

# République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'enseignement Supérieur et de la  
Recherche Scientifique

Discipline : Mathématiques

**Polycopié sur**

---

## MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES ET VOLUMES FINIES

---

Niveau : Master 1 de mathématiques.

Spécialité : Biomathématiques, et EDP.

présentée par **Salih Djilali**

2024-2025



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1 Rappel de quelques outils d'analyse numérique</b>	<b>7</b>
1.1 Méthode de Newton et applications à la résolution d'équations non linéaires	7
1.1.1 Applications : . . . . .	9
1.1.2 Exercices : . . . . .	11
1.1.3 Corrigé de l'exercice 1 . . . . .	11
1.1.4 Programme Matlab : . . . . .	12
1.2 Interpolation . . . . .	13
1.2.1 Définition de l'Interpolation Polynomiale . . . . .	13
1.2.2 Forme Générale de l'Interpolation Polynomiale . . . . .	13
1.2.3 Méthodes d'Interpolation Polynomiale . . . . .	14
1.2.4 Interpolation de Lagrange . . . . .	14
1.2.5 Propriétés de l'Interpolation Polynomiale . . . . .	15
1.2.6 Exemples d'Interpolation Polynomiale . . . . .	16
1.2.7 Estimation de l'erreur d'interpolation . . . . .	16
1.2.8 Exercices : . . . . .	17
1.2.9 Corrigés des exercices : . . . . .	18
1.3 Méthodes d'intégration numérique . . . . .	21
1.3.1 Méthode du rectangle ( $p = 0$ ) . . . . .	22
1.3.2 Méthode du trapèze ( $p=1$ ) . . . . .	22
1.3.3 Programme Matlab . . . . .	22
<b>2 Résolution de certaines EDP du premier et du second ordre</b>	<b>25</b>
2.1 Résolution des EDP du premier ordre . . . . .	25
2.1.1 Applications . . . . .	28
2.1.2 Exercices . . . . .	32
2.2 Résolution des EDP du second ordre . . . . .	33

2.2.1	Cas Elliptique . . . . .	37
2.2.2	Cas parabolique . . . . .	37
2.2.3	Cas hyperbolique . . . . .	38
2.2.4	Exercices . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Méthode des différences finies</b>	<b>43</b>
3.1	Développement en série de Taylor . . . . .	43
3.2	Développement de Taylor . . . . .	43
3.3	Discrétisation du Domaine (Maillage) . . . . .	44
3.4	La Méthode des Différences Finies . . . . .	44
3.5	Construction d'un schéma . . . . .	47
3.5.1	Dérivées partielles pour une fonction de deux variables . . . . .	48
3.6	Problème elliptique . . . . .	48
3.7	Problème parabolique . . . . .	55
3.7.1	Programme Matlab : Problème de la chaleur . . . . .	60
3.8	Problème hyperbolique . . . . .	63
3.8.1	Programme Matlab : Problème de transport . . . . .	68
3.9	Problème d'onde . . . . .	70
3.10	Exercices . . . . .	73
3.11	Corrigés des exercices . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Méthode des Volumes finies</b>	<b>89</b>
4.1	Problème elliptique . . . . .	89
4.2	Problème parabolique . . . . .	91
4.3	Problème de transport . . . . .	93
4.4	Exercices . . . . .	94
4.5	Corrigés des exercices . . . . .	96
	Bibliographie . . . . .	103



---

# Introduction générale

Ces notes de cours ont pour objectif de fournir aux étudiants de Master en mathématiques les outils nécessaires pour aborder numériquement des problèmes mathématiques complexes issus de divers domaines, tels que la physique et les sciences appliquées. Elles mettent en lumière les méthodes numériques essentielles pour résoudre des équations différentielles elliptiques, paraboliques et hyperboliques. Ce document se veut un guide méthodique, associant théorie, exercices corrigés et travaux pratiques, pour préparer les étudiants aux défis qu'ils rencontreront dans leurs travaux de recherche.

Le premier chapitre constitue un rappel des principaux outils d'analyse numérique, avec des applications concrètes et des programmes Matlab pour illustrer leur mise en oeuvre. Nous y abordons notamment la résolution d'équations non linéaires, l'interpolation et les méthodes d'intégration numérique.

Les deuxième et troisième chapitres se concentrent sur deux méthodes numériques majeures : la méthode des différences finies et celle des volumes finis. Chaque méthode est appliquée à différents types de problèmes (elliptiques, paraboliques, hyperboliques et d'ondes) avec des exemples pratiques et des programmes Matlab pour visualiser les solutions. Ces chapitres incluent également des exercices accompagnés de leurs corrigés afin de renforcer la compréhension des concepts.

L'objectif final de ce cours est d'offrir aux étudiants une maîtrise solide des techniques numériques modernes, en les outillant pour analyser et résoudre efficacement des problèmes scientifiques et d'ingénierie.

# Chapitre 1

## Rappel de quelques outils d'analyse numérique

Il existe de nombreuses méthodes pour résoudre numériquement et de manière approximative une équation non linéaire, parmi lesquelles la méthode de dichotomie, la méthode du point fixe et la méthode de Newton, également appelée méthode de Newton-Raphson. Dans ce cours, nous nous concentrerons exclusivement sur cette dernière, en raison de son efficacité et de son large éventail d'applications pratiques.

### 1.1 Méthode de Newton et applications à la résolution d'équations non linéaires

Soit  $f$  une fonction continue et dérivable sur l'intervalle  $[a, b]$ , avec l'hypothèse qu'elle possède un unique zéro dans cet intervalle. Autrement dit, il existe un unique  $x \in [a, b]$  tel que  $f(x) = 0$ . En pratique, la valeur exacte de  $x$  ne peut généralement pas être calculée explicitement. L'objectif est donc d'approcher cette valeur en utilisant la méthode de Newton.

## 1.1. MÉTHODE DE NEWTON ET APPLICATIONS À LA RÉOLUTION D'ÉQUATIONS NON LINÉAIRES

---

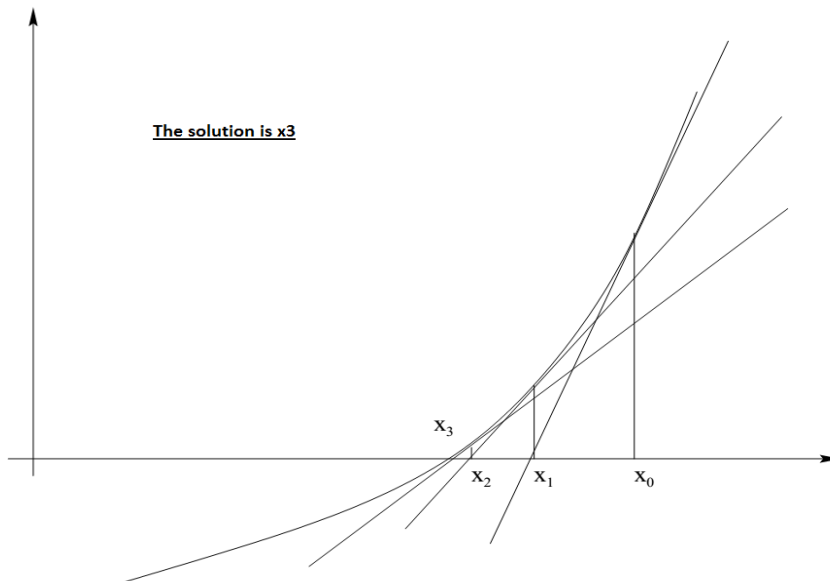


FIGURE 1.1 – Principe de la méthode de Newton

Pour construire une approximation d'un zéro de la fonction  $f(x)$ , nous utilisons son développement de Taylor au premier ordre. En partant d'un point initial  $X_0$ , choisi proche du zéro recherché, nous approchons  $f$  par sa tangente en ce point. Autrement dit, nous considérons que :

$$f(X) \simeq f(X_0) + f'(X_0)(X - X_0).$$

Pour déterminer un zéro de cette fonction approchée, il suffit de résoudre l'équation correspondant à l'intersection de la tangente avec l'axe horizontal :

$$0 = f(X_0) + f'(X_0)(X - X_0).$$

La solution de cette équation donne un nouveau point  $X_1$ , qui est généralement plus proche du zéro exact de  $f$  que  $X_0$ . Ce processus peut être itéré : à partir de  $X_1$ , on approche à nouveau  $f$  par sa tangente en ce point pour obtenir un nouveau point  $X_2$ , et ainsi de suite (voir Fig. 1.1).

Cette méthode repose sur l'hypothèse que  $f$  possède une tangente en chacun des points de la suite construite par itération. En pratique, il suffit que  $f$  soit dérivable sur l'intervalle considéré.

Formellement, en partant d'un point initial  $X_0$  dans le domaine de définition de  $f$ , nous construisons par récurrence la suite suivante :

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}.$$

Cette méthode offre une convergence très rapide lorsqu'elle est applicable, mais elle n'est pas garantie de converger dans tous les cas. Les étapes précédemment décrites peuvent être synthétisées dans la définition suivante :

**Définition 1** ([2]). *La méthode de Newton consiste à construire une suite itérative définie par :*

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)},$$

à condition que  $f'(X_0) \neq 0$ .

### 1.1.1 Applications :

**Exemple 1 :** Trouver un zéro de  $f(x) = x^2 - 2$

Nous cherchons une approximation de  $\sqrt{2}$ , qui est un zéro de la fonction  $f(x) = x^2 - 2$ .

**Étapes :** La fonction est  $f(x) = x^2 - 2$  avec sa dérivée  $f'(x) = 2x$ . Choisissons un point initial  $X_0 = 1.5$ . Appliquons la formule de Newton :

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)} = X_n - \frac{X_n^2 - 2}{2X_n}.$$

**Itérations :**

$$X_1 = 1.5 - \frac{1.5^2 - 2}{2 \cdot 1.5} = 1.5 - \frac{0.25}{3} = 1.4167.$$

$$X_2 = 1.4167 - \frac{1.4167^2 - 2}{2 \cdot 1.4167} \approx 1.4142.$$

$$X_3 = 1.4142 - \frac{1.4142^2 - 2}{2 \cdot 1.4142} \approx 1.4142.$$

Après 3 itérations, la méthode converge vers  $\sqrt{2} \approx 1.4142$ .

**Exemple 2 :** Trouver un zéro de  $f(x) = \cos(x) - x$

Nous cherchons une solution à l'équation  $\cos(x) = x$ .

**Étapes :** La fonction est  $f(x) = \cos(x) - x$  avec sa dérivée  $f'(x) = -\sin(x) - 1$ . Choisissons un point initial  $X_0 = 0.5$ . Appliquons la formule de Newton :

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)} = X_n - \frac{\cos(X_n) - X_n}{-\sin(X_n) - 1}.$$

**Itérations :**

$$X_1 = 0.5 - \frac{\cos(0.5) - 0.5}{-\sin(0.5) - 1} \approx 0.7295.$$

$$X_2 = 0.7295 - \frac{\cos(0.7295) - 0.7295}{-\sin(0.7295) - 1} \approx 0.7391.$$

$$X_3 = 0.7391 - \frac{\cos(0.7391) - 0.7391}{-\sin(0.7391) - 1} \approx 0.7391.$$

La méthode converge vers  $x \approx 0.7391$ , qui est une solution de  $\cos(x) = x$ .

**Exemple 3 :** Trouver un zéro de  $f(x) = e^x - 3x$

Nous cherchons une solution à l'équation  $e^x = 3x$ .

**Étapes :** La fonction est  $f(x) = e^x - 3x$  avec sa dérivée  $f'(x) = e^x - 3$ . Choisissons un point initial  $X_0 = 1$ . Appliquons la formule de Newton :

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)} = X_n - \frac{e^{X_n} - 3X_n}{e^{X_n} - 3}.$$

**Itérations :**

$$X_1 = 1 - \frac{e^1 - 3 \cdot 1}{e^1 - 3} = 1 - \frac{2.718 - 3}{2.718 - 3} \approx 0.725.$$

$$X_2 = 0.725 - \frac{e^{0.725} - 3 \cdot 0.725}{e^{0.725} - 3} \approx 0.619.$$

$$X_3 = 0.619 - \frac{e^{0.619} - 3 \cdot 0.619}{e^{0.619} - 3} \approx 0.619.$$

La méthode converge vers  $x \approx 0.619$ , qui est une solution de  $e^x = 3x$ .

**Exemple 4 :** Pour illustrer la méthode, cherchons le réel positif  $x$  satisfaisant  $\cos(X) = X^3$ .

Reformulons l'équation pour introduire une fonction qui doit s'annuler : on cherche la racine de  $f(X) = \cos(X) - X^3$ . La dérivation donne  $f'(X) = -\sin(X) - 3X^2$ .

Comme  $\cos(X) \leq 1$  pour tout  $X$  et  $X^3 > 1$  pour  $X > 1$ , nous savons que notre zéro est compris entre 0 et 1. Nous essayons une valeur de départ  $X_0$  (voir Table 1.1),

**Exemple2 :** On considère la fonction suivante  $f(x) = x^3 - 2x - 5$ . La tolérance est supposée  $10^{-7}$ , nous avons besoin de 9 itérations pour calculer  $x = 2.0945514$  à partir de  $x_0 = 1$  et 4 itérations pour  $x_0 = 2$ .

$X_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f'(X_0)} = 0.5 - \frac{\cos(0.5) - 0.5^3}{-\sin(0.5) - 3 \times 0.5^3} \simeq 1.1121416371$
$X_2 = X_1 - \frac{f(X_1)}{f'(X_1)} \simeq 0.909672693736$
$X_3 = X_2 - \frac{f(X_2)}{f'(X_2)} \simeq 0.866263818209$
$X_4 = X_3 - \frac{f(X_3)}{f'(X_3)} \simeq 0.865477135298$
$X_5 = X_4 - \frac{f(X_4)}{f'(X_4)} \simeq 0.865474033111$
$X_6 = X_5 - \frac{f(X_5)}{f'(X_5)} \simeq 0.865474033101$

TABLE 1.1 – Approximation de la solution de l'équation  $f(x) = 0$  en utilisant la méthode de Newton.

### 1.1.2 Exercices :

**Exercice 1 :** Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = e^x - 1$ . Supposons que  $x_0 \in \mathbb{R}$  et soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite construite par les itérations de la méthode de Newton (pour calculer la solution de l'équation  $f(x) = 0$ ).

1. Montrer que pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ , la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie.
2. Montrer que si  $x_0 \neq 0$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a  $x_{n+1} \neq x_n$ . Dédurre que la méthode de Newton converge en un nombre fini d'opérations ssi  $f(x_0) = 0$ .
3. Montrer les points suivants :
  - si  $x_0 < 0$  alors  $x_1 > 0$ .
  - si  $x_0 > 0$  alors  $0 < x_1 < x_0$ .
4. Montrer la convergence de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour  $n \rightarrow \infty$ , et déterminer sa limite.

**Exercice 2 :** On considère  $\mu \in \mathbb{R}^+$  et  $f_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f_\mu(x) = x^2 - \mu$ . Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  fixé.

- Déterminer la suite obtenue par la méthode de Newton lorsque nous résolvons l'équation  $f_\mu(x) = 0$ .
- Supposons que  $x_0 > 0$ 
  - Montrer que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par  $\sqrt{\mu}$ .
  - Prouver que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et déterminer sa limite.

### 1.1.3 Corrigé de l'exercice 1

**Exercice 1 :** 1. Il est facile de voir que  $f'(x) = e^x$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ , par la suite on peut déduire que la suite obtenue par la méthode de Newton s'écrit sous la forme :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - 1 + e^{-x_n}.$$

## 1.1. MÉTHODE DE NEWTON ET APPLICATIONS À LA RÉOLUTION D'ÉQUATIONS NON LINÉAIRES

---

Cette suite est clairement bien définie.

2. En utilisant la définition de la suite construite par la méthode de Newton, et par récurrence sur  $n$ , si  $x_0 \neq 0$ , on trouve  $x_{n+1} \neq x_n \forall n \in \mathbb{N}$ .

De plus, si  $f(x_0) = 0$  alors la suite est stationnaire et la méthode de Newton converge en un nombre fini d'opérations ssi  $f(x_0) = 0$

3. On sait que  $x_1 = x_0 - 1 + e^{-x_1}$ . Par le théorème des accroissements finis, on a  $x_1 = x_0(1 - e^{a-x_0})$ ,  $a \in ]x_0, 0[$  si  $x_0 < 0$  ou  $a \in ]0, x_0[$  si  $x_0 > 0$ .

Si  $x_0 < 0$ , on a  $e^{a-x_0} > 1$ , alors  $x_1 > 0$ . Si  $x_0 > 0$ , on a  $e^{-x_0} < e^{a-x_0} < 1$ , alors  $0 < x_1 < x_0$ .

4. Pour  $x_0 = 0$  la suite est stationnaire et égale à zéro. Pour la deuxième partie, si  $x_0 < 0$  on a  $x_1 > 0$ . Maintenant, il suffit d'étudier le cas où  $x_0 > 0$ . Dans ce cas on trouve  $0 < x_1 < x_0$ . Par récurrence sur  $n$  on obtient :

Si  $x_0 > 0$ , la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée par 0. Ce qui donne la convergence de cette suite vers la limite notée  $l$ . Cette limite vérifie :

$$l = l - \frac{e^l - 1}{e^l},$$

qui admet une solution unique  $l = 0$ .

### 1.1.4 Programme Matlab :

Dans cette sous-section, nous utilisons un programme Matlab pour calculer numériquement le zéro de la fonction  $f$ . Nous utiliserons principalement la suite récurrente obtenue dans la Définition 1 pour approcher le zéro de cette fonction. D'abord, nous définissons la fonction matlab suivante :

```
function [x, iter]=Newton(x0,f,J,tol)
tol=1.e-2;
grad=1;
x=x0;
iter=1;
while grad>tol & iter<100
step=J(x)/f(x);
grad=norm(step)
x=x-step;
iter=iter+1;
end
if iter>99
disp('pas de convergence dans Newton')
end
end %function
```

On peut appliquer cette fonction pour résoudre les équations non linéaires. L'étude des variations de  $f(x) = x^3 - 4x + 1$  montre que l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement trois solutions réelles.

## Recherche numérique des solutions

```
function y=f(x)
y=x^3-4*x+1;
endfunction
function y=df(x)
y=3*x^2-4;
endfunction
[y1, iter1]=Newton(-2.5, f, df, e-4)
[y2, iter2]=Newton(0, f, df, e-4)
[y3, iter3]=Newton(2, f, df, e-4)
endfunction

>>iter1 =5.
y1 =- 2.1149075
iter2 =4.
y2 =0.2541017
iter3 =5.
y3 =1.8608059
```

## 1.2 Interpolation

L'interpolation polynomiale est une méthode numérique utilisée pour approximativement représenter une fonction par un polynôme. Elle consiste à trouver un polynôme qui passe par un ensemble de points donnés. Cette méthode est particulièrement utile lorsque nous avons une série de points expérimentaux et que nous souhaitons estimer la fonction qui les relie.

L'objectif principal de l'interpolation polynomiale est de construire un polynôme de degré  $n - 1$  (si  $n$  est le nombre de points) qui passe exactement par tous les points donnés.

### 1.2.1 Définition de l'Interpolation Polynomiale

Supposons que nous ayons un ensemble de  $n$  points  $(x_i, y_i)$ , où  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ , avec  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  distincts. L'objectif est de trouver un polynôme  $P(x)$  de degré  $n - 1$  tel que :

$$P(x_i) = y_i \quad \text{pour chaque } i = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Cela revient à déterminer les coefficients du polynôme  $P(x)$  qui satisfait ces conditions.

### 1.2.2 Forme Générale de l'Interpolation Polynomiale

Le polynôme  $P(x)$  d'interpolation peut être écrit sous la forme :

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}.$$

Les coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  sont déterminés en résolvant un système d'équations en utilisant les points  $(x_i, y_i)$ . Ce système peut être assez complexe, c'est pourquoi plusieurs méthodes d'interpolation polynomiale ont été développées pour simplifier le calcul des coefficients.

### 1.2.3 Méthodes d'Interpolation Polynomiale

Il existe plusieurs méthodes pour déterminer le polynôme d'interpolation. Les deux plus courantes sont :

#### 1.2.4 Interpolation de Lagrange

L'interpolation de Lagrange est une méthode qui construit le polynôme d'interpolation directement à partir des points donnés, sans avoir à résoudre un système d'équations. Le polynôme de Lagrange est donné par :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \ell_i(x),$$

où  $\ell_i(x)$  est le polynôme de Lagrange défini par :

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n-1 \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Chaque polynôme  $\ell_i(x)$  est conçu de manière à être égal à 1 en  $x = x_i$  et égal à 0 en tous les autres points  $x_j, j \neq i$ . Ainsi, chaque terme dans la somme est associé au  $y_i$  du point  $(x_i, y_i)$  correspondant.

**Exemple :** Soit les points  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ . Le polynôme d'interpolation de Lagrange est :

$$P(x) = y_0 \ell_0(x) + y_1 \ell_1(x) + y_2 \ell_2(x),$$

où :

$$\ell_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \quad \ell_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \quad \ell_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Cette méthode est particulièrement utile pour l'interpolation lorsque les points sont donnés de manière explicite.

## Interpolation de Newton

L'interpolation de Newton est une autre méthode populaire pour calculer le polynôme d'interpolation. Cette méthode utilise une forme différente du polynôme d'interpolation, connue sous le nom de forme de Newton. Le polynôme d'interpolation de Newton est écrit sous la forme :

$$P(x) = f[x_0] + (x-x_0)f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-2})f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$$

où  $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$  sont les différences divisées, qui sont calculées par la relation récursive :

$$\begin{aligned} f[x_i] &= y_i, \\ f[x_i, x_{i+1}] &= \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}, \\ f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_k] &= \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_k] - f[x_i, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_i}. \end{aligned}$$

Les différences divisées sont calculées à partir des valeurs des  $y_i$  et permettent de construire progressivement le polynôme d'interpolation.

### 1.2.5 Propriétés de l'Interpolation Polynomiale

L'interpolation polynomiale présente plusieurs propriétés intéressantes :

- **Degré du polynôme** : Le polynôme d'interpolation passant par  $n$  points distincts est de degré  $n - 1$ .
- **Convergence** : Si les points  $(x_i, y_i)$  sont suffisamment réguliers, le polynôme d'interpolation converge vers la fonction sous-jacente. Toutefois, pour des ensembles de points mal choisis, le polynôme peut devenir oscillant et ne pas bien approximer la fonction (phénomène de *Runge*).
- **Exactitude** : L'interpolation polynomiale donne une approximation exacte de la fonction lorsque celle-ci est un polynôme de degré inférieur ou égal au degré du polynôme d'interpolation.

### 1.2.6 Exemples d'Interpolation Polynomiale

#### Exemple 1 : Interpolation de Lagrange

Soit les points suivants :  $(1, 1), (2, 4), (3, 9)$ . Le polynôme d'interpolation de Lagrange est donné par :

$$P(x) = 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 4 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 9 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}.$$

Ce polynôme passe exactement par les trois points donnés.

#### Exemple 2 : Interpolation de Newton

Utilisons les mêmes points  $(1, 1), (2, 4), (3, 9)$  pour construire le polynôme d'interpolation de Newton. Les différences divisées sont calculées comme suit :

$$f[x_0] = 1, \quad f[x_1] = \frac{4-1}{2-1} = 3, \quad f[x_2] = \frac{9-4}{3-2} = 5.$$

Ainsi, le polynôme d'interpolation de Newton est :

$$P(x) = 1 + 3(x-1) + 1(x-1)(x-2).$$

### 1.2.7 Estimation de l'erreur d'interpolation

Avant de procéder à l'estimation, nous donnons les lemmes suivants :

**Lemme 2.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable sur  $[a, b]$ . Si  $f(x) = 0$  admet au moins  $m + 2$  solutions distinctes sur  $[a, b]$ , alors  $f'(x) = 0$  admet au moins  $m + 1$  solutions sur  $[a, b]$ .

*Démonstration.* La preuve de ce lemme peut être faite par une application directe du théorème de Rolle entre deux zéros consécutifs de  $f$  □

**Corollaire 3.** Soit  $f \in \mathcal{C}^{m+1}([a, b])$ . Si l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins  $m + 2$  solutions sur l'intervalle  $[a, b]$  alors l'équation  $f^{(m+1)} = 0$  admet au moins une solution sur l'intervalle  $[a, b]$ .

*Démonstration.* Ce corollaire peut être prouvé en utilisant le lemme précédent et par récurrence nous arrivons au résultat souhaité. □

**Théorème 4** ([2]). Supposons que  $f \in \mathcal{C}^{m+1}([a, b])$ , et supposons que  $f(x) = 0$  admet  $x_0, x_1, \dots, x_m$  comme solution alors

$$\forall x \in [a, b], \quad \exists \varepsilon \in [a, b], \quad \text{tel que } f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_m)}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\varepsilon).$$

*Démonstration.* Pour  $x = x_i$  la relation satisfaite

Maintenant, nous mettons  $x \in [a, b]$  fixé et différent de  $x_i$ . En mettant  $q(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_m)$  et en posant :

$$E(t, x) = f(t) - p(t) - \frac{q(t)}{q(x)}(f(x) - p(x)).$$

C'est facile de constater que  $E \in \mathcal{C}^{m+1}([a, b])$  comme l'équation  $f(x) = 0$  admet  $x_0, x_1, \dots, x_m$  comme solution, puis en utilisant le Corollaire précédent on déduit qu'il existe au moins un nombre réel  $\varepsilon \in [a, b]$  tel que  $E(\varepsilon) = 0$ , ce qui conduit à la relation souhaitée.  $\square$

Comme  $\varepsilon$  est un inconnu, nous allons chercher une bonne majoration de ce dernier et nous obtenons le corollaire suivant

**Corollaire 5.** *Supposons que  $f \in \mathcal{C}^{m+1}([a, b])$  alors*

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - p(x)| \leq \frac{|(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_m)|}{(m + 1)!} \sup_{x \in [a, b]} |f^{(m+1)}(\varepsilon)|.$$

## 1.2.8 Exercices :

**Exercice 1 :** Soit  $L_n$  le polynôme d'interpolation de Lagrange de

$$f(x) = \frac{1}{x - \alpha}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

aux  $n + 1$  points (distincts)  $x_0, x_1, \dots, x_n$  dans  $[-1, 1]$ .

