

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة حسيبة بن بوعلي- الشلف
Université Hassiba Ben Bouali –Chlef
كلية الهندسة المدنية و المعمارية
Faculté de Génie Civil et d'Architecture
قسم الهندسة المدنية
Département de Génie-civil



Mémoire de Master
Filière : Génie Civil
Spécialité : Structures

Thème

Effet des fondations élastique sur le comportement mécanique
de structure en FGM.

Présenté par :

- KHERRAZ Rekia
- BAHRIA Fatima Zohra

Dirigé par:

Pr. AIT ATMANE Hassen

Promotion : 2023/2024

Dédicaces

Je dédie ce travail :

A mon cher père, grâce à toi papa j'ai appris le sens du travail et de la responsabilité. Je voudrais te remercier pour ton amour, ta générosité et ta compréhension.

A ma chère mère, aucune dédicace ne saurait exprimer mon amour éternel. Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.

A mon cher mari pour son soutien indéfectible et la foi en moi toujours malgré toutes les difficultés Dieu le récompense.

A tous ceux qui ont eu le grand mérite de m'avoir soutenu après Dieu, mes frères : AYOUB et YOUCEF.

A ma chère tante FOUZIA et A mon ami KENZA.

A tous ceux qui m'ont encouragé à faire mon voyage de succès et d'excellence.

BAHRIA FATIMA ZOHRA

Dédicaces

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
{ يَرْفَعُ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ }

Je suis fier et reconnaissant d'être le premier diplômé de ma famille. Je voudrais consacrer cette réalisation pour faire du paradis sous ses pieds de ma chère mère Yamina.

Pour l'homme qui m'a donné la force de continuer et savait que le succès ne vient qu'avec la patience mon cher père Ahmed.

Mes frères et frères, qui se tenaient à côté de moi et m'ont aidé avec tout ce qu'ils avaient (Muhammad. Ali. Abdel -Qader. Boualam. Dauoid).

Et à mon oncle qui m'a soutenu, et la paix pour son âme.

Mes amis et collègues en classe et à tous ceux qui ont contribué directement ou indirectement (Imène, Samia, Khawla, Kenza et Kholoud).

Enfin, je dédie ce travail à tous ce qui souhaitent que leurs connaissances profitent aux autres.

KHERRAZ REKIA

Remerciements

Tous nos remerciements vont en premier lieu à **ALLAH** le tout puissant qui nous a donné la force, la puissance et le courage pour élaborer ce travail dans les meilleures conditions.

Un très grand merci à monsieur **Ait Atmane Hassen**, professeur à l'université Hassiba Ben Bouali de Chlef, ainsi qu'à **M^{lle}. Djilali Djebbour Kenza**, doctorante au Département de Génie Civil, pour leurs soutiens, leurs conseils judicieux et leurs grandes bienveillances durant l'élaboration de ce projet.

J'adresse mes remerciements chaleureusement à tous les enseignants de la faculté de génie civil.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils porteront certainement à ce modeste travail de recherche en acceptant de l'examiner et de l'enrichir par leurs commentaires.

Enfin, nous également à remercier tous ceux ou celle qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

ملخص

تتناول هذه الدراسة تأثير الهياكل المرنة على الخصائص الاهتزازية لعناصر محددة، وخاصة الألواح المصنوعة من مواد عالية الأداء. الهدف الرئيسي هو تقييم تأثير إدخال الهياكل المرنة على تغيرات الطاقة في هذا الهيكل المعقد بالإضافة إلى ذلك قمنا بدراسة تأثير التوزيع المتجانس (FGU) التوزيع غير الموحد (FGA) الفصل على مقياس اهتزاز الصفائح المنفصلة ونظام الانتشار المتساوي طريقة لتوزيع أنظمة المراقبة لمراقبة سلوكها على نطاق الهياكل. من المفترض أن الكتلة تتغير فقط مع قطر الصفائح. إن القواعد المرنة والمعروفة أيضاً بالقواعد المرنة لها وظيفة منع وإعادة توزيع الاهتزازات القادمة من الأعضاء المستعرضة، مما يؤثر على سلوكها العام من حيث الصوت النتيجة والضغط والاستجابة الديناميكية يعتبر أن الإطار مدعوم ببساطة من خلال محيطه ويتم تطوير نماذج الحركة باستخدام نموذج تقليل استهلاك الطاقة. في الختام، تُغني هذه الدراسة الفهم للعلاقات المعقدة بين خصائص المواد، الهندسة و معامل المادة (p) مما يمهد الطريق لامكانيات جديدة في تصميم مواد و هياكل الهيكلية، وظروف الدعم. كما تستكشف تأثير أكثر كفاءة ومرونة في مواجهة معامل المماسية نسبة الطول على السمك (h/a)

1

كلمات مفتاحية: لوح؛ ترددات الاهتزاز؛ صلابة وينكلر؛ معامل باسترناك وكير؛ مواد مركبة وظيفية؛ ألواح مسامية.

Abstract

This study examines the influence of elastic foundations on the vibrational characteristics of specific structures, particularly functionally graded material (FGM) plates. The primary objective is to evaluate how the introduction of elastic foundations alters the vibration modes of these complex structures. Additionally, the analysis of the effect of porosity on the vibrational behavior of porosity-graded plates is studied. Three forms of porosity distribution are used: uniform (FGU), asymmetric (FGA), and symmetric (FGS), to observe their behavior on the foundations. Porosity is assumed to vary only across the thickness of the plates. elastic foundations, acting as flexible supports, absorb and redistribute the vibrations generated by the FGM plates, thus influencing their overall behavior in terms of resonance, damping, and dynamic response. The plate is considered to be simply supported along its perimeter, and the equations of motion are developed using the principle of energy minimization, with solutions derived using the Navier technique. The results of this study provide valuable insights for optimizing structures in terms of vibrational performance across various application fields, such as aerospace, automotive, and other sectors where vibration reduction and fatigue resistance are crucial.

In conclusion, this research enriches the understanding of the complex interactions between material properties, structural geometry, and support conditions. It also explores the effect of the porosity index, the length-to-thickness ratio (h/a), and the material index (p), paving the way for potential innovations in the design of more efficient and resilient materials and structures against vibrations.

Keywords: plate; vibration frequencies; Winkler stiffness; Pasternak and Kerr coefficient; FGM; porous plates.

Résumé

Cette étude examine l'influence des fondations élastiques sur les caractéristiques vibratoires de structures spécifiques, notamment les plaques en matériau fonctionnellement gradué (FGM). L'objectif principal est d'évaluer comment l'introduction de fondations élastiques modifie les modes de vibration de ces structures complexes. De plus, l'analyse de l'effet de la porosité sur le comportement vibratoire des plaques à gradient est étudiée. Trois formes de distribution de la porosité sont utilisées : uniforme (FGU), asymétrique (FGA) et symétrique (FGS), pour observer leur comportement sur les fondations. La porosité est supposée varier uniquement à travers l'épaisseur des plaques. Les fondations élastiques, agissant comme des supports flexibles, absorbent et redistribuent les vibrations générées par les plaques FGM, influençant ainsi leur comportement global en termes de résonance, d'amortissement et de réponse dynamique. La plaque est considérée comme simplement appuyée sur son pourtour, et les équations de mouvement sont développées en utilisant le principe de minimisation des énergies, avec des solutions dérivées par la technique de Navier. Les résultats de cette étude offrent des informations précieuses pour l'optimisation des structures en termes de performances vibratoires dans divers domaines d'application, tels que l'aérospatiale, l'automobile, et autres secteurs où la réduction des vibrations et la résistance à la fatigue sont cruciales.

En conclusion, cette recherche enrichit la compréhension des interactions complexes entre les propriétés des matériaux, la géométrie des structures et les conditions de support. Elle explore également l'effet de l'indice de porosité, du rapport longueur-épaisseur (h/a), et de l'indice matériel (p), ouvrant la voie à des innovations potentielles dans la conception de matériaux et de structures plus efficaces et résilientes aux vibrations.

Mots clés : plaque ; fréquences de vibration ; raideur de Winkler ; Coefficient de Pasternak et Kerr ; FGM ; plaques poreuses.

Table des matières

Dédicaces	iv
Dédicaces	v
Remerciements	vi
ملخص	iv
Abstract	v
Résumé	vi
Table des matières	vii
Liste des figures	ix
Liste des tables	x
Liste des symboles.....	xi

Introduction Générale

Introduction.....	2
-------------------	---

Chapitre I

Bibliographie sur les matériaux FGM et leur model d'étude

I.1. Introduction.....	6
I.2. Concept des matériaux fonctionnellement gradués.....	6
I.3. Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM.....	8
I.4. Histoire des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)	9
I.5. Développements récents et défis des FGM.....	10
I.6. Avantages et inconvénients de la FGM	10
I.7. Propriétés effectives des FGM	12
I.8. Évolution de la recherche scientifique autour des FG-Matériaux.....	13
I.9. Classification selon type de gradient.....	13
I.10. Méthodes d'élaboration des FGM.....	14
I.11. Modèles micromécanique des matériaux de type FGM	20
I.12. L'idéalisation mathématique des matériaux fonctionnellement gradués FGM	24

Chapitre II

Bibliographie sur le support des structures : synthèse sur les travaux antérieurs

II.1. Introduction	30
II.2. Modèles des fondations	31
II.2.1. Modèles de Winkler	31
II.2.2. Modèles de Pasternak	31
II.2.3. Modèles de Kerr	32
II.2.4. Modèles de Hetenyi	33
II.3. Synthèse des travaux antérieurs sur l'effet de fondation	33
II.4. Conclusion	46

Chapitre III

Analyse mathématique des plaques en FGM sur différent types des fondations

III.1. Introduction	49
III.2. Théorie et formulation	49
III.3. Matériau à gradient fonctionnel avec l'effet de porosités	50
III.4. Fondations élastiques	51
III.5. Équations régissant	51
III.6. Équations de mouvement	53
III.7. Solution analytique	57
III.8. Conclusion	58

Chapitre IV

Etude paramétrique de la dynamique des plaques imparfait sur un fondation élastique

IV.1. Introduction	61
IV.2. Résultats numériques et discussion	61
IV.3. Analyse de l'effet de la porosité sur la vibration naturelle des plaques FGM sur une fondation élastique	71
IV.4. Conclusion	82

Conclusion Générale

Conclusion Générales	84
Observations Spécifiques	85
Références Bibliographiques	86

Liste des figures

Figure I. 1 : Variation continue des propriétés et de la microstructure (Ait Taleb 2016).....	7
Figure I. 2 : Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM (Houari, et al. 2011)	8
Figure I. 3 : Applications des FGM dans divers domaines	9
Figure I. 4 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau FGM (Zhang, et al. 2019).....	12
Figure I. 5 : Le nombre de publications annuelles dans le titre de recherche «Fonctionnellement matériaux classés FGM »(Saleh, et al. 2020).....	13
Figure I. 6 : Classification des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) selon a) la composition b) la microstructure ; c) la porosité.(Mahmoud and Elbestawi 2017).....	13
Figure I. 7 : Principe de la méthode coulage en bande (Britannica ; Britannica).....	15
Figure I. 8 : Schéma représentant le principe du frittage flash (SPS) (Mouawad 2013).....	16
Figure I. 9 : Disposition du procédé frittage laser différentiel (Kawasaki and Watanabe 1997)	17
Figure I. 10 : Principe d'infiltration par centrifugation (El-Galy, et al. 2019).....	17
Figure I. 11 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation (Abdizadeh 1997).....	18
Figure I. 12 : a) Le procédé de dépôt chimique en phase vapeur (CVD).....	19
Figure I. 13 : Dépôt en phase vapeur d'un revêtement sur une pièce (Muller, 2013).....	20
Figure II. 1 : Fondation de Winkler (Dutta, et al. 2002).	31
Figure II. 2 : Représentation physique de Fondation de Pasternak (Dutta, et al. 2002).....	32
Figure II. 3 : Fondation de Kerr.....	32
Figure II. 4 : Fondation Hetenyi (Winkler 1867).	33
Figure II. 5 : Géométrie d'une feuille de graphène orthotrope double couche intégrée sous champ thermique (Arani, et al. 2013)	35
Figure II. 6 : une poutre sandwich intelligente avec un noyau ER reposant sur une fondation élastique. ER : électron-rhéologique (Tabassian, et al. 2013).....	35
Figure II. 7 : Poutre FGM en porte-à-faux avec une fissure à bord ouvert reposant sur la fondation et la coupe transversale Winkler-Pasternak (Akbaş and Sciences 2015).....	36
Figure II. 8 : poutre reposant sur la fondation élastique (Ma, et al. 2015).....	37
Figure II. 9 : (a) Coordonnées et géométrie de la poutre sur fondation élastique à deux paramètres de Pasternak, (b) élément de poutre (Avcar 2016).	38
Figure II. 10 : La configuration de plaques FG rectangulaires reposant sur a) la fondation Winkler, b) la fondation Pasternak et c) la fondation Kerr (Shahsavari, et al. 2018).....	39
Figure II. 11 : (a) vue 3D et (b) vue de face de la plaque GPL-SFGP reposant sur la fondation élastique Winkler – Pasternak (Li, et al. 2018).	40
Figure II. 12 : (a) Géométrie de la coque cylindrique orthotrope FGM soumise à une charge linéairement croissante (b) Le système de coordonnées de la coque cylindrique orthotrope FGM coque entourée d'une fondation élastique Winkler-Pasternak (Kang, et al. 2018).....	41
Figure II. 13 : a) Diagramme schématique d'une nano-poutre FG rectangulaire intégrée dans la fondation élastique Winkler-Pasternak. b) Représentation graphique de la section rectangulaire de la nano-poutre FG avec une porosité uniformément répartie (Jena, et al. 2020).....	42
Figure II. 14 : La géométrie de la plaque FGM sur un élastique fondation	43
Figure II. 15 : un faisceau sous l'influence d'une masse concentrée en mouvement sur une fondation viscoélastique linéaire et non linéaire.	44
Figure II. 16 : nano-plaque reposant partiellement sur une fondation élastique discontinue(Le, et al. 2022).	44

Figure II. 17: Configuration générale du faisceau (Kanwal, et al. 2023).....	45
Figure II. 18 : Géométrie et système de coordonnées des plaques carrées FG reposant sur des fondations élastiques : (a) fondation Winkler-Pasternak et (b) fondation Kerr (Mamen, et al. 2024).....	46
Figure IV. 1: Géométrie de la plaque rectangulaire FGM reposant sur (a) une fondation de Winkler, (b) une fondation de Pasternak et (c) une fondation de Kerr.	62
Figure IV. 2: Effet du paramètre h/a avec l'influence des parameters winkler-pasternak.....	68
Figure IV. 3 : Effet du paramètre h/a avec différents indices de fraction volumique (p) sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle de plaques FG reposant sur la fondation élastique.	68
Figure IV. 4: Effet des paramètres ($k_w, k_p, h/a, p$) sur la fréquence fondamentale adimensionnelle des plaques FG reposant sur la fondation élastique.	69
Figure IV. 5 : Effect de parameter h/a avec variation de (k_u, k_s) sur la fréquence fondamentale de plaque FG avec ($k_l = 100$).	69
Figure IV. 6 : le influence de indices de fraction volumique (p) avec variation de (k_u, k_s) sur la fréquence fondamentale de plaque FG avec ($k_l = 100$).	70
Figure IV. 7 : Effet des paramètres ($h/a, p$) sur les plaques $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ FG à fréquence fondamentale adimensionnelle reposant sur la fondation Kerr ($k_l = 100$).	71
Figure IV. 8 : (a) Représentation schématique de la plaque poreuse étudiée reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak, (b) Fondations de type Kerr avec trois distributions différentes.	73
Figure IV. 9 : l'impact de la porosité sur la fréquence fondamentale d'une plaque FG reposant sur une fondation élastique : étude de trois distributions de porosité	77
Figure IV. 10 : Influence du rapport (h/a) sur la fréquence fondamentale d'une plaque FG sur une fondation élastique avec trois distributions de porosité.	77
Figure IV. 11 : l'effet des paramètres des fondations Winkler-Pasternak et des coefficients λ sur la fréquence fondamentale de la plaque.	78
Figure IV. 12: Impact des paramètres de fondation Kerr avec ($k_l = 100$) et variations de coefficient.....	79
Figure IV. 13 : Analyse de l'effet des Paramètres de Fondation de Pasternak (k_p) sur la Fréquence Fondamentale de Plaque en Fonction de la Porosité (λ) et de ses Trois Distributions avec ($k_w = 200$).	80
Figure IV. 14: Analyse de l'Effet des Paramètres de Fondation de Winkler (k_w) sur la Fréquence Fondamentale de Plaque en Fonction de la Porosité (λ) et de ses Trois Distributions avec ($k_p = 100$).	81

Liste des tables

Tableau I. 1 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal (Elishakoff, et al. 2015)..	7
Tableau IV. 1: Fréquence fondamentale adimensionnelle des plaques FG avec simplement appuyée ($b/a=2$, $b/a=1$) avec différents indices de fraction volumique (p).....	63
Tableau IV. 2 : Fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques FG reposant sur des fondations Winkler – Pasternak.....	64
Tableau IV. 3: Fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques carrées FG reposant sur Kerr fondation ($k_l = 100$).....	66
Tableau IV. 4: Analyse de la fréquence fondamentale adimensionnelle des plaques FG simplement appuyées en fonction des rapports d'épaisseur (h/a) variables et de diverses valeurs de porosité.....	74
Tableau IV. 5 : Fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques FG reposant sur des fondations Winkler – Pasternak avec l'influence de porosité.....	74
Tableau IV. 6 : Fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques carrées FG reposant sur Kerr fondation ($k_l = 100$) avec effet de porosité.....	75

Liste des symboles

Symbole	Signification du symbole
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
E_m	Module de Young du métal
E_c	Module de Young de céramique
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
ν	Coefficient de Poisson
$\rho(z)$	La densité du matériau en fonction de « z »
ρ_m	La densité du métal
ρ_c	La densité du métal
$V(z)$	Fraction volumique
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
k	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Épaisseur de la plaque
∂	Dérivée partielle
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z .
φ_x, φ_y	Les rotations autour des axes x et y

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
I_i, J_i, K_i	Inerties de masse
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
$\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	Contraintes de cisaillement
$\gamma_{xz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
p_1, p_2	Les coefficients dépendant de la géométrie des plaques
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
$\int \theta(x, y) dx, \int \theta(x, y) dy$	Les variables intégrales indéterminées

δU	Variation de l'énergie de déformation
δK	Variation de l'énergie cinétique.
δU_{ef}	Énergie de déformation de fondation
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
λ	Coefficient de porosité

Introduction Générale

Introduction

Dans le domaine de l'ingénierie des matériaux et des structures, les matériaux fonctionnellement gradués (Functionally Graded Materials (FGM)) sont des matériaux composites dont les propriétés varient progressivement d'un côté à l'autre, permettant une transition en douceur entre deux matériaux distincts. Cette variation continue des propriétés matérielles est particulièrement avantageuse dans des applications où des performances spécifiques et une résistance élevée sont requises, tout en minimisant les concentrations de contraintes.

Les fondations élastiques, qui se distinguent par leur capacité à absorber et à redistribuer les charges appliquées, jouent un rôle crucial dans le comportement global de ces structures complexes. L'interaction entre les plaques FGM et les fondations élastiques présente un champ d'étude fascinant et multidisciplinaire combinant les principes de la mécanique des matériaux, de la mécanique des structures et de la modélisation numérique.

L'une des variables clés influençant le comportement mécanique des plaques FGM est le type de fondation sur lequel elles reposent. Lorsqu'on étudie les plaques et les poutres en FGM, l'interaction avec le support joue un rôle crucial dans leur comportement dynamique, notamment en ce qui concerne les vibrations. Les fondations élastiques sont souvent modélisées pour représenter ces interactions de support de manière réaliste.

Les fondations élastiques sont couramment modélisées à l'aide de modèles de fondation tels que le modèle de Winkler, le modèle de Pasternak, et d'autres modèles plus complexes.

Modèle de Winkler

Ce modèle représente la fondation comme une série de ressorts indépendants répartis sur la surface de la plaque ou de la poutre, chacun fournissant une réaction proportionnelle au déplacement local.

Modèle de Pasternak

En plus des ressorts indépendants, ce modèle inclut une composante de cisaillement qui introduit une interaction entre les ressorts adjacents, permettant une représentation plus réaliste des effets de fondation pour les plaques et poutres en FGM.

Les fondations élastiques influencent considérablement les fréquences propres et les modes de vibration des structures en FGM :

- **Fréquences Propres** : La rigidité de la fondation tend à augmenter les fréquences propres des plaques et des poutres en FGM, car le support élastique contribue à la résistance globale du système contre les déformations.
- **Modes de Vibration** : Les modes de vibration peuvent être modifiés de manière significative par la fondation élastique. Par exemple, une fondation de Winkler influence principalement les déformations locales, tandis qu'une fondation Pasternak peut affecter les déformations globales et introduire des modes supplémentaires dus à la composante de cisaillement.

L'analyse dynamique des plaques et des poutres en FGM sur fondation élastique nécessite des approches analytiques et numériques sophistiquées :

- **Méthodes Analytiques** : Des techniques telles que la méthode de Rayleigh-Ritz, la méthode des séries de Fourier, et les solutions exactes peuvent être utilisées pour des géométries simples et des conditions de fondation idéalisées.
- **Méthodes Numériques** : les méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis (FEM) sont largement employées pour analyser des structures de formes complexes et des conditions de fondation variées.

Des pores peuvent apparaître dans les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) lors de la fabrication en raison des problèmes techniques qui entraînent des micro-vides dans ces matériaux influant sur leur comportement. Les structures poreuses FG présentent des nombreuses combinaisons intéressantes de propriétés mécaniques. L'objectif de ce travail est d'utiliser trois formes de distribution de porosité, la première étant uniforme FGU et les deux autres étant non uniforme (symétrique (FGS) et asymétrique (FGA)).

Les effets des fondations élastiques sur les plaques et poutres en FGM trouvent des applications dans divers domaines :

- **Ingénierie Civile** : Conception de structures portantes, de fondations de bâtiments et de ponts où les conditions du sol influencent les comportements vibratoires.
- **Aéronautique Aérospatiale** : Conception de panneaux et de composants structuraux soumis des charges dynamiques, où les fondations élastiques peuvent modéliser l'interaction avec d'autres éléments structuraux ou systèmes d'amortissement.
- **Industrie Automobile** : Analyse des composants comme les plaques de châssis et les panneaux de carrosserie, où les fondations élastiques représentent l'interaction avec les suspensions et autres supports.

En fin, l'étude des effets des fondations élastiques sur les plaques et les poutres en FGM en vibration est essentielle pour comprendre et prédire le comportement dynamique de ces structures dans des conditions pratiques.

C'est à partir de cet intérêt qu'on va proposer d'étudier l'effet de la fondation sur le comportement dynamique des plaques en FGM ; et pour cela nous avons proposé le plan de travail suivant :

Dans le premier chapitre, nous allons commencer par des généralités sur les structures des matériaux à gradient de propriétés, l'histoire de leur développement, leurs propriétés effectives, leur revue de méthode d'élaboration, leur branche d'application, leurs propriétés et ces applications, leur publication et travaux internationaux et leurs types ainsi les propriétés matérielles des plaques en FGM.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons une synthèse bibliographique des différents types de fondations élastiques ainsi que des modèles de fondations et leur formulation. Cette partie se conclut par une revue des travaux antérieurs portant sur les recherches sur l'interaction entre les structures et les fondations.

Dans le troisième chapitre, nous développons une formulation mathématique du problème de vibration des plaques à gradient de propriétés sur une fondation élastique (Winkler-Pasternak-Kerr) en utilisant la théorie d'ordre supérieur. Trois lois de distribution décrivent la variation de la porosité des plaques à travers leur épaisseur. L'équation d'équilibre est dérivée selon le principe de Hamilton et résolue en utilisant la solution de Navier.

Le quatrième chapitre présente une synthèse des résultats numériques et des discussions. Les résultats obtenus sont comparés aux données disponibles dans la littérature pour valider et vérifier l'exactitude de cette étude. Une étude paramétrique détaillée examine l'effet de l'indice de la loi de puissance, des rapports d'épaisseur et de géométrie de la plaque, ainsi que l'impact des paramètres des fondations de Winkler-Pasternak-Kerr sur le comportement vibratoire. De plus, cette étude inclut l'analyse des différentes distributions de porosité avec des variations des coefficients de porosité.

Finalement, nous terminerons par une conclusion générale reflétant le contenu de cette recherche de la mémoire, ainsi que des Observations spécifiques.

Chapitre I

Bibliographie sur les matériaux FGM et leur model d'étude

I.1. Introduction

Les progrès de la technologie moderne dont nous avons besoin nécessitent l'utilisation de matériaux dotés de propriétés mécaniques élevées, propres à leur utilisation, mais avec de faibles volumes en vrac. Un des objectifs est d'alléger la masse des structures.

Les matériaux composites étaient utilisés dans de nombreux composants structurels en raison de leur faible densité, de leur haute résistance, de leur rigidité importante et de leur durabilité exceptionnelle. Néanmoins, malgré leurs nombreux bienfaits, ces matériaux présentent certains inconvénients, viennent aussi principalement de leur hétérogénéité. Les littératures sont bien conscientes que des contraintes très élevées peuvent être infligées où être imposées sur les interfaces en raison des différences mécaniques entre canapés adjacents. En raison d'un changement radical des propriétés mécaniques et thermiques d'une couche à l'autre, ces contraintes intercalaires élevées peuvent provoquer des fissures au niveau de l'interface appelées délaminage, fissures et autres mécanismes d'endommagement. Ce problème qui a un impact majeur sur le comportement des structures composites multicouches, a incité les chercheurs à trouver de nouveaux composites capables de lever ces contraintes et de décrire avec précision leur comportement structurel.

Pour afin d'atteindre ces objectifs, scientifiques et industriels ont travaillé à la création d'une nouvelle classe de matériaux composites, appelés « matériaux à gradient de propriétés », qui fait l'objet d'importantes recherches.

I.2. Concept des matériaux fonctionnellement gradués

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue ou discrète à travers l'épaisseur (Hirai and technology 1996), Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant délamination et décollement) et d'améliorer les propriétés mécaniques de la structure comme illustré dans la figureI.1

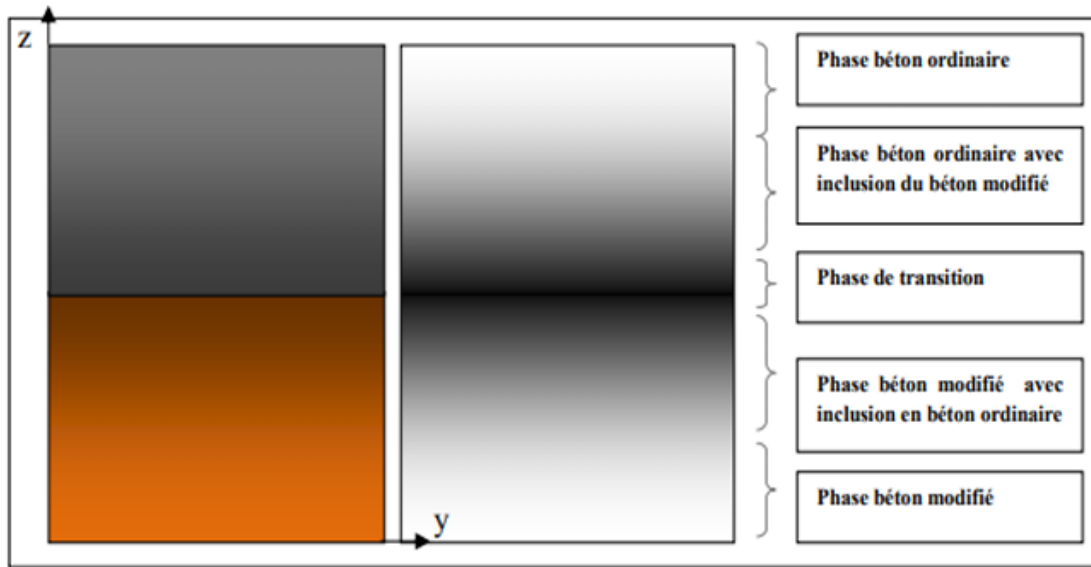


Figure I. 1 : Variation continue des propriétés et de la microstructure (Ait Taleb 2016).

