donnée par : $x(t) = 3t^2 + 2 \quad (m)$

a- Calculer sa vitesse moyenne dans l'intervalle compris entre :
  - t_1=1s et t_2=2s
  - t_1=1s et t_3=3s
  - t_2=2s et t_3=2s

b- Calculer sa vitesse instantanée aux instants t_1, t_2 et t_3
  - **Solution**

a. La vitesse moyenne est donnée par la relation

$$v_{moy} = \frac{\Delta \boldsymbol{X}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

- L'application de cette relation entre les instants t_1-t_2; t_1-t_3 et t_2-t_3 :

$$v_{moy(1\to2)} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad \dots(1) \qquad v_{moy(1\to3)} = \frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_1} \quad \dots(2) \qquad v_{moy(2\to3)} = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} \quad \dots(3)$$

- Connaissant les instants t_i et t_f, il suffit de les remplacer dans l'équation x(t), pour déterminer les positions de la particule :

- $t_1 = 1s : \ x(t_1) = 3(1)^2 + 2 = 5m$
- $t_2 = 2s : \ x(t_2) = 3(2)^2 + 2 = 14m$
- $t_3 = 3s : \ x(t_3) = 3(3)^2 + 2 = 29m$

$(1) \Longrightarrow v_{moy(1\to 2)} = \frac{14-5}{2-1} = 9\text{m/s}$

$(2) \Longrightarrow v_{moy(1\to 3)} = \frac{29-5}{3-1} = 12\text{ m/s}$

$$(3) \Longrightarrow v_{moy(2\to 3)} = \frac{29-14}{2-1} = 15\ m/s$$

b. La vitesse instantanée est donnée par :

$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(3t^2+2)}{dt} = 6t \Longrightarrow v(t) = 6t \qquad \ldots (4)$

- $t_1 = 1s: (4) \Longrightarrow v(t_1) = 6(1) = 6m/s$
- $t_2 = 2s: (4) \Longrightarrow v(t_2) = 6(2) = 12m/s$
- $t_3 = 3s: (4) \Longrightarrow v(t_3) = 6(3) = 18m/s$

7. Le vecteur accélération

Une autre caractéristique du mouvement d'un point matériel est le vecteur accélération. On utilise une notation similaire à celle pour la vitesse, $\vec{a}$, pour signifier qu'il s'agit de l'accélération du point M.

7.1.L'accélération moyenne

L'accélération moyenne est la variation de la vitesse entre deux positions par rapport au temps. Soit v_1 la vitesse du mobile à un instant t_1 et v_2 sa vitesse à instant t_2

. Le mobile subit une accélération moyenne telle que :

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

7.2.L'accélération instantanée

L'accélération instantanée est l'accélération à un instant t donné :

$$\vec{a}_t = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

Les coordonnées du vecteur accélération suivant les coordonnées cartésiennes sont:

Soit :

$$v_t = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2\boldsymbol{y}}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2\boldsymbol{z}}{dt^2}\vec{k}$$

8. Equations de mouvement

8.1.Mouvement rectiligne

8.1.1. Mouvement rectiligne uniforme :

- Le mouvement est rectiligne si la trajectoire est une droite.
- Le mouvement est rectiligne uniforme (MRU) si le mobile garde la même vitesse durant tous son parcours. $v = cts \Longrightarrow a = 0$

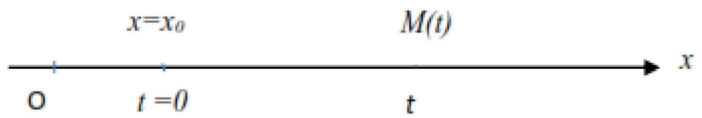


Figure 2.5 Le mouvement rectiligne

- **M.R.U**$\Longrightarrow v(t) = v_0 = cst$

$$a = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{dv_0}{dt} \Longrightarrow a = 0$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Longrightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx(t) = \int_{t_0=0}^{t} v_0\,.dt \Longrightarrow \mathbf{x(t)} - x_0 = v_0(t-0)$$

$$\Longrightarrow \mathbf{x(t)} = \boldsymbol{v_0}.\mathbf{t} + \boldsymbol{x_0}$$

Condition initiale : pour $\Longrightarrow x = \boldsymbol{x_0}$

- Le Diagramme du mouvement

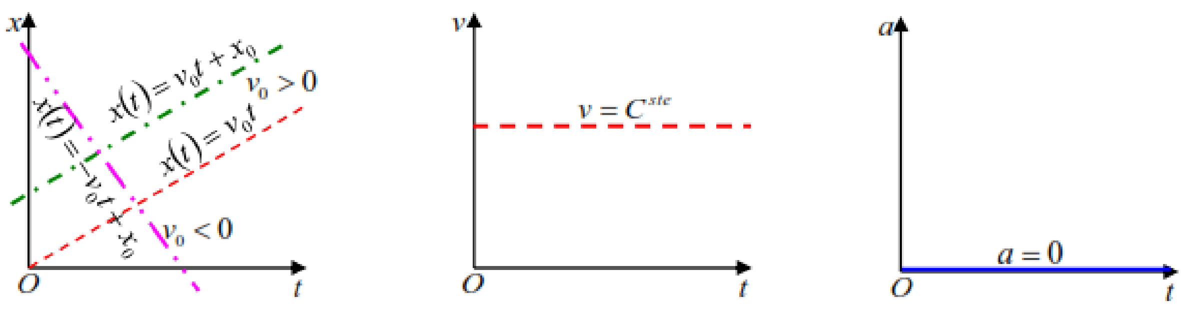


Figure 2.6 Variations de x, v et a en fonction de t

8.1.2. Mouvement rectiligne uniformément varié :

Le M.R.U.V est le mouvement rectiligne uniformément varié si $a = cst$

- **M.R.U.V** $\Rightarrow a = a_0 = cst$
  - $v(t)$= ?

On sait que : $a = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow dv(t) = a.dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} dv(t) = \int_{t_0=0}^{t} a\,.dt$

Alors si : à t = 0 ; v = $\boldsymbol{v_0}$ $e\ t$ x =$\boldsymbol{x_0}$

$$\Rightarrow [v(t)]_{v_0}^{v\prime t)} = a.[t]_{t_0=0}^{t} \Rightarrow \mathbf{v(t)} - v_0 = a(t-0)$$

$$\Rightarrow \mathbf{v(t)} = \boldsymbol{a}.\mathbf{t} + \boldsymbol{v_0}$$

- $x(t)$= ?

On a :

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx(t) = \int_{t_0=0}^{t} v(t)\,.dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx(t) = \int_{t_0=0}^{t} (\boldsymbol{a}.\mathbf{t} + \boldsymbol{v_0})\,.dt \Rightarrow$$

$$[x(t)]_{x_0}^{x\prime t)} = \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{a}.\mathbf{t}^2 + \boldsymbol{v_0}.\boldsymbol{t}\right]_{t_0=0}^{t} \Rightarrow \mathbf{x(t)} - x_0 = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}.\mathbf{t}^2 + \boldsymbol{v_0}.\boldsymbol{t}$$

L'équation horaire du mouvement s'écrit :

$$\mathbf{x(t)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{a}.\mathbf{t}^2 + \boldsymbol{v_0}.\boldsymbol{t} + x_0$$

- **Remarque :**
  - ➢ Le mouvement est dit rectiligne uniformément accélère (**M.R.U.A**) si : $a.v > 0$ (vecteurs vitesse et accélération dans le même sens)
  - ➢ Le mouvement est dit rectiligne uniformément décélère (**M.R.U.D**) si : $a.v < 0$ (vecteurs vitesse et accélération opposés en sens)
  - ➢ Le mouvement est dit rectiligne uniforme si : $a.v = 0$ (v=cst)
  - ➢ Le mouvement est dit en repos si : $a.v = 0$ (v=0)

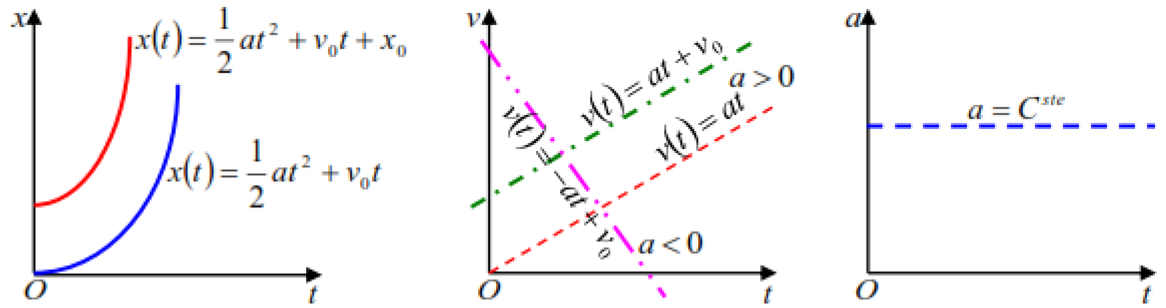


Figure 2.7 Le Diagramme du mouvement

- On trouve la relation entre l'accélération, la vitesse et le déplacement

$$a=\frac{dv(t)}{dt} \Longrightarrow dv(t)=a.dt \Longrightarrow \boldsymbol{v}.dv(t)=v.a.dt \Longrightarrow \boldsymbol{v}.dv(t)=v.a.dt$$

Avec : $\boldsymbol{v}.dt=dx$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{v}.dv(t)=a.dx \Longrightarrow \int_{v_0}^{v}\boldsymbol{v}.dv(t)=\int_{x_0}^{x}a.dx \Longrightarrow \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{v}^2-\mathbf{v_0}^2)=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}-x_0)$$

$$\Longrightarrow \mathbf{v}^2-\mathbf{v_0}^2=\mathbf{2}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}-x_0)$$

- **<u>Exercice 1</u>**

Le mouvement rectiligne d'un point est défini par l'équation horaire :

$$S(t)=2t^3-9t^2+12t+1$$

1- Calculer la vitesse et l'accélération au temps t.
2- Etudier le mouvement du point lorsque t croit de 0 à $+\infty$.(dire dans quel sens se déplace le point et si le mouvement est accéléré ou retardé).

- **<u>Exercice 2</u>**

Un train partant de la ville A du repos accéléré uniformément (sans vitesse initial avec un mouvement rectiligne accéléré) sur 400m, il roule à une vitesse constante (60km/h) sur 1000 m puis décélère sur 600m avant de s'arrêter à la ville B.

1- Déterminer les équations horaires ou de mouvement x(t) pour les trois phases.
2- Tracer qualitativement les diagramme accélération a(t) , vitesses v(t) et des espaces x(t).

Solution

- **Exercice 1**

1- La vitesse et l'accélération au temps t.

$$S = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1$$

- $v = \frac{dS}{dt} = 6t^2 - 18t + 12$
- $a = \frac{dv}{dt} = 12t - 18$

2- Etudier le mouvement du point lorsque t $\in [0, +\infty[$

L'étude de mouvement nécessite une étude mathématique de la fonction $S(t)$. le mouvement est accéléré ou retardé selon le signe de produit :

$$\vec{a}.\vec{v}: \begin{cases} a.v > 0 & \text{mouvement accéléré} \\ a.v < 0 & \text{mouvement retardé} \\ a.v = 0 & \text{mouvement uniforme} \end{cases}$$

- $v = 6t^2 - 18t + 12$; $v = 0 \Longrightarrow 6t^2 - 18t + 12 = 0$

$$\Longrightarrow \Delta = \mathbf{(-18)^2 - 4.(6).(12) = 36 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 6}$$

$t_1 = \frac{18-6}{12} = 1s,\ t_2 = \frac{18+6}{12} = 2s$

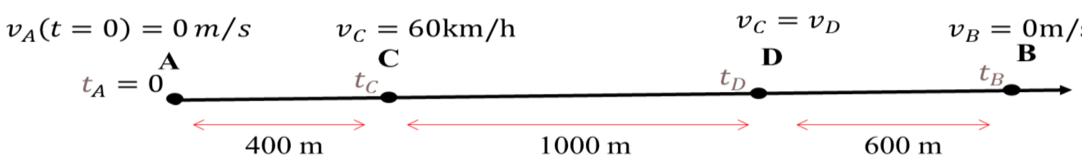
$v = 0 \Longrightarrow t_1 = 1s,\ t_2 = 2s$

- $a = 12t - 18;$; $a = 0 \Longrightarrow 12t - 18 = 0 \Longrightarrow t = 1.5s$

t	0 — 1	1 — 1.5	1.5 — 2	2 — $+\infty$
$\vec{v}$	+	-	-	+
$\vec{a}$	-	-	+	+
$\vec{a}.\vec{v}$	-	+	-	+
Mouvement	*retardé*	*accéléré*	*retardé*	*accéléré*

- **Exercice 2**

1- Les équations horaires ou de mouvement x(t) pour les trois phases



- **Phase 1 : AC=400 m (**mouvement rectiligne uniformément accéléré)
  - Calcule de l'accélération a_1

$$\mathrm{v}_C{}^2 - \mathrm{v}_A{}^2 = 2a_1(x_C - x_A) \quad ; \; v_A(t=0) = 0m/s, \quad v_C = \frac{60km}{h} = \frac{50}{3}m/s$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{\mathrm{v}_C{}^2 - \mathrm{v}_A{}^2}{2(x_C - x_A)} = \frac{\mathrm{v}_C{}^2}{2(x_C - x_A)} = \frac{(50/3)^2}{2.400} \Rightarrow a_1 = \frac{25}{72}m/s^2$$

  - La vitesse $v_1(t)$

$a_1 = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a_1.dt \Rightarrow \int_{v_A}^{v_1(t)} dv = \int_{t_{A=0}}^{t} a_1\,.dt \Rightarrow \int_{v_A}^{v_1(t)} dv = \frac{25}{72}\int_{t_{A=0}}^{t} dt \Rightarrow$

$v_1(t) = \frac{25}{72}t$ (m/s)

  - Equation de mouvement $x_1(t)$

$v_1(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_{A=0}}^{x_1(t)} dx = \int_{t_{A=0}}^{t} v_1(t)\,.dt \Rightarrow \int_{x_{A=0}}^{x_1(t)} dx = \int_{t_{A=0}}^{t} \left(\frac{25}{72}t\right).dt \Rightarrow$

$[x]_{x_{A=0}}^{x_1(t)} = \left[\frac{1}{2}\frac{25}{72}.\mathrm{t}^2\right]_{t_A=0}^{t} \Rightarrow \qquad x_1(t) = \frac{25}{144}.\mathrm{t}^2 \quad (m)$

- **Phase 2 : CD=1000 m (**mouvement rectiligne uniforme)
  - Calcule de l'accélération a_2

$$\mathrm{M.R.U} \Rightarrow a_2 = 0m/s^2$$

  - La vitesse $v_2(t)$

$\Rightarrow v_2(t) = \frac{50}{3}$ (m/s)

  - Equation de mouvement $x_2(t)$

$v_2(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_C}^{x_2(t)} dx = \int_{t_C}^{t} v(t)\,.dt \Rightarrow \int_{x_{A=0}}^{x_2(t)} dx = \int_{t_C}^{t} \left(\frac{50}{3}\right).dt \Rightarrow$

$[x]_{x_C=400}^{x_2(t)} = \left[\frac{50}{3}t\right]_{t_{C=?}}^{t} \Rightarrow x_2(t) - x_C = \frac{50}{3}(t - t_C)$

$$\Rightarrow x_2(t) = \frac{50}{3}(t - t_C) + 400$$

$-$ Détermination $t_C = ?$

a $x_C = 400 \Rightarrow x_1(t_C) = x_2(t_C) = 400 \Rightarrow x_1(t_C) = \frac{25}{144}.\mathrm{t}_C{}^2 = 400 \Rightarrow t_C = 48s$

$$\Rightarrow x_2(t) = \frac{50}{3}(t - 48) - 400$$

$$\Rightarrow x_2(t) = \frac{50}{3}t - 400 \qquad \text{(m)}$$

- **Phase 1 : DB=600 m (**mouvement rectiligne uniformément retardé)

➢ Calcule de l'accélération a_3

$$v_B{}^2 - v_D{}^2 = 2a_2(x_B - x_D) \qquad , \quad v_C = v_D = \frac{60km}{h} = \frac{50}{3}m/s, \ v_B = 0$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{v_B{}^2 - v_D{}^2}{2(x_B - x_D)} = \frac{-v_D{}^2}{2(x_B - x_D)} = \frac{-(50/3)^2}{2.600} \Rightarrow a_2 = -\frac{25}{108}m/s^2$$

➢ La vitesse $v_3(t)$

$a_2 = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a_2.dt \Rightarrow \int_{v_D}^{v_3(t)} dv = \int_{t_D}^{t} a_2\,.dt \Rightarrow \int_{v_D}^{v_3(t)} dv = -\frac{25}{108}\int_{t_{A=0}}^{t} dt \Rightarrow$
$[v]_{v_D}^{v_3(t)} = -\frac{25}{108}[t]_{t_D}^{t}$

$$\Rightarrow v_3(t) - v_D = -\frac{25}{108}(t - t_D)$$

$$\Rightarrow v_3(t) = -\frac{25}{108}(t - t_D) + \frac{50}{3}$$

$-$ Détermination t_D =?

A $x_D = 1400 \Rightarrow x_2(t_D) = x_3(t_D) = 1400 \Rightarrow x_2(t_D) = \frac{50}{3}t_D - 400 = 1400$

$$\Rightarrow t_D = 108s$$

$$\Rightarrow v_3(t) = -\frac{25}{108}(t - 108) + \frac{50}{3}$$

$$\Rightarrow v_3(t) = -\frac{25}{108}t + \frac{125}{3} \qquad (m/s)$$

➢ Equation de mouvement $x_3(t)$

$v_3(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_D}^{x_3(t)} dx = \int_{t_{A=0}}^{t} v_3(t)\,.dt \Rightarrow \int_{x_D}^{x_3(t)} dx = \int_{t_D}^{t}\left(-\frac{25}{108}t + \frac{125}{3}\right).dt$

$\Rightarrow [x]_{x_D=1400}^{x_3(t)} = \left[-\frac{25}{216}t^2 + \frac{125}{3}t\right]_{t_D=108}^{t}$

$$\Rightarrow \qquad x_3(t) = -\frac{25}{216}t^2 + \frac{125}{3}t - 1750 \quad (m)$$

2- Les diagramme accélération a(t) , vitesses v(t) et des espaces x(t).

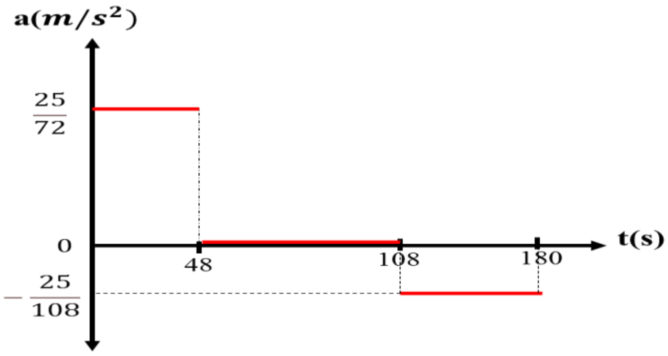


Figure 2.8 Diagramme accélération a(t)

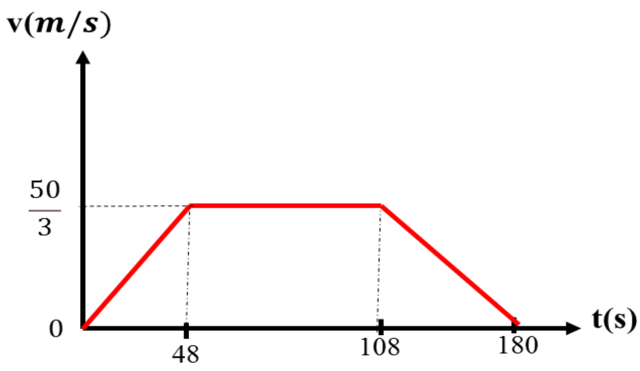


Figure 2.9 Diagramme de vitesse v(t)

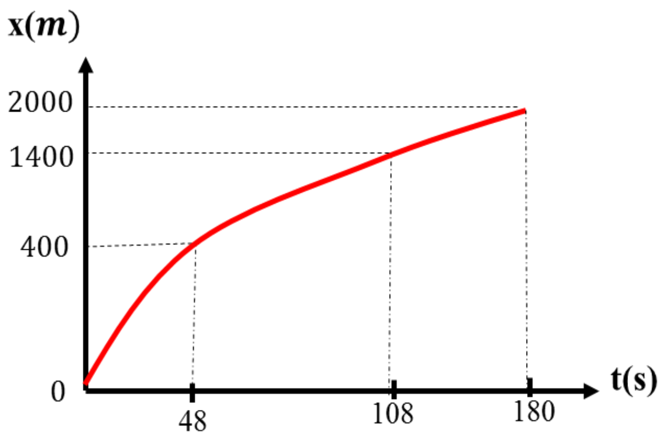


Figure 2.10 Diagramme d'espace x(t)

8.2.Mouvement circulaire

Supposons un mobile qui décrit une trajectoire circulaire dans le plan (Oxy). La trajectoire a un rayon (R) et est centrée sur l'origine des axes.

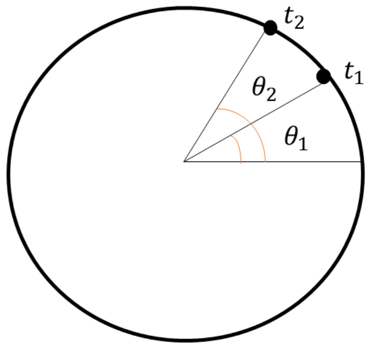


Figure 2.11 : Mouvement circulaire

8.2.1. Vitesse angulaire ou vitesse de rotation (w)

8.2.1.1. Vitesse angulaire moyenne

$$\omega_{moy} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

8.2.1.2. Vitesse angulaire instantanée

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right) = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \ \ (rd/s)$$

8.2.2. Mouvement circulaire uniforme :

Dans ce cas, l'accélération angulaire est nulle et les équations de mouvement sont :

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \dfrac{d\dot{\theta}}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt} = 0 & (\dfrac{rd}{s^2}) \\ \dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt} = \omega = cst & (\dfrac{rd}{s}) \\ \qquad \theta = \omega t + \theta_0 & \end{cases}$$

8.2.3. Mouvement circulaire uniformément varié

Les conditions initiales sont : à t=0: $\begin{cases} \omega = \omega_0 \\ \theta = \theta_0 \end{cases}$

L'accélération angulaire est constante et on a :

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} = cst \\ \dot{\theta} = \omega = \ddot{\theta}t + \omega_0 \\ \theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}.\mathrm{t}^2 + \omega_0.t + \theta_0 \end{cases}$$

On peut retrouver facilement, dans le cas de l'accélération linéaire, la formule :

- $\omega = \mathrm{f}(\theta)$

$$\omega^2 - \omega = 2\ddot{\theta}(\theta - \theta_0)$$

8.3.Mouvement Rectiligne Sinusoïdal

8.3.1. Equation horaire

Le mouvement d'un point matériel est rectiligne sinusoïdal si son équation horaire peut s'écrire sous la forme :

$$x = X_m \cdot cos(\omega.t + \phi)$$

Ou même

$$x = X_m \cdot sin(\omega.t + \alpha)$$

X_m : Amplitude ou élongation maximale, son unité est le mètre

x : Élongation ou abscisse instantané elle varie entre deux valeurs extrêmes :

$-1 \leq cos(\omega t + \phi) \leq +1 \Rightarrow -X_m \leq x \leq +X_m$, son unité est le mètre

ω : Pulsation du mouvement, son unité est le radian/seconde.

ϕ : Phase initiale, son unité est le radian.

$\omega t + \phi$: Phase instantanée, son unité est le radian.

8.3.2. La vitesse

En dérivant l'équation horaire on obtient l'expression de la vitesse instantanée :

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow v = -X_m \cdot \omega sin(\omega.t + \phi)$$

Cette vitesse varie entre deux valeurs extrêmes :

$$-1 \leq sin(\omega t + \phi) \leq +1 \Rightarrow -\omega X_m \leq v \leq +\omega X_m$$

8.3.3. L'accélération

En dérivant l'équation de la vitesse on obtient l'expression de l'accélération instantanée

$$a = \ddot{x} = \dot{v} = \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow a = -X_m \, . \omega^2 cos(\omega . t + \phi)$$

Cette accélération varie entre deux valeurs extrêmes

$$+\omega^2 X_m \geq a \geq -\omega^2 X_m$$

Nous pouvons écrire l'expression de l'accélération sous la forme :

$$a = -\omega^2 x$$

L'accélération est proportionnelle à l'élongation avec un signe opposé.

