

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Hassiba Benbouali de Chlef

Faculté des Sciences Exactes & Informatique

Département de M.I



Introduction à l'Analyse Hilbertienne
Rappels de cours et sujets d'examens résolus

Présenté par :

Dr Kasmi Abderrahmane

DESTINÉ AUX ÉTUDIANTS DE TROISIÈME ANNÉE
LICENCE MATHÉMATIQUES

Année 2019

Table des matières

Avant-Propos	3
1 Espaces de Hilbert	4
1.1 Rappels préliminaires	4
1.1.1 Espaces métriques	4
1.1.2 Espaces vectoriels normés	5
1.2 Espaces préhilbertiens	6
1.3 Propriétés géométriques d'un espace pré-hilbertien	10
1.3.1 Orthogonalité	10
1.3.2 Base hilbertiennes	15
2 Introduction aux opérateurs linéaires bornés	19
2.1 Définitions. Norme d'un opérateur borné. Exemples	19
2.2 Espace $L_C(H)$ des opérateurs linéaires bornés- Exemples d'opérateurs bornés	22
2.2.1 Adjoint d'un opérateur	22
2.2.2 Quelques classes d'opérateurs	25
2.2.3 Exemples d'opérateurs linéaires bornés	25
3 Sujets d'examens	28
3.1 Examens 2015-2016	28
3.1.1 Examen Final 2015-2016	28
3.1.2 Examen de Rattrapage 2015-2016	29
3.2 Examens 2016-2017	30
3.2.1 Examen Final 2016-2017	30
3.2.2 Examen de Rattrapage 2016-2017	32
3.3 Examens 2017-2018	33
3.3.1 Examen Final 2017-2018	33
3.3.2 Examen de Rattrapage 2017-2018	34
4 Corrigés des examens	36
4.1 Corrigés des examens 2015-2016	36
4.1.1 Examen Final 2015-2016	36

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	2
4.1.2 Examen de Rattrapage 2015-2016	38
4.2 Corrigés des examens 2016-2017	42
4.2.1 Examen Final 2016-2017	42
4.2.2 Examen de Rattrapage 2016-2017	45
4.3 Corrigés des examens 2017-2018	46
4.3.1 Examen Final 2017-2018	46
4.3.2 Examen de Rattrapage 2017-2018	49
5 Exercices supplémentaires	52
5.1 E.v.n et espaces pre-hilbertiens	52
5.2 Espaces de Hilbert et systèmes orthogonaux	54
5.3 Opérateurs linéaires bornés	56
5.4 Corrigés de certains exercices	57
Bibliographie	64

Avant-Propos

Ce polycopié est destiné principalement aux étudiants :

- Étudiants de la troisième année licence de mathématiques ;
- Étudiants de la première année Master de mathématiques comme une introduction à la matière "Théorie des Opérateurs".

Ce travail contient le programme de la matière "Introduction à l'Analyse Hilbertienne", des exercices recueillis de mes séries de travaux dirigés et des sujets d'examens proposés en " 2015-2016, 2016-2017 et 2017-2018 " à l'université de Chlef.

Le polycopié nécessite des connaissances de bases en théorie de topologie (espace métrique et espace vectoriel normé) et d'analyse (analyse 1, analyse 2, analyse 3 et analyse 4), ce qui justifie l'introduction du premier chapitre "Rappels préliminaires : espace métrique et espace vectoriel normé".

J'espère enfin que ce polycopié constituera un support utile pour nos étudiants.

Chapitre 1

Espaces de Hilbert

Les espaces hilbertiens ou espaces de **Hilbert**¹ sont l'outil fondamental des applications de l'analyse à la physique et aux sciences de l'ingénieur.

Les espaces de Hilbert sont la généralisation naturelle en dimension infinie des espaces euclidiens \mathbb{R}^n (ou \mathbb{C}^n).

Tout au long du chapitre1 on travaillera sur un corps \mathbb{K} , qui sera soit \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1.1 Rappels préliminaires

Quelques rappels sur les espaces métriques et les espaces vectoriels normés.

1.1.1 Espaces métriques

Définition 1.1.1. (*Distance*) Soit E un ensemble. Une distance (ou métrique) sur E est une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
2. Pour tout $x, y \in E$, $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) ;
3. Pour tout $x, y, z \in E$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).

Définition 1.1.2. (*Espace métrique*) Un espace métrique est un couple (E, d) constitué d'un ensemble E et d'une distance d sur E .

Définition 1.1.3. (*Distances équivalentes*) Deux distances d_1 et d_2 sur E sont dites équivalentes ($d_1 \approx d_2$) s'il existe deux constantes strictement positives a et b telles que :

$$\forall x, y \in E, a d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq b d_1(x, y).$$

¹David Hilbert, né en 1862 et mort en 1943, est un mathématicien allemand.

1.1.2 Espaces vectoriels normés

Définition 1.1.4. (Norme) Une norme sur un espace vectoriel E est une application notée généralement $\|\cdot\|_E$ de E dans \mathbb{R} , possédant les propriétés suivantes :

1. $\|x\|_E \geq 0 \quad \forall x \in E$ (positivité);
2. $\|x\|_E = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (identité ou définie);
3. $\|\lambda x\|_E = |\lambda| \|x\|_E \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in K$ (homogénéité);
4. $\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E \quad \forall x, y \in E$ (inégalité triangulaire).

Définition 1.1.5. Un espace vectoriel normé (en abrégé : **EVN**) est un espace vectoriel muni d'une norme E muni d'une norme $\|\cdot\|_E$, et sera noté $(E, \|\cdot\|_E)$ ou $E_{\|\cdot\|_E}$.

Exemple 1.1.6.