1. Déterminer les dérivées successives de la fonction  $f$ .
2. Supposons que  $3 < \alpha < 5$  et  $x_0, \dots, x_n$  sont équidistants. Prouver l'égalité suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n\|_\infty = 0,$$

où  $\|\cdot\|_\infty$  désigne la norme du *sup*.

3. Nous supposons les mêmes hypothèses que la question précédente. En pratique, nous n'agissons pas du tout comme ce qui précède. Nous préférons utiliser des polynômes avec un degré plus élevé sur chaque petit intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ . Écrire l'approximation de Lagrange du premier degré,  $f_n$  de  $f$  dans chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$   $i = 0, 1, \dots, n - 1$ .
4. Prouvez que si  $\alpha \notin [-1, 1]$ , alors nous obtenons

$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{c}{n^2}.$$

et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

**Exercice 2 :** On considère  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $(n + 1)$  points distincts d'un intervalle  $[a, b]$ , ( $a, b$  des réelles vérifiant  $a < b$ ),  $f$  est dans  $C([a, b], \mathbb{R})$ . On recherche un polynôme  $H_n$  qui vérifie

$$H_n(x_i) = f(x_i) \text{ et } H_n'(x_i) = f'(x_i), i = 0, 1, \dots, n.$$

Rappelons que la fonction d'interpolation de Lagrange de degré  $n$  écrite sous la forme

$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}, \forall x \in \mathbb{R}$ . Montrons que  $H_n$  s'écrit sous la forme

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)h_i(x) + \sum_{i=0}^n f''(x_i)\tilde{h}_i(x),$$

avec

$$h_i(x) = (1 - 2l_i'(x_i)(x - x_i))l_i^2(x), \quad \tilde{h}_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x).$$

et si  $f \in C^{2(n+1)}([a, b], \mathbb{R})$  alors

$$|f_n(x) - H_n(x)| \leq \frac{\|f^{(2n+2)}\|_\infty}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2.$$

1. Montrer que pour tout  $i, j = 0, \dots, n$

$$h_i(x_j) = l_i(x_j), \quad h_i'(x_j) = 0,$$

et

$$\tilde{h}_i(x_j) = 0, \quad \tilde{h}_i'(x_j) = l_i(x_j).$$

2. Dédire l'existence d'un polynôme  $H_n$  de degré  $2n + 1$  qui vérifie les conditions requises.
3. Dédire une majoration de l'erreur  $|f_n(x) - H_n(x)|$ .

### 1.2.9 Corrigés des exercices :

**Exercice 1 :** 1. Nous calculons les dérivées successives :

$$f'(x) = \frac{-1}{(x - \alpha)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(x - \alpha)^3}, \quad \dots, \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x - \alpha)^{n+2}}.$$

Donc, elles peuvent être écrites sous la forme

$$\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(x-\alpha)^{n+2}}.$$

2. Par une application directe des résultats du cours, on déduit l'existence d'un  $\eta \in [-1, 1]$  tel que

$$|f(x) - L_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\eta)|}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n |x - x_i|.$$

Ainsi, si  $3 < \alpha < 5$ , nous avons pour  $\eta \in [-1, 1]$

$$2 < |\eta - \alpha| = \alpha - \eta < 4,$$

et

$$\frac{|f^{(n+1)}(\eta)|}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(x-\alpha)^{n+2}} \leq \frac{1}{2(x-\alpha)^{n+2}},$$

donc on a

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{1}{2} \prod_{i=0}^n \left| \frac{x - x_i}{\eta - \alpha} \right|.$$

Pour tout  $x \in [-1, 1]$  et  $i = 0, 1, \dots, n$ , on a  $|x - x_i| \leq 2$ . Alors

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{1}{2} \prod_{i=0}^n \frac{|x - x_i|}{|\eta - \alpha|} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\alpha - \eta} \right)^{n+1}.$$

On sait que

$$2 < \alpha - \eta < 4,$$

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{\alpha - \eta} < \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{\alpha - \eta} < 1,$$

alors, on peut en déduire que

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\alpha - \eta} \right)^{n+1} \longrightarrow 0, \text{ as } n \longrightarrow +\infty.$$

3. Sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ , nous appliquons l'estimation d'erreur

$$|f(x) - f_n(x)| = \frac{|f''(\zeta_x)|}{2} |(x - x_i)(x - x_{i+1})|,$$

Le maximum de la fonction  $(x - x_i)(x_{i+1} - x)$  est atteint en  $\frac{(x_i + x_{i+1})}{2}$ . Alors on

a

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{8} h^2,$$

avec  $h = \frac{(x_{i+1} - x_i)}{2} = \frac{2}{n}$ , qui converge vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

4. Considérons  $\alpha \notin [-1, 1]$  ainsi la fonction  $f$  est bien définie sur  $[x_i, x_{i+1}] \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{x_i - \alpha} + \frac{x - x_i}{h} \left( \frac{1}{x_{i+1} - \alpha} - \frac{1}{x_i - \alpha} \right), \\ &= \frac{1}{x_i - \alpha} - \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - \alpha)(x_i - \alpha)}, \end{aligned}$$

**Exercice 2 :** 1. Soit  $P_n$  le polynôme de Lagrange de degré  $n$  interpolant la fonction  $f$  (définie sur  $[a, b]$ ) aux points  $x_0, x_1, \dots, x_n$  et qui satisfait la relation

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(\eta)|}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n |x - x_i|, \quad \eta \in [a, b].$$

Ainsi

$$\left| \int_a^b f(x) - P_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - P_n(x)| dx \leq \frac{|f^{(n+1)}(\eta)|}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n |x - x_i| dx.$$

Pour la méthode des rectangles nous prenons  $n = 0$  et  $\zeta = a$  ou  $\zeta = b$ , l'erreur est donnée par

$$|I_{rect} - I| \leq |f'(\eta)| \int_a^b |x - a| dx = |f'(\eta)| \frac{(b-a)^2}{2}.$$

avec

$$I_{rect} = \int_a^b dx, I = \int_a^b |f(x)| dx.$$

— On considère le polynôme de Lagrange suivant :

$$P_1(x) = f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

alors

$$|f(x) - P_1(x)| = \sup \frac{|f''(\eta)|}{2} (x - a)(x - b).$$

Clairement on a :

$$\begin{aligned} \int_a^b P_1(x) dx &= (b - a) \left[ f(a) + \frac{1}{2}(b - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right], \\ &= (b - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx - (b-a)[f(b) - f(a)] \right| &\leq \frac{1}{2} \sup |f''(\eta)| \int_a^b (x-a)(b-x)dx, \\ &\leq \frac{1}{2} \sup |f''(\eta)| \int_a^b -x^2 + (b-a)x - abdx, \\ &\leq \frac{1}{2} \sup |f''(\eta)| \frac{(b-a)^3}{6}. \end{aligned}$$

Puis

$$\left| \int_a^b f(x)dx - (b-a)[f(b) - f(a)] \right| \leq \sup |f''(\eta)| \frac{(b-a)^3}{12}$$

— On considère l'intégral

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})),$$

ce qui donne

$$I_h = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + h \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i).$$

L'erreur est donnée par

$$|I - I_h| \leq \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^3 \frac{f^{(2)}(\zeta_i)}{12} \leq h^2 \frac{b-a}{12} \|f^{(2)}\|_{\infty}.$$

### 1.3 Méthodes d'intégration numérique

On s'intéresse au calcul de  $\int_a^b f(x)dx$ , La méthode de Newton-Coates consiste à approximer l'intégration de  $f(x)$  avec l'intégration d'un polynôme  $P(x)$  tel que  $P(x) \approx f(x)$ . Si cette approximation est assez bonne, alors cette l'intégrale polynomiale suivante :

$$\tilde{I} = \int_a^b P(x)dx, \tag{1.1}$$

serait une bonne approximation de  $\int_a^b f(x)dx$ . L'avantage est que nous pouvons calculer la valeur exacte de  $I$ . Dans ces méthodes, on choisit des polynômes de degré  $p$  qui correspondent à  $f(x)$  en  $p + 1$  points distincts, régulièrement espacés entre  $a$  et  $b$ . Ces points sont donnés par :

$$\{x_k = a + kh, k \in \{0, 1, \dots, p\}\} \text{ avec } h = \frac{b-a}{p},$$

donc  $\forall k \in \{0, 1, \dots, p\}, P(x_k) = f_k = f(x_k)$ .

### 1.3.1 Méthode du rectangle ( $p = 0$ )

Cette méthode utilise un polynôme constant :

$$P_0(x) = f(a) = f_0.$$

L'intégrale approchée  $I_0 = \int_a^b P_0(x)dx$  se calcule directement et donne :

$$\tilde{I} = (b - a)f_0,$$

Cette intégration numérique nécessite une évaluation de la fonction  $f$  (en  $x_0 = a$ ) et représente donc la plus rapide approximation possible. L'erreur peut être estimée en utilisant les développements en série de Taylor où la théorie des accroissement finis que nous retrouvons pour  $h = b - a$ .

### 1.3.2 Méthode du trapèze ( $p=1$ )

Pour approcher la fonction  $f$ , on peut calculer la surface de trapèze de Grand base, et petit base égale à  $f(a)$ , et  $f(b)$  et de hauteur égale à  $h$ . cette méthode utilise un polynôme du premier degré qui passe par  $f_a = f(a)$  et  $f_b = f(b)$  :

$$P_1(x) = \frac{f_b - f_a}{b - a}x + f_a - \frac{a(f_b - f_a)}{b - a},$$

L'intégrale approchée notée  $\tilde{I} = \int_a^b P_1(x)dx$  se calcule alors mathématiquement ou géométriquement (trapèze) et donne :

$$\tilde{I} = \frac{(b - a)(f_a + f_b)}{2},$$

### 1.3.3 Programme Matlab

Dans cette section, on s'intéresse à calculer numériquement l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} x e^{-x} \cos(2x).$$

En utilisant la méthode de rectangle. Pour cela on considère le programme Matlab suivant :

```
clear all; close all; clc;
a = 0; b=2*pi; n=100; dx=(b-a)/n;
x=a:dx:b; f=x.*exp(-x).*cos(2.*x); int=0;
for ik=1:length(x)-1
0   xbar=(x(ik)+x(ik+1))/2;
    f=eval('fun',xbar);
    int=int+dx*func(ik);
end
```

## CHAPITRE 1. RAPPEL DE QUELQUES OUTILS D'ANALYSE NUMÉRIQUE

---

```
disp(strcat('L'INTEGRALE, PAR LA METHODE DU POINT MILIEU DONNE:', num2str(int)))
```



# Chapitre 2

## Résolution de certaines EDP du premier et du second ordre

### 2.1 Résolution des EDP du premier ordre

Dans ce chapitre, nous étudions une EDP d'ordre 1 linéaire de la forme suivante :

$$A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} + Cu = D, \quad (2.1)$$

avec  $A, B, C$  et  $D$  sont des fonctions continûment différentiables sur un domaine  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{R}^2$ . Nous utilisons la méthode des caractéristique pour résoudre ce type des EDPs. On donne l'exemple suivant "l'équation des ondes" :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

En effet, nous avons

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0. \quad (2.2)$$

Nous supposons que les dérivées partielles de  $u$  d'ordre 2 sont continues, alors nous obtenons

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \underbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} \right)}_v = 0,$$

donc, nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

## 2.1. RÉOLUTION DES EDP DU PREMIER ORDRE

---

Alors, nous avons transformé cette EDP d'ordre 2 en une EDP d'ordre 1.

Soit l'exemple de l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

On pose le changement de variable suivant

$$v = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = w,$$

en supposant comme l'exemple précédent que les dérivées partielles sont continues, alors on obtient :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Maintenant, on définit la méthode des caractéristiques, nous avons besoin de deux notions importantes : les courbes paramétriques dans un domaine  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$  et la définition de la dérivée directionnelle d'une fonction à deux variables.

**Définition 6.** On définit la courbe paramétrique  $\sigma$  comme l'image d'une fonction :  $\sigma : I \rightarrow \mathcal{D}$  avec  $\tau \rightarrow (x(\tau), y(\tau)), \forall \tau \in I$ .

**Remarque 7.** On peut voir  $\sigma$  comme une paramétrisation d'une courbe  $\mathcal{C}$  et le vecteur  $(x'(\tau), y'(\tau))$  s'appelle le vecteur tangent à la courbe  $\mathcal{C}$ .

**Exemple :**

On prend une partie d'un cercle comme suit

$$\sigma : \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

On définit la paramétrisation :  $\sigma : (x(\tau), y(\tau)) = (\cos(\tau), \sin(\tau))$ . Le vecteur  $\sigma'(\frac{\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  est le vecteur tangent au point  $\sigma(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ .

**Définition 8.** On définit la dérivée directionnelle d'une fonction  $f(x, y)$  sur un domaine  $\mathcal{D}$  dans la direction d'un vecteur  $\vec{d} = (d_1, d_2)$  par :

$$f'((x, y); \vec{d}) = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{f(x + td_1, y + td_2) - f(x, y)}{t} \right).$$

On peut réécrire cette formule comme suit :

$$f'((x, y); \vec{d}) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x,y)} d_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x,y)} d_2 = \vec{\nabla} f|_{(x,y)} \cdot \vec{d}.$$

On note  $\vec{\nabla} f|_{(x,y)}$  le gradient de  $f$  au point  $(x, y)$  où

$$\vec{\nabla} f|_{(x,y)} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x,y)}, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x,y)} \right).$$

**Définition 9.** La méthode des caractéristiques cherche des courbes (appelées "lignes caractéristiques" ) le long desquelles l'EDP se réduit à une simple équation différentielle ordinaire. La résolution de l'EDO le long d'une caractéristique permet de retrouver la solution du problème original.

Nous avons besoin du Théorème suivant.

**Théorème 10.** (Théorème d'inversion locale) Soit une fonction  $f$  continûment différentiable en un point, si sa différentielle en ce point est inversible alors,  $f$  est inversible et son inverse est différentiable.

**Définition 11.** (Matrice Jacobienne)

Soit  $f$  est une fonction de  $\mathcal{R}^n$  à valeurs dans  $\mathcal{R}^n$  :

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Si les dérivées partielles de ces fonctions existent, la matrice Jacobienne s'écrit sous la forme suivante :

$$J_F(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

En utilisant les notions de vecteur tangent à une courbe  $\mathcal{C}$  et de la dérivée directionnelle pour définir la méthode des caractéristique. Pour mieux comprendre cette méthode, nous l'appliquons pour trouver la solution du problème (2.1) avec les conditions initiales  $u(X(\tau), Y(\tau)) = F(\tau)$ ,  $\forall \tau \in I$ .

Revenons à notre équation (2.1), soit l'hypothèse suivante  $(A(x, y), B(x, y)) \neq (0, 0)$ , on considère les courbes paramétriques suivantes  $\sigma : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^2$  définie par  $s \mapsto (x(s), y(s))$  avec le vecteur  $\gamma'(s) = (x'(s), y'(s))$  au point  $\sigma(s) = (x(s), y(s))$ . Donc, on pose :

$$\frac{dx}{ds} = A(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{dy}{ds} = B(x, y).$$

Soit  $u(s) = u(x(s), y(s))$  la solution sur ces courbes paramétriques ayant la paramétrisation

$\sigma$ , on utilise la règle de chaînes :

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \\ &= A(x(s), y(s)) \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x(s), y(s))} + B(x(s), y(s)) \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(x(s), y(s))} \\ &= -C(x(s), y(s))u(x(s), y(s)) + D(x(s), y(s)), \end{aligned}$$

alors,

$$u(s) = u(0) + \int_0^s (-C(x(\sigma), y(\sigma))u(x(\sigma), y(\sigma)) + D(x(\sigma), y(\sigma))) d\sigma.$$

La courbe des valeurs initiales est

$$\tau \mapsto (X(\tau), Y(\tau), u(X(\tau), Y(\tau))).$$

Pour chaque  $\tau \in I$ , nous obtenons une courbe caractéristique

$$s \mapsto (x(s, \tau), y(s, \tau), u(s, \tau)),$$

avec  $(x(0, \tau), y(0, \tau)) = (X(\tau), Y(\tau), F(\tau))$  pour tout  $\tau \in I$ .

On suppose que la condition suivante :

$$J_{(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial \tau} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial \tau} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \tau} \right) - \left( \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial s} \right) \neq 0.$$

A partir de cette condition, on peut écrire  $s$  et  $\tau$  comme des fonctions de  $x, y$ . Ceci est le résultat du Théorème des fonctions inverses. En remplaçant les expressions de  $s$  et  $\tau$  dans  $u(s, \tau)$  on obtient la solution  $u$  en fonction de  $x, y$ .

### 2.1.1 Applications

#### *Exemple 01 : l'équation de Transport*

Soit l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \text{avec} \quad u(x, 0) = f(x), \quad \forall x \in \mathcal{R}, \quad t \geq 0,$$

avec  $f(x)$  une fonction quelconque depend de  $x$  et  $c$  constante positive.

En considérant les courbes paramétriques ayant une paramétrisation suivante :

$$\sigma(s) = (x(s), t(s)),$$

## CHAPITRE 2. RÉOLUTION DE CERTAINES EDP DU PREMIER ET DU SECOND ORDRE

---

avec le vecteur tangent  $\sigma'(s) = (x'(s), t'(s)) = (c, 1)$ , nous obtenons

$$\frac{dt}{ds} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dx}{ds} = c,$$

on pose  $x(0) = x_0$  et  $t(0) = t_0$ . En intégrant les deux équations différentielles on obtient,

$$t(s) = s + t_0 \quad \text{et} \quad x(s) = cs + x_0, \quad \forall s \in \mathcal{R}.$$

On considère aussi la solution sur ces courbes  $u(s) = u(x(s), t(s))$ , nous appliquons la règle de chaines :

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

on peut interpréter cette formule comme étant la dérivée directionnelle de  $u$  dans la direction du vecteur tangent  $(x'(s), t'(s)) = (c, 1)$  qui vaut zéro. Donc,  $u$  est une constante sur les courbes  $s \mapsto (x(s), t(s)) = (cs + x_0, s + t_0)$  avec  $s \in \mathcal{R}$ .

On utilise les conditions initiales  $(x_0, t_0, u_0)$  pour trouver cette constante, il est à noter que ces valeurs initiales peuvent être paramétrisées par une courbe :  $x_0 = \tau, t_0 = 0, u_0 = f(\tau)$  avec  $\tau \in \mathcal{R}$ . Donc, par un calcul simple, nous avons

$$x(s, \tau) = cs + \tau, \quad t(s, \tau) = s, \quad u(s, \tau) = f(\tau).$$

Alors,  $s = t$  et  $\tau = x - cs = x - ct$ . En remplaçant dans l'équation de  $u$  et comme  $u(x, t) = u(x_0, 0)$ , on déduit

$$u(x, t) = f(x - ct), \quad \forall x \in \mathcal{R}.$$

### **Exemple 02**

Soit le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial u}{\partial x} = y^3, \\ u(x, 0) = x, \end{cases}$$

pour  $x \in \mathcal{R}$  et  $y \geq 0$ .

Nous considérons les courbes caractéristiques :

$$\frac{dy}{ds} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dx}{ds} = x.$$

On pose  $\sigma(s) = (y(s), x(s))$  la paramétrisation avec  $\sigma(0) = (y(0) = y_0, x(0) = x_0)$ , en

## 2.1. RÉOLUTION DES EDP DU PREMIER ORDRE

---

intégrant les deux équations différentielles, nous obtenons

$$y(s) = s + y_0, \quad x(s) = x_0 e^s, \quad \forall s \in \mathcal{R}.$$

Soit  $u(s) = u(x(s), y(s))$  la solution sur les courbes caractéristiques, on calcule la dérivée par rapport à  $s$ , nous obtenons

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial u}{\partial x} = y^3 = (s + y_0)^3,$$

en intégrant cette égalité, on trouve

$$u(s) = \frac{1}{4}(s + y_0)^4 + u_0.$$

Maintenant, nous utilisons les conditions initiales  $(x_0, y_0, u_0)$ , on exige que ces valeurs initiales paramétrisées par la courbe suivante  $x_0 = \tau, y_0 = 0, u_0 = \tau$ , donc

$$x(s, \tau) = \tau e^s, \quad y(s, \tau) = s, \quad u(s, \tau) = \frac{1}{4}s^4 + \tau,$$

et par la suite,  $s = y, \tau = x e^{-y}$ , en substituant dans l'équation de  $u$ , on en conclut que

$$u(x, y) = \frac{1}{4}y^4 + x e^{-y}.$$

**Exemple 03**

Soit le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + u = e^{-y+2x}, \\ u(x, 0) = x^2. \end{cases}$$

pour  $x \in \mathcal{R}$  et  $y \geq 0$ .

On construit les courbes caractéristiques suivantes

$$\frac{dx}{ds} = 1, \quad \frac{dy}{ds} = 1.$$

En intégrant ces équations différentielles en fonction de  $(x(0) = x_0, y(0) = y_0)$ , on obtient

$$x(s) = x_0 + s, \quad y(s) = y_0 + s.$$

on calcule la dérivée  $u'(s)$  par la méthode de la chaîne, on obtient

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -u + e^{-y+2x} = -u + e^{-y_0+2x_0+s},$$

et donc

$$\frac{du}{ds} = -u + e^{-y_0+2x_0+s}. \quad (2.3)$$

En utilisant la méthode de variation des constantes afin de résoudre cette équation différentielle. Soit  $u(s) = u(0)e^{-s}$  la solution de l'équation homogène  $\frac{du}{ds} + u = 0$ .

On remarque que  $v(s) = \frac{1}{2}e^{s+2x_0-y_0}$  est une solution particulière de l'équation (2.3), alors

$$u(s) = u(0)e^{-s} + \frac{1}{2}e^{s+2x_0-y_0}.$$

Nous avons les conditions initiales par la paramétrisation suivante

$$(x_0 = \tau, y_0 = 0, u_0 = \tau^2).$$

En remplaçant dans les courbes caractéristiques, nous obtenons

$$x(s, \tau) = s + \tau, \quad y(s, \tau) = s,$$

et alors

$$s = y, \quad \tau = x - y.$$

Par substitution dans l'équation de  $u$ , on en déduit que

$$u(x, y) = (x - y)^2 e^{-y} + \frac{1}{2} e^{2(x-y)+y}.$$

On présente maintenant quelques exercices.

### 2.1.2 Exercices

#### Exercice 01

Chercher la solution du problème à valeur initiale suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u = 0, \quad \text{avec} \quad u(x, 0) = f(x),$$

pour  $t, x \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$  et  $f$  est une fonction donnée .

#### Exercice 02

Soit l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall x, t \in \mathcal{D} \text{ de } \mathbb{R}^2,$$

avec  $u(x, 0) = F(x)$  et  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = G(x)$ .

1. Ecrire l'équation des ondes sous la forme du système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

2. Résoudre ce système.

#### Exercice 03

Soit l'EDP suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t).$$

1. Ecrire L'EDP sous la forme du système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} = F(x, t). \end{cases}$$

2. Trouver la solution du problème à valeur initiale :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t), \quad \text{avec} \quad u(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x).$$

**Exercice supplémentaire**

**Exercice 04**

Montrer que l'EDP suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\lambda \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

peut s'écrire sous la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} + 2\lambda\right) u - 2c\lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

où  $u = u(x, t)$ . Conclure de ceci que cette EDP est équivalent au système

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = v - 2\lambda u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} - 2c\lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

## 2.2 Résolution des EDP du second ordre

Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur les EDP linéaires du second ordre.

**Définition 12.** On définit une EDP d'ordre 2 comme suit

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G. \quad (2.5)$$

Nous supposons que les fonctions  $A, B, C, D, E, F$  et  $G$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un domaine  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Nous présentons la proposition suivante pour classifier les EDPs d'ordre 2.

La nature d'une EDP dépend du discriminant  $\Delta = B^2 - 4AC$  :

1. Si  $\Delta < 0$ , alors l'EDP est dite elliptique.
2. Si  $\Delta = 0$ , alors l'EDP est dite parabolique.
3. Si  $\Delta > 0$ , alors l'EDP est dite hyperbolique.

Nous avons besoin la définition suivante.

**Définition 13.** La règle de la chaîne est une formule sert à expliciter la dérivée d'une fonction composée pour deux fonctions dérivables.

Si une fonction  $u$  dépend d'une fonction  $x$  qui dépend d'une variable  $y$  (on suppose que les fonction  $u, x$  sont dérivables) alors la dérivée dans ce cas :  $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dy}$ .

Nous présentons le Théorème suivant.

**Théorème 14.** *La répartition par rapport à  $\Delta$  est conservée par des changements de coordonnées.*

Nous considérons le changement des variables  $(x, y)$  en  $(\xi, \eta)$ . Soient  $\xi = \xi(x, y)$  et  $\eta = \eta(x, y)$ , On suppose que  $\xi(x, y)$  et  $\eta(x, y)$  sont deux nouvelles variables et qui sont des fonctions de  $x$  et  $y$  ayant au moins des dérivées partielles d'ordre  $m \leq 2$  continues sur le domaine  $\mathcal{D}$  et telles que le déterminant,

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right),$$

n'est jamais égale à zéro sur  $\mathcal{D}$ . Donc nous avons une nouvelle équation en utilisant ce changement :

$$A' \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + B' \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C' \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D' \frac{\partial u}{\partial \xi} + E' \frac{\partial u}{\partial \eta} + F' u = G'. \quad (2.6)$$

En effet, en appliquant la règle de la chaîne, nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right),$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right),$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) \left[ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \right] + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right).$$

Nous avons donc,

$$A' = A \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + B \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + C \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$B' = 2A \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + B \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right] + 2C \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right),$$

$$C' = A \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + B \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + C \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2,$$

$$D' = A \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) + B \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \right) + C \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) + D \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + E \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right),$$

$$E' = A \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) + B \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \right) + C \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + D \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + E \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right),$$

$$F' = F \text{ et } G' = G.$$

Donc, nous obtenons

$$\begin{aligned} (B')^2 - 4A'C' &= \left( 2A \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + B \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right] + 2C \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right)^2 \\ &\quad - 4 \left( A \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + B \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + C \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right) \\ &\quad \left( A \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + B \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + C \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right), \end{aligned}$$

d'après un calcul simple, on trouve

$$\begin{aligned} (B')^2 - 4A'C' &= (B^2 - 4AC) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2, \\ &= J^2 (B^2 - 4AC), \end{aligned}$$

avec  $J^2 > 0$ , et donc l'équation (2.5) est conservée par des changements de coordonnées.