Contrairement à la vitesse, l'accélération s'annule au passage du mobile par la position d'équilibre (origine des abscisses), et prend une valeur maximale lorsque l'élongation est maximale. Nous avons résumé sur la figure 4.9 les principales caractéristiques du mouvement rectiligne sinusoïdal.

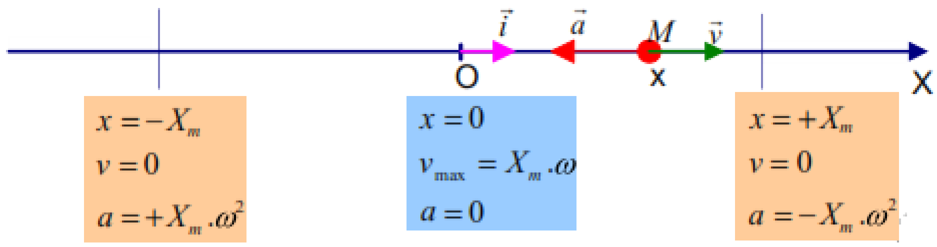


Figure 2.12 Mouvement Rectiligne Sinusoïdal

8.3.4. Equation différentielle du mouvement :

L'équation de l'accélération peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

La solution mathématique de cette équation différentielle est de la forme :

$$x = A cos\omega t + \ B sinx\omega t$$

Après transformation trigonométrique nous pouvons écrire : $x \ = \ X_m \cdot cos(\omega . t \ + \ \phi \ )$

X_m et ϕ sont les constantes différentielles qui sont déterminées grâce aux conditions initiales sur l'élongation x_0 et la vitesse v_0 ; d'où l'on obtient un système de deux équations à deux inconnues qui nous permet de déterminer X_m et ϕ

$$a\ t = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x_0 = X_m \cdot cos\phi \\ v_0 = -X_m \cdot \omega sin\phi \end{array} \right.$$

Les diagrammes du mouvement : La figure 4.10 représente les diagrammes du déplacement, de la vitesse et de l'accélération du mouvement rectiligne sinusoïdal (pour simplifier nous avons choisi $\phi = 0$)

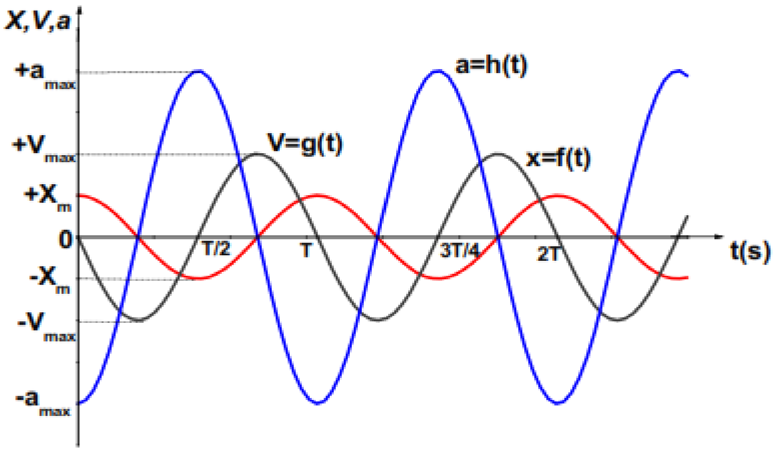


Figure 2.13 Diagramme du mouvement

- **Exercice 3**

Un vibreur sinusoïdal représenté par l'équation $x \ = \ 4 \cdot cos(0.1t \ + \ 0.5)$ (toutes les unités sont dans le système international MKS).

Trouver :

1. L'amplitude, la période, la fréquence et la phase initiale du mouvement,
2. La vitesse et l'accélération,
3. Les conditions initiales,
4. La position, la vitesse et l'accélération au temps *t* 5=s,

5. Dessiner les diagrammes du mouvement.

Solution

Procédons par identification de l'équation horaire générale du mouvement rectiligne sinusoïdal et l'équation donnée dans l'énoncé de cet exercice.

$$x = 4 \cdot sin(0.1t + 0.5) = x = X_m \cdot sin(\omega . t + \phi)$$

1. L'amplitude, la période, la fréquence et la phase initiale du mouvement.

$X_m = 4m, T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 20\pi = 62.8s$

$N = \frac{1}{T} \Rightarrow N = 1.59 * 10^{-2} Hz \,; \phi = 0.5\, rad$

2. Calcul de la vitesse et de l'accélération :

$v = \dot{x} = 0.4\, cos(0.1t + 0.5)$

$a = \ddot{x} = -0.04\, sin(0.1t + 0.5) = -0.04x$

3. Détermination des conditions initiales :

$t = 0 \Rightarrow x_0 = 4 \cdot sin0.5 \Rightarrow x_0 = 1.92\, m$

$v_0 = 0.4cos0.5 \approx 0.35ms^{-1} \Rightarrow v_0 = 0.35ms^{-1}$

4. Désignation de la position, la vitesse et l'accélération au temps *t*= 5s :

$$t = 0 \Rightarrow x = 4 \cdot \sin(0.5 + 0.5) \Rightarrow x = 3.36m$$

$$v = 0.4cos1 \Rightarrow v = 0.22m.s^{-1}$$

$$\Rightarrow a = -0.04sin1 = 0.034m.s^{-2}$$

5. Diagramme du mouvement :

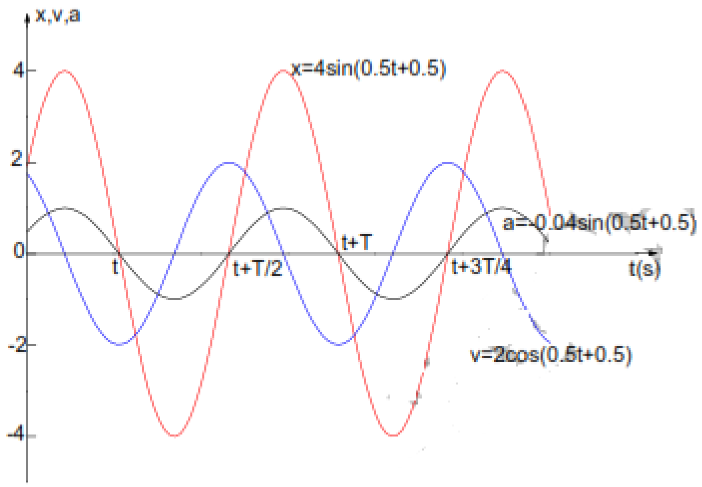


Figure 2.14 Diagramme du mouvement

9. Étude du mouvement dans différents systèmes de coordonnées

9.1. Étude du mouvement dans le système de coordonnées cartésien $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

Soit un point M (x, y, z) en mouvement dans un repère R ou quel est attaché à la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ pour repèrer ou positionner le point M, on prend la projection de ce point dans le plan orizontal (Oxy), donne le point m puis on fait la projection verticale de M sur l'axe (Oz). On obtient le vecteur position $\overrightarrow{OM}$

- **Le vecteur position**

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) + z\vec{k}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

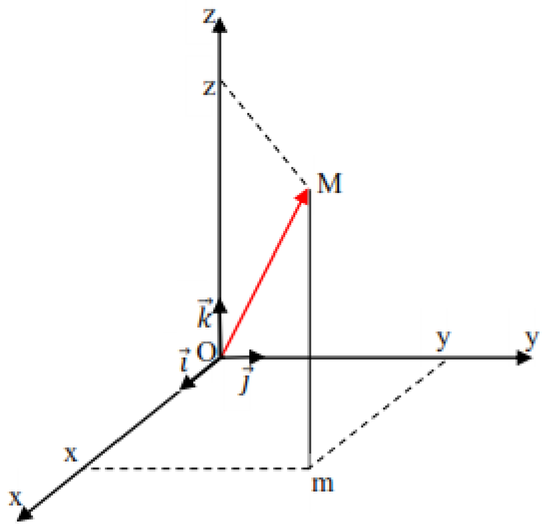


Figure 2.15 Vecteur position en coordonnées cartésiennes

Les coordonnées cartésiennes (x,y,z) d'un point M sont les valeurs algébriques mesurées par rapport au point O des projections orthogonales de M respectivement sur les axes (Ox), (Oy) et (Oz) dans le repère cartésien $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ Ces coordonnées doivent varier de $-\infty$ à $+\infty$

- **Vecteur de vitesse**

Vecteur vitesse est la dérivée de vecteur position par rapport au temps.

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$$

Les vecteurs unitaires $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont fixes dans le repère cartésien, donc :

$$\frac{d\vec{\imath}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dot{y} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = \dot{z} \end{cases}$$

- **Module de la vitesse**

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

- **Vecteur de l'accélération**

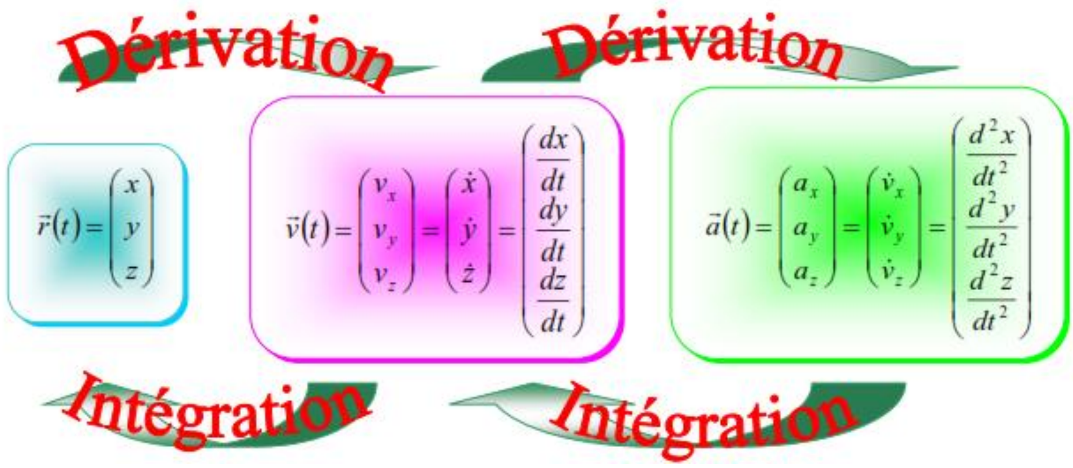
Vecteur accélération est la dérivée de vecteur vitesse par rapport au temps.

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \frac{d\dot{x}}{dt}\vec{\imath} + \frac{d\dot{y}}{dt}\vec{\jmath} + \frac{d\dot{y}}{dt}\vec{k} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \\ a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \end{cases}$$

- **Module de l'accélération**

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$



9.2.Étude du mouvement dans le système de coordonnées polaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

Le système de coordonnées polaires est un repère plan à symétrie de rotation. Les éléments du repère polaire sont r et θ. Le rayon polaire *r(t)* représente le module du vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}$$

L'angle polaire $\theta(t)$, représente l'angle compris entre l'axe OX et le vecteur position.

La base du système de coordonnées polaire est formée par deux vecteurs unitaires $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ liée au point M.

$\vec{u}_r$: ayant la même direction et le sens du vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{u}_r$

$\vec{u}_\theta$: est perpendiculaire et vecteur $\vec{u}_r$ et orienté vers le sens d'accroissement de l'angle θ : $\theta = (\vec{\imath}, \vec{u}_r)$

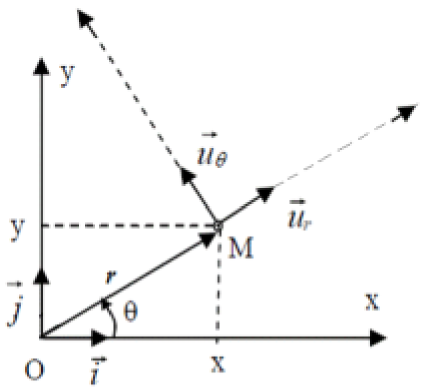


Figure 2.15 Vecteur position en coordonnées polaires

- **Relation avec les coordonnées cartésiennes**

La relation entre les éléments du repère cartésien (*x*,*y*) et celles du polaire (r, θ) sont données par les relations suivantes : : $\overrightarrow{OM}$=$x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

$$\begin{cases} x = r.cos\theta \\ y = r.sin\theta \end{cases}$$

La relation entre les éléments du repère polaire (r, Θ) et celles du cartésien (x,y) sont données par les relations suivantes :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctg\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

La relation entre les vecteurs unitaires du repère polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et celles du repère cartésien $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est exprimée par la relation suivante :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = cos\theta.\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath} \\ \vec{u}_\theta = -sin\theta.\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath} \end{cases}$$

Avec : $\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta$ $\qquad \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r$

- **Vecteur de position**

Le vecteur position lient l'origine O avec le mobile M OM est définie par :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = OM = r: rayon \qquad \theta = (\vec{\imath}, \boldsymbol{\vec{u}_r})$$

$$\overrightarrow{OM}: \begin{cases} 0 \leq r \leq +\infty \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM}: \begin{cases} r(t): \text{composante radiale} \\ \theta(t): \text{composante transversale} \end{cases}$$

- **Vecteur de vitesse**

Par définition

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\vec{u}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

La dérivée des vecteurs unitaires $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ peut être déterminée par l'intermédiaire de la variable

- Dérivation des vecteurs unitaires $\frac{d\vec{u}_r}{dt}, \frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}_r}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}sin\theta.\vec{\imath} + \frac{d\theta}{dt}cos\theta\vec{\jmath} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}cos\theta.\vec{\imath} - \frac{d\theta}{dt}sin\theta\vec{\jmath} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_r = -\dot{\theta}\vec{u}_r \end{cases} \quad / \quad \begin{cases} \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} == -\dot{\theta}\vec{u}_r \end{cases}$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} \Longrightarrow \vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\Longrightarrow \vec{v} = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta$$

Avec : $\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{{v_r}^2 + {v_\theta}^2} = \sqrt{\dot{r}^{\,2} + \left(r\dot{\theta}\right)^2}$$

- **Vecteur de l'accélération**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{d^2t} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\left[\dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right]$$

$$= \ddot{r}\,\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

$$\Longrightarrow \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

$$\Longrightarrow \vec{a} = a_r\vec{u}_r + a_\theta\vec{u}_\theta$$

Avec : $\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{{a_r}^2 + {a_\theta}^2} = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)^2}$$

9.3.Étude du mouvement dans le système de coordonnées cylindriques$(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$

Ces coordonnées sont adaptées pour décrire un problème à symétrie axiale d'axe Oz. C'est un repère spatial choisi pour l'étude d'un mouvement spirale ou sur une surface cylindrique. La définition du repère cylindrique par rapport au repère cartésien est donnée sur la figure ci-contre. Le mouvement d'un mobile M au système de coordonnées cylindriques est décomposé en deux mouvements.

Un mouvement dans le repère polaire qui est en fait la projection du mouvement de M sur le plan (Oxy) et un mouvement de translation selon l'axe Oz.

Les éléments du repère cylindrique sont :

ρ : le module du vecteur $\overrightarrow{Om}$ qui représente la projection du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur le plan (Oxy)

θ : l'angle compris entre l'axe OX et le vecteur $\vec{\rho} = \overrightarrow{Om}$

z: représente la hauteur du point M par rapport au plan (Oxy). Les vecteurs unitaires $\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta$ *et* $\vec{k}$ constituants la base du repère cylindrique.

- **Relation avec les coordonnées cartésiennes**

Projection des vecteurs unitaires du repère cylindriques $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ dans le système de coordonnées cartésiennes est exprimée par la relation suivante :

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = cos\theta.\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath} \\ \vec{u}_\theta = -sin\theta.\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

Le repère cylindrique est en fait, une extension du repère polaire dans l'espace, est les grandeurs cinématiques définissants le mouvement du point M ($\overrightarrow{OM}, \vec{v}, \vec{a}$) peuvent être exprimé sur la base des expressions précédentes.

La relation entre les éléments du repère cartésien (*x, y, z*) et celles du polaire (r, θ, *z*) sont données par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x = \rho.cos\theta \\ y = \rho.sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

La relation entre les éléments du repère polaire (*r, Θ*) et celles du cartésien (x,y) sont données par les relations suivantes :

$$\begin{cases} OM = r = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = arctg\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

- **Vecteur Position**

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \vec{\boldsymbol{\rho}} + \vec{z}$$

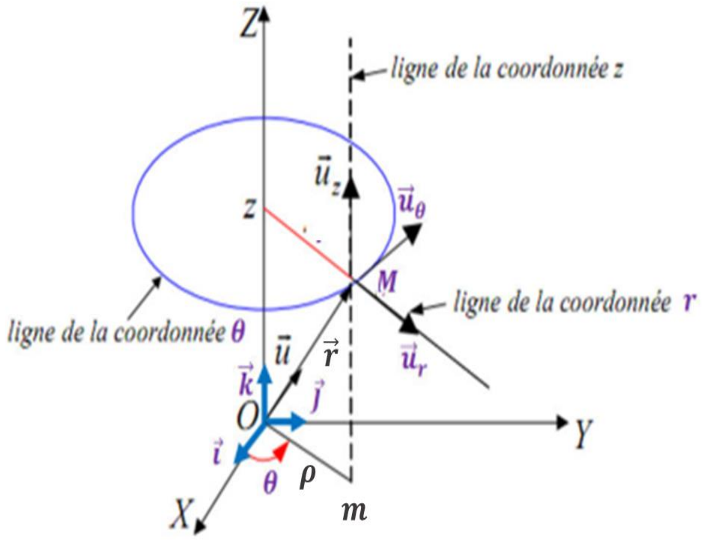


Figure 2.15 Vecteur position en coordonnées cylindrique

Avec $\overrightarrow{Om}$: le vecteur position en coordonnées polaires est donné par :

$$\overrightarrow{Om} = \rho.\vec{u}_\rho = \rho(cos\theta.\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath})$$

Et $\overrightarrow{mM}$: est un vecteur parallèle à l'axe axial (oz) en coordonnées cartésiennes, donné par :

$$\overrightarrow{mM} = z.\vec{k}$$

- **Le vecteur de position dans les coordonnés cartésiens :**

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = \rho cos\theta.\vec{\imath} + \rho sin\theta\vec{\jmath} + z.\vec{k}$$

- **Le vecteur de position dans les coordonnés cartésiens :**

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \vec{\rho} + \vec{z} \Longrightarrow \overrightarrow{OM} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM}: \begin{cases} \rho = \left|\overrightarrow{Om}\right|; \quad 0 \leq \rho \leq +\infty \\ \theta = \left(\overrightarrow{Om}, \vec{\imath}\right) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z; \quad -\infty \leq z \leq +\infty \end{cases}$$

- **Vecteur de vitesse**

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}.\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}.\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\theta\vec{u}_\theta + \dot{z}.\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta + v_z.\vec{k}$$

Avec : $\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \\ v_z = \dot{z} \end{cases}$

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{{v_r}^2 + {v_\theta}^2 + {v_z}^2} = \sqrt{\dot{r}^{\,2} + \left(r\dot{\theta}\right)^2 + \dot{z}^{\,2}}$$

- **Vecteur de l'accélération**

Le vecteur accélération est définition par le dérivé du vecteur vitesse. L'expression finale de l'accélération dans le système de coordonnées cylindriques est :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d(\dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}.\vec{k})}{dt} = \ddot{r}\,\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + \ddot{z}.\vec{k}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + +\ddot{z}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = a_r\vec{u}_r + a_\theta\vec{u}_\theta + +a_z.\vec{k}$$

Avec : $\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases}$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{{a_r}^2 + {a_\theta}^2 + {a_z}^2} = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)^2 + \ddot{z}^2}$$

9.4.Étude du mouvement dans un système de coordonnées sphériques$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$

Ces coordonnées sont adaptées pour décrire un problème à symétrie sphérique, lorsque le problème présente une symétrie sphérique autour d'un point *O* que l'on prend pour origine du repère d'espace. Les éléments du système de coordonnées sphériques sont : r , θ et φ telles que : r , θ et φ

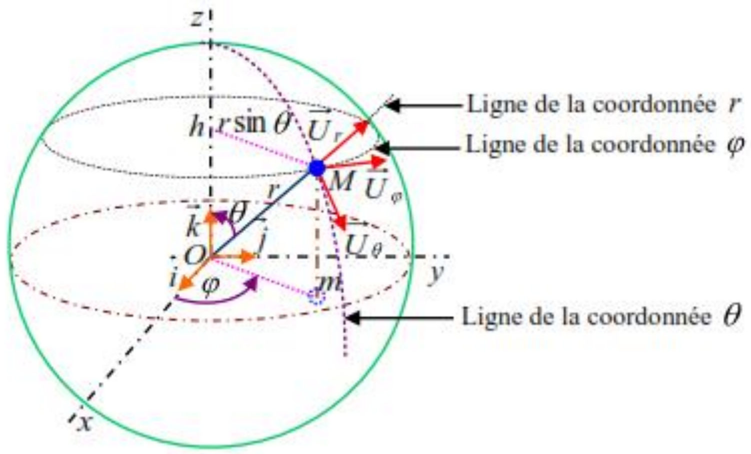


Figure 2.15 Vecteur position en coordonnées sphériques

$r = |\overrightarrow{OM}|, \quad \theta = (\overrightarrow{oz}, \overrightarrow{OM}), \quad \varphi = (\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{OM})$

Le repère sphérique est orthonormé. Il est constitué de trois vecteurs unitaires$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ varient avec le temps.

- **Vecteur de Position**

$$\overrightarrow{OM}: \begin{cases} r = |\overrightarrow{OM}| \,; 0 \le r \le +\infty \\ \varphi = (\overrightarrow{OM}, \vec{\imath});\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ \theta = (\overrightarrow{OM}, \vec{k}); 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = r\vec{u}_r$

Avec : $\begin{cases} sin\varphi = \frac{y}{Om} \\ cos\varphi = \frac{x}{Om} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = Om.sin\varphi \\ x = Om.cos\varphi \end{cases}$ et $\begin{cases} sin\theta = \frac{Om}{r} \\ cos\theta = \frac{z}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Om = r.sin\theta \\ z = r.cos\theta \end{cases}$

Nous en déduisons que :

$$\Rightarrow \begin{cases} x = rsin\theta cos\varphi \\ y = rsin\theta sin\varphi \\ z = rcos\theta \end{cases}$$

La projection du vecteur position dans le repère cartésien peut être exprimé par :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r(\ sin\theta cos\varphi\vec{\imath} + sin\theta sin\varphi\vec{\jmath} + cos\theta\vec{k})$$

Dans le système de coordonnées sphériques, le vecteur position prend la formule :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

- **Relation avec les coordonnées cartésiennes**

On passe des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes par les relations :

$$\begin{cases} x = rsin\theta cos\varphi \\ y = rsin\theta sin\varphi \\ z = rcos\theta \end{cases}$$

Le passage inverse des coordonnées cartésiennes vers les coordonnées sphériques est effectué par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \boldsymbol{r} = \sqrt{x^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2} \\ \varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right) \\ \theta = arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2}}\right) \end{cases}$$

- **Vecteurs unitaires du repère sphériques $(\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{u}}_{\theta}, \vec{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\varphi}})$**

Il est utile de connaitre les expressions des vecteurs unitaires de système de coordonnées sphériques avec celles du repère cartésien. Cela permettra de trouver les dérivées temporelle et spéciales qui rentre dans la formulation du vecteur vitesse et accélération.