1. L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}$ muni de l'application **valeur absolue** $x \mapsto |x|$ est un espace vectoriel normé.
2. L'espace vectoriel $E = \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ muni de l'application **module** $z \mapsto |z|$ est un espace vectoriel normé.
3. L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ muni de l'une des normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ avec :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| ; \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ; \|x\|_\infty = \underset{1 \leq k \leq n}{Max} |x_k| .$$

est un espace vectoriel normé.

4. L'espace vectoriel $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$ muni de l'une des normes $\|\cdot\|_1$ (norme de la moyenne), $\|\cdot\|_2$ (norme de la moyenne quadratique) et $\|\cdot\|_\infty$ (norme uniforme) avec :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt ; \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} ; \|f\|_\infty = \underset{t \in [a, b]}{Max} |f(t)| .$$

est un espace vectoriel normé.

Remarque 1.1.7. Il en résulte que $d(x, y) = \|x - y\|_E$ est une distance invariante par translation (i.e : $\forall x, y, z \in E : d(x + z, y + z) = d(x, y)$).

Définition 1.1.8. (Normes équivalentes) Soit E un espace vectoriel et $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ deux normes sur E . Les deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont dites équivalentes s'il existe deux constantes strictement positives a et b telles que :

$$a \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b \|x\|_2$$

pour tout $x \in E$.

Remarque 1.1.9. Dans un espace vectoriel de dimension finie, deux normes quelconques sont équivalentes.

Exemple 1.1.10. Les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbb{R}^n sont équivalentes deux à deux.

Remarque 1.1.11.

$$\|\cdot\|_1 \approx \|\cdot\|_2 \Rightarrow d_1 \approx d_2 \Rightarrow T_{d_1} \approx T_{d_2}$$

Définition 1.1.12. (Suite convergente) Une suite de vecteurs (x_n) dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ est convergente vers $x \in E$ si pour tout $\varepsilon \geq 0$, il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $\|x_n - x\|_E \leq \varepsilon$. On écrit alors $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Remarque 1.1.13.

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|_E = 0$$

Définition 1.1.14. (Suite de Cauchy) Une suite de Cauchy (x_n) dans E est une suite de vecteurs de E telle que pour tout $\varepsilon \geq 0$, il existe un entier n_0 tel que les relations $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$ impliquent $\|x_m - x_n\|_E \leq \varepsilon$.

Remarque 1.1.15. Toute suite convergente est de Cauchy.

Remarque 1.1.16. Si $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace vectoriel normé **complet**, c'est-à-dire si toute suite de Cauchy est convergente, on dit que $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de **Banach**.

1.2 Espaces préhilbertiens

Soit E un espace vectoriel (réel ou complexe).

Définition 1.2.1. (Produit scalaire) Un produit scalaire sur E est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :

1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in E$;
2. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}$;
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in E$ (la barre désigne le nombre complexe conjugué) ;
4. $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in E$;
5. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$\langle x, y \rangle$ est le produit scalaire de x et y , et se lit souvent « x scalaire y ».

Remarque 1.2.2.

- On peut avoir $\langle x, y \rangle = 0$ bien que ni x ni y ne soit pas nul.

- Il est clair que $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E$ puisque $\langle x, x \rangle = \overline{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in E$ d'après (3).
- (2) entraîne que $\langle 0, y \rangle = 0 \quad \forall y \in E$.
- (1) et (2) peuvent être réunies dans l'assertion : pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est une forme linéaire sur E .
- (2) et (3) montrent que $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.
- (1) et (3) entraînent la deuxième propriété de distributivité :

$$\langle z, x + y \rangle = \langle z, x \rangle + \langle z, y \rangle \quad \forall x, y, z \in E$$

Définition 1.2.3. (Espace pré-hilbertien) Tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace **pré-hilbertien**.

Exemple 1.2.4.

1. $E = \mathbb{K}^n$. L'application

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur E .

2. $E = C^0([0, 1], \mathbb{C})$. L'application

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\rightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) &\mapsto \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \times \overline{g(t)} dt \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur E .

Remarque 1.2.5. Les espaces $E = \mathbb{R}^n, E = \mathbb{C}^n$ sont des espaces pré-hilbertiens pour les produits scalaires dits usuels :

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} \sum_{k=1}^n x_k y_k & \text{dans le cas réel} \\ \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k & \text{dans le cas complexe} \end{cases}$$

Proposition 1.2.6. Soit E un espace pré-hilbertien avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$. Alors on a les propriétés suivantes :

1. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \quad \forall x, y \in E$ (Identité de polarisation);
2. $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in E$ (Inégalité de Cauchy-Schwarz);
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$ (Inégalité triangulaire);

4. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$

Démonstration :

1. On a :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

2. Si $\|x\| = 0$ c'est que $x = 0$ et l'inégalité est immédiate. Sinon, $\|x\|$ est strictement positive et pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons :

$$0 \leq \|tx + y\|^2 = t^2 \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle t + \|y\|^2$$

Le discriminant de ce polynôme doit être ≤ 0 :

$$(2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle)^2 - 4 \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$$

d'où :

$$\|x\| \|y\| \geq |\operatorname{Re} \langle x, y \rangle| \geq \operatorname{Re} \langle x, y \rangle$$

De plus il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = 1$ et $\langle x, y \rangle = \alpha |\langle x, y \rangle|$

d'où :

$$\bar{\alpha} \langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle|$$

et

$$\|x\| \|y\| = \|x\| \|\alpha y\| \geq \operatorname{Re} \langle x, \alpha y \rangle = \operatorname{Re} \bar{\alpha} \langle x, y \rangle = \operatorname{Re} |\langle x, y \rangle| = |\langle x, y \rangle|$$

Ce qui montre que :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

3. On a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 |\langle x, y \rangle| \\ &\stackrel{C.S.}{\leq} \underbrace{\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\|}_{=(\|x\| + \|y\|)^2} \end{aligned}$$

d'où :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

4. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in E$ nous avons :

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} \\ &= \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\| \end{aligned}$$

Corollaire 1.2.7. Soit E un espace vectoriel muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (c'est-à-dire E est un espace pré-hilbertien). Alors $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ définit une norme sur E (cette norme est appelée la norme hilbertienne associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

Démonstration :

1. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$ (évidente) ;
2. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (propriété de $\langle \cdot, \cdot \rangle$) ;
3. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in E$ on a : $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (d'après la propriété 4 de la proposition précédente) ;
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$ (d'après la propriété 3 de la proposition précédente).