Afin de résoudre ces équations, nous allons utiliser ce changement de variable pour obtenir des équations plus facile à résoudre appelées **forme canonique**.

Pour cela, on cherche  $(\xi, \eta)$  tel que  $A' = 0$  ou  $C' = 0$ . Les équations  $A' = C' = 0$  ont de la même forme

$$A \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + B \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + C \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (2.7)$$

On divise sur le terme suivant

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} \neq 0,$$

## 2.2. RÉOLUTION DES EDP DU SECOND ORDRE

---

et par un calcul simple, nous obtenons

$$A \left[ \frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)} \right]^2 + B \left[ \frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)} \right] + C = 0. \quad (2.8)$$

D'un autre côté, pour un ensemble donné par

$$C_\gamma = \{(x, y) \in \mathcal{D} \mid G(x, y) = \gamma\},$$

nous avons,

$$\frac{d(G(x, y))}{dx} = \frac{d(\gamma)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)}.$$

Donc, si on considère l'ensemble

$$C_\gamma = \{(x, y) \in \mathcal{D} \mid \xi(x, y) = \gamma\},$$

nous aurons,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)}.$$

En remplaçant la formule (2.8) dans l'équation (2.7), nous obtenons

$$A \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B \left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0,$$

et par la suite nous trouvons deux équations caractéristiques suivantes, si  $\Delta > 0$ ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

En intégrant les solutions de ces deux équations, nous trouvons les deux courbes caractéristiques  $\xi(x, y) = c_1$  et  $\eta(x, y) = c_2$  (voir les exemples ci-dessous). Par un changement de coordonnées l'équation (2.6) se simplifiera. Lorsque  $\Delta = 0$ , une difficulté apparaît, nous n'aurons pas deux équations caractéristiques, mais une seule et aussi lorsque  $\Delta < 0$  le résultat est complexe (dans l'ensemble des nombres complexes) dans ce cas nous utilisons une autre méthode (on va voir dans la section suivante).

On présente le cas elliptique.

### 2.2.1 Cas Elliptique

Dans ce cas  $\Delta < 0$  sur le domaine  $\mathcal{D}$ , on obtient deux courbes caractéristiques à valeurs complexes et les solutions sont conjuguées entre elles.

On trouve les courbes caractéristiques suivantes  $\xi(x, y)$  et  $\eta(x, y) = \bar{\xi}(x, y)$ , on utilise le changement de variable suivant :  $\alpha = \frac{\xi+\eta}{2}$  et  $\beta = \frac{\xi-\eta}{2i}$ .

Exemple

Soit l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (2.9)$$

c'est une équation d'ordre 2 linéaire avec  $\Delta = B^2 - 4AC = -4x^2$ .

Alors, cette équation est parabolique sur la droite  $x = 0$ . Si  $x$  différent 0, l'équation est elliptique.

Sur le domaine pour lequel l'équation est elliptique, on a  $y' = \pm ix$ , en utilisant la méthode de séparation de variables nous avons deux solutions  $\xi(x, y) = y - \frac{i}{2}x^2$  et  $\eta(x, y) = y + \frac{i}{2}x^2$  qui sont conjuguées entre elles.

Les coordonnées caractéristiques sont  $\alpha(x, y) = y$  et  $\beta(x, y) = -\frac{x^2}{2}$ . En appliquant la règle de la chaîne, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -x \frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -x \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - \frac{\partial u}{\partial \beta},$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2},$$

alors,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) - \frac{\partial u}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = -\frac{1}{2\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta}.$$

### 2.2.2 Cas parabolique

Si  $\Delta = 0$  sur  $\mathcal{D}$ , on dit que l'équation est parabolique.

Exemple 01

L'exemple le plus célèbre est celui de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

On cherche  $\xi(x, y)$  tel que  $A = 0$ , dans ce cas nous n'obtiendrons qu'une seule coordonnée caractéristique  $\xi(x, y)$  car il existe une seule équation caractéristique. Pour trouver la deuxième coordonnée  $\eta(x, y)$ , on prend une fonction quelconque de classe au moins  $\mathcal{C}^2$  sur

le domaine  $\mathcal{D}$  avec

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0.$$

Exemple 02

Soit l'EDP suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (2.10)$$

l'équation est parabolique car  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ , donc nous avons une seule courbe caractéristique  $y' = 3$ , un calcul simple conduit à  $3x - y = c$ . Par conséquent, on pose  $\xi(x, y) = 3x - y$ , pour la deuxième coordonnée caractéristique, on peut choisir  $\eta = x$  avec

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

En appliquant la règle de la chaîne, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( 3 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} \left( -\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = -3 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}. \end{aligned}$$

En remplaçant les résultats précédents dans l'équation (2.10), nous aurons

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 5 \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

On présente maintenant le cas hyperbolique  $\Delta > 0$ .

### 2.2.3 Cas hyperbolique

Si  $\Delta > 0$  sur  $\mathcal{D}$ , on dit que l'équation est hyperbolique.

Pour bien comprendre, nous présentons quelques exemples

Exemple 01

CHAPITRE 2. RÉOLUTION DE CERTAINES EDP DU PREMIER ET DU SECOND ORDRE

---

L'exemple le plus connu d'EDP hyperbolique est l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

En effet,  $\Delta = 1 > 0$ . Il est possible de transformer l'équation des ondes à un système d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

En effet, on considère l'équation suivante :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \underbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} \right)}_v = 0,$$

et nous trouvons bien le système (2.11).

Exemple 02

On considère l'équation suivante :

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \forall x, y \neq 0.$$

C'est une équation hyperbolique car  $\Delta = B^2 - 4AC = 4x^2y^2 > 0$ . On cherche les équations (courbes) caractéristiques :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{0 \pm \sqrt{4x^2y^2}}{2y^2}.$$

Par la méthode de séparation des variables, on trouve

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{x}{y},$$

donc,

$$c_1 = \frac{y^2 + x^2}{2}, \quad c_2 = \frac{y^2 - x^2}{2}.$$

On pose  $\xi(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{2}$  et  $\eta(x, y) = \frac{y^2 + x^2}{2}$  sont des courbes caractéristiques.

Et par la suite, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\xi}{2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

## 2.2. RÉOLUTION DES EDP DU SECOND ORDRE

---

En effet, en appliquant la règle de la chaîne,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -x \frac{\partial u}{\partial \xi} + x \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = y \frac{\partial u}{\partial \xi} + y \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -x \frac{\partial u}{\partial \xi} + x \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

et enfin,

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - (x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial \xi} + (y^2 - x^2) \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{(x^2 + y^2)}{4x^2 y^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{(y^2 - x^2)}{4x^2 y^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\xi}{2(\xi^2 - \eta^2)} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

**Remarque 15.** On peut aussi utiliser un changement de coordonnées  $\alpha = \xi + \eta$  et  $\beta = \xi - \eta$ ,  $w(\alpha, \beta) = v(\xi, \eta)$  pour trouver une seconde forme canonique d'EDP qui dépend de  $(\alpha, \beta)$ .

En appliquant le changement de coordonnées  $(\alpha, \beta)$  sur l'exemple précédent, soient  $\alpha = \xi + \eta$  et  $\beta = \xi - \eta$  ce qui donne  $\xi = \frac{\alpha + \beta}{2}$  et  $\eta = \frac{\alpha - \beta}{2}$ , en faisant les calculs suivants

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta},$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2},$$

alors on obtient,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{(\alpha - \beta)/2}{2\alpha\beta} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) - \frac{(\alpha + \beta)/2}{2\alpha\beta} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \right),$$

ainsi,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \frac{-1}{2\alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{2\beta} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right). \quad (2.12)$$

On finira ce chapitre par présenter quelques exercices.

### 2.2.4 Exercices

#### Exercice 01

## CHAPITRE 2. RÉOLUTION DE CERTAINES EDP DU PREMIER ET DU SECOND ORDRE

---

Déterminer pour quels points  $(x; y)$  du plan, chacune des EDPs linéaires d'ordre 2 suivantes est elliptique, parabolique et hyperbolique.

1.  $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$
2.  $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (x + 3) \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$
3.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (x + y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = \sin(x).$

### Exercice 02

On considère les EDPs suivantes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 3u = 0,$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

1. Déterminer leurs types, les équations caractéristiques, les coordonnées caractéristiques.
2. Réduire l'équation sous sa forme canonique.

### Exercice 03

Soit l'EDP suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Déterminer le type de l'équation, ses équations et ses coordonnées caractéristiques et ensuite réduire l'équation sous la forme canonique.

### Exercice 04

On définit l'EDP comme suit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} - 3u = 0.$$

1. Déterminer le type de cette équation, les equations caractéristiques associent cette équation.
2. Réduire cette équation sous la forme canonique.

### Exercice supplémentaire

#### Exercice 05

Pour chacune des EDP linéaires d'ordre 2 suivantes

$$2y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4y \frac{\partial u}{\partial x} - 3u = 0,$$

## 2.2. RÉOLUTION DES EDP DU SECOND ORDRE

---

et

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 6y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

1. Déterminer les points du plan  $(x, y)$  où ces équations sont hyperboliques.
2. Déterminer les coordonnées caractéristiques de cette équation sur le domaine où celle-ci est parabolique.
3. Effectuer le changement de coordonnées pour les coordonnées trouvées en deuxième question de façon d'obtenir l'équation canonique correspondante.

# Chapitre 3

## Méthode des différences finies

### Introduction

”L’objectif principal de ce chapitre est d’explorer l’application d’approximations numériques pour aborder des problèmes complexes en mathématiques et en physique. Pour établir ces méthodes, nous introduirons d’abord des définitions et des outils essentiels, qui serviront de base aux développements ultérieurs. Ces concepts fondamentaux faciliteront notamment l’étude de la méthode des différences finies, une approche robuste et largement utilisée pour la résolution numérique des équations différentielles partielles (EDP).

### 3.1 Développement en série de Taylor

### 3.2 Développement de Taylor

Dans cette section, nous rappelons un résultat fondamental qui servira de base aux approximations numériques dans les développements suivants.

**Définition 16.** *Soit  $g$  une fonction  $(n+1)$ -fois dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ . Soient  $x \in I$  et  $h \in \mathbb{R}$  tels que  $x + h \in I$ . Alors, il existe un réel  $\alpha$  compris entre  $x$  et  $x + h$  tel que :*

$$g(x + h) = g(x) + \sum_{i=1}^n \frac{g^{(i)}(x)}{i!} h^i + O(h^{n+1}),$$

où le terme d’erreur est donné par :

$$O(h^{n+1}) = \frac{g^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

Cette relation correspond au développement de Taylor, qui permet d'approcher la valeur de la fonction  $g(x + h)$  en fonction des dérivées successives de  $g$  évaluées en  $x$ . Le terme  $O(h^{n+1})$  quantifie l'erreur d'approximation, laquelle tend vers zéro lorsque  $h$  devient suffisamment petit.

## 3.3 Discrétisation du Domaine (Maillage)

Pour résoudre numériquement une équation aux dérivées partielles (EDP), il est nécessaire de discrétiser le domaine continu dans lequel se pose le problème. Cette discrétisation est réalisée par un **maillage**, qui transforme un domaine continu en un ensemble de points discrets où les calculs peuvent être effectués.

**Définition 17.** *Un **maillage** est une discrétisation d'un intervalle ou d'un domaine continu en un ensemble de points, appelés nuds, où l'on va approximer les valeurs de la fonction.*

*Les nuds sont les intersections entre les différentes subdivisions du maillage.*

### Exemple de Maillage

Considérons un domaine  $\mathbb{D} = [0, L] \times [0, T]$  dans lequel une fonction  $w(x, t)$  de deux variables (espace et temps) doit être approximée. Le maillage de l'espace est réalisé avec un pas  $\vartheta$ , et celui du temps avec un pas  $\omega$ . Cela donne la discrétisation suivante :

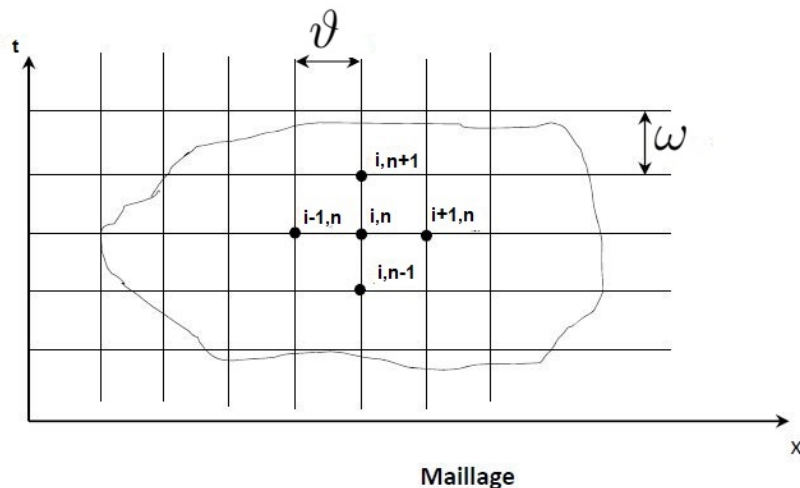
$$\begin{cases} x_i = i\vartheta, & i = 0, 1, 2, \dots, M, \\ t_j = j\omega, & j = 0, 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

Ce maillage décompose le domaine en une grille de points  $(x_i, t_j)$  où les valeurs de la fonction  $w(x, t)$  seront approximées.

## 3.4 La Méthode des Différences Finies

La méthode des différences finies est une approche qui consiste à approximer les dérivées de la fonction au moyen de différences discrètes entre les points du maillage. Cette méthode est particulièrement adaptée aux équations aux dérivées partielles (EDP) et permet de les résoudre numériquement.

**Définition 18.** *La méthode des différences finies consiste à approcher les dérivées partielles d'une fonction  $w(x, t)$  aux points  $(x_i, t_j)$  du maillage, où  $i = 1, 2, \dots, M$  et  $j =$*


 FIGURE 3.1 – Exemple de maillage pour une fonction  $w(x, t)$ .

$1, 2, \dots, N$ , par des différences entre les valeurs de la fonction  $w(x_i, t_j)$ . Ces valeurs discrètes sont notées  $w_i^j = w(x_i, t_j)$ .

Plus précisément, pour une fonction à une seule variable, on considère les points  $x_i = i\vartheta$ , où  $i = 1, 2, \dots, M$ , et on approximera la fonction  $w(x_i)$  par les valeurs discrètes  $w_i = w(x_i)$ .

L'idée fondamentale de la méthode des différences finies est d'approximer les dérivées de la fonction en utilisant des différences finies entre les valeurs de la fonction aux nuds adjacents. Par exemple, pour la dérivée première, la différence finie de  $w(x)$  en  $x_i$  est donnée par :

$$\frac{dw(x_i)}{dx} \approx \frac{w(x_{i+1}) - w(x_i)}{\vartheta},$$

et pour la dérivée seconde :

$$\frac{d^2w(x_i)}{dx^2} \approx \frac{w(x_{i+1}) - 2w(x_i) + w(x_{i-1}))}{\vartheta^2}.$$

Ces approximations permettent de résoudre numériquement les équations différentielles, en remplaçant les dérivées par des expressions en termes de différences finies entre les valeurs de la fonction sur le maillage.

**Définition 19.** Soient  $(X, T, \mu)$  un espace mesuré et  $g$  une fonction mesurable de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ , on dit que  $g \in L_{\mathbb{R}}^{\infty}$  (c'est-à-dire essentiellement bornée), ou  $\|g\|_{\infty} < +\infty$ , si et seulement s'il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que  $|g(x)| \leq M$  presque partout (p.p.) dans  $X$ , c'est-à-dire dans  $\mu$ -presque tous les points de  $X$ .

**Définition 20.** On dit qu'un schéma numérique est consistant si la différence  $R_i^j$  entre l'approximation de la solution d'une équation différentielle et la solution exacte converge vers 0 lorsque  $\omega \rightarrow 0$  et  $\vartheta \rightarrow 0$ .

De plus, si existe une constante  $C \in \mathbb{R}_+$  indépendante de la solution de l'EDP telle que  $R_i^j$  vérifie :

$$\|R_i^j\|_\infty \leq C(\omega^p + \vartheta^q), \quad p > 0, q > 0,$$

alors on dit que le schéma est consistant d'ordre  $p$  en temps et d'ordre  $q$  en espace.

**Définition 21** (Norme matricielle). Une norme matricielle  $\|\cdot\|$  est une norme sur un espace vectoriel  $M_{n,n}(H)$  de matrices à  $n$  lignes et  $n$  colonnes, à coefficients dans un espace  $H$ . Soit la matrice  $B$  à  $n$  lignes et  $n$  colonnes, on définit la norme de  $B$  comme suit :

$$\|B\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|},$$

et la norme matricielle vérifie les propriétés suivantes :

1.  $\|B\| \geq 0$ ,
2.  $\|B\| = 0$  si et seulement si  $B = 0$ ,
3.  $\|\lambda B\| = |\lambda| \|B\|$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,
4.  $\|B + C\| \leq \|B\| + \|C\|$ , (inégalité triangulaire).

**Définition 22.** Une matrice carrée  $B$  est dite inversible s'il existe une matrice carrée  $B^{-1}$  (matrice inverse) telle que :

$$B \times B^{-1} = B^{-1} \times B = I,$$

où  $I$  est la matrice identité. Si  $B^{-1}$  n'existe pas, la matrice  $B$  est dite singulière.

**Définition 23.** La matrice  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N} \in M_N(\mathbb{R})$  est dite positive si ses coefficients  $a_{ij}$  sont tous positifs. On dit également que  $A$  est monotone si  $A$  est inversible et si son inverse  $A^{-1}$  est positif ou nul.

**Définition 24.** On dit qu'une matrice  $A$  est définie positive si elle est positive et inversible.

**Définition 25 (Erreur de discrétisation).** L'erreur de discrétisation au point  $x_i$  est définie comme la différence entre la solution exacte et la solution approchée au point  $x_i$ . La  $i$ -ème composante de la solution correspondant au schéma numérique est notée  $w_i$ , et l'erreur de discrétisation est donnée par :

$$e_i = |w(x_i) - w_i|, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

**Définition 26.** On dit qu'un schéma numérique est stable si la solution numérique reste bornée dans  $L^\infty$ , indépendamment du pas de discrétisation.

**Définition 27 (Erreur de discrétisation en plusieurs dimensions).** L'erreur de discrétisation dans un schéma numérique à plusieurs dimensions (par exemple, dans le cas d'une équation aux dérivées partielles) est la différence entre la solution exacte et la solution approchée au point  $(x_i, t_j)$ . Elle est notée par  $e_i^j = w(x_i, t_j) - w_i^j$ .

### 3.5 Construction d'un schéma

Soit  $u$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^4$ . Si  $\vartheta$  est suffisamment petit, nous pouvons obtenir les développements de Taylor suivants :

$$w(x + \vartheta) = w(x) + \vartheta w'(x) + \frac{\vartheta^2}{2} w''(x) + \frac{\vartheta^3}{6} w^{(3)}(x) + O(\vartheta^4), \quad (3.1)$$

$$w(x - \vartheta) = w(x) - \vartheta w'(x) + \frac{\vartheta^2}{2} w''(x) - \frac{\vartheta^3}{6} w^{(3)}(x) + O(\vartheta^4). \quad (3.2)$$

Après un calcul simple, nous obtenons l'approximation de la dérivée première  $w'(x)$  :

$$w'(x) = \frac{w(x + \vartheta) - w(x)}{\vartheta} + O(\vartheta), \quad (3.3)$$

qui est l'approximation à droite de  $w'(x)$ . De plus, l'approximation à gauche est donnée par :

$$w'(x) = \frac{w(x) - w(x - \vartheta)}{\vartheta} + O(\vartheta). \quad (3.4)$$

Ces deux équations sont des approximations d'ordre 1 de  $w'(x)$ . Une approximation plus précise peut être obtenue avec l'approximation centrée, donnée par :

$$w'(x) = \frac{w(x + \vartheta) - w(x - \vartheta)}{2\vartheta} + O(\vartheta^2), \quad (3.5)$$

qui est une approximation d'ordre 2 de  $w'(x)$ .

En ce qui concerne la dérivée seconde  $w''(x)$ , l'approximation centrée est donnée par :

$$w''(x) = \frac{w(x + \vartheta) - 2w(x) + w(x - \vartheta)}{\vartheta^2} + O(\vartheta^2). \quad (3.6)$$

C'est l'approximation centrée de  $w''(x)$ .

### 3.5.1 Dérivées partielles pour une fonction de deux variables

Soit  $w$  une fonction de deux variables  $(x, y)$ . Les approximations des dérivées partielles de  $w$  sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x}(x, y) &= \frac{w(x + \vartheta, y) - w(x, y)}{\vartheta} + O(\vartheta), \\ \frac{\partial w}{\partial x}(x, y) &= \frac{w(x, y) - w(x - \vartheta, y)}{\vartheta} + O(\vartheta), \\ \frac{\partial w}{\partial x}(x, y) &= \frac{w(x + \vartheta, y) - w(x - \vartheta, y)}{2\vartheta} + O(\vartheta^2).\end{aligned}$$

Pour la dérivée seconde par rapport à  $x$ , l'approximation est donnée par :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y) = \frac{w(x + \vartheta, y) - 2w(x, y) + w(x - \vartheta, y)}{\vartheta^2} + O(\vartheta^2).$$

**Remarque 28.** *Les discrétisations que nous venons de discuter peuvent être utilisées pour résoudre de nombreux problèmes en physique, notamment les équations aux dérivées partielles (EDP) et autres problèmes de mécanique des fluides, de transfert thermique, ou de dynamique des systèmes. L'application des schémas numériques permet d'approximer les solutions de ces équations de manière efficace, en particulier pour les problèmes où les solutions exactes sont difficiles à obtenir.*

## 3.6 Problème elliptique

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -w'' + c(x)w(x) = g(x), & x \in ]0, 1[, \\ w(0) = \alpha, \quad w(1) = \beta, \end{cases} \quad (3.7)$$

avec  $g, c$  sont deux fonctions données, définies sur  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Ce système modélise le phénomène de la diffusion (par exemple le problème stationnaire de l'équation de chaleur).

On cherche l'approximation des dérivées de la solution de (3.7), on subdivise l'intervalle  $[0, 1]$  en un nombre fini de sous-intervalles. Nous introduisons le maillage donné par  $x_i = i\vartheta$  où  $i = 0, \dots, N + 1$  avec  $\vartheta$  est le pas entre ces points, il est donné par :  $\vartheta = \frac{1}{N+1}$ .

Alors, nous avons  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1$ . On prend  $\vartheta$  assez petit pour que le nombre de noeuds devient très grand. A la frontière de  $\Omega = [0, 1]$ , nous avons  $x_0 = 0$  et  $x_{N+1} = 1$ . Pour tout  $1 \leq i \leq N$  alors  $w_i = w(x_i)$  et  $w(x_0 = 0) = \alpha$  et  $w(x_{N+1}) = \beta$ .

**construction du schéma numérique**

On suppose que les fonctions  $g, c \in C([0, 1])$  et  $w \in C^4([0, 1])$ . Alors d'après le développement de Taylor au voisinage de  $x_i$ , nous avons

$$w(x_{i+1}) = w(x_i) + \vartheta w'(x_i) + \frac{\vartheta^2}{2} w''(x_i) + \frac{\vartheta^3}{6} w'''(x_i) + \frac{\vartheta^4}{24} w''''(\xi), \quad 0 \leq i \leq N, \xi \in [x_i, x_{i+1}],$$

et

$$w(x_{i-1}) = w(x_i) - \vartheta w'(x_i) + \frac{\vartheta^2}{2} w''(x_i) - \frac{\vartheta^3}{6} w'''(x_i) + \frac{\vartheta^4}{24} w''''(\eta), \quad 1 \leq i \leq N+1, \eta \in [x_{i-1}, x_i].$$

Ce qui donne,

$$w''(x_i) \approx \frac{w(x_{i+1}) - 2w(x_i) + w(x_{i-1}))}{\vartheta^2}.$$

Alors

$$(\mathcal{F}_\vartheta) \begin{cases} -\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{\vartheta^2} + c_i w_i = g_i, & i \in \{1, \dots, N\}, \\ w_0 = \alpha, w_{N+1} = \beta. \end{cases}$$

Ce problème contient  $N$  équations et deux conditions supplémentaires. On peut réécrire  $(\mathcal{F}_\vartheta)$  comme

$$M_\vartheta w_\vartheta = b_\vartheta,$$

avec  $M_\vartheta$  une matrice tridiagonale définie comme suit

$$M_\vartheta = M_\vartheta^{(d)} + \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & c_{N-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_N \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

et

$$w_\vartheta = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ w_N \end{pmatrix}$$

où

$$M_{\vartheta}^{(d)} = \frac{1}{\vartheta^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad b_{\vartheta} = \begin{pmatrix} g_1 + \frac{\alpha}{\vartheta^2} \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{N-1} \\ g_N + \frac{\beta}{\vartheta^2} \end{pmatrix}.$$

Ce problème soulève au moins deux questions :

1. Peut-on avoir l'unicité de la solution de  $(\mathcal{F}_{\vartheta})$  ?
2. Est ce que  $u_h$  converge vers la solution exacte ? dans quel sens ?