La gradation des propriétés du matériau réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les facteurs de concentration de contraintes. La variation graduelle donne un matériau très efficace adapté aux besoins de la structure et qui est donc appelé matériau fonctionnellement gradué « FGM ». Ils sont généralement fabriqués à partir de composants isotropes tels que les métaux et les céramiques, car ils sont employés également comme structures de barrière thermique dans des environnements à gradients thermiques importants (par exemple, dispositifs thermoélectriques pour la conversion d'énergie, industrie des semi-conducteurs). Dans ces applications, la céramique offre une résistance à la chaleur et à la corrosion, tandis que le métal assure la solidité et la ténacité (Tableau I.1) (Elishakoff, Pentaras et al. 2015).

Tableau I. 1 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal (Elishakoff, Pentaras et al. 2015)

La face à haute température	Céramique	-Bonne résistance thermique - Bonne résistance à l'oxydation ; -Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « Couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxation les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.



La figure I.2 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger. Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles (Houari, Renaudineau et al. 2011).

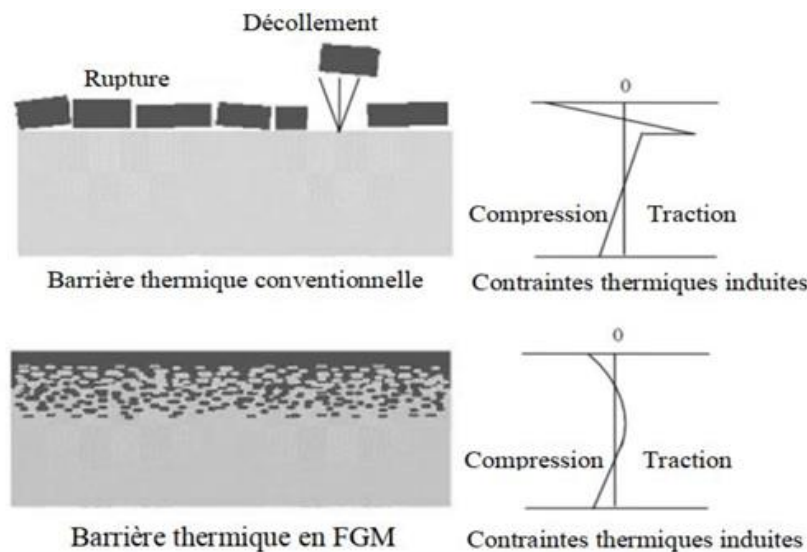


Figure I. 2 : Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM (Houari, Renaudineau et al. 2011)

I.3. Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM

Le concept des matériaux à gradient évalués FGM est applicable dans des nombreux et larges intervalles de domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, aéronautique, aérospatiale, nucléaire et semiconducteurs. Ainsi, ces matériaux ont deux propriétés contradictoires : la conductivité thermique et l'isolation thermique (figure I.3). Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, résistants et durables. Les principaux domaines d'application des FGM sont :



Figure I. 3 : Applications des FGM dans divers domaines

I.4. Histoire des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Le concept d'un matériau à gradient fonctionnel (FGM) a été développé par des chercheurs japonais en 1984. En 1985, un grand nombre de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer ce nouveau type de matériau. Le principal objectif était de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale commerciale. Le problème principal à résoudre était le flux de la chaleur important frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air lors de la période de rentrée d'une navette spatiale dans l'atmosphère terrestre et, en même temps protéger l'intérieur contre les surchauffes. En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé « la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques ». L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C . A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques (Koizumi 1993).

L'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute température) et des métaux (Coté basse température). A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (10 mm d'épaisseur et 30mm de diamètre) pouvant

résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K.

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de formes plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc... On trouve une littérature très importante sur l'utilisation de ce matériau. Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance des déformations.

I.5. Développements récents et défis des FGM

Dans le cas de la plupart des FGM, une propriété matérielle varie dans le sens de l'épaisseur (Deng and Cheng 2016) Cependant, les applications modernes peuvent exiger des matériaux FGM dans lesquels les propriétés du matériau varient à la fois dans l'épaisseur et dans les directions axiales (Şimşek 2015). Récemment, un matériau à gradient dont les propriétés varient dans les deux sens a également été développé et étudié de manière approfondie (Qian, Batra et al. 2005, Enab and IJMME-IJENS 2014). Ces matériaux intelligents sont connus sous le nom de matériaux à gradient fonctionnel bidirectionnel (BDFGM). La technique AM basée sur le dépôt de métal par laser est la plus appropriée pour produire de tels BDFGM (Udupa, Rao et al. 2014). Bien que des progrès technologiques substantiels aient été réalisés dans le domaine des FGM, peu de problèmes critiques doivent encore être résolus. Une base de données appropriée des FGM en termes de paramètres et de tests n'est toujours pas disponible. Les méthodes de test et de mesure conventionnelles peuvent ne pas convenir pour évaluer les performances des FGM modernes, de sorte que le développement de méthodes de test avancées est nécessaire (Udupa, Rao et al. 2014). La plupart des techniques de traitement des FGM étant très coûteuses, la technique de traitement à faible coût qui peut produire en masse des FGM de grande taille et de forme complexe reste un défi. La sélection du matériau approprié adapté à l'application prévue est le défi immédiat et direct du développement technologique futur dans le domaine de la recherche sur les FGM (KEDDOURI 2021).

I.6. Avantages et inconvénients de la FGM

Les matériaux fonctionnellement gradués présentent des avantages et des inconvénients :

I.6.1. Avantages de la FGM

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement. Suresh et al. Et al Bahr, et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que (Bansal, Singh et al. 2010) :

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés ;
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique
- Suppression de délaminage
- Augmentation de la ténacité à la rupture ;
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc.

I.6.2. Inconvénients de la FGM

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc. un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable. D'autre part, travailler autour (T_2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases

indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses (Bansal, Singh et al. 2010).

I.7. Propriétés effectives des FGM

Généralement les FGM sont produits à partir de deux phases (types) de matériaux ayant des propriétés distinctes avec des fractions volumiques de chaque phase qui varient et évoluent graduellement dans la direction de gradation où on constate un changement des propriétés effectives des FGM. Par conséquent, on distingue deux approches possibles pour les modèles des FGM (Figure I.4) (BELAROUCI 2021, Zaoui, Ouinas et al. 2021), (Zhang, Chen et al. 2019), (El-Galy, Saleh et al. 2019) :

Dans le graphe (a), on constate une variation en escalier de la fraction volumique (céramique et/ou du métal) qui est conservée pour chacune des sections. Les compositions et / ou les microstructures changent par étapes, généralement avec la présence d'une interface.

Dans le graphe (b), la fraction volumique des deux composants (céramique et métal) change semblablement à une fonction dépendant de la coordonnée (z), et continuellement l'une à l'inverse de l'autre.

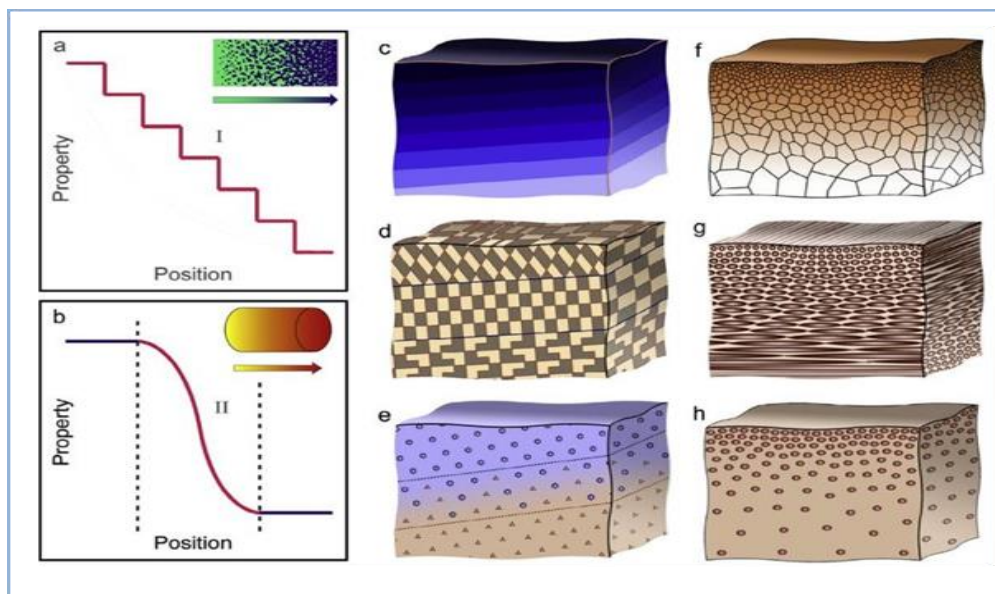


Figure I. 4 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau FGM (Zhang, Chen et al. 2019)

I.8. Évolution de la recherche scientifique autour des FG-Matériaux

Les matériaux à gradient fonctionnel FGM représentent un axe de recherche intéressant qui a attiré fortement l'attention de beaucoup de chercheurs. Des travaux intenses ont été effectués et de nombreuses recherches ont été publiées mais il reste encore beaucoup à faire dans ce domaine (Figure I.5) [Basé sur le système de recherche Web of Science dans la durée de 1990–12/2019], (Saleh, Jiang et al. 2020).

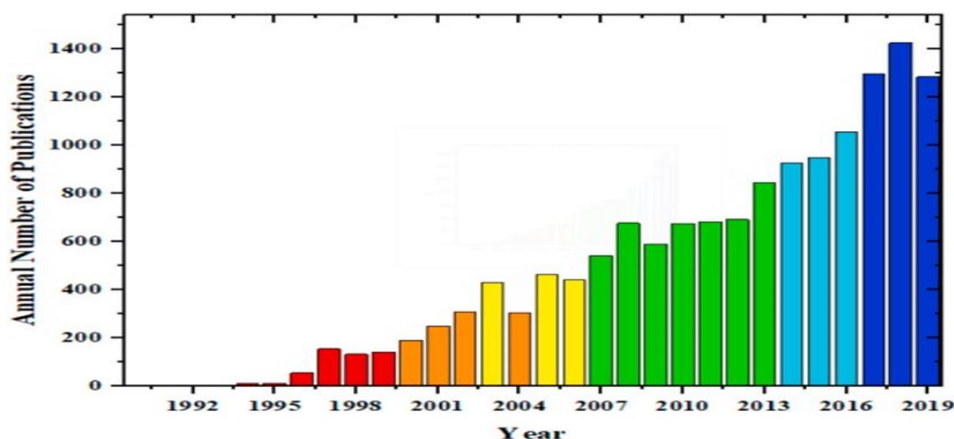


Figure I. 5 : Le nombre de publications annuelles dans le titre de recherche «Fonctionnellement matériaux classés FGM »(Saleh, Jiang et al. 2020)

I.9. Classification selon type de gradient

Afin de distinguer les FGM en fonction des types de gradients, les FGM peuvent généralement être classées en trois groupes différents (**Error! Reference source not found.**) : a) composition du gradient, b) microstructure du gradient et c) porosité du gradient (Mahamood and Akinlabi 2017).

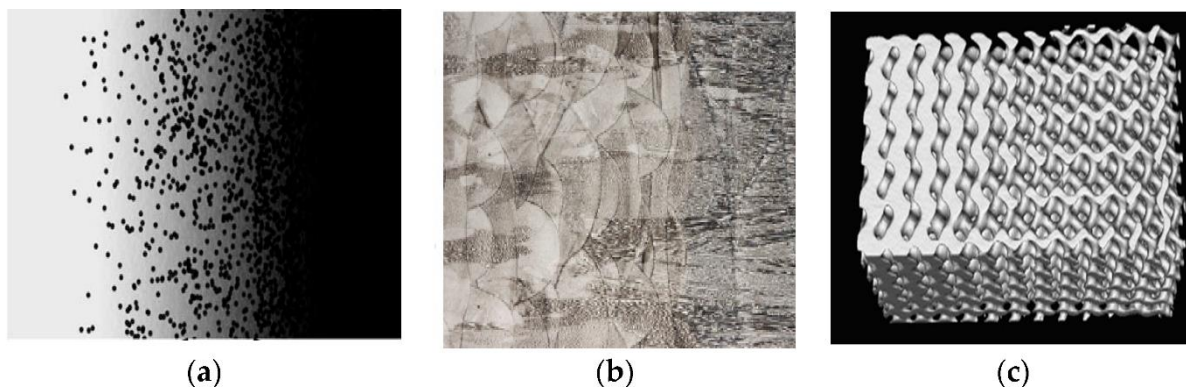


Figure I. 6 : Classification des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) selon a) la composition b) la microstructure ; c) la porosité.(Mahmoud and Elbestawi 2017).

Dans le groupe des matériaux à gradient basé sur la composition chimique, en fonction de la position spatiale dans le matériau, la composition chimique varie progressivement.

Le deuxième type, microstructure graduée, fait référence à un groupe dont la surface du matériau a une microstructure différente de celle de son noyau. Ces éléments sont principalement produits lors du processus de refroidissement, de sorte que le traitement thermique de ces matériaux soit contrôlé. Ces matériaux sont utilisés dans des applications et des dispositifs où la surface doit avoir certaines capacités telles que la résistance à l'usure et à la corrosion, etc. tandis que le noyau du corps a une autre propriété.

Dans le type de gradients de porosité, la porosité varie en fonction de l'emplacement dans le matériau. Dans la conception des FGM avec une porosité graduée, non seulement la taille des pores est qui compte, mais aussi leur forme est extrêmement importante, selon le type d'application. D'un point de vue industriel, on peut voir que les matériaux à porosité graduée dans l'industrie médicale ont beaucoup plus d'applications et plusieurs études ont été publiées dans ce domaine ([Mohammadi, Rajabi et al. 2021](#)).

I.10. Méthodes d'élaboration des FGM

Le processus de fabrication d'un matériau évalué par gradient matériau nécessite une intervention plus technique pour obtenir les résultats souhaités. Généralement, ce processus implique la construction de la structure dans un espace hétérogène (mélange dégradé), puis la solidification du matériau résultant en une seule unité.

Les processus de mélange progressif peuvent être classés en fonction de leurs constituants, de leur homogénéisation et de leur ségrégation. Les processus fondamentaux processus sont basés sur la création étape par étape de la structure à partir de matériaux précurseurs en poudre ou progressivement dérivés. Sur la création étape par étape de la structure à partir de matériaux précurseurs en poudre ou progressivement dérivés. Les progrès de la technologie d'automatisation au cours des dernières décennies ont rendu les processus de progrès technologiques fondamentaux et économiquement durables.

I.10.1. Coulage en bande (Tape casting process)

Le processus de coulée en bande est réalisé par l'étalement de la barbotine sur une bande mobile. La barbotine est composée de poudres avec différents taux de composition, mélangées à certains produits organiques (solvants, plastifiants, dispersants), pour former une suspension homogène

aux propriétés rhéologiques bien définies. Puis passage de la bande mobile sous le bord d'une lame soigneusement contrôlée connue sous le nom « doctor blade », afin de façonner la barbotine en une bande d'épaisseur constante. La figure I.7 illustre un schéma du processus de coulée de bande.

C'est une technique de mise en forme de bandes en multicouches dont l'épaisseur peut être comprise entre 10μ et 100μ (Cherradi, Delafosse et al. 1996). Les couches empilées sont pressées de manière à obtenir des crus manipulables, qui sont ensuite frittés.

Ce procédé peut fonctionner en continu, de la mise en forme jusqu'au produit fini.

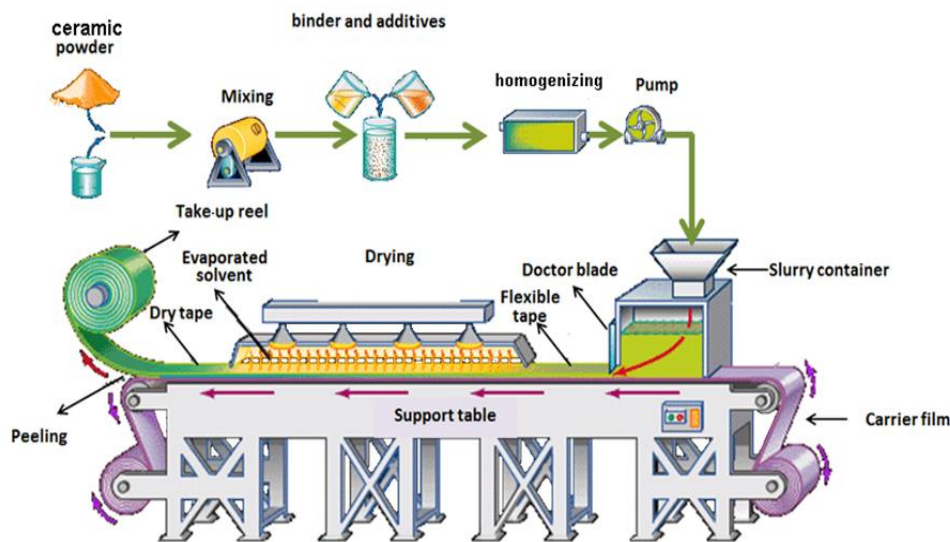


Figure I. 7 : Principe de la méthode coulée en bande (Britannica , Britannica).

I.10.2. Frittage flash

La méthode de frittage « flash » ou spark plasma sintering (SPS) peut être utilisée efficacement pour produire des pièces FGM, c'est une méthode compressive à l'état solide dans laquelle un frittage énergisant par un courant électrique pulsé est utilisé (Tokita 2010). Dans la méthode SPS, le courant électrique est utilisé dans l'étape de densification, dans laquelle un courant continu pulsé est directement transféré à une matrice en graphite et à la poudre compacte. Ce procédé est représenté schématiquement sur la figure I.8.

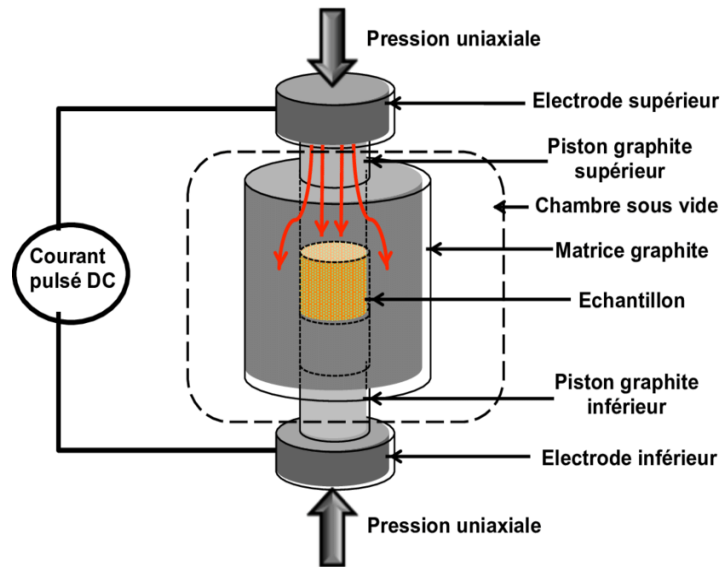


Figure I. 8 : Schéma représentant le principe du frittage flash (SPS) (Mouawad 2013).

Le frittage dans une machine SPS serait assuré par un plasma (plasma par étincelles) qui se développerait entre les grains. L'application répétée du courant pulsé va produire, entre chaque grain, des décharges électriques induisant un plasma par étincelles suivie d'une pression d'impact des étincelles et un échauffement par effet Joule accompagné d'un effet de diffusion du champ électrique (Mouawad 2013).

Les caractéristiques de cette méthode comprennent des temps de maintien courts, un chauffage rapide, un refroidissement rapide et la possibilité d'obtenir des pièces complètement denses à des températures relativement basses (Shi, Zhou et al. 2021).

I.10.3. Frittage Laser Différentiel

L'utilisation du laser dans ce procédé permet de contrôler la température et focaliser avec précision le point à chauffer. Le frittage différentiel le long de la pièce est obtenu grâce à la différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié (BELAROUCI 2021). (Kawasaki and Watanabe 1997) ont fabriqué une pièce F.G.M de PSZ/Mo. La figure I.9 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

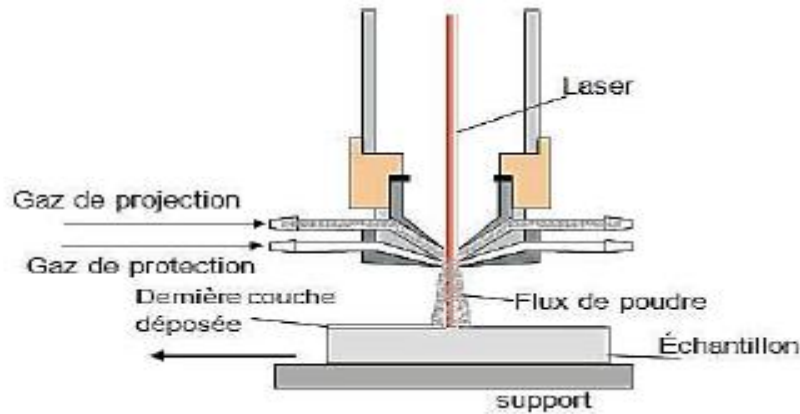


Figure I. 9 : Disposition du procédé frittage laser différentiel (Kawasaki and Watanabe 1997)

I.10.4. Technique d’infiltration par centrifugation

En outre, la technique de dépôt par centrifugation consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s’opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (Figure I.10) (Abdizadeh 1997).

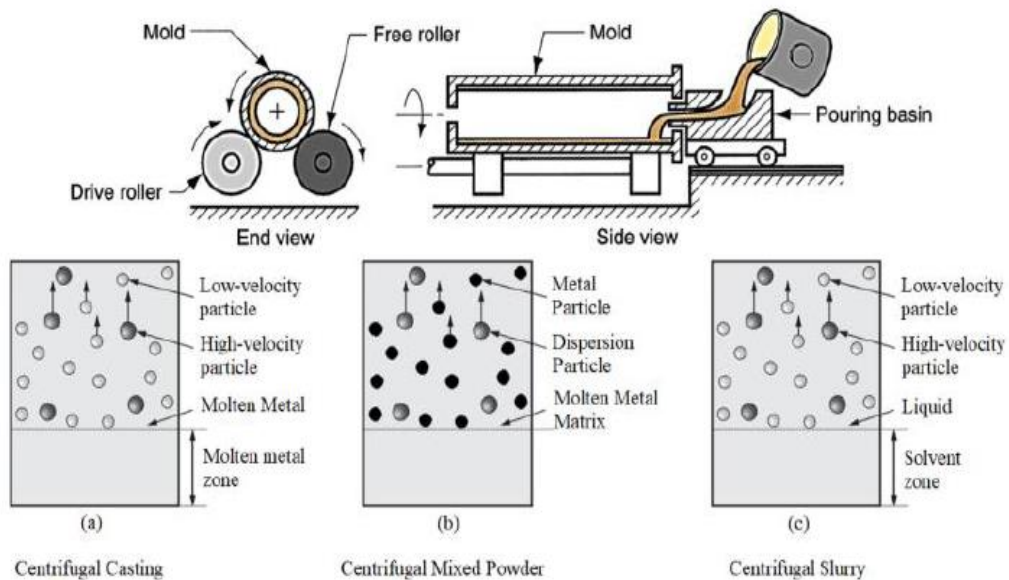


Figure I. 10 : Principe d’infiltration par centrifugation (El-Galy, Saleh et al. 2019).

I.10.5. Dépôt par Centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (figure I.11) (Abdizadeh 1997).

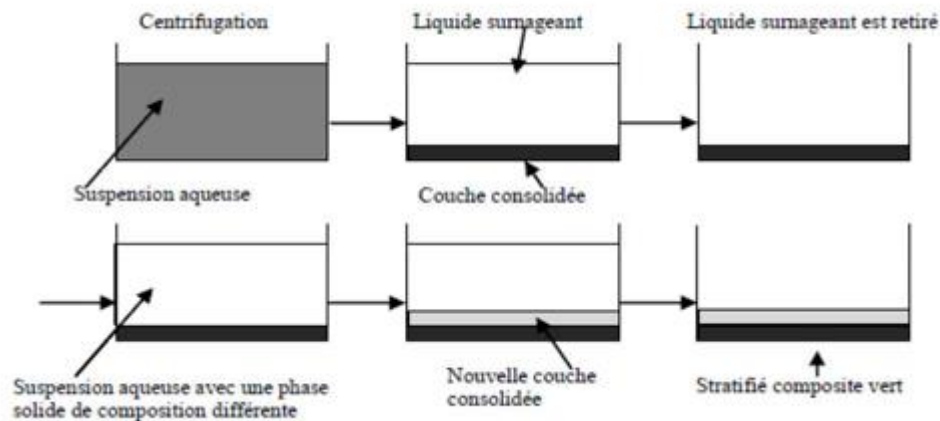


Figure I. 11 :Schéma du procédé dépôt par centrifugation (Abdizadeh 1997).

I.10.6. Dépôt par Electrophorèse

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique. L'élaboration des F.G.M peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux (Abdizadeh 1997).

I.10.7. Compaction Sèche des Poudres

Cette technique consiste à verser successivement dans un moule en acier les poudres, et à chaque fois qu'une poudre est versée une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi généralement par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale (Bishop, Roach et al. 1993). Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I.10.8. Technique de dépôt à la vapeur

Les techniques de dépôt à la vapeur décrivent une variété de méthodes de dépôt sous vide qui peuvent être utilisées pour produire des films minces sur les matériaux de base (Figure I.12). Toutes ces techniques peuvent être utilisées pour produire des FGM minces uniquement. Différents types de techniques de dépôt en phase vapeur comprennent le dépôt physique en phase vapeur (PVD) et le dépôt chimique en phase vapeur (CVD). Ils consomment beaucoup d'énergie et produisent des jauges toxiques comme sous-produits (Groves and Wadley 1997).

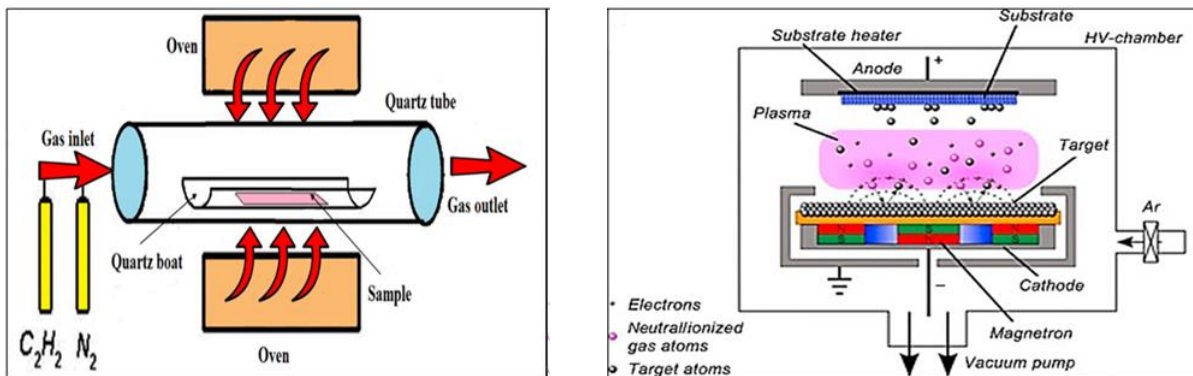


Figure I. 12 : a) Le procédé de dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

b) Le procédé de dépôt physique en phase vapeur (PVD)

D'autres techniques basées sur le dépôt qui peuvent déposer des revêtements minces fonctionnellement dégradés sont le dépôt par faisceau d'électrons (EBD), le dépôt par faisceau ionique (IBD) et la synthèse à haute température auto-propagatrice (SHS) (Knoppers, Gunnink et al. 2004). Toutes les méthodes mentionnées ci-dessus ne sont pas économiques pour produire des FGM de type en vrac.

I.10.9. Procédés de Fabrication par projection de matière

Ces techniques sont basées sur la déposition de matière. Elles permettent d'avoir un ou plusieurs revêtements sur une pièce existante. Ce revêtement a une épaisseur de l'ordre du micromètre en ce qui concerne la projection en phase vapeur (Figure I.13) (Groves et Wadley, 1997), tandis qu'elle est de l'ordre du millimètre pour les procédés d'électrodéposition (Put et al., 2003) et de projection thermique (Xinhua et al., 1997). Avec ces techniques, les dimensions du gradient sont donc très limitées. De plus, le choix de la distribution des matériaux est souvent restreint. En effet, les surfaces d'équi-composition sont dans la plupart des cas, parallèles à la surface extérieure de la pièce (Muller, 2013).