A partir du vecteur position, on peut déduire le vecteur unitaire radial

$$\vec{r} = r\vec{u}_r = \mathrm{r}(\ sin\theta cos\varphi\vec{\imath} + sin\theta sin\varphi\vec{\jmath} + cos\theta\vec{k})$$

$$\Longrightarrow \vec{u}_r = sin\theta cos\varphi\vec{\imath} + sin\theta sin\varphi\vec{\jmath} + cos\theta\vec{k}$$

Les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$, appartiennes au plan méridien avec, $\vec{u}_\theta = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}$

$$\Longrightarrow\ \vec{u}_\theta = cos\theta cos\varphi\vec{\imath} + cos\theta sin\varphi\vec{\jmath} - sin\theta\ \vec{k}$$

Les trois vecteurs, $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta,$ et $\vec{u}_\varphi$ forment un repère orthonormé, donc l'expression du vecteur $\vec{u}_\varphi$ Peut être déterminé par le produit vectoriel des deux premiers vecteurs : $\vec{u}_\varphi = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$, donc :

$$\vec{u}_\varphi = \vec{u}_r \wedge\ \vec{u}_\theta = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ sin\theta cos\varphi & sin\theta sin\varphi & cos\theta \\ cos\theta cos\varphi & cos\theta sin\varphi & -sin\theta \end{vmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{u}_\varphi = -sin\varphi\vec{\imath} + cos\varphi\vec{\jmath}$$

Alors :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\vec{\imath} + \cos\varphi\vec{\jmath} \end{cases}$$

- **Vecteur de Vitesse**

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(r\vec{u}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

On remarque que l'expression du vecteur unitaire $\vec{u}_r$ r dépend à deux variables, $\varphi\ et\ \theta$ alors, la dérivée du vecteur unitaire $\vec{u}_r$ par rapport au temps s'écrite :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{u}_r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

Alors

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\varphi} = -\sin\theta\sin\varphi\vec{\imath} + \sin\theta\cos\varphi\vec{\jmath} = \sin\theta(-\sin\varphi\vec{\imath} + \cos\varphi\vec{\jmath}\ )$$

D'où :

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\varphi} = \sin\theta\ \ \vec{u}_\varphi$$

Et ainsi :

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \cos\theta\cos\varphi\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k}$$

Donc :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$$

Par remplacement on obtient l'expression finale du vecteur vitesse en coordonnées sphériques :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(r\vec{u}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\left(\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi\right)$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \mathrm{r}\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$$

Les trois composantes sphériques du vecteur vitesse apparaissent clairement :

$$\Rightarrow \vec{v} = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta + \ v_\varphi.\ \vec{u}_\varphi$$

Avec : $\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \\ v_\varphi = \mathrm{r}\dot{\varphi}sin\theta \end{cases}$

$$\|\vec{v}\| = \ v = \sqrt{{v_r}^2 + {v_\theta}^2 + {v_\varphi}^2} = \sqrt{\dot{r}^{\,2} + \left(r\dot{\theta}\right)^2 + r\dot{\varphi}sin\theta^2}$$

- **Vecteur de l'accélération**

En dérivant le vecteur vitesse par rapport au temps, on arrive à l'expression du vecteur accélération soit :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \mathrm{r}\dot{\varphi}sin\theta\,\vec{u}_\varphi)}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d(\dot{r}\vec{u}_r)}{dt} + \frac{d\left(r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta\right)}{dt} + + \frac{d\left(\mathrm{r}\dot{\varphi}sin\theta\,\vec{u}_\varphi\right)}{dt} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

Dérivons terme par terme :

$$\vec{A} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

$$\vec{B} = \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\vec{C} = \dot{r}\dot{\varphi}sin\theta\,\vec{u}_\varphi + r\ddot{\varphi}sin\theta\,\vec{u}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\theta}cos\theta\,\vec{u}_\varphi + r\dot{\varphi}sin\theta\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}sin\theta\,\vec{u}_\varphi + r\ddot{\varphi}sin\theta\,\vec{u}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\theta}cos\theta\,\vec{u}_\varphi + r\dot{\varphi}sin\theta\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}$$

- $\vec{A} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt}$

$$\Rightarrow \vec{A} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}(\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}sin\theta\,\vec{u}_\varphi)$$

Avec : $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{u}_\theta}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{u}_r + \dot{\varphi}sin\theta\,\vec{u}_\varphi$

- $\vec{B} = \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$

$$\Longrightarrow \vec{B} = \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\,\vec{u}_r + \dot{\varphi}sin\,\vec{u}_\varphi)$$

- Le dérivé de $\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}$:

$$\vec{u}_\varphi = -sin\varphi\vec{\imath} + cos\varphi\vec{\jmath}$$

$$\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = \dot{\varphi}(cos\varphi\vec{\imath} + sin\varphi\vec{\jmath})$$

- En utilisant les deux expressions de $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$, on calcule

$$\vec{u}_r.sin\theta = sin^2\theta cos\varphi\vec{\imath} + sin^2\theta sin\varphi\vec{\jmath} + sin\theta cos\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{u}_\theta.cos\theta = cos^2\theta cos\varphi\vec{\imath} + cos^2\theta sin\varphi\vec{\jmath} - cos\theta sin\theta\,\vec{k}$$

$$\Longrightarrow \vec{u}_r.sin\theta + \vec{u}_\theta.cos\theta = cos\varphi\vec{\imath} + sin\varphi\vec{\jmath}$$

Alors : $\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = \dot{\varphi}(sin\theta\,\vec{u}_r + cos\theta\,\vec{u}_\theta)$

➢ $\vec{C} = \dot{r}\dot{\varphi}sin\theta\,\vec{u}_\varphi + r\ddot{\varphi}sin\theta\,\vec{u}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\theta}cos\theta\,\vec{u}_\varphi + r\dot{\varphi}sin\theta\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}$

$$\Longrightarrow \vec{C} = \dot{r}\dot{\varphi}sin\theta\,\vec{u}_\varphi + r\ddot{\varphi}sin\theta\,\vec{u}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\theta}cos\theta\,\vec{u}_\varphi + r\dot{\varphi}^2sin\theta(sin\theta\,\vec{u}_r + cos\theta\,\vec{u}_\theta)$$

- Finalement

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}(\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}sin\theta\,\vec{u}_\varphi) + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\,\vec{u}_r + \dot{\varphi}sin\,\vec{u}_\varphi\right) + \dot{r}\dot{\varphi}sin\theta\,\vec{u}_\varphi + r\ddot{\varphi}sin\theta\,\vec{u}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\theta}cos\theta\,\vec{u}_\varphi + r\dot{\varphi}^2sin\theta(sin\theta\,\vec{u}_r + cos\theta\,\vec{u}_\theta)$$

$$\Longrightarrow \vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2(sin\theta)^2 - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2sin\theta cos\theta\right)\vec{u}_\theta + \left(2\dot{r}\dot{\varphi}sin\theta + r\,\ddot{\varphi}sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\theta\right)\vec{u}_\varphi$$

Avec : $\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2sin^2\theta - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2sin\theta cos\theta \\ a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi}sin\theta + r\,\ddot{\varphi}sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\theta \end{cases}$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{{a_r}^2 + {a_\theta}^2 + {a_\varphi}^2}$$

Tableau 2.1 Résumé de mouvement dans différents systèmes de coordonnées

Vecteur	*Coordonnées cartésiennes* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ *Base* $(\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}})$	*Coordonnées polaires* $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta})$ *Base* $(\vec{\boldsymbol{u}}_r, \vec{\boldsymbol{u}}_\theta)$	*Coordonnées cylindriques* $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{z})$ *Base* $(\vec{\boldsymbol{u}}_\rho, \vec{\boldsymbol{u}}_\theta, \vec{\boldsymbol{k}})$	*Coordonnées sphériques* $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi})$ *Base* $(\vec{\boldsymbol{u}}_r, \vec{\boldsymbol{u}}_\theta, \vec{\boldsymbol{u}}_\varphi)$
Position $\overrightarrow{OM}$	$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$	$\overrightarrow{OM} = r\vec{\boldsymbol{u}}_r$	$\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{\rho}.\vec{\boldsymbol{u}}_\rho + z.\vec{\boldsymbol{k}}$ *Et* $\boldsymbol{\rho} \neq \boldsymbol{r}$	$\overrightarrow{OM} = r\vec{\boldsymbol{u}}_r$
Vitesse $\vec{v}$	$\vec{v} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$	$\vec{v} = \dot{\boldsymbol{r}}\,\vec{\boldsymbol{u}}_r + \boldsymbol{r}\dot{\theta}\vec{\boldsymbol{u}}_\theta$	$\vec{v} = \dot{\boldsymbol{r}}\,\vec{\boldsymbol{u}}_r + \boldsymbol{r}\dot{\theta}\vec{\boldsymbol{u}}_\theta + \dot{z}.\vec{\boldsymbol{k}}$	$\vec{v} = \dot{r}\vec{\boldsymbol{u}}_r + \boldsymbol{r}\dot{\theta}\,\vec{\boldsymbol{u}}_\theta + \mathbf{r}\dot{\varphi}sin\theta\,\vec{\boldsymbol{u}}_\varphi$
Accélération $\vec{a}$	$\vec{a} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$	$\vec{a} = (\ddot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}\dot{\theta}^2)\vec{\boldsymbol{u}}_r + (\mathbf{2}\dot{\boldsymbol{r}}\dot{\theta} + \boldsymbol{r}\ddot{\theta})\vec{\boldsymbol{u}}_\theta$	$\vec{a} = (\ddot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}\dot{\theta}^2)\vec{\boldsymbol{u}}_r + (\mathbf{2}\dot{\boldsymbol{r}}\dot{\theta} + \boldsymbol{r}\ddot{\theta})\vec{\boldsymbol{u}}_\theta + +\ddot{\boldsymbol{z}}\vec{\boldsymbol{k}}$	$\vec{a} = \left(\ddot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}\dot{\varphi}^2(sin\theta)^2 - \boldsymbol{r}\dot{\theta}^2\right)\vec{\boldsymbol{u}}_r + \left(\mathbf{2}\dot{\boldsymbol{r}}\dot{\theta} + \boldsymbol{r}\ddot{\theta} - \boldsymbol{r}\dot{\varphi}^2 sin\theta cos\theta\right)\vec{\boldsymbol{u}}_\theta + \left(\mathbf{2}\dot{\boldsymbol{r}}\dot{\varphi}sin\theta + r\,\ddot{\varphi}sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\boldsymbol{cos}\theta\right)\vec{\boldsymbol{u}}_\varphi$

9.5.Étude du mouvement dans un système de coordonnées intrinsèques (système de Frenet) $(\vec{\boldsymbol{u}}_T, \vec{\boldsymbol{u}}_N)$

Pour déterminer l'accélération en un point M, certains cas on utilise ses composantes intrinsèques qui sont ses projections algébriques

Considérons un mouvement dont la trajectoire est une courbe plane quelconque. Nous dessinons un repère composé de l'axe *MT*, tangent à la trajectoire au point *M* et porte le vecteur vitesse, et de l'axe *MN* perpendiculaire à l'axe *MT*

.

Le système de coordonnées intrinsèques pour chaque point de la trajectoire est défini comme un système de référence formé par deux vecteurs unitaires $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$

On définit deux vecteurs unitaires :

$\vec{u}_T$: porté par la tangente à la trajectoire en M est orienté dans le sens positif,

$\vec{u}_N$: porté par la perpendiculaire à la trajectoire et dirigée vers l'intérieur.

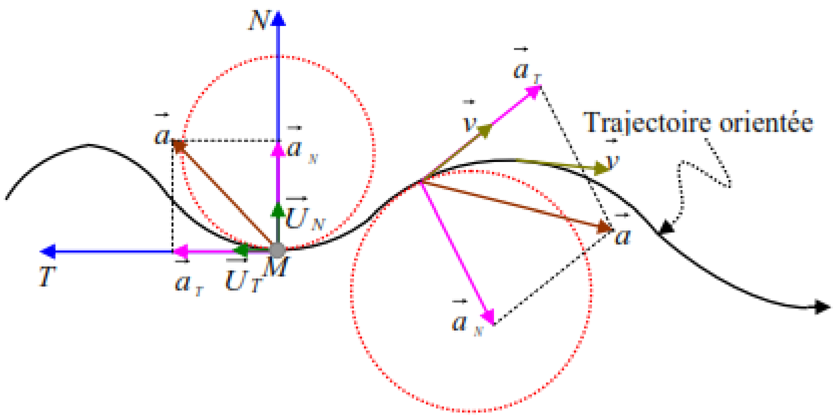


Figure 2.16 Vecteur vitesse et accélération et la base de Frenet.

On remarque sur la figure (2-12) que la vitesse s'écrit alors :

- **Vecteur de vitesse**

$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_T = v\vec{u}_T$ (ds=R. $d\theta$) R : rayon de courbure

- **Vecteur de l'accélération**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{u}_T)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_T}{dt}$$

$\Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{u}_T}{d\theta}$ $\qquad\qquad$ $\frac{d\vec{u}_T}{d\theta} = \vec{u}_N$

$\Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\dot{\theta}\vec{u}_N \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + vw\vec{u}_N$ $\qquad\qquad$ $w = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

Avec : $v = w.R \Rightarrow w = \frac{v}{R}$

$\Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N \Rightarrow \vec{a} = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N$

Avec : $\begin{cases} a_T = \frac{dv}{dt} & \text{: accélération tangentielle} \\ a_N = \frac{v^2}{R} & \text{: accélération normale} \end{cases}$

$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{a_T{}^2 + a_N{}^2}$

- **Détermination du rayon de courbure**

La relation du rayon de courbure est définie comme suite :

On calcule le produit vectoriel entre l'accélération et la vitesse

$$\vec{\gamma} \wedge \vec{v} = \left(\frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N\right) \wedge v\vec{u}_T$$

$$\vec{\gamma} \wedge \vec{v} = \frac{v^3}{R}(\vec{u}_N \wedge \vec{u}_T)$$

Comme le produit vectoriel est un vecteur on prendra son module, ainsi on peut déduire le rayon de courbure

$$|\vec{\gamma} \wedge \vec{v}| = \frac{v^3}{R} \Longrightarrow R = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{\gamma} \wedge \vec{v}|}$$

On remarque que le rayon de courbure est une grandeur algébrique, il peut être calculé dans N'importe quelle base.

- **<u>Exercice 4</u>**

Les cordonnées polaire (r, θ) d'une particule décrivant une trajectoire curviligne dans plan (Oxy) sont données par

$$\begin{cases} r = 2a \sin\theta \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

1- Déterminer en coordonnées polaire :
   a- L'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$
   b- L'expression du vecteur vitesse $(\vec{v}_r, \vec{v}_\theta)$ ainsi que son module
   c- L'expression du vecteur accélération $(\vec{a}_r, \vec{a}_\theta)$ ainsi que son module
2- Déterminer en coordonnées curviligne (repère Frenet) l'accélération tangentielle a_T et normal a_N

3- Déduisez le rayon de courbure R_C

Solution

1- L'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = 2a\, sin\,(\omega t)\vec{u}_r$$

2- L'expression du vecteur vitesse $(\vec{v}_r, \vec{v}_\theta)$ ainsi que son module

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{v} = 2a\omega\, cos\,(\omega t)\vec{u}_r + 2a\omega\, sin\,(\omega t)\vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_r = 2a\omega\, cos\,(\omega t) \\ v_\theta = 2a\omega\, sin\,(\omega t) \end{cases}$$

- Le module: $\|\vec{v}\| = v = \sqrt{[2a\omega \cos(\omega t)]^2 + [2a \sin(\omega t)]^2}$

$$\Rightarrow v = \sqrt{4a^2\omega^2[\, sin^2\,(\omega t) + cos^2\,(\omega t])} \Rightarrow v = 2a\omega$$

3- L'expression du vecteur accélération $(\vec{a}_r, \vec{a}_\theta)$ ainsi que son module

$$\Rightarrow \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -4a\omega^2\, sin(\omega t)\vec{u}_r + 4a\omega^2\, cos(\omega t)\vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_r = -4a\omega^2\, sin(\omega t) \\ a_\theta = 4a\omega^2\, cos(\omega t) \end{cases}$$

- le module : $\|\vec{a}\| = a = \sqrt{[-4a\omega^2\, sin(\omega t)]^2 + [4a\omega^2\, cos(\omega t)]^2} = \sqrt{16a^2\omega^4[\, sin^2\,(\omega t) + cos^2\,(\omega t])} \Rightarrow a = 4a\omega^2$

-

4- Détermination de l'accélération tangentielle a_T et normal a_N

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} \quad = \dfrac{d(2a\omega)}{dt} = 0 \\ \quad a_N = \dfrac{v^2}{R_C} \quad =? \end{cases}$$

So; $a = \sqrt{{a_T}^2 + {a_N}^2} \Longrightarrow a^2 = {a_T}^2 + {a_N}^2 \Longrightarrow {a_N}^2 = a^2 - {a_T}^2 \Longrightarrow a_N = a$

$$\Longrightarrow a_N = 4a\omega^2$$

5- Determination le rayon de courbure R_C

$$a_N = \frac{v^2}{R_C} \Longrightarrow R_C = \frac{v^2}{a_N} \Longrightarrow R_C = \frac{(2a\omega)^2}{4a\omega^2} \Longrightarrow R_C = a$$

10. Mouvements relatifs

10.1. Introduction

Le mouvement d'un point matériel (ou d'un corps) ne peut être étudié que par rapport à un référentiel, donc on dit que le mouvement est une notion relative, et que l'état de mouvement ou de repos d'un point dépend du référentiel utilisé.

Le mouvement relatif est la partie de la cinématique qui permet de trouver les relations entre les vecteurs position, vitesse et accélération d'un mobile mesurées par rapport à différents référentiels.

10.2. Définition

Soit à étudier le mouvement d'une particule M par rapport à un repère fixe R(Oxyz) au quel est attaché à une base fixe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, appelé repère absolu. Il est parfois intéressant d'introduire un second repère $R'(O'x'y'z')$, est attaché à une base mobile $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}')$, dit repère relatif, par rapport au quel le mouvement de M soit simple à étudier. Soient,

- R $(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{xyz})$ un repère absolu (repère fixe).
- $R'(O'x'y'z')$ un repère relatif (repère mobile par rapport à R.

Si *M* est un point matériel mobile dans R' , on appellera

- Mouvement absolu, le mouvement de M par rapport à (R)= R_a est un référentiel fixe,
- Mouvement relatif, le mouvement de M par rapport à (R') = R_r is a moving reference frame,
- Mouvement d'entraînement, le mouvement R_r de par rapport à R_a

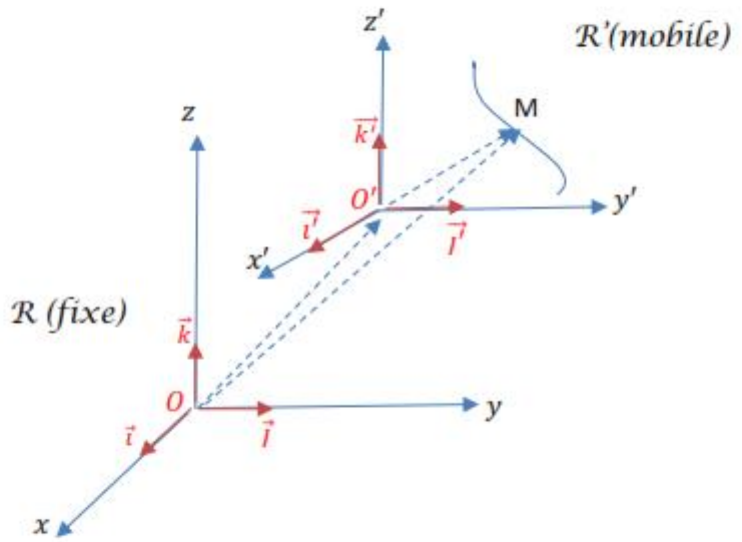


Figure 2.17 Représentation d'un mouvement relatif

Nous cosignons ces résultats dans le tableau (2.2) suivant :

Tableau 2.2 Définitions des vecteurs : position, vitesse et accélération par rapport les deux référentiels absolu et relatif.

Observateur	$\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}$ invariants dans R_a	$\vec{\boldsymbol{i}}', \vec{\boldsymbol{j}}', \vec{\boldsymbol{k}}'$ variables dans R_r
Position	$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}$	$\vec{r}'(t) = \overrightarrow{O'M}$
Vitesse	$\vec{v}_a(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$	$\vec{v}_r(t) = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$
Accélération	$\vec{a}_a(t) = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{d^2t}$	$\vec{a}_r(t) = \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{d^2t}$

10.3. Vecteur de position

Sur la figure (2-15), on peut voir que d'après la relation de Charles :

$$\left(\overrightarrow{OM}\right)_{R_a} = \left(\overrightarrow{OO'}\right)_{R_a/R_r} + \left(\overrightarrow{O'M}\right)_{R_r}$$

Par suite :

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{OM}\right)_{R_a} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \quad \textit{vecteur position du point M of point M par rapport à } R_a \\ \left(\overrightarrow{O'M}\right)_{R_r} = x'\vec{\boldsymbol{\imath}}' + y'\vec{\boldsymbol{\jmath}}' + z'\vec{\boldsymbol{k}}' : \textit{vecteur position du point M of point M par rapport à } R_r \end{cases}$$

Avec : x, y et z sont des coordonnées du point M dans R_a

x', y' et z' sont des coordonnées du point M dans R_r

10.4. Vecteur de vitesse

On a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OO'} + x'\vec{\boldsymbol{\imath}}' + y'\vec{\boldsymbol{\jmath}}' + z'\vec{\boldsymbol{k}}'$$

En dérivant la relation précédente par rapport au temps, on obtient la relation entre les différentes vitesses :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}\right)}{dt}$$

Alors :

$$\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{\vec{v}_a(t)} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}}_{\vec{v}_e(t)} + \underbrace{\frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'}_{\vec{v}_r(t)}$$

Soit :

$$\begin{cases} \vec{v}_a(t) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{R_a} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k} \;\; \boldsymbol{vitesse\ absolue} : \\ (\,c'est\ la\ vitesse\ de\ \ M\ \ par\ rapport\ \text{à}\ R_a) \\ \vec{v}_e(t) = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} \;\; \boldsymbol{vitesse\ d'entrainement}: \\ (c'est\ la\ vitesse\ de\ \ R_r\ \ par\ rapport\ \text{à}\ R_a) \\ \vec{v}_r(t) = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{R_r} = \frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' \;\; \boldsymbol{vitesse\ relative} : \\ (c'est\ la\ vitesse\ de\ \ M\ \ par\ rapport\ \text{à}\ R_r) \end{cases}$$

La relation qui lie les trois vitesses et qu'on appelle loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_a(t) = \vec{v}_e(t) + \vec{v}_r(t)$$

Dans cas de rotation autour d'un axe fixe dans R_a: Le référentiel relatif R_r tourne autour de l'axe *Oz*, confondu avec l'axe $O'z'$, avec la vitesse angulaire :

$$\vec{w} = w\vec{k}$$

Nous pouvons considérer la vitesse angulaire comme étant une grandeur vectorielle, telle que sa direction soit orthogonale au plan du mouvement et dont le sens est défini par de la main droite (ou toute autre règle correspondante) qui indique le sens du vecteur résultat du produit vectoriel.

D'après la figure (2.18) nous pouvons écrire :

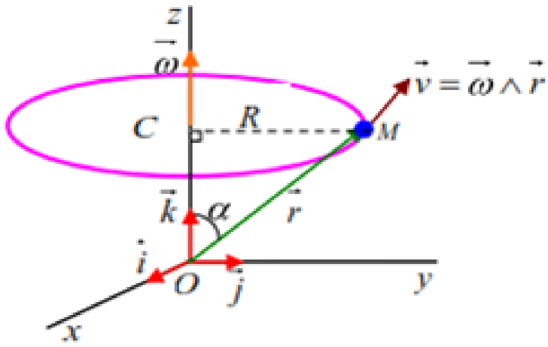


Figure 2-18 Le vecteur de la vitesse de rotation

$$R = rsin\alpha$$

Sachant que :

$$v = wR$$

Donc :

$$v = wrsin\alpha \Longrightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{w} \wedge \vec{r}$$

Sur la figure (2.19), considérons deux référentiels en mouvement de rotation uniforme relatif sans translation, l'un par rapport à l'autre.

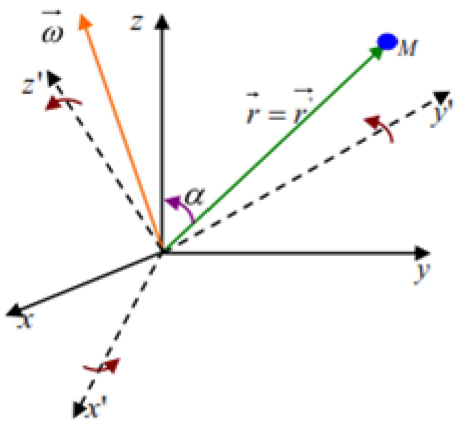


Figure 2.19 Deux référentiels en mouvement de rotation uniforme relatif.