En d'autres termes, nous devons déterminer si la matrice  $M_{\vartheta}$  est inversible. La réponse est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 29.** *On suppose que  $c(x) \geq 0$ , pour tout  $x \in \Omega$ , alors la matrice  $M_{\vartheta}$  est symétrique et définie positive, par conséquent  $M_{\vartheta}$  est inversible.*

*Démonstration.* Il est facile de vérifier que la matrice  $M_{\vartheta}$  est symétrique. Il reste à prouver que  $M_{\vartheta}$  est définie positive. Considérons un vecteur  $v = (v_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N$ , pour  $c(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \Omega$ , nous avons

$$v^t M_{\vartheta} v = v^t M_{\vartheta}^{(d)} v + \sum_{i=1}^N c_i v_i^2 \geq v^t M_{\vartheta}^{(d)} v,$$

Donc, il suffit de montré que  $M_{\vartheta}^{(d)}$  est définie positive, alors on a

$$\begin{aligned} \vartheta^2 v^t M_{\vartheta}^{(d)} v &= v_1^2 + (v_2 - v_1)^2 + \dots + (v_{N-1} - v_N)^2 + v_N^2 \\ &= \sum_{i=2}^N (v_i - v_{i-1})^2 + v_N^2 \geq 0, \quad \forall v = (v_1, v_2, \dots, v_N). \end{aligned}$$

Alors  $M_{\vartheta}^{(d)}$  est définie positive. De plus, si  $v^t M_{\vartheta}^{(d)} v = 0$ , alors  $v_{i+1} - v_i = v_1 = v_N = 0$ . Par conséquent  $v_1 = v_2 \dots = v_N = 0$ .  $\square$

### Consistance du schéma

Maintenant, nous voulons savoir si le problème  $(\mathcal{F}_{\vartheta})$  est une bonne approximation de problème (3.7). Pour montrer ce résultat on utilise la proposition suivante :

$$(L_{\vartheta} w)(x_i) = -\frac{w(x_{i+1}) - 2w(x_i) + w(x_{i-1}))}{\vartheta^2} + c(x_i) w(x_i),$$

et donc nous avons le problème discret suivant

$$(L_{\vartheta} w)(x_i) = g_i.$$

Nous avons besoin de la définition suivante sur la consistance du schéma numérique.

**Définition 30.** *On dit qu'un schéma numérique est consistant si l'erreur de consistance  $R_\vartheta := (L_\vartheta w)(x_i) - g_i$  tend uniformément vers zéro par rapport à  $x$  lorsque  $\vartheta$  tend vers 0, c'est à dire :*

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \|R_\vartheta\|_\infty = 0.$$

**Proposition 31.** *On suppose que  $w \in C^4([0, 1])$ . Alors le schéma  $\mathcal{F}_\vartheta$  est consistant d'ordre 2. De plus, il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $w$  telle que*

$$\|R_\vartheta\|_\infty \leq C \frac{\vartheta^2}{12}, \quad C = \sup_{[0,1]} |w^{(4)}|.$$

*Démonstration.* En utilisant la formule de Taylor et par (3.7), on obtient :

$$\begin{aligned} R_\vartheta &= -\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{\vartheta^2} + c_i w_i - g_i, \\ &= -w''(x_i) + \frac{\vartheta^2}{12} w^{(4)}(\xi_i) + c_i w_i - g_i, \\ &= \frac{\vartheta^2}{12} w^{(4)}(\xi_i), \end{aligned} \tag{3.9}$$

pour  $\xi_i \in ]x_{i-1}, x_i[$ .

Donc,

$$\|R_\vartheta\|_\infty \leq \sup_{[0,1]} |w^{(4)}| \frac{\vartheta^2}{12}.$$

□

**Remarque 32.** 1. *On note par  $\bar{w}_\vartheta = (w(x_i))_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}$  le vecteur dont les composantes sont les valeurs prises par la solutions aux points  $x_i$  de  $-w'' + cw = g$ , alors nous avons*

$$R_\vartheta = M_\vartheta(w_\vartheta - \bar{w}_\vartheta). \quad R_\vartheta \in \mathbb{R}^n.$$

2. *On suppose que la fonction  $w^{(4)} = 0$ , alors l'approximation de  $-w''$  :*

$$-w''(x_i) = \frac{2w(x_i) - w(x_{i-1}) - w(x_{i+1}))}{\vartheta^2},$$

*dans ce cas, l'erreur de consistance égale à zéro et donc le schéma numérique donne la solution exacte en  $x_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ .*

### Le principe du maximum de Hopf

L'idée de ce principe est de prouver que si une fonction satisfait une inégalité différentielle d'ordre deux dans un domaine  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^n$  et atteint son maximum, alors cette fonction est

constante.

Nous commençons par la proposition suivante qui donne une définition équivalent à la définition 16

**Proposition 33.** *Une matrice  $M$  est monotone (définition 16) ssi pour chaque  $v \in \mathbb{R}^n$ , nous avons  $Mv \geq 0$  alors  $v \geq 0$ .*

*Démonstration.* (1) La condition nécessaire :

On suppose que  $M$  est une matrice monotone alors  $M$  est inversible, donc

$$v = M^{-1}(Mv).$$

Nous avons alors

$$v_i = \sum_{j=1}^N (M^{-1})_{ij} (Mv)_j,$$

où  $(M^{-1})_{ij} \geq 0$ . Alors, on en déduit que  $v_i \geq 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

(2) La condition suffisante :

Soit  $M$  une matrice telle que  $Mv \geq 0 \Rightarrow v \geq 0$ , pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$ . Nous considérons un vecteur  $v \in \ker(M)$  c'est à dire  $Mv = 0$ . On note que si  $Mv \geq 0 \Rightarrow v \geq 0$ , alors  $M(-v) \geq 0 \Rightarrow v \leq 0$ , ce qui donne  $v = 0$ . Donc l'ensemble  $\ker M$  est réduit au vecteur nul.

Soit  $b_i : i^{eme}$  colonne de la matrice  $M$  et le  $e_i : i^{eme}$  vecteur canonique, alors nous avons

$$M^{-1}e_i = b_i \Rightarrow Mb_i = e_i \geq 0 \Rightarrow b_i \geq 0,$$

pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$  et donc  $M^{-1} \geq 0$ . □

Le résultat suivant montre le principe du maximum discret pour  $(\mathcal{F}_\vartheta)$ .

**Lemme 34.** *Supposons que  $c, g \in C^0([0, 1])$  est une fonction positive, alors la matrice  $M_\vartheta$  est monotone.*

*Démonstration.* On pose

$$\mu = \inf \{w_i, i \in \{1, \dots, N\}\}.$$

Nous voulons montrer que  $\mu \geq 0$ . On suppose par l'absurde que  $\mu \leq 0$ . Considérons l'ensemble  $I = \{i \in \{1, \dots, N\} \text{ avec } w_i = \mu\}$ . Clairement que  $I$  est non vide. Soit  $j$  le plus grand élément de l'ensemble  $I$ ,

$$\begin{cases} w_j = \mu, \\ w_j < w_{j+1}, \Rightarrow 2w_j < w_{j+1} + w_{j-1} \Rightarrow w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1} > 0, \\ w_j \leq w_{j-1}, \end{cases} \quad (3.10)$$

Le schéma  $\mathcal{F}_\vartheta$  est donné par

$$-\frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{\vartheta^2} + c_j w_j = g_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

Alors nous obtenons  $w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1} = \vartheta^2(c_j w_j - g_j)$ , comme  $g_j \geq 0$  et par l'hypothèse  $\mu = w_j < 0$  et  $c_j \geq 0$  on en déduit que  $c_j w_j - g_j \leq 0$ . Par conséquent  $w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1} \leq 0$ , alors ce résultat contredit (3.10) et donc avec l'hypothèse  $\mu < 0$ .

Nous déduisons que  $w_j \geq 0$  pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ , ce qui entraîne le résultat suivant

$$M_\vartheta w_\vartheta \geq 0 \Rightarrow w_\vartheta \geq 0.$$

Alors,  $M_\vartheta$  est une matrice monotone. □

**Proposition 35.** *Supposons que  $c \in C^0([0, 1])$  est une fonction positive. Alors, la matrice  $M_\vartheta$  est inversible.*

Maintenant, on passe aux notions fondamentales de stabilité et de convergence du schéma numérique  $\mathcal{F}_\vartheta$ .

### Stabilité et convergence du schéma numérique

**Proposition 36. (Stabilité)** *Un schéma numérique est dit stable si pour toute fonctions  $c$  et  $f$  continue et positives, il existe une constante  $C$  positive (indépendante de  $\vartheta$ ), tel que*

$$\|M^{-1}\|_\infty \leq C,$$

en d'autres termes

$$\|w_\vartheta\|_\infty \leq C \|g\|_\infty.$$

Dans notre cas  $C = \frac{1}{8}$  donc

$$\|M^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad \|w_\vartheta\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|g\|_\infty.$$

*Démonstration.* Il est facile de voir que  $M_\vartheta^{-1} \left( M_\vartheta^{(d)} - M_\vartheta \right) \left( M_\vartheta^{(d)} \right)^{-1} = M_\vartheta^{-1} (I - M_\vartheta (M_\vartheta^{(d)})^{-1}) = M_\vartheta^{-1} - (M_\vartheta^{(d)})^{-1}$ .

On sait que  $c \geq 0$ ,  $(M_\vartheta^{(d)} - M_\vartheta)$  est une matrice diagonale à coefficients négatifs, donc  $M_\vartheta^{-1} \geq 0$ ,  $M_\vartheta^{-1}$  et  $(M_\vartheta^{(d)})^{-1}$  sont des matrices monotones. Par la comparaison des matrices, on trouve

$$M_\vartheta^{-1} \leq \left( M_\vartheta^{(d)} \right)^{-1}.$$

Alors

$$\|M_{\vartheta}^{-1}\|_{\infty} \leq \left\| \left( M_{\vartheta}^{(d)} \right)^{-1} \right\|_{\infty},$$

nous allons montrer que  $\left\| \left( M_{\vartheta}^{(d)} \right)^{-1} \right\|_{\infty} = \frac{1}{8}$ . Nous avons

$$\left\| \left( M_{\vartheta}^{(d)} \right)^{-1} \right\|_{\infty} = \left\| \left( M_{\vartheta}^{(d)} \right)^{-1} e \right\|_{\infty}, \quad e = (1, \dots, 1)^t.$$

On pose  $b = \left( M_{\vartheta}^{(d)} \right)^{-1} e$  alors  $\left( M_{\vartheta}^{(d)} \right) b = e$ , ce qui nous donne l'équation suivante

$$\begin{cases} -w'' = 1, \\ w(0) = w(1) = 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

qui possède comme solution

$$w(x) = -\frac{x(x-1)}{2},$$

avec  $w^{(4)}(x) = 0$ . Ce qui implique d'après la remarque 32 que,

$$b_i = w(x_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Alors

$$\|b\|_{\infty} \leq \sup_{x \in [0,1]} |w(x)| = \frac{1}{8}.$$

□

**Théorème 37. (convergence)** Soit  $c \in C^0([0, 1])$  une fonction positive avec  $w \in C^4([0, 1])$ . Donc le schéma numérique  $\mathcal{F}_{\vartheta}$  est convergent d'ordre 2 pour la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$  de plus, on a

$$\max_{1 \leq i \leq N} |e_i| \leq \frac{1}{96} \|w^{(4)}\|_{\infty} \vartheta^2.$$

*Démonstration.* On pose  $w_{\vartheta} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^t$  et  $\bar{w}_{\vartheta} = (W(x_1), W(x_2), \dots, W(x_n))^t$ . D'après la remarque (32), nous obtenons

$$M_{\vartheta}(w_{\vartheta} - \bar{w}_{\vartheta}) = R_{\vartheta},$$

avec  $R_{\vartheta}$  représente l'erreur de consistance. Par conséquent,

$$\|\tilde{w} - w_{\vartheta}\|_{\infty} \leq \|M_{\vartheta}^{-1}\|_{\infty} \|R_{\vartheta}\|_{\infty} \leq \frac{1}{8} \frac{1}{12} \|w^{(4)}\|_{\infty} = \frac{1}{96} \|w^{(4)}\|_{\infty}.$$

□

### 3.7 Problème parabolique

Nous considérons le problème de la chaleur suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & (x, t) \in [0, L] \times [0, T], \\ w(x, 0) = w_0(x), \\ w(0, t) = w(L, t) = 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

la deuxième équation de (3.12) représente la condition initiale, et la troisième équation représente les conditions aux bords,  $w(x, t)$  représente la température en un point  $x$  de l'espace et à l'instant  $t$ . Ce système modélise la propagation de la chaleur dans une tige. Le théorème suivant montre l'existence et l'unicité de la solution :

**Théorème 38** (Existence et Unicité). *Soit  $w_0 \in C([0, L], \mathbb{R})$ , alors il existe une solution unique  $w \in C^2([0, L] \times [0, T], \mathbb{R})$  du problème (3.12).*

Pour chercher la solution approchée, on construit un maillage en temps et en espace. On note  $x_i = i\vartheta$ , avec  $i = 0, \dots, n$  et  $t_j = j\omega$  où  $j = 0, \dots, m$ . La discrétisation consiste à se donner un ensemble de valeurs avec  $\vartheta = \frac{L}{n}$ , et  $\omega = \frac{T}{m}$ . On cherche à déterminer la solution aux points  $x_i$  et  $t_j$  :  $w(x_i, t_j)$ , on note ces valeurs par  $w_i^j$ ,  $i = 0, \dots, n$  et  $j = 0, \dots, m$ .

En utilisant l'approximation à droite pour la dérivée partielle par rapport au temps  $t$ , nous avons

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\omega},$$

et l'approximation centrée pour la deuxième dérivée par rapport à l'espace  $x$  :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_i, t_j) \approx \frac{w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j}{\vartheta^2}.$$

En remplaçant dans (3.12), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\omega} + \frac{D}{\vartheta^2} (2w_i^j - w_{i-1}^j - w_{i+1}^j) = 0, & i = 1, \dots, n, \quad n = 1, \dots, m, \\ w_i^0 = w_0(x_i), & i = 0, \dots, n, \\ w_0^j = w_{n+1}^j = 0, & j = 0, \dots, m. \end{cases}$$

Ce qui donne le schéma suivant

$$w_i^{j+1} = (1 - 2\lambda)w_i^j + \lambda w_{i-1}^j + \lambda w_{i+1}^j, \quad (3.13)$$

avec  $\lambda = \frac{D\omega}{\vartheta^2}$ .

### 3.7. PROBLÈME PARABOLIQUE

---

Ce schéma est explicite car on peut déterminer les valeurs  $w_i^{j+1}$  explicitement en fonction de  $w_i^j$ .

De même, si on approxime à gauche on aura que

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{w(x, t) - w(x, t - \omega)}{\omega} + O(\omega),$$

donc,

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{w_i^j - w_i^{j-1}}{\omega},$$

en substituant dans l'équation de la chaleur, on trouve

$$\frac{w_i^j - w_i^{j-1}}{\omega} = D \frac{w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j}{\vartheta^2}.$$

Alors,

$$-\lambda w_{i-1}^{j+1} - \lambda w_{i+1}^{j+1} + (1 + 2\lambda)w_i^{j+1} = w_i^j,$$

où  $\lambda = D \frac{\omega}{\vartheta^2}$ .

Cette dernière s'écrit sous une forme matricielle,

$$W^{j+1} = MW^j,$$

avec  $W^{j+1} = (W_1^{j+1}, \dots, W_N^{j+1})^t$ ,  $W^j = (W_1^j, \dots, W_N^j)^t$  et

$$M = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 + 2\lambda & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 + 2\lambda & \end{pmatrix}.$$

Cette méthode est dite **implicite**.

On peut aussi construire une combinaison convexe des deux schémas précédents de la façon suivante :

$$\frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\omega} = \frac{1}{2}D \left( \frac{w_{i+1}^{j+1} - 2w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1}}{\vartheta^2} + \frac{w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j}{\vartheta^2} \right),$$

ce schéma est dit schéma de Crank-Nicolson.

#### Consistance du schéma explicite

Soit  $\tilde{w}_i^j = w(x_i, t_j)$  est la solution exacte en  $x_i$  et  $t_j$  de (3.12). On définit l'erreur de consistance comme étant la différence entre la solution exact et la solution approchée de

(3.12). Pour le schéma explicite de (3.12), il y a deux erreurs de consistance : l'erreur de consistance par rapport au temps  $\tilde{R}_i^j$  et l'erreur de consistance par rapport à l'espace  $\hat{R}_i^j$ , on pose  $R_i^{(j)} = \tilde{R}_i^j + \hat{R}_i^j$  où :

$$\tilde{R}_i^j = \frac{\tilde{w}_i^{j+1} - \tilde{w}_i^j}{\omega} - \frac{\partial w}{\partial t}(x_i, t_j) \text{ et } \hat{R}_i^j = \frac{D}{\vartheta^2} (2\tilde{w}_i^j - \tilde{w}_{i-1}^j - \tilde{w}_{i+1}^j) + D \frac{\partial w^2}{\partial x^2}(x_i, t_j),$$

on en déduit

$$R_i^j = \frac{\tilde{w}_i^{j+1} - \tilde{w}_i^j}{\omega} - \frac{D}{\vartheta^2} (\tilde{w}_{i+1}^j + \tilde{w}_{i-1}^j - 2\tilde{w}_i^j).$$

**Théorème 39.** *Le schéma numérique (3.13) est consistant d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace, c'est-à-dire :*

$$|R_i^j| = \left| \frac{\tilde{w}_i^{j+1} - \tilde{w}_i^j}{\omega} - \frac{D}{\vartheta^2} (\tilde{w}_{i+1}^j + \tilde{w}_{i-1}^j - 2\tilde{w}_i^j) \right| \leq C (\omega + \vartheta^2).$$

*Démonstration.* Nous utilisons le développement de Taylor, on suppose que  $(\xi_\ell, t_\ell) \in [0, L] \times [0, T]$ ,  $\ell = 1, 2, 3$  et  $u \in C^4$  :

$$\tilde{w}_i^{j+1} = \tilde{w}_i^j + \omega \frac{\partial w}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\xi_1, t_1),$$

et

$$\tilde{w}_{i-1}^j = \tilde{w}_i^j - \vartheta \frac{\partial w}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{\vartheta^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_i, t_j) - \frac{\vartheta^3}{6} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x_i, t_j) + \frac{\vartheta^4}{24} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(\xi_2, t_2),$$

$$\tilde{w}_{i+1}^j = \tilde{w}_i^j + \vartheta \frac{\partial w}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{\vartheta^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_i, t_j) + \frac{\vartheta^3}{6} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x_i, t_j) + \frac{\vartheta^4}{24} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(\xi_3, t_3).$$

On en déduit que,

$$\frac{\tilde{w}_i^{j+1} - \tilde{w}_i^j}{\omega} = \frac{\partial w}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{\omega}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\xi_1, t_1),$$

et

$$\frac{D}{\vartheta^2} (\tilde{w}_{i+1}^j + \tilde{w}_{i-1}^j - 2\tilde{w}_i^j) = D \frac{\partial w^2}{\partial x^2}(x_i, t_j) + D \frac{\vartheta^2}{24} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(\xi_2, t_2) + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(\xi_3, t_3) \right).$$

Donc, comme  $w$  est la solution de l'équation de la chaleur, nous avons

$$\left| \frac{\tilde{w}_i^{j+1} - \tilde{w}_i^j}{\omega} - \frac{D}{\vartheta^2} (\tilde{w}_{i+1}^j + \tilde{w}_{i-1}^j - 2\tilde{w}_i^j) \right| \leq \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\xi_1, t_1) \omega + D \frac{\vartheta^2}{24} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(\xi_2, t_2) + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(\xi_3, t_3) \right).$$

Alors,

$$|R_i^j| \leq C(\omega + \vartheta^2),$$

où,

$$C = \max \left( \left\| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\xi_1, t_1) \right\|_{L^\infty} ; \frac{D}{24} \left\| \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} (\xi_2, t_2) + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} (\xi_3, t_3) \right) \right\|_{L^\infty} \right).$$

□

### Stabilité

L'objectif de cette section est de montrer la stabilité du schéma numérique, c'est-à-dire de conserver numériquement les résultats mathématiques. Notez que le problème parabolique a le résultat suivant :

$$\|w(x, t)\|_\infty = \|w_0(x)\|_\infty$$

**Lemme 40.** *Si la condition*

$$\lambda = \frac{D\omega}{\vartheta^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (3.14)$$

*alors (3.13) est  $L^\infty$  stable c'est-à-dire :*

$$\max_{i=1, \dots, N} |w_i^j| \leq \|w^0\|_\infty. \quad (3.15)$$

*Démonstration.* Soit le schéma (3.13) :

$$w_i^{j+1} = (1 - 2\lambda)w_i^j + \lambda w_{i-1}^j + \lambda w_{i+1}^j,$$

où  $\lambda = \frac{D\omega}{\vartheta^2}$ .

Pour montrer l'inégalité (3.15), il faut montrer les inégalités suivantes

$$\begin{cases} \max_{i=1, \dots, N} w_i^{j+1} \leq \max_{i=1, \dots, N} w_i^j, \\ \min_{i \leq N} w_i^{j+1} \geq \min_{i=1, \dots, N} w_i^j. \end{cases}$$

Par la condition (3.14), nous avons  $1 - 2\lambda \geq 0$  et  $w_i^{j+1}$  est une combinaison convexe de  $w_i^j$ ,  $w_{i-1}^j$  et  $w_{i+1}^j$ . On pose  $M^j = \max_{i, \dots, N} w_i^j$ , ce qui donne

$$w_i^j \leq (1 - 2\lambda)M^j + \lambda M^j + \lambda M^j, \quad \forall i = 1 \leq N,$$

alors,

$$w_i^{j+1} \leq M^j,$$

et on obtient

$$M^{j+1} \leq M^j.$$

Par les mêmes étapes, on trouve :

$$\min_{i \leq N} w_i^{j+1} \geq \min_{i \leq N} w_i^j.$$

Donc,

$$\max_{i \leq N} (w_i^{j+1}) \leq \max_{i \leq N} w_i^0 \text{ et } \min_{i \leq N} (w_i^{j+1}) \geq \min_{i \leq N} w_i^0.$$

□

Le théorème suivant donne les résultats principaux de convergence du schéma explicite :

**Théorème 41.** *Sous la condition du CFL (Courant Friedrichs Lewy) (3.49) et les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité, il existe  $C > 0$  tel que*

$$\|e_i^{j+1}\|_\infty \leq \|e_i^0\|_\infty + TC (\omega + \vartheta^2), \text{ pour tout } i = 1, \dots, N \text{ et } j = 0, \dots, M - 1.$$

Si  $\vartheta, \omega \rightarrow 0$ , et  $\|e_i^0\|_\infty = 0$  le schéma est dit convergent.

*Démonstration.* Soit  $\tilde{w}_i^j$  la solution exacte aux points  $(x_i, t_j)$ . L'erreur de consistance s'écrit

$$\frac{\tilde{w}_i^{j+1} - \tilde{w}_i^j}{\omega} - \frac{D}{\vartheta^2} (2\tilde{w}_i^j - \tilde{w}_{i-1}^j - \tilde{w}_{i+1}^j) = R_i^j, \quad (3.16)$$

le schéma numérique vérifie :

$$\frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\omega} - \frac{D}{\vartheta^2} (2w_i^j - w_{i-1}^j - w_{i+1}^j) = 0. \quad (3.17)$$

En soustrayant (3.16) et (3.17), nous obtenons :

$$\frac{e_i^{j+1} - e_i^j}{\omega} - \frac{D}{\vartheta^2} (2e_i^j - e_{i+1}^j - e_{i-1}^j) = R_i^j, \quad (3.18)$$

on peut réécrire l'équation précédente (3.18) comme suit

$$e_i^{j+1} = (1 - 2\lambda)e_i^j + \lambda e_{i-1}^j + \lambda e_{i+1}^j + \omega R_i^j.$$

On pose  $\|e^j\|_\infty = \max_{i \leq N} e_i^j$ . Par la condition (3.14), nous obtenons

$$(1 - 2\lambda)e_i^j + \lambda e_{i-1}^j + \lambda e_{i+1}^j \leq \|e^j\|_\infty.$$

En appliquant le Théorème 39, nous trouvons

$$|e_i^{j+1}| \leq \|e_i^0\|_\infty + \omega C (\omega + \vartheta^2),$$

et nous utilisons la récurrence par rapport à  $j$ , on obtient

$$\|e_i^{j+1}\|_\infty \leq \|e_i^{(0)}\|_\infty + M\omega C (\omega + \vartheta^2).$$

□

#### 3.7.1 Programme Matlab : Problème de la chaleur

Notre objectif est de dessiner la solution de problème de la chaleur par l'utilisation du schéma numérique convergent. Notre objectif est de déterminer l'importance de la condition de stabilité du CFL.

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ w(0, x) = w_0(x), \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, 1], \\ w(t, 0) = w(t, 1) = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

On note  $\lambda = D \frac{\omega}{\vartheta^2}$ , et donc nous avons le schéma explicite suivant :

$$w_i^{j+1} = \lambda w_{i-1}^j + (1 - 2\lambda)w_i^j + \lambda w_{i+1}^j. \quad (3.20)$$

On prend les valeurs suivantes :  $D = 1$ , les pas  $\vartheta = 0.02$  et  $\omega = 0.0004$ . La température initiale est  $w_0(x) = \sin(\pi x)$  et les conditions nulles aux bords pour  $x = 0$  et  $x = 1$ .

Le code Matlab pour effectuer ces calculs est le suivant :

```
clear all;clc;
L =1.; %Longueur de la tige
T =1.; %le temps final
maxk=2500; %Le nombre du temps
dt = T/maxk; %le pas du temps
n = 50; %nombre de descritisation en espace
dx = L/n; %le pas de l'espace
cond = 1/5;
b =4.*cond*dt/(dx*dx) %La condition de stabilite (CFL);
T=zeros(n, maxk);
x=zeros(1, n+1);
time=zeros(1, maxk+1);
for i=1:n+1
x(i) =(i-1)*dx;
w(i, 1) =sin(pi*x(i));%la temperature initiale : sinus.
end
% Les conditions aux limites (T=0)
for k=1:maxk+1
```

```

w(1,k) = 0.;
w(n+1,k) = 0.;
time(k) = (k-1)*dt;
end
for k=1:maxk % Boucle du temps
for i=2:n; % Boucle de l'espace
w(i,k+1) = w(i,k) + 0.5*b*(w(i-1,k)+w(i+1,k)-2.*w(i,k));
end
end
mesh(w)
xlabel('x','fontsize',20)%l'espace
ylabel('t','fontsize',20)
zlabel('w(t,x)','fontsize',20)
%title('solution numerique')

```

Nous trouvons les figures (A) et (B) dans Figure 3.2 :

**Remarque 42.** *Il est clair que si la condition du CFL ( $b = 0.3 < \frac{1}{2}$ ) est vérifiée alors le schéma numérique est convergent (la figure (A)) sinon il est divergent (on peut voir une illustration directement dans la figure (B)).*

### Méthode Implicite

Cette méthode est inconditionnellement stable (quels que soient  $\vartheta$  et  $\omega$  les erreurs causées par le schéma numérique n'explorent pas au fil des itérations).