Exercice 1.2.8. Montrer que le produit scalaire et la norme sont des fonctions continues.

Indication : Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire.

Proposition 1.2.9. (Identité du parallélogramme) Si x et y sont deux vecteurs d'un espace pré-hilbertien E alors :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 (\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Démonstration : On a :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\ &= 2 \langle x, x \rangle + 2 \langle y, y \rangle = 2 (\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{aligned}$$

Définition 1.2.10. (Espaces de Hilbert) Un espace de **Hilbert** est un espace pré-hilbertien qui est complet pour la norme associée au produit scalaire.

Dans toute la suite H désigne un espace de Hilbert.

Exemple 1.2.11.

1. L'espace $H = \mathbb{C}^n$ muni de produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$ est un espace pré-hilbertien complet donc un espace de Hilbert.
2. L'espace $H = l^2$ de toutes les suites infinies $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres complexes telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty$ muni de produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \bar{y}_n$ est un espace pré-hilbertien complet donc un espace de Hilbert.

1.3 Propriétés géométriques d'un espace pré-hilbertien

L'intérêt principal de la structure d'espace pré-hilbertien est d'introduire la notion géométrique d'orthogonalité (le produit scalaire permet de définir les notions d'orthogonalité et de base hilbertienne).

1.3.1 Orthogonalité

Soit E un espace pré-hilbertien avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition 1.3.1. (Orthogonalité) Soient $x, y \in E$. On dit que x est orthogonal à y ou bien les deux éléments x et y sont orthogonaux, et l'on écrit $x \perp y$, si $\langle x, y \rangle = 0$.

Remarque 1.3.2. Puisque $\langle x, y \rangle = 0$ entraîne $\langle y, x \rangle = 0$, la relation \perp est symétrique.

Exemple 1.3.3. $E = \mathbb{C}^n$ muni de produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$. On pose :

$$x_k = \left(0, \dots, 0, \underset{k}{\uparrow} 1, 0, \dots, 0 \right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Il est clair que $\langle x_k, y_m \rangle = 0$ pour $k \neq m$, c'est-à-dire $x_k \perp y_m$.

Définition 1.3.4. Soit $x \in E$. On appelle orthogonal de x noté x^\perp l'ensemble de tous les vecteurs y de E qui sont orthogonaux à x . Donc :

$$x^\perp = \{ y \in E : \langle x, y \rangle = 0 \}$$

Remarque 1.3.5. 1. x^\perp est un sous-espace vectoriel de E , puisque $x \perp y$ et $x \perp y'$ entraîne $x \perp (y + y')$ et $x \perp \alpha y$.

2. x^\perp est un sous-espace fermé de E , puisque x^\perp est l'ensemble des vecteurs où s'annule la fonction continue $y \mapsto \langle x, y \rangle$.

Définition 1.3.6. Soit $A \subset E$. On appelle orthogonal de A noté A^\perp l'ensemble des vecteurs y de E qui sont orthogonaux à tout x de A . Donc :

$$A^\perp = \{ y \in E : \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in A \}$$

Remarque 1.3.7. Il est immédiat que $A^\perp = \bigcap_{x \in A} x^\perp$ (exercice).

Proposition 1.3.8. A^\perp est un sous-espace vectoriel fermé de E .

Démonstration : A^\perp est une intersection de sous-espaces fermés et par suite est un sous-espace vectoriel fermé de E .

Exemple 1.3.9. $E = \mathbb{R}^3$, $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^3 x_k y_k$ (produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^3).

Si $A = \{ (a_1, a_2, 0) : a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$, alors $A^\perp = \{ (0, 0, x_3) : x_3 \in \mathbb{R} \}$.

Définition 1.3.10. On dit que deux parties A et B de E sont orthogonales si $\langle x, y \rangle = 0$ pour tous $x \in A$ et $y \in B$.

Exemple 1.3.11. A et A^\perp sont orthogonales puisque $\langle x, y \rangle = 0$ pour tous $x \in A$ et $y \in A^\perp$.

Théorème 1.3.12. (Théorème de Pythagore) Si x et y sont deux vecteurs orthogonaux de E , alors :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Démonstration : D'après l'identité de polarisation, on a :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \underbrace{\operatorname{Re} \langle x, y \rangle}_{=0} = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Remarque 1.3.13. On montre facilement par récurrence sur $n \geq 1$, que si x_1, \dots, x_n sont deux à deux orthogonaux, on a alors :

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

Proposition 1.3.14. Soient A et B deux sous espaces de E tels que $A \subset B$. Alors on a les propriétés suivantes :

1. $0_E \in A^\perp$;
2. $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$;
3. $B^\perp \subset A^\perp$;
4. $A \subset (A^\perp)^\perp$;
5. $A \cap A^\perp = \{0_E\}$.

Démonstration : Exercice.

Le théorème suivant (**théorème de la projection**) est l'outil-clé pour l'étude des espaces de Hilbert.