Les extrémités des vecteurs unitaires $\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}'$ de R_a effectuent un mouvement circulaire uniforme avec une vitesse angulaire $\vec{w}$. En d'autres termes, le rapport $\frac{d\vec{\jmath}'}{dt}$ représente la vitesse d'un point situé à une distance égale à l'unité de O et se déplace avec un mouvement circulaire uniforme à la vitesse. Par analogie avec l'équation de la vitesse linéaire $\vec{v}(t) = \vec{w} \wedge \vec{r}$ nous pouvons écrire :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{w} \wedge \vec{r} \Longrightarrow \frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{w} \wedge \vec{A}$$

Alors :

$\frac{d\vec{\boldsymbol{\imath}}'}{dt} = \vec{w} \wedge \boldsymbol{\vec{\imath}'}, \frac{d\boldsymbol{\vec{\jmath}'}}{\boldsymbol{dt}} = \vec{w} \wedge \boldsymbol{\vec{\jmath}'}, \ \frac{d\boldsymbol{\vec{k}'}}{dt} = \vec{w} \wedge \boldsymbol{\vec{k}'}$

Nous pouvons écrire l'expression de la vitesse d'entrainement

$$\Longrightarrow \ \vec{v}_e(t) = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\boldsymbol{\vec{\imath}'}}{dt} + y'\frac{d\boldsymbol{\vec{\jmath}'}}{\boldsymbol{dt}} + z'\frac{d\boldsymbol{\vec{k}'}}{\boldsymbol{dt}}$$

$$\Longrightarrow \vec{v}_e(t) = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'(\vec{w} \wedge \boldsymbol{\vec{\imath}'}) + y'(\vec{w} \wedge \boldsymbol{\vec{\jmath}'}) + z'(\vec{w} \wedge \boldsymbol{\vec{k}'})$$

$$\Longrightarrow \vec{v}_e(t) = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + (\vec{w} \wedge x'\boldsymbol{\vec{\imath}'}) + (\vec{w} \wedge y'\boldsymbol{\vec{\jmath}'}) + (\vec{w} \wedge z'\boldsymbol{\vec{k}'})$$

$$\Longrightarrow \vec{v}_e(t) = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + [\vec{w} \wedge (x'\boldsymbol{\vec{\imath}'} + y'\boldsymbol{\vec{\jmath}'} + z'\boldsymbol{\vec{k}'})]$$

$$\Longrightarrow \vec{v}_e(t) = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + (\vec{w} \wedge \overrightarrow{O'M})$$

- Lorsqu'il y'a translation et rotation : $\vec{v}_e(t) = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + (\vec{w} \wedge \overrightarrow{O'M})$
- Lorsqu'il y'a translation pure : il n'y'a pas de rotation $\vec{w} = \vec{0}$: $\vec{v}_e(t) = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$
- Lorsqu'il y'a rotation pure : Les deux repères sont superposés, ils ont la même origine : $O \equiv O'$ $\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$: $\vec{v}_e(t) = \vec{w} \wedge \overrightarrow{O'M}$

- **Remarques**

- Si les coordonnées de M dans R_r sont constants, c'est-à-dire si le point M est fixe par rapport à R_r on a donc : $\vec{v}_r(t) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_a(t) = \vec{v}_e(t)$

- Si R_r est fixe par rapport R_a, on a donc : $\vec{v}_e(t) = \vec{0} \Rightarrow \quad \vec{v}_a(t) = \vec{v}_r(t)$

10.5. Vecteur d'accélération

On obtient la relation entre les différentes accélérations par rapport aux deux référentiels par la dérivée par rapport au temps, l'expression de la relation qui lie les trois vitesses :

Comme :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

Alors en dérivant par rapport au temps l'expression :

$$\vec{v}_a(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

10.5.1. Accélération absolue : c'est l'accélération de M par rapport à R_a

$$\vec{a}_a = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_{R_a} = \frac{d\vec{v}_a}{dt}$$

10.5.2. Accélération relative : c'est l'accélération de M par rapport à R_r

$$\vec{a}_r = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\right|_{R_r} = \frac{d\vec{v}_r}{dt}$$

10.5.3. Accélération d'entrainement : c'est l'accélération de R_r par rapport à R_a

$$\vec{a}_e = \left[\left(\frac{d\vec{w}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)\right] + \left[\left(\vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)\right]$$

10.5.4. Accélération de Coriolis :

Accélération complémentaire, c'est une accélération liée à la rotation de la Terre. Elle est nommée d'après le mathématicien français Gaspard-Gustave Coriolis (1792-1843) qui l'a établie en 1832. Cette accélération est perçue par les objets en mouvement sur la surface terrestre, principalement dans les mouvements latéraux. Elle est responsable de la formation des vents et des courants océaniques, et joue un rôle important dans la météo.

$$\vec{a}_c = 2.(\vec{w} \wedge \vec{v}_r)$$

- **Démonstration**

$$\vec{v}_a(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

- Lorsque nous dérivons la relation entre la vitesse et le temps, nous obtenons $:\Rightarrow \vec{a}_a(t) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{d^2t} + \left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right]\right\} + \left\{\frac{d}{dt}\left[x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right]\right\}$

$$\Rightarrow \vec{a}_a(t) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

$$= \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$$

$$+ \left\{\left[\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{\imath}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{\jmath}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'\right] + \left[\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right]\right\}$$

$$+ \left\{\left[\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{\imath}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{\jmath}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'\right] + \left[x'\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}\right]\right\}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_a(t) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

$$= \left[\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{\imath}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{\jmath}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'\right]$$

$$+ \left\{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left[x'\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}\right]\right\}$$

$$+ \left\{2.\left[\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right]\right\}$$

- Sachant que

- $\left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_{R_a} = \vec{a}_a$
- $\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{\imath}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{\jmath}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}' = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\right|_{R_r} = \vec{a}_r$
- $x'\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2} = x'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{\imath}'}{dt}\right) + y'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{\jmath}'}{dt}\right) + z'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{k}'}{dt}\right) = x'\frac{d(\vec{w}\wedge\vec{\imath}')}{dt} + y'\frac{d(\vec{w}\wedge\vec{\jmath}')}{dt} + z'\frac{d(\vec{w}\wedge\vec{k}')}{dt}$

$$= \left[x'\left(\frac{d\vec{w}}{dt}\wedge\vec{i}'\right)+y'\left(\frac{d\vec{w}}{dt}\wedge\vec{j}'\right)+z'\left(\frac{d\vec{w}}{dt}\wedge\vec{k}'\right)\right]$$

$$+\left[x'\left(\vec{w}\wedge\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)+y'\left(\vec{w}\wedge\frac{d\vec{j}'}{dt}\right)+z'\left(\vec{w}\wedge\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{d\vec{w}}{dt}\wedge x'.\vec{i}'\right)+\left(\frac{d\vec{w}}{dt}\wedge y'.\vec{j}'\right)+\left(\frac{d\vec{w}}{dt}\wedge z'.\vec{k}'\right)\right]$$

$$+\left[x'\big(\vec{w}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{i}')\big)+y'\big(\vec{w}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{j}')\big)+z'\left(\vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{k}'\right)\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{d\vec{w}}{dt}\wedge(x'.\vec{i}'+y'.\vec{j}'+z'.\vec{k}')\right)\right]$$

$$+\left[\big(\vec{w}\wedge(\vec{w}\wedge(x'\vec{i}'+y'\vec{j}'+z'\vec{k}')\big)\right]$$

$$\Rightarrow \left[x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2}+y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2}+z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}\right]=\left[\left(\frac{d\vec{w}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)\right]+\left[\big(\vec{w}\wedge(\vec{w}\wedge\overrightarrow{O'M})\big)\right]=\vec{a}_e$$

- $2.\left[\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}'}{dt}+\frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt}+\frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right]=2.\left[\frac{dx'}{dt}(\vec{w}\wedge\vec{i}')+\frac{dy'}{dt}(\vec{w}\wedge\vec{j}')+\frac{dz'}{dt}\left(\vec{w}\wedge\vec{k}'\right)\right]$

$$=2.\left[\left(\vec{w}\wedge\frac{dx'}{dt}.\vec{i}'\right)+\left(\vec{w}\wedge\frac{dy'}{dt}.\vec{j}'\right)+\left(\vec{w}\wedge\frac{dz'}{dt}.\vec{k}'\right)\right]$$

$$=2.\left[\vec{w}\wedge\left(\frac{dx'}{dt}.\vec{i}'+\frac{dy'}{dt}.\vec{j}'+\frac{dz'}{dt}.\vec{k}'\right)\right]=2.(\vec{w}\wedge\vec{v}_r)=\vec{a}_c$$

- Enfin

$$\Rightarrow \vec{a}_a(t)=\underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}_{\vec{a}_a}=\underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}}_{\vec{a}_r}+\underbrace{\left[\left(\frac{d\vec{w}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)\right]+\left[\big(\vec{w}\wedge(\vec{w}\wedge\overrightarrow{O'M})\big)\right]}_{\vec{a}_e}+\underbrace{2.(\vec{w}\wedge\vec{v}_r)}_{\vec{a}_c}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_a=\vec{a}_r+\vec{a}_e+\vec{a}_c$$

- **Exercice 5**

On considère le vecteur position d'un point M dans un repère R fixe :

$$\vec{r}=(6t^2-4t)\vec{i}-3t^3\vec{j}+3\vec{k}$$

Le vecteur position de M dans le repère R' mobile est :

$$\overrightarrow{r'}=(6t^2+3t)\overrightarrow{i'}-3t^3\overrightarrow{j'}+3\overrightarrow{k'}$$

On considère que R et R' sont parallèles.

1- Déterminer la vitesse absolue et la vitesse relative de M. en déduire la vitesse d'entrainement et la nature du mouvement de R' par rapport à R.
2- Déterminer l'accélération absolue, l'accélération relative, conclure.

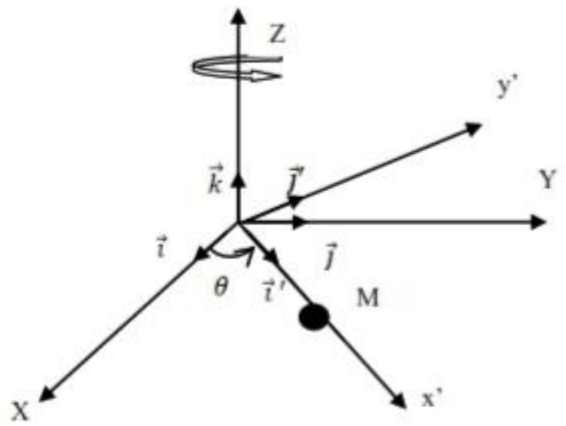
- **Exercice 6**

Soit un référentiel R(Oxy) fixe et un référent iel R'(Ox'y') mobile de bases respectives $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $(\vec{\imath'},\vec{\jmath'})$; R' tourne par rapport à R autour de l'axe OZ perpendiculairement au plan Oxy avec une vitesse angulaire ω constante (fig 3). Un point M est mobile sur l'axe Ox' suivant la loi

$\overrightarrow{OM} = ae^{\theta}\vec{\imath'}$ avec a constant et $\theta = wt$

.

1- Déterminer la vitesse relative, la vitesse d'entrainement de M.
2- En déduire sa vitesse absolue.
3- Déterminer l'accélération relative et l'accélération de d'entrainement et l'accélération de Coriolis.
4- En déduire son accélération absolue.



Solution

- **Exercice 5**

$$\vec{r} = (6t^2 - 4t)\vec{\imath} - 3t^3\vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

$$\vec{r'} = (6t^2 + 3t)\vec{\imath'} - 3t^3\vec{\jmath'} + 3\vec{k'}$$

- On considère que R et R' sont parallèles

1- Détermination la vitesse absolue et la vitesse relative de M

- La vitesse absolue $\vec{v}_a$

$$\vec{v}_a(t) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_R$$

$$\Rightarrow \vec{v}_a(t) = (12t-4)\vec{\imath} - 9t^2\vec{\jmath}$$

- La vitesse relative $\vec{v}_r$

$$\vec{v}_r(t) = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{R'} = \left.\frac{d\overrightarrow{r'}}{dt}\right|_{R'}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_r(t) = (12t-3)\overrightarrow{\imath'} - 9t^2\overrightarrow{\jmath'}$$

- Déduire la vitesse d'entrainement $\vec{v}_e$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

$$\Rightarrow \vec{v}_e = \vec{v}_a - \vec{v}_r \quad \text{On sait que} \begin{cases} \vec{\imath} = \overrightarrow{\imath'} \\ \vec{\jmath} = \overrightarrow{\jmath'} \\ \vec{k} = \overrightarrow{k'} \end{cases} \text{puis que R} \parallel R'$$

Donc : $\vec{v}_e = (12t-4)\vec{\imath} - 9t^2\vec{\jmath} - (12t-3)\overrightarrow{\imath'} + 9t^2\overrightarrow{\jmath'}$

$$\Rightarrow \vec{v}_e = -7\vec{\imath} = Cst$$

Donc le mouvement de R' par rapport à R est un mouvement rectiligne uniforme qui veut dire un mouvement relatif de translation puis que $\vec{v}_e = \mathrm{Cst}$

2- Détermination de l'accélération absolue et l'accélération relative

- L'accélération absolue $\vec{a}_a$

$$\vec{a}_a(t) = \left.\frac{d\vec{v}_a}{dt}\right|_R = \left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_R$$

$$\Rightarrow \vec{a}_a = 12\vec{\imath} - 18t\vec{\jmath}$$

- L'accélération relative $\vec{a}_r$

$$\vec{a}_r(t) = \left.\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right|_{R'} = \left.\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}\right|_{R'}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_r = 12\overrightarrow{\imath'} - 18t\overrightarrow{\jmath'}$$

- Conclusion

$$\vec{v}_e = -7\vec{\imath} \Longrightarrow \vec{a}_e = \frac{d\vec{v}_e}{dt} = \vec{0}$$

- Puis que $\vec{v}_e = Cst$, ont conclue que l'accélération est invariante constante dans les deux repères.
- **<u>Exercice 6</u>**

1- Détermination la vitesse relative et la vitesse d'entrainement de M.

- La vitesse relative $\vec{v}_r$

$$\vec{v}_r(t) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{R'} = awe^{wt}\vec{\imath'}$$

- La vitesse d'entrainement $\vec{v}_e$

$$\vec{v}_e = \vec{w} \wedge \overrightarrow{OM} = w\vec{k} \wedge ae^{wt}\vec{\imath'} = awe^{wt}\vec{\jmath'}$$

2- Déduire la vitesse d'entrainement $\vec{v}_a$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \Longrightarrow \vec{v}_a = awe^{wt}\left(\vec{\imath'} + \vec{\jmath'}\right)$$

3- Détermination l'accélération relative, l'accélération de d'entrainement et l'accélération de Coriolis

- L'accélération relative $\vec{a}_r$

$$\vec{a}_r(t) = \left.\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right|_{R'} = aw^2e^{wt}\vec{\imath'}$$

- L'accélération de d'entrainement $\vec{a}_e$

$$\vec{a}_e = \underbrace{\left[\left(\frac{d\vec{w}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)\right]}_{\vec{0}} + \left[\left(\vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)\right]$$

$$\Longrightarrow \vec{a}_e = \left[\left(\vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)\right] = w\vec{k} \wedge \left(w\vec{k} \wedge ae^{wt}\vec{\imath'}\right)$$

$$\Longrightarrow \vec{a}_e = w\vec{k} \wedge awe^{wt}\vec{\jmath'} = -aw^2e^{wt}\vec{\imath'}$$

- L'accélération de Coriolis $\vec{a}_c$

$$\vec{a}_c = 2.(\vec{w} \wedge \vec{v}_r)$$

$$\Longrightarrow \vec{a}_c = 2.\left(w\vec{k} \wedge awe^{wt}\vec{\imath'}\right)$$

$$\Longrightarrow \vec{a}_c = 2aw^2e^{wt}\vec{\jmath'}$$

4- Déduire l'accélération absolue $\vec{a}_a$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

$$\Longrightarrow \vec{a}_a = aw^2 e^{wt}\overrightarrow{\imath'} - aw^2 e^{wt}\overrightarrow{\imath'} + 2aw^2 e^{wt}\overrightarrow{\jmath'}$$

$$\Longrightarrow \vec{a}_a = a2aw^2 e^{wt}\overrightarrow{\jmath'}$$

Chapitre III : Dynamique du point

1. Introduction

La dynamique en physique est la science qui étudie la relation entre le corps en mouvement et les causes qui provoquent ce mouvement. Elle prédit aussi le mouvement du corps situé dans un milieu déterminé.

La dynamique, plus précisément, est l'analyse de la relation entre la force appliquée et les changements du mouvement du corps.

2. Définitions

2.1.La force

La force est une action mécanique exercée par un corps sur un autre (notée $\vec{F}$), pouvant entraîner une modification de sa vitesse (le déplacer ou l'arrêter), de sa trajectoire ou de sa forme (le déformer). Elle est représentée par un vecteur, souvent noté FFF, qui possède les mêmes caractéristiques qu'elle : direction, sens, valeur, et est lié à son point d'application.

Les forces peuvent être classées en deux catégories selon leur mode d'action : les forces de contact, qui nécessitent un contact direct entre les corps, et les forces à distance, qui s'exercent sans contact direct, comme la gravitation. La résultante des forces appliquées ($\sum \vec{F_i}$ sur un corps correspond à la somme vectorielle de toutes les forces qui lui sont exercées.

2.2.La mécanique de Newton :

Également appelée mécanique classique, est l'étude de la relation entre le mouvement d'un corps et les forces qui en sont la cause. Elle permet de décrire et de prévoir le comportement des objets en fonction des forces qui leur sont appliquées.

Cette branche de la physique repose sur trois lois fondamentales formulées par Isaac Newton, qui définissent les principes de l'inertie, de la dynamique et de l'action-réaction. Ces lois sont essentielles pour comprendre le mouvement des corps dans divers contextes, allant des objets du quotidien aux systèmes planétaires.

2.3.La masse :

La masse est une propriété physique fondamentale des corps matériels, exprimant la quantité de matière qu'ils contiennent. Elle est invariable et indépendante des conditions extérieures, telles que la position ou l'état de mouvement du corps.

La masse est une grandeur scalaire toujours positive, notée mmm, et son unité dans le Système International (SI) est le kilogramme (kg). Elle joue un rôle essentiel en mécanique, notamment dans la relation entre force et accélération définie par la deuxième loi de Newton.

La masse est invariable dans la mécanique newtonienne, dans la mécanique relativiste, elle dépend de la vitesse à travers l'expression :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}$$

avec :

m : est la masse au repos

m_0, est la masse à la vitesse v.

c : est la vitesse de la lumière, c= $3\ 10^8$ m.s^{-1}

2.4.Un système mécanique (ou système matériel) :

C'est un ensemble de corps matériels, qu'il s'agisse de points matériels ou de corps solides, pouvant être liés entre eux ou non, et dont la masse peut être significative ou négligeable. L'étude d'un tel système permet d'analyser les interactions entre ses composants ainsi que leur comportement sous l'effet des forces appliquées.

Les forces agissant sur un système mécanique se classent en deux catégories : les forces intérieures ($\vec{F}_{int}$), exercées par les corps appartenant au système, et les forces extérieures ($\vec{F}_{ext}$), appliquées par des corps extérieurs au système. Un système mécanique est dit isolé lorsqu'aucune force ne lui est appliquée, et pseudo-isolé lorsque la résultante des forces qui lui sont appliquées est nulle.

3. Principe d'inertie et référentiel d'inertie

3.1. Énoncé du Principe d'inertie

Ce principe, correspond à la première loi de Newton. Il énonce que lorsqu'aucune force ne s'exerce sur un corps ou que la somme des forces qui lui sont appliquées est nulle, son état de mouvement ne change pas. Cela signifie que :

- Si le corps est initialement au repos, il y restera indéfiniment en l'absence de toute force extérieure.
- Si le corps est en mouvement, il continuera à se déplacer en ligne droite avec une vitesse constante.

3.2.Référentiel d'inertie (ou référentiel galiléen)

3.2.1. Définition

Le principe d'inertie permet de définir le référentiel galiléen (ou référentiel d'inertie). On appelle référentiel galiléen tout référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié, c'est-à-dire où un corps libre de toute force extérieure conserve son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme.

En pratique, les référentiels strictement galiléens n'existent pas, mais certains, comme le référentiel de Copernic, sont considérés comme de bonnes approximations pour l'étude des mouvements à grande échelle.

3.2.2. Exemples de Référentiels Galiléens

3.2.2.1.Référentiel de Copernic

Le référentiel de Copernic est un référentiel ayant pour centre le Soleil, considéré comme le centre du système solaire. Ses axes sont définis par les directions de trois étoiles très éloignées, supposées fixes par rapport au Soleil. Ce référentiel est une bonne approximation d'un référentiel galiléen.

3.2.2.2.Référentiel Géocentrique

Le référentiel géocentrique est un référentiel dont le centre est la Terre. Ses axes ont des directions fixes qui sont identiques à celles du référentiel de Copernic. Bien qu'il soit utile pour certaines études astronomiques, il n'est pas parfaitement galiléen en raison des effets gravitationnels et des forces d'inertie liées aux mouvements de la Terre.

3.2.2.3.Référentiel Terrestre

Le référentiel terrestre est un référentiel lié à la Terre (au sol). Son origine est un point fixe à la surface de la planète, et ses axes sont fixes par rapport à elle. Ce référentiel est non galiléen, car la Terre est en rotation et en mouvement autour du Soleil, engendrant des forces fictives telles que la force de Coriolis et la force centrifuge. Cependant, pour des études à petite échelle, il est souvent utilisé comme une approximation d'un référentiel galiléen.

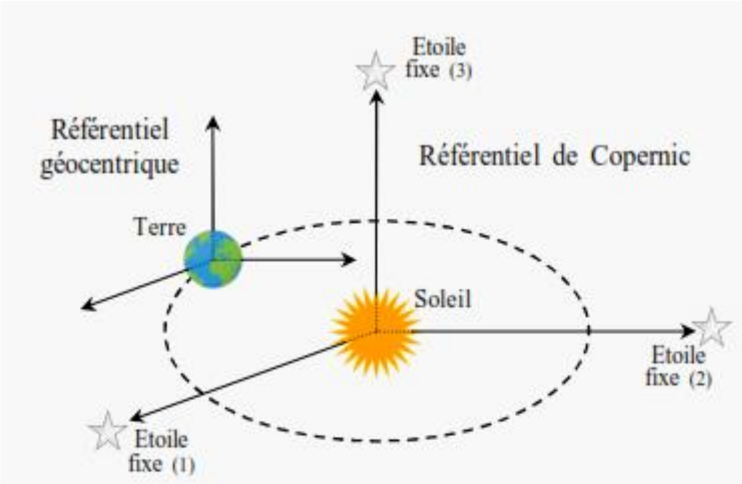


Figure 3.1 Exemples de Référentiels Galiléens

- **Remarques**

Tout référentiel (ou système de coordonnées) en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est également un référentiel galiléen. Cela signifie que si un référentiel se déplace sans accélération par rapport à un référentiel galiléen, les lois de Newton y restent valides.

Un référentiel en mouvement accéléré (c'est-à-dire en translation ou en rotation avec accélération) est un référentiel non galiléen. Dans un tel référentiel, des forces d'inertie apparaissent (comme la force centrifuge ou la force de Coriolis), ce qui modifie l'application des lois de Newton.

4. Quantité de mouvement et centre de masse

4.1. Vecteur Quantité de Mouvement d'un Point Matériel

La quantité de mouvement d'un point matériel m est définie comme le produit de sa masse m par sa vitesse

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

La quantité de mouvement $\vec{p}$ est un vecteur parallèle à la vitesse $\vec{v}$, car la masse m est un scalaire positif.