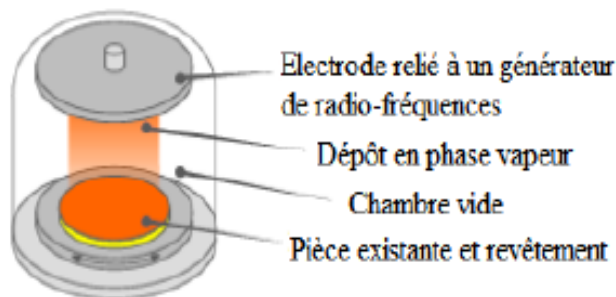


Figure I. 13 : Dépôt en phase vapeur d'un revêtement sur une pièce (Muller, 2013).

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge Des particules due à un champ électrique. L'élaboration des F.G.M peut se faire donc par le Dépôt séquentiel des matériaux (Abdizadeh, 1997).

I.11. Modèles micromécanique des matériaux de type FGM

Au fil des années, un certain nombre de modèles micromécaniques modèles ont été développés pour déterminer les propriétés efficaces à l'échelle macroscopique des matériaux composites homogènes. Développé pour déterminer les propriétés efficaces à l'échelle macroscopique des matériaux composites homogènes. Les approches analytiques qui combinent la méthode des éléments finaux avec des modèles micromécaniques sont fréquemment utilisées pour modéliser les FGM méthode des éléments finaux avec des modèles micromécaniques sont fréquemment utilisées pour modéliser les FGM.

I.11.1. Modèle de Mori-Tanaka

Ce modèle est basé sur le schéma de Mori et Tanaka (Mori and Tanaka 1973) qui permet d'estimer les modules effectifs valables pour des zones de la microstructure où la variation de la matrice (continue) et celle des phases particulières (discontinues) sont bien connues Figure I.14. Ce modèle tient compte de l'interaction des champs élastiques des inclusions voisines. Il suppose que la phase matrice dénotée par l'indice 1 est renforcée par des particules sphériques de la phase particulière dénotée par l'indice 2.

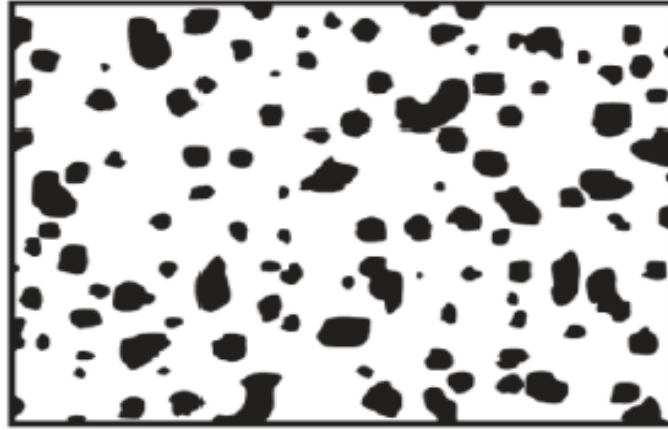


Figure I.14: Matériau FGM à deux phases avec microstructure particulaire (Mori and Tanaka 1973).

Si on note par K le module de compressibilité, par G le module de cisaillement, par V la fraction volumique et par α le coefficient de dilatation thermique, les différentes propriétés locales obtenues par le modèle de Mori et Tanaka (Mori and Tanaka 1973), pour une distribution aléatoire des particules isotropes dans une matrice isotrope, sont alors données par ((Vel, Batra et al. 2004, Shen 2016)) :

$$\frac{K - K_1}{K_2 - K_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(K_2 - K_1)/(K_1 + 4/3G_1)} \quad \text{I.1}$$

$$\frac{G - G_1}{G_2 - G_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(G_2 - G_1)/(G_1 + f_1)} \quad \text{I.2}$$

$$\frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{(1/K) - (1/K_1)}{(1/K_2) - (1/K_1)} \quad \text{I.3}$$

I.11.2. Modèle Reuss

L'hypothèse de base pour les propriétés effectives dérivées selon Reuss postule que la contrainte moyenne totale à l'échelle macroscopique est considérée comme identique dans chaque phase sous une contrainte uniforme équivalente. En d'autres termes, ce modèle est connu sous le nom de règle inverse du modèle de Voigt. Ainsi, les expressions du module de Young effectif et du coefficient de Poisson sont les suivantes (Messaoudi, Panichella et al. 2018) :

$$E_{(z)} = \frac{E_c E_m}{E_c(1-V) + VV_m}$$

$$V = \frac{V_c V_m}{V_c(1-V) + VV_m} \quad \text{I.4}$$

I.11.3. Modèle Voigt

Le modèle Voigt, initialement proposé par Voigt, est largement utilisé dans l'homogénéisation pour prédire les propriétés élastiques effectives des différents types de matériaux composites. Ce modèle, connu pour sa simplicité, est couramment utilisé pour estimer les propriétés effectives des composites biphasés. Il suppose que la déformation ne subit aucune modification lors du chargement des coordonnées du matériau. En se basant sur cette hypothèse, le module de Young effectif E et le coefficient de Poisson des composites ν biphasés peuvent être prédits par (Rachid, Ouinas et al. 2022) :

$$E_{(z)} = E_c V_c + E_m (1 - V_c) \quad \text{I.5}$$

$$V = V_c V + V_m (1 - V) \quad \text{I.6}$$

I.11.4. Modèle auto-cohérent de Hill

Cette méthode considère chaque inclusion de renforcement comme étant intégrée dans un matériau continu, dont les propriétés sont celles d'un composite. Elle ne distingue pas la phase matrice de la phase de renforcement, ce qui signifie que le même module global est estimé pour un autre composite où les rôles des deux phases sont inversés. Cela permet d'estimer le module effectif dans les régions où le squelette de la microstructure a une forme continue, comme illustré à la figure I.15.



Figure I.15 : Matériau FGM à deux phases avec microstructure squelettique (Hill and Solids 1965).

Les modules élastiques effectifs sont donnés par :

$$\frac{g}{K} = \frac{V_1}{(K - K_2)} + \frac{V_2}{(K - K_1)} \quad \text{I.7}$$

$$\frac{\eta}{G} = \frac{V_1}{(G - G_2)} + \frac{V_2}{(G - G_1)} \quad \text{I.8}$$

Où g et η sont définis par :

$$g = \frac{K}{K_1 + (4/3)G} \quad \text{I.9}$$

$$\eta = 1/5(3 - g) \quad \text{I.10}$$

A partir des équations (I.5) et (I.6), l'expression du module de compressibilité est obtenue :

$$K = \frac{1}{V_1 / (K_1 + (4/3)G) + V_2 / (K_2 + (4/3)G)} - 4/3G \quad \text{I.11}$$

Le module G est obtenu en résolvant l'équation suivante :

$$\left[\frac{V_1 K_1}{(K_1 + (4/3)G)} + \frac{V_2 K_2}{(K_2 + (4/3)G)} \right] + 5 \left[\frac{V_1 G_2}{(G - G_2)} + \frac{V_2 G_1}{(G - G_1)} \right] + 2 = 0 \quad \text{I.12}$$

Pour les deux modèles précédents, le module de Young et le coefficient de Poisson sont calculés par :

$$E = \frac{9KG}{(3K + G)} \quad \text{I.13}$$

$$\nu = \frac{(3K - 2G)}{2(3K + G)} \quad \text{I.14}$$

Il est bien connu que le modèle de Mori-Tanaka conduit à une estimation précise des propriétés mécaniques lorsque la continuité de la matrice et la discontinuité des inclusions sont bien définies alors que le modèle de Hill est mieux adapté pour une microstructure squelettique

caractérisée par une zone de transition large entre régions où il y a prédominance de l'un ou l'autre des constituants.

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude bibliographique des matériaux qui s'appellent matériaux fonctionnellement gradués. Nous avons discuté en détail de la définition générale, du développement et de l'histoire des matériaux à gradient de propriétés.

La variation spatiale progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes dans de nombreux domaines d'application. En effet, la distribution progressive du matériau en fonction de l'épaisseur de ces structures induit des modifications dans leur comportement.

En outre, nous avons abordé de manière générale les différentes méthodes de fabrication des matériaux à gradient de propriétés ainsi que leur application dans divers domaines de l'ingénierie. Enfin, il ressort de cette étude que les matériaux fonctionnellement gradués ont suscité un grand intérêt parmi les chercheurs de nombreux domaines en raison de leurs caractéristiques uniques, absentes dans les matériaux conventionnels.

I.12. L'idéalisation mathématique des matériaux fonctionnellement gradués FGM

Malgré l'extrême hétérogénéité des FGM, il sera très utile de les idéaliser comme des continus dont les propriétés idéaliser varient continuellement en fonction des coordonnées spatiales. Comme des continus dont les propriétés mécaniques varient continuellement en fonction des coordonnées spatiales. Afin d'analyser efficacement leurs complexités, leurs microstructures hétérogènes complexes, des schémas d'homogénéisation sont nécessaires hétérogène les simplifier. Cette idéalisation peut conduire à une fin fermée des solutions à certains problèmes fondamentaux de la mécanique des solides et aider à l'avancement et à la création de modèles numériques des structures créées par les FGM. Il convient de noter que différentes spécifications spatiales spécifications peut être prises en compte pour la répartition des matériaux dans les structures FGM. La forme typique forme d'un FGM est un composite de particules avec une distribution prescrite des fractions volumiques des phases constitutives figure I.16.

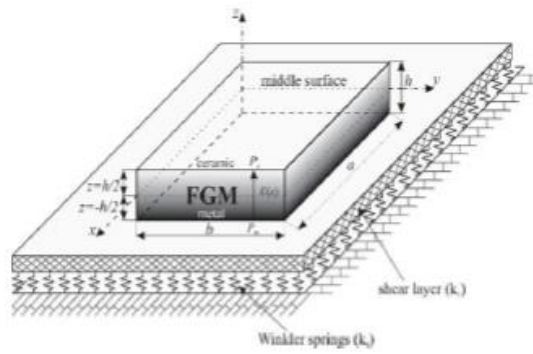


Figure I.16 : Géométrie d'une plaque rectangulaire FGM.

I.12.1. Loi de puissance

Ceci est plus fréquent dans l'analyse des contraintes des FGM (Hildebrand, Reissner et al. 1949) est donné par :

$$P(z) = (P_1 - P_2) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + P_1 \tag{I.15}$$

Où p est un paramètre du matériau qui représente l'ordre du polynôme. La variation de la fraction volumique des phases en termes de N est représentée sur la figure I.17.

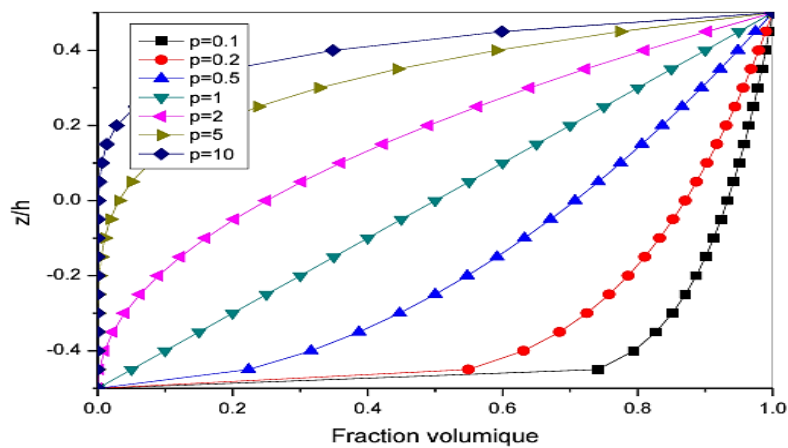


Figure I.17 : La variation de la fraction volumique dans le cas d'une plaque P-FGM (BAKORA 2016).

I.12.2. Loi exponentielle

Cette idéalisation particulière pour la modélisation des FGM est très répandue dans les études de mécanique de la rupture (Hildebrand, Reissner et al. 1949). Pour une structure faite de FGM avec 'h' une épaisseur uniforme, les propriétés typiques des matériaux P(z) à tout point situé à une distance "z" de la surface de référence est donné par :

$$E(z) = A.e^{B(z+h/2)} \quad \text{I.16}$$

Avec :

$$A = E_2 \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \quad \text{I.17}$$

La figure (I.18) affiche la variation de la fraction volumique.

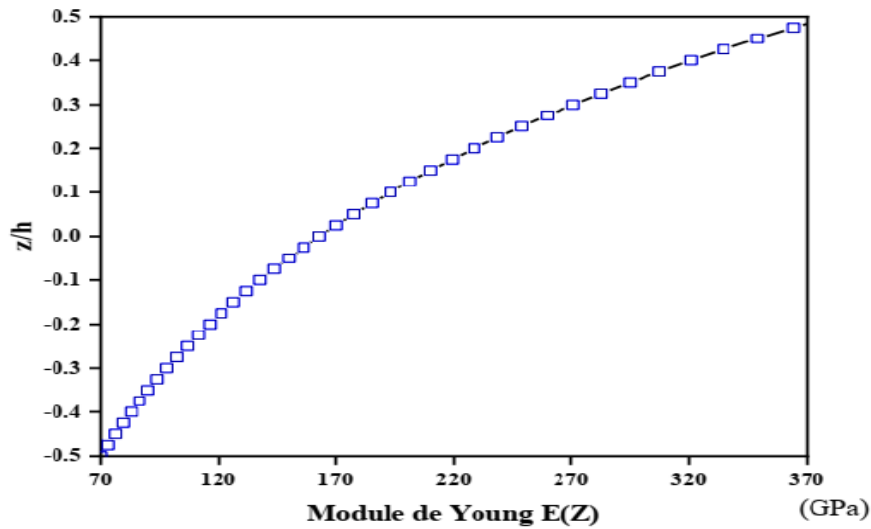


Figure I.18 : La variation du module de Young dans le cas d'une plaque E-FGM (BAKORA 2016).

I.12.3. Loi sigmoïde

Pour réduire la variation rapide de la matière à proximité de la surface supérieure et inférieure, la distribution de matériaux à l'aide de deux fonctions en loi de puissance a été définie. Cette distribution est appelée la fonction sigmoïde. La fraction volumique du matériau est donc donnée par la forme suivante :

$$f_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h-2z}{h} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2}$$

$$f_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h+2z}{h} \right)^p \quad \text{Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad \text{I.18}$$

La figure I.19 affiche la variation de la fonction de fraction volumique pour $p > 1$. Étant donné que cette distribution représente la fonction en loi de puissance dans une demi-épaisseur, les compositions du matériau à gradient fonctionnel varient plus lente que la distribution de la fonction en loi de puissance.

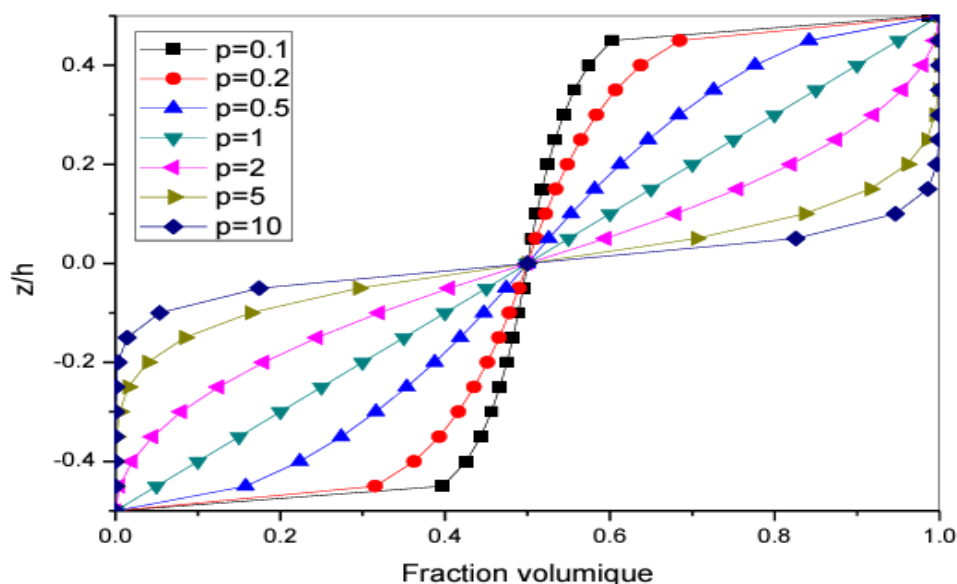


Figure I.19 : variation de la fraction volumique dans le cas d'une plaque S-FGM (BAKORA 2016).

I.13. Conclusion

Pour conclure sur le sujet de la bibliographie sur les matériaux FGM (Fonctionnellement Gradients) et leurs modèles d'étude, il est clair que la recherche dans ce domaine est en constante évolution, offrant des perspectives passionnantes pour l'avenir de la science des matériaux. Les matériaux FGM, avec leur variation graduelle de propriétés, ouvrent la voie à une gamme de nouvelles applications, de la conception de structures légères et résistantes à la fabrication de dispositifs électroniques et médicaux innovants.

À travers cette étude bibliographique, nous avons exploré une variété de modèles d'étude utilisés pour caractériser et prédire le comportement des matériaux FGM, allant des approches analytiques aux simulations numériques avancées. Ces travaux de recherche ont contribué à approfondir notre compréhension des mécanismes sous-jacents à ces matériaux complexes et à développer des outils précieux pour leur conception et leur optimisation.

Cependant, malgré les progrès réalisés, de nombreux défis persistent, notamment en ce qui concerne la modélisation précise du comportement à long terme des matériaux FGM dans des

conditions de service réelles, ainsi que la fabrication à grande échelle de ces structures graduées. Il est donc essentiel que la communauté scientifique continue de collaborer et d'innover, en explorant de nouvelles méthodes de modélisation et de fabrication, afin de réaliser pleinement le potentiel des matériaux FGM dans divers domaines d'application.

En conclusion, cette bibliographie met en lumière l'importance croissante des matériaux FGM et leur étude modélisée dans le paysage de la recherche en science des matériaux. En combinant des approches théoriques et expérimentales, nous sommes bien positionnés pour repousser les limites de la conception des matériaux et ouvrir la voie à de nouvelles innovations technologiques.

Chapitre II

*Bibliographie sur le support des
structures : synthèse sur les
travaux antérieurs*

II.1. Introduction

L'étude des fondations de structures constitue un domaine de recherche fondamental dans le domaine de l'ingénierie et des sciences des matériaux. Ce domaine cherche à comprendre et à améliorer les performances des matériaux et des systèmes de support qui soutiennent des charges ou qui fournissent une infrastructure essentielle pour diverses applications. Avant d'aborder les contributions récentes dans ce domaine, il est essentiel de dresser une partie sur les différents types de fondations qui ont jeté les bases de notre compréhension actuelle.

Les travaux antérieurs sur les fondations de structures ont exploré une gamme de matériaux et de conceptions, allant des structures simples aux systèmes complexes. Les recherches ont souvent porté sur la résistance des matériaux traditionnels tels que le béton, l'acier, le bois et les composites, en examinant leur comportement sous différentes contraintes et conditions environnementales. Ces études ont fourni des connaissances cruciales sur la durabilité, la résilience et les limites de ces matériaux dans diverses applications des fondations.

En outre, les travaux antérieurs ont également abordé des sujets liés à la modélisation et à la simulation du comportement des structures sous charge, utilisant des approches analytiques, expérimentales et numériques. Ces modèles ont permis de prédire avec précision les performances des structures sous différentes conditions de charge, aidant ainsi à optimiser leur conception et leur fonctionnement.

Cependant, malgré les avancées réalisées, des défis persistent, notamment en ce qui concerne la durabilité à long terme des matériaux de support, l'optimisation des structures pour des charges variables et l'intégration de nouvelles technologies et matériaux dans la conception de systèmes de support innovants.

Ainsi, cette synthèse des travaux antérieurs met en évidence l'importance de comprendre l'évolution des connaissances et des techniques dans le domaine du support de structures, tout en soulignant les lacunes actuelles qui nécessitent une attention particulière dans les recherches futures.

II.2. Modèles des fondations

II.2.1. Modèles de Winkler

L'idéalisation de Winkler représente le sol comme un système de ressorts identiques, linéairement élastiques, proches les uns des autres. Selon cette idéalisation, la déformation de la fondation due à la charge appliquée est limitée aux régions chargées uniquement (Dutta, Roy et al. 2002). La Figure II.1 montre la représentation physique de la fondation de Winkler. La relation de déflexion de pression en tout point est donnée par :

$$R = K_w w_0 \quad \text{II.1}$$

Où R est la pression, K_w est le coefficient de réaction ou du module du sous-sol, et w_0 est le fléchissement.

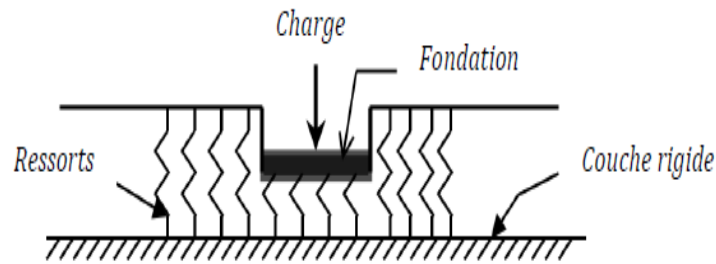


Figure II. 1 : Fondation de Winkler (Dutta, Roy et al. 2002).

II.2.2. Modèles de Pasternak

Dans ce modèle, on suppose l'existence d'une interaction de cisaillement entre les éléments de ressort, qui est réalisée en reliant les extrémités des ressorts à une poutre ou une plaque qui ne subit qu'une déformation de cisaillement transverse (Figure II.2). La relation charge-flèche est obtenue en considérant l'équilibre vertical d'une couche de cisaillement (Dutta, Roy et al. 2002). La relation pression déflexion est donnée par (HIMEUR and BOUCHOUICHA 2022):

$$R = K_w w_0 + K_p \nabla^2 w_0 \quad \text{II.2}$$

Où K_p est le module de cisaillement de la couche de cisaillement. Ainsi, la continuité dans ce modèle est caractérisée par la prise en compte de la couche de cisaillement. Une comparaison de ce modèle avec celui de Filonenko – Borodich implique leur équivalence physique (« T » a été remplacé par « K_p »).

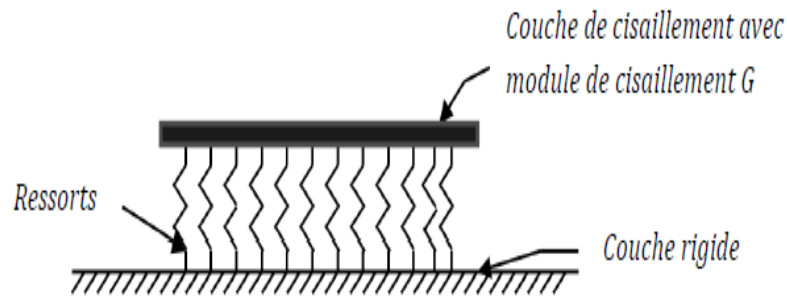


Figure II. 2 : Représentation physique de Fondation de Pasternak (Dutta, Roy et al. 2002).

Une formulation détaillée et la base de développement du modèle ont été discutées bien avant, dans la référence (Pasternak 1954). Des solutions analytiques pour les plaques sur des assises de type Pasternak avec un résumé de la dérivation du modèle ont été rapportées dans la littérature (Kerr 1965), (Wang, Xiang et al. 2001).

II.2.3. Modèles de Kerr

Une couche de cisaillement est introduite dans la fondation de Winkler et les constantes de ressort situées au-dessus et au-dessous de cette couche sont supposées être différentes selon cette formulation. La figure II.3 montre la représentation physique de ce modèle mécanique. L'équation différentielle qui gouverne ce modèle peut être exprimée comme suit :

$$\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right)R = \frac{K_p}{k_1}R + K_2 w_0 + K_p \nabla^2 w_0 \quad \text{II.3}$$

Où k_1 est la constante du ressort de la première couche ; k_2 est la constante de rappel de la deuxième couche ; w_0 est le fléchissement de la première couche.

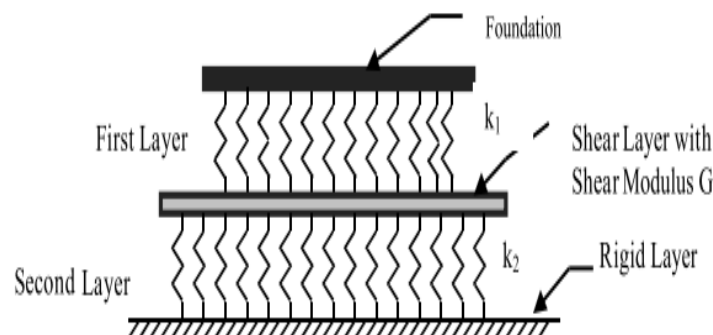


Figure II. 3 : Fondation de Kerr.

II.2.4. Modèles de Hetenyi

Ce modèle proposé dans la littérature (Hetényi and Hetbenyi 1946) peut être considérée comme un juste compromis entre deux approches extrêmes (à savoir, la fondation Winkler et continuum isotrope). Dans ce modèle, l'interaction parmi les ressorts discrets est accomplie par incorporant une poutre élastique ou une plaque élastique, qui subit uniquement une déformation en flexion, comme le montre la figure II.4 .Ainsi, la relation pression-déformation devient :

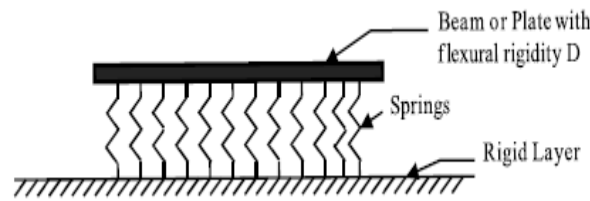


Figure II. 4 : Fondation Hetenyi (Winkler 1867).

$$p = kw + D\nabla^4 w \quad \text{II.4}$$

Où, D= rigidité en flexion de la plaque élastique.

$$= (E_p h_p^3) / (12(1 - \mu_p)^2) \quad \text{II.5}$$

p Est la pression à l'interface de la plaque et du ressort ; E_p and μ_p sont le module d'Young et celui de Poisson rapport du matériau de la plaque ; h_p est l'épaisseur de la plaque et

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \quad \text{II.6}$$

Ainsi, on voit que la rigidité en flexion des matériaux encastrés une poutre ou une plaque caractérise l'interaction entre l'élément à ressort du modèle Winkler. Descriptions détaillées de ce modèle ainsi que quelques exemples numériques sont disponibles dans la littérature (Hetényi and Hetbenyi 1946, Kerr 1964).

II.3. Synthèse des travaux antérieurs sur l'effet de fondation

(Ait Atmane et al. 2010) ont étudié les vibrations libres de plaques fonctionnellement graduées (FGP) simplement supportées, reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak, en utilisant une nouvelle théorie de déformation par cisaillement plus élevé. Ils ont analysé l'impact des paramètres élastiques de la fondation sur les caractéristiques de fréquence propre

des plaques FG. Leurs résultats peuvent servir de référence pour d'autres approches numériques et pour les théories raffinées des plaques.

(Shen and Zhu 2012) a étudié le comportement post-flambement de plaques sandwich à tôles de face CNT-RC reposant sur des fondations élastiques a été présenté sur la base d'un modèle micromécanique et d'une approche multi-échelle. Ils ont conclu que la rigidité de la fondation a un effet significatif sur le flambement en compression de la charge de compression et sur le comportement post-flambage.

(Zarfam, Khaloo et al. 2012) a présenté une formulation du comportement dynamique tridimensionnel d'une poutre sur fondation élastique (BOEF) sous des charges mobiles et une masse en mouvement est considérée avec les fondations de poutres considérées comme élastiques, de type Winkler dans deux directions transversales perpendiculaires. Il s'agit ce modèle pour la réponse en flexion des rails sous l'effet du poids du véhicule en déplacement lors d'une excitation aléatoire telle qu'un tremblement de terre ou le vent a lieu la valeur de la réponse des poutres sous l'effet d'une charge latérale, ils ont trouvé que dépend de la rigidité, de la vitesse et de la vitesse de la fondation fréquence prédominante de la charge latérale. L'évaluation des différentes rigidités de fondation sous différentes vitesses de charge indique que pour des valeurs de rigidité plus élevées et/ou une vitesse de charge inférieure.