D'après l'inégalité de C.S, pour les espaces réels, si x, y sont tous les deux non nuls alors :

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \leq 1$$

et donc l'angle entre x et y peut être défini par :

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right)$$

Pour les espaces **complexes**, le problème est plus difficile, comme le produit scalaire est $\langle x, y \rangle$ à valeurs complexes il n'est pas clair ce que « *angle* » signifie dans ce cas.

Théorème 1.3.15. (Théorème de la projection sur une partie convexe fermé)
 Soit C une partie non vide, convexe (i.e. pour tous x et y de C , le segment $[x, y]$ est tout entier contenu dans C) et fermée d'un espace de Hilbert H . Alors pour tout $x \in H$, il existe un **unique** $y_0 \in C$ tel que :

$$\|x - y_0\| = d(x, C) = \text{Min} \{ \|x - y\|, y \in C \} = \text{Min}_{y \in C} \|x - y\|$$

i.e. la fonction $y \mapsto \|x - y\|$ atteint son minimum sur C .

Si $x \in C$ alors $y_0 = x$, si $x \notin C$ alors y_0 est caractérisé par :

$$\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0, \quad \forall y \in C \tag{1.1}$$

dans le cas **réel**, et

$$\text{Re} \langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0, \quad \forall y \in C \tag{1.2}$$

dans le cas **complexe**.

On appelle alors y_0 la projection de x noté $P_C(x)$ sur le convexe C .

Remarque 1.3.16.

1. La distance de x à C soit égale à celle de x à $P_C(x)$ i.e.

$$\|x - P_C(x)\| = d(x, C) = \text{Inf} \{ \|x - y\|, y \in C \}$$

2. Les inégalités (1.1) ou (1.2) s'interprètent géométriquement et de manière intuitive en disant que pour tout y de C les vecteurs $x - y_0$ et $y - y_0$ font un angle « obtus » :

$$\cos(\text{angle}(x - y_0, y - y_0)) = \frac{\text{Re} \langle x - y_0, y - y_0 \rangle}{\|x - y_0\| \|y - y_0\|}$$

Les inégalités (1.1) ou (1.2) se lisent donc :

$$\cos(\text{angle}(x - y_0, y - y_0)) \leq 0, \quad \forall y \in C$$

De manière géométrique la propriété qui caractérise y_0 ci-dessus signifie que l'angle entre les deux vecteurs $x - y_0$ et $y - y_0$ est obtus.

Démonstration du théorème 1.3.15 :

Soit $d = d(x, C) = \text{Min} \{ \|x - y\|, y \in C \}$. Il existe une suite $(y_n)_{n \geq 1}$ dans C telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - y_n\| = d$ (une telle suite est appelée suite minimisante).

- **Existence** de y_0 : Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. Par l'identité du parallélogramme, appliqué à $u_p = x - y_p$ et $u_q = x - y_q$, on a :

$$\|u_q + u_p\|^2 + \|u_q - u_p\|^2 = 2 (\|u_q\|^2 + \|u_p\|^2)$$

Comme :

$$u_q + u_p = 2 \left(x - \frac{y_q + y_p}{2} \right)$$

et

$$u_q - u_p = y_p - y_q$$

on a donc :

$$4 \left\| x - \frac{y_q + y_p}{2} \right\|^2 + \|y_p - y_q\|^2 = 2 (\|x - y_q\|^2 + \|x - y_p\|^2)$$

Comme C est convexe, on a $\frac{y_q + y_p}{2} \in C$.

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \|y_p - y_q\|^2 &= 2 (\|x - y_q\|^2 + \|x - y_p\|^2) - 4 \left\| x - \frac{y_q + y_p}{2} \right\|^2 \\ &\leq 2 (\|x - y_q\|^2 + \|x - y_p\|^2) - 4d^2 \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - y_n\|^2 = d^2$, ceci montre que $(y_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans H . L'espace H étant complet, la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y_0$ existe. Comme C est fermé, on a $y_0 \in C$.

On a alors, d'une part,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - y_n\| = \|x - y_0\|$$

D'autre part,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - y_n\| = d$$

d'où :

$$\|x - y_0\| = d$$

- **Unicité** de y_0 : Si $\|x - y_1\| = \|x - y_0\|$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \|y_0 - y_1\|^2 &= 2 (\|x - y_0\|^2 + \|x - y_1\|^2) - 4 \left\| x - \frac{y_0 + y_1}{2} \right\|^2 \\ &\leq 2 \underbrace{(d^2 + d^2)}_{=0} - 4d^2 \end{aligned}$$

donc $y_1 = y_0$.

- Montrons l'inégalité (1.2) : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f(t) &= \|y_0 + t(y - y_0) - x\|^2 \\ &= \|y_0 - x\|^2 + 2t \operatorname{Re} \langle y_0 - x, y - y_0 \rangle + t^2 \|y - y_0\|^2 \end{aligned}$$

Par convexité de C , on a $y_0 + t(y - y_0) = ty + (1 - t)y_0 \in C$.

Donc :

$$f(t) \geq f(0) = \|y_0 - x\|^2, \quad \forall t \in [0, 1]$$

Il s'ensuit que :

$$f'(0) = 2\operatorname{Re} \langle x - y_0, y - y_0 \rangle \geq 0$$

et donc :

$$\operatorname{Re} \langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0, \quad \forall y \in C$$

Proposition 1.3.17. (Propriétés de la projection) La projection P_C est une application de H dans C qui satisfait les propriétés suivantes :

1. $P_C \circ P_C = P_C$;
2. $\|x - P_C(x)\| \leq \|x - y\|$, $\forall y \in C$;
3. $\langle P_C(x_1) - P_C(x_2), x_1 - x_2 \rangle \geq 0$, $\forall x_1, x_2 \in H$.