Nous utilisons les approximations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\omega}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_{i+1}^{j+1} - 2w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1}}{\vartheta^2}. \end{cases} \quad (3.21)$$

On pose  $\lambda = D \frac{\omega}{\vartheta^2}$  et donc on trouve :

$$w_i^j = -\lambda w_{i-1}^{j+1} + (1 + 2\lambda)w_i^{j+1} - \lambda w_{i+1}^{j+1}. \quad (3.22)$$

On peut réécrire le schéma (3.22) sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} (1 + 2\lambda) & -\lambda & 0 & \cdots \\ -\lambda & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & (1 + 2\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^{j+1} \\ w_2^{j+1} \\ \vdots \\ w_{N-1}^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1^j + \lambda w_0^j \\ w_2^j \\ \vdots \\ w_{N-1}^j + \lambda w_N^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1^j \\ w_2^j \\ \vdots \\ w_{N-1}^j \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} w_0^j \\ 0 \\ \vdots \\ w_N^j \end{pmatrix}.$$

On trouve le graphe Figure ???. Le code de Matlab associé au schéma implicite :

```

function Implicite
clear ; clc ; close all;
D=1; %le coefficient
m=1000; %nombre de l'espace
n=1000; %nombre du temps
space=1; time=1; %l'espace et temps : les intervalles
dx=space/m; dt=time/n; % les pas

```

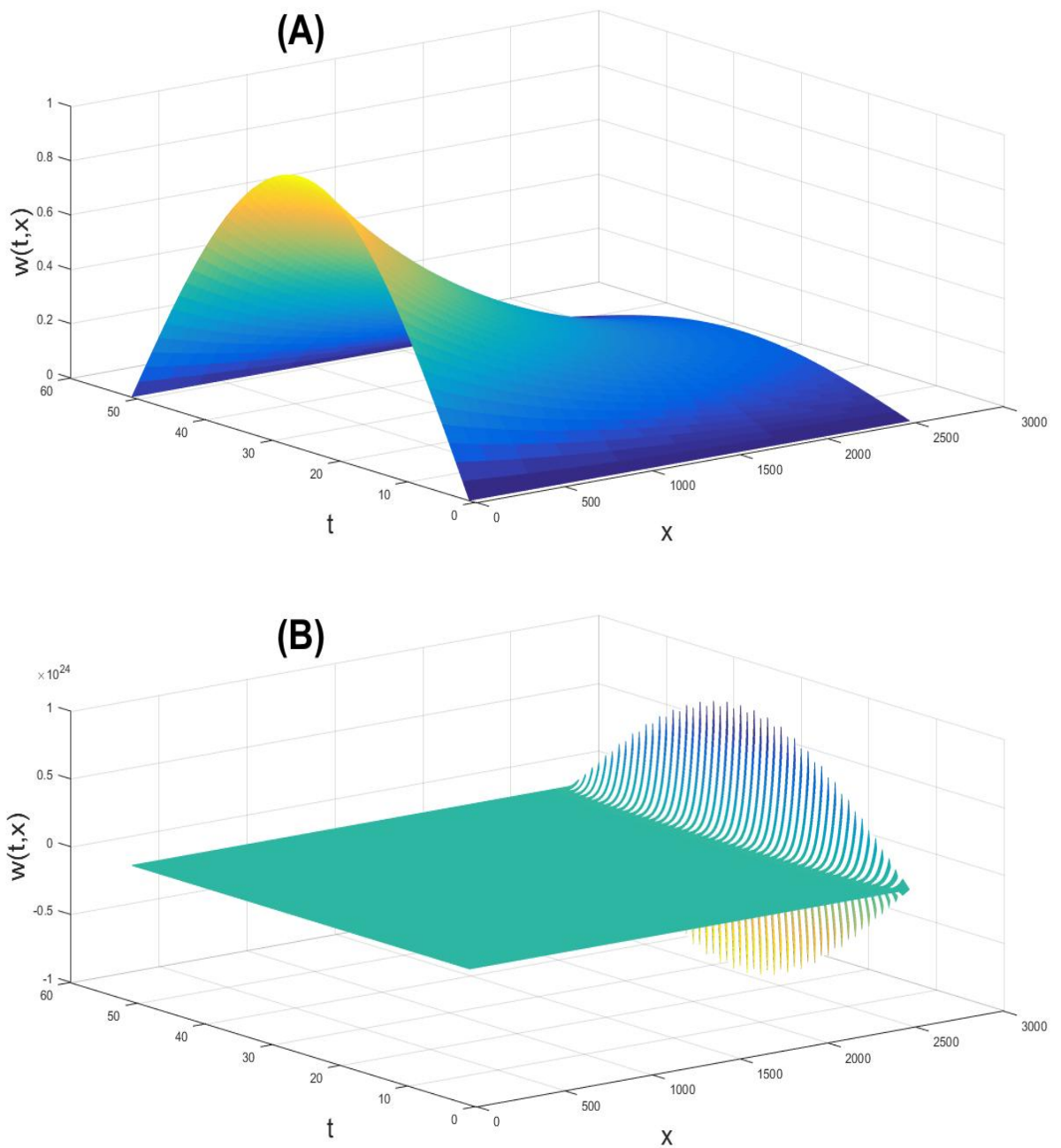


FIGURE 3.2 – (A) : Stabilité du schéma explicite :  $b = 0.3 < \frac{1}{2}$  (la condition CFL (Courant Friedrichs Lewy)) ,

(B) : Instabilité du schéma explicite :  $b = 1.030 > \frac{1}{2}$

```
sigma=D*dt/(dx*dx);
a=diag(1+2*sigma*ones(m+1,1))+diag(-sigma*ones(m,1),1);
a=a+diag(-sigma*ones(m,1),-1); %definir la matrice a
w0j=0; w1j=0; % les conditions aux limites
sides=zeros(m,1); sides(1)=w0j; sides(m)=w1j;
```

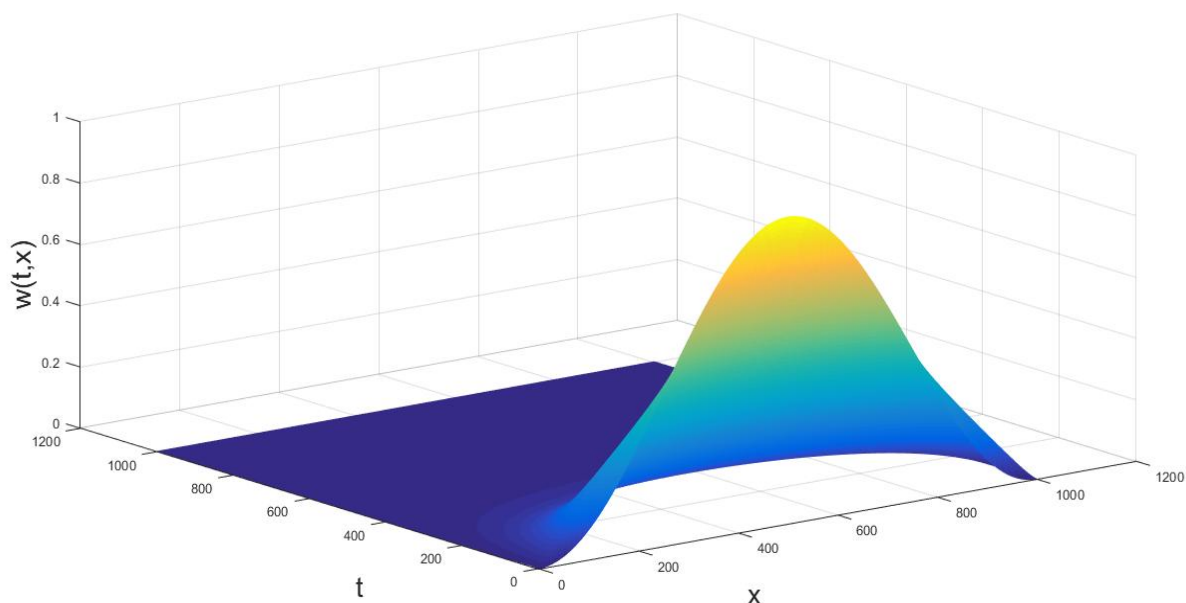


FIGURE 3.3 – La solution approchée par l'utilisation de la méthode implicite pour  $b = 1.03$ . Dans ce cas le schéma explicite est instable mais le schéma implicite est inconditionnellement instable

```

w=zeros(m,n);
t=zeros(n+1,1);x=zeros(m+1,1);
for i = 1:m+1
    x(i)=(i-1)*dx;
w(i,1) =sin(pi*x(i))^2;
end
for j=1:n
    t(j)=(j-1)*dt;
end
for j=1:n
w(:,j+1)=a\(w(:,j)+sigma*sides(j));
end
mesh(w');
xlabel('x','fontsize',20)%l'espace
ylabel('t','fontsize',20)
zlabel('w(t,x)','fontsize',20)
    
```

### 3.8 Problème hyperbolique

L'exemple le plus simple d'une équation hyperbolique est l'équation de transport. Nous présentons la méthode des différences finies pour résoudre numériquement cette équation linéaire. Nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x} = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ w(x, 0) = w_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.23)$$

### 3.8. PROBLÈME HYPERBOLIQUE

---

La solution exacte par la méthode des caractéristiques du problème (3.23) est donnée par

$$w(x, t) = w_0(x - ct). \quad (3.24)$$

Nous appliquons l'approximation par différences finies à l'équation (3.23), on discrétise  $t$  et  $x$ . On note par  $(x_i = i\vartheta, t_j = j\omega)$ .

Le maillage en  $t$  et  $x$ , avec  $\vartheta$  et  $\omega$  sont les pas de  $x$  et  $t$ , respectivement. On va suivre les mêmes démarches que celles du problème parabolique, nous allons représenter l'approximation de la solution  $w(x_i, t_j)$  par  $w_i^j$ .

Le schéma numérique associé à (3.23) est

$$\frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\omega} + c \frac{w_i^j - w_{i-1}^j}{\vartheta} = 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M, \quad (3.25)$$

avec la condition initiale :

$$w_i^0 = w_0(x_i).$$

Il existe d'autres types d'approximations :

Une approximation à droite :

$$\frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\omega} + c \frac{w_{i+1}^j - w_i^j}{\vartheta} = 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M.$$

On peut aussi approcher  $\frac{\partial w}{\partial x}$  par l'approximation centrée, on trouve

$$\frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\omega} + c \frac{w_{i+1}^j - w_{i-1}^j}{2\vartheta} = 0, \quad \text{pour } i \leq N, j \geq 0.$$

**Consistance du schéma** Dans cette section, nous nous concentrons sur le schéma (3.25). Nous avons le théorème suivant.

**Théorème 43.** *Le schéma numérique (3.25) est consistant d'ordre 1 en temps et d'ordre 1 en espace. On définit l'erreur de consistance  $R_i^j$  par*

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\omega} + c \frac{v_i^j - v_{i-1}^j}{\vartheta} = R_i^j. \quad (3.26)$$

De plus,

$$|R_i^j| \leq C(\omega + \vartheta), \quad (t, x) \in [0, T] \times [0, L]. \quad (3.27)$$

où  $T$  est la valeur maximal de temps, et  $L$  est la valeur maximal de l'espace.

*Démonstration.* On pose  $v_i^j = w(x_i, t_j)$ , par le développement de Taylor, on trouve

$$v_{i+1}^j = v_i^j + \vartheta \frac{\partial w}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{\vartheta^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\xi_1, t_1), \quad \xi_1, t_1 \in [0, L] \times [0, T],$$

et

$$v_i^{j+1} = v_i^j + \omega \frac{\partial w}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\xi_2, t_2), \quad \xi_1, t_1 \in [0, L] \times [0, T].$$

Donc, par un calcul direct, nous obtenons

$$c \frac{v_i^j - v_{i-1}^j}{\vartheta} + \frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\omega} - \frac{\partial w}{\partial t}(x_i, t_j) + c \frac{\partial w}{\partial x}(x_i, t_j) = \frac{\omega}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\xi_2, t_2) + \frac{\vartheta}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\xi_1, t_1),$$

or  $\frac{\partial w}{\partial t}(x_i, t_j) + c \frac{\partial w}{\partial x}(x_i, t_j) = 0$ , nous arrivons à

$$c \frac{v_i^j - v_{i-1}^j}{\vartheta} + \frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\omega} = \frac{\omega}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\xi_2, t_2) + \frac{\vartheta}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\xi_1, t_1).$$

Ce qui conduit à l'estimation :

$$|R_i^j| \leq C(\omega + \vartheta),$$

où

$$C = \frac{1}{2} \max \left( \max_{[0, L] \times [0, T]} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right|, \max_{[0, L] \times [0, T]} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right| \right).$$

□

### Stabilité du schéma

Nous fournissons le théorème suivant.

**Théorème 44.** *Si la condition*

$$\vartheta \leq c\omega, \tag{3.28}$$

*est vérifiée, alors le schéma numérique (3.25) est  $L^\infty$  stable c'est-à-dire :*

$$\max_{i \leq N} |w_i^j| \leq \|w^0\|_\infty.$$

*Démonstration.* On pose  $\lambda = \frac{c\omega}{\vartheta}$ , le schéma (3.25) s'écrit :

$$w_i^{j+1} = w_i^j (1 - \lambda) + \lambda w_{i-1}^j.$$

Sous l'hypothèse (3.28), les coefficients  $\lambda$  et  $1 - \lambda$  sont strictement positifs ou nuls et donc

$w_i^{j+1}$  représente une combinaison convexe de  $w_i^j$  et  $w_{i-1}^j$ . Alors, on a :

$$w_i^{j+1} \leq M^j (1 - \lambda) + \lambda M^j, \quad (3.29)$$

où  $M^j = \max_{i \leq N} |w_i^j|$ .

on en déduit que

$$M^{j+1} \leq M^j,$$

en utilisant les mêmes calculs, on obtient

$$m^{j+1} \geq m^j.$$

avec  $m^j = \min_{i \leq N} |w_i^j|$ , Par conséquent,

$$\max_{i=1, \dots, N} w_i^{n+1} \leq \max_{i=1, \dots, N} w_i^0, \quad \min_{i=1, \dots, N} w_i^{n+1} \geq \min_{i=1, \dots, N} w_i^0.$$

□

### Convergence

Nous sommes maintenant prêts à donner le résultat de convergence du schéma (3.25).

**Théorème 45.** *On suppose que  $w_0 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $w(x_i, t_j)$  la solution exacte du problème de transport aux points  $(x_i, t_j)$ . Soit  $w_i^j$  la solution approchée par le schéma numérique (3.25) avec  $w_i^0 = w_0(x_i)$  pour tout  $i \in \{0, \dots, N\}$ , on suppose aussi que la condition (3.28) est vérifiée. Donc, il existe  $C_T > 0$  (ne dépend que de  $T$  et  $w_0$ ) telle que :*

$$\sup_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 0 \leq j \leq M}} |w_i^j - w(x_i, t_j)| \leq C_T(\omega + \vartheta).$$

*Démonstration.* Nous considérons le schéma numérique (3.25). L'erreur de consistance vérifie :

$$\frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\omega} + c \frac{w_i^j - w_{i-1}^j}{\vartheta} = R_i^j, \quad (3.30)$$

et

$$|R_i^j| \leq C(\omega + \vartheta). \quad (3.31)$$

Le schéma numérique s'écrit

$$\frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\omega} + c \frac{w_i^j - w_{i-1}^j}{\vartheta} = 0, \quad \text{pour } i \in \{1 < i < N\}, j \geq 0. \quad (3.32)$$

En soustrayant (3.30) et (3.32) et en posant  $e_i^j = w_i^j - w(x_i, t_j)$ , on obtient

$$\frac{e_i^{j+1} - e_i^j}{\omega} + c \frac{e_i^j - e_{i-1}^j}{\vartheta} = -R_i^j,$$

donc,

$$e_i^{j+1} = (1 - \lambda)e_i^j + \lambda e_{i-1}^j - \omega R_i^j.$$

Sous l'hypothèse du (3.28), on a  $(1 - \lambda) \geq 0$ , nous posons

$$E^j = \sup_{i=1, \dots, N} |e_i^j|.$$

Comme  $0 \leq \lambda \leq 1$ , nous utilisons l'inégalité (3.31), alors

$$|e_i^{j+1}| \leq E^j + \omega C(\omega + \vartheta).$$

Ainsi,

$$E^{j+1} \leq E^j + \omega C(\omega + \vartheta).$$

Par récurrence pour tout  $j$ , on obtient

$$E^j \leq E^0 + j\omega C(\omega + \vartheta).$$

Pour  $E^0 = 0$ , on trouve

$$E^j \leq j\omega C(\omega + \vartheta).$$

□

**Remarque 46.** Pour l'équation de transport le choix de l'approximation  $\frac{\partial w}{\partial x}$  dépend de la constante  $c \in \mathbb{R}$ . En effet, si  $c > 0$  nous prenons l'approximation à gauche pour  $\frac{\partial w}{\partial x}$  :

$$\frac{\partial w}{\partial x} \approx \frac{w_i^n - w_{i-1}^n}{\vartheta},$$

sinon si  $c < 0$ , nous prenons l'approximation à droite pour  $\frac{\partial w}{\partial x}$ , c'est à dire,

$$\frac{\partial w}{\partial x} \approx \frac{w_{i+1}^n - w_i^n}{\vartheta}.$$

### 3.8.1 Programme Matlab : Problème de transport

On cherche une approximation numérique de la fonction  $w$  pour  $t \in [0, T]$ ,  $x \in [0, L]$ , solution du problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} w + c \frac{\partial}{\partial x} w = 0, \\ w(0, x) = w_0(x), \\ w(t, 0) = w(t, L) = 0, \end{cases} \quad (3.33)$$

avec une vitesse de transport  $c$  constante positive et une fonction  $w_0$  donnée,  $x$  est la variable de l'espace ( $x \in [0, L]$ ),  $t$  est la variable de temps ( $t \in [0, T]$ ),  $T$  durée temporelle maximale de l'étude. Comme remarque, on peut dire qu'il faut limiter le temps de  $T$  car un programme ne peut pas atteindre l'infini, ou il ne peut pas faire une infinité d'itérations. On introduit les notations suivantes :

1. le pas du temps  $\omega$  et les temps discrets  $t_j = j\omega$ ,  $j = 0, 1, \dots, M$ ,
2. le pas de l'espace  $\vartheta$  et les points discrets  $x_i = i\vartheta$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ ,
3.  $u_i^j$  l'approximation de  $u$  en  $(x_i, t_j)$ .

On pourra, par exemple, utiliser la condition initiale suivante

$$w_0(x) = 1, \quad \text{si } x \leq 0.5,$$

et aussi,

$$w_0(x) = 0, \quad \text{si } x > 0.5.$$

Le schéma numérique associé est :

$$w_i^{j+1} = w_i^j - c \frac{\omega}{\vartheta} (w_i^j - w_{i-1}^j), \quad j = 0, 1, \dots, M, i = 0, 1, \dots, N. \quad (3.34)$$

Nous obtenons le graphe suivant

Le code de Matlab associé :

```
clear;clc;close all;
% Parametres pour definir l'equation de Transport
Lmax = 20.0;% Longueur maximale
Tmax = 10.0;% Temps maximum
c = 3.0;% Vitesse de Transport
maxt = 800;% Nombre de pas de temps
dt = Tmax/maxt; %n = 500; nint=15; dx = Lmax/n;
b = c*dt/dx
%La condition initiale
for i = 1:n
    if i < nint
        w(i,1)=1.;
    else
        w(i,1)=0.;
    end
end
```

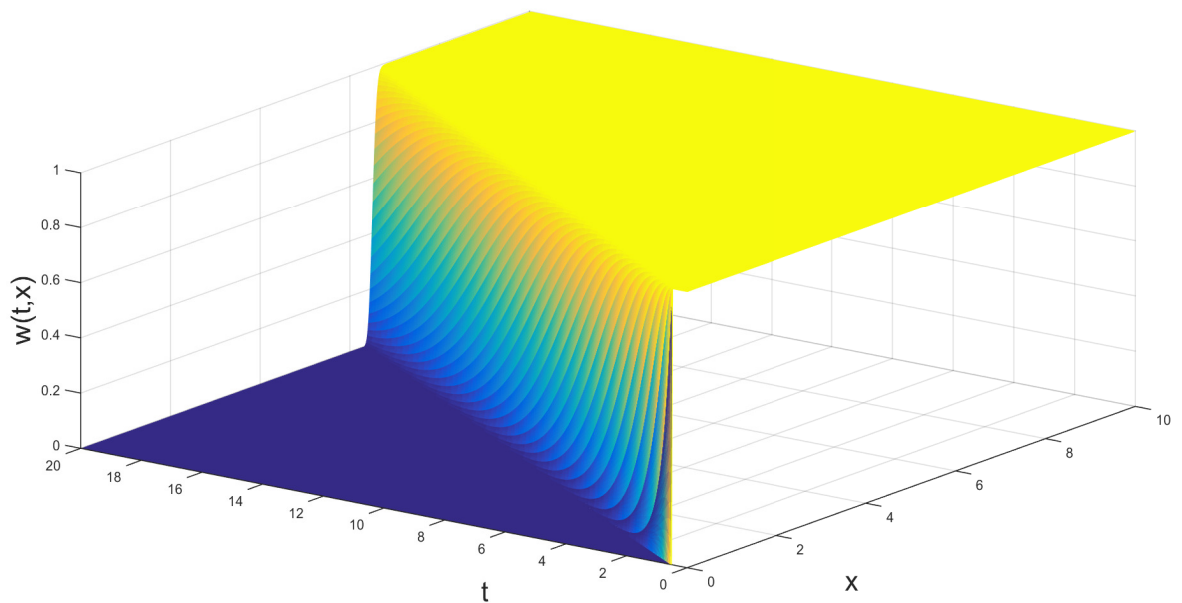


FIGURE 3.4 – La solution approchée par la méthode explicite

```

end
x(i+1) =(i-1)*dx;
end
%Les conditions aux limites
for k=1:maxt
w(1,k) = 1.;
w(n+1,k) = 0.;
end
for k=1:maxt-1
time(k+1) = (k-1)*dt;
end
for k=1:maxt-1 %Boucle du temps
for i=2:n %Boucle de l'espace
w(i,k+1) =w(i,k)-b*(w(i,k)-w(i-1,k));
end
end
%Simulation graphique
subplot(1,2,1)
%plot(x,u(:,1),'- ',x,u(:,10),'- ',x,u(:,50),'- ',x,u(:,100),'- ')
subplot(1,2,2)
mesh(time , x ,w)
xlabel('x','fontsize', 20)%l'espace
ylabel('t','fontsize', 20)
zlabel('w(t,x)','fontsize', 20)

```

### 3.9 Problème d'onde

On considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad \text{pour } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}_+^*, \\ w(x, 0) = w_0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = w_1(x), \text{ pour } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.35)$$

Avec  $w_0, w_1$  sont les conditions initiales, et  $\Omega = [0, L]$

Ce problème modélise le mouvement d'une corde vibrante, la fonction  $w$  représente le déplacement vertical d'une corde élastique de longueur  $L$  au point  $x$ . Les fonctions  $w_0$  et  $w_1$  désignent respectivement le déplacement initial et la vitesse initiale de la corde.

#### Solution générale

La solution générale a été présentée par D'Alembert sous la forme :

$$w(x, t) = \frac{w_0(x - ct) + w_0(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} w_1(y) dy,$$

où  $c = 1$ . Notons que si  $w_0 \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}_+)$  et  $w_1 \in \mathbb{C}^{n-1}(\mathbb{R}_+)$  alors dans ce cas  $w \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}_+)$ . Nous observons que la solution explicite ne dépend que de la condition initiale.

#### Schéma numérique

On utilise l'approximation centrée pour la dérivée seconde par rapport à  $t$  et  $x$ . On note la solution approchée par  $w_i^n$ . Nous utilisons le même principe que celui qui a été utilisé dans le problème parabolique pour approcher la dérivée seconde. Nous obtenue le schéma numérique suivant :

$$\frac{w_i^{n+1} - 2w_i^n + w_i^{n-1}}{\omega^2} - \frac{w_{i+1}^n - 2w_i^n + w_{i-1}^n}{\vartheta^2} = 0,$$

avec les conditions aux limites suivantes  $w_0^n = w_{N+1}^n = 0$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et les conditions initiales sont discrétisées comme suit :

$$w_i^0 = w_0(x_i) \quad \frac{w_i^1 - w_i^0}{\omega} = w_1(x_i).$$

**Remarque 47.** Dans le cas où les conditions aux limites sont périodiques, alors :

$$\frac{w_i^1 - w_i^0}{\omega} = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} w_1(x) dx.$$

Pour écrire le schéma numérique sous une forme explicite, nous définissons la matrice

tridiagonale  $M_{\vartheta}^{(d)}$  ( voir (3.8)), alors

$$w^{n+1} = \left(2I - \omega^2 M_{\vartheta}^{(d)}\right) w^n - w^{n-1},$$

avec  $I$  la matrice identité et  $w^n = (w_i^n)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^n$ .

On peut aussi définir le schéma numérique implicite comme suit

$$\frac{w_i^{n+1} - 2w_i^n + w_i^{n-1}}{\omega^2} - \frac{w_{i+1}^{n+1} - 2w_i^{n+1} + w_{i-1}^{n+1}}{\vartheta^2} = 0, \quad (3.36)$$

avec la même discrétisation des conditions aux limites et initiales.