- La quantité de mouvement a la même direction et le même sens que la vitesse.
- La quantité de mouvement est une notion physique très importante car elle combine les deux éléments qui caractérisent l'état dynamique d'une particule : sa masse et sa vitesse.
- Dans le système international (SI), l'unité de la quantité de mouvement est : kg.m. s^{-1}

Si un système est composé de plusieurs particules i de masses différentes m_i et ayant des vecteurs vitesses différents $\vec{v}$, la quantité de mouvement totale de ce système est la somme des quantités de mouvement de toutes les particules :

$$\vec{p}_{Totale} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

4.2. Conservation de la quantité de mouvement

S'il y a variation de la vitesse ou de la quantité de mouvement cela implique que la particule n'est pas libre.

Soient deux particules libres de masse m_1 et m_2 qui ne sont soumises qu'aux influences mutuelles entre elles ; elles sont donc isolées du reste de l'univers :

- Au temps t :

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

- Au temps t' :

$$\overrightarrow{P'} = m_1\overrightarrow{v'}_1 + m_2\overrightarrow{v'}_2$$

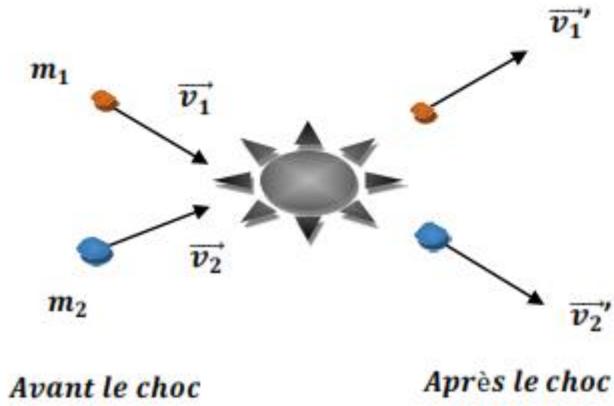


Figure 3.2 Deux corps en collisions

Toute la quantité de mouvement d'un système composé de deux particules, soumises à leurs seules influences mutuelles, reste constante, c'est-à-dire : $\vec{p} = \overrightarrow{p'}$

Le principe de conservation de la quantité de mouvement s'énonce ainsi :
« La quantité de mouvement d'un système isolé constitué de particules est constante ».

On peut exprimer mathématiquement ce principe de la conservation de la quantité de mouvement comme suit :

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n = C^{st}$$

Dans le cas de deux particules :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = C^{st}$$

Entre les instants t et t':

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}' = C^{st}$$

$$\Rightarrow \vec{p}_1{}' - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_2{}'$$

$$\Rightarrow \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$$

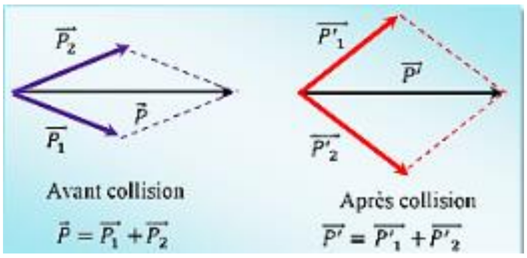


Figure 3.2 Quantité de mouvement

Dans un système isolé de deux particules, la variation de la quantité de mouvement d'une particule au cours d'un certain temps est égale et de sens opposé à la variation de la quantité de mouvement de l'autre particule au cours du même temps

4.3.Centre de masse (ou d'inertie) d'un système matériel

On considère un système constitué de deux particules M_1 et M_2 de masses, respectivement, m_1 et m_2 . Les particules M_1 et M_2 se situent le long de l'axe Ox d'un système de coordonnées cartésiennes R (O,x,y,z).

L'abscisse x_C du centre de masse « le point C » de M_1 et M_2 est donnée par la relation :

$$x_C = \frac{m_1.x_1 + m_2.x_2}{m_1 + m_2}$$

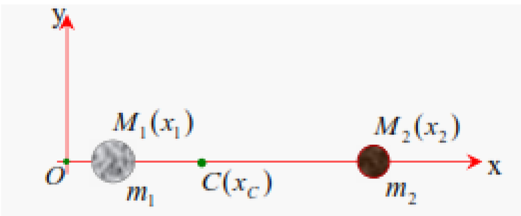


Figure 3.3. Centre de masse (Abscisse x_C)

Avec : x_1 et x_2 sont les abscisses de $M_1 et\ M_2$, respectivement.

1. Si les particules se trouvent sur le plan Oxy de coordonnées (x_1, y_1) pour M_1 et (x_2, y_2) pour M_2

Les coordonnées (x_C, y_C) du centre de masse C sont donnée par les relations

$$x_C = \frac{m_1.x_1 + m_2.x_2}{m_1 + m_2}$$

$$y_C = \frac{m_1.y_1 + m_2.y_2}{m_1 + m_2}$$

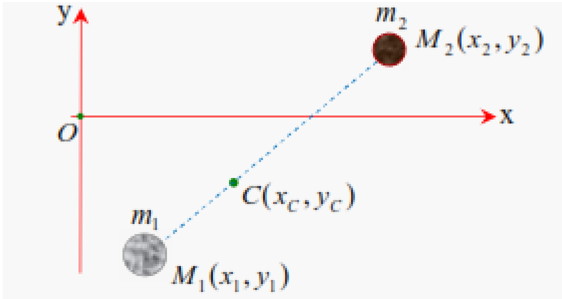


Figure 3.4. Centre de masse (Coordonnées (x_C, y_C))

En général, la position du centre de masse d'un système de deux particules M_1 et M_2 est définie par le vecteur position :

$$\vec{r}_C = x_C\vec{\imath} + y_C\vec{\jmath} + z_C\vec{k} = \frac{m_1.\vec{r}_1 + m_2.\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

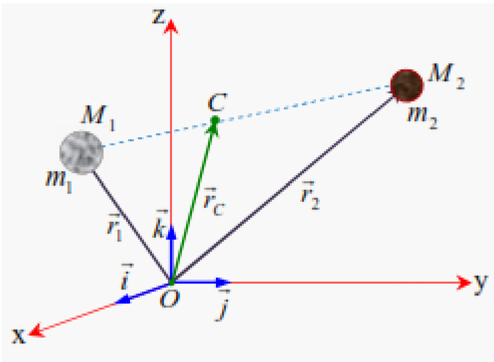


Figure 3.4. Centre de masse (Coordonnées cartésien)

Où $\vec{r}_1 = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$ et $\vec{r}_2 = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$

Sont les vecteurs position de M_1 et M_2 respectivement.

- **Remarque**

La relation : $\vec{r}_C = \frac{m_1.\vec{r}_1 + m_2.\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ *est équivalente à la relation du barycentre des points* M_1 et M_2 *:*

$m_1.\overrightarrow{CM}_1 + m_2.\overrightarrow{CM}_2 = \vec{0}$

Barycentre $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i.\overrightarrow{CM}_i$

- **Cas d'un système de *n* particules**

Lorsque le système est composé de *n* particules de masses $m_1,\ m_2 \dots m_n$ La position du centre de masse de ce système est données par :

$$\vec{r}_C = x_C\vec{\imath} + y_C\vec{\jmath} + z_C\vec{k} = \frac{m_1.\vec{r}_1 + m_2.\vec{r}_2 + \cdots m_n.\vec{r}_n}{m_1 + m_2 \dots + m_n} = \frac{1}{M_{sys}}\sum_{i=1}^{n} m_i.\vec{r}_i$$

Avec : M_{sys} est la masse du système, $M_{sys} = m_1 + m_2 \dots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i$

Alors, les coordonnées (x_C, y_C, z_C) sont données par les relations :

$$x_C = \frac{1}{M_{sys}}\sum_{i=1}^{n} m_i.x_i, \qquad y_C = \frac{1}{M_{sys}}\sum_{i=1}^{n} m_i.y_i, \qquad z_C = \frac{1}{M_{sys}}\sum_{i=1}^{n} m_i.z_i$$

5. Définition newtonienne de la force (Les trois lois de Newton)

Les trois lois de Newton sont les principes fondamentaux de la mécanique classique. Elles décrivent le mouvement des objets sous l'effet des forces et constituent la base de la dynamique.

5.1. Première loi de Newton : Principe d'inertie

Le principe d'inertie c'est Galilée est le premier suggéré ce principe. Il constitue la première loi de Newton et qui s'énonce comme suit : Une particule libre et isolée ou quasi-isolé se déplace en mouvement rectiligne avec une vitesse et une quantité de mouvement constantes.

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un système est nulle.

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$$

La somme des forces exercées est donc nulle : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

Avec : la vitesse et la quantité de mouvement sont constantes.

Ce principe conduit à la loi de conservation de la quantité de mouvement totale d'un système isolé ou pseudo isolé. La propriété ci-dessus constitue une définition des repères galiléens et le principe d'inertie postule leur existence. Un repère galiléen est un repère en translation rectiligne et uniforme dans le repère de Copernic.

5.2.Deuxième loi de Newton : Principe fondamental de la dynamique

Loi fondamentale de la dynamique ou principe fondamental de la dynamique (PFD).

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un système est égale à la dérivée du vecteur de la quantité de mouvement du centre d'inertie de ce système.

On peut très bien définir une force moyenne, telle que :

$$\vec{F}_{moy} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \frac{\vec{P}(t) - \vec{P}(t')}{t' - t}$$

Ou encore, force instantanée, telle que :

$$\vec{F}(t) = \lim_{t' \to t} \vec{F}_{moy} \quad \frac{\Delta\vec{P}(t)}{\Delta t}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

- La dérivée de la quantité de mouvement s'appelle force

- **Remarque**

Cette formule ne s'applique qu'aux systèmes de masse constante. Le cas d'une fusée qui consomme du carburant et voit sa masse diminuer ou encore celui d'une goutte d'eau qui tombe dans une atmosphère contenant de la vapeur d'eau et grossit au cours du mouvement ne peuvent pas être traités avec cette relation.

- **Cas de la masse variable :** dans ce cas la résultante $\vec{F}$ s'écrit sous la forme :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

5.3.Troisième loi de Newton : principe de l'action et de la réaction

Le principe de l'action et la réaction, ou principe des actions réciproques, a été énoncé par

Newton (troisième loi de Newton).

Soient deux points matériels de masse m_1 et m_2 interagissant entre eux ; $\vec{F}_{1/2}$ l'action exercée par m_1 sur m_2 est égale et opposée à celle exercée par m_2 sur m_1 $\vec{F}_{2/1}$, soit :

Figure 3.5 Réaction réciproque

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$

Ainsi : $\|\vec{F}_{1/2}\| = \|\vec{F}_{2/1}\|$

Ces deux forces s'exercent simultanément, sont de même nature et elles ont le même support.

- **Conclusion** : la quantité de mouvement, par rapport à un référentiel, d'un système isolé, est conservée.

6. Types De Forces

Il y a deux catégories de forces :

- Forces à distances : force de gravitation, force électrique, magnétique….
- Forces de contact : force de contact, force de frottement, forces de tension …)

6.1.Forces à distance

Ce sont des forces qui agissent à distance et qui décroisent lorsque la distance augmente.

6.1.1. Force de gravitation universelle

On appelle force de gravitation, la force exercée par une masse m sur une autre masse M. Cette force d'interaction suit une loi énoncée par Newton en 1650 et qui précise que deux masses M et m interagissent entre elles de façon d'autant plus forte que les masses sont grandes et que la distance qui les sépare est petite. La loi qu'il a formulée est dite « loi de la gravitation de Newton » ou « loi d'attraction universelle ». Elle s'énonce de la façon suivante : Les masses de deux corps s'attirent en raison de leurs masses et de l'inverse du carré de leur distance selon une direction qui passe par leurs centres de masses

.

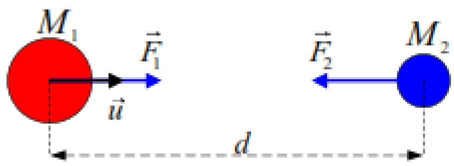


Figure 3.6 Forces de gravitation d'un objet de masse M sur un objet de masse m.

La loi d'attraction universelle s'exprime analytiquement de la façon suivante :

$$\vec{F}_{m/M} = -G\frac{mM}{d^2}\vec{u}$$

With

$\vec{u}$: vecteur unitaire

m, M : Les masses

d : la distance entre m et M

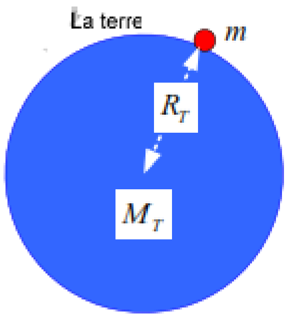
G : constante de gravitation ; $G = 6{,}67 * 10^{11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$

G est la constante de gravitation universelle. Elle a été mesurée pour la première fois par Cavendish en 1798. Sa valeur est la suivante :

- **Champ gravitationnel**

La force d'attraction terrestre est le poids. Il et de coutume de calculer le poids à l'aide de l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$, $\vec{P} = m\vec{g}$ Grâce à la loi de l'attraction universelle et la loi de force du poids on peut déterminer l'expression de $\vec{g}$ en fonction de l'altitude :

A la surface de la terre : Nous obtenons la valeur de l'accélération de la pesanteur terrestre de la façon suivante :



$$\vec{F} = \vec{P} \Longrightarrow G\frac{mM_T}{{R_T}^2} = mg$$

$$\Longrightarrow g = G\frac{M_T}{{R_T}^2}$$

Constante de gravitation $G = 6{,}67 * 10^{11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$

Masse de la terre $M_T = 5{,}98 * 10^{24} kg$

Rayon terrestre $\boldsymbol{R_T} = 6{,}37 * 10^6 m$

L'application numérique nous donne $g = 9{,}8\ Nkg^{-1}$

7. Pour un objet placé à une distance h de la surface de la terre :

$$g = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

- **Remarque**

La valeur de g diminue avec l'altitude (h). Par conséquence le poids change avec la h alors que la masse reste constante.

6.1.2. Force électrostatique (Interaction coulombienne)

Soient deux charges A_1 et A_2 portants respectivement les charges q_1 et q_2 Interaction coulombienne est l'analogue de l'interaction gravitationnelle pour les charges électriques.

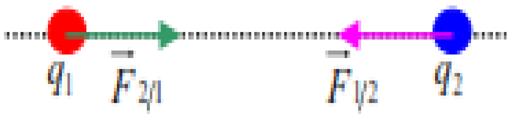


Figure 3.7 Force exercée par une charge q_1 sur une autre charge q_2

Cette force d'interaction suit une loi énoncée par Coulomb :

$$\vec{F}_{2/1} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}$$

Avec

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 * 10^9 Nm^2C^{-2}$$

ε_0: Représente la permittivité du vide.

6.1.3. Force de magnétique

Soit une particule chargée A de charge q, est en mouvement dans un référentiel □R□ où il existe l'interaction magnétique $\vec{B}$ . . La force magnétique exercée sur A est donnée par :

$$\vec{F}_{mag} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$$

6.1.4. Force de Lorentz (Interaction électromagnétique)

La force que subit une charge électrique placée dans des champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\overrightarrow{B}$ st appelée forces électromagnétique ou force de Lorentz et s'écrit :

$$\vec{F}_{mag} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Avec : $\vec{v}$ est vecteur vitesse de la charge dans le référentiel où $\vec{E}$ est le champ électrique et

$\vec{B}$ est le champ magnétique.

6.2. Les forces de contact

Lorsqu'il y a contact de deux corps, ces forces se manifestent lorsque, lorsqu'il y a contact de deux corps.

6.2.1. Force normale : Réaction du support

La force normale est la force de réactions exercée par une surface sur en objet en contact avec elle. On l'appelle, aussi, la réaction du support

Une force normale est toujours perpendiculaire à la surface de contacte (voir la figure ci-dessous). Elle est présente chaque fois que des solides sont en contact.

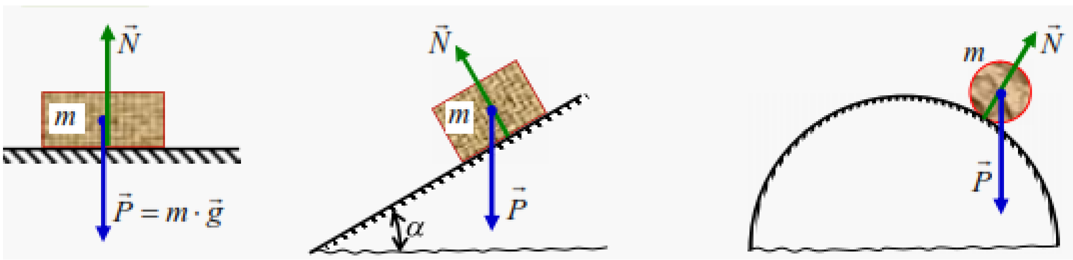


Figure 3.7 Réaction du support

Il est important de préciser que la force normale ne peut pas être évaluée à l'aide d'une formule directement. Chaque situation est différente.

La force qui subit un objet, posé sur un support horizontal, en provenance du support s'appelle réaction du support. La réaction du support sur l'objet de masse m est répartie sur toute la surface de contact support-objet.

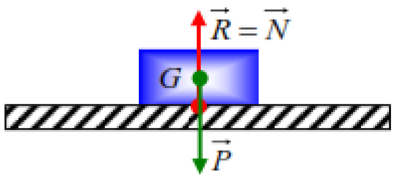


Figure 3.8 Réaction d'un support.

L'objet étant en équilibre :

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} = -\vec{R}$$

Avec :

$\vec{R}$: représente la résultante de toutes les actions exercées sur la surface de contact,

$\vec{N}$: représente la force de réaction normale,

$\vec{P}$: est la force de pesanteur ou le poids.

- **Remarque**

  - ✓ D'après le principe de l'action et de la réaction, dans le Cas d'une surface horizontale, l'action de l'objet sur le support est égale au poids de l'objet.
  - ✓ La force normale $\vec{\mathrm{N}}$ est une force de contact, si le corps n'est pas en contact avec la surface, donc $\vec{\mathrm{N}} = \vec{0}$.

6.2.2. Force de frottement

Chaque fois qu'il y a contact entre deux surfaces rugueuses de deux corps solides, une résistance apparaît alors et s'oppose au mouvement relatif des deux corps. Il existe plusieurs types de frottements :

- Frottement solide (contact solide-solide) : les frottements entre les corps solides qui peuvent être statique et dynamique,
- Frottement visqueux (contact solide-fluide) : les frottements dans les fluides.

C'est une force qui agit toujours pour s'opposer au Mouvement d'un objet qui glisse sur un autre.

6.2.2.1.Frottement solide (contact solide-solide).

Les forces de frottement sont des forces qui apparaissent soit lorsqu'un objet est en mouvement, soit lorsque l'objet est soumis à une force tendant à le déplacer. Le frottement s'oppose au mouvement des objets en déplacement. On observera deux types de frottements : statique et dynamique.

a- Frottement statique :

La force de frottement statique est la force qui maintient le corps en état de repos même en présence d'une force extérieure.

Dans le Cas d'un corps posé sur un plan horizontal, on Considère le corps de la figure ci-dessous. Il est soumis à des forces.

Soit $\vec{f_s}$ la force de frottement statique et $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont respectivement le poids et la force de réaction normale du support.

Pour que le corps posé sur la table se mette en mouvement il faut lui appliquer une force minimale $\vec{F}$

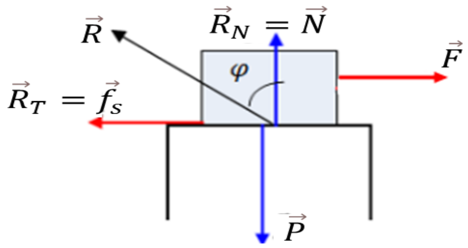


Figure 3.9 Frottement statique

La masse reste immobile tant que $\vec{F}<\vec{f}$ il y a une résistance au mouvement.

Dans ce cas la réaction du support est la force résultante donnée par :

$\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T \Longrightarrow \vec{R} = \vec{N} + \vec{f_s} \quad (\vec{R}_N = \vec{N}, \vec{R}_T = \vec{f_s})$

A l'équilibre : En utilisant le 1er loi de Newton

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{N} + \vec{f_s} + \vec{F} = \vec{0}$$

En faisant la projection sur les deux axes Ox et Oy :

$$\begin{cases} Ox: f_s = F \\ Ox: N = P \end{cases}$$

La masse commence son mouvement lorsque $\vec{F} > \vec{f}$

L'expérience montre que le rapport (f_s/N) est constant.

Or : $tg\varphi = \frac{f}{N} = Cst = \mu$

On appel coefficient de frottement statique lorsque le corps est immobile. Le coefficient de frottement statique est un rapport entre la force de frottement statique d'un objet et la force normale et on écrit :

$$\mu_s = tg\varphi = \frac{\vec{f_s}}{N}$$

μ_s: Le coefficient de frottement statique dépend de la nature et de l'état des matériaux en contact

b- Frottement cinétique (dynamique)

Le frottement cinétique ou dynamique est la force de frottement présente lorsqu'un objet est en mouvement sur un autre objet.

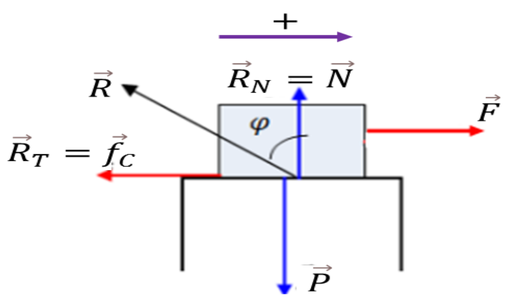


Figure 3.10 Frottement cinétique

Le coefficient de frottement dynamique est un rapport entre la force de frottement dynamique d'un objet et la force normale.

La masse commence son mouvement lorsque $\vec{F} > \vec{f_c}$

En utilisant le 2[eme] loi de Newton

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \implies \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a} \implies \vec{P} + \vec{N} + \vec{f_c} + \vec{F} = m\vec{a} \;\; (\; \vec{f_d} = \vec{f_c})$$

En faisant la projection sur les deux axes Ox et Oy :

$$\begin{cases} Ox: F - f_c = ma \\ Ox: P - N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_c = \; F - ma \\ N = \; P \end{cases}$$

Le coefficient de frottement dynamique s'écrit par :

$$\mu_c = \mu_d = \; tg\varphi = \frac{f_c}{N}$$

A partir des deux équations de fortement statique ($f_s = F$) et de frottement cinétique ($f_c = F - ma$), et en tenant compte du fait que $ma > 0$, on peut déduire que $f_c < f_s$

$$\begin{cases} f_c = F - ma = \mu_c . N \\ f_s = F = \mu_s . N \end{cases} \Rightarrow \frac{f_c}{f_s} = \frac{\mu_c}{\mu_s} \Rightarrow \mu_c < \mu_s$$

Les coefficients $\mu_c \; et \; \mu_s$,n'ont pas de dimension, et sont déterminé expérimentalement

- **Remarque**
- Le frottement dépend de la nature des surfaces en contact.
- Le frottement ne dépend pas des autres facteurs (vitesse, aire des surfaces…)
- Les coefficients de frottement (m) sont des quantités adimensionnelles.
- Généralement $\mu_s > \mu_c$
- $\mu_c \; et \; \mu_s$ sont généralement plus petit que 1.
- $\mu_c \; et \; \mu_s$ *ne dépend pas* de la masse du corps considéré (*Attention!* La force de frottement, dépend de cette masse).
- En réalité, La force de frottement est la composante horizontale ($\vec{R}_T$) de la force de contacte ($\vec{R}$) et la force normale $\vec{N}$ est la composante verticale ($\vec{R}_N$).

Le tableau ci-dessous illustre quelques valeurs typiques de coefficients de frottement

Tableau 3.1 valeurs typiques de coefficients de frottement

Surfaces en contact	**Coefficient de frottement statique μ_s**	**Coefficient de frottement cinétique μ_c**
Acier sur acier	0,7	0,55
Caoutchouc sur béton	1	0,8
Bois sur bois	0,2 à 0,5	0,2
Glace sur glace	0,1	0,03
Téflon sur acier	0,04	0,04

6.2.2.2.Frottement visqueux :

Lorsqu'un solide se déplace dans un fluide (gaz comme l'air ou liquide comme l'eau), il subit, de la part du fluide, des forces de frottement. Dans ce type de frottement la force est proportionnelle à la vitesse.

$$\vec{F} = -k\eta\vec{v}$$

Avec :

$\vec{F}$: La force de frottement

$\vec{v}$: la vitesse de solide

k: Un coefficient qui dépend de la forme du corps solide en mouvement dans le fluide

Pour une sphère, par exemple, on trouve. $k = 6\pi R$, et par conséquent :

$$\vec{F} = -6\pi R\eta\vec{v}$$

Cette loi est connue sous le nom de Loi de Stockes.