Démonstration : Exercice.

Il suffit d'utiliser la définition de la projection.

Remarque 1.3.18. Le théorème précédent s'applique au cas où C est un **sous-espace vectoriel fermé** d'un espace de Hilbert H . Dans ce cas les angles ne sont plus seulement obtus mais droits.

Corollaire 1.3.19. Soit F un **sous-espace vectoriel fermé** d'un espace de Hilbert H . On a :

1. $x - P_F(x) \in F^\perp$ i.e. $\langle x - P_F(x), y \rangle = 0$, $\forall y \in F$;
2. $P_F : H \rightarrow F$ est linéaire, continue, de norme 1 (voir **chapitre 2**) ;
3. $H = F \oplus F^\perp$ i.e. $F + F^\perp = H$ et $F \cap F^\perp = \{0_E\}$;
4. Pour tout $x = x_1 + x_2 \in H$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$, on a $P_F(x) = x_1$;
5. $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration :

1. On note $y = P_C(x)$. Montrons que $x - y \in F^\perp$ i.e. $\langle x - y, w \rangle = 0$, $\forall w \in F$.
On sait que, pour tout $z \in F$, on a :

$$\operatorname{Re} \langle x - y, z - y \rangle \leq 0$$

Donc :

$$\operatorname{Re} \langle x - y, w \rangle \leq 0, \quad \forall w \in F$$

En remplaçant w par $-w$ puis par iw , on conclut que :

$$\langle x - y, w \rangle = 0, \quad \forall w \in F$$

2. Voir chapitre 2.
3. Par projection, on a :

$$x = P_F(x) + (x - P_F(x))$$

avec $x - P_F(x) \in F^\perp$. De plus :

$$F \cap F^\perp = \{0_E\}$$

4. C'est une conséquence directe de la propriété précédente.
5. On a toujours $F \subset (F^\perp)^\perp$. Inversement si $x \in (F^\perp)^\perp$, alors x se décompose en $x = p + z$ avec $p \in F$ et $z \in F^\perp$. Mais alors $z = x - p \in (F^\perp)^\perp$ et est donc orthogonal à lui-même, c'est-à-dire que $z = 0$ et $x = p \in F$.

Exercice 1.3.20. Soit A une partie non vide de H . Montrer que $(A^\perp)^\perp$ est le plus petit sous-espace vectoriel fermé de H contenant A .

Exercice 1.3.21. Soit F un sous-espace vectoriel de H . Montrer que :

1. $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$;
2. F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0_E\}$.

Théorème 1.3.22. (Théorème de Riesz) Soit H un espace de Hilbert et soit $\phi : F \rightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire continue. Alors il existe un unique $y \in H$ tel que pour tout x :

$$\phi(x) = \langle x, y \rangle$$

De plus, on a :

$$\|\phi\| = \|y\|_H$$

où $\|\phi\| = \text{Sup} \{ |\phi(x)|, \|x\| \leq 1 \}$.

Démonstration : Voir [4].

1.3.2 Base hilbertiennes

Une base de Hilbert est une généralisation aux espaces de Hilbert de la notion classique de base orthonormée en algèbre linéaire.

Soit E un espace pré-hilbertien avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ avec $E \neq \{0_E\}$.

Définition 1.3.23. (Famille orthogonale ou système orthogonal) Une famille de vecteurs $\{x_i\}_{i \in I}$ de E est dite orthogonale lorsque :

$$\langle x_i, x_j \rangle = 0$$

pour $i, j \in I$ tels que $i \neq j$.

Définition 1.3.24. (Famille orthonormée ou système orthonormé) Une famille de vecteurs $\{x_i\}_{i \in I}$ de E est dite orthonormée ou orthonormale lorsque :

$$\begin{cases} \|x_i\| = 1 & \text{si } i \in I \\ \langle x_i, x_j \rangle = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Remarque 1.3.25.

1. Une famille orthonormale est une famille orthogonale.
2. Une famille orthogonale $\{x_i\}_{i \in I}$ est une famille orthonormale si $\|x_i\| = 1$ pour tout $i \in I$.
3. Une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est une famille libre.

Remarque 1.3.26. Lorsque $I = \mathbb{N}$, un système orthonormé (resp. orthogonal) est appelé parfois suite orthonormée (resp. orthogonale).

Exemple 1.3.27. $E = \mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ (produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n).
Le système $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ donné par :

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

est un système orthonormé puisque :

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

Exercice 1.3.28. $E = C^0([-1, 1], \mathbb{R})$, $\langle f, g \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t) \times g(t) dt$ (produit scalaire sur E). On pose :

$$T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos} x), x \in [-1, 1] \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormée.

Exercice 1.3.29. $E = C^0([0, 1], \mathbb{C})$. $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \times \overline{g(t)} dt$ (produit scalaire sur E). On pose :

$$e_n(x) = e^{2i\pi n x}, x \in [0, 1] \text{ et } n \in \mathbb{Z}$$

Montrer que la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée.

Définition 1.3.30. Soit $\{e_i\}_{i \in I}$ une famille orthonormée de E et soit $x \in E$. On appelle composante de x d'ordre i pour la famille $\{e_i\}_{i \in I}$ le nombre $\langle x, e_i \rangle$ (**coefficient de Fourier**).

Exemple 1.3.31. $E = \mathbb{R}^2$, $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^2 x_k y_k$ (produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^2). Le système $\{e_1, e_2\}$ donné par : $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ est un système orthonormé. On a donc :

$$x_1 = \langle x, e_1 \rangle \text{ et } x_2 = \langle x, e_2 \rangle$$

Remarque 1.3.32. $\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$ est appelée **série de Fourier** associée à x relativement à la famille orthonormale $\{e_i\}_{i \in I}$.