Cependant, on peut appliquer la méthode de Crank-Nicolson pour  $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$  :

$$\begin{aligned} & \frac{w_i^{n+1} - 2w_i^n + w_i^{n-1}}{\omega^2} - \theta \frac{w_{i+1}^{n+1} - 2w_i^{n+1} + w_{i-1}^{n+1}}{\vartheta^2} \\ & - (1 - 2\theta) \frac{w_{i+1}^n - 2w_i^n + w_{i-1}^n}{\vartheta^2} - \theta \frac{w_{i+1}^{n-1} - 2w_i^{n-1} + w_{i-1}^{n-1}}{\vartheta^2} = 0. \end{aligned}$$

### Stabilité de Von Neumann

La stabilité par rapport à la norme  $\|\cdot\|_2$  du schéma explicite (où l'un des schémas précédents) pourrait être analysée en utilisant la forme matricielle. Cependant, Cette analyse est basée sur la décomposition de l'erreur numérique en série de Fourier.

On peut utiliser l'approximation par la méthode d'analyse de Fourier lorsque les conditions aux frontières sont périodiques.

On écrit le mode de Fourier sous la forme suivante

$$w_j^n = \phi(p)^n \exp(2i\pi p x_j), \quad x_j = j\vartheta, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad (3.37)$$

avec  $\phi(p)$  est appelé le facteur d'amplification, on peut le trouver par l'injection de la solution (3.37) dans la définition du schéma numérique.

Pour tout  $\vartheta$ , le schéma numérique est stable seulement si le facteur d'amplification vérifie

$$|\phi(p)| \leq 1,$$

pour tout  $p \in \mathbb{Z}$ .

Nous avons la Proposition suivante.

**Proposition 48.** *Le schéma numérique (3.36) est stable au sens de la norme  $L^2$  sous la condition du CFL :  $\frac{\omega}{\vartheta} \leq 1$ .*

*Démonstration.* En appliquant la transformation de Fourier sur le schéma (3.36) par rap-

port à  $x$ , nous avons

$$\frac{\mathcal{F}(w)^{n+1}(p) - 2\mathcal{F}(w)^n(p) + \mathcal{F}(w)^{n-1}(p)}{\omega^2} - \frac{\exp(i\vartheta p) - 2 + \exp(-i\vartheta p)}{\vartheta^2} \hat{w}^n(p) = 0, \quad (3.38)$$

ce qui conduit à

$$\frac{\mathcal{F}(w)^{n+1}(p) - 2\mathcal{F}(w)^n(p) + \mathcal{F}(w)^{n-1}(p)}{\omega^2} + \frac{4}{\vartheta^2} \sin^2\left(\frac{\vartheta p}{2}\right) \mathcal{F}(w)^n(p) = 0. \quad (3.39)$$

On pose le vecteur  $u^n(p) = \begin{pmatrix} w^{n+1}(p) \\ w^n(p) \end{pmatrix}$ , alors

$$\mathcal{F}(w)^n(p) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}(u)^{n+1}(p) \\ \hat{w}^n(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - a^2(p) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{F}(u)^{n-1}(p) = F(p) \mathcal{F}(u)^{n-1}(p),$$

où  $a(p) = 2\frac{\omega}{\vartheta} \sin\left(\frac{\vartheta p}{2}\right)$ .

On calcule les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de la matrice  $F(p)$  qui sont les racines du polynôme :

$$\lambda^2 - \lambda(2 - a^2(p)) + 1.$$

On calcule le discriminant  $\Delta(p) = a^2(p)(a^2(p) - 4)$ . Une condition nécessaire pour montrer la stabilité de Von Neumann est que  $\phi(F(p)) < 1$ . Soit  $w_p(x, t) = \sin(px) \exp(\pm ip\pi t)$ , la solution particulière de (3.35), nous remarquons que

$$|w_p(x, t)| \leq 1.$$

En utilisant la décomposition de l'erreur en série de Fourier on trouve que la condition  $\phi(F(p)) \leq 1$  est équivalente à  $\Delta(p) \leq 1$  quel que soit  $p \in \mathbb{Z}$ . Par conséquent,  $\Delta(p) \leq 1$  si et seulement si  $a(p) \leq 2$  et cette condition est vérifiée pour tout  $p \in \mathbb{Z}$  si

$$\frac{\omega}{\vartheta} \leq 1.$$

□

Un résultat similaire pour le schéma de Crank-Nicolson.

**Lemme 49.** 1. Si  $\frac{1}{4} \leq \theta \leq \frac{1}{2}$  alors le schéma numérique (3.9) est inconditionnellement stable au sens de la norme  $L^2$ .

2. Si  $0 \leq \theta < \frac{1}{4}$ , le schéma (3.9) est stable au sens de la norme  $L^2$  sous la condition

de CFL (Courant Friedrichs Lewy) :

$$\frac{\omega}{\vartheta} < \sqrt{\frac{1}{1-4\theta}}.$$

### 3.10 Exercices

**Exercice 01 :** On s'intéresse au problème elliptique unidimensionnel suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + 2u(x) = x, & x \in ]0, 1[, \\ u(0) = 1, \\ u'(1) + u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.40)$$

Écrire une discrétisation de (3.40) par différences finis pour un maillage uniforme. Écrire le système linéaire obtenu.

**Exercice 02 :** On considère le problème :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in ]0, 1[, \\ u(0) - u'(0) = a, \\ u'(1) = b, \end{cases} \quad (3.41)$$

avec  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Écrire le schéma de différences finis avec un pas constant et écrire le système linéaire obtenu.

**Exercice 03 :** On cherche à trouver un schéma numérique qui converge du problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w(t, x) = 0, & (x, t) \in ]0; 1[ \times \mathbb{R}^+, \\ w(x, 0) = w_0(x), \\ w(0, t) = w(1, t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (3.42)$$

Soit  $\vartheta = \frac{1}{N}$ , avec  $\omega > 0$ , on discrétise  $(x, t)$  où  $x_i = i\omega$ ,  $i = 0, \dots, N$  et  $t_n = n\vartheta$  avec  $n = 1, \dots, M$ . On pose  $\tilde{w}_i^n = u(x_i, t_n)$  est la solution exacte en  $(x_i, t_n)$  et  $w_i^n$  la solution approchée de  $\tilde{w}_i^n$ .

1. Trouver le schéma numérique pour ce problème (3.42).
2. On note  $R_i^n$  l'erreur de consistance du schéma numérique, montrer que  $R_i^n$  est majorée par  $C(\omega + \vartheta^2)$ .
3. Écrire le schéma sous une forme matricielle.

4. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $\|u\|_\infty = \sup_{i=1, \dots, N} |w_i^n|$ , montrer qu'il existe  $C$  tel que :

$$\|w\|_\infty \leq C(T, \alpha) \|w_0\|_\infty,$$

pour le schéma numérique.

5. Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $i \in \{1, \dots, N\}$ , on pose  $e_i^n = \tilde{w}_i^n - w_i^n$ , donner des majorations de  $\|e^n\|_\infty$  en fonction de  $T, C$ .

**Exercice 04 :** Soient  $\alpha > 0, \mu > 0, T > 0$ , et  $w_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . On s'intéresse au problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) + \alpha \frac{\partial w}{\partial x}(t, x) - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x)(x, t) = 0, & x \in ]0, 1[, t \in ]0, T[, \\ w(0, t) = w(1, t) = 0, & t \in ]0, T[, \\ w(x, 0) = w_0(x), & x \in ]0, 1[. \end{cases} \quad (3.43)$$

On suppose qu'il existe  $w \in \mathbb{C}^4([0, 1] \times [0, T])$  solution classique de (3.43). On discrétise le problème précédent, prenons  $\vartheta = \frac{1}{N+1}$  et  $k = \frac{T}{M}$  avec  $x = i\vartheta$  et  $t = nk$ .

1. Trouver le schéma numérique explicite associé au problème (3.43) (l'approximation à droite pour "t" et à gauche pour "x").
2. On pose  $\tilde{w}_i^n = w(i\vartheta, nk)$  pour  $i \in \{0, \dots, N+1\}$  et  $n \in \{0, \dots, M\}$ , montrer que l'erreur de consistance  $R_i^n$  du schéma est majorée par  $C_1(k+h)$ .
3. Étudier la stabilité du schéma.
4. Sous la condition de CFL, on pose  $e_i^n = \bar{w}_i^n - w_i^n$ , montrer que  $|e_i^{n+1}| \leq \|e^0\|_\infty + C_1 T(k+h)$ .

**Exercice 05 :** Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \\ w(x, 0) = w_0(x), \\ w(0, t) = w(1, t) = 0, \end{cases} \quad (3.44)$$

avec  $(x, t) \in ]0; 1[, \times ]0; 1[$  et  $w_0, \epsilon$  donnés.

1. Déterminer le schéma numérique explicite du problème (3.44), puis utiliser l'approximation à droite en temps  $t$  et l'approximation centrée en espace  $x$ .
2. Montrer que l'erreur de consistance est majorée par  $C(\omega + \vartheta^2)$ .
3. Trouver la condition du CFL, pour avoir la stabilité du schéma explicite.
4. Étudier la convergence de ce schéma.

**Exercice 06 :** Montrer que le schéma de Crank-Nicholson ( avec  $\theta = \frac{1}{2}$  ) est stable au sens de la norme  $L^\infty$  si  $\nu\omega \leq \vartheta^2$  et la même question pour le schéma de Du Fort-Frankel suivant

$$\frac{w_j^{n+1} - w_j^{n-1}}{2\omega} + \nu \frac{-w_{j-1}^n + w_j^{n+1} + w_j^{n-1} - w_{j+1}^n}{\vartheta^2} = 0,$$

si  $2\nu\omega \leq \vartheta^2$ .

**Exercice 07 :** (Supplémentaire) Nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\frac{d^2w}{dx^2}(x) + g(x)\frac{dw}{dx}(x) = 0, & x \in ]0, 1[, \\ w(0) = \alpha, & w(1) = \beta. \end{cases} \quad (3.45)$$

On suppose que  $g \in C([0, 1], \mathbb{R})$  et  $\alpha, \beta$  sont des constantes réelles.

On suppose aussi qu'il existe une solution unique dans l'espace  $C^2(]0, 1[)$ . On applique la méthode des différences finies pour trouver la solution numérique.

1. Chercher le schéma numérique du problème (3.45).
2. Montrer que le schéma numérique est consistant d'ordre 2.
3. Prouver qu'on peut réécrire ce schéma sous la forme matricielle suivante

$$Aw = b, \quad \text{avec } w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^t, \quad b \in \mathbb{R}^n,$$

où  $A$  est une matrice carrée et  $b$  un vecteur .

4. Montrer que  $A$  est monotone.

**Exercice 08 :** Soit le système suivant

$$\begin{cases} -\frac{d^2w}{dx^2}(t, x)(x) + \frac{1}{1+x}\frac{dw}{dx}(x) = g(x), & x \in ]0, 1[, \\ w(0) = a_0, & w(1) = a_1, \end{cases} \quad (3.46)$$

où  $g$  une fonction de classe  $C^2([0, 1])$ .

On suppose que ce problème admet une solution unique  $w \in C^4([0, 1])$ . On pose  $\vartheta = \frac{1}{N+1}$  où  $N \in \mathbb{N}$  et on note par  $w_i$  la solution numérique au point  $x_i = i\vartheta$ , pour tout  $i \in \{0, \dots, N+1\}$ .

1. Trouver le schéma numérique par la méthode des différences finies (utiliser les approximations centrées).
2. Montrer que le schéma est consistant.
3. Écrire ce schéma sous la forme  $Aw = b$ , trouver  $A, b$ .
4. Montrer que si  $Av \geq 0$  alors  $v \geq 0$ , pour  $v \in \mathbb{R}^n$ .

5. Dédurre que la matrice  $A$  est monotone.

## 3.11 Corrigés des exercices

**Exercice 03** Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w(t, x) = 0, & (x, t) \in ]0, 1[, \times \mathbb{R}^+, \\ w(x, 0) = w_0(x), \\ w(0, t) = w(1, t) = 0, \end{cases} \quad (3.47)$$

où  $\vartheta = \frac{1}{N}$ ,  $\omega > 0$ , on discrétise  $(x, t)$  avec  $x_i = i\vartheta$ ,  $i = 0, \dots, N$  et  $t_n = n\omega$  où  $n = 1, \dots, M$ . On note par  $\tilde{w}_i^n = w(x_i, t_n)$  la solution exacte aux points  $x_i, t_n$  et  $w_i^n$  la solution numérique .

1. Le schéma numérique explicite :

Nous utilisons l'approximation à droite pour la dérivée partielle par rapport à  $t$ ,

$$\frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\omega} - \frac{(w_{i+1}^n + w_{i-1}^n - 2w_i^n)}{\vartheta^2} - w_i^n = 0.$$

Pour le schéma implicite, nous obtenons

$$\frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\omega} - \frac{(w_{i+1}^{n+1} + w_{i-1}^{n+1} - 2w_i^{n+1})}{\vartheta^2} - w_i^{n+1} = 0,$$

avec les conditions communes entre les deux schémas :

$$w_0^{n+1} = w_{N+1}^{n+1} = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad w_i^0 = w_0(x_i), \quad i \in \{0, \dots, N+1\}.$$

2. On pose  $\tilde{w}_n^i$  la solution exacte en  $(x_i, t_n)$ , on définit l'erreur de consistance comme suit :

$$\begin{aligned} R_i^n &= \frac{\tilde{w}_i^{n+1} - \tilde{w}_i^n}{\omega} + \frac{1}{\vartheta^2} (2\tilde{w}_i^{n+1} - \tilde{w}_{i-1}^{n+1} - \tilde{w}_{i+1}^{n+1}) - \tilde{w}_i^{n+1}, \\ &= \tilde{R}_i^n + \hat{R}_i^n, \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{R}_i^n = \frac{\tilde{w}_i^{n+1} - \tilde{w}_i^n}{\omega} - \frac{\partial w}{\partial t}(x_i, t_n),$$

et

$$\hat{R}_i^n = \frac{1}{\vartheta^2} (2\tilde{w}_i^{n+1} - \tilde{w}_{i-1}^{n+1} - \tilde{w}_{i+1}^{n+1}) - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_i, t_n) \right).$$

Par le développement de Taylor, on obtient :

$$\left| \hat{R}_i^n \right| \leq \frac{\vartheta^2}{12} \max_{[0,1]} \left| \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} (\cdot, t_n) \right|,$$

et

$$\left| \tilde{R}_i^n \right| \leq \frac{\omega}{2} \max_{[0,T]} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (x_i, \cdot) \right|.$$

Alors, nous obtenons

$$\left| R_i^n \right| = \left| \tilde{R}_i^n + \hat{R}_i^n \right| \leq \left| \tilde{R}_i^n \right| + \left| \hat{R}_i^n \right| \leq \frac{\omega}{2} \max_{[0,T]} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (x_i, \cdot) \right| + \frac{\vartheta^2}{12} \max_{[0,1]} \left| \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} (\cdot, t_n) \right|,$$

et par conséquent,

$$\left| R_i^n \right| \leq C (\omega + \vartheta^2),$$

où

$$C = \frac{1}{2} \max \left( \left\| \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\|_{L^\infty}; \frac{1}{6} \left\| \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right\|_{L^\infty} \right).$$

3. Écrire le schéma implicite sous une forme matricielle :

On peut réécrire le schéma implicite sous la forme matricielle

$$U^{n+1} = AU^n,$$

où  $U^{n+1} = (U_1^{n+1}, \dots, U_N^{n+1})^t$ ,  $U^n = (U_1^n, \dots, U_N^n)^t$  et

$$A = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda - \omega & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 + 2\lambda - \omega & -\lambda & \ddots & 0 \\ 0 & & & & -\lambda \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 + 2\lambda - \omega \end{pmatrix},$$

avec  $\lambda = \frac{\omega}{\vartheta^2}$ .

4. La stabilité du schéma :

Le schéma s'écrit sous la forme suivante :

$$w_i^n = w_i^{n+1}(1 - \omega) + \lambda (2w_i^{n+1} - w_{i+1}^{n+1} - w_{i-1}^{n+1}).$$

Donc, pour montrer l'inégalité de la stabilité, nous avons besoin de prouver :

$$\begin{cases} \max_{i=1,\dots,N} w_i^{n+1} \leq \max_{i=1,\dots,N} w_i^n, \\ \min_{i=1,\dots,N} w_i^{n+1} \geq \min_{i=1,\dots,N} w_i^n. \end{cases}$$

On pose  $M^n = \max_{i=1,\dots,N} w_i^n$ , nous obtenons

$$M^{n+1}(1 - \omega) \leq M^n.$$

Par récurrence pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons

$$\max_{i=1,\dots,N} w_i^n \leq \frac{1}{(1 - \omega)^n} \max_{i=1,\dots,N} w_i^0.$$

Par le même calcul, nous obtenons que

$$\min_{i=1,\dots,N} w_i^n \geq \frac{1}{(1 - \omega)^n} \min_{i=1,\dots,N} w_i^0.$$

On en déduit que

$$\|w^{(n)}\|_\infty \leq \frac{1}{(1 - \omega)^n} \|w^{(0)}\|_\infty.$$

D'autre part, pour  $\omega \in ]0, \alpha[$ , avec  $\alpha \in ]0, 1[$ , nous avons

$$\frac{1}{(1 - \omega)} \leq 1 + \beta\omega,$$

avec  $\beta = \frac{1}{(1-\alpha)}$ . Puisque  $n\omega \leq T$ , alors ,

$$(1 + \beta\omega)^n \leq (1 + \beta\omega)^{\frac{T}{\omega}}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} (1 + \beta\omega)^{\frac{T}{\omega}} &= \exp\left(\frac{T}{\omega} \ln(1 + \beta\omega)\right) \\ &\leq \exp\left(\frac{T}{\omega} \beta\omega\right) = e^{\beta T}. \end{aligned}$$

Et par la suite, nous avons

$$\|w^n\|_\infty \leq C(T, \alpha) \|w^0\|_\infty, \quad \text{avec } C(T, \alpha) = e^{\beta T}.$$

5. La convergence du schéma : Soit  $\tilde{w}_i^n = w(x_i, t_n)$  la solution exacte aux points

$(x_i, t_n)$ , donc :

$$\frac{\tilde{w}_i^{n+1} - \tilde{w}_i^n}{\omega} - \frac{\tilde{w}_{i+1}^{n+1} + \tilde{w}_{i-1}^{n+1} - 2\tilde{w}_i^{n+1}}{\omega^2} - \tilde{w}_i^{n+1} = R_i^n.$$

On pose  $e_i^n = \tilde{w}_i^n - w_i^n$ , l'erreur de discrétisation en  $(x_i, t_n)$ , nous obtenons

$$e_i^{(n+1)}(1 + 2\lambda - \omega) - \lambda e_{i-1}^{(n+1)} - \lambda e_{i+1}^{(n+1)} = e_i^n + \omega R_i^n.$$

Par le même calcul comme dans la question précédente, on trouve

$$\frac{1}{1 - \omega} \|e^{n+1}\|_\infty \leq \|e^n\|_\infty + \omega C (\omega + \vartheta^2).$$

Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons

$$\|e^n\|_\infty \leq (1 - \omega)^n [T\omega C (\omega + \vartheta^2) + \|e^0\|_\infty].$$

**Exercice 04** Soient  $\alpha, \mu, T > 0$ , et  $w_0 : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ . On s'intéresse au problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) + \alpha \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t)(x, t) = 0, & x \in ]0, 1[, t \in ]0, T[, \\ w(0, t) = w(1, t) = 0, & t \in ]0, T[, \\ w(x, 0) = w_0(x), & x \in ]0, 1[. \end{cases} \quad (3.48)$$

On suppose qu'il existe  $w \in \mathbb{C}^4([0, 1] \times [0, T])$  solution classique de (3.48).

On discrétise le problème précédent, on prend  $\vartheta = \frac{1}{N+1}$  et  $k = \frac{T}{M}$  avec  $x = i\vartheta$  et  $t = nk$ .

1. Le schéma numérique associé au problème (3.48) :

En utilisant l'approximation à droite par rapport à  $t$  et l'approximation à gauche par rapport à  $x$ , nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{1}{k} (w_i^{n+1} - w_i^n) + \frac{\alpha}{\vartheta} (w_i^n - w_{i-1}^n) - \frac{\mu}{\vartheta^2} (w_{i+1}^n - 2w_i^n + w_{i-1}^n) = 0, \\ w_0^n = w_{N+1}^n = 0, & n \in \{1, \dots, M\}, \\ w_i^0 = w_0(i\vartheta), & i \in \{0, \dots, N+1\}. \end{cases}$$

Donc, le schéma associé à ce système est :

$$w_i^{n+1} = c_1 w_i^n + c_2 w_{i+1}^n + c_3 w_{i-1}^n, \text{ avec } c_1 = 1 - \frac{\alpha k}{\vartheta} - \frac{2\mu k}{\vartheta^2}, c_2 = \frac{\mu k}{\vartheta^2} \text{ et } c_3 = \frac{\alpha k}{\vartheta} + \frac{\mu k}{\vartheta^2}.$$

2. La consistance du schéma :

Soit l'erreur de consistance  $R_i^n$  aux points  $(x_i, t_n)$  :

$$R_i^n = \frac{1}{k} (\tilde{w}_i^{n+1} + \tilde{w}_i^n) - \frac{\alpha}{\vartheta} (\tilde{w}_i^n - \tilde{w}_{i-1}^n) - \frac{\mu}{\vartheta^2} (\tilde{w}_{i-1}^n - 2\tilde{w}_i^n + \tilde{w}_{i+1}^n),$$

avec  $\tilde{w}_i^n$  est la solution exacte en  $(x_i, t_n)$ .

Nous utilisons le développement de Taylor, pour  $(\xi_\ell, t_\ell) \in [0, 1] \times [0, T], \ell = 1, \dots, 4$  :

$$\tilde{w}_i^{n+1} = \tilde{w}_i^n + k \frac{\partial w}{\partial t}(i\vartheta, nk) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\xi_1, t_1), \quad \tilde{w}_{i-1}^n = \tilde{w}_i^n - \vartheta \frac{\partial w}{\partial x}(i\vartheta, nk) + \frac{\vartheta^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\xi_2, t_2),$$

et

$$\tilde{w}_{i-1}^n = \tilde{w}_i^n - \vartheta \frac{\partial w}{\partial x}(i\vartheta, nk) + \frac{\vartheta^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(i\vartheta, nk) - \frac{\vartheta^3}{6} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(i\vartheta, nk) - \frac{\vartheta^4}{24} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(\xi_3, t_3),$$

et

$$\tilde{w}_{i+1}^n = \tilde{w}_i^n + \vartheta \frac{\partial w}{\partial x}(i\vartheta, nk) + \frac{\vartheta^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(i\vartheta, nk) + \frac{\vartheta^3}{6} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(i\vartheta, nk) + \frac{\vartheta^4}{24} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(\xi_4, t_4),$$

ce qui conduit à ,

$$R_i^n = \frac{\partial w}{\partial t}(i\vartheta, nk) + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\xi_1, t_1) + \alpha \frac{\partial w}{\partial x}(i\vartheta, nk) + \alpha \frac{\vartheta}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\xi_2, t_2) - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(i\vartheta, nk) - \mu \frac{\vartheta^2}{24} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(\xi_3, t_3) + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(\xi_4, t_4) \right).$$

Comme  $w$  est la solution de l'EDP, et pour  $\vartheta$  assez petit, nous avons

$$|R_i^n| \leq C_1(\vartheta + k).$$

Donc, le schéma numérique est consistant d'ordre 1 en  $t$  et en  $x$ .

4. La stabilité :

Le schéma s'écrit sous la forme suivante :

$$w_i^{n+1} = c_1 w_i^n + c_2 w_{i+1}^n + c_3 w_{i-1}^n, \quad \text{avec } c_1 = 1 - \frac{\alpha k}{\vartheta} - \frac{2\mu k}{\vartheta^2}, c_2 = \frac{\mu k}{\vartheta^2} \text{ et } c_3 = \frac{\alpha k}{\vartheta} + \frac{\mu k}{\vartheta^2}.$$

On suppose que

$$\frac{\alpha k}{\vartheta} + \frac{2\mu k}{\vartheta^2} \leq 1. \quad (3.49)$$

Alors,  $w_i^{n+1}$  est une combinaison convexe de  $w_i^n, w_{i-1}^n$  et  $w_{i+1}^n$  avec  $c_1 + c_2 + c_3 = 1, c_2, c_3 \geq 0$  pour  $c_1 \geq 0$ . On pose  $M^n = \max_{i=1, \dots, N} w_i^n$  et  $m^n = \min_{i=1, \dots, N} w_i^n$ , donc nous obtenons  $w_i^{n+1} \leq M^n, \quad \forall i = 1, \dots, N$  et  $w_i^{n+1} \geq m^n, \quad \forall i = 1, \dots, N$  et donc,

$M^{n+1} \leq M^n$  et  $m^{n+1} \geq m^n$ . On trouve,

$$\|w^{n+1}\|_\infty \leq \|w^n\|_\infty.$$

par récurrence pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons

$$\|w^n\|_\infty \leq \|w^0\|_\infty.$$

Le schéma numérique est stable lorsque la condition (3.49) est vérifiée.

5. La convergence du schéma :

Soit l'erreur de consistance

$$R_i^n = \frac{1}{k} (\tilde{w}_i^{n+1} + \tilde{w}_i^n) - \frac{\alpha}{\vartheta} (\tilde{w}_i^n - \tilde{w}_{i-1}^n) - \frac{\mu}{\vartheta^2} (\tilde{w}_{i-1}^n - 2\tilde{w}_i^n + \tilde{w}_{i+1}^n),$$

et

$$\frac{1}{k} (w_i^{n+1} - w_i^n) + \frac{\alpha}{\vartheta} (w_i^n - w_{i-1}^n) - \frac{\mu}{\vartheta^2} (w_{i+1}^n - 2w_i^n + w_{i-1}^n) = 0.$$

En retranchant les deux quantités et en posant  $e_i^n = \tilde{w}_i^n - w_i^n$ , on obtient :

$$\frac{1}{k} (e_i^{n+1} - e_i^n) + \frac{\alpha}{\vartheta} (e_i^n - e_{i-1}^n) - \frac{\mu}{\vartheta^2} (e_{i-1}^n - 2e_i^n + e_{i+1}^n) = R_i^n.$$

On peut réécrire l'égalité précédente comme suit :

$$e_i^{n+1} = \left(1 - \frac{k\alpha}{\vartheta} - 2\frac{k\mu}{\vartheta^2}\right) e_i^n + e_{i-1}^n \frac{k\mu}{\vartheta^2} + kR_i^n,$$

Sous la condition (3.49), nous obtenons

$$\begin{aligned} |e_i^{n+1}| &\leq \|e^n\|_\infty + C_1(k + \vartheta)k, \\ |e_i^n| &\leq \|e^{n-1}\|_\infty + C_1(k + \vartheta)k, \\ &\vdots \leq \quad \vdots \\ |e_i^1| &\leq \|e^0\|_\infty + C_1(k + \vartheta)k. \end{aligned}$$

Donc, pour  $\|e^0\|_\infty = 0$ , on en déduit que

$$|e_i^n| \leq C_1 T(k + \vartheta).$$

Donc, le schéma numérique est convergent.