Par ailleurs,(Arani, Kolahchi et al. 2013) ils ont analysé la vibration transversale non linéaire de feuilles de graphène orthotropes à double couche noyées dans un milieu élastique (constantes de ressort et de cisaillement des modèles de Winkler et Pasternak) sous gradient thermique en utilisant la théorie des plaques orthotropes à élasticité non locale (figure II.5). Ils ont indiqué qu'également que l'effet non linéaire représenté par le rapport de fréquence non linéaire est considérable pour les constantes de Winkler et Pasternak, le rapport d'aspect en longueur et le rapport d'aspect en épaisseur inférieurs, alors qu'il pourrait être négligé pour des valeurs plus élevées de ces paramètres.

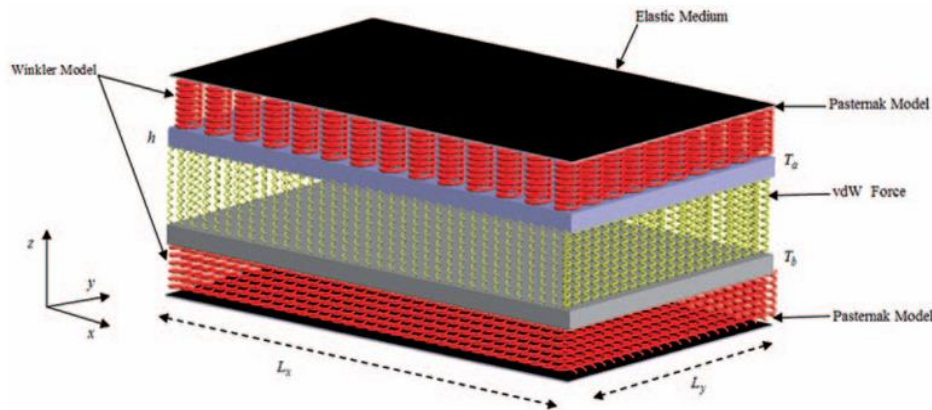


Figure II. 5 : Géométrie d'une feuille de graphène orthotrope double couche intégrée sous champ thermique (Arani, Kolahchi et al. 2013)

(Tabassian, Rezaeepazhand et al. 2013) a étudié stabilité dynamique de poutres sandwich intelligentes reposant sur une fondation élastique Winkler soumises à des charges axiales harmoniques appliquant un champ électrique au noyau électron-rhéologique, charge critique dynamique comme montre dans la figure II.6. Ils ont trouvé que la fondation élastique réduit la région instable et augmente la charge dynamique critique de la poutre intelligente.

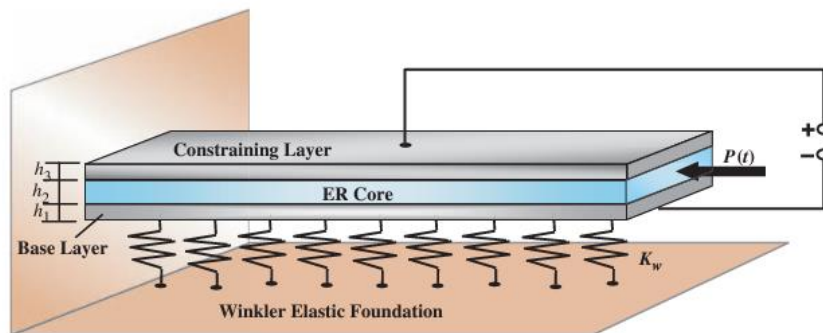


Figure II. 6 : une poutre sandwich intelligente avec un noyau ER reposant sur une fondation élastique. ER : électron-rhéologique (Tabassian, Rezaeepazhand et al. 2013).

(Behravan Rad and Shariyat 2013) ils ont étudié l'analyse de flexion et de contrainte de plaques annulaires bidirectionnelles à gradation fonctionnelle (FG) reposant sur des fondations Winkler-Pasternak à deux paramètres non uniformes et soumises à une traction normale et à un cisaillement dans le plan. Sont étudiées en utilisant la théorie tridimensionnelle exacte de l'élasticité. Les résultats obtenus montrent que le module d'élasticité des couches supérieures de la plaque est plus haut, le point maximum de la contrainte de cisaillement transversal se déplace vers les couches supérieures. De plus, dans les cas où la plaque repose sur une fondation de type Winkler ou Pasternak, la fondation a moins contribué au transport de charges.

(Kanani, Niknam et al. 2014) a estimé les vibrations libres et forcées de grande amplitude d'une poutre FG reposant sur une fondation élastique non linéaire contenant une couche de cisaillement et une non-linéarité cubique, elles sont étudiées à l'aide de la technique de Galerkin. Les résultats obtenus ont montré que l'augmentation de la rigidité non linéaire de la fondation élastique intensifie la non-linéarité de la réponse en fréquence et de la réponse temporelle des vibrations forcées de la poutre FG, bien que l'augmentation de la rigidité linéaire et la plus pure de la fondation ait un effet opposé.

(Akbaş and Sciences 2015) ils ont analysé des vibrations libres d'une poutre en porte-à-faux FGM fissurée sur les bords reposant sur la fondation Winkler-Pasternak est étudiée dans le cadre de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli en utilisant la méthode des éléments finis avec tenant compte de l'effet du paramètre de la fondation Winkler-Pasternak sur les fréquences naturelles et les fissures comme illustré dans la figure II.7. Ils ont conclu que le paramètre de rigidité de la fondation Winkler est très efficace pour réduire l'inconvénient des fissures et le paramètre de rigidité de la fondation Pasternak n'est pas efficace pour réduire l'inconvénient des fissures et les paramètres de rigidité de la fondation ont une grande influence sur les formes des modes de vibration.

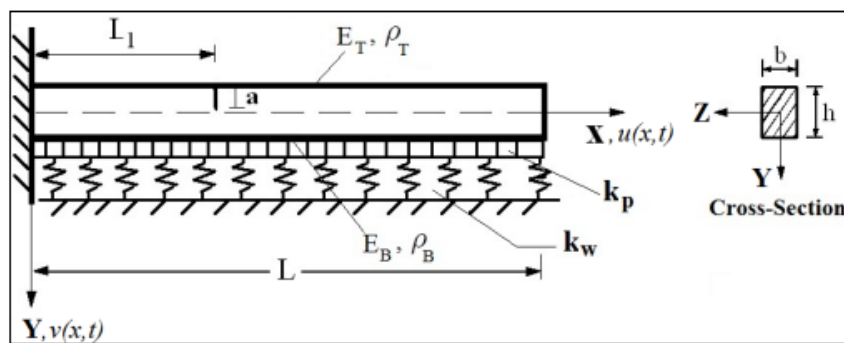


Figure II. 7 : Poutre FGM en porte-à-faux avec une fissure à bord ouvert reposant sur la fondation et la coupe transversale Winkler-Pasternak (Akbaş and Sciences 2015)

(Ma, Peng et al. 2015) ils ont étudié la réponse non linéaire d'une poutre sur fondation élastique soumise à une excitation harmonique est étudiée et l'effet de l'interaction sol-structure sur la résonance primaire de la poutre est analysé (figure II.8). Ils ont conclu que la réponse linéaire de la poutre sur fondation élastique, le paramètre de Winkler, k_0 est également important et dominant la nature dynamique du faisceau. Cependant, l'effet du paramètre de cisaillement k_1 sur la réponse non linéaire du faisceau, aux niveaux quantitatif et qualitatif, ne peut être négligé.

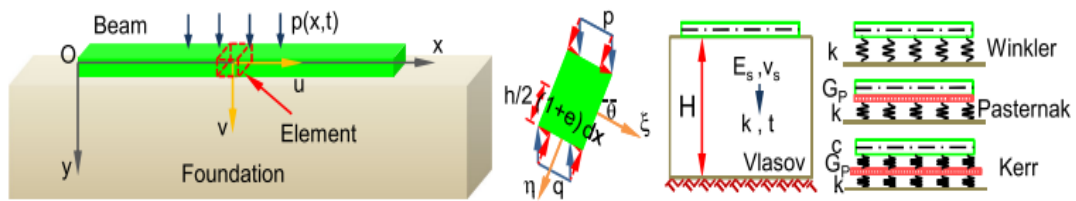


Figure II. 8 : poutre reposant sur la fondation élastique (Ma, Peng et al. 2015).

(Ait Atmane et al .2017) ont examiné l'efficacité d'une théorie des poutres pour analyser la flexion, les vibrations libres et le flambage de poutres constituées de matériaux fonctionnellement gradés (FGM) reposant sur une fondation élastique à deux paramètres. Leur étude a révélé que l'effet de l'étirement prédomine pour les poutres FG les plus courtes, et que la porosité contribue à une augmentation significative de la fréquence adimensionnelle et du déplacement transversal, tandis qu'elle diminue légèrement la charge de flambage adimensionnelle. Des analyses de sensibilité supplémentaires ont été menées sur la microstructure fonctionnellement graduelle, le rapport d'épaisseur et les rigidités des fondations.

(Akgöz and Civalek 2016) a étudié la réponse à la flexion statique de nanotubes de carbone à paroi unique (SWCNT) intégrés dans un milieu élastique est étudiée sur la base de modèles de microfaisceaux de déformation par cisaillement d'ordre supérieur en conjonction avec la théorie du gradient de déformation modifiée. Les milieux élastiques sont simulés par le modèle de fondation élastique Winkler. Les résultats ont illustré que le comportement en flexion des SWCNT dépend de la rigidité de la fondation élastique ainsi que des effets du cisaillement.

(Tossapanon and Wattanasakulpong 2016) a présente méthode de collocation Chebyshev est utilisée pour résoudre les problèmes de flambage et de vibration des poutres sandwich fonctionnellement classées (FG) reposant sur une fondation élastique à deux paramètres comprenant des ressorts de Winkler et des ressorts à couche de cisaillement. Ils ont conclu que les charges de flambage et les fréquences propres des poutres augmentent considérablement à mesure que les constantes de ressort de la fondation élastique augmentent, en particulier lorsque la constante de ressort de la couche de cisaillement augmente.

(Avcar 2016) a étudié les effets de la non-homogénéité des matériaux et de la fondation élastique à deux paramètres de Pasternak sur les paramètres de fréquence fondamentale des poutres simplement supportées comme illustré dans la figure II.9. Examinés à l'aide du TBT

ainsi que de la théorie des faisceaux d'Euler – Bernoulli, il a conclu que les valeurs des paramètres de fréquence fondamentale augmentent avec la prise en compte des fondations élastiques, La variation des paramètres de non-homogénéité et de densité a des effets néfastes sur les valeurs des paramètres de fréquence fondamentale et la présence de fondations élastiques diminue les effets de la non-homogénéité du matériau et du rapport longueur/profondeur sur les valeurs des paramètres de fréquence fondamentale La non-homogénéité des matériaux a plus d'influence sur les valeurs des paramètres de fréquence fondamentaux dans les cas de la fondation Winkler et de la théorie des faisceaux d'Euler-Bernoulli par rapport à la fondation Pasternak et au cas TBT.

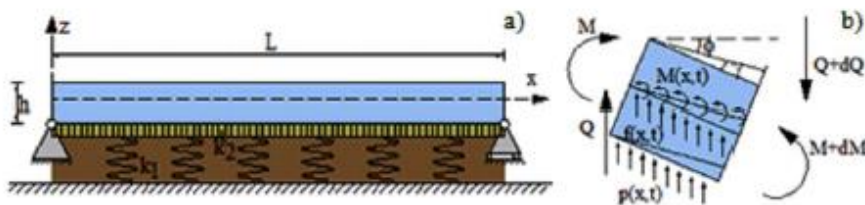


Figure II. 9 : (a) Coordonnées et géométrie de la poutre sur fondation élastique à deux paramètres de Pasternak, (b) élément de poutre (Avcâr 2016).

(Ebrahimi, Barati et al. 2016) a estimé une théorie des plaques raffinées non locales à quatre variables est développée pour examiner le comportement de flambage de nanoplaques constituées de matériaux magnéto-électro-élastiques fonctionnellement classés (MEE-FG) reposant sur la fondation Winkler-Pasternak. Les résultats obtenus que lorsque les constantes de Winkler et de Pasternak augmentent, les charges de flambement sans dimension augmentent. On en déduit qu'à paramètre Pasternak constant, une nanoplaque CCFF constituée de matériaux MEE-FG présente les charges de flambement les plus importantes, suivies par des plaques avec des bords limites CCCC, CSCS, CCSS, CSSS et SSSS.

(Akavci 2016) a présenté une nouvelle théorie des plaques de cisaillement hyperbolique et de déformation standard, présentée, est utilisée pour étudier l'analyse statique, des vibrations libres et du flambement des plaques sandwich supportées à gradation fonctionnelle sur une fondation élastique. Les résultats obtenus ont montré que l'augmentation des coefficients de rigidité de la fondation augmente la charge de flambement de la plaque est aussi évident que la fondation élastique a un effet significatif sur le comportement mécanique des plaques sandwich, et l'impact du coefficient de rigidité en cisaillement est plus prononcé que le coefficient de rigidité de Winkler.

Dans le même contexte, (Mahmoudi, Bachir-Bouiadjra et al. 2017) ils ont déterminé les caractéristiques dynamiques des plaques poreuses en FGM, à savoir les fréquences fondamentales. Ils ont étudié le type de fondation Pasternak avec son influence sur les fréquences des différents modes de vibration des plaques. Ils ont conclu que les paramètres K_p du modèle de Pasternak augmentent les fréquences fondamentales, donnant lieu à un comportement plus rigide.

(Shahsavari, Shahsavari et al. 2018) ils ont présenté une nouvelle théorie hyperbolique quasi-3D pour analyser les vibrations libres de plaques poreuses fonctionnellement graduées (FG) reposant sur des fondations élastiques Winkler, Pasternak et Kerr, comme le montre la figure II.10. Ils ont constaté que la couche de cisaillement de la fondation Pasternak et la couche de ressorts supplémentaire de la fondation Kerr joue un rôle dominant dans la fréquence de vibration des plaques FG. Ils ont conclu que l'élasticité des fondations est un facteur déterminant dans les distributions poreuses FG qui permettent d'obtenir la rigidité de plaque la plus élevée possible.

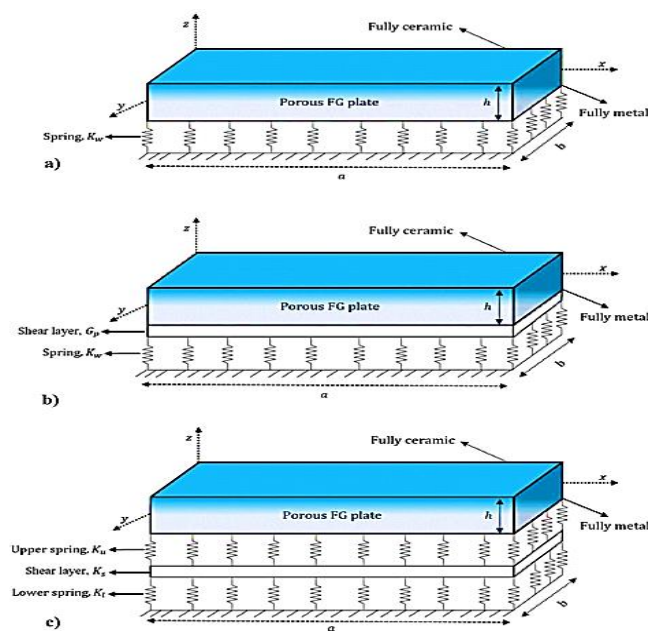


Figure II. 10 : La configuration de plaques FG rectangulaires reposant sur a) la fondation Winkler, b) la fondation Pasternak et c) la fondation Kerr (Shahsavari, Shahsavari et al. 2018).

(Avcar and Mohammed 2018) ont étudié la vibration libre de la poutre FG reposée sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak qui a été examinée. Dans le cadre de la théorie classique des poutres, avec les effets des conditions aux limites et des coefficients de rigidité de la fondation élastique de Winkler-Pasternak. Il a été constaté que les propriétés

fonctionnelles des matériaux, le type de conditions aux limites et la présence d'une fondation élastique sont importantes en termes de la vibration libre de la poutre.

(Li, Wu et al. 2018) ils ont analysé la vibration non linéaire et le flambage dynamique d'une plaque poreuse à gradation fonctionnelle (GPL-SFGP) en sandwich renforcé de plaquettes de graphène présenté dans la figure II.11. Les effets de la fondation élastique Winkler – Pasternak, de l'environnement thermique et de l'amortissement sont incorporés. Ils ont démontré que le support de la fondation élastique a un effet bénéfique sur la réponse dynamique non linéaire de la plaque. Avec l'augmentation des paramètres de la fondation Winkler-Pasternak, la flèche de la plaque peut être diminuée tandis que la charge de flambage peut être augmentée. Ils trouvent que l'impact de la rigidité de la couche de cisaillement de Pasternak est plus significatif que celui de Winkler, ce qui est démontré à la fois dans la réponse dynamique non linéaire et dans les analyses de flambage dynamique de la plaque.

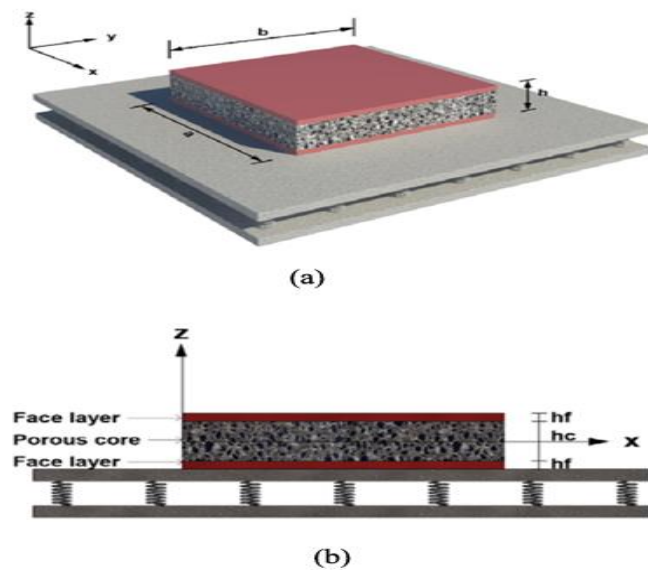


Figure II. 11 : (a) vue 3D et (b) vue de face de la plaque GPL-SFGP reposant sur la fondation élastique Winkler – Pasternak (Li, Wu et al. 2018).

(Kang, Wei et al. 2018) ils ont étudié les comportements de stabilité dynamique de la coque cylindrique circulaire orthotrope fonctionnellement graduée (FG) entourée par la fondation élastique à deux paramètres (Winkler-Pasternak) soumise à une charge linéairement croissante en tenant compte de l'effet d'amortissement (figure II.12). Ils ont conclu que la charge de flambement dynamique augmenterait en raison de l'effet de la fondation élastique de Winkler-Pasternak et le paramètre de Pasternak est plus sensible que celui de Winkler et L'influence du paramètre Pasternak est plus prononcée que celle de Winkler module de fondation sur la flèche

de la coque cylindrique. De plus, L'augmentation du module de fondation de Winkler réduirait La déflexion, tandis que l'augmentation du paramètre de Pasternak augmenterait la déflexion.

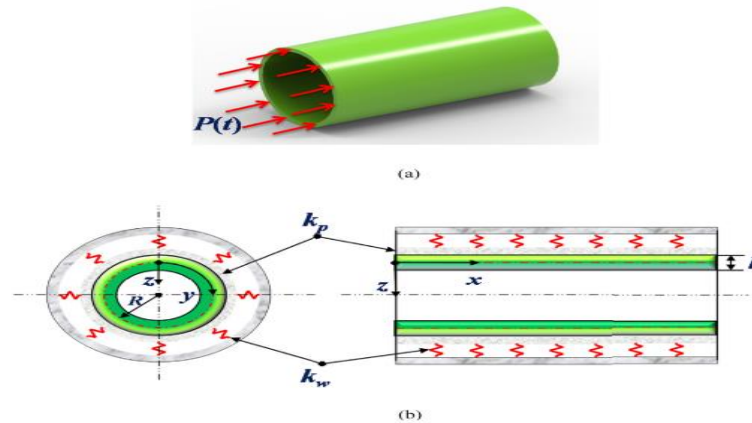


Figure II. 12 : (a) Géométrie de la coque cylindrique orthotrope FGM soumise à une charge linéairement croissante (b) Le système de coordonnées de la coque cylindrique orthotrope FGM coque entourée d'une fondation élastique Winkler-Pasternak (Kang, Wei et al. 2018).

(Chai, Li et al. 2019) ils ont présenté que les caractéristiques dynamiques non linéaires du sandwich en treillis panneaux composites reposant sur les fondations élastiques Winkler-Pasternak sous conditions aérodynamiques et Charges thermiques dans un flux d'air supersonique. Ils ont conclu que La fondation en couche de cisaillement peut supprimer efficacement le flambement thermique et le flottement du panneau composite sandwich en treillis, et la pression aérodynamique correspondante à laquelle les mouvements chaotiques apparaissent augmente avec l'augmentation des paramètres de la couche de cisaillement. De plus, La fondation Winkler ne peut pas améliorer le flottement limite du panneau composite sandwich en treillis effectivement. Cependant, les pressions aérodynamiques correspondant à la première bifurcation et chaotique les mouvements de la structure augmentent avec le Winkler paramètre de fondation augmentant.

(Nebab et al. 2019) ont étudié l'analyse statique de plaques fonctionnellement graduées (FG) reposant sur une fondation élastique variable et soumises à des charges mécaniques. Le milieu élastique a été modélisé comme une fondation élastique à deux paramètres (Pasternak-Winkler), avec une variation de la couche de Winkler le long d'un côté de la plaque, tandis que la couche de cisaillement de Pasternak a été supposée constante. Ils ont obtenu que la théorie proposée est efficace et précise pour prédire le comportement en flexion des plaques FG reposant sur une fondation élastique.

(Jena, Chakraverty et al. 2020) ont étudié les caractéristiques vibratoires d'un nanofaisceau poreux Functionally Graded (FG) intégré dans un substrat élastique de type Winkler-Pasternak comme présenter dans figure II.13. Ils ont conclu que les fréquences propres augmentent avec l'augmentation des paramètres élastiques sauf pour le deuxième mode de bord Serré-Serré, où certaines irrégularités apparaissent avec peu de combinaisons pour les fondations élastiques, et ces croissances sont plus remarquables avec des modes plus élevés.

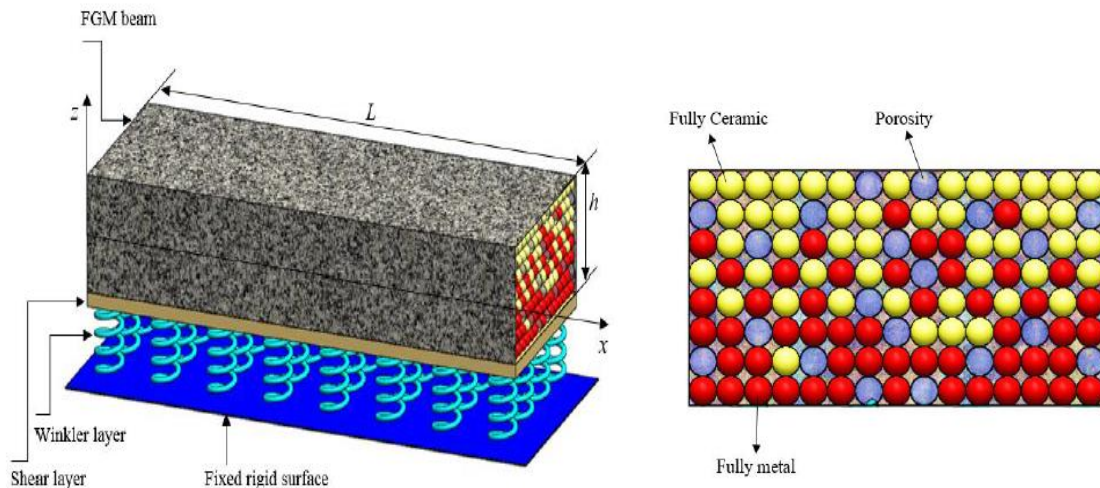


Figure II. 13 : a) Diagramme schématique d'une nano-poutre FG rectangulaire intégrée dans la fondation élastique Winkler-Pasternak. b) Représentation graphique de la section rectangulaire de la nano-poutre FG avec une porosité uniformément répartie (Jena, Chakraverty et al. 2020).

(Nebab et al. 2020) ont utilisé une approche analytique pour développer les réponses dynamiques de plaques composites avancées reposant sur des fondations élastiques variables, en se basant sur une théorie quasi-3D. Les fondations élastiques à deux paramètres sont considérées, où le paramètre de Winkler reste constant tandis que le paramètre de Pasternak varie le long du côté longitudinal de la plaque selon trois distributions (linéaire, parabolique et sinusoïdale). Ils ont conclu que les validations du modèle proposé par rapport à la littérature existante, démontrant la précision de la théorie quasi-3D dans la prédiction de l'effet des fondations élastiques variables sur les réponses dynamiques des plaques composites avancées.

(Bennai et al. 2022) ont étudié le comportement vibratoire et les caractéristiques de propagation des ondes dans des plaques fonctionnellement graduées reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak-Kerr, en utilisant une théorie de déformation par cisaillement supérieur en 2D (HSDT) comme illustré dans la figure II.14. ils ont analysé l'impact de divers paramètres de la fondation élastique. Les résultats montrent que la théorie proposée est efficace pour

prévoir les fréquences et les vitesses de phase de propagation des ondes dans ces plaques sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak-Kerr.

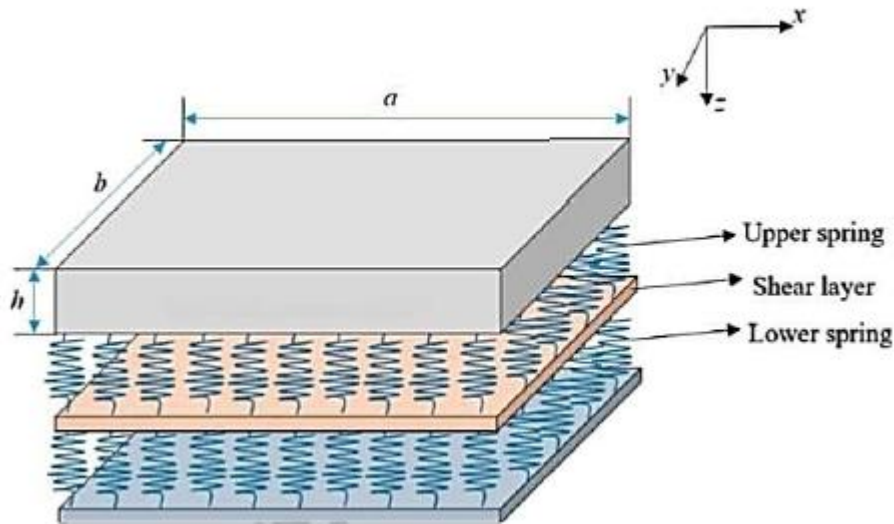


Figure II. 14 : La géométrie de la plaque FGM sur un élastique fondation (Bennai et al. 2022).

(Rahmani, Faroughi et al. 2021) ils ont analyse complète du comportement vibratoire est réalisée sur des plaques composites stratifiées antisymétriques reposant sur des fondations viscoélastiques soumises à des effets thermiques utilisés la méthode de quadrature différentielle généralisée (GDQM) est utilisée pour prédire la réponse vibratoire et les fréquences propres. Les résultats obtenus ont montré que L'augmentation du coefficient de Winkler augmente la fréquence naturelle fondamentale et avec l'augmentation du rapport d'aspect, la variation du coefficient de Winkler n'a pas d'effet significatif sur la fréquence fondamentale. L'augmentation du coefficient viscoélastique, diminue la fréquence naturelle et augmente le rapport d'amortissement. La fréquence fondamentale augmente jusqu'à une certaine valeur avec l'augmentation du coefficient de Pasternak.