Proposition 1.3.33. (Inégalité de Bessel) Soit $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite orthonormée dans E , on a alors :

$$\sum_{n \geq 1} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2, \forall x \in E$$

Démonstration : Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned} & \left\langle x - \sum_{n \geq 1} \langle x, e_n \rangle e_n, x - \sum_{n \geq 1} \langle x, e_n \rangle e_n \right\rangle \geq 0 \\ & = \|x\|^2 - \underbrace{\left\langle x, \sum_{n \geq 1} \langle x, e_n \rangle e_n \right\rangle}_{= \sum_{n \geq 1} |\langle x, e_n \rangle|^2} - \underbrace{\left\langle \sum_{n \geq 1} \langle x, e_n \rangle e_n, x \right\rangle}_{= \sum_{n \geq 1} |\langle x, e_n \rangle|^2} + \sum_{n \geq 1} |\langle x, e_n \rangle|^2 \\ & = \|x\|^2 - \sum_{n \geq 1} |\langle x, e_n \rangle|^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\|x\|^2 - \sum_{n \geq 1} |\langle x, e_n \rangle|^2 \geq 0$$

D'où :

$$\sum_{n \geq 1} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Définition 1.3.34. (Base hilbertienne ou base orthonormale)

Soit H un espace de Hilbert.

Une **base hilbertienne** ou **base orthonormale** est un système orthonormé $\{e_i\}_{i \in I}$ de H tel que $H = \overline{\text{vect}\{e_i\}_{i \in I}}$ (i.e. le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_i\}_{i \in I}$ est dense dans H) et on écrit :

$$\forall x \in H, \exists (\lambda_i)_{i \in I} \subset \mathbb{C} : x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$

Définition 1.3.35. Soit $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace de Hilbert H . $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est dite totale (complète) si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \langle x, e_n \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$$

i.e. le seul vecteur orthogonale à tous les e_n est le vecteur nul de H .

On a donc le résultat suivant :

Théorème 1.3.36. (*Caractérisation des bases hilbertiennes*) Soit H un espace de Hilbert et soit $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un système orthonormé de H . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne (orthonormale) de H ;
2. $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite totale (complète) de H ;
3. $\forall x \in H, \sum_{n \geq 0} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2$ (**L'identité de Parseval**).

Autrement dit, une base hilbertienne de H est un système total (complet), ou bien un système qui vérifie l'identité de Parseval.

Démonstration :

- 1) \Rightarrow 2)

On a :

$\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $H \Rightarrow \langle x, e_n \rangle = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0$.

En effet, si $\langle x, e_n \rangle = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$x \in \text{vect} \{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}^\perp = \overline{\text{vect} \{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}}^\perp = H^\perp = \{0\}$$

- 2) \Rightarrow 3) Exercice.
- 3) \Rightarrow 1) Exercice.

Chapitre 2

Introduction aux opérateurs linéaires bornés

2.1 Définitions. Norme d'un opérateur borné. Exemples

En mathématiques, un opérateur linéaire (ou plus simplement un **opérateur**) est une fonction entre deux espaces vectoriels qui est linéaire sur son domaine de définition.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés .

Définition 2.1.1. (Opérateur borné) Un opérateur linéaire $T : E \rightarrow F$ (i.e. si pour tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$) est dit borné s'il existe un réel $C \geq 0$ tel que :

$$\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E$$

pour tout $x \in E$.

On note $L_C(E, F)$ ou $B(E, F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés (continus) de E dans F . Si $E = F$, on écrira $L_C(E)$ à la place de $L_C(E, F)$.

Remarque 2.1.2. On écrira souvent Tx au lieu de $T(x)$.

Proposition 2.1.3. L'ensemble $L_C(E, F)$ est un espace vectoriel sur K ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$) pour les lois :

- $(T + S)x = Tx + Sx$, $T, S \in L_C(E, F)$, $x \in E$;
- $(\lambda T)x = \lambda(Tx)$, $T \in L_C(E, F)$, $\lambda \in K$, $x \in E$.

Définition 2.1.4. On définit la norme de l'opérateur T par :

$$\begin{aligned}\|T\|_{op} &= \text{Inf} \{ C : \|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \forall x \in E \} \\ &= \text{Sup} \left\{ \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}, x \in E - \{0\} \right\} \\ &= \text{Sup} \left\{ \|T(x)\|_F, \|x\|_E \leq 1 \text{ (Boule unité)} \right\} \\ &= \text{Sup} \left\{ \|T(x)\|_F, \|x\|_E = 1 \text{ (Sphère unité)} \right\}\end{aligned}$$

On a alors :

$$\|T(x)\|_F \leq \|T\|_{op} \|x\|_E$$

pour tout $x \in E$.

Proposition 2.1.5. *L'application $T \mapsto \|T\|_{op}$ est une norme sur $L_C(E, F)$.*

Démonstration : Utiliser les propriétés de la borne supérieure ou la borne inférieure.

Corollaire 2.1.6. *$(L_C(E, F), \|\cdot\|_{op})$ est un espace vectoriel normé sur K .*

Démonstration : C'est une conséquence directe des propositions 2.1.3 et 2.1.5.

Remarque 2.1.7. *Si F est un espace de Banach, alors il en est de même pour $(L_C(E, F), \|\cdot\|_{op})$.*

Exercice 2.1.8. *Soit H un espace de Hilbert.*

Montrer que l'espace $L_C(H)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_{op}$.

Proposition 2.1.9. *Si $T : E \rightarrow F$ est un opérateur **linéaire**, alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. $T \in L_C(E, F)$;
2. L'ensemble $\{Tx, \|T(x)\| \leq 1\}$ est borné dans F ;
3. T est continu à l'origine 0 de E ;
4. T est continu sur E ;
5. T est lipschitzien.