η: Coefficient qui dépend des frottements internes dans le fluide (c'est à dire les frottements entre les différentes couches qui sont en mouvement avec différentes vitesses). Le frottement interne au fluide s'appelle la viscosité, et c'est pour cette raison que η s'appelle le coefficient de viscosité. Dans les liquides, le coefficient de viscosité diminue avec l'élévation de température, par contre il augmente avec la diminution de la température pour les gaz.

- Cette force n'existe que s'il y a mouvement.

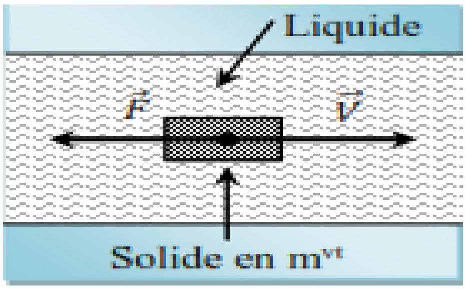


Figure 3.11 Frottement visqueux

6.2.3. Force de rappel ou force de tension

Soit un ressort horizontal de masse négligeable, de longueur au repos l_0. Si le ressort s'allonge ou se comprime, sa longueur devient l. Cette variation de longueur produit une force de rappel élastique $\vec{T}$ telle que :

$$\vec{F}_{el} = \vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u}$$

Ou $\vec{u}$ est un vecteur unitaire orienté suivant le sens de l'allongement du ressort et k est la constante de raideur du ressort.

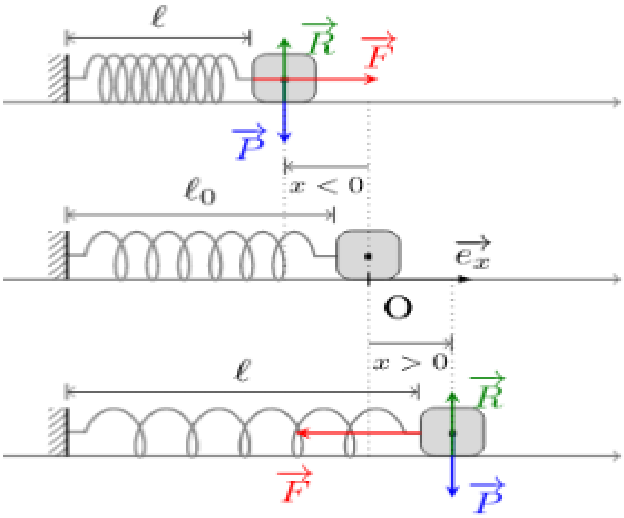


Figure 3.12 Force de rappel

Un corps de masse *m* accroché à ce ressort est donc soumis à cette force de rappel élastique.

- Lors de l'allongement du ressort $l > l_0 \Longrightarrow$ La force $\vec{T}$ est dans le sens opposé à $\vec{u}$
- Lors de la compression du ressort $l < l_0 \Longrightarrow$ La force $\vec{T}$ est dans le sens à $\vec{u}$

La force de rappel tend à ramener le ressort vers sa position d'équilibre (état de repos).

➢ **Etude dynamique**

Le corps, de masse m, accroché au ressort horizontal, est écartée de sa position d'équilibre (le ressort est allongé d'une distance x) puis abandonnée sur un plan horizontal sans frottements.

D'après le P.F.D

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \implies \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$$

En faisant la projection sur les deux axes Ox et Oy :

$$\begin{cases} Ox: -T = ma \\ Ox: P - R = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -k(l - l_0) = ma \\ R = P \end{cases}$$ On sait que $(l - l_0 = x)$

$$\Rightarrow -k(l - l_0) = ma \Rightarrow -kx = ma \Rightarrow a + \frac{k}{m}x = 0$$

Soit : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \implies \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

On aboutit à une équation différentielle du second degré dont la solution est de la forme :

$$x(t) = x_m cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi)$$

Le mouvement du corps de masse m est sinusoïdal rectiligne d'amplitude maximale x_m et de pulsation $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Période (T) :

$$T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

7. Moment d'une force

Contrairement au mouvement de translation, l'effet d'une force sur un corps en rotation (qui a une accélération angulaire) dépend non seulement du module et de la direction de la force mais aussi de son point d'application.

En fait, l'étude dynamique du mouvement de rotation dépend d'une quantité angulaire associée à la force, appelée moment de la force.

7.1. Définition

Le moment d'une force par rapport à un axe donné (souvent appelé pivot) est une grandeur vectorielle exprimant la capacité de cette force à faire tourner un corps (ou un système) autour de ce point.

Soit la figure suivante ou (Δ) est un l'axe de rotation et de vecteur unitaire$\vec{u}$; (Δ) and $\vec{u}$ sont de même sens. Soit un point matériel M , se déplaçant à la force $\vec{F}$ m et ayant une masse par rapport à O.

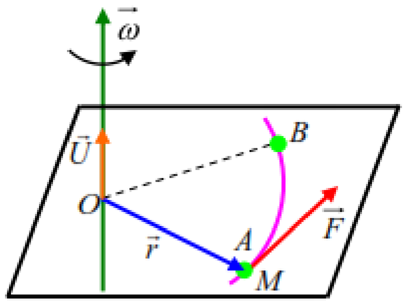


Figure 3.13 Moment d'une force.

- On définit le moment d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M par rapport à l'axe (Δ) la grandeur physique vectorielle $\vec{M}_{/\Delta}(\vec{F})$:

$$\vec{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Avec : $\overrightarrow{OM}$: vecteur position.

- Le module du moment d'une force :

$$\left\|\vec{M}_{/\Delta}(\vec{F})\right\| = \left\|\vec{r} \wedge \vec{F}\right\| = \|\vec{r}\| . \left\|\vec{F}\right\| \sin(\vec{r}, \vec{F})$$

8. Moment cinétique

8.1.Définition

Soit un point matériel M, se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ et ayant une masse m par rapport O est définit par :

$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

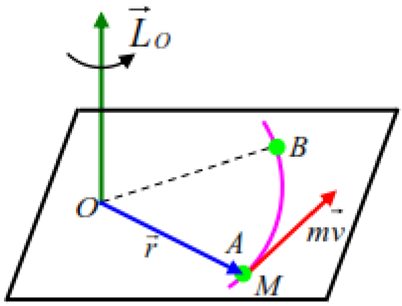


Figure 3.14 Moment cinétique.

- Le module du moment cinétique :

$$\|\vec{L}_O\| = \|\vec{r}\wedge m\vec{v}\| = \|\vec{r}\|.\|m\vec{v}\|\sin(\vec{r},\vec{v}) = m\|\vec{r}\|.\|\vec{v}\|\sin(\vec{r},\vec{v})$$

Si: $\sin(\vec{r},\vec{v}) = \frac{\pi}{2}$, le module du moment cinétique devient :

$$\|\vec{L}_O\| = m\|\vec{r}\|.\|\vec{v}\|\sin(\vec{r},\vec{v}) = mrv \Leftrightarrow \|\vec{L}_O\| = m.r.r.\omega = m.r^2.\omega$$

Sa dérivée par rapport au temps est donnée par : :

8.2.Théorème du moment cinétique (T.M.C):

Dans un référentiel Galiléen R, la dérivée du moment cinétique $\vec{L}_O$ par rapport au temps est égale à la somme des moments des forces appliquées au point matériel M par rapport au point fixe O, et nous écrivons :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\wedge m\vec{v}) \Leftrightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\wedge m\vec{v} + \vec{r}\wedge m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Donc : : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ et $\vec{F} = m.\vec{a}$

$$\Leftrightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \underbrace{\vec{v}\wedge m\vec{v}}_{\vec{0}} + \vec{r}\wedge\vec{F}$$

Rappel : $\vec{A}\wedge\vec{A} = \vec{0}$

Alors $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r}\wedge\vec{F} = \vec{M}_{/0}(\vec{F})$

Finalement on trouve :

$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \vec{M}_{/0}\left(\sum \vec{F}_{ext}\right)$ $\Longrightarrow$ (Théorème du moment cinétique)

Remarque :

- L'étude des systèmes dynamiques, on utilise généralement ces deux théorèmes et le principe fondamental de la dynamique noté PFD.
- Le théorème du moment cinétique est analogue à la deuxième loi de Newton.
- Le moment cinétique est conservé quand la résultante des forces extérieures est nulle, c'est-à-dire quand le point matériel est isolé mécaniquement et aussi quand la force est parallèle au vecteur de position.
- Quand le référentiel n'est pas Galiléen, le moment cinétique $\vec{L}_O$ prend la forme suivante :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} == \vec{M}_{/0}\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) + \vec{M}_{/0}\left(\sum \vec{F}_{inertie}\right)$$

Où $\vec{F}_{inertie}$ est le vecteur de force d'inertie, n'est pas une véritable force, mais plutôt une pseudo-force, elle n'intervient que si l'étude est faite dans un référentiel non Galiléen.

- D'après la loi de composition des accélérations et le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel Galiléen R, on a :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \text{ et } \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

Donc :

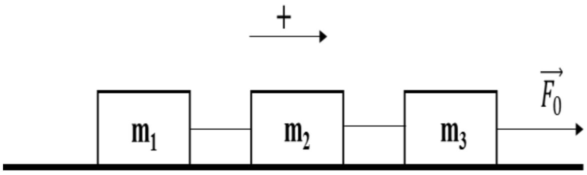
$$\sum \vec{F}_{ext} = m(\vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c) = m\vec{a}_r + m\vec{a}_e + m\vec{a}_c$$

- Finalement, on trouve le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel non Galiléen R :

$$\sum \vec{F}_{ext} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c = m\vec{a}_r$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = m\vec{a}_r$$

$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$ la force d' inertie d' entrainement et $\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c$ la force d' inertie de Coriolis ou force d' inertie complémentaire.



9. Méthode d'application des lois fondamentales de la dynamique :

Pour pouvoir appliquer la P.F.D ou le T.M.C, il convient à procéder de la démarche systématique suivante :

- Identifier le système d'étude,
- Identifier le référentiel d'étude et vérifier s'il est galiléen ou pas,
- Faire l'inventaire des forces exercées sur le système dans le référentiel d'étude,
- Appliquer le principe de la dynamique (P.F.D) ou le théorème du moment cinétique (T.M.C) , c.-à-d. les relations vectorielles,
- Préciser une base de projection (la base la plus commode est celle dans laquelle les vecteurs qui interviennent dans la relation vectorielle, présentent les expressions les plus simples que possible),
- Résoudre les équations différentielles obtenues après projection,
- Analyser physiquement les résultats,
- Homogénéité des formules,
- Applications numériques et vérification des ordres de grandeurs.

- **<u>Exercice 1</u>**

Considérons un système composée de trois masses m_1= 30Kg , m_2 = 20Kg et m_3= 10 Kg Sont liés par deux fils inextensibles et de masses négligeables. Le system déplace avec une force constante F_0= 120N suivant la direction de mouvement (voir la figure 1)

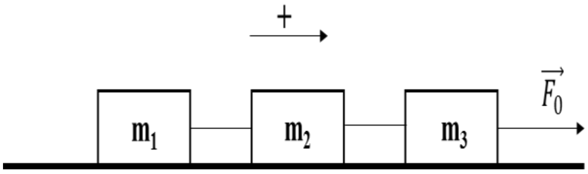


Figure 1

Sachant que g= 10m.s^{-2}

1- Calculer l'accélération de système et les tensions des fils

a- Sans frottement

b- Avec frottement (avec le coefficient de frottement cinétique $\mu_c = 0.1$)

- **Exercice 2**

On considère un pendule simple constitue´ d'un objet ponctuel M de masse m'accroche à un fil inextensible de longueur l et de masse négligeable. Son mouvement a lieu dans le plan vertical (Oxy) du référentiel fixe R(O, x,y,z).

On écarte le pendule d'un angle θ de sa position d'équilibre (θ = 0) et on lâche sans vitesse initiale. Les forces de frottement sont supposés inexistantes.

L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur g considéré comme uniforme.

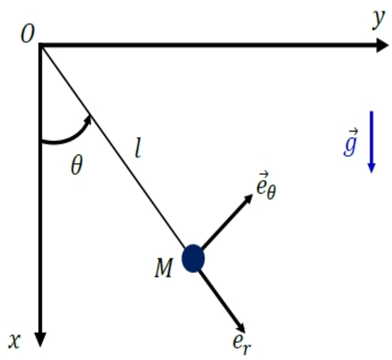


Figure 2

1- Exprimer les forces appliquées au point M dans la base. $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.

2- Calculer $\vec{v}$ et $\vec{a}$ respectivement les vecteurs vitesse et accélération de M dans R.

3- En appliquant le PFD dans le référentiel galiléen R :

   a- Etablir l'équation différentielle du mouvement dans le cas de faibles oscillations.

   b- Résoudre cette équation différentielle.

4- Etablir l'expression de la tension T du fil.

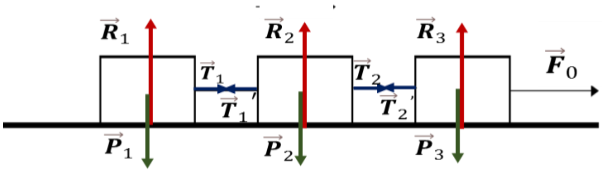
5- Retrouver l'équation différentielle du mouvent en appliquant le théorème de l'Energie cinétique (T.E.C).

<u>*Solution*</u>

- **<u>Exercice 1</u>**

1- Calculer l'accélération de système et les tensions des fils

a. Sans frottement



- Accélération de système
- En utilisant le principe fondamental de la dynamique (P.F.D):

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ *avec :* $\vec{T}_1 = \vec{T}_1{}' \; ; \; \vec{T}_2 = \vec{T}_2{}'$

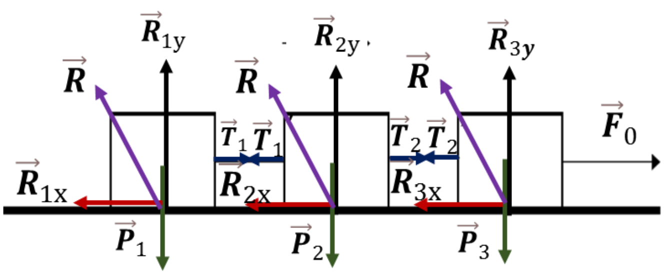
- Projection sur (Oxy)

- $\underline{m_1 :}\begin{cases} ox:\; T_1 = m_1 a & (1) \\ oy:\; -m_1 g + R_1 = 0 & (2) \end{cases}$
- $\underline{m_2 :}\begin{cases} ox: -T_1 + T_2 = m_2 a & (3) \\ oy:\; -m_2 g + R_2 = 0 & (4) \end{cases}$
- $\underline{m_3 :}\begin{cases} ox: -T_2 + F_0 = m_1 a & (5) \\ oy:\; -m_3 g + R_3 = 0 & (6) \end{cases}$

$$\Rightarrow (1) + (3) + (5) \Rightarrow F_0 = (m_1 + m_2 + m_3)a \Rightarrow \mathrm{a} = \frac{F_0}{m_1 + m_2 + m_3} \Rightarrow \mathrm{a} = 2\mathrm{m/s}$$

- Les tensions des 2 files T_1 , T_2
- $(1) \Rightarrow T_1 = m_1 a = 30 * 2 = 60N$
- $(3) \Rightarrow T_2 = T_1 + m_2 a = 60 + (20 * 2) = 100N$

b. Avec frottement



➢ **Accélération de système**

- En utilisant le principe fondamental de la dynamique (P.F.D):

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ *avec :* $\vec{T}_1 = \vec{T}_1{}' \; ; \; \vec{T}_2 = \vec{T}_2{}'$

- Projection sur (Oxy)

- $\underline{m_1 :}\begin{cases} ox: -R_{1x} + T_1 = m_1 a & (1) \\ oy: -m_1 g + R_{1y} = 0 & (2) \end{cases}$
- $\underline{m_2 :}\begin{cases} ox: -R_{2x} - T_1 + T_2 = m_2 a & (3) \\ oy: -m_2 g + R_{2y} = 0 & (4) \end{cases}$
- $\underline{m_3 :}\begin{cases} ox: -R_{3x} - T_2 + F_0 = m_1 a & (5) \\ oy: -m_3 g + R_{3y} = 0 & (6) \end{cases}$

$$\Rightarrow (1) + (3) + (5) \Rightarrow -R_{1x} - R_{2x} - R_{3x} + F_0 = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

<u>Avec</u> $\mu_c = \frac{R_x}{R_y} \Rightarrow R_x = \mu_c . R_y$

- $(2) + (4) + (6) \Rightarrow R_{1y} + R_{2y} + R_{3y} = m_1 g + m_2 g + m_3 g$

<u>On a :</u> $R_x = \mu_c . R_y \Rightarrow R_x = \mu_c (m.g)$

<u>Donc</u> : $-R_{1x} - R_{2x} - R_{3x} + F_0 = (m_1 + m_2 + m_3)a$

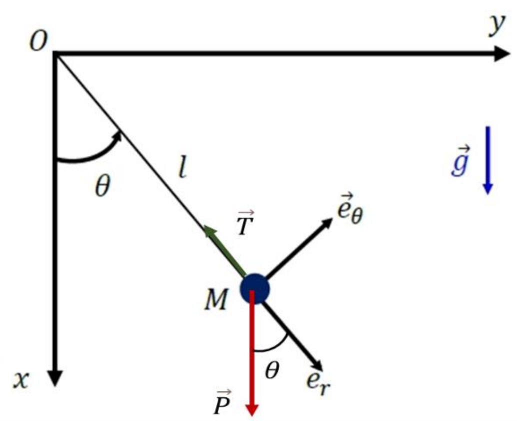
$\Rightarrow -\mu_c g(m_1 + m_2 + m_3) + F_0 = (m_1 + m_2 + m_3)a$

$$\Rightarrow \text{a} = -\mu_c g + \frac{F_0}{m_1 + m_2 + m_3} \Rightarrow \text{a} = 1\text{m/s}$$

- **Les tensions des 2 files T_1 , T_2**

- $(1) \Rightarrow -R_{1x} + T_1 = m_1 a \Rightarrow T_1 = \mu_c (m_1 g) + m_1 a \Rightarrow T_1 = 60N$
- $(3) \Rightarrow -R_{2x} - T_1 + T_2 = m_2 a \Rightarrow T_2 = \mu_c (m_1 g) + T_1 + m_2 a \Rightarrow T_2 = 100N$
- Les tensions sont independent des frottement
- <u>**Exercice 2**</u>

1. Expression des forces appliquées au point M dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$



Les forces appliquées sur M sont :

- **Le poids** $\vec{P}$: le poids se la masse M dirigé verticalement vers le bas, qui s'écrit dans la base cartésienne :

$$\vec{P} = -mg\vec{k}$$

- Dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$

$$\vec{P} = m\vec{g} : \begin{cases} \vec{e}_r : P_r = mgcos\theta \\ \vec{e}_\theta : P_\theta = -mgsin\theta \end{cases}$$

- **La tension du fil** $\vec{T}$: qui est dirigée suivant $\vec{e}_r$

$$\vec{T} = -T\vec{e}_r$$

2. Vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ dans R

En coordonnées cylindrique, la position de M est donnée par :

$\overrightarrow{OM} = l\vec{e}_r$

La vitesse $\vec{v}$ est obtenue par dérivation :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

L'accélération $\vec{a}$ est :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -l\dot{\theta}^2\vec{e}_r + l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\begin{cases} \vec{e}_r : a_r = -l\dot{\theta}^2 \\ \vec{e}_\theta : a_\theta = l\ddot{\theta} \end{cases}$$

3. Équation différentielle du mouvement (PFD appliqué dans R)

En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique dans le référentiel galiléen R :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Projection sur $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$:

$$\begin{cases} \vec{e}_r: mgcos\theta - T = ma_r \\ \vec{e}_\theta: -mgsin\theta = ma_\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mgcos\theta - T = -ml\dot{\theta}^2 & (1) \\ -mgsin\theta = ml\ddot{\theta} & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow -mgsin\theta = ml\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} sin\theta = 0$$

Pour les faibles oscillations ($\theta \approx 0$), on peut écrire $sin\theta \approx \theta$, ce qui donne :

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

4. Résolution de l'équation différentielle

L'équation $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ est une équation différentielle de deuxième degré, dont la solution :

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(wt + \varphi) \quad avec \quad w^2 = \frac{g}{l}$$

Si t=0, $\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \sin(\varphi) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = w.cos(\varphi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\varphi) = 1 \\ cos(\varphi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

D'où

$$\theta(t) = \theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

5. Expression de la tension T du fil

On injecte $\dot{\theta}^2$ dans l'expression de T :

$$mgcos\theta - T = -ml\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow T = m(gcos\theta + l\dot{\theta}^2)$$

En utilisant

$$\theta(t) = \theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \theta_0 \sqrt{\frac{g}{l}} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \ T = mg(cos\theta + {\theta_0}^2 \cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \frac{\pi}{2}\right))$$

6. Retrouver l'équation différentielle via le théorème de moment cinétique

Le théorème de moment cinétique dit que :

$$\frac{\boldsymbol{d}\vec{L}_{/O}}{\boldsymbol{dt}} = \vec{M}_{/O}(\sum \vec{F}_{ext})$$

$$\Rightarrow \frac{\boldsymbol{d}\vec{L}_{/O}}{\boldsymbol{dt}} = \vec{M}_{/O}(\vec{P}) + \vec{M}_{/O}(\vec{T}) \qquad (3)$$

Et le moment cinétique est

$$\vec{L}_{/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}$$

Avec $\vec{p}$: quantité de mouvement $\Rightarrow \vec{p} = m\vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{L}_{/O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$$

Avec $\overrightarrow{OM} = l\vec{e}_r$ $\quad \vec{\boldsymbol{v}} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$$\Rightarrow \vec{L}_{/O} = l\vec{e}_r \wedge ml\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \ ml^2\dot{\theta}\vec{k}$$

Alors :

$$\Rightarrow \frac{\boldsymbol{d}\vec{L}_{/O}}{\boldsymbol{dt}} = ml^2\ddot{\theta}\vec{k}$$

Et les moment de ces forces sont :

- $\vec{M}_{/O}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = l\vec{e}_r \wedge (mgcos\theta.\vec{e}_r - mgsin\theta.\vec{e}_\theta)$

$$\Rightarrow \vec{M}_{/O}(\vec{P}) = -mglsin\theta\vec{k}$$

- $\vec{M}_{/O}(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$ à cause $\vec{T}//\overrightarrow{OM}$

(3) $\Longrightarrow \frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = \vec{M}_{/O}(\vec{P}) + \vec{M}_{/O}(\vec{T})$

$\Longrightarrow ml^2\ddot{\theta}\vec{k} = -mglsin\theta\vec{k}$

$$\Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$$

Pour les faibles oscillations ($\theta \approx 0$), on peut écrire $sin\theta \approx \theta$, ce qui donne :

$$\Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Chapitre IV : Dynamique du point

1. Introduction

Les lois de Newton nous permettent, en principe, de résoudre tous les problèmes de dynamique. Si nous connaissons les positions et les vitesses initiales des particules d'un système, ainsi que toutes les forces qui s'exercent sur elles, nous pouvons prédire comment le système évoluera au cours du temps. En pratique, cependant, nous ne connaissons pas toujours toutes les forces en jeu, et même si nous les connaissons, les équations à résoudre sont parfois trop nombreuses ou trop complexes. Dans de nombreux cas, il est possible d'obtenir des informations intéressantes sur le système de manière plus simple en utilisant des concepts tels que le travail et l'énergie. L'énergie a la particularité d'être invariante pour un système isolé, tout comme la quantité de mouvement pour ce même système isolé et le moment cinétique pour les forces centrales. C'est cette conservation de l'énergie qui est souvent exploitée.