Bennai et al. 2022 ont étudié avec succès la dispersion des ondes dans des plaques en matériaux fonctionnellement gradués reposant sur des fondations élastiques à deux paramètres, en utilisant une théorie de cisaillement d'ordre supérieur quasi-3D. Ils ont conclu que les plaques reposant sur une base élastique présentent des fréquences propres et des vitesses de phase inférieures à celles des plaques sans fondation.

(Pourseifi and Monfared 2022) a étudié la réponse dynamique d'une poutre d'Euler-Bernoulli reposant sur une fondation viscoélastique non linéaire sous l'action d'une masse en mouvement

comme le montre la figure II.15. De plus, ils ont pris en considérant l'effet d'étirement de l'axe neutre de la poutre. Ils ont conclu que la déflexion dynamique de la poutre diminue avec l'augmentation des valeurs de rigidité linéaire et non linéaire de la fondation.

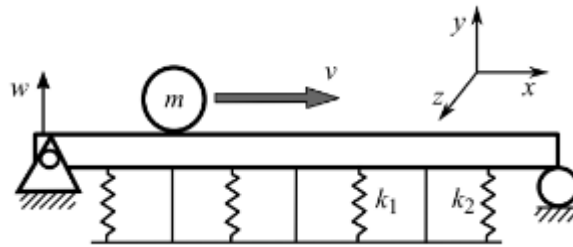


Figure II. 15 : un faisceau sous l'influence d'une masse concentrée en mouvement sur une fondation viscoélastique linéaire et non linéaire (Pourseifi and Monfared 2022).

(Le, Doan et al. 2022) ils ont examiné des plaques rectangulaires reposant sur une fondation élastique discontinue et soumises à des charges statiques. Deux paramètres ont été analysés. En particulier, l'impact de la fondation discontinue et l'effet Flex électrique sont étudiés comme présenté dans la figure II.16. Ils ont conclu que l'influence de la fondation élastique discontinue est évidente à mesure que deux paramètres de fondation élastique et le coefficient Flex électrique augmentent. À mesure que la surface élastique de la fondation augmente, le déplacement maximal de la plaque diminue.

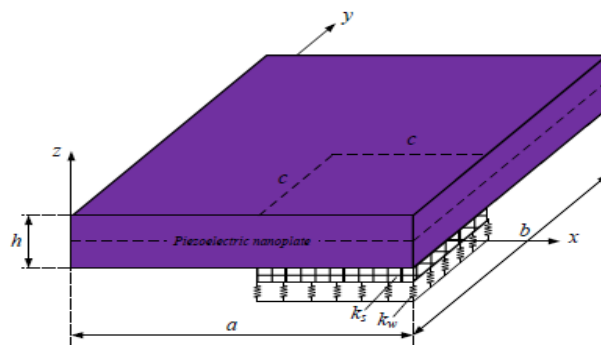


Figure II. 16 : nano-plaque reposant partiellement sur une fondation élastique discontinue (Le, Doan et al. 2022).

(Kanwal, Nawaz et al. 2023) ont analysé des fréquences propres des poutres de cisaillement fini, de Rayleigh et d'Euler-Bernoulli au-dessus de la fondation Pasternak (figure II.17). Ils ont examiné que l'influence de la déformation par cisaillement, de l'inertie rotative et des paramètres de fondation. Ils ont conclu que la mise en place de la fondation élastique Winkler a entraîné une rigidité de la poutre en raison de l'augmentation de la fréquence en réponse à la

valeur croissante de la rigidité élastique de la fondation est les résultats obtenus résultats ont indiqué que les fréquences propres augmentent en raison de la couche de cisaillement et de la constante de fondation, néanmoins, la considération de la couche de cisaillement est plus dominante.

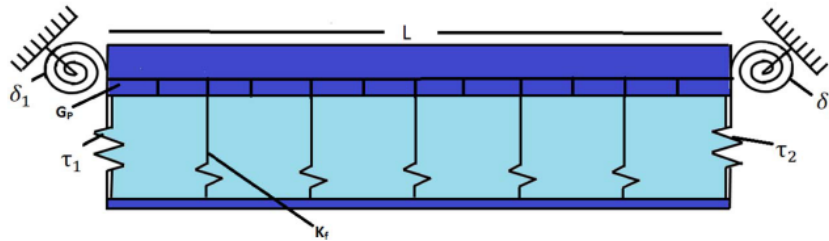


Figure II. 17: Configuration générale du faisceau (Kanwal, Nawaz et al. 2023).

(Nebab et al. 2023) ont examiné une nouvelle approche quasi-3D basée sur une théorie intégrale de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), utilisant une fonction de forme de troisième ordre. Cette méthode a été employée pour analyser les caractéristiques de vibration libre d'une poutre en matériau poreux fissuré (FGM), reposant sur une fondation élastique à trois paramètres (Winkler/Pasternak/Kerr). Leur conclusion met en avant l'intégration d'un modèle mathématique représentant les différentes configurations de fondations (Winkler/Pasternak/Kerr) dans l'hamiltonien pour dériver les équations du mouvement. De plus, le faisceau FGM examiné dans cet article est supposé être composé de matériaux dont la distribution varie selon une loi de puissance.

Récemment, (Mamen, Bouhadra et al. 2024) ils a été estimé une formulation analytique présentait des résultats thermodynamiques non linéaires de plaques fonctionnellement graduées basées sur Winkler/Pasternak et Kerr comme montre dans la figure II.18. Ils ont démontré qu'augmenter les paramètres élastiques de la fondation améliorerait la réponse thermodynamique des plaques FG, néanmoins cette amélioration n'aurait aucun effet sur l'effet du changement de température (ΔT) sur les fréquences fondamentales de ces structures.

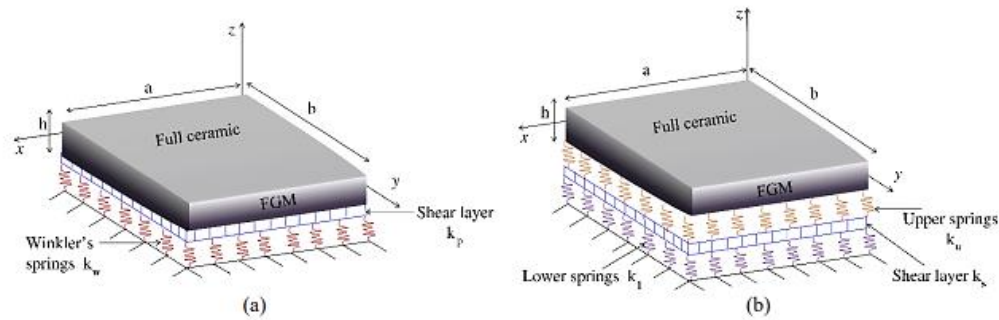


Figure II. 18 : Géométrie et système de coordonnées des plaques carrées FG reposant sur des fondations élastiques : (a) fondation Winkler-Pasternak et (b) fondation Kerr (Mamen, Bouhadra et al. 2024).

II.4. Conclusion

Pour conclure cette synthèse des travaux antérieurs sur les fondations de structures, il est évident que la recherche dans ce domaine est riche en connaissances et en avancées significatives. Les études passées ont jeté les bases essentielles pour comprendre le comportement des matériaux de support sous différentes contraintes et charges, ainsi que pour développer des modèles précis permettant de prédire leur performance dans une variété de conditions.

Grâce aux recherches antérieures, nous avons acquis une compréhension approfondie des matériaux traditionnels utilisés dans la construction de structures, ainsi que des méthodes de modélisation et de simulation pour évaluer leur comportement. Ces connaissances ont été essentielles pour la conception et l'optimisation de structures sûres, durables et efficaces dans de nombreux domaines d'application, allant de la construction civile à l'ingénierie mécanique.

Cependant, les travaux antérieurs ont également mis en lumière des défis persistants, tels que la durabilité à long terme des matériaux de support, l'adaptation aux charges variables et l'intégration de nouvelles technologies et matériaux innovants. Ces défis soulignent l'importance continue de la recherche dans ce domaine et la nécessité d'explorer de nouvelles approches pour relever ces défis.

En conclusion, cette synthèse des travaux antérieurs illustre l'évolution dynamique de la recherche sur les assises élastiques et met en évidence les progrès réalisés jusqu'à présent, tout en identifiant les thématiques nécessitant une attention accrue dans les recherches futures. En

combinant les connaissances existantes avec des approches novatrices, nous sommes bien positionnés pour relever les défis futurs et développer des modèles de fondation avec un paramétrage pratique et explicite de ce fait nous allons combiner les effets de la porosité et des différents types de fondation pour mieux expliciter ces effets pour une structure de type plaque en matériau avancé.

Chapitre III

*Analyse mathématique des
plaques en FGM sur différent
types des fondations*

III.1. Introduction

L'analyse mathématique des plaques poreuses en FGM sur plusieurs types de fondations élastiques représente une frontière passionnante de la recherche en ingénierie des matériaux et des structures. Ces plaques imparfaites, caractérisées par une distribution graduelle de leurs propriétés à travers leur épaisseur, présentent des applications variées dans des domaines tels que l'isolation thermique, la filtration des fluides et la conception de revêtements résistants à l'usure.

Dans cette étude, nous nous proposons d'examiner de manière approfondie le comportement vibratoire de ces plaques poreuses FGM lorsqu'elles sont soumises à une oscillation naturelle, reposant sur plusieurs types de fondations élastiques. Cette analyse revêt une importance particulière dans la mesure où elle permettra de mieux comprendre la réponse structurelle de ces matériaux complexes dans des situations pratiques, ce qui est crucial pour leur conception et leur utilisation efficaces.

En mettant l'accent sur l'aspect mathématique de cette analyse, nous chercherons à comprendre les modèles théoriques robustes et des méthodes numériques précises pour prédire le comportement des plaques poreuses FGM dans des configurations variées de fondations élastiques. Cette approche nous permettra d'explorer en profondeur les interactions entre les caractéristiques intrinsèques des plaques poreuses FGM et les propriétés mécaniques des fondations élastiques, ouvrant ainsi la voie à des applications innovantes dans divers domaines de l'ingénierie.

En résumé, cette étude vise à la compréhension du comportement dynamique des plaques poreuses en FGM en examinant l'influence des différents types de plastiques. Il a développé des modèles mathématiques avancés.

III.2. Théorie et formulation

III.2.1. Matériaux et plaques fonctionnellement

Dans ce travail, nous considérons une plaque céramo-métallique graduée de dimensions $(a \times b \times h)$ dans le cadre (x, y, z) . Les propriétés matérielles de la plaque FG, notamment le module d'Young $E(z)$ et la densité de masse $\rho(z)$, sont supposées varier continuellement à travers l'épaisseur reposé sur une fondation élastique.

Distribution de la loi de puissance :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad \text{III.1}$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p$$

Où E représente le module d'Young et ρ représente la densité de masse ; les indices m et c représentent respectivement les constituants métalliques et céramiques et p est l'indice de la loi de puissance h est l'épaisseur totale de la plaque et (z/h) est l'ordonnée de l'épaisseur Dans cette étude, Étant donné que les influences de la variation du coefficient de Poisson ν sur le comportement des plaques FG sont très faibles, il est supposé constant pour des raisons de commodité.

III.3. Matériau à gradient fonctionnel avec l'effet de plaque poreuse

Examiner l'impact de la porosité sur la vibration naturelle, en se concentrant d'abord sur son effet sur les propriétés mécaniques. Trois profils de distribution de la porosité en gradient fonctionnel (FG), à savoir la distribution symétrique (FGS), asymétrique (FGA) et uniforme (UD), sont analysés pour évaluer l'effet de cette dispersion. En fonction de la distribution de la porosité, le module élastique E^c et la densité ρ^c de la couche centrale avec porosité intégrée varient en fonction de la hauteur (z) comme suit (Moradi-Dastjerdi, Behdinin et al. 2020)

$$\text{FGU : } E^c = \left(\frac{2}{\pi} \sqrt{1-\lambda} - \frac{2}{\pi} + 1 \right)^2 E(z) \text{ et } \rho^c = \left(\frac{2}{\pi} \sqrt{1-\lambda} - \frac{2}{\pi} + 1 \right) \rho(z) \quad \text{III.2}$$

$$\text{FGS : } E^c = \left(1 - \lambda \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right) E(z) \text{ et } \rho^c = \left(1 - \lambda_m \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right) \rho(z) \quad \text{III.3}$$

$$\text{FGA : } E^c = \left(1 - \lambda \cos \left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4} \right) \right) E(z) \text{ et } \rho^c = \left(1 - \lambda_m \cos \left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \rho(z) \quad \text{III.4}$$

Où $\lambda_m = 1 - \sqrt{1-\lambda}$ est le paramètre de porosité, qui montre le volume de porosité dans les plaques, une plaque parfaite et sans vides est représentée par $\lambda = 0$. Le coefficient de Poisson du plaque poreux est également évalué comme suit (Moradi-Dastjerdi, Behdinin et al. 2020):

$$\nu^c = 0.221\beta + \nu(0.342\beta^2 - 1.21\beta + 1) \quad \text{III.5}$$

Et

$$\beta = 1 - \frac{\rho^c}{\rho} \quad \text{III.6}$$

III.4. Fondations élastiques

III.4.1. Fondation de Winkler-Pasternak

Les plaques FG sont supposées reposer sur des fondations élastiques à deux couches. La première couche provient de la source Winkler sans effet réfléchi couplée entre elles et d'une couche de cisaillement de Pasternak, qui reliait les sources Winkler. Vous trouverez ci-dessous la formulation générale des fondations Pasternak élastique Winkler

$$R_e = K_w w - K_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \text{III.7}$$

Lorsque la réaction de la fondation élastique R_e , K_p est lorsque la couche de cisaillement est constante, si la couche de cisaillement n'est pas prise en compte, la fondation élastique devient la fondation de Winkler et K_w est le paramètre de Winkler.

III.4.2. Fondation de Kerr

La fondation du modèle Kerr est un modèle élastique à trois paramètres composés de couches élastiques supérieures et inférieures séparées de rigidités K_u et K_l (modélisées par des ressorts distribués) et d'une couche de cisaillement de rigidité K_s . La réaction du modèle de fondation Kerr est définie comme suit (Shahsavari et al.2018) :

$$\left(R_{\text{kerr}} - \left(\frac{K_s K_u}{K_l + K_u} \right) \nabla^2 R_{\text{kerr}} \right) = \left(\frac{K_l K_u}{K_l + K_u} \right) w_0 - \left(\frac{K_s K_l}{K_l + K_u} \right) \nabla^2 w_0 \quad \text{III.8}$$

III.5. Équations régissant

Le champ de déplacement pris en compte dans cette étude est représenté par quatre inconnues sous forme intégrale, ce qui permet de réduire le nombre d'inconnues. Le champ de déplacement est le suivant :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + p_1 f(z) \theta(x, y, z) dx, \quad \text{III.9 (a)}$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + p_2 f(z) \theta(x, y, z) dx, \quad \text{III.9 (b)}$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad \text{III.9 (c)}$$

Et,

$$f(z) = z \left(\frac{5}{4} - \frac{5z^2}{4h^2} \right), \quad g(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \quad \text{III.10}$$

Et : u , v et w sont les composantes de déplacement le long des directions de coordonnées x , y et z respectivement. u_0 et v_0 désignent le déplacement dans les directions des coordonnées x et y en un point de la surface médiane de la plaque. w_0 Et θ désignent respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal.

Pour obtenir les équations, nous supposons qu'il n'y a que de petites déformations élastiques ou que les déplacements et rotations sont minimales et respectent la loi de Hooke. Sur la base de cette formulation, les relations déformation-déplacement sont représentées par la notation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad \text{III.11}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x \partial^2 y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \theta \\ p_2 \theta \\ p_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + p_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad \text{III.12}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_2 \int \theta dy + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ p_1 \int \theta dx + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

La dérivation du format de l'intégrale non définie donnée dans la relation de déformation peut être simplifiée en utilisant la relation de dispersion comme indiqué ci-dessous :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx &= A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial x'}, \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial x'}, \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x'}, \\ \int \theta dy &= B' \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{aligned} \quad \text{III.13}$$

Où les coefficients A' et B' sont supposés selon la technique de solution ; dans ce cas, la technique est utilisée relation de dispersion. Par conséquent, A' , B' , p_1 et p_2 sont les suivants

$$A' = \frac{1}{\alpha^2}, B' = \frac{1}{\beta^2}, p_1 = \alpha^2, p_2 = \beta^2 \quad \text{III.14}$$

Selon la loi de Hooke, les relations contrainte-déformation des plaques fonctionnellement graduées sont définies comme suit

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad \text{III.15}$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ sont respectivement les composantes de contrainte et de déformation. En utilisant les propriétés matérielles. Les coefficients de rigidité Q_{ij} peuvent être donnés sous la forme

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, Q_{12} = Q_{13} = Q_{33} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, Q_{11} = Q_{22} = Q_{31} = Q_{32} = Q_{33} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad \text{III.16}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_2 \int \theta dy + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ P_1 \int \theta dx + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \begin{pmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x \partial^2 y} \end{pmatrix} \quad \text{III.17}$$

III.6. Équations de mouvement

Les équations du mouvement pour vibration des plaques FG reposant sur des fondations élastiques Kerr sont dérivées en utilisant le principe de Hamilton. Le principe peut être exprimé sous une forme analytique :

$$\int_0^T (\delta U + \delta U_{ef} - \delta k) dt = 0 \quad \text{III.18}$$

Où δ indique une variation, et U , U_{ef} et K représentent respectivement l'énergie de déformation de la plaque FG, l'énergie de déformation des fondations élastiques et l'énergie cinétique. La variation de l'énergie de déformation de la plaque écrite par :

$$\delta U = \int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV$$

$$\int_A \left(\begin{array}{l} N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + \\ M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + R_{yz}^s \delta k_{yz}^s + R_{xz}^s \delta R_{xz}^s \end{array} \right) dA \quad \text{III.19}$$

Où ε ou σ sont les vecteurs contraintes et déformations ; et $N_i^i M_i^i, R_i^i$ sont les résultats de ce qui suit intégrations

$$\left\{ \begin{array}{ccc} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{array} \right\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ z \\ f(z) \end{array} \right\} dz \quad \text{III.20}$$

Et

$$(R_{xz}^s, R_{yz}^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \quad \text{III.21}$$

Après cela, la variation de l'énergie cinétique δK est exprimé comme

$$\delta K = \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dv$$

$$= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\delta \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\delta \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right.$$

$$+ J_1 \left((P_1 A') \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + (P_2 B') \left(\dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right)$$

$$+ I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + P_2 \left((P_1 A')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}_0}{\partial x} \right) + (P_2 B')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}_0}{\partial y} \right) \right)$$

$$- J_2 \left((P_1 A') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + (P_2 B') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right) dA$$

III.22

Les termes d'inertie sont définis par ce qui suit des équations comme

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, g(z), z, z^2) \rho(z) dz \quad \text{III.23}$$

$$(J_1, J_2, K_2) = \sum_{n=1}^2 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (f, z, f, f^2) \rho(z) dz$$

La variation de l'énergie de déformation de la variable fondations élastiques indiquées comme

$$\delta U_{ef} = \int_A \left(K_w w_0 \delta w_0 - K_s \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{d^2 w_0}{dy^2} \right) \delta w_0 + \psi \right) dA \quad \text{III.24}$$

Et

$$\psi = \left(\frac{k_l \cdot k_u}{k_l + k_u} \right) + \left(\left(\frac{k_l \cdot k_s}{k_l + k_u} \right) \cdot (\alpha^2 \cdot \beta^2) \right) \quad \text{III.25}$$

En utilisant les relations déplacement-déformation généralisées (équations (III.9(a) et (III.12)) et les relations contrainte-déformation (III.15), et par appliquer l'intégration par parties et les principes fondamentaux lemme du calcul vibrationnel et collecte des coefficients de δu , δv , δw , $\delta \theta$ et $\delta \varphi$ dans l'équation. Les équations du mouvement sont obtenues comme

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + p_1 J_1 A' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \quad \text{III.26(a)}$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + J_1 p_2 B' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \quad \text{III.26(b)}$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} - k_w w_0 - k_s \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - \psi = I_0 \ddot{w}_0 \\ & + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) + I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left(p_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + p_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad \text{III.26(c)}$$

$$\begin{aligned} \delta \theta : & -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (P_1 A' + P_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + P_1 A' \frac{\partial R_{xz}^s}{\partial x} + P_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\ & - k_2 \left((P_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (P_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) + J_2 \left(p_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + p_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad \text{III.26(d)}$$

En remplaçant l'équation. (III.12) dans l'équation. (III.15) et les suivants résultats dans l'équation. (III.22) dans toute l'épaisseur de la plaque FG fondation élastique Kerr au repos, les résultantes de contraintes sont exprimées comme

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ K^b \\ K^s \end{Bmatrix}, R = A^s \gamma \quad \text{III.27}$$

Dans lequel

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\} \quad \text{III.28}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0\}, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\} \quad \text{III.29}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad \text{III.30}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad \text{III.31}$$

$$S = \{S_{xy}^s, S_{yz}^s\}^t, \gamma = \{\gamma_{xy}^s, \gamma_{yz}^s\}^t, A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \quad \text{III.32}$$

Où les composants de rigidité sont donnés sous la forme

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \quad \text{III.33}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11}(1, z, z, f(z), zf(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad \text{III.34}$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{44} [g(z)]^2 dz \quad \text{III.35}$$

Dans lequel en remplaçant Eq. (III.28) pour l'équation. (III.27), la motion Les équations de la théorie proposée pour les plaques FG peuvent être exprimées en termes de déplacements (δu , δv , δw et $\delta \theta$) comme

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + \quad \text{III.36(a)}$$

$$(B_{66}^s (p_1 A' + p_2 B')) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{11}^s p_1 + B_{12}^s p_2) \frac{\partial \theta}{\partial x} - I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2 \partial x} w_0 - J_1 p_1 A' \frac{\partial^3 \theta_0}{\partial t^2 \partial x} = 0$$

$$\text{III.36(b)}$$

$$\begin{aligned}
& A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{11} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + \left(B_{66}^s (p_1 A' + p_2 B') \right) \\
& \frac{\partial^3 \theta_0}{\partial x^2 \partial y} + (B_{22}^s p_2 + B_{12}^s p_1) \frac{\partial \theta}{\partial y} - I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial t^2 \partial y} w_0 - J_1 p_2 B \frac{\partial^3 \theta_0}{\partial t^2 \partial x} = 0
\end{aligned} \tag{III.36(c)}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} \\
& - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - k_w w_0 - k_s \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - \psi - I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_1 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial t^2 \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial t^2 \partial y^2} \right) \\
& - J_2 \left(p_1 A' \frac{\partial^4 w_0}{\partial t^2 \partial x^2} + p_2 B' \frac{\partial^4 w_0}{\partial t^2 \partial y^2} \right) = 0
\end{aligned} \tag{III.36(d)}$$

$$\begin{aligned}
& - (B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2) \frac{\partial u_0}{\partial x} - (B_{66}^s (p_1 A' + p_2 B')) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} - (B_{66}^s (p_1 A' + p_2 B')) \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial x^2} - (B_{11}^s p_1 + B_{22}^s p_2) \frac{\partial v_0}{\partial y} \\
& - (D_{11}^s p_1 + D_{12}^s p_2) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2(D_{66}^s (p_1 A' + p_2 B')) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + (D_{12}^s p_1 + D_{22}^s p_2) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - H_{12}^s p_1^2 \theta - H_{22}^s p_2^2 \theta \\
& - 2H_{12}^s k_1 k_2 \theta - \left((p_1 A' + k_1 B')^2 H_{66}^s \right) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{44}^s (p_2 B')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + A_{55}^s (p_1 A')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\
& - J_1 \left(p_1 A' \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t^2} + p_2 B' \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) - J_2 \left(p_1 A' \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + p_2 B' \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + k_2 \left(\begin{array}{l} (p_1 A')^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} \\ (p_2 A')^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} \end{array} \right) = 0
\end{aligned}$$

III.7. Solution analytique

Le formulaire suivant peut être utilisé pour exprimer la de Navier pour une plaque FG reposant sur une fondation élastique

$$\left\{ \begin{array}{l} U_0(x, y, t) \\ V_0(x, y, t) \\ W_0(x, y, t) \\ \theta_0(x, y, t) \end{array} \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{array} \right\} \tag{III.37}$$

Et U , V , W et X sont les coefficients de l'amplitude et ω est la fréquence de vibration libre de la plaque ; $\sqrt{i} = -1$ est l'unité imaginaire quand l'équation. (III.38) remplace l'équation. (III.37) ce qui suit le problème apparaît

$$\left(\left(\begin{array}{cccc} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{array} \right) - \omega^2 \left(\begin{array}{cccc} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{array} \right) \right) \left\{ \begin{array}{l} U \\ V \\ \theta \\ X \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \tag{III.38}$$

Où

$$\begin{aligned}
S_{11} &= -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2), S_{12} = -\alpha\beta(A_{12} + A_{66}), \\
S_{13} &= i\alpha(B_{11}\alpha^2 + B_{12}\beta^2 + 2B_{66}\beta^2), S_{14} = i\alpha(B_{11}^s P_1 + B_{12}^s k_2 - (P_1 A' + P_1 B') B_{66}^s \beta^2), \\
S_{21} &= -\alpha\beta(A_{12} + A_{66}), S_{22} = -(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2), \\
S_{23} &= i\beta(B_{22}\beta^2 + B_{12}\alpha^2 + 2B_{66}\alpha^2), S_{24} = i\beta(B_{22}^s P_2 + B_{12}^s P_1 - (P_1 A' + P_1 B') B_{66}^s \alpha^2), \\
S_{13} &= -i\alpha(B_{11}\alpha^2 + B_{12}\beta^2 + 2B_{66}\beta^2), S_{23} = i\beta(B_{22}^s \beta^2 + B_{12}^s \alpha^2 + 2B_{66}^s \alpha^2), \\
S_{33} &= -(D_{11}^s \alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2 \beta^2 + D_{22}^s \beta^4) - k_w - k_p(\alpha^2 + \beta^2) - \psi \\
S_{34} &= -k_1(D_{11}^s \alpha^2 + D_{22}^s \beta^2) + 2(P_1 A' + P_2 B') D_{66}^s \alpha^2 \beta^2 - P_2(D_{22}^s \beta^2 + D_{12}^s \alpha^2), \\
S_{41} &= -i\alpha(B_{11}^s P_1 + B_{12}^s P_2 - (P_1 A' + P_2 B') B_{66}^s \beta^2), \\
S_{42} &= -i\beta(B_{22}^s k_2 + B_{12}^s P_2 - (P_1 A' + P_2 B') B_{66}^s \alpha^2), \\
S_{43} &= -P_1(D_{11}^s \alpha^2 + D_{12}^s \beta^2) + 2(P_1 A' + P_2 B') D_{66}^s \alpha^2 \beta^2 - P_2(D_{22}^s \beta^2 + D_{12}^s \alpha^2), \\
S_{44} &= -P_1(H_{11}^s P_1 + H_{12}^s P_2) - (P_1 A' + P_2 B') H_{66}^s \alpha^2 \beta^2 - P_2(H_{22}^s P_2 + H_{12}^s P_1) - (P_1 A')^2 A_{55}^s \alpha^2 - (P_2 B')^2 A_{44}^s \beta^2,
\end{aligned}$$

III.39

Et

$$\begin{aligned}
m_{11} &= -I_0, m_{12} = 0, m_{13} = i\alpha I_1, m_{14} = m_{41} = iP_1 J_1 A' \alpha, \\
m_{21} &= 0, m_{22} = -I_0, m_{23} = i\beta I_1, m_{24} = iP_2 J_1 B' \beta, \\
m_{31} &= -\alpha I_1, m_{32} = -i\beta I_1, m_{33} = -I_0 - I_2(\alpha^2 + \beta^2), m_{34} = -J_2(P_1 A' \alpha^2 + P_2 B' \beta^2), \\
m_{42} &= iP_2 J_1 B' \beta^2, m_{43} = -J_2(P_1 A' \alpha^2 + P_2 B' \beta^2), m_{44} = -P_2\left((P_1 A')^2 \alpha^2 + (P_2 B')^2 \beta^2\right),
\end{aligned}$$

III.40

III.8. Conclusion

Dans cette étude, nous avons mené une analyse mathématique des plaques poreuses en FGM sur plusieurs types de fondations élastiques. Notre exploration visait à mieux comprendre le comportement mécanique de ces matériaux complexes dans des conditions d'appuis simples sur tous les côtés, en tenant compte des interactions entre les caractéristiques des plaques poreuses et les propriétés des fondations élastiques.