Démonstration : Il suffit de montrer que : 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 5) \Rightarrow 1).

Remarque 2.1.10. *Si $T \in L_C(E, F)$ et $S \in L_C(F, G)$; on définit l'opérateur ST par : $STx = S(Tx)$ i.e. $ST = S \circ T$. Alors $ST \in L_C(E, F)$ et de plus $\|ST\|_{op} \leq \|S\|_{op} \|T\|_{op}$.*

Exemple 2.1.11.

1. *Soit H un espace de Hilbert et soit F un sous-espace vectoriel fermé de H avec $F \neq \{0\}$. L'application P_F (projection orthogonale de H sur F) est un opérateur linéaire borné de norme 1 (i.e. $P_F \in L_C(H)$ et $\|P_F\|_{op} = 1$). En effet :*

- $P_F : H \rightarrow F$ est linéaire (évident d'après la définition de P_F).
- $P_F : H \rightarrow F$ est continue puisque :

$$\begin{aligned} \forall x \in H, x = P_F(x) + x - P_F(x) &\Rightarrow \|x\|^2 = \|P_F(x) + x - P_F(x)\|^2 \\ (\text{théorème de Pythagore}) &\Rightarrow \|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2 \\ &\Rightarrow \|P_F(x)\| \leq \|x\| \end{aligned}$$

- $\|P_F\|_{op} = 1$ puisque $\forall x \in F, P_F(x) = x$ i.e. $\forall x \in F, \|P_F(x)\| = \|x\|$

2. On considère l'espace de Hilbert H des suites de nombres complexes $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty$$

On pose pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l^2$

$$T x = (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

L'application T est un opérateur linéaire borné de norme 1 (i.e. $T \in L_C(l^2)$ et $\|T\|_{op} = 1$).

3. Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert avec $\dim H_1 = n < +\infty$ et $T : H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur linéaire. L'application T est un opérateur borné (i.e. $T \in L_C(H_1, H_2)$). En effet, si $\{e_k\}_{k=1}^n$ est une base hilbertienne de H_1 , alors, pour tout $x \in H_1$, on a :

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$$

et

$$T x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle T e_k$$

Donc :

$$\begin{aligned} \|T x\|_{H_2} &= \left\| \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle T e_k \right\|_2 \leq \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle| \|T e_k\|_{H_2} \\ &\stackrel{\text{C.S dans } \mathbb{R}^n}{\leq} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \right)^{1/2}}_{=\|x\|_{H_1}} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \|T e_k\|_{H_2}^2 \right)^{1/2}}_C \\ &\stackrel{\text{égalité de Parseval}}{\leq} C \|x\|_{H_1} \end{aligned}$$

Définition 2.1.12. On définit l'image et le noyau d'un opérateur $T : E \rightarrow F$ par :

$$\text{Ker } T = \{ x \in E : T x = 0 \}$$

et

$$\text{Im } T = \{ T x \in F : x \in E \}$$

Exercice 2.1.13. Soit H un espace de Hilbert et soit F un sous-espace vectoriel fermé de H . Montrer que :

$$\text{Ker } P_F = F^\perp$$

Définition 2.1.14. (**Opérateur inversible**) Un opérateur $T \in L_C(E, F)$ est dit inversible s'il existe un opérateur $S \in L_C(F, E)$ vérifiant $ST = I_E$ et $TS = I_F$, et que S est alors unique est noté S^{-1} .

2.2 Espace $L_C(H)$ des opérateurs linéaires bornés- Exemples d'opérateurs bornés

On va étudier les opérateurs linéaires bornés d'un espace de Hilbert H dans lui-même (i.e. l'espace $L_C(H, H) = L_C(H)$). On commence avec la notion d'adjoint. Plusieurs des classes particulières d'opérateurs bornés seront définies à l'aide de cette notion.

2.2.1 Adjoint d'un opérateur

Proposition 2.2.1. *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T \in L_C(H_1, H_2)$. Alors il existe un unique $T^* \in L_C(H_2, H_1)$ tel que, pour tout $x \in H_1$ et tout $y \in H_2$, on ait :*

$$\langle T x, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^* y \rangle_{H_1}$$

On a de plus $\|T^*\|_{op} = \|T\|_{op}$.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème de représentation de Riesz (Théorème 1.3.22). Pour tout $y \in H_2$ l'application $x \mapsto \langle T x, y \rangle$ est linéaire et continue (de norme inférieure à $\|T\|_{op}\|y\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz). D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe donc **un unique** élément noté T^*y tel que :

$$\langle T x, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

On vérifie facilement que pour tous $y, z \in H_2$ et λ scalaire, $T^*y + \lambda T^*z$ vérifie la propriété qui définit $T^*(y + \lambda z)$. Par unicité, $T^*y + \lambda T^*z = T^*(y + \lambda z)$ ce qui prouve que T^* est linéaire.

Par définition de la norme opérateur et en utilisant un corollaire d'Hahn-Banach (voir [1]), on a :

$$\begin{aligned} \|T^*\|_{op} &= \sup_{y \in H_2, \|y\| \leq 1} \|T^* y\| = \sup_{\substack{x \in H_1, \|x\| \leq 1 \\ y \in H_2, \|y\| \leq 1}} |\langle x, T^* y \rangle| \\ &= \sup_{\substack{x \in H_1, \|x\| \leq 1 \\ y \in H_2, \|y\| \leq 1}} |\langle T x, y \rangle| = \sup_{x \in H_1, \|x\| \leq 1} \|T x\| = \|T\|_{op} \end{aligned}$$

Ainsi T^* est continue et $\|T^*\|_{op} = \|T\|_{op}$.