**Exercice 05** Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, & (x, t) \in ]0, 1[ \times ]0, 1[, \\ w(x, 0) = w_0(x), & x \in ]0; 1[, \\ w(0, t) = w(1, t) = 0, & ]0; 1[, \end{cases} \quad (3.50)$$

avec  $w_0, \epsilon$  sont des données.

1. Soient  $M \in \mathbb{N}_0$  et  $N \in \mathbb{N}_0$  et soient  $\omega$  et  $\vartheta$  les pas associés à  $t$  et  $x$  respectivement. En appliquant le schéma à droite par rapport au temps, et l'approximation centrée en espace, nous avons :

$$\frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\omega} + \frac{w_{i+1}^n - w_{i-1}^n}{2\vartheta} - \epsilon \frac{w_{i+1}^n - 2w_i^n + w_{i-1}^n}{\vartheta^2} = 0,$$

par un calcul simple,

$$w_i^{n+1} = \omega \left[ \frac{1}{\omega} w_i^n - \frac{1}{2\vartheta} (w_{i+1}^n - w_{i-1}^n) + \frac{\epsilon}{\vartheta^2} (w_{i+1}^n + w_{i-1}^n - 2w_i^n) \right],$$

avec les condition aux bords et la condition initiale données par

$$\begin{cases} w_0^n = w_{N+1}^n = 0, \\ w_i^0 = w_0(i\vartheta). \end{cases}$$

2. La consistance du schéma numérique : La formule de Taylor donne

$$w(x_i + \vartheta, t_n) = w(x_i, t_n) + \vartheta \frac{\partial w}{\partial x}(x_i, t_n) + \frac{\vartheta^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_i, t_n) + \frac{\vartheta^3}{6} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x_i, t_n) + \frac{\vartheta^4}{24} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(\alpha, t_n),$$

$$\alpha \in [x_i, x_i + \vartheta],$$

et

$$w(x_i - \vartheta, t_n) = w(x_i, t_n) - \vartheta \frac{\partial w}{\partial x}(x_i, t_n) + \frac{\vartheta^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_i, t_n) - \frac{\vartheta^3}{6} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x_i, t_n) + \frac{\vartheta^4}{24} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(\beta, t_n),$$

$$\beta \in [x_i - \vartheta, x_i],$$

et

$$w(x_i, t_n + \omega) = w(x_i, t_n) + \omega \frac{\partial w}{\partial t}(x_i, t_n) + \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x_i, \tau), \quad \tau \in [t_n, t_n + \omega].$$

On pose  $\tilde{w}_i^n = w(x_i, t_n)$ , la solution exacte en  $x_i$  et en  $t_n$ , nous avons

$$\frac{\tilde{w}_i^{n+1} - \tilde{w}_i^n}{\omega} = \frac{\partial w}{\partial t}(x_i, t_n) + \frac{\omega}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x_i, \tau),$$

et

$$\frac{\epsilon}{\vartheta^2} (\tilde{w}_{i+1}^n + \tilde{w}_{i-1}^n - 2\tilde{w}_i^n) = \epsilon \frac{\partial w^2}{\partial x^2}(x_i, t_n) + \epsilon \frac{\vartheta^2}{24} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(\alpha, t_n) + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(\beta, t_n) \right),$$

et

$$\frac{1}{2\vartheta} (\tilde{w}_{i+1}^n - \tilde{w}_{i-1}^n) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_i, t_n) + \frac{\vartheta^2}{3} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x_i, t_n) \right).$$

Donc par un calcul direct et puisque  $w(t, x)$  est la solution du problème (3.50), il vient que

$$|R_i^n| = \left| \frac{\tilde{w}_i^{n+1} - \tilde{w}_i^n}{\omega} - \epsilon \frac{1}{\vartheta^2} (\tilde{w}_{i+1}^n + \tilde{w}_{i-1}^n - 2\tilde{w}_i^n) + \frac{(\tilde{w}_{i+1}^n - \tilde{w}_{i-1}^n)}{2\vartheta} \right| \leq C (\omega + \vartheta^2),$$

où

$$C = \frac{1}{2} \max \left( \left\| \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x_i, t_n) \right\|_{L^\infty}, \frac{\epsilon}{12} \left\| \left( \frac{\partial w^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{3} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right) \right\|_{L^\infty} \right).$$

### 3. Stabilité du schéma explicite,

$$\|w^n\|_\infty \leq \|w^0\|_\infty,$$

où  $\|w^n\|_\infty = \max_{i=1, \dots, N} |w_i^n|$ . Premièrement, nous montrons que :  $\|w^{n+1}\|_\infty \leq \|w^n\|_\infty$ .

Alors, il faut prouver les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \max_{i=1, \dots, N} w_i^{n+1} \leq \max_{i=1, \dots, N} w_i^n, \\ \min_{i=1, \dots, N} w_i^{n+1} \geq \min_{i=1, \dots, N} w_i^n. \end{cases}$$

Le schéma numérique associé à ce problème est

$$w_i^{n+1} = w_i^n \left( 1 - \frac{2\epsilon k}{\vartheta^2} \right) + w_{i+1}^n \left( -\frac{\omega}{2\vartheta} + \frac{\omega\epsilon}{\vartheta^2} \right) + w_{i-1}^n \left( \frac{\epsilon\omega}{\vartheta^2} + \frac{\omega}{2\vartheta} \right).$$

On pose  $M^n = \max_{i=1\dots N} w_i^n$ . On suppose que  $1 \geq \frac{2\varepsilon\omega}{\vartheta^2}$  et  $\frac{\omega\varepsilon}{\vartheta^2} - \frac{\omega}{2\vartheta} \geq 0$ , par conséquent

$$\frac{\omega}{\vartheta^2} \leq \frac{1}{2\varepsilon}, \quad 1 \leq \frac{2\varepsilon}{\vartheta}. \quad (3.51)$$

Donc  $w_i^{n+1}$  est une combinaison convexe de  $w_i^n, w_{i+1}^n$  et  $w_{i-1}^n$ . Alors,

$$w_i^{n+1} \leq M^n \left(1 - \frac{2\varepsilon\omega}{\vartheta^2}\right) + M^n \left(-\frac{\omega}{2\vartheta} + \frac{\omega\varepsilon}{\vartheta^2}\right) + M^n \left(\frac{\varepsilon\omega}{\vartheta^2} + \frac{\omega}{2\vartheta}\right), \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Et donc,

$$M^{n+1} \leq M^n.$$

On pose  $m^n = \min_{i=1\dots N} w_i^n$ , par le même calculs, nous obtenons

$$m^{n+1} \geq m^n.$$

Ainsi, nous avons

$$\|w^{n+1}\|_\infty \leq \|w^n\|_\infty.$$

Par récurrence pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous trouvons

$$\|w^n\|_\infty \leq \|w^0\|_\infty.$$

Donc, sous la condition du (CFL) (3.51), le schéma numérique est stable.

4. La convergence du schéma numérique :

On pose  $e_i^n = \tilde{w}_i^n - w_i^n$ , l'erreur de discrétisation avec  $w_i^n$  est la solution approchée et  $\tilde{w}_i^n$  est la solution exacte aux points  $x_i = i\vartheta$  et  $t_n = n\omega$ . L'erreur de consistance  $R_i^n$  vérifie l'égalité suivante :

$$\frac{1}{\omega} (\tilde{w}_i^{n+1} - \tilde{w}_i^n) + \frac{1}{2\vartheta} (\tilde{w}_{i+1}^n - \tilde{w}_{i-1}^n) - \frac{\varepsilon}{\vartheta^2} (-2\tilde{w}_i^n + \tilde{w}_{i+1}^n + \tilde{w}_{i-1}^n) = R_i^n, \quad (3.52)$$

D'autre cote, la solution numérique satisfait :

$$\frac{1}{\omega} (w_i^{n+1} - w_i^n) + \frac{1}{2\vartheta} (w_{i+1}^n - w_{i-1}^n) - \frac{\varepsilon}{\vartheta^2} (-2w_i^n + w_{i+1}^n + w_{i-1}^n) = 0. \quad (3.53)$$

En soustrayant (3.52) et (3.53), nous obtenons

$$e_i^{n+1} = \left(1 - \frac{2\varepsilon\omega}{\vartheta^2}\right) e_i^n + \left(-\frac{\omega}{2\vartheta} + \frac{\omega\varepsilon}{\vartheta^2}\right) e_{i+1}^n + \left(\frac{\varepsilon\omega}{\vartheta^2} + \frac{\vartheta}{2\omega}\right) e_{i-1}^n + \omega R_i^n.$$

Sous la conditions du CFL, nous obtenons

$$\begin{aligned} |e_i^{n+1}| &\leq \|e^n\|_\infty + C(\omega + \vartheta^2)\omega, \\ &\vdots \\ |e_i^n| &\leq \|e^{n-1}\|_\infty + C(\omega + \vartheta^2)\omega, \\ &\vdots \\ |e_i^1| &\leq \|e^0\|_\infty + C(\omega + \vartheta^2)\omega. \end{aligned}$$

Donc, pour  $n = 1, \dots, M$ , nous avons

$$\|e^n\|_\infty \leq \|e^0\|_\infty + MC\omega(\omega + \vartheta^2),$$

pour  $\|e^0\|_\infty = 0$  et lorsque  $\omega, \vartheta \rightarrow 0$  on obtient  $\|e^n\|_\infty \rightarrow 0$ .

**Exercice 06** On suppose que le schéma de Crank-Nickolson vérifie le principe du maximum discret.

On pose pour  $k$  et  $l$  :

$$w_k^{n+1} = M^{n+1} = \max_j w_j^{n+1} \text{ et } w_l^{n+1} = m^{n+1} = \min_j w_j^{n+1}.$$

On note que  $M \geq 0$  et  $m \leq 0$ , on montre que

$$M \leq \max\left(0, \max_j w_j^n\right) \text{ et } \min\left(0, \min_j w_j^n\right) \leq m. \quad (3.54)$$

Nous supposons que  $M \neq 0$ , le maximum de  $w_j^{n+1}$  pour  $j \in \{0, \dots, N+1\}$  est atteint pour  $\theta = \frac{1}{2}$ , nous avons

$$\frac{M - w_k^n}{\omega} + \nu \frac{-w_{k-1}^n + 2w_k^n - w_{k+1}^n}{2\vartheta^2} \leq 0,$$

et donc

$$M \leq \left(1 - \frac{\nu\omega}{\vartheta^2}\right) w_k^n + \frac{\nu\omega}{2\vartheta^2} (w_{k-1}^n + w_{k+1}^n).$$

Si

$$\nu\omega \leq \vartheta^2. \quad (3.55)$$

Alors, le terme de droite est une combinaison convexe de  $w^n$ , et la première inégalité est vérifiée. La deuxième inégalité, on remplace  $w^n$  par  $-w^n$  et  $M$  par  $-m$ . Donc si la condition (3.55) est vérifiée, on obtient que le schéma numérique de Crank-Nicholson est stable au sens de la norme  $L^\infty$ .

Nous considérons le schéma de DuFort-Frankel suivant

$$\left(\frac{1}{2\omega} + \frac{\nu}{\vartheta^2}\right) w_j^{n+1} = \left(\frac{1}{2\omega} - \frac{\nu}{\vartheta^2}\right) w_j^{n-1} + \frac{\nu}{\vartheta^2} (w_{j-1}^n + w_{j+1}^n).$$

Si la condition  $2\nu\omega \leq \vartheta^2$  est vérifiée, alors on trouve  $w_j^{n+1}$  est une combinaison convexe de  $w_j^{n-1}$ ,  $w_{j-1}^n$  et  $w_{j+1}^n$ . Par conséquent, le schéma de DuFort-Frankel est stable par rapport à la norme  $L^\infty$ .

On note que le schéma de Crank-Nicholson est implicite par contre le schéma De DuFort-Frankel est explicite.

**Exercice 07** Soit le problème suivant

$$\begin{cases} -\frac{d^2w}{dx^2}(x, t) + \frac{1}{1+x} \frac{dw}{dx}(x) = g(x), & x \in ]0, 1[, \\ w(0) = \alpha, & w(1) = \beta, \end{cases}$$

où  $g$  une fonction de classe  $C^2([0, 1])$ , et  $\alpha, \beta$  sont des nombres réels.

1. On pose  $\vartheta = \frac{1}{N+1}$  et  $x_i = i\vartheta$  avec  $i = 0, \dots, N + 1$ , en utilisant le développement de Taylor, nous avons

$$\begin{aligned} w(x_{i+1}) &= w(x_i) + \vartheta w'(x_i) + \frac{\vartheta^2}{2} w''(x_i) + \frac{\vartheta^3}{6} w^{(3)}(x_i) + \frac{\vartheta^4}{24} w^{(4)}(\xi), \\ w(x_{i-1}) &= w(x_i) - \vartheta w'(x_i) + \frac{\vartheta^2}{2} w''(x_i) - \frac{\vartheta^3}{6} w^{(3)}(x_i) + \frac{\vartheta^4}{24} w^{(4)}(\eta), \end{aligned}$$

où  $\xi, \eta$  appartiennent aux intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$  et  $[x_{i-1}, x_i]$  respectivement. Alors, par un calcul simple, nous obtenons

$$\begin{cases} w''(x_i) = \frac{-2w(x_i) + w(x_{i-1}) + w(x_{i+1}))}{\vartheta^2} + \frac{\vartheta^2}{24} (w^{(4)}(\xi) + w^{(4)}(\eta)), \\ w'(x_i) = \frac{w(x_{i+1}) - w(x_{i-1}))}{2\vartheta} + \frac{\vartheta^3}{3} w^{(3)}(x_i) + \frac{\vartheta^2}{24} (w^{(4)}(\xi) - w^{(4)}(\eta)). \end{cases} \quad (3.56)$$

Donc, nous avons le schéma numérique suivant

$$\begin{cases} \frac{2w_i - w_{i-1} - w_{i+1}}{\vartheta^2} + \left(\frac{1}{1+i\vartheta}\right) \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2\vartheta} = g_i, & i = 1, \dots, N, \\ w_0 = \alpha, & w_{N+1} = \beta. \end{cases} \quad (3.57)$$

2. Nous notons par  $\hat{R}_i$  l'erreur de consistance pour  $w''(x)$  et  $\tilde{R}_i$  l'erreur de consistance pour  $w'(x)$ , nous avons

$$\hat{R}_i = \frac{w(x_{i+1}) - 2w(x_i) + w(x_{i-1}))}{\vartheta^2} - w''(x_i), \quad \tilde{R}_i = \frac{w(x_{i+1}) - w(x_{i-1}))}{2\vartheta} - w'(x_i).$$

Par les deux équations dans (3.56), nous avons

$$\left\| \hat{R}_i \right\|_{\infty} \leq \frac{\vartheta^2}{12} \sup_{[0,1]} |w^4(x)|,$$

et

$$\left\| \tilde{R}_i \right\|_{\infty} \leq \frac{\vartheta^2}{6} \sup_{[0,1]} |w^3(x)|.$$

On pose  $R_i = \hat{R}_i + \tilde{R}_i$ , en faisant la somme de ces deux équations, nous obtenons

$$\|R_i\|_{\infty} \leq \frac{\vartheta^2}{12} \left( \sup_{[0,1]} |w^4(x)| + 2 \sup_{[0,1]} |w^3(x)| \right). \quad (3.58)$$

On en déduit que le schéma numérique est consistant d'ordre 2.

3. On peut écrire le schéma (3.57) sous une forme matricielle comme suite

$Aw = b$ , avec

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{\vartheta^2} + \frac{1}{2\vartheta(1+\vartheta)} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{\vartheta^2} + \frac{1}{2\vartheta(1+\vartheta)} & \frac{2}{h^2} & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{\vartheta^2} + \frac{1}{2\vartheta(1+N-1)\vartheta} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h(1+N)} & \frac{2}{\vartheta^2} \end{pmatrix},$$

et

$$b_{\vartheta} = \begin{pmatrix} f_{\vartheta} + \alpha \left( \frac{1}{\vartheta^2} + \frac{1}{2\vartheta(1+\vartheta)} \right) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N\vartheta} + \beta \left( \frac{1}{\vartheta^2} - \frac{1}{2\vartheta(1+N\vartheta)} \right) \end{pmatrix} \quad \text{et } w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix}.$$

En utilisant le fait que  $Av \geq 0$ , nous avons

$$\left( \frac{-1}{\vartheta^2} - \frac{1}{2\vartheta(1+i\vartheta)} \right) w_{i-1} + \frac{2}{\vartheta^2} w_i + \left( \frac{-1}{\vartheta^2} + \frac{1}{2\vartheta(1+i\vartheta)} \right) w_{i+1} \geq 0.$$

On pose

$$k = \min \left\{ i \in \{1, \dots, N\}, \quad w_k = \min_{i=1, \dots, N} w_i \right\}.$$

Pour  $k = 1$ , on obtient

$$w_1 \leq w_i, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

D'autre part, par (3.11), on a

$$w_1 \geq \frac{1}{1 + c_1 \vartheta^2} (w_2 - w_1) \geq 0.$$

Ce qui conduit à

$$\min_{i=1, \dots, N} w_i \geq w_1 \geq 0.$$

Par un calcul analogue pour  $k = N$ , on trouve

$$w_n \geq \min_{i=1, \dots, N} w_i \geq 0.$$

Pour  $k = 2, \dots, N - 1$ , nous appliquons (3.11), alors

$$\frac{1}{\vartheta^2} (w_k - w_{k-1}) + \frac{1}{\vartheta^2} (w_k - w_{k+1}) + \frac{1}{2\vartheta(1 + k\vartheta)} (w_{k+1} - w_k + w_k - w_{k-1}) \geq 0,$$

ce qui conduit à

$$\left( \frac{1}{\vartheta^2} - \frac{1}{2\vartheta(1 + k\vartheta)} \right) (w_k - w_{k-1}) + \left( \frac{1}{\vartheta^2} + \frac{1}{2\vartheta(1 + k\vartheta)} \right) (w_k - w_{k+1}) \geq 0. \quad (3.59)$$

Comme  $\vartheta < 1$ , on en déduit que  $\left( \frac{1}{\vartheta^2} - \frac{1}{2\vartheta(1 + k\vartheta)} \right) > 0$ , donc à cause de l'inégalité (3.59) on doit avoir  $w_k = w_{k-1} = w_{k+1}$ . D'après la définition de  $k$  dans (3.56) ce résultat est impossible. Donc, on peut déduire qu'il n'y a pas du minimum pour  $k = 2, \dots, N - 1$ .

Par conséquent, nous avons prouvé que  $\min_{i=1, \dots, N} w_i \geq 0$  i.e.  $w \geq 0$ .

# Chapitre 4

## Méthode des Volumes finies

On ne se donne plus des points mais des volumes de contrôle  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , avec  $K_i = ]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$ , et on note  $\vartheta_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ . Pour chaque volume de contrôle  $K_i$ , on se donne un point  $x_i \in K_i = ]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$ .

### 4.1 Problème elliptique

Dans cette section on considère l'équation

$$-w'' = g,$$

et  $x_i = 0.5 \left( x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}} \right)$ . On intègre l'équation  $-w'' = g$  sur  $K_i$  on trouve :

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} -w''(x) dx = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} g(x) dx,$$

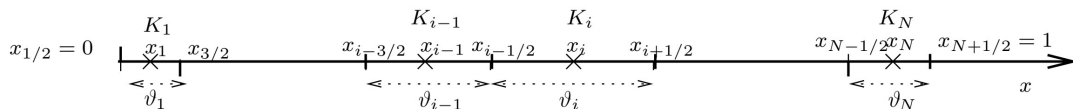


FIGURE 4.1 – Le choix de maillage pour la méthode des volumes finies

et on pose

$$g_i = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} g(x) dx,$$

alors on obtient :

$$-w'(x_{i+\frac{1}{2}}) + w'(x_{i-\frac{1}{2}}) = y_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.1)$$

#### 4.1. PROBLÈME ELLIPTIQUE

---

avec  $y_i = \vartheta_i g_i$ . La quantité  $F_{i+\frac{1}{2}} = -w'(x_{i+\frac{1}{2}})$  est le flux de diffusion en  $x_{i+\frac{1}{2}}$ . Pour ( $i = 1$ ), on obtient plus particulièrement :

$$-w'(x_{\frac{3}{2}}) + w'(0) = \vartheta_1 g_1, \quad (4.2)$$

et pour  $i = N$

$$-w'(1) + w'(x_{N-\frac{1}{2}}) = y_N, \quad (4.3)$$

On cherche donc à approcher les flux  $-w'(x_{i+\frac{1}{2}})$  aux interfaces  $x_{i+\frac{1}{2}}$  des mailles, et les flux  $w'(0)$  et  $w'(1)$  au bord. Notons que l'opérateur à approcher est ici d'ordre 1, alors qu'il était d'ordre 2 en différences finies pour la même équation.

On se donne une inconnue par pas (ou volume de contrôle  $i$ ), qu'on note  $u_i$ , et on espère approcher ainsi la valeur  $w(x_i)$  (ou  $\frac{1}{\vartheta_i} \int_{K_i} w$ ). En supposant  $w$  suffisamment régulière, on peut effectuer deux développements de Taylor à l'ordre 2 de  $w$  entre  $x_{i+1}$  et  $x_{i+\frac{1}{2}}$  et entre  $x_i$  et  $x_{i+\frac{1}{2}}$ , en soustrayant ces développements de Taylor l'un de l'autre, on se rend compte qu'il est "raisonnable" d'approcher  $w'(x_{i+\frac{1}{2}})$  dans l'éq. (4.1) par le quotient différentiel

$$\frac{w(x_{i+1}) - w(x_i)}{\vartheta_{i+\frac{1}{2}}},$$

l'erreur de consistance est

$$R_{i+\frac{1}{2}} = w'(x_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{w(x_{i+1}) - w(x_i)}{\vartheta_{i+\frac{1}{2}}},$$

est d'ordre 1 si  $w \in \mathbb{C}^2([0, 1])$ . Le schéma numérique s'écrit sous la forme :

$$-\frac{w_{i+1} - w_i}{\vartheta_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{w_i - w_{i-1}}{\vartheta_{i-\frac{1}{2}}} = \vartheta_i g_i, \quad i = 2, \dots, N-1, \quad (4.4)$$

Pour la première et la dernière itération on obtient :

$$-\frac{w_2 - w_1}{\vartheta_{\frac{3}{2}}} + \frac{w_1}{\vartheta_{\frac{1}{2}}} = \vartheta_1 g_1, \quad (4.5)$$

$$\frac{w_N}{\vartheta_{N+\frac{1}{2}}} + \frac{w_N - w_{N-1}}{\vartheta_{N-\frac{1}{2}}} = \vartheta_N g_N, \quad (4.6)$$

Si on considère les conditions aux bords de Dirichlet, qui s'écrit sous la forme :

$$w(0) = w(1) = 0,$$

Alors, le schéma volumes finis s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$(A_{\vartheta}w_{\vartheta})_i = \frac{1}{\vartheta_i} \left[ \frac{-1}{\vartheta_{i+\frac{1}{2}}} (w_{i+1} - w_i) + \frac{1}{\vartheta_{i-\frac{1}{2}}} (w_i - w_{i-1}) \right] \quad \text{et} \quad (b_{\vartheta})_i = g_i \quad (4.7)$$

**Remarque 50.** *L'approximation de  $-w''(x)$  par*

$$\frac{1}{\vartheta_i} \left[ \frac{-1}{\vartheta_{i+\frac{1}{2}}} (w(x_{i+1}) - w(x_i)) + \frac{1}{\vartheta_{i-\frac{1}{2}}} (w(x_i) - w(x_{i-1})) \right] \quad (4.8)$$

*n'est pas consistante dans le cas général (voir l'exercice 2)*

**Proposition 51** (Existence de la solution). *Soit  $g \in \mathbb{C}([0, 1])$  et  $w \in \mathbb{C}^2([0, 1])$  solution du problème (4.4). Soit  $(K_i)_{i=1, \dots, N}$  le maillage. Alors il existe une unique solution  $w_{\vartheta} = (w_1, \dots, w_N)$*

**Théorème 52.** *Soit  $g \in \mathbb{C}([0, 1])$  et  $w \in \mathbb{C}^2([0, 1])$  l'unique solution de  $-w''(x) = g(x)$  avec les condition au bord de Dirichlet. Soit  $w$  l'unique solution du schéma "Volumes Finis" (4.4). On note l'erreur  $e_i = w(x_i) - w_i$  pour  $i = 1, \dots, N$  avec  $e = (e_0, e_1, \dots, e_N, e_{N+1})$  où  $e_0 = e_{N+1} = 0$ . Alors, il existe une constante  $C \geq 0$  dépendant de  $w$  mais indépendant de  $\vartheta = \max_{i=1, 2, \dots, N} (\vartheta_{i+\frac{1}{2}})$ , telle que*

$$\|e\|_{\infty} := \max_{1 \leq i \leq N} |e_i| \leq C\vartheta,$$

$$\|e\|_{1, \vartheta} := \left( \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{\vartheta_{i+\frac{1}{2}}} \right) \leq C\vartheta.$$

## 4.2 Problème parabolique

On considère l'équation en  $w = w(x, t)$  pour  $(x, t) \in (0, 1) \times (0, T)$  telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = g(x, t) & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ w(0, t) = w(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ w(x, 0) = w_0(x) & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (4.9)$$

avec  $\gamma > 0$  une constante donnée. On suppose que le problème (4.9) admet une solution unique  $w \in C^2((0, 1) \times (0, T)) \cap C^0([0, 1] \times (0, T))$ . On notera qu'on a l'estimation suivante (avec  $w_0 \in H_0^1(0, 1)$  et  $g \in L^2((0, 1) \times (0, T))$ ) :

$$\|w(t)\|_{H^1(0,1)} \leq C (\|w_0\|_{H^1(0,1)} + \|g\|_{L^2((0,1) \times (0,T))}), \quad \forall t \in (0, T),$$

On discrétise l'intervalle  $[0, 1]$  par un maillage  $\mathfrak{T}$  défini par les volumes de contrôle  $k_i = ]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$  de centres  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . On note  $\vartheta_i = |k_i|$  et  $w_i(t) = \frac{1}{\vartheta_i} \int_{k_i} w(x, t) dx$ ,  $t \in [0, T]$ . En intégrant l'équation différentielle de (4.9) sur  $K_i$ , on trouve :

$$\frac{d}{dt} \int_{K_i} w(x, t) - \gamma \left( \frac{\partial w}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}}, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(x_{i-\frac{1}{2}}, t) \right) = \vartheta_i g_i, \quad (4.10)$$

où  $g_i(t) = \frac{1}{\vartheta_i} \int_{K_i} g(x, t) dx$ . On trouve ainsi,  $\forall i = 1, \dots, N$  et  $t \in [0, T]$ ,

$$\frac{d}{dt} w_i(t) + \frac{G_{i+\frac{1}{2}} - G_{i-\frac{1}{2}}}{\vartheta_i} = g_i(t), \quad (4.11)$$

où  $G_{i+\frac{1}{2}}(t) = -\gamma \frac{\partial w}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)$  le flux exact de  $w$  en  $x_{i+\frac{1}{2}}$  à l'instant  $t$ .