À travers notre travail, nous avons développé un modèle théorique robustes et des méthodes numériques précises pour prédire le comportement vibratoire des plaques poreuses en FGM dans différentes configurations de fondations élastiques. Ces modèles ont permis d'explorer en profondeur les effets des variations graduelles de propriétés à travers l'épaisseur des plaques poreuses, ainsi que l'influence des différentes fondations élastiques sur leur réponse structurelle.

En conclusion, ce développement constitue une contribution significative à la recherche sur les matériaux et structures avancés, en mettant en lumière l'importance de l'analyse mathématique pour comprendre et exploiter pleinement le potentiel des plaques poreuses en FGM dans divers domaines d'application. À travers notre travail, nous espérons inspirer de nouvelles avancées et stimuler des recherches futures dans ce domaine fascinant de l'ingénierie des matériaux on ce qui reste nous allons faire, dans le chapitre IV, une validation puis une étude paramétrique des différents paramètre géométriques et matérielles d'une plaque imparfaite sur fondation élastique.

Chapitre IV

*Etude paramétrique de la
dynamique des plaques
imparfait sur un fondation
élastique*

IV.1. Introduction

Dans cette section, nous présenterons l'analyse des vibrations libres d'une plaque FG reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak-Kerr, en utilisant la théorie d'ordre élevé pour étudier l'effet couplé de ces fondations élastique, supposées avoir deux paramètres variants simultanément. Les résultats de l'analyse des vibrations libres de la plaque FG seront exposés. L'objectif de ce chapitre est de présenter et de discuter les résultats de l'analyse des vibrations naturelles des plaques FGM en prenant en compte l'effet de la porosité. Trois profils de distribution de la porosité en gradient fonctionnel pour les plaques FGM, à savoir la distribution symétrique (FGS), asymétrique (FGA) et uniforme (UD), seront analysés afin d'évaluer l'effet de cette dispersion.

IV.2. Résultats numériques et discussion

Dans cette étude une plaque FG rectangulaire de longueur a , largeur b et épaisseur constante h , est étudiée dans un système de coordonnées cartésiennes (x - y - z) comme illustré dans la figure IV.1. Cette plaque FG est supportée par trois types de fondations : fondation Winkler (figure IV.1 (a)), fondation Pasternak (figure IV.1 (b)) et la fondation Kerr (figure IV.1 (c)).

En revanche, la plaque FG (Al/Al₂O₃) en aluminium (comme le phase métallique) et l'alumine (comme phase céramique) est considérée. Le module d'Young et la densité de l'alumine sont considérés comme $E_c = 380$ GPa et $\rho_c = 3\ 800$ kg/m³, respectivement. Pour l'aluminium, nous considérons $E_m = 70$ GPa et $\rho_m = 2702$ kg/m³. De plus, le module de poisson de fils pour l'aluminium et l'alumine sont fixés à 0,3.

Les paramètres de fondation et les résultats obtenus ainsi que les fréquences propres fondamentales sont définis par

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad \bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad D_{11} = \frac{(E_c h^3)}{(12(1-\nu_c^2))}$$

$$\bar{K}_w = K_w a^4 / D_{11} \quad \bar{K}_s = K_s a^2 / D_{11} \quad \bar{K}_u = K_u a^4 / D_{11} \quad \bar{K}_s = K_s a^2 / D_{11}$$

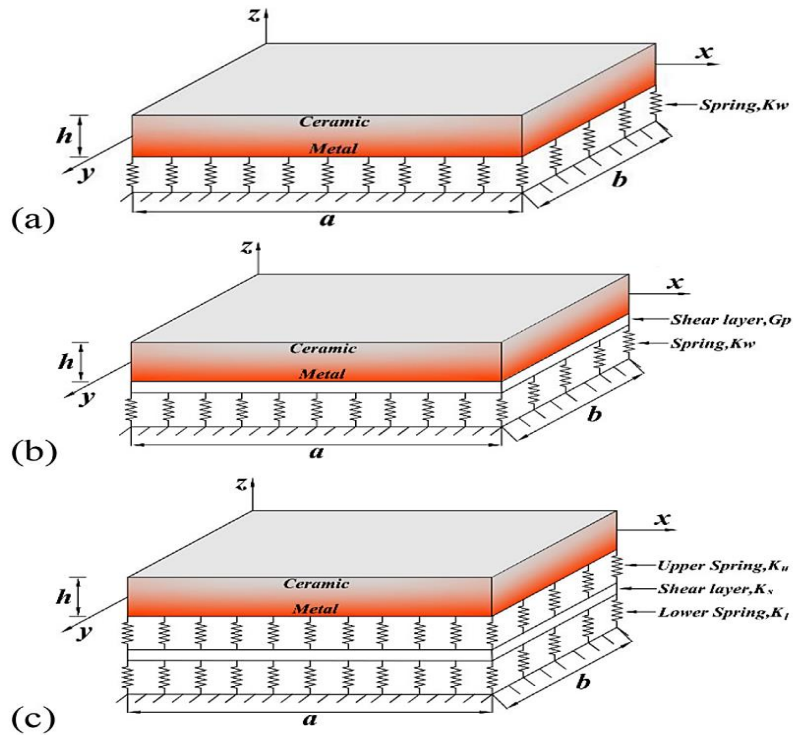


Figure IV. 1: Géométrie de la plaque rectangulaire FGM reposant sur (a) une fondation de Winkler, (b) une fondation de Pasternak et (c) une fondation de Kerr.

La fréquence fondamentale adimensionnelle des plaques FG avec différents indices de fraction volumique (p) est présentée dans le tableau IV.1. Trois rapports d'épaisseur (h/a) sont pris en compte : 0,1 pour une plaque moyennement épaisse, 0,2 pour une plaque épaisse, et 0,5 pour une plaque très épaisse. On observe que l'augmentation de l'indice de fraction volumique conduit à une diminution de la fréquence des plaques FG. Cela s'explique qu'avec l'augmentation de l'indice de fraction volumique, le pourcentage de phase céramique diminue, ce qui réduit la rigidité de la plaque FG.

Comme on peut le constater, la fondation considérée a un effet croissant sur la fréquence des plaques FG. Cet accroissement est pertinent par rapport à l'effet de rigidité de chaque fondation. Par conséquent, une plaque FG avec fondation est plus rigide que celle sans fondation. La rigidité de la couche de ressort et de cisaillement dans les fondations de Winkler et Pasternak pour différentes fractions volumiques est analysée plus en détail dans le tableau IV.2. Quatre rapports d'épaisseur (h/a) sont considérés : 0,05 (plaques minces), 0,1 (plaques modérément épaisses), 0,15, et 0,2 (plaques épaisses). Il est évident que les résultats actuels pour la fréquence fondamentale non dimensionnelle des plaques FG intégrées aux fondations Winkler-Pasternak correspondent presque à ceux obtenus à partir d'une solution quasi-3D (Benahmed, Houari et

al. 2017) dans toutes les gammes de rapports d'épaisseur. On constate également que l'augmentation de l'indice de fraction volumique a une influence négligeable sur les plaques FG reposant sur la fondation de Winkler, tandis que le rapport d'épaisseur et l'indice de fraction volumique jouent tous deux un rôle dominant sur la vibration libre des plaques FG reposant sur la fondation de Pasternak.

Tableau IV. 1: Fréquence fondamentale adimensionnelle ω des plaques FG avec simplement appuyée ($b/a=2$, $b/a=1$) avec différents indices de fraction volumique (p).

h/a	Modèle	$b/a=1$			$b/a=2$		
		$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=0$	$p=1$	$p=2$
0,1	3D exact (Jin, Su et al. 2014)	0,1135	0,087	0,0789	0,0719	0,0550	0,0499
	Quasi-3D (Mantari, Granados et al. 2014)	0,1135	0,0882	0,0806	0,0718	0,0557	0,0511
	Quasi-3D (Farzam-Rad, Hassani et al. 2017)	0,1136	0,0882	0,0806	0,0719	0,0558	0,0511
	Quasi-3D (Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,1135	0,0882	0,0806	0,0718	0,0557	0,0510
	Présent	0,1133	0,0868	0,0800	0,0719	0,0557	0,0509
0,2	3D exact (Jin, Su et al. 2014)	0,4169	0,3222	0,2905	0,2713	0,2088	0,1888
	Quasi-3D (Mantari, Granados et al. 2014)	0,4168	0,3262	0,2961	0,2712	0,2115	0,1926
	Quasi-3D (Farzam-Rad, Hassani et al. 2017)	0,4176	0,3262	0,2961	0,2714	0,2116	0,1926
	Quasi-3D (Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,4168	0,3260	0,2961	0,2712	0,2115	0,1926
	Présent	0,4150	0,3204	0,2958	0,2723	0,2119	0,1927
0,5	3D exact (Jin, Su et al. 2014)	1,8470	1,4687	1,3095	0,9572	0,7937	0,7149
	Quasi-3D (Mantari, Granados et al. 2014)	1,8505	1,4774	1,3219	1,3043	1,0346	0,9293
	Quasi-3D (Farzam-Rad, Hassani et al. 2017)	1,8528	1,4788	1,3226	0,9575	0,7961	0,7193
	Quasi-3D (Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	1,8503	1,4772	1,3218	1,3039	1,0345	0,9293
	Présent	1,8266	1,4452	1,3401	1,3199	1,0448	0,9367

Tableau IV. 2 : Fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques FG reposant sur des fondations Winkler – Pasternak.

k_w	k_p	h/a	Modèle	P						
				0	0,5	1	2	5		
0	0	0,05	Quasi-3D (Benahmed, Houari et al. 2017)	0,0291	-	0,0226	0,0207	-		
			TSDT(Sheikholeslami and Saidi 2013)	0,029	0,0249	0,0227	0,0209	0,0197		
			Quasi-3D (Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,0291	0,0248	0,0226	0,0206	0,0195		
			Présent	0,0294	0,0252	0,0227	0,0207	0,0197		
		0,1	Quasi-3D(Benahmed, Houari et al. 2017)	0,1136	-	0,0883	0,0807	-		
			TSDT(Sheikholeslami and Saidi 2013)	0,1134	0,0975	0,0891	0,0819	0,0767		
			Quasi-3D(Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,1135	0,0971	0,0882	0,0806	0,0755		
			Présent	0,1147	0,0981	0,0889	0,0812	0,0768		
		0,15	Quasi-3D(Benahmed, Houari et al. 2017)	0,2461	-	0,1918	0,1748	-		
			TSDT(Sheikholeslami and Saidi 2013)	0,2454	0,2121	0,1939	0,1778	0,1648		
			Quasi-3D(Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,2459	0,2108	0,1916	0,1746	0,1622		
			Présent	0,2484	0,2131	0,1934	0,1762	0,1653		
		0,2	Quasi-3D(Benahmed, Houari et al. 2017)	0,4174	-	0,3264	0,2965	-		
			TSDT(Sheikholeslami and Saidi 2013)	0,4154	0,3606	0,3299	0,3016	0,2765		
			Quasi-3D(Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,4168	0,3586	0,326	0,2961	0,2722		
			Présent	0,421	0,3627	0,3293	0,2996	0,2786		
		100	0	0,05	Quasi-3D(Benahmed, Houari et al. 2017)	0,0298	-	0,0238	-	-
					TSDT(Sheikholeslami and Saidi 2013)	0,0298	0,0258	0,0238	0,0221	0,0211
					Quasi-3D(Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,0298	0,0257	0,0236	0,0218	0,0208
					Présent	0,0299	0,0259	0,0237	0,0219	0,0208
0,1	Quasi-3D(Benahmed, Houari et al. 2017)			0,1164	-	0,0924	0,0854	-		
	TSDT(Sheikholeslami and Saidi 2013)			0,1162	0,1012	0,0933	0,0867	0,0821		
	Quasi-3D(Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)			0,1163	0,1006	0,0923	0,0853	0,0809		
	Présent			0,093	0,1016	0,093	0,0859	0,0821		
0,15	Quasi-3D(Benahmed, Houari et al. 2017)			0,2524	-	0,2011	0,1855	-		
	TSDT(Sheikholeslami and Saidi 2013)			0,2519	0,2204	0,2036	0,1889	0,1775		
	Quasi-3D(Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)			0,2522	0,2190	0,201	0,1855	0,1745		
	Présent			0,2548	0,2213	0,2028	0,1871	0,1776		
0,2	Quasi-3D(Benahmed, Houari et al. 2017)			0,4286	-	0,3431	0,3158	-		
	TSDT(Sheikholeslami and Saidi 2013)			0,4273	0,3758	0,3476	0,3219	0,2999		
	Quasi-3D(Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)			0,4284	0,3734	0,3431	0,3159	0,2950		

100	100	0,05	Présent	0,4326	0,3775	0,3465	0,3193	0,3011	
			Quasi-3D(Benahmed, Houari et al. 2017)	0,0411	-	0,0386	0,0383	-	
			TSDT(Sheikholeslami and Saidi 2013)	0,0411	0,0395	0,0388	0,0386	0,0388	
			Quasi-3D(Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,0411	0,0393	0,0386	0,0383	0,0385	
		0,1	Présent	0,0413	0,0394	0,0387	0,0383	0,0386	
			Quasi-3D(Benahmed, Houari et al. 2017)	0,1614	-	0,1521	0,1509	-	
			TSDT(Sheikholeslami and Saidi 2013)	0,1619	0,1563	0,1542	0,1535	0,1543	
			Quasi-3D(Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,1616	0,1551	0,1525	0,1512	0,1521	
		0,15	Présent	0,1627	0,1560	0,1531	0,1517	0,1528	
			Quasi-3D(Benahmed, Houari et al. 2017)	0,3537	-	0,3349	0,3323	-	
			TSDT(Sheikholeslami and Saidi 2013)	0,3560	0,3461	0,3422	0,3412	0,3427	
			Quasi-3D(Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,3551	0,3421	0,3367	0,3342	0,3358	
		0,2	Présent	0,3579	0,3447	0,3387	0,3357	0,3379	
			Quasi-3D(Benahmed, Houari et al. 2017)	0,6089	-	0,5794	0,5752	-	
			TSDT(Sheikholeslami and Saidi 2013)	0,6162	0,6026	0,5978	0,5971	0,5993	
			Quasi-3D(Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,6137	0,5944	0,5856	0,5815	0,5843	
				Présent	0,6196	0,5996	0,5901	0,5852	0,5888

Les variations de la fréquence adimensionnelle dans la fondation Kerr en fonction de la variation des indices de fraction volumique et des rapports d'épaisseur sont analysées dans le tableau IV.3. Pour simplifier, on considère que la rigidité du ressort inférieur de la fondation Kerr est constante. Le tableau 6 montre que les paramètres du ressort supérieur et de la couche de cisaillement ont des effets croissants sur la fréquence adimensionnelle des plaques FG. De manière notable, le paramètre de la couche de cisaillement est toujours plus influent que les constantes de ressort inférieure et supérieure. De plus, on observe que les fréquences non dimensionnelles des plaques FG intégrées dans les fondations Kerr sont plus élevées que celles intégrées dans les fondations Winkler et Pasternak, grâce à la présence d'un ressort supérieur supplémentaire.

Tableau IV. 3: Fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques carrées FG reposant sur Kerr fondation ($k_f = 100$).

k_u	k_s	h/a	Modèle	Plaque FGM					
				$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 5$		
100	0	0,05	Quasi-3D (Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,0253	0,0231	0,0212	0,0202		
			Présent	0,0251	0,0227	0,0207	0,0297		
		0,1	Quasi-3D (Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,0988	0,0903	0,0830	0,0783		
			Présent	0,0981	0,0889	0,0812	0,0768		
		0,15	Quasi-3D (Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,2149	0,1964	0,1801	0,1685		
			Présent	0,2131	0,1934	0,1762	0,1653		
		0,2	Quasi-3D (Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,3661	0,3347	0,3061	0,2838		
			Présent	0,3627	0,3293	0,3196	0,2786		
		100	100	0,05	Quasi-3D (Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,0329	0,0316	0,0308	0,0305
					Présent	0,0327	0,0313	0,0304	0,0302
				0,1	Quasi-3D (Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,1294	0,1245	0,1212	0,1201
					Présent	0,1289	0,1237	0,1200	0,1192
0,15	Quasi-3D (Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)			0,2842	0,2740	0,2666	0,2637		
	Présent			0,2834	0,2724	0,2645	0,2621		
0,2	Quasi-3D (Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)			0,4906	0,4739	0,4615	0,4560		
	Présent			0,4900	0,4719	0,4585	0,4539		
200	100			0,05	Quasi-3D (Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,0351	0,0341	0,0335	0,0334
					Présent	0,0350	0,0338	0,0331	0,0332
				0,1	Quasi-3D (Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,1385	0,1345	0,1320	0,1316
					Présent	0,1381	0,1337	0,1309	0,1308
		0,15	Quasi-3D (Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,3047	0,2964	0,2909	0,2897		
			Présent	0,3047	0,2964	0,2909	0,2897		

			Shahsavari et al. 2018)				
			Présent	0,3308	0,2951	0,2890	0,2884
		0,2	Quasi-3D(Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,5273	0,5139	0,5047	0,5024
			Présent	0,5273	0,5124	0,5023	0,5009
200	200	0,05	Quasi-3D(Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,0427	0,0423	0,0422	0,0426
			Présent	0,0426	0,0420	0,0419	0,0424
		0,1	Quasi-3D(Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,1687	0,1670	0,1668	0,1684
			Présent	0,1685	0,1665	0,1660	0,1660
		0,15	Quasi-3D(Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,3728	0,3694	0,3689	0,3725
			Présent	0,3730	0,3689	0,3679	0,3718
		0,2	Quasi-3D(Shahsavari, Shahsavari et al. 2018)	0,6484	0,6436	0,6431	0,6494
			Présent	0,6501	0,6438	0,6420	0,6486

La figure IV.2 illustre la variation des paramètres h/a et des paramètres Winkler-Pasternak. On observe que l'augmentation de h/a ainsi que des paramètres (k_w, k_p) entraîne une augmentation de la fréquence fondamentale. De plus, la figure IV.3 montre la fréquence principale en fonction de la variation de l'indice de fraction volumique et du rapport h/a . On remarque que l'augmentation de ces deux paramètres entraîne une élévation significative de la fréquence principale.

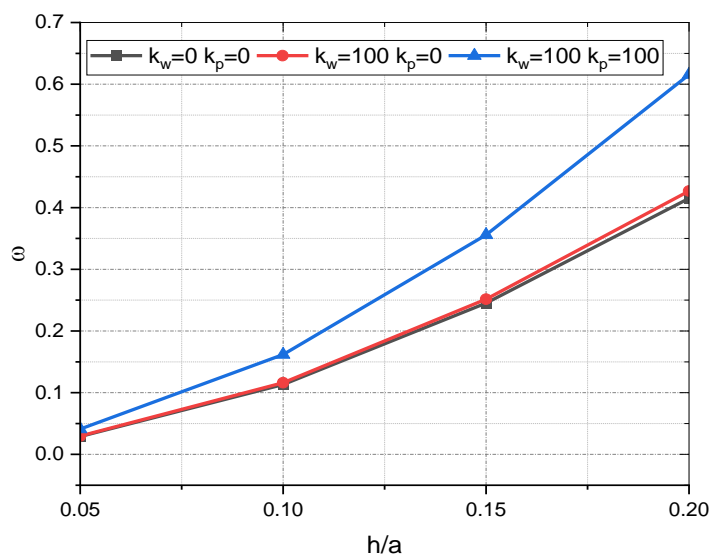


Figure IV. 2: Effet du paramètre h/a et l'influence des paramètres winkler-pasternak sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle de plaques FG.

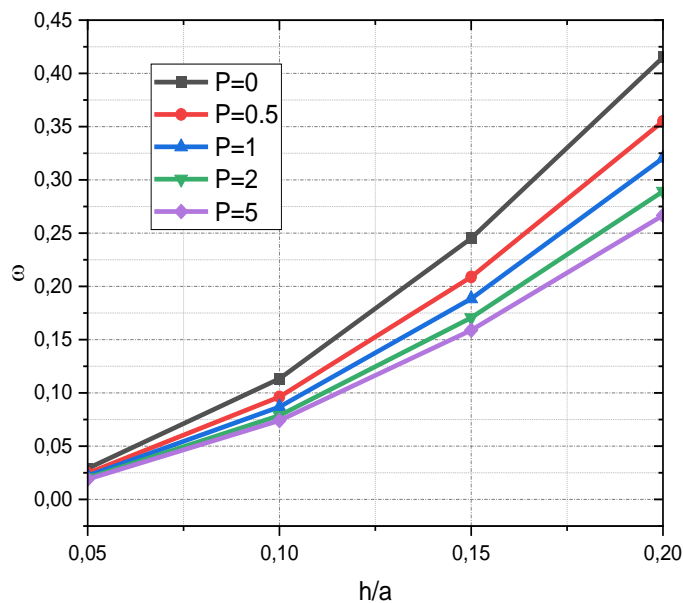


Figure IV. 3 : Effet du paramètre h/a avec différents indices de fraction volumique (p) sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle de plaques FG .

La figure IV.4 présente la fréquence fondamentale en fonction de la fraction volumique (p), de différentes épaisseurs (h/a), et de la variation des paramètres de fondation élastique. On remarque que l'augmentation de l'indice de fraction volumique (p), de l'épaisseur et des coefficients de fondation élastique entraîne une diminution de la fréquence fondamentale.

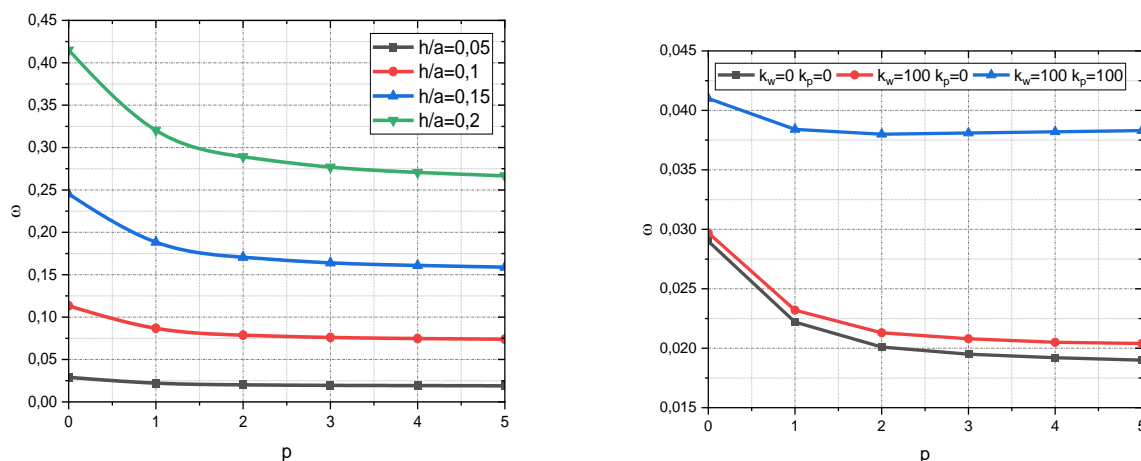


Figure IV. 4: Effet des paramètres ($k_w, k_p, h/a, p$) sur la fréquence fondamentale adimensionnelle des plaques FG reposant sur la fondation élastique.

De plus, il est observable sur la figure IV.5 que l'augmentation de ($k_u, k_s, h/a$) à une influence négligeable sur l'effet de l'indice de loi de puissance sur la fréquence propre, et figure IV.6 tandis qu'une augmentation de (k_u, k_s, p) a une influence négligeable sur l'effet de h/a sur la fréquence propre avec $k_l = 100$.

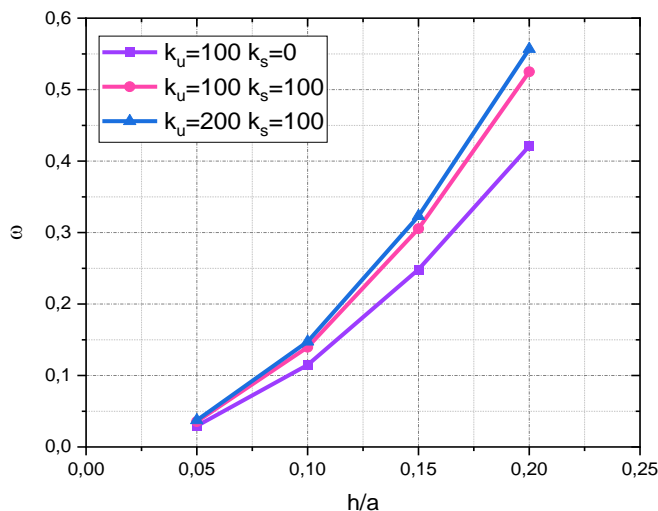


Figure IV. 5 : Effect de parameter h/a avec variation de (k_u, k_s) sur la fréquence fondamentale d'une plaque FG avec ($k_l = 100$).

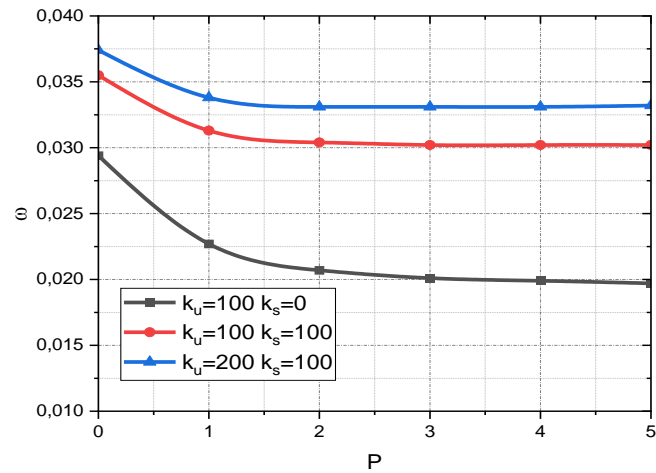


Figure IV. 6 : l'influence de indices de fraction volumique (p) avec variation de (k_u, k_s) sur la fréquence fondamentale d'imparfaite FG avec ($k_l = 100$).

La Figure IV.7 illustre l'effet des paramètres d'épaisseur (h/a) et d'indice (p) sur la fréquence naturelle. On observe que, lorsque l'épaisseur et la fraction volumique (p) augmentent simultanément, la fréquence fondamentale diminue.