2. Travail et puissance d'une force

2.1. Travail élémentaire d'une force

Soit un point matériel M soumis a une force $\vec{F}$ et effectuant un déplacement élémentaire $d\vec{l}$

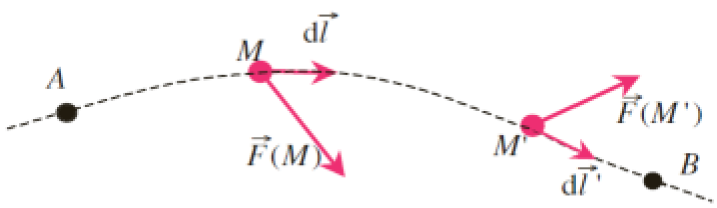


Figure 4.1 Travail élémentaire

Le travail élémentaire dw effectué par une force $\vec{F}$ sur une masse ponctuelle m lors d'un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ est défini par :

$$dw = \vec{F}.d\vec{l} = \|\vec{F}\|.\|d\vec{l}\|.\cos(\vec{F}, d\vec{l})$$

Où $d\vec{l}$ est le déplacement élémentaire

- Le travail élémentaire est une grandeur algébrique (positive ou négative).
- Son unité est le Joule (J)= [$Kg.m^2s^{-2}$]= [N.m]
- La définition du travail élémentaire dw de la force correspond à la définition plus générale de « circulation élémentaire du vecteur force ».

2.2.Travail d'une force

Soit un point matériel M, décrivant une trajectoire (C) par rapport à un référentiel R. On suppose que le point matériel passe par le point A à l'instant t_1 et par le point B à l'instant t_2 Le travail de la force $\vec{F}$ lors de ce déplacement est :

$$.w = \int_C \vec{F}.d\vec{l} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l}$$

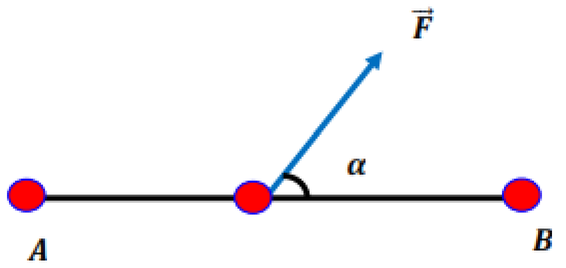


Figure 4.2 Travail d'une force

$$\Longrightarrow \underset{A\rightarrow B}{\mathrm{w}}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = \|\vec{F}\|.\|\overrightarrow{AB}\|.\cos(\alpha)$$

L'angle α est l'angle que fait le vecteur force $\vec{F}$ avec le vecteur de déplacement $\overrightarrow{AB}$

- Si la force $\vec{F}$ est perpendiculaire au trajet de A et B son travail au cours de ce déplacement est nul

$$\Longrightarrow \underset{A\rightarrow B}{\mathrm{w}}(\vec{F}) = 0J$$

- La force appliquée $\vec{F}$ est dite :

- Motrice si son travail est positif $\mathrm{w}(\vec{F}) > 0$ (travail moteur) : la force $\vec{F}$ tend à faire déplacer le mobile dans le sens positif du mouvement. ***w** = +**F AB** : **90°** > α > 0°*

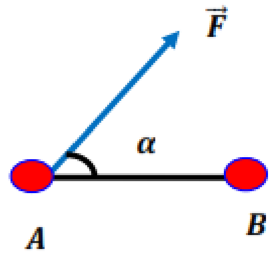


Figure 4.3 Le travail est moteur $w > 0$, $(\alpha < \frac{\pi}{2})$

- Résistante si son travail est négatif $w(\vec{F}) < 0$ (travail résistant) : la force $\vec{F}$ tend à s'opposer au mouvement du mobile. ***w*** = -***F AB*** : *18****0****° > α >90°*

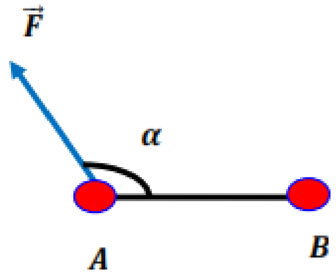


Figure 4.4 Le travail est résistant $w < 0$, $(\alpha > \frac{\pi}{2})$

- Travail est nul $w(\vec{F}) = 0$: La force $\vec{F}$ reste orthogonale au déplacement de son point d'application ; α *=90°*

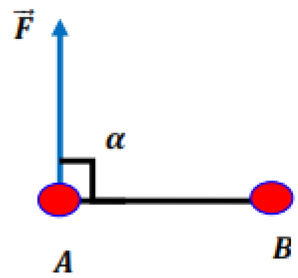


Figure 4.5 Le travail est nul $w = 0$, $(\alpha = \frac{\pi}{2})$

- Le travail effectué par un ensemble de forces $\sum \vec{F}$ est la somme des travaux de ces forces : $w(\sum \vec{F}) = \sum w(\vec{F})$

2.3.Puissance d'une force

Soit un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{v}$, soumis à une force $\vec{F}$. La puissance de $\vec{F}$ (notée $P(\vec{F})$) est la grandeur scalaire définie par la relation :

$P(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{v}$ (Exprimée en Watts « W » , W=[J.s^{-1}]

D'après la définition du vecteur vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$, la relation entre la puissance d'une force et son travail élémentaire s'écrit *:*

$$dw = \vec{F}.d\vec{l} = P(\vec{F}).dt$$

Par conséquence : le travail d'une force égal :

$$\underset{A \to B}{\mathrm{w}}(\vec{F}) = \int_{t_1}^{t_2} P(\vec{F}).dt$$

Où : la puissance d'une force égale : $P(\vec{F}) = \frac{dw(\vec{F})}{dt}$

Remarque :

La puissance d'une force $\vec{F}$ est :

- Positive $P(\vec{F}) > 0$, si $\vec{F}$ est motrice $(w(\vec{F}) > 0)$
- Négative $P(\vec{F}) < 0$, si $\vec{F}$ est résistante $(w(\vec{F}) < 0)$
- Nulle $P(\vec{F}) = 0$ si $\vec{F}$ ne travaille pas *(* $\vec{F}$ perpendiculaire au trajet $w(\vec{F}) = 0$), ou si le point matériel est immobile.

3. Expression du travail dans différents systèmes de cordonnées

En exprimant le produit scalaire en termes des composantes de $\vec{F}$ et de $d\vec{l}$, on obtient:

3.1.Systèmes de coordonnées cartésiennes

$$\vec{F}\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}, d\vec{l}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow dw = \vec{F}.d\vec{l} = F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz$$

$$\Rightarrow \underset{A \to B}{\mathrm{w}} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \int_{x_A}^{x_B} F_x.dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y.dy + \int_{Z_A}^{z_B} F_z.dz$$

3.2. Systèmes de coordonnées intrinsèques

$$\vec{F}\begin{pmatrix}F_T\\F_N\end{pmatrix},\ d\vec{l}\begin{pmatrix}dS\\0\end{pmatrix}$$

$$dw = \vec{F}.d\vec{l} = F_T.dS + F_N.0$$

$$\Rightarrow dw = F_T.dS = F_T.Vdt$$

$$\Rightarrow \underset{A\rightarrow B}{\mathrm{w}} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \int_{t_A}^{t_B} F_T.Vdt$$

3.3. Systèmes de coordonnées polaires

$$\vec{F}\begin{pmatrix}F_r\\F_\theta\end{pmatrix},\ d\vec{l}\begin{pmatrix}dr\\rd\theta\end{pmatrix}$$

$$dw = \vec{F}.d\vec{l} = F_r.dr + F_\theta.rd\theta$$

$$\Rightarrow \underset{A\rightarrow B}{\mathrm{w}} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \int_{r_A}^{r_B} F_r.dr + \int_{\theta_A}^{\theta_B} F_\theta.rd\theta$$

3.4. Systèmes de coordonnées cylindriques

$$\vec{F}\begin{pmatrix}F_\rho\\F_\theta\\F_z\end{pmatrix},\ d\vec{l}\begin{pmatrix}d\rho\\rd\theta\\dz\end{pmatrix}$$

$$dw = \vec{F}.d\vec{l} = F_\rho.d\rho + F_\theta.rd\theta + F_z.dz$$

$$\Rightarrow \underset{A\rightarrow B}{\mathrm{w}} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \int_{\rho_A}^{\rho_B} F_\rho.d\rho + \int_{\theta_A}^{\theta_B} F_\theta.rd\theta + \int_{z_A}^{z_B} F_\theta.dz$$

3.5. Systèmes de coordonnées sphériques

$$\vec{F}\begin{pmatrix}F_r\\F_\theta\\F_\varphi\end{pmatrix},\ d\vec{l}\begin{pmatrix}dr\\rd\theta\\rsin\theta d\varphi\end{pmatrix}$$

$$dw = \vec{F}.d\vec{l} = F_r.dr + F_\theta.rd\theta + F_\varphi.rsin\theta d\varphi$$

$$\Rightarrow \underset{A\rightarrow B}{\mathrm{w}} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \int_{r_A}^{r_B} F_r.dr + \int_{\theta_A}^{\theta_B} F_\theta.rd\theta + \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} rsin\theta d\varphi$$

4. Travail de la force de pesanteur

Considérons un point M de masse m se déplaçant d'un point A à un point B et calculons le travail du poids de ce point matériel au cours de ce déplacement. Le déplacement de A à B est supposé quelconque c'est-à-dire que le chemin qui mène de A à B peut prendre différentes trajectoires.

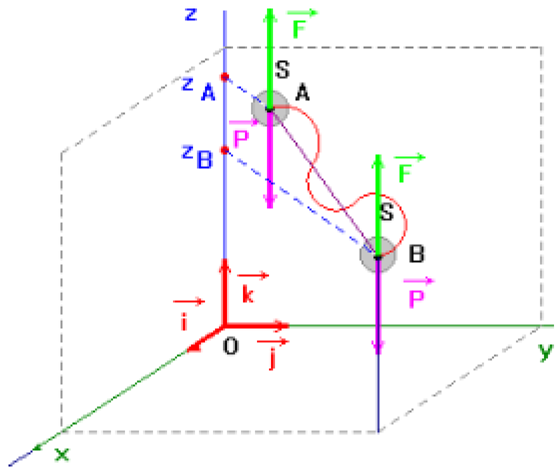


Figure 4.6 Travail de la force de pesanteur

Les composantes des vecteurs $\vec{P}$ et $\overrightarrow{AB}$ dans la base cartésienne du repère (O,x,y,z)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{P} = m\vec{g} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix}$$

D'après la définition du travail, on peut écrire :

$$\underset{A\to B}{\mathrm{w}(\vec{P})} = \vec{F}.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \underset{A\to B}{\mathrm{w}(\vec{P})} = -mg\ (z_B - z_A)$$

$\underset{A\to B}{\mathrm{w}(\vec{P})} = -mgh$, avec h=$z_B - z_A$, est la différence d'altitude entre le point d'arrivée

B et le point de départ A

- M descend (travail moteur) , (h < 0)

$$\underset{A\to B}{\mathrm{w}(\vec{P})} = \vec{P}.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \underset{A\to B}{\mathrm{w}(\vec{P})} = P.AB.cos\theta = mgh.cos0 = mgh$$

- M monte (travail résistant) (h >0)

$$\underset{A\to B}{\mathrm{w}(\vec{P})} = \vec{P}.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \underset{A\to B}{\mathrm{w}(\vec{P})} = P.AB.cos\theta = mgh.cos\pi = -mgh$$

5. Travail d'une force élastique :

Considérons un ressort de raideur k , de longueur au repos l_0 au bout duquel est accrochée une masse m . Le ressort et la masse sont sur un plan horizontal et nous nous intéressons uniquement à la force élastique.

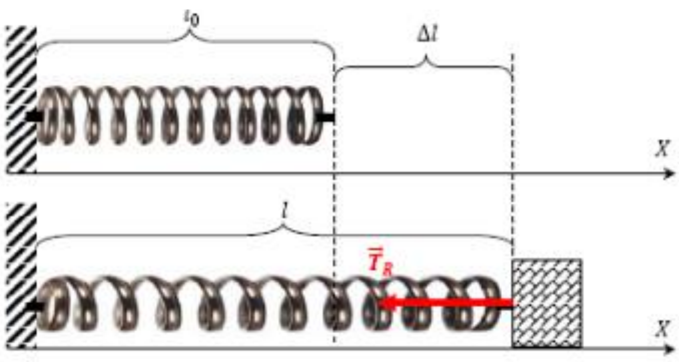


Figure 4.7 Système masse-ressort

La force élastique peut être exprimer par : $\vec{F}_{el} = \vec{T}_R = -k.\Delta l.\vec{\imath} = -k(l - l_0)\vec{\imath}$

Avec : $l - l_0 = x$, so : $\vec{F}_{el} = -k.x.\vec{\imath}$

Le travail élémentaire de la force élastique :

$$dw = \vec{F}_{el}.d\vec{l} = = -k.x.dx$$

Lorsque $\vec{T}_R$ passe d'une position x_A à x_B on a :

$$\underset{A\rightarrow B}{\mathrm{w}}(\vec{F}_{el}) = \int_{x_A}^{x_B} -k.x.dx = -\frac{1}{2}k\,[x^2]_{x_A}^{x_B} \Rightarrow \underset{A\rightarrow B}{\mathrm{w}}(\vec{F}_{el}) = -\frac{1}{2}k\,(x_B^2 - x_A^2)$$

Nous remarquons que le travail de cette force ne dépend pas du chemin suivi, car il dépend uniquement des positions, initiale et finale du ressort.

6. Energie cinétique

6.1. Introduction

Deux types d'énergie seront introduits ici : l'énergie cinétique E_c liée au mouvement de l'objet et l'énergie potentielle E_p liée à sa position. L'énergie mécanique d'un système est alors définie par la somme des énergies cinétique et potentielle.

Considérons un point matériel M de masse *m*, se déplaçant dans un repère Galiléen R(Oxyz) sous l'action d'un ensemble de forces extérieures pendant l'intervalle de temps *dt* et de déplacement élémentaire $d\vec{l}$, le travail de cette force est :

$$dw = \vec{F}.d\vec{l}$$

Le mouvement de ce point est régi par le principe fondamental de la dynamique (PFD) :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Au cours d'un déplacement élémentaire $d\vec{l}$, la somme des travaux élémentaires des forces extérieures est donnée par :

$$\sum \vec{F}_{ext}\,.d\vec{l} = m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{l} = m.d\vec{v}.\frac{d\vec{l}}{dt} = m.\vec{v}.d\vec{v}$$

Par intégration de cette relation sur un trajet AB nous obtenons :

$$m\int_{v_A}^{v_B}\vec{v}.d\vec{v} = \sum\int_{A}^{B}\vec{F}_{ext}\,.d\vec{l} = \sum w(\vec{F}_{ext}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}m({v_B}^2 - {v_A}^2) = \sum w(\vec{F}_{ext})$$

La quantité $\frac{1}{2}mv^2$ représente l'énergie cinétique du point matériel.

6.2. Définition de l'énergie cinétique

On définit l'énergie cinétique E_C pour un point matériel de masse m se déplacement à la vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel Galiléen, par : :

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

Donc, la variation de l'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces extérieures :

$$w = \int_{A}^{B}\vec{F}.d\vec{l} = \int_{v_A}^{v_B}m\vec{v}.d\vec{v} = \frac{1}{2}m\,[v^2]_{v_A}^{v_B} = \frac{1}{2}k\,v_B^2 - \frac{1}{2}k\,v_A^2 = E_C(B) - E_C(A) = \Delta E_C$$

Unité de l'énergie cinétique est le Joule.

Nous savons que, la quantité du mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$, alors l'énergie cinétique s'écrit :

$$E_C = \frac{p^2}{2m}$$

6.3.Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre une position A et une autre position B est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points.

$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum_{A \to B} \mathrm{w}(\vec{F})$$

- **Remarque**

- Si $\Delta E_C = 0 \Longrightarrow v_B = v_A \Longrightarrow$ le travail est nul, le mouvement est uniforme
- Si $\Delta E_C > 0 \Longrightarrow v_B > v_A \Longrightarrow$ le travail est moteur, le mouvement est accéléré.
- Si $\Delta E_C < 0 \Longrightarrow v_B < v_A \Longrightarrow$ le travail est résistant, le mouvement est retardé

7. Energie potentielle

7.1.Définition

L'énergie potentielle est une fonction de coordonnées, telle que l'intégration entre ses deux valeurs prises au départ et à l'arrivée soit égale au travail fourni à la particule pour la déplacer de sa position initiale à sa position finale.

L'énergie potentielle est une énergie liée à la position.
Le travail d'une force conservative ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des états initial (A) et final (B). Ce travail peut être exprimé en fonction d'une fonction E_P appelée énergie potentielle.
Le théorème de l'énergie potentielle est donné par *:*

$$\Delta E_P = E_P(B) - E_P(A) = -\sum_{A \to B} \mathrm{w}(\vec{F})$$

La variation de l'énergie potentielle entre deux points A et B est égale à l'opposé du travail des forces entre ces deux points.

7.2. Énergie potentielle gravitationnelle

C'est l'énergie potentielle associée à la force du poids (ou la pesanteur) $\vec{P}$

Dans un référentiel R(Oxyz), on considère le mouvement d'un point matériel
M de masse *m* soumis à la pesanteur terrestre :

$$\vec{P} = -mg\vec{k}$$

Donc, le travail de $\vec{P}$ quand le point matériel se déplace de A vers B est :

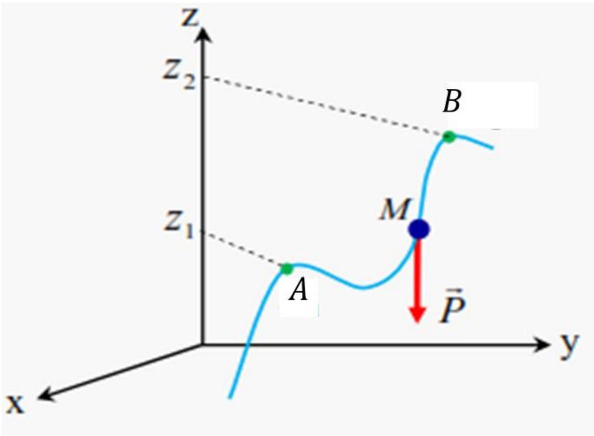


Figure 4.8 Énergie potentielle gravitationnelle

$$\underset{A\to B}{\mathrm{w}}(\vec{P}) = \int_A^B \vec{P}\,.\,d\vec{l} \Leftrightarrow \underset{A\to B}{\mathrm{w}}(\vec{P}) = \int_A^B (-m\vec{g}\,\vec{k})\;(dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k})$$

$$\underset{A\to B}{\mathrm{w}}(\vec{P}) = \int_A^B -mgdz = mgz_A - mgz_B = E_{Pp}(B) - E_{Pp}(A)$$

Donc, l'énergie potentielle gravitationnelle du point de masse *m* peut être donnée par la relation :

$$E_{Pp} = mgh + C$$

Où : *h* : la hauteur de la position de *M* par rapport à un niveau *h=0*

C : une constante d'intégration.

L'énergie potentielle de la masse m à une hauteur h est :

$$E_{Pp} = mgh$$

7.3.Energie potentielle élastique

C'est l'énergie potentielle associée à la force du rappel $\vec{F}_{el}$ d'un ressort.

On considère le mouvement d'un point matériel attaché à un ressort de raideur *k*

La force de rappel du ressort est donnée par :

$$\vec{F}_{el} = -k.\Delta l.\vec{\imath} = -k.x.\vec{\imath}$$

Donc, le travail effectué par $\vec{F}_{el}$ quand le point matériel se déplace de A à B

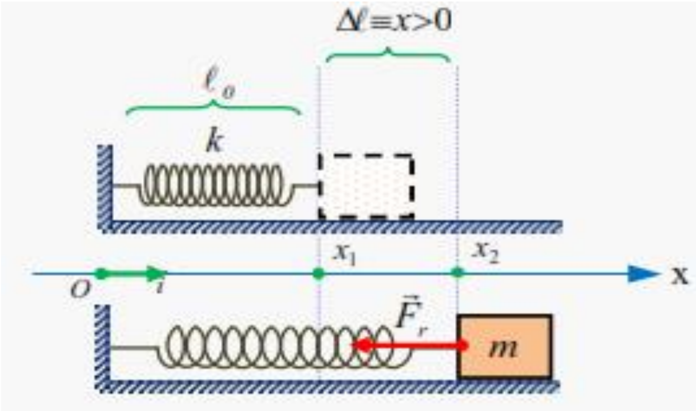


Figure 4.9 Energie potentielle élastique

$$\underset{A\to B}{\mathrm{w}}(\vec{F}_{el}) = \int_A^B \vec{F}_{el} \cdot d\vec{l} \Leftrightarrow \underset{A\to B}{\mathrm{w}}(\vec{F}_{el}) = \int_A^B (-k.x.\vec{\imath})\,(dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k})$$

$$\underset{A\to B}{\mathrm{w}}(\vec{F}_{el}) = \int_A^B -kxdx = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 = E_{Pe}(A) - E_{Pe}(B)$$

Alors, l'énergie potentielle élastique est donnée par :

$$E_{Pp} = \frac{1}{2}kx^2$$

8. Bilan d'énergie

❖ Energie cinétique

$$\begin{cases} E_C = \dfrac{1}{2}mv^2 \text{ ; } correspondante\ au\ cas\ de\ translation \\ E_p = \dfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \text{ ; } correspondante\ au\ cas\ de\ rotation \end{cases}$$

Avec : J est le moment d'inertie. $J = mR^2$

❖ Energie potentielle

$$\begin{cases} E_{Pp} = mgh \text{ correspondante au travail de la force de pesanteur} \\ E_{Pe} = \frac{1}{2}kx^2; \text{ correspondante au travail de force élastique.} \end{cases}$$

9. Energie mécanique

Soit un système se déplaçant, entre les points A et B sous l'effet de forces conservatives et non conservatives. D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a

$$\begin{cases} \sum_{A \to B} \mathrm{w}(\vec{F}) = \Delta E_C \\ \sum_{A \to B} \mathrm{w}(\vec{F}) = -\Delta E_P \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \sum_{A \to B} \mathrm{w}(\vec{F}) = E_C(B) - E_C(A) \\ \sum_{A \to B} \mathrm{w}(\vec{F}) = E_P(A) - E_P(B) \end{cases}$$

- En déduire $\Delta E_C = -\Delta E_P$
- L'égalité de ces deux équations donne :

$$E_C(A) + E_P(A) = E_C(B) + E_P(B)$$

Cette expression montre que la quantité $E_C + E_P$ reste constante tout au long de la trajectoire. Dans le cas des forces conservatives, cette quantité est appelée : Énergie mécanique.

$$E_T = E_M = E_C + E_P$$

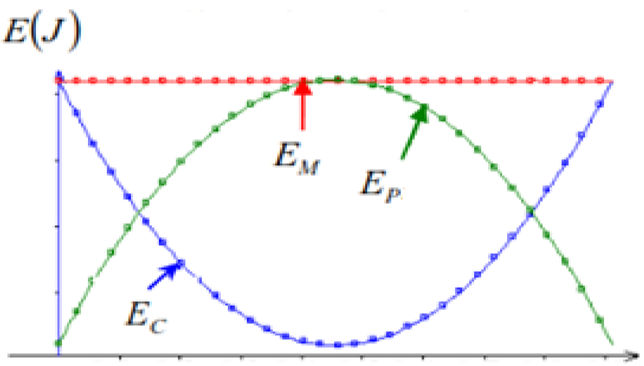


Figure 4.10 Diagrammes énergétiques.

- Donc : $E_M(A) = E_M(B)$ Alors $\Delta E_M = 0$

10. Champ de forces

10.1. Forces conservatives

Une force s'exerçant sur un point matériel A dans un référentiel R est dite conservative si et seulement si : il existe une fonction E_p de coordonnées de *A* (champ scalaire), telle que :

$$dw = -dE_P$$

Le travail d'une force conservative ne dépend pas du chemin suivi, il ne dépend que de la position initiale et la position finale.
La variation de l'énergie potentielle :

$$\Delta E_P = -\sum \mathrm{w}(\vec{F})$$

Où : $\vec{F}$ est une force conservative.