Définition 2.2.2. (*L'adjoint d'un opérateur borné*) Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T \in L_C(H_1, H_2)$. L'unique application linéaire $T^* \in L_C(H_2, H_1)$ telle que pour tous $x \in H_1, y \in H_2$, on ait :

$$\langle T x, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^* y \rangle_{H_1}$$

est appelée l'application **adjointe** de T (ou l'opérateur **adjoint** de l'opérateur T).

Regroupons dans la proposition suivante quelques propriétés des adjoints :

Proposition 2.2.3. *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T, S \in L_C(H_1, H_2)$. On a :*

1. $(T^*)^* = T^{**} = T$;
2. $(TS)^* = S^* T^*$ avec $H_1 = H_2$;
3. $(T + S)^* = T^* + S^*$;
4. $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$;
5. $(\text{Im } T)^\perp = \text{Ker } T^*$;
6. $\overline{\text{Im } T} = (\text{Ker } T^*)^\perp$;
7. $\text{Ker } T = (\text{Im } T^*)^\perp$;
8. Si T est inversible, T^* l'est aussi et on a $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Démonstration :

1. Montrons que $T^{**} = T$. Pour cela on montre que pour tous $x \in H_1$ et $y \in H_2$, on a : $\langle Tx, y \rangle = \langle T^{**}x, y \rangle$.

Par définition, on a :

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = \overline{\langle T^*y, x \rangle} = \overline{\langle y, (T^*)^*x \rangle} = \langle T^{**}x, y \rangle$$

d'où le résultat désiré.

2. Il suffit de montrer que pour tous $x \in H_1$ et $y \in H_2$, on a :

$$\langle (TS)^*x, y \rangle = \langle S^*T^*x, y \rangle$$

On a, par définition de l'adjoint,

$$\langle (TS)^*x, y \rangle = \left\langle x, \underbrace{\left(\begin{array}{c} T \\ T^{**} \end{array} \right)}_S y \right\rangle = \left\langle T^*x, \underbrace{\left(\begin{array}{c} S \\ S^{**} \end{array} \right)}_y \right\rangle = \langle S^*T^*x, y \rangle$$

3. Pour tous $x \in H_1$ et $y \in H_2$, on a :

$$\begin{aligned} \langle x, (T + S)^*y \rangle &= \langle (T + S)x, y \rangle = \langle Tx + Sx, y \rangle = \langle Tx, y \rangle + \langle Sx, y \rangle \\ &= \langle x, T^*y \rangle + \langle x, S^*y \rangle = \langle x, T^*y + S^*y \rangle \\ &= \langle x, (T^* + S^*)y \rangle \end{aligned}$$

D'où la relation $(T + S)^* = T^* + S^*$.

4. Pour tous $x \in H_1$, $y \in H_2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :

$$\langle x, (\lambda T)^*y \rangle = \langle (\lambda T)x, y \rangle = \lambda \langle Tx, y \rangle = \lambda \langle x, T^*y \rangle = \langle x, \bar{\lambda} T^*y \rangle$$

D'où $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$.

5. On a :

$$\begin{aligned} y \in \text{Ker } T^* &\Leftrightarrow T^*y = 0 \Leftrightarrow \forall x \in H_1, \langle T^*y, x \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in H_1, \langle y, Tx \rangle = 0 \Leftrightarrow y \perp \text{Im } T \\ &\Leftrightarrow y \in (\text{Im } T)^\perp \end{aligned}$$

6. D'après la propriété précédente, on a :

$$(\text{Im } T)^\perp = \text{Ker } T^* \Rightarrow \left((\text{Im } T)^\perp \right)^\perp = (\text{Ker } T^*)^\perp \Rightarrow \overline{\text{Im } T} = (\text{Ker } T^*)^\perp$$

7. D'abord, on montre que $\text{Ker } T \subset (\text{Im } T^*)^\perp$. Soit $x \in \text{Ker } T$ et soit $z \in \text{Im } T^*$. Comme $z \in \text{Im } T^*$, il existe $y \in H_2$ telle que $z = T^*(y)$, donc $\langle x, z \rangle = \langle x, T^*y \rangle = \langle Tx, y \rangle$ ainsi $x \in (\text{Im } T^*)^\perp$. Ensuite nous montrons que $(\text{Im } T^*)^\perp \subset \text{Ker } T$. Soit $v \in (\text{Im } T^*)^\perp$. Comme $T^*Tv \in \text{Im } T^*$, on a :

$$\langle Tv, Tv \rangle = \langle v, T^*Tv \rangle = 0$$

Donc $Tv = 0$, d'où $v \in \text{Ker } T$. Par conséquent $\text{Ker } T = (\text{Im } T^*)^\perp$.

8. On a :

$$(T^{-1}T)^* = \text{Id}_{H_1}^* \Rightarrow T^*(T^{-1})^* = \text{Id}_{H_1}$$

et

$$(TT^{-1})^* = \text{Id}_{H_2}^* \Rightarrow (T^{-1})^*T^* = \text{Id}_{H_2}$$

Ce qui montre que T est inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Définition 2.2.4. Un opérateur T est dit auto-adjoint (hermitien) si $T = T^*$, c'est-à-dire si on a :

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \quad \forall x, y \in H$$

Remarque 2.2.5. Il résulte de cette définition que :

$$T = T^* \Leftrightarrow \langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in H$$

Exemple 2.2.6.

1. Soit H un espace de Hilbert et soit Id_H l'opérateur identité sur H . On a :

$$\langle \text{Id}_H x, y \rangle_H = \langle x, y \rangle_H = \langle x, \text{Id}_H y \rangle_H, \quad \forall x, y \in H$$

Par conséquent $\text{Id}_H = \text{Id}_H^*$; d'où Id_H est un opérateur