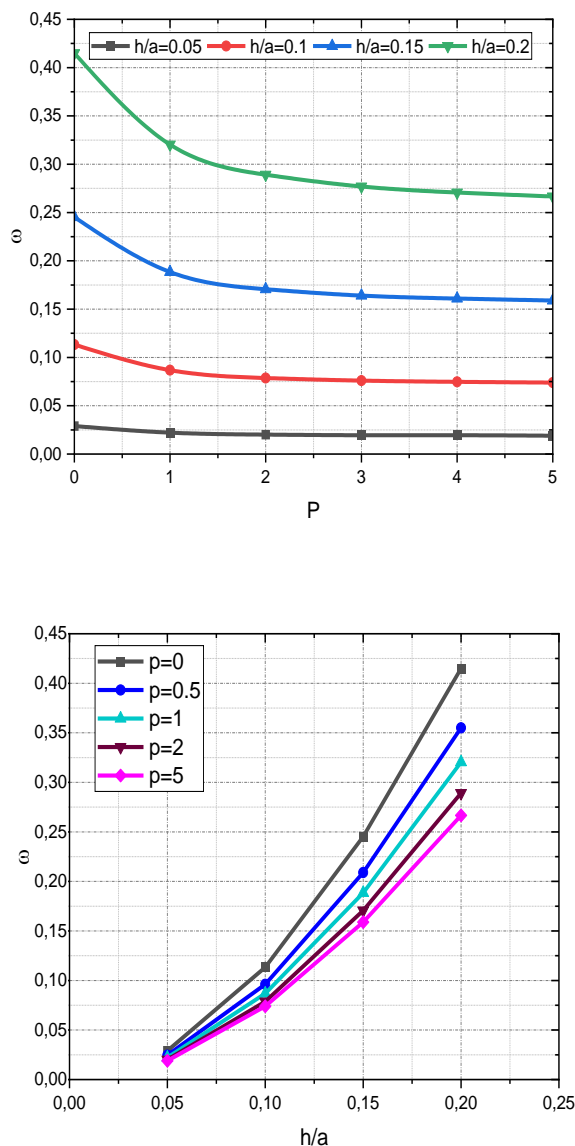
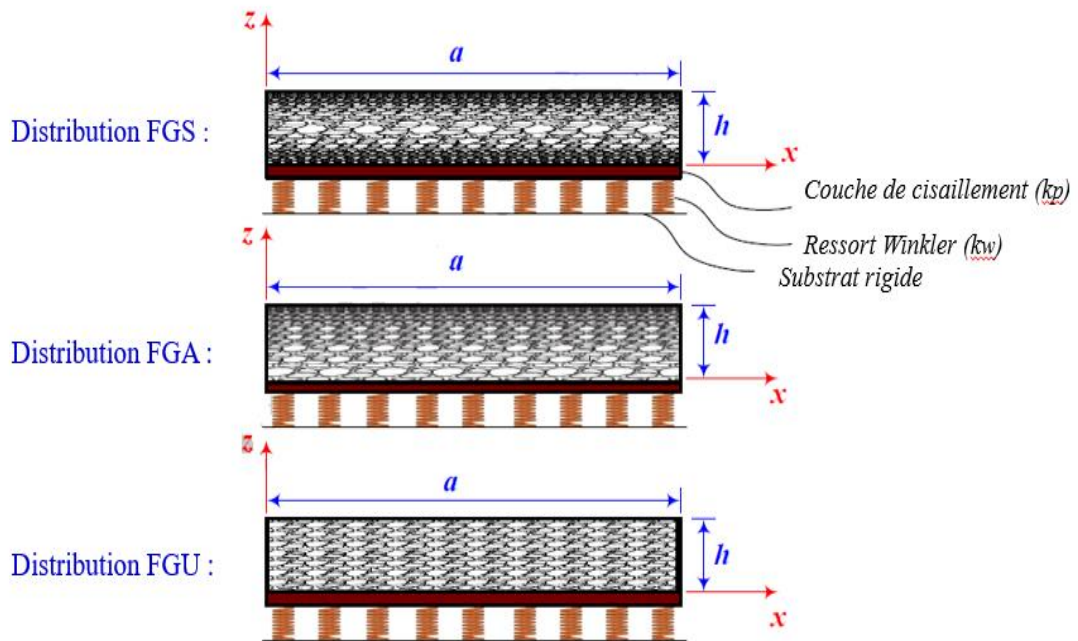


Figure IV. 7 : Effet des paramètres $(h/a, p)$ sur les plaques $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ FG à fréquence fondamentale adimensionnelle reposant sur la fondation Kerr ($k_l = 100$).

IV.3. Analyse de l'effet de la porosité sur la vibration naturelle des plaques FGM sur une fondation élastique

Dans cette partie on a présenté une plaque constituée d'un matériau fonctionnellement classé (FGM) reposant sur une fondation élastique, comme le montre la figure IV.8 (a) et (b). La plaque a une épaisseur h et des dimensions a et b . La plaque repose sur des fondations élastiques au niveau de sa surface inférieure. Un modèle de Pasternak est utilisé pour décrire la réaction de

la fondation élastique sur la plaque avec et comme coefficients élastiques de Winkler et de couche de cisaillement des fondations et fondation Kerr, respectivement avec trois différentes distributions de la porosité en gradient fonctionnel (FG) : distribution symétrique (FGS), asymétrique (FGA) et uniforme (UD).



a

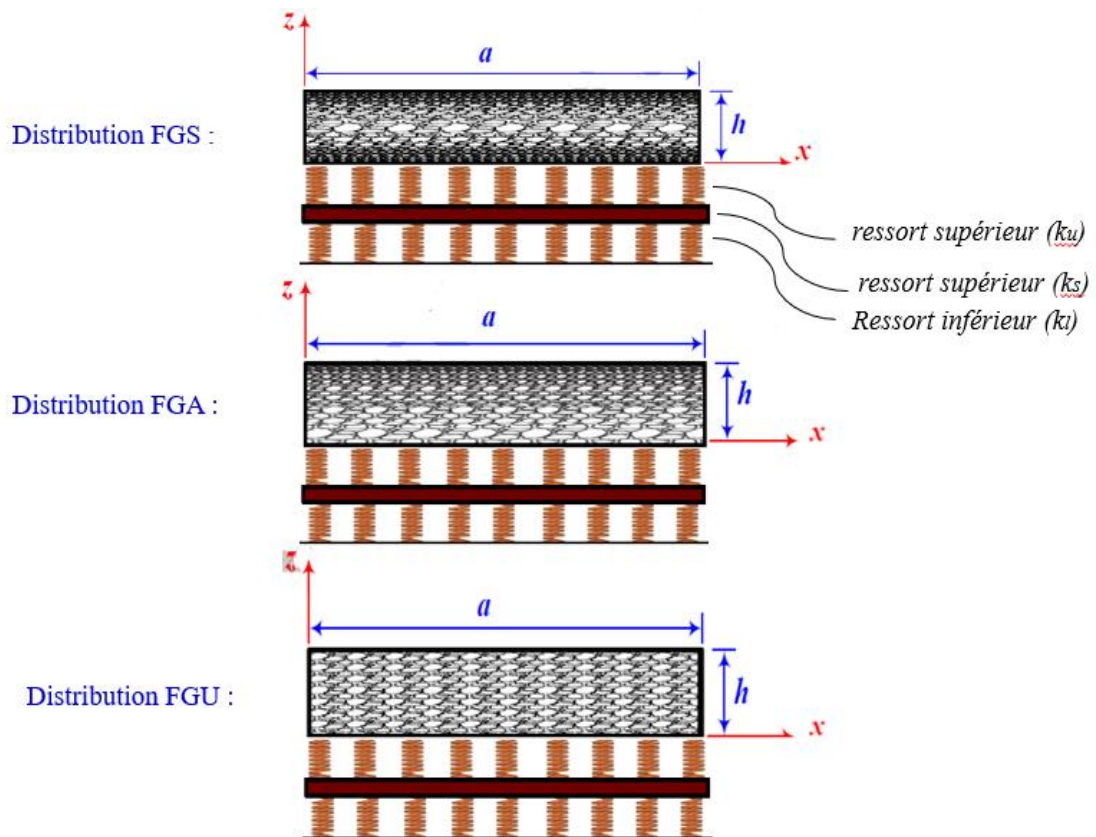


Figure IV. 8 : (a) Représentation schématique de la plaque poreuse étudiée reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak, (b) Fondations de type Kerr avec trois distributions différentes.

La fréquence fondamentale adimensionnelle des plaques FG, en fonction de différents coefficients de porosité, est présentée dans le tableau IV.4 en tenant compte des rapports d'épaisseur (h/a). On observe que l'augmentation du coefficient de (λ) et du rapport (h/a) entraîne une diminution de la fréquence des plaques FG pour les trois distributions de porosité.

Tableau IV. 4: Analyse de la fréquence fondamentale adimensionnelle des plaques FG simplement appuyées en fonction des rapports d'épaisseur (h/a) variables et de diverses valeurs de porosité.

Différentes distributions de porosité	h/a	Coefficient de Porosité (λ)			
		0	0,2	0,4	0,6
<i>Distribution FGU</i>	0,05	11,6307	10,021	8,3312	6,5888
	0,1	11,3351	9,7717	8,1271	6,4292
	0,15	10,8979	9,4022	7,8245	6,1921
	0,2	10,3761	8,9601	7,4616	5,9073
<i>Distribution FGS</i>	0,05	11,6307	11,2586	10,8762	10,4807
	0,1	11,3351	10,959	10,5682	10,1572
	0,15	10,8979	10,5179	10,1178	9,6888
	0,2	10,3761	9,9945	9,5877	9,1439
<i>Distribution FGA</i>	0,05	11,6307	11,0201	10,3384	9,549
	0,1	11,3351	10,7399	10,0759	9,3079
	0,15	10,8979	10,7399	9,6876	8,9514
	0,2	10,3761	9,8312	9,2244	8,5258

Les Tableaux IV.5 et IV.6 mettent en évidence l'impact des paramètres de fondation Winkler-Pasternak-Kerr, de la variation du coefficient de porosité, ainsi que de l'augmentation de l'épaisseur (h/a) en ce qui concerne la fondation Kerr, le coefficient ($k_t = 100$) reste constant. Nous avons remarqué que l'augmentation de ces paramètres entraîne une diminution de la fréquence fondamentale pour les distributions (FGA, FGS, FGU). Cependant, chaque augmentation des paramètres de fondation conduit à une fréquence fondamentale plus élevée.

Tableau IV. 5 : Fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques FG reposant sur des fondations Winkler – Pasternak avec l'influence de porosité.

k_w	k_p	h/a	Coefficient de Porosité (λ)			
			0,2	0,4	0,6	0,8
Distribution FGU						
0	0	0,05	10,021	8,331	6,5888	5,1112
		0,1	9,7717	8,1271	6,4292	4,9871
		0,15	9,4022	7,8245	6,1921	4,8028
		0,2	8,9604	7,4616	5,9073	4,5816
100	0	0,05	10,3396	8,7116	7,0639	5,7105
		0,1	10,0947	8,5127	6,9102	5,5935
		0,15	9,7327	8,2186	6,6831	5,4212
		0,2	9,3012	7,8679	6,4127	5,2172
100	100	0,05	15,3273	14,2797	14,2797	12,6739
		0,1	15,1181	14,1108	13,2058	12,5669
		0,15	14,8171	13,8687	13,0166	12,4149

		0,2	14,4708	13,591	12,7998	12,2392
Distribution FGS						
0	0	0,05	11,2586	10,8762	10,4807	10,0675
		0,1	10,959	10,5682	10,1572	9,7154
		0,15	10,5179	10,1178	9,6888	9,2135
		0,2	9,9945	9,5877	9,1439	8,6399
100	0	0,05	11,5431	11,1704	10,7857	10,3847
		0,1	11,248	10,8676	10,4684	10,0405
		0,15	10,8145	10,426	10,0106	9,5517
		0,2	10,3019	9,9081	9,4801	8,996
100	100	0,05	16,1636	15,8996	15,6318	15,358
		0,1	15,9119	15,6459	15,3723	15,0856
		0,15	15,5517	15,2865	15,0098	15,0856
		0,2	15,14	14,8806	14,6073	14,3106
Distribution FGA						
0	0	0,05	8,331	10,0211	11,6306	8,5831
		0,1	8,1271	9,7717	11,3351	8,3703
		0,15	7,8245	9,4022	10,8979	8,0552
		0,2	7,4616	8,96	10,3761	7,6786
100	0	0,05	9,549	10,3383	11,0201	8,9528
		0,1	9,3079	10,0758	10,7399	8,7445
		0,15	8,9514	9,6876	10,7399	8,4372
		0,2	8,5258	9,2244	9,8312	8,0717
100	100	0,05	15,9983	15,5363	15,022	14,426
		0,1	15,7612	15,3154	14,8192	14,2436
		0,15	15,42	14,9982	14,5282	13,9815
		0,2	15,0274	14,9982	14,1941	13,6791

Tableau IV. 6 : Fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ des plaques carrées FG reposant sur Kerr fondation ($k_l = 100$) avec effet de porosité.

k_u	k_s	h/a	<i>Coefficient de Porosité (λ)</i>			
			0,2	0,4	0,6	0,8
Distribution FGU						
100	0	0,05	7,7563	7,1542	6,5023	5,9134
		0,1	7,5741	6,9869	6,3527	5,7816
		0,15	7,3051	6,7409	6,1322	5,5869
		0,2	6,9851	6,4463	5,8695	5,3552
100	100	0,05	11,8068	11,4212	11,0252	10,6885
		0,1	11,6467	11,2771	10,8981	10,5752
		0,15	11,4164	11,0706	10,7167	10,4135

		0,2	11,1505	10,8334	10,5093	10,2283
100	200	0,05	14,7865	14,4811	14,1714	13,9111
		0,1	14,6259	14,3361	14,0419	13,7926
		0,15	14,3959	14,1292	13,8583	13,6241
		0,2	14,1294	13,8909	13,6476	13,3311
Distribution FGS						
100	0	0,05	8,1864	8,0521	7,9162	7,7779
		0,1	7,9879	7,8495	7,7079	7,5615
		0,15	7,6957	7,5527	7,4043	7,2481
		0,2	7,3492	7,2025	7,0483	7,0483
100	100	0,05	12,0931	12,0025	11,9118	11,8201
		0,1	11,9173	11,8254	11,7324	11,6374
		0,15	11,6648	11,5724	11,4779	11,3802
		0,2	11,3742	11,2832	11,1894	11,0918
100	200	0,05	15,0154	14,9427	14,8706	14,7969
		0,1	14,8402	14,7666	14,6926	14,6174
		0,15	14,5892	14,5163	14,4424	14,3662
		0,2	14,2991	14,2287	14,1569	14,0831
Distribution FGA						
100	0	0,05	8,2024	8,0858	7,9701	7,8559
		0,1	8,0066	7,8895	7,7727	7,6567
		0,15	7,7179	7,6006	7,4831	7,3652
		0,2	7,3749	7,2583	7,1407	7,0226
100	100	0,05	12,1037	12,0249	11,9473	11,8714
		0,1	11,9293	11,8508	11,7732	11,6967
		0,15	11,6781	11,6007	11,5238	11,4477
		0,2	11,3879	11,3127	11,2378	11,1632
100	200	0,05	15,0239	14,9605	14,8981	14,8372
		0,1	14,8492	14,7861	14,7237	14,6625
		0,15	14,5987	14,5365	14,4748	14,414
		0,2	14,3084	14,2475	14,1873	14,1276

La figure IV.9 montre comment la fréquence naturelle varie en fonction du coefficient de porosité pour trois distributions de porosité différentes avec $h=0.05$. Nous observons que lorsque le coefficient de porosité augmente, la fréquence diminue pour les trois distributions (FGS, FGA, FGU). La valeur de fréquence la plus élevée est enregistrée dans la distribution FGS. En revanche, la figure IV.10 illustre la variation de (h/a) avec une valeur fixe de porosité $\lambda = 0.4$. Nous constatons une diminution de la fréquence naturelle pour les trois distributions de porosité.

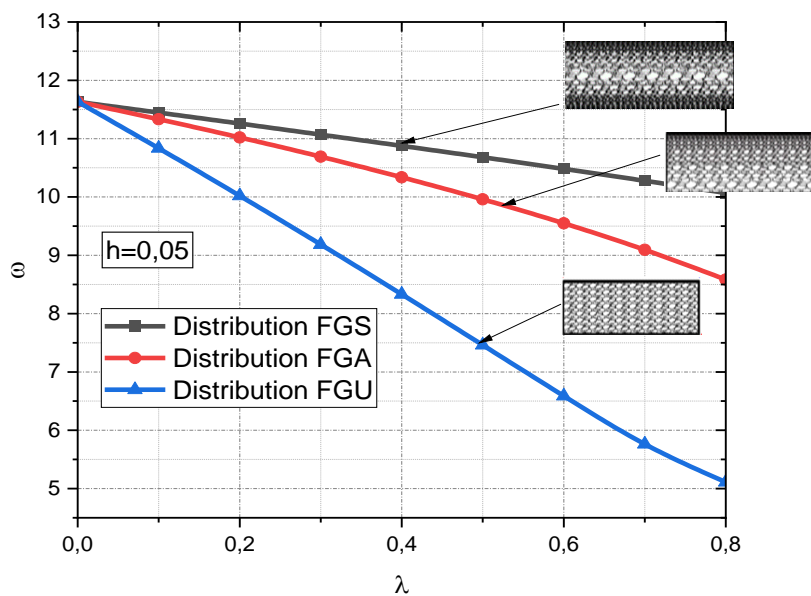


Figure IV. 9 : l'impact de la porosité sur la fréquence fondamentale d'une plaque FG reposant sur une fondation élastique : étude de trois distributions de porosité

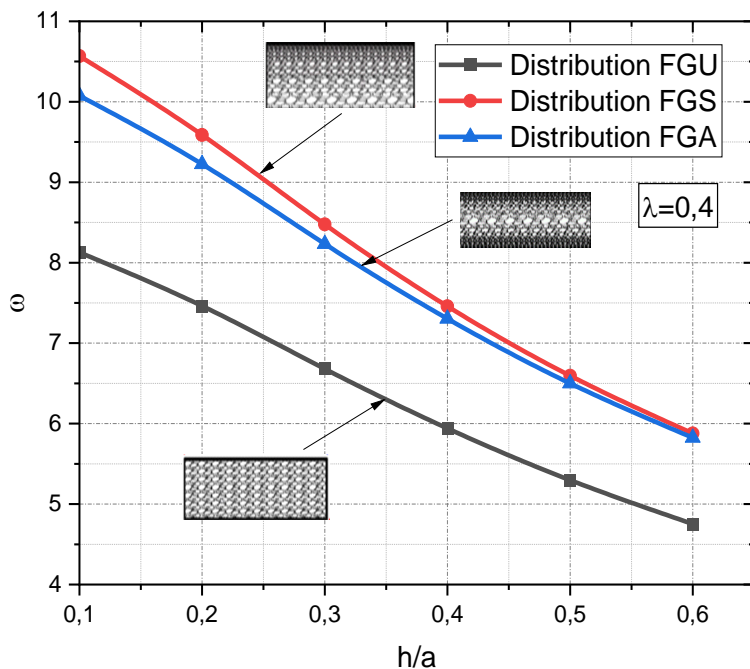


Figure IV. 10 : Influence du rapport (h/a) sur la fréquence fondamentale d'une plaque FG sur une fondation élastique avec trois distributions de porosité.

Dans la figure IV.11, la fréquence naturelle est représentée en fonction de la variation du coefficient de porosité pour trois distributions (FGS, FGA, FGU), avec différentes valeurs de coefficient de Winkler et de Pasternak, où $h=0.1$. Nous avons remarqué qu'avec l'augmentation des deux coefficients de fondation, la fréquence naturelle augmente pour toutes les distributions, tandis qu'elle diminue en même temps avec l'augmentation du coefficient de porosité.

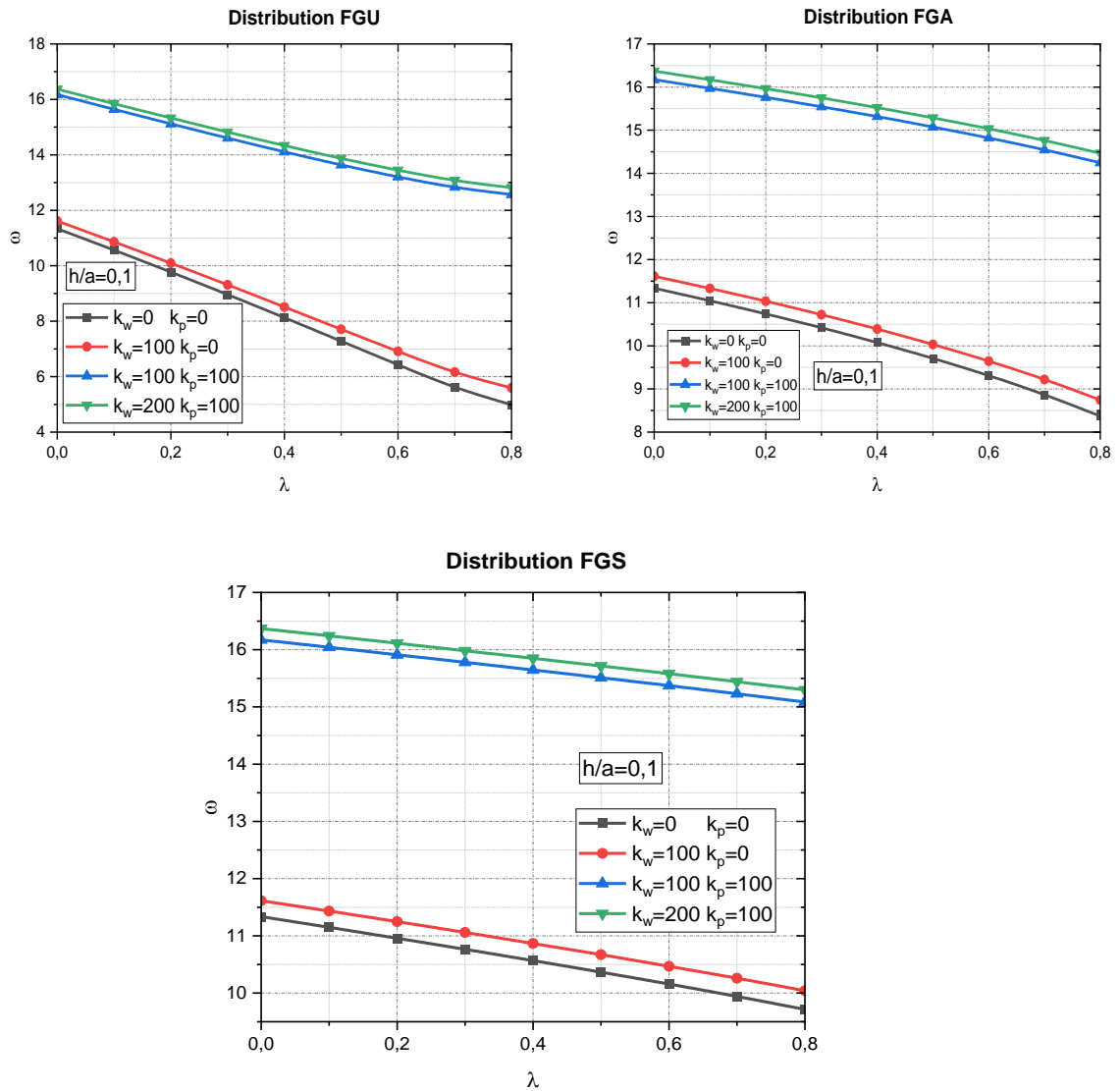


Figure IV. 11 : l'effet des paramètres des fondations Winkler-Pasternak et λ sur la fréquence fondamentale de la FGM.

Dans la figure IV.12, la fréquence naturelle est tracée par rapport à la variation du coefficient de porosité pour trois distributions (FGS, FGA, FGU), avec différentes valeurs de coefficient de fondation k . En fixant $k_l=100$, nous avons observé que l'augmentation des deux coefficients de fondation entraîne une augmentation de la fréquence naturelle pour toutes les distributions.

Cependant, simultanément, la fréquence naturelle diminue avec l'augmentation du coefficient de porosité. Une augmentation notable est observée entre les configurations de fondation ($k_u = 100, k_s = 100$) et ($k_u = 200, k_s = 100$).

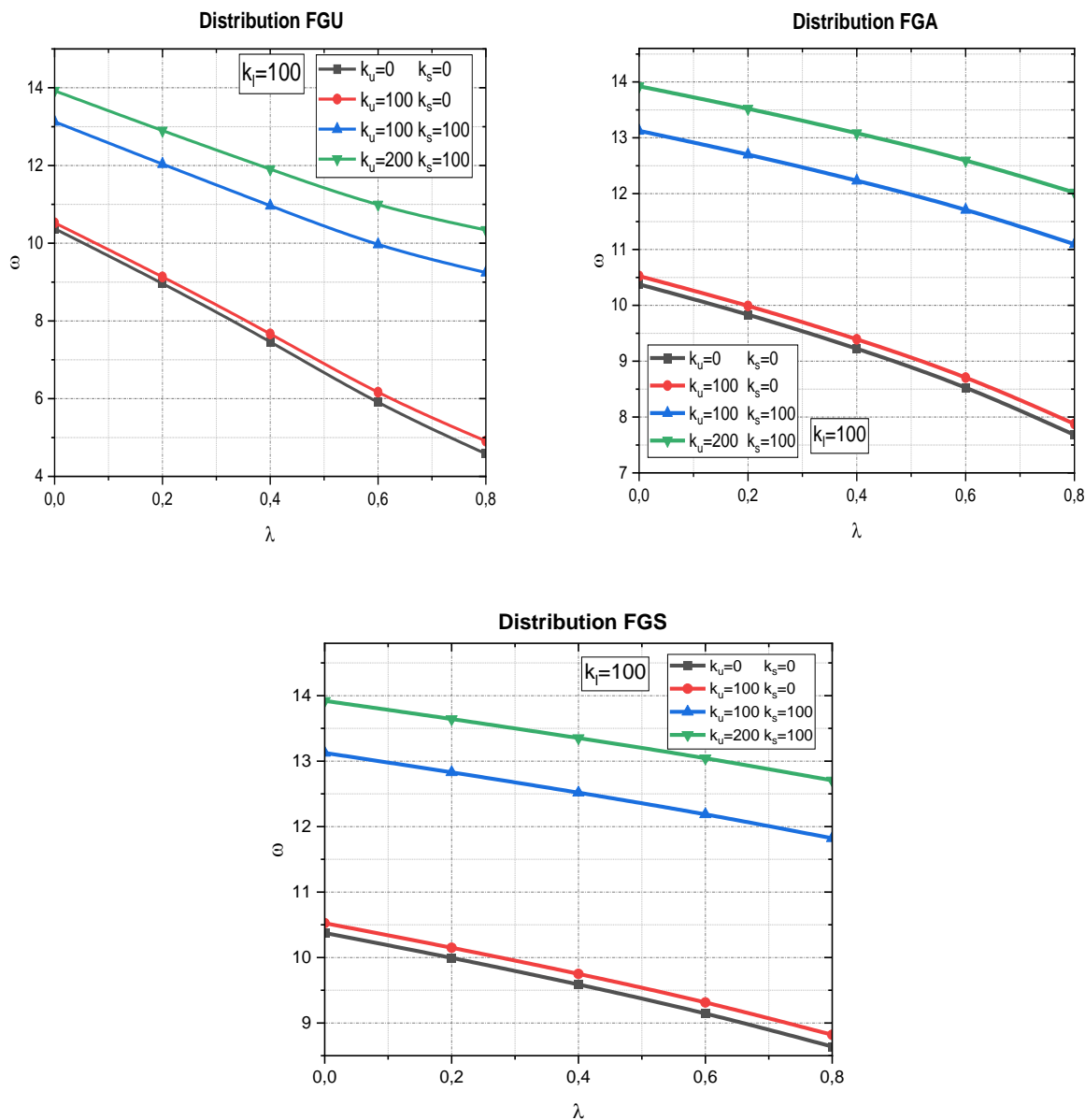


Figure IV. 12: Impact des paramètres de fondation Kerr avec ($k_l = 100$) et variations de coefficient (λ) Sur la fréquence fondamentale de la plaque.

Dans la Figure IV.13, l'effet de la variation du paramètre de fondation Pasternak (k_p) et du coefficient de porosité sur la fréquence naturelle de la plaque est présenté, avec une valeur fixe de paramètre de Winkler $k_w = 200$. Nous avons observé qu'avec l'augmentation de la porosité et

du paramètre de fondation Pasternak, la fréquence naturelle augmente pour les trois distributions de porosité (FGS, FGA, FGU).