En explicitant le travail, à la définition intégrale de l'énergie potentielle :

$$\Delta E_P = -\sum \mathrm{w}(\vec{F}) \Rightarrow E_P(B) - E_P(A) = -\int_A^B \vec{F}_{ext} \,.\, d\vec{l}$$

On déduit la définition différentielle de l'énergie potentielle en fonction du travail élémentaire de la force conservative :

$$dE_P = -\int_A^B \vec{F}_{ext} \,.\, d\vec{l}$$

Dans le système de coordonnées cartésiennes, la dérivée de l'énergie potentielle *(dE_P)* de la force *($\vec{F}$)* et l'expression du vecteur de déplacement élémentaire ($d\vec{l}$) sont exprimées respectivement comme suit :

Cette dernière relation peut s'écrire en fonction du gradient de l'énergie potentielle E_P

La différentielle totale de la fonction $E_P\ (x, y, z)$

$$dE_P = \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz$$

Le champ de force est défini par :

$$\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}$$

Le déplacement élémentaire $d\vec{l}$ est défini par :

$$d\vec{l} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

Alors

$$dE_P = -\vec{F}_{ext}.d\vec{l} \Rightarrow \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz = -\left[\left(F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}\right)\left(x\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz = -\left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)$$

Par identification :

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial E_P}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial E_P}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial E_P}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x\vec{\imath} = -\dfrac{\partial E_P}{\partial x}\vec{\imath} \\ F_y\vec{\jmath} = -\dfrac{\partial E_P}{\partial y}\vec{\jmath} \\ F_z\vec{k} = -\dfrac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k}\right)$$

Le gradient d'une énergie potentielle en coordonnées cartésiennes, s'écrire :

$$\overrightarrow{grad}E_P = \vec{\nabla}E_P = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)E_P = \frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k}$$

Ainsi, la relation entre la force et l'énergie potentielle est exprimée comme suit

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k}\right) = -\overrightarrow{grad}E_P$$

On dit que : la force $\vec{F}$ est conservative, elle est dérivée d'une énergie potentielle.E_P et peut écrit sous la forme

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_P$$

Si le déplacement se fait par un chemin curviligne en peut utiliser les cordonnées polaire (r,θ) , cylindriques (ρ,θ,z) et sphérique (r,θ,φ)

$$\overrightarrow{grad}E_P = \frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k}$$

- **Dans le système de coordonnées polaires :**

Champ de force en fonction des cordonnées Polaire (r,θ), s'écrire :

$$\vec{F} = F_r\vec{u}_r + F_\theta\vec{u}_\theta$$

Le déplacement élémentaire $d\vec{l}$ en fonction des cordonnées polaire, s'écrire :

$$d\vec{l} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta$$

La différentielle totale de la fonction $E_P(r,\theta)$, s'écrire :

$$dE_P = \frac{\partial E_P}{\partial r}dr + \frac{\partial E_P}{\partial \theta}d\theta$$

$$dE_P = -\vec{F}_{ext}.d\vec{l} \Longrightarrow \frac{\partial E_P}{\partial r}dr + \frac{\partial E_P}{\partial \theta}d\theta = -(F_r dr + rF_\theta d\theta)$$

Par identification :

$$\begin{cases} F_r = -\dfrac{\partial E_P}{\partial r} \\ F_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_P}{\partial \theta} \end{cases}$$

Alors, le gradient en fonction des cordonnées polaire, s'écrire :

$$\overrightarrow{grad}E_P = \frac{\partial E_P}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial E_P}{\partial \theta}\vec{u}_\theta$$

- **Dans le système de coordonnées cylindriques**

Champ de force en fonction des cordonnées cylindrique (ρ,θ,z), s'écrire :

$$\vec{F} = F_\rho\vec{u}_\rho + F_\theta\vec{u}_\theta + F_z\vec{k}$$

Le déplacement élémentaire $d\vec{l}$ en fonction des cordonnées cylindrique, s'écrire :

$$d\vec{l} = d\rho\vec{u}_\rho + rd\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{k}$$

La différentielle totale de la fonction $E_P(\rho, \theta, z)$, s'écrire :

$$dE_P = \frac{\partial E_P}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial E_P}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz$$

$$dE_P = -\vec{F}_{ext}.d\vec{l} \Longrightarrow \frac{\partial E_P}{\partial r}dr + \frac{\partial E_P}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz = -(F_\rho d\rho + \rho F_\theta d\theta + F_z dz)$$

Par identification :

$$\begin{cases} F_\rho = -\dfrac{\partial E_P}{\partial \rho} \\ F_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_P}{\partial \theta} \\ F_z = -\dfrac{\partial E_P}{\partial z} \end{cases}$$

Alors, le gradient en fonction des cordonnées cylindrique, s'écrire :

- **Dans le système de coordonnées sphérique**

  Champ de force en fonction des cordonnées sphérique (r, θ, φ), s'écrire :

$$\vec{F} = F_r\vec{u}_r + F_\theta\vec{u}_\theta + F_\varphi\vec{u}_\varphi$$

Le déplacement élémentaire $d\vec{l}$ en fonction des cordonnées cylindrique, s'écrire :

$$d\vec{l} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + rsin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$$

La différentielle totale de la fonction $E_P(\rho, \theta, z)$, s'écrire :

$$dE_P = \frac{\partial E_P}{\partial r}dr + \frac{\partial E_P}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial E_P}{\partial \varphi}d\varphi$$

$$dE_P = -\vec{F}_{ext}.d\vec{l} \Longrightarrow \frac{\partial E_P}{\partial r}dr + \frac{\partial E_P}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz = -(F_r dr + rF_\theta d\theta + rF_\varphi sin\theta d\varphi)$$

Par identification :

$$\begin{cases} F_r = -\dfrac{\partial E_P}{\partial r} \\ F_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_P}{\partial \theta} \\ F_\varphi = -\dfrac{1}{rsin\theta}\dfrac{\partial E_P}{\partial \varphi} \end{cases}$$

Alors, le gradient en fonction des cordonnées cylindrique, s'écrire :

$$\overrightarrow{grad}E_P = \frac{\partial E_P}{\partial r}\vec{u}_r + +\frac{1}{r}\frac{\partial E_P}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial E_P}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

Remarque

Une force est conservatrice vérifiée une des trois conditions

- Une force est dit e conservative lorsque le travail produit par cette force est indépendant du chemin suivi par son point d'application $w_{AB} = w_1 = w_2$

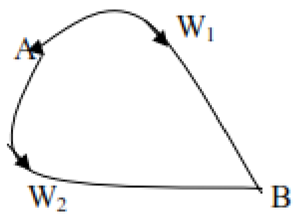


Figure 4.10 Chemin

- Elle dérive d'un potentiel

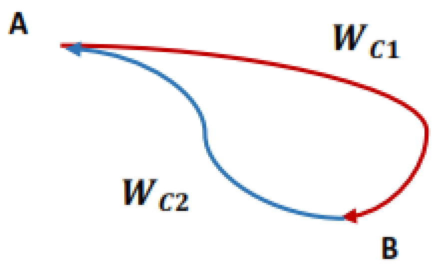
$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_P$$

- La condition pour qu'un champ de forces soit conservatif est que son rotationnel soit nul

$$\vec{F} \text{ Conservative} \Longrightarrow \overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$$

- Le travail d'une force conservative est nul sur une courbe C fermée

$$\oint \vec{F}\, d\vec{l} = w = 0$$



-

Figure 4.11 Chemin fermée

- **Rappel**

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0} \qquad \Longrightarrow \begin{vmatrix} +\vec{\imath} & -\vec{\jmath} & +\vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0}$$

Par identification on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_z}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_z}{\partial x} = \dfrac{\partial F_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = \dfrac{\partial F_x}{\partial y} \end{cases}$$

- Exemple des forces conservatives : Force de pesanteur ; Force du poids ; Force de rappel des ressorts. Force électrostatique

10.2. Forces non conservatives

En mécanique, la plupart des forces étudiées sont conservatives et dérivent donc d'une énergie potentielle indépendant du temps. Cependant, certaines forces ne sont pas conservatives :

- Les forces de frottement,
- La force de magnétique

- La force normale de la réaction
- La tension du fil
- La force de pression.

On peut montrer que le rotationnel de cette force n'est pas nul

Dans le cas des forces de frottements, le travail effectué dépend du chemin suivi. Le travail de la force de frottement $\vec{f_f}$ est égale à :

$$\Delta E_M = E_M(B) - E_M(A) = \sum w\,(\vec{f_f})$$

- **<u>Exercice 1</u>**

Un corps est soumis à une force $\vec{F}$ telle que :

$$\vec{F} = (x - ay)\vec{\imath} + (3y - 2x)\vec{\jmath}$$

1- Calculer le travail de la force $\vec{F}$ si le cops déplace de A (0, 0) au point B (2, 4).

   a- Sur l'axe *ox* de A vers C (2 ,0) puis parallèlement à *oy* de C vers B.

   b- Sur l'axe *oy* de A vers D (0 ,4) puis parallèlement à *ox* de D vers B.

   c- Sur la droite [AB].

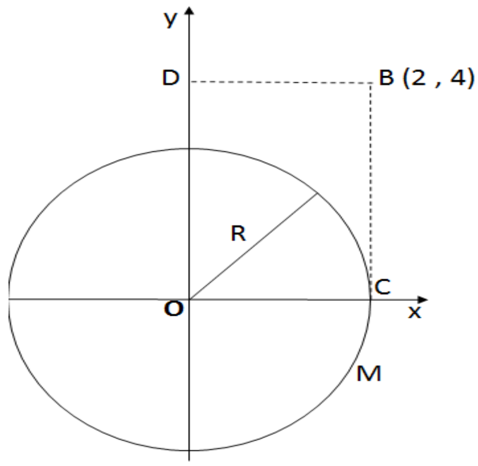


Figure 1

2- Trouver la valeur de a pour que $\vec{F}$ soit conservatrice, en déduire l'énergie potentielle Ep résultante de ce champ de force sachant que Ep (0,0)=0,

- **Exercice 2**

Un pendule (OA) formé d'une tige solide de masse négligeable et de longueur L, porte à son coté A un corps de masse (m). Le pendule est lancé avec une vitesse initiale v_0

1- Trouver l'angle de déviation du pendule par rapport à la verticale. Si on écarte le pendule avec un angle θ=60° et on le lâche sans vitesse initiale

2. Calculer sa vitesse lorsqu'il passe par sa position d'équilibre, puis lorsqu'il fait un angle θ'=30° par rapport à la verticale.

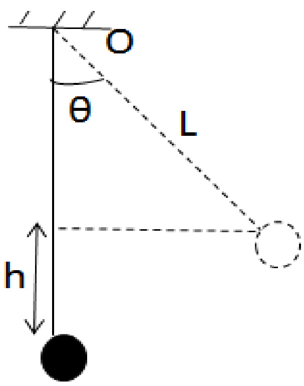


Figure 2

Solution

- **Exercice 1**

On a la force vectorielle :

$$\vec{F} = (x - ay)\vec{\imath} + (3y - 2x)\vec{\jmath}$$

1- Calculer le travail de la force $\vec{F}$ si le cops déplace de A (0, 0) au point B (2, 4).

On

$$dw = \vec{F}.d\vec{l}$$

$Ou\ d\vec{l} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath}$

$$\Rightarrow dw = \vec{F}.d\vec{l}$$

$$\Rightarrow dw = F_x dx + F_y dy \Rightarrow dw = (x - ay)dx + (3y - 2x)dy$$

a. Chemin 1 : $A\ (0,0)\ \rightarrow\ C(2\ ,0)\ \rightarrow\ B(2,4)$

$$\underset{ACB}{\mathrm{w}} = \underset{AC}{\mathrm{w}} + \underset{CB}{\mathrm{w}}$$

- le chemin : $A\ (0,0)\ \rightarrow\ C(2\ ,0)$

$$\begin{cases} x\ varie\ de\ 0\ a\ 2 \\ y = 0 \Rightarrow dy = 0 \end{cases}$$

$$\underset{AC}{\mathrm{w}} = \int_0^2 (x - ay)\,dx \Rightarrow \underset{AC}{\mathrm{w}} = \int_0^2 x\,dx \Rightarrow \underset{AC}{\mathrm{w}} = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

$$\Rightarrow \underset{AC}{\mathrm{w}} = 2J$$

- le chemin : $C(2\ ,0)\ \rightarrow\ B(2,4)$

$$\begin{cases} x = 2 \Rightarrow dx = 0 \\ y\ varie\ de\ 0\ a\ 4 \end{cases}$$

$$\underset{AC}{\mathrm{w}} = \int_0^4 (3y - 2x)dy \Rightarrow \underset{AC}{\mathrm{w}} = \int_0^4 (3y - 4)dy \Rightarrow \underset{AC}{\mathrm{w}} = \left[\frac{3y^2}{2} - 4y\right]_0^4$$

$$\Rightarrow \underset{AC}{\mathrm{w}} = 8J$$

Donc

$$\underset{ACB}{\mathrm{w}} = \underset{AC}{\mathrm{w}} + \underset{CB}{\mathrm{w}}$$

$$\underset{ACB}{\mathrm{w}} = 2 + 8 = 10J$$

b. Chemin 1 : $A\ (0,0)\ \rightarrow\ D(0\ ,4)\ \rightarrow\ B(2,4)$

$$\underset{ADB}{\mathrm{w}} = \underset{AD}{\mathrm{w}} + \underset{DB}{\mathrm{w}}$$

- le chemin : $A\ (0,0)\ \rightarrow\ D(0\ ,4)$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow dx = 0 \\ y\ varie\ de\ 0\ a\ 4 \end{cases}$$

$$\underset{AD}{\mathrm{w}} = \int_0^4 (3y - 2x)dy \Rightarrow \underset{AD}{\mathrm{w}} = \int_0^4 3y\,dy \Rightarrow \underset{AD}{\mathrm{w}} = \left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^4$$

$$\Rightarrow \underset{AD}{\mathrm{w}} = 24J$$

- le chemin : $D(0\ ,4)\ \rightarrow\ B(2,4)$

$$\begin{cases} x\ varie\ de\ 0\ a\ 2 \\ y = 4 \Rightarrow dy = 0 \end{cases}$$

$$\underset{AD}{\mathrm{w}} = \int_0^2 (x - ay)dx \Rightarrow \underset{AD}{\mathrm{w}} = \int_0^2 (x - 4a)dx \Rightarrow \underset{AD}{\mathrm{w}} = \left[\frac{x^2}{2} - 4ax\right]_0^2$$

$$\Rightarrow \underset{AC}{\mathrm{w}} = (2 - 8a)J$$

Donc

$$\underset{ADB}{\mathrm{w}} = \underset{AD}{\mathrm{w}} + \underset{DB}{\mathrm{w}}$$

$$\underset{ACB}{\mathrm{w}} = 24 + (2 - 8a) = (26 - 8a)J$$

c. Chemin 3 : Sur la droite [AB]

L'équation de la droite AB est donnée par :

$$y = 2x$$

$$\Rightarrow dy = 2dx$$

$On\ \ dw = (x - ay)dx + (3y - 2x)dy$

$$\Rightarrow dw = \big(x - a(2x)\big)dx + (3(2x) - 2x)(2dx)$$

$$\Rightarrow dw = \big(x - a(2x)\big)dx + (3(2x) - 2x)(2dx)$$

$$\Rightarrow dw = xdx - 2axdx + 12xdx - 4xdx$$

$$\Rightarrow dw = (9 - 2a)xdx$$

$$\Rightarrow \underset{AB}{\mathrm{w}} = \int_0^2 (9 - 2a)xdx$$

$$\Longrightarrow \underset{AB}{\mathrm{w}} = (9-2a)\int_0^2 x dx$$

$$\Longrightarrow \underset{AB}{\mathrm{w}} = (9-2a)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

$$\Longrightarrow \underset{AB}{\mathrm{w}} = (18-4a)J$$

Conclusion

Le travail calculé, suivant des chemins différents, n'est pas le même. Il dépend donc, du chemin suivi. Ceci montre que la force n'est pas conservative 'elle ne dérive pas d'un potentiel)

2- La valeur de *a* pour que $\overrightarrow{F}$ soit conservatrice

La $\overrightarrow{F}$ est conservatrice ⟹ le travail ne dépend pas de la trajectoire suivie :

$$\underset{ACB}{\mathrm{w}} = \underset{ADB}{\mathrm{w}} = \underset{AB}{\mathrm{w}} \Longrightarrow 10 = 26-8a = 18-4a$$

$$\Longrightarrow a = 2$$

- Ou en utilise cette méthode

La $\overrightarrow{F}$ est conservatrice ⟹ $\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$

En vérifier

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \begin{vmatrix} +\vec{\imath} & -\vec{\jmath} & +\vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +\vec{\imath} & -\vec{\jmath} & +\vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x-ay) & (3y-2x) & 0 \end{vmatrix} = (0-0)\vec{\imath} - (0-0)\vec{\jmath} + (2-a)\vec{k} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow (2-a)\vec{k} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow a = 2$$

3. Déduire l'énergie potentielle *Ep* résultante de ce champ de force sachant que E_p (0,0)=0,

- $\vec{F} = (x-2y)\vec{\imath} + (3y-2x)\vec{\jmath}$ Qui est une force conservative, donc une force qui dérive d'un potentiel E_p :

$$\Longrightarrow \vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p(x,y) = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} + -\frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath}$$

$$\Longrightarrow F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} + -\frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath}$$

$$\Longrightarrow (x-2y)\vec{\imath} + (3y-2x)\vec{\jmath} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} + -\frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath}$$

Par identification

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_p}{\partial x} = -(x-2y) & (1) \\ \dfrac{\partial E_p}{\partial y} = -(3y-2x) & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Longrightarrow E_p = -\int (x-2y)\,dx = -\frac{x^2}{2} + 2yx + C(y)$$

$$(2) \Longrightarrow \frac{\partial E_p}{\partial y} = 2x + \frac{\partial C(y)}{\partial y} = -(3y-2x)$$

$$\Longrightarrow C(y) = -\frac{3y^2}{2} + C$$

Donc

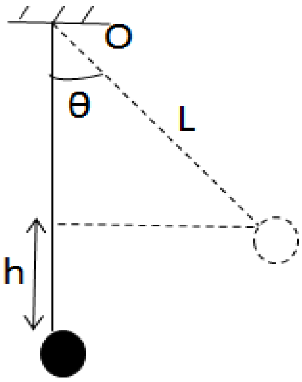
$$\Longrightarrow E_p = -\frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + 2yx + C$$

Si E_p (0,0) =0 $\Longrightarrow C = 0$

$$\Longrightarrow E_p = -\frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + 2yx$$

- **Exercice 2**

1- Angle de déviation du pendule par rapport à la verticale.



- La conversation de l'énergie totale entre l'état initial et l'état final, nous permet d'écrire :

$E_{Ti} = E_{Tf} \Rightarrow E_{Ci} + E_{Pi} = E_{Cf} + E_{Pf}$ (1)

- Le point initial (position d'équilibre) est l'origine de l'énergie potentielle $\Rightarrow E_{Pi}=0$
- L'état final correspond a une vitesse nulle $\Rightarrow E_{Cf} = 0$

L'équation (1) devient $\Rightarrow E_{Ci} = E_{Pf} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$

On a : $h = L(1 - cos\theta)$

$$(\mathbf{1}) \Rightarrow \boldsymbol{E_{Ci}} = \boldsymbol{E_{Pf}} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = mgL(1 - cos\theta)$$

$$\Rightarrow cos\theta = 1 - \frac{v_0^2}{2gL}$$

2- Vitesse de pendule

- A la position d'équilibre

En appliquant l'équation (1) entre les deux positions, on obtient pour le passage par la position d'équilibre ***:***

$$\boldsymbol{E_{Pi}} = \boldsymbol{E_{Cf}} \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

On a : $h = L(1 - cos\theta)$

$$\Rightarrow v^2 = 2gL(1 - cos\theta)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gL(1 - \cos(60))} = \sqrt{gL}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{gL}$$

- A la position $\theta' = 30°$

  L'équation (1) devient $E_{Pi} = E_{Cf} + E_{Pf} \Longrightarrow mgh = \frac{1}{2}mv'^2 + mgh'$

  On a *:* $h' = L(1 - cos\theta')$

$$\Longrightarrow v'^2 = mg(h - h')$$

$$\Longrightarrow v'^2 = 2g[(L(1 - cos\theta)) - (L(1 - cos\theta'))]$$

$$\Longrightarrow v'^2 = 2gL(cos\theta' - cos\theta)$$

$$\Longrightarrow v' = \sqrt{2gL(\cos(30) - \cos(60))}$$

$$\Longrightarrow v' = \sqrt{2gL\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)}$$

$$\Longrightarrow v' = \sqrt{gL(\sqrt{3} - 1)}$$

Bibliographie

[1] C. Emst, M. Gabrmiel, G. Gemain, Physique: Mécanique, Thermodynamique, Electricité, Mouvements Vibratoires, Optique, Radioactivité, cours exercices tests. masson, 1 janvier 1981.

[2] M. Teng, Cours de physique avec exercices, Edition heures de France, 1997.

[3] G. Vincent, Cours de mécanique du point, Université Joseph Fourier – Grenoble 1 licence 1er Edition, 2007-2008.

[4] C. Pasquier, Cours de Mécanique, Université d'Orsay, Peip Polytech Paris-Sud, 2011-2012.

[5] J.M. Brebec, Mécanique MPSI - PCSI - PTSI, 1ère année : Cours et exercices corrigés, 2003.

[6] A. Thionnet, Mécanique du point, niveau l, Ellipses Market, 2008.

[7] M.A. Ruderman, C. Kittel, W.D. Knight, Cours de physique de Berkeley tome 1, Técanique, Dunod, 2001.

[8] M. Henry et N. Delorme, Mini manuel de mécanique du point - Cours et exercices corrigés, Dunod, Paris, 24 2008.

[9] A. Gibaud et M. Henry, Cours et exercices corrigés-Cours de physique-mécanique du point, licence 1er et 2ème année, 2ème Edition, Dunod, Paris, 2007.

[10] J.m. Brebec, Mécanique MPSI - PCSI - PTSI, 1ère année : Cours et exercices corrigés, 2003.

[11] N. Benhalima , Polycopié de cours : Physique 1, Université de Saida Dr. Moulay Tahar , 2018-2019

[12] F. Mekkaoui , F.Semari fatiha et M. Berber, Polycopie de cours : Cours de physique1 , Mecanique du point materiel, Universite Dr Moulay Tahar Saida

[13] M. Mebrek , Polycopié de cours : Cours mécanique du point matériel , Centre Universitaire Nour Elbachir d'Elbayadh, 2018-2019

[14] D. Bouguenna , Polycopié de cours : Physique 1 ,Mécanique du point matériel, Université Mustapha Stambouli Mascara,2015

[15] A.Meziani , Polycopié de cours : Physique 1, Mécanique du point matériel, Université Laarbi Ben M’hidi Oum el Bouaghi, 2021-2022

[16] K. Hadji, Polycopié de cours : Cours mécanique du point matériel, Université de Tiaret, 2015-2016

[17] N. Mehtougui, Polycopié de cours : Cours et exercices corrigés physique 1-Mécanique du point matériel, Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem, 2020-2021

[18] S. Zebbar , Polycopié de cours : Mécanique du point matériel cours et exercices, Centre Universitaire El-Wancharissi de Tissemsilt, 2018

[19] N. Baouche , Polycopié de cours : Cours de physique 1 : Mécanique du point matériel, Université Mohamed Seddik Ben Yahia Jijel, 2023-2024

[20] T. Belaroussi , Polycopié de cours : Mécanique du point matériel (physique 1), Université des sciences et de la technologie d'Oran, 2020

[21] F. Bendahma , Polycopié de cours : Physique 1- mécanique du point matériel, Université Abdel Hamid Ben Badis Mostaganem, 2022-2023

[22] M. D. Blizak et S. Blizak , Polycopié de cours : Physique 1, M'hamed Boughara Boumerdes , 2021

[23] A. Fizazi, Mécanique du point materiel, OPU , Alger 2012.

[24] M.Hachemaoui , Polycopié de cours : Physique i mécanique du point matériel, Université Dr. Tahar Moulay Saida, 2020 – 2021

[25] F.Dahmane et M. Mokhtari , Polycopie de cours : Physique 1, Université de Tissemsilt

[26] F. Serradj, Polycopie de cours : Physique 1 mécanique du point matériel, Université 8 mai 1945 –Guelma, 2019-2020

[27] S.A. Sfiat, Polycopie de cours : Cinématique et Dynamique du point matériel: Université des sciences et de la technologie d'Oran , 2022-2023

[28] A. Belfedal et K.Kara-Zaitri , Physique Mécanique, OPU, 2017