Maintenant, on discrétise en  $x$  et en  $t$  l'équation (4.11). Soit  $\omega > 0$  le pas de discrétisation en  $t$  et on introduit les instants  $t_n = n\omega$  pour  $n = 0, \dots, M$  avec  $T = M\omega$ . On considère l'approximation  $w_i^n = \frac{1}{\vartheta_i} \int_{K_i} w(x, t) dx$  et le flux numérique  $G_{i+\frac{1}{2}}^n \approx -\gamma \frac{\partial w}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n)$  donné par

$$G_{i+\frac{1}{2}}^n = -\gamma \frac{w_{i+1}^n - w_i^n}{\vartheta_{i+\frac{1}{2}}}. \quad (4.12)$$

Le schéma d'Euler explicite s'écrit en approchant la dérivée en temps

$$\frac{\partial w_i}{\partial t}(t_n) \approx \frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\omega},$$

et en écrivant l'équation (4.10) au temps  $t^n$ . On obtient, pour  $i = 1, \dots, N$ ,  $n = 0, \dots, M$ ,

$$\frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\omega} + \frac{G_{i+\frac{1}{2}}^n - G_{i-\frac{1}{2}}^n}{\vartheta_i} = g_i, \quad (4.13)$$

où  $g_i^n = g_i(t_n) = \frac{1}{\vartheta_i} \int_{K_i} g(x, t_n) dx$  alors (4.13) s'écrit sous la forme :

$$w_i^{n+1} = w_i^n + \omega \left( -\frac{G_{i+\frac{1}{2}}^n - G_{i-\frac{1}{2}}^n}{\vartheta_i} + g_i \right), \quad (4.14)$$

On note  $\|V\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |v_i|$ , avec  $V = (v_1, \dots, v_N)^T$

**Proposition 53.** Soit  $\lambda = \gamma\omega \max_{1 \leq i \leq N} \frac{1}{\vartheta_i} \left( \frac{1}{\vartheta_{i-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\vartheta_{i+\frac{1}{2}}} \right)$ .

1. **Principe du maximum discret.** *[[1, 4]]* Soit  $g \leq 0$  et  $w_0 \leq 0$ . Si  $\lambda \geq 1$ , alors  $w^n = 0$ ,  $1 \leq n \leq N$ .

2. **Stabilité  $L^\infty$ .** Si  $\lambda \leq 1$  alors

$$\|w^n\|_\infty = \|w^0\|_\infty + T \|g\|_{L^\infty((0,1) \times (0,T))}, \quad n = 1, \dots, M.$$

*Démonstration.* A faire comme exercice. En tant qu'indication de la preuve, vous pouvez voir la méthode utilisée pour prouver la stabilité du schéma de différence finie dans le cas parabolique, où la preuve peut être faite de la même manière.  $\square$

**Proposition 54** ([1, 4]). *Soit  $w_0 \in \mathcal{C}^2([0, 1])$  et  $g \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ . On suppose que (4.9) admet une solution  $w \in \mathcal{C}^2([0, 1] \times [0, T])$ . On note  $(w_i^n)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq n \leq M}}$  la solution du schéma Volumes Finis explicite (4.14) et on pose*

$$e_i^n = w(x_i; t_n) - w_i^n, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 0 \leq n \leq M.$$

*On suppose que  $\lambda = \gamma\omega \max_{1 \leq i \leq N} \frac{1}{\vartheta_i} \left( \frac{1}{\vartheta_{i-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\vartheta_{i+\frac{1}{2}}} \right) \leq 1$ . Alors il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\vartheta$  et  $\omega$  telle que*

$$\|e^n\|_{0, \vartheta} \leq C(\vartheta + \omega),$$

avec  $e^n = (e_1^n, \dots, e_N^n)^T$ ,  $n = 0, \dots, M$ .

*Démonstration.* A faire comme exercice.  $\square$

### 4.3 Problème de transport

On considère le problème de transport linéaire

$$\begin{cases} w_t + w_x = 0, \\ w(x, 0) = w_0(x) \in L^\infty((0, 1)). \end{cases} \quad (4.15)$$

La solution de ce problème s'écrit :

$$w(x, t) = w_0(x - t).$$

On se donne une discrétisation en espace, c'est à dire un ensemble de points  $(x_{i+\frac{1}{2}})_{i \in \mathbb{Z}}$ , tels que  $x_{i+\frac{1}{2}} > x_{i-\frac{1}{2}}$ , et on note  $\vartheta_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ . On approche toujours la dérivée en temps par un schéma d'Euler explicite, on intègre (4.15) sur  $]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$ , on trouve :

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (w_t + w_x) dx = 0.$$

En approchant  $w(x_{i+\frac{1}{2}})$  (resp.  $w(x_{i-\frac{1}{2}})$ ) par  $w_i^n$  (resp.  $w_{i-1}^n$ ) et en approchant  $w_t$  par un

schéma d'Euler explicite, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_i}{\omega}(w_i^{n+1} - w_i^n) + w_i^n - w_{i-1}^n &= 0, \\ w_i^0 &= \frac{1}{\vartheta_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} w_0(x) dx. \end{aligned} \quad (4.16)$$

**Proposition 55.** Soit  $(w_i^n)_{n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{Z}}$  la solution de (4.16). Si  $\omega = \vartheta = \min\{\vartheta_i\}$ , et si  $A \leq w_0(x) \leq B$ , alors  $A \leq w_i^n \leq B$ ,  $\forall i \in \mathbb{Z}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

*Démonstration.* On a

$$w_i^{n+1} = w_i^n(1 - \alpha_i) + \alpha_i w_{i-1}^n,$$

avec  $\alpha_i = \frac{\omega}{\vartheta_i}$ , si  $\omega = \vartheta = \min\{\vartheta_i\}$  alors  $w_i^{n+1}$  est une combinaison convexe de  $w_i^n$  et  $w_{i-1}^n$ , et donc  $w_{i+1}^n \in [w_{i-1}^n, w_i^n]$ .  $\square$

Soit  $T$  un maillage volumes finis de  $\mathbb{R}$  défini par  $\mathfrak{T} = (k_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  avec  $k_i = ]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$ . On appelle solution approchée de (4.16) la fonction  $w(\mathfrak{T}, k) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$w_{\mathfrak{T}, k}(x, t) = w_i^n \text{ si } x \in K_i \text{ et } t \in [n\omega, n\omega + 1[.$$

**Théorème 56** ([4]). Soit  $u_0 \in L_\infty(\mathbb{R})$ , on suppose que  $\omega = \vartheta = \inf(\vartheta_i)$ , alors  $w_{\mathfrak{T}, \omega}$  converge vers  $w$  dans  $L_{loc}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  lorsque  $\omega$  (et  $\vartheta$ ) tend vers 0, c'est à dire qu'on a :

$$\int_C |w_{T, \omega} - w| dx dt \rightarrow 0.$$

pour tout compact  $C$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ , lorsque  $\vartheta$  (et  $\omega$ )  $\rightarrow 0$ .

## 4.4 Exercices

**Exercice 01** : On considère le problème suivant :

$$\begin{aligned} -w'' + \sin(w(x)) &= g(x), \quad x \in (0, 1), \\ w(0) &= a, \quad w(1) = b, \end{aligned}$$

1. Écrire les schémas aux différences finies et volumes finis avec un pas constant pour le problème ci-dessus. Pour le schéma des volumes finis, on approchera  $\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \sin(w(x)) dx$  par  $(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}) \sin(w(x_i))$ .
2. Comparer les schémas obtenus lorsqu'on suppose que  $w$  reste toujours petit et qu'on remplace donc  $\sin w$  par  $w$ .

**Exercice 02** Montrer que la discrétisation de l'opérateur  $-w''$  par le schéma des volumes finis n'est pas toujours consistante au sens des différences finies, i.e. que l'erreur de consistance définie par

$$R_i = \frac{1}{\vartheta_i} \left[ \frac{-1}{\vartheta_{i+\frac{1}{2}}} (w(x_{i+1}) - w(x_i)) + \frac{1}{\vartheta_{i-\frac{1}{2}}} (w(x_i) - w(x_{i-1})) \right] - w''(x_i),$$

ne tend pas toujours vers 0 lorsque  $\vartheta$  tend vers 0 (avec  $\vartheta = \max_{i=1, \dots, N} \vartheta_{i+\frac{1}{2}}$ ).

**Exercice 03** Soit  $T > 0$ . On considère l'équation de transport :

$$\begin{cases} w_t(x, t) + cw_x(x, t) = g, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T), \\ w(x, 0) = w_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ou  $w_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ ,  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  et  $c > 0$ . On se donne un pas de temps  $\omega = T/N$  avec  $N \in \mathbb{N}^*$ , des points de discrétisation en temps  $t_n = n\omega$  ainsi que des points de discrétisation en espace  $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  et  $(x_{i+\frac{1}{2}})_{i \in \mathbb{Z}}$  tels que :

$$\dots < x_{i-\frac{1}{2}} < x_i < x_{i+\frac{1}{2}} < x_{i+1} < \dots$$

On désigne par  $K_i$  la cellule  $k_i = ]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$ , de centre  $x_i$  et on pose  $\vartheta_i = |k_i| = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ ,  $\vartheta_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$ , On suppose de plus qu'il existe  $a > 0$ ,  $\beta > 0$  et  $\vartheta > 0$  tels que

$$a\vartheta \leq \vartheta_i \leq \beta\vartheta,$$

pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ . On s'intéresse aux approximations  $w_i^n \simeq \frac{1}{\vartheta_i} \int_{k_i} w(x, t_n) dx$ . Le schéma volumes finis explicite s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\omega} + c \frac{w_i^n - w_{i-1}^n}{\vartheta_i} &= g_i, \\ w_i^0 &= \frac{1}{\vartheta_i} \int_{k_i} w_0(x) dx. \end{aligned}$$

pour  $i \in \mathbb{Z}$  et  $0 \leq n \leq N - 1$ , avec  $g_i = \frac{1}{\vartheta_i} \int_{K_i} g(x, t^n) dx$

1. Retrouver la formulation "Volumes finis" donnée par le schéma ci-dessus.
2. (Stabilité) On choisit  $g = 0$ . Sous la condition de stabilité  $c\omega \leq a\vartheta$ , montrer que  $\inf(w_0) = w_i^n = \sup(w_0)$ , pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et  $0 \leq n \leq N$ .
3. (Convergence) On suppose que  $c\omega \leq a\vartheta$ 
  - (a) Soit  $e_i^n = w(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n) - w_i^n$ . Montrer que les  $(e_i^n)$  vérifient

$$e_i^{n+1} = \left( 1 - c \frac{\omega}{\vartheta_i} \right) e_i^n + c \frac{\omega}{\vartheta_i} e_{i+1}^n + \omega R,$$

pour  $i \in \mathbb{Z}$  et  $0 \leq n \leq N - 1$  et  $R$  vérifiant

$$|R| \leq C \left( \|\partial_{tt}^2 w\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} + \|\partial_{xt}^2 w\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \right) (\vartheta + \omega),$$

avec  $C > 0$  indépendante de  $\vartheta$  et  $\omega$ .

(b) Montrer que

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} |e_i^{n+1}| \leq \sup_{i \in \mathbb{Z}} |e_i^n| + C\omega(\vartheta + \omega),$$

où  $C > 0$  est indépendante de  $\vartheta$  et  $\omega$ . En déduire que,

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} |w(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n) - w_i^n| \leq C_1(\vartheta + \omega),$$

pour tout  $0 \leq n \leq N$  avec  $C_1 > 0$  une constante indépendante de  $\vartheta$  et  $\omega$ .

(c) En déduire que :

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} |w(x_i, t_n) - w_i^n| \leq C_2(\vartheta + \omega),$$

pour tout  $0 \leq n \leq N$  avec  $C_2 > 0$  une constante indépendante de  $\vartheta$  et  $\omega$ .

## 4.5 Corrigés des exercices

**Exercice 01** Le schéma différences finies pour le problème étudié s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{1}{\vartheta^2}(2w_i - w_{i-1} - w_{i+1}) + \sin(w_i) = g_i, & i = 1, 2, \dots, N, \\ w_0 = a, & w_{N+1} = b. \end{cases}$$

1-Le schéma volumes finis pour la même équation s'écrit :

$$F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} + \vartheta \sin(w_i) = \vartheta g_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

avec

$$F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{w_{i+1} - w_i}{\vartheta}, \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad \text{et} \quad F_{\frac{1}{2}} = -\frac{w_1 - a}{\vartheta_{\frac{1}{2}}}, \quad F_{N+\frac{1}{2}} = -\frac{b - w_N}{\vartheta_{\frac{1}{2}}},$$

En remplaçant les expressions des flux dans l'équation ci-dessus. On trouve :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\vartheta^2}(2w_i - w_{i-1} - w_{i+1}) + \sin w_i &= g_i, & i = 2, \dots, N - 1, \\ \frac{1}{\vartheta^2}(3w_1 - 2w_2 - a) + \sin w_1 &= 2g_1, \\ \frac{1}{\vartheta^2}(3w_N - 2w_{N-1} - b) + \sin w_N &= 2g_N, \end{aligned}$$

2- La différence entre les deux schémas réside uniquement dans la première et la dernière équations, i.e. on résoudre le même système linéaire mais il y un changement dans la première et dernière équation de système linéaire obtenue.

**Exercice 02** Par développement de Taylor, pour  $i = 1, \dots, N$ , il existe  $\zeta \in [x_i, x_{i+1}]$  tel que :

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \vartheta_{i+\frac{1}{2}} u'(x_i) + \frac{1}{2} \vartheta_{i+\frac{1}{2}}^2 u''(x_i) + \frac{1}{6} \vartheta_{i+\frac{1}{2}}^3 u'''(\zeta_i),$$

et alors

$$R_i = \frac{-1}{h_i} \frac{\vartheta_{i+\frac{1}{2}} + \vartheta_{i-\frac{1}{2}}}{2} u''(x_i) + u''(x_i) + \rho_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

avec  $|\rho_i| \leq C\vartheta$ ,  $C$  ne dépendant que de la dérivée troisième de  $w$ . Il est facile de voir que, en général,  $R_i$ , ne tend pas vers 0 lorsque  $\vartheta$  tend vers 0 (sauf dans des cas particuliers). En effet, prenons par exemple  $g = 1$ ,  $\vartheta_i = h$  pour  $i$  pair,  $\vartheta_i = \vartheta/2$  pour  $i$  impair, et  $x_i = (x_{i+\frac{1}{2}} + x_{i-\frac{1}{2}})/2$ , pour  $i = 1, \dots, N$ . On a dans ce cas  $u'' = -1$ ,  $u''' = 0$ , et donc :

$$R_i = \frac{-1}{4} \text{ si } i \text{ est paire, et } R_i = \frac{1}{2} \text{ si } i \text{ est impaire,}$$

On en conclut que  $\sup |R_i|, i = 1, \dots, N$  ne tend pas vers 0 si  $\vartheta$  tend vers 0

**Exercice 03** 1. On intègre le problème sur  $K_i$  on obtient :

$$\frac{d}{dt} w_i(t) + \frac{c}{\vartheta_i} \left[ w(x_{i+\frac{1}{2}}, t) - w(x_{i-\frac{1}{2}}, t) \right] = g_i(t), \quad \forall t > 0, \quad (4.17)$$

avec  $w_i(t) = \frac{1}{\vartheta_i} \int_{k_i} w(x, t) dx$  (volume moyenne de  $w$  sur  $k_i$ ) et  $g_i(t) = \frac{1}{\vartheta_i} \int_{k_i} g(x, t) dx$ .  
On écrit (4.18) en  $t = t_n$  :

$$\frac{d}{dt} w_i(t^n) + \frac{c}{\vartheta_i} \left[ w(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n) - w(x_{i-\frac{1}{2}}, t_n) \right] = g_i(t_n), \quad \forall t > 0, \quad (4.18)$$

**Approximations :**

- $w_i^n \simeq \frac{1}{\vartheta_i} \int_{k_i} w(x, t_n) dx = w_i(t_n)$ .
- $\frac{d}{dt} w_i(t^n) \simeq \frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\omega}$ .
- $cw(x_{i+\frac{1}{2}}, t) \simeq \phi_{i+\frac{1}{2}}^n$ , (flux numérique)

Le schéma volumes finis s'écrit :

$$\frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\omega} + \frac{1}{\vartheta_i} \left[ \phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n \right] = g_i^n = g_i(t_n), \quad \forall t > 0, \quad (4.19)$$

Le choix du flux numérique se fait par décentrement :

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} cw_i^n, & \text{si } c > 0, \\ cw_{i+1}^n, & \text{si } c < 0, \end{cases}$$

que l'on peut encore écrire

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^n = c^+ w_i^n + c^- w_{i+1}^n$$

avec

$$\begin{aligned} c^+ &= \max(c, 0) \quad (\text{partie positive}), \\ c^- &= \min(c, 0) \quad (\text{partie négative}). \end{aligned}$$

Si  $c > 0$ , le schéma volumes finis s'écrit :

$$\frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\omega} + c \frac{w_i^n - w_{i-1}^n}{\vartheta} = g_i^n, \quad (4.20)$$

$\forall i \in \mathbb{Z}, 0 \leq n \leq N - 1$ , et  $w_i^0 = \int_{K_i} w_0(x) dx$ .

2. (Stabilité), On prend  $g = 0$  et  $c\omega \leq a\vartheta$ . Par récurrence sur  $n$ ,  $\mathfrak{P}_n : \inf(w_i) \leq w_i^n \leq \sup(w_0)$ , Pour  $n = 0 : \inf(w_0) \frac{\vartheta_i}{\vartheta_i} \leq w_i^0 = \int_{K_i} w_0(x) dx \leq \sup(w_0) \frac{\vartheta_i}{\vartheta_i}$ . Donc,  $\mathfrak{P}_0$  est vraie

Supposons que  $\mathfrak{P}_n$  est vraie. On a (en utilisant le fait que  $\mathfrak{P}_n$  vrais)

$$\begin{aligned} w_i^{n+1} &\leq \left(1 - c \frac{\omega}{\vartheta_i}\right) \sup(w_0) + c \frac{\omega}{\vartheta_i} \sup(w_0), \\ &= \sup(w_0). \end{aligned}$$

On démontre de même  $w_i^{n+1} \geq \inf(w_0)$ , donc  $\mathfrak{P}_{n+1}$  est vraie.

**Conclusion :**  $\forall n, i \in \mathbb{Z} \inf(w_0) \leq w_i^n \leq \sup(w_0)$ .

3. (a) Soit l'erreur

$$e_i^n = w(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) - w_i^n.$$

On a :

$$\frac{dw}{dt}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) + c \frac{dw}{dx}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) = g(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n). \quad (4.21)$$

L'approximation de  $\frac{dw}{dt}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n)$  par la formule de Taylor est donnée par :

$$w(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{n+1}) = w(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) + \omega \frac{dw}{dt}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) + \frac{\omega^2}{2} \frac{d^2w}{dt^2}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n),$$

avec  $\theta^n \in ]t^n, t^{n+1}[$ , alors :

$$\frac{dw}{dt}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) = \frac{w(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{n+1}) - w(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n)}{\omega} - R_i^n,$$

avec

$$R_i^n = \frac{\omega}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x_{i+\frac{1}{2}}, \theta^n).$$

Donc

$$|R_i^n| \leq \frac{\omega}{2} \left\| \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times ]0, T])}.$$

L'approximation de  $\frac{dw}{dx}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n)$ , on trouve :

$$\frac{dw}{dx}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) = \frac{w(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n) - w(x_{i-\frac{1}{2}}, t_n)}{\vartheta} - S_i^n,$$

avec

$$S_i^n = -\frac{\vartheta}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\eta_i, t_n), \quad \text{avec } \eta_i \in ]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[,$$

Donc,

$$|S_i^n| \leq \frac{\vartheta}{2} \left\| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times ]0, T])}.$$

Une combinaison des deux approximations donne :

$$\frac{w(x_{i+\frac{1}{2}}, t_{n+1}) - w(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n)}{\omega} + c \frac{w(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n) - w(x_{i-\frac{1}{2}}, t_n)}{\vartheta} = g(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n) + (R_i^n + S_i^n). \quad (4.22)$$

En faisant la différence avec le schéma volumes finis on obtient :

$$\frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{\omega} + c \frac{e_i^n - e_{i-1}^n}{\vartheta_i} = g(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n) - g_i^n + (R_i^n + S_i^n).$$

On pose

$$\begin{aligned} T_i^n &= g(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n) - g_i^n + (R_i^n + S_i^n) \\ &= g(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n) - \frac{1}{\vartheta_i} \int_{k_i} g(x, t_n) dx. \end{aligned}$$

Par le développement de Taylor

$$f(x, t_n) = g(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n) + (x - x_{i+\frac{1}{2}}) \frac{\partial g}{\partial x}(\theta_x, t_n) dx,$$

alors

$$g_i^n = \int_{k_i} f(x, t_n) dx = g(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n) + \frac{1}{\vartheta_i} \int_{k_i} (x - x_{i+\frac{1}{2}}) \frac{\partial g}{\partial x}(\theta_x, t_n) dx,$$

donc

$$|T_i^n| \leq \frac{1}{\vartheta_i} \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times ]0, T])} \int_{k_i} (x - x_{i+\frac{1}{2}}) dx,$$

alors

$$|T_i^n| \leq \vartheta_i \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times ]0, T])}.$$

On obtient ainsi

$$e_i^{n+1} = \left(1 - c \frac{\omega}{\vartheta_i}\right) e_i^n + c \frac{\omega}{\vartheta_i} e_{i-1}^n + \omega(R_i^n + S_i^n + T_i^n),$$

(b) Sous l'hypothèse  $c\omega \leq \alpha\vartheta$ , on a

$$1 - c \frac{\omega}{\vartheta_i} > 0, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Donc,  $\forall i \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} |e_i^{n+1}| &\leq \left(1 - c \frac{\omega}{\vartheta_i}\right) \|e^n\|_\infty + c \frac{\omega}{\vartheta_i} \|e^n\|_\infty \\ &\quad + \omega \left( \frac{\omega}{2} \left\| \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times ]0, T])} + \frac{\vartheta}{2} \left\| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times ]0, T])} + \vartheta \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times ]0, T])} \right). \end{aligned}$$

où on a noté

$$\|e^n\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{Z}} |e_i^n|,$$

On obtient ainsi  $\forall i \in \mathbb{Z}$   $|e_i^{n+1}| \leq \|e^n\|_\infty + c\omega(\vartheta + \omega)$  où  $c > 0$  est indépendant de  $\omega$  et  $\vartheta_i$

$$C = \max \left( \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\|_\infty, \frac{\beta}{2} \left\| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\|_\infty, \beta \|g(x)\|_\infty \right).$$

Donc

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} |e_i^{n+1}| \leq \sup_{i \in \mathbb{Z}} |e_i^n| + c\omega(\vartheta + \omega),$$

On déduit que

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} |e_i^{n+1}| \leq \sup_{i \in \mathbb{Z}} |e_i^0| + cn\omega(\vartheta + \omega),$$

avec

$$\begin{aligned} e_i^0 &= w_0(x_{i+\frac{1}{2}}) - u_i^0, \\ &= w_0(x_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{1}{\vartheta_i} \int_{k_i} w_0(x) dx, \\ &= O(\vartheta). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} |e_i^{n+1}| \leq c_1 \omega(\vartheta + \omega),$$

c'est à dire :

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} |w(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n) - w_i^n| \leq c_1 \omega(\vartheta + \omega).$$

(c) On a :

$$|w(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) - w_i^n| = |w(x_i, t_n) - w(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n) + e_i^n|,$$

et

$$|w(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n) - w(x_i, t_n)| \leq \vartheta_i \left\| \frac{\partial w}{\partial x} \right\|_{\infty} \leq \beta \vartheta \left\| \frac{\partial w}{\partial x} \right\|_{\infty},$$

alors

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} |w(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n) - w(x_i, t_n)| \leq c_2(\vartheta + \omega),$$

avec  $c_2$  est indépendant de  $\omega$  et  $\vartheta$ .



# Bibliographie

- [1] Raphaèle Herbin, Cours d'Analyse numérique, Licence de mathématiques, 2013.
- [2] Raphaèle Herbin, Analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Master de mathématiques, 2012
- [3] Mehri Allaoua, Méthode des différences finies pour les équations aux dérivées partielles, Master de mathématiques, 2018.
- [4] J.-F. Scheid, Méthodes numériques avancées pour la résolution des EDP (Volumes Finis), Université de Lorraine, 2017.