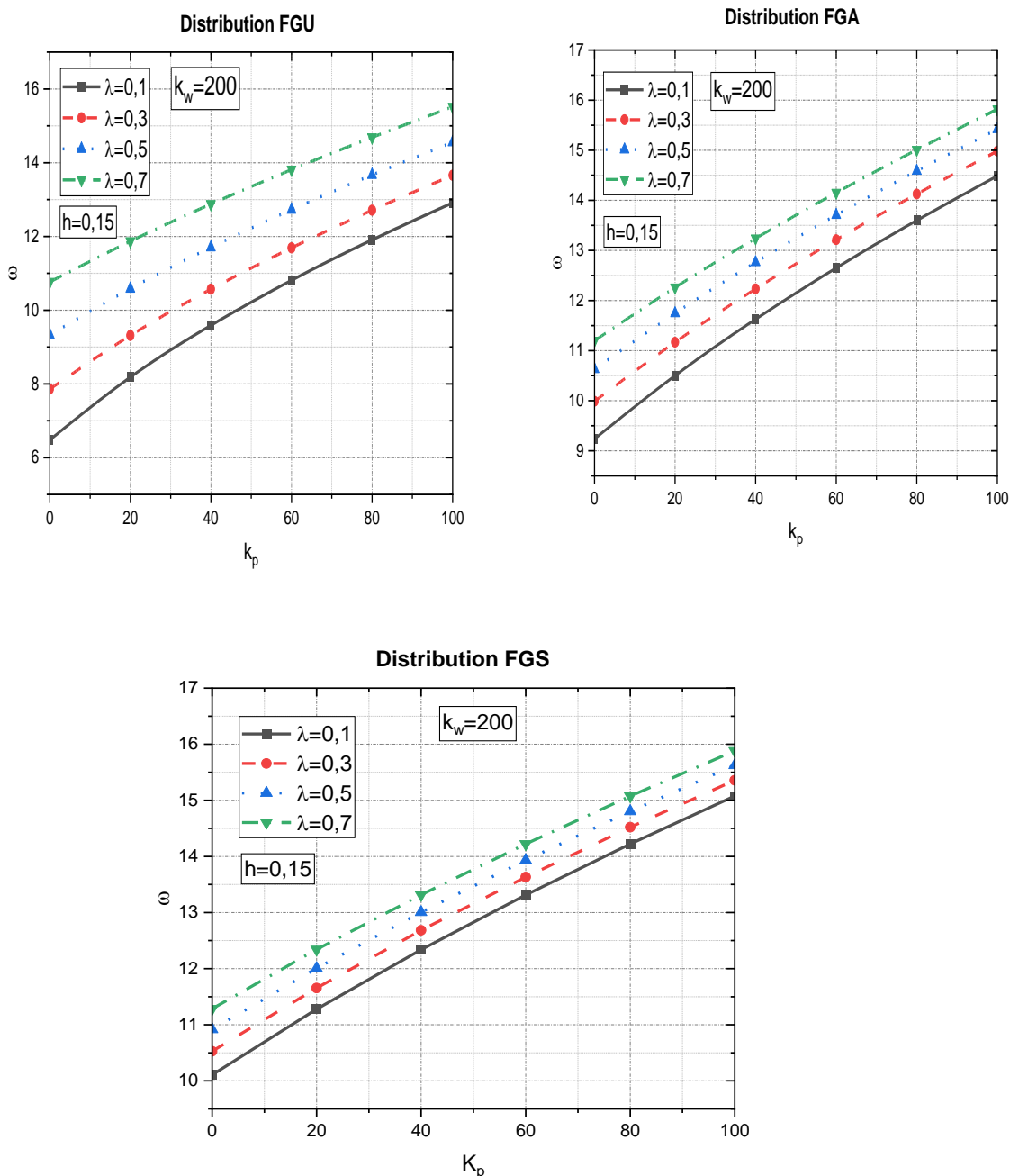


Figure IV. 13 : Analyse de l'effet des Paramètres de Fondation de Pasternak (k_p) sur la Fréquence Fondamentale de Plaque en Fonction de la Porosité (λ) et de ses Trois Distributions avec ($k_w = 200$).

La Figure IV.14 expose l'effet de la variation du coefficient de fondation Winkler et du coefficient de porosité sur la fréquence naturelle de la plaque, en maintenant un coefficient de Pasternak $k_p = 100$ constant. Nous avons remarqué que lorsque la porosité augmente, la

fréquence naturelle diminue. Cependant, pour les trois distributions de porosité (FGS, FGA, FGU), lorsque le coefficient k_w augmente, la fréquence naturelle augmente également.

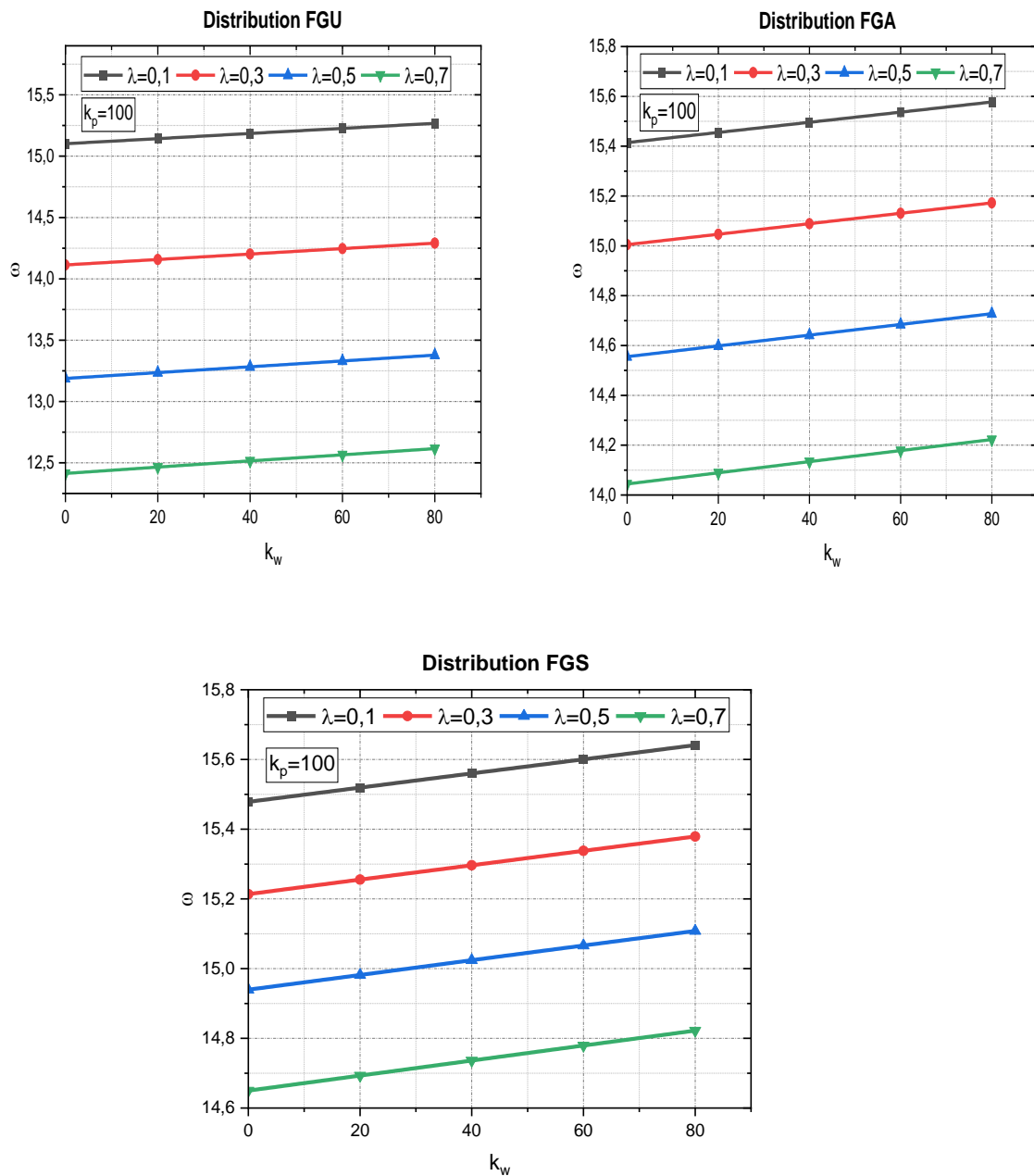


Figure IV. 14: Analyse de l'effet des Paramètres de Fondation de Winkler (k_w) sur la Fréquence Fondamentale de Plaque en Fonction de la Porosité (λ) et de ses Trois Distributions avec ($k_p = 100$).

IV.4. Conclusion

L'analyse examine l'interaction entre la structure et le sol sur le comportement vibratoire d'une plaque en matériaux fonctionnellement gradués (FGM), simplement appuyée et reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak-Kerr, en tenant compte de l'effet de porosité selon différentes distributions. Cette étude révèle plusieurs tendances significatives concernant l'influence des paramètres de fondation, de la fraction volumique, de l'indice matériel, ainsi que des paramètres de porosité et de (h/a) sur les fréquences de vibration des plaques. À travers ces résultats, nous avons constaté que :

- Il a été observé qu'avec l'augmentation du paramètre (h/a) ainsi que des coefficients de fondation Winkler et Pasternak, la fréquence naturelle augmente.
- Nous avons observé que l'augmentation du paramètre (h/a) et de l'indice matériel (p) conduit à une diminution de la fréquence naturelle.
- L'augmentation du paramètre de fondation Kerr en même temps qu'une augmentation de (h/a) entraîné une augmentation de la fréquence, tandis que l'augmentation de l'indice matériel (p) provoque une diminution de la fréquence naturelle.
- Nous avons observé que l'augmentation du coefficient de porosité (λ) et de (h/a) pour les trois distributions de porosité entraîne une diminution de la fréquence.
- L'augmentation des coefficients de fondation Winkler, Kerr et Pasternak ainsi que du coefficient de porosité (λ) entraîne une diminution de la fréquence naturelle.

Conclusion Générale

Conclusion Générales

L'étude des plaques poreuses en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) reposant sur diverses fondations élastiques met en lumière plusieurs tendances significatives concernant l'effet des paramètres de fondation, de la fraction volumique, et de la porosité sur les fréquences de vibration des plaques. Voici les conclusions principales tirées des résultats obtenus :

1. Effet de la Fraction Volumique (p) :

- L'augmentation de l'indice de fraction volumique conduit à une diminution de la fréquence fondamentale des plaques en FGM. Cette réduction de fréquence est attribuable à la diminution de la phase céramique, ce qui réduit la rigidité globale de la plaque.
- Pour les fondations de Winkler et de Pasternak, cette influence est plus marquée dans les fondations de Pasternak, où les interactions entre les ressorts adjacents jouent un rôle plus important.

2. Effet des Rapports d'Épaisseur (h/a) :

- Les plaques plus épaisses (plus grand rapport h/a) montrent des fréquences fondamentales plus élevées en raison de l'augmentation de la rigidité structurelle.
- Cependant, une augmentation simultanée de l'épaisseur et de l'indice de fraction volumique entraîne généralement une diminution de la fréquence fondamentale.

3. Impact des Fondations Élastiques :

- Les fondations élastiques augmentent la fréquence fondamentale des plaques en FGM. Les fondations de Pasternak et de Kerr, incluant des interactions de cisaillement, montrent des effets plus prononcés par rapport à la fondation de Winkler.
- Les fondations Kerr, avec un ressort supérieur supplémentaire, offrent une rigidité accrue par rapport aux fondations Winkler et Pasternak, résultant en des fréquences non dimensionnelles plus élevées.

4. Influence de la Porosité :

- L'augmentation du coefficient de porosité entraîne une diminution des fréquences fondamentales, en raison de la réduction de la rigidité matérielle causée par la présence de pores.
- Parmi les différentes distributions de porosité (symétrique, asymétrique et uniforme), la distribution symétrique (FGS) présente les fréquences le

Plus élevées, suivie par la distribution asymétrique (FGA) et la distributions uniforme (FGU).

5. Interaction entre les Paramètres de Fondation et la Porosité :

- L'augmentation des coefficients de fondation (Winkler et Pasternak) tend à augmenter les fréquences naturelles des plaques, même en présence de porosité.
- Les effets des paramètres de fondation sont plus influents que ceux des coefficients de porosité, particulièrement lorsque les coefficients de fondation augmentent.

Observations Spécifiques

- Les résultats montrent que les paramètres de cisaillement des fondations (notamment dans les modèles de Pasternak et Kerr) ont une influence plus significative que les constantes de ressort seules.
- Les plaques sur fondations élastiques démontrent une plus grande rigidité et donc des fréquences fondamentales plus élevées que celles sans fondation.
- Les configurations de fondation jouent un rôle critique, particulièrement lorsque les plaques sont soumises à des conditions de porosité et de variabilité des propriétés matérielles.

En conclusion, la compréhension approfondie de ces effets combinés est essentielle pour la conception et l'optimisation des structures en FGM dans diverses applications pratiques, allant des structures civiles aux composants aéronautiques, où la réponse dynamique et la durabilité sont cruciales. Les analyses montrent que des ajustements précis des paramètres de fondation et des propriétés matérielles permettent de contrôler efficacement les fréquences de vibration, répondant ainsi aux exigences spécifiques des différentes applications.

Références Bibliographiques

Abdizadeh, H. (1997). Elaboration et caractérisation de composites duplex" Composites laminaires tri-couches à base d'alumine", Lyon, INSA.

Abdizadeh, H. (1997). Elaboration et caractérisation de composites duplex" Composites laminaires tri-couches à base d'alumine" (Doctoral dissertation, Lyon, INSA).

Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., & Adda Bedia, E. A. (2010). Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 6, 113-121.

Ait Atmane, H., Tounsi, A., & Bernard, F. (2017). Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 13, 71-84.

Ait Taleb, S. (2016). Analyse du comportement des poutres non-homogènes renforcées par des plaques composites, Université Mouloud Mammeri.

Akavci, S. J. C. P. B. E. (2016). "Mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundation." **96**: 136-152.

Akbaş, Ş. D. J. I. J. o. E. and A. Sciences (2015). "Free Vibration Analysis of Edge Cracked Functionally Graded Beams Resting on Winkler-Pasternak Foundation." **7**(3): 1-15.

Akgöz, B. and Ö. J. A. A. Civalek (2016). "Bending analysis of embedded carbon nanotubes resting on an elastic foundation using strain gradient theory." **119**: 1-12.

Arani, A. G., R. Kolahchi, A. A. M. Barzoki, M. R. Mozdianfard and S. M. N. J. P. o. t. I. o. M. E. Farahani, Part C: *Journal of Mechanical Engineering Science* (2013). "Elastic foundation effect on nonlinear thermo-vibration of embedded double-layered orthotropic graphene sheets using differential quadrature method." **227**(4): 862-879.

Avcar, M. and W. K. M. J. A. J. o. G. Mohammed (2018). "Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation." **11**(10): 232.

Avcar, M. J. A. P. P. A. (2016). "Effects of material non-homogeneity and two parameter elastic foundation on fundamental frequency parameters of Timoshenko beams." **130**(1): 375-378.

BAKORA, A. (2016). Contribution à l'analyse du post-flambement des plaques FGM épaisses soumises à un chargement thermo-mécanique.

Bansal, N. P., J. P. Singh, J. Lamon, S. R. Choi and M. M. Mahmoud (2010). Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites II, John Wiley & Sons.

Bennai, R., Fourn, H., Nebab, M., Atmane, R. A., Mellal, F., Atmane, H. A., ... & Touns, A. (2022). On the wave dispersion and vibration characteristics of FG plates resting on elastic Kerr foundations via HSDT. *Advances in concrete construction*, 14(3), 169-183.

Behravan Rad, A. and M. J. A. M. S. S. Shariyat (2013). "A three-dimensional elasticity solution for two-directional FGM annular plates with non-uniform elastic foundations subjected to normal and shear tractions." **26**(6): 671-690.

BELAROUCI, A. (2021). ETUDE COMPARATIVE DU COMPORTEMENT DES PLAQUES EPAISSES P-FGM ET S-FGM.

- Benahmed, A., M. S. A. Houari, S. Benyoucef, K. Belakhdar and A. J. G. E. Tounsi (2017). "A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation." **12**(1): 9-34.
- Bishop, C. M., C. Roach, M. J. P. p. von Hellermann and c. fusion (1993). "Automatic analysis of JET charge exchange spectra using neural networks." **35**(6): 765.
- Britannica, E. Advanced-ceramics: Tape-casting-process-doctor-blading-Steps-production-carrier.
Britannica, E. Advanced-ceramics: Tape-casting-process-doctor-blading-Steps-production-carrier, Encyclopædia Britannica.
- Chai, Y., F. Li and Z. J. M. Song (2019). "Nonlinear vibrations, bifurcations and chaos of lattice sandwich composite panels on Winkler–Pasternak elastic foundations with thermal effects in supersonic airflow." **54**: 919-944.
- Cherradi, N., D. Delfosse, B. Ilschner and A. Kawasaki (1996). "Matériaux à gradient: exploitation du concept et techniques de production par métallurgie des poudres." Revue de Métallurgie **93**(2): 185-196.
- Deng, H. and W. J. C. S. Cheng (2016). "Dynamic characteristics analysis of bi-directional functionally graded Timoshenko beams." **141**: 253-263.
- Dutta, S. C., R. J. C. Roy and structures (2002). "A critical review on idealization and modeling for interaction among soil–foundation–structure system." **80**(20-21): 1579-1594.
- Ebrahimi, F., M. R. J. S. M. Barati and Structures (2016). "Static stability analysis of smart magneto-electro-elastic heterogeneous nanoplates embedded in an elastic medium based on a four-variable refined plate theory." **25**(10): 105014.
- El-Galy, I. M., B. I. Saleh and M. H. J. S. A. S. Ahmed (2019). "Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view." **1**: 1-23.
- Elishakoff, I. E., D. Pentaras and C. Gentilini (2015). Mechanics of functionally graded material structures, World Scientific.
- Enab, T. A. J. I. J. o. M. and M. E. IJMME-IJENS (2014). "Performance improvement of total knee replacement joint through bidirectional functionally graded material." **14**(2): 2014.
- Farzam-Rad, S. A., B. Hassani and A. J. C. P. B. E. Karamodin (2017). "Isogeometric analysis of functionally graded plates using a new quasi-3D shear deformation theory based on physical neutral surface." **108**: 174-189.
- Groves, J. and H. J. C. P. B. E. Wadley (1997). "Functionally graded materials synthesis via low vacuum directed vapor deposition." **28**(1-2): 57-69.
- Groves, J. F., & Wadley, H. N. G. (1997). Functionally graded materials synthesis via low vacuum directed vapor deposition. *Composites Part B: Engineering*, 28(1-2), 57-69.
- Hetényi, M. and M. I. Hetbenyi (1946). Beams on elastic foundation: theory with applications in the fields of civil and mechanical engineering, University of Michigan press Ann Arbor, MI.
- Hildebrand, F., E. Reissner and G. Thomas (1949). Notes on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells.
- Hill, R. J. J. o. t. M. and P. o. Solids (1965). "A self-consistent mechanics of composite materials." **13**(4): 213-222.
- HIMEUR, N. and B. BOUCHOUICHA (2022). Etude de l'effet des fondations élastiques sur le comportement mécanique des structures épaisses.

Hirai, T. J. M. s. and technology (1996). "Functional gradient materials." 293-341.

Houari, A., H. Renaudineau, J.-P. Martin, S. Pierfederici and F. J. I. T. o. I. E. Meibody-Tabar (2011). "Flatness-based control of three-phase inverter with output \$ LC \$ filter." **59**(7): 2890-2897.

Jena, S. K., S. Chakraverty, M. Malikan, H. J. J. o. M. o. M. Sedighi and Structures (2020). "Implementation of Hermite–Ritz method and Navier’s technique for vibration of functionally graded porous nanobeam embedded in Winkler–Pasternak elastic foundation using bi-Helmholtz nonlocal elasticity." **15**(3): 405-434.

Jin, G., Z. Su, S. Shi, T. Ye and S. J. C. S. Gao (2014). "Three-dimensional exact solution for the free vibration of arbitrarily thick functionally graded rectangular plates with general boundary conditions." **108**: 565-577.

Kanani, A., H. Niknam, A. Ohadi and M. J. C. S. Aghdam (2014). "Effect of nonlinear elastic foundation on large amplitude free and forced vibration of functionally graded beam." **115**: 60-68.

Kang, G., G. Wei, W. Di, S. J. J. o. S. Chongmin and Vibration (2018). "Nonlinear dynamic stability of the orthotropic functionally graded cylindrical shell surrounded by Winkler-Pasternak elastic foundation subjected to a linearly increasing load." (415): 147-168.

Kanwal, G., R. Nawaz, N. Ahmed and M. J. P. S. Alkinidri (2023). "Effects of shear deformation and rotary inertia on elastically constrained beam resting on pasternak foundation." **98**(6): 065017.

Kawasaki, A. and R. J. C. i. Watanabe (1997). "Concept and P/M fabrication of functionally gradient materials." **23**(1): 73-83.

KEDDOURI, A. (2021). ANALYSE ET MODELISATION DU COMPORTEMENTMECANIQUE DES STRUCTURES SANDWICHES EN MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES.

Kerr, A. D. (1964). "Elastic and viscoelastic foundation models."

Kerr, A. D. J. A. M. (1965). "A study of a new foundation model." **1**(2): 135-147.

Knoppers, G., J. Gunnink, J. Van Den Hout and W. Van Vliet (2004). "The reality of functionally graded material products."

Koizumi, M. (1993). "The concept of FGM, ceramic transaction, functionally graded materials. 34."

Le, M. T., T. L. Doan, D. A. V. J. J. o. S. Nguyen and Technique (2022). "Static bending analysis of nanoplates on discontinuous elastic foundation with flexoelectric effect." **17**(05).

Li, Q., D. Wu, X. Chen, L. Liu, Y. Yu and W. J. I. J. o. M. S. Gao (2018). "Nonlinear vibration and dynamic buckling analyses of sandwich functionally graded porous plate with graphene platelet reinforcement resting on Winkler–Pasternak elastic foundation." **148**: 596-610.

Ma, J., J. Peng, X. Gao and L. J. A. o. A. M. Xie (2015). "Effect of soil–structure interaction on the nonlinear response of an inextensional beam on elastic foundation." **85**: 273-285.

Mahamood, R. M. and E. T. Akinlabi (2017). Introduction to functionally graded materials. Functionally Graded Materials, Springer: 1-8.

Mahmoud, D. and M. A. Elbestawi (2017). "Lattice Structures and Functionally Graded Materials Applications in Additive Manufacturing of Orthopedic Implants: A Review." Journal of Manufacturing and Materials Processing **1**(2): 13.

- Mahmoudi, A., R. Bachir-Bouiadjra, S. Benyoucef, A. J. N. Tounsi and Technology (2017). "Influence de la porosité sur la vibration libre des plaques FGM sur fondation élastique." (17).
- Mamen, B., A. Bouhadra, F. Bourada, M. Bourada, A. Tounsi and M. J. S. I. Hussain (2024). "Four-variable Quasi-3D model for nonlinear thermal vibration of FG plates lying on Winkler-Pasternak-Kerr foundation."
- Mantari, J., E. Granados, M. Hinojosa and C. G. J. C. S. Soares (2014). "Modelling advanced composite plates resting on elastic foundation by using a quasi-3D hybrid type HSDT." **118**: 455-471.
- Messaoudi, S., A. Panichella, D. Bianculli, L. Briand and R. Sasnauskas (2018). A search-based approach for accurate identification of log message formats. Proceedings of the 26th Conference on Program Comprehension.
- Mohammadi, M., M. Rajabi and M. Ghadiri (2021). "Functionally graded materials (FGMs): A review of classifications, fabrication methods and their applications." Processing and Application of Ceramics **15**(4): 319-343.
- Moradi-Dastjerdi, R., K. Behdinin, B. Safaei and Z. J. E. S. Qin (2020). "Buckling behavior of porous CNT-reinforced plates integrated between active piezoelectric layers." **222**: 111141.
- Mori, T. and K. J. A. m. Tanaka (1973). "Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions." **21**(5): 571-574.
- Mouawad, B. (2013). Innovative power electronics assemblies using the "Spark Plasma Sintering" technique.
- Nebab, M., Ait Atmane, H., Bennai, R., & Tounsi, A. (2019). Effect of variable elastic foundations on static behavior of functionally graded plates using sinusoidal shear deformation. *Arabian Journal of Geosciences*, 12(24), 809.
- Nebab, M., Benguediab, S., Atmane, H. A., & Bernard, F. (2020). A simple quasi-3D HDST for dynamic behavior of advanced composite plates with the effect of variables elastic foundations. *Geomechanics and Engineering*, 22(5), 415-431.
- Nebab, M., Dahmane, M., Belqassim, A., Atmane, H. A., Bernard, F., Benadouda, M., ... & Hadji, L. (2023). Fundamental frequencies of cracked FGM beams with influence of porosity and Winkler/Pasternak/Kerr foundation support using a new quasi-3D HSDT. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 1-13.
- Pasternak, P. J. G. I. L. p. S. i. A. (1954). "On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants."
- Pourseifi, M. and M. M. J. E. T. Monfared (2022). "Nonlinear vibration of a beam resting on a nonlinear viscoelastic foundation traversed by a moving mass: a homotopy analysis." **70**(4): 355–371.
- Qian, L., R. J. J. o. S. Batra and *Vibration* (2005). "Design of bidirectional functionally graded plate for optimal natural frequencies." **280**(1-2): 415-424.
- Rachid, A., D. Ouinas, A. Lousdad, F. Z. Zaoui, B. Achour, H. Gasmi, T. A. Butt and A. J. T.-W. S. Tounsi (2022). "Mechanical behavior and free vibration analysis of FG doubly curved shells on elastic foundation via a new modified displacements field model of 2D and quasi-3D HSDTs." **172**: 108783.
- Rahmani, A., S. Faroughi and M. J. A. M. M. Friswell (2021). "Vibration analysis for anti-symmetric laminated composite plates resting on visco-elastic foundation with temperature effects." **94**: 421-445.
- Saleh, B., J. Jiang, R. Fathi, T. Al-hababi, Q. Xu, L. Wang, D. Song and A. J. C. P. B. E. Ma (2020). "30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, Applications and Future Challenges." **201**: 108376.

Shahsavari, D., M. Shahsavari, L. Li, B. J. A. S. Karami and Technology (2018). "A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation." **72**: 134-149.

Sheikholeslami, S. and A. J. C. S. Saidi (2013). "Vibration analysis of functionally graded rectangular plates resting on elastic foundation using higher-order shear and normal deformable plate theory." **106**: 350-361.

Shen, H.-S. (2016). Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells, CRC press.
Shen, H.-S. and Z. J. E. J. o. M.-A. S. Zhu (2012). "Postbuckling of sandwich plates with nanotube-reinforced composite face sheets resting on elastic foundations." **35**: 10-21.

Shi, H., P. Zhou, J. Li, C. Liu and L. Wang (2021). "Functional gradient metallic biomaterials: Techniques, current scenery, and future prospects in the biomedical field." Frontiers in Bioengineering and Biotechnology **8**: 616845.

Şimşek, M. J. C. S. (2015). "Bi-directional functionally graded materials (BDFGMs) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions." **133**: 968-978.

Tabassian, R., J. J. J. o. S. S. Rezaeepazhand and Materials (2013). "Dynamic stability of smart sandwich beams with electro-rheological core resting on elastic foundation." **15**(1): 25-44.

Tokita, M. (2010). The potential of spark plasma sintering (SPS) method for the fabrication on an industrial scale of functionally graded materials. Advances in science and technology, Trans Tech Publ.
Tossapanon, P. and N. J. C. s. Wattanasakulpong (2016). "Stability and free vibration of functionally graded sandwich beams resting on two-parameter elastic foundation." **142**: 215-225.

Udupa, G., S. S. Rao and K. J. P. M. S. Gangadharan (2014). "Functionally graded composite materials: an overview." **5**: 1291-1299.

Vel, S. S., R. J. J. o. S. Batra and Vibration (2004). "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates." **272**(3-5): 703-730.

Wang, C. M., Y. Xiang and Q. J. J. o. e. m. Wang (2001). "Axisymmetric buckling of Reddy circular plates on Pasternak foundation." **127**(3): 254-259.

Winkler, E. (1867). Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit: mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik, für polytechnische Schulen, Bauakademien, Ingenieure, Maschinenbauer, Architekten, etc, H. Dominicus.

Xinhua, X., Jingchuan, Z., Zhongda, Y., & Zhonghong, L. (1997). Fabrication and microstructure of ZrO₂/NiCrCoAlY graded coating by plasma spraying. Surface and Coatings Technology, 88(1-3), 66-69.

Zaoui, F. Z., D. Ouinas, A. Tounsi, J. A. Viña Olay, B. Achour and M. J. A. o. A. M. Touahmia (2021). "Fundamental frequency analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties based on improved exponential-trigonometric two-dimensional higher shear deformation theory." **91**(3): 859-881.

Zarfam, R., A. J. J. o. S. Khaloo and Vibration (2012). "Vibration control of beams on elastic foundation under a moving vehicle and random lateral excitations." **331**(6): 1217-1232.

Zhang, C., F. Chen, Z. Huang, M. Jia, G. Chen, Y. Ye, Y. Lin, W. Liu, B. Chen, Q. J. M. S. Shen and E. A (2019). "Additive manufacturing of functionally graded materials: A review." **764**: 138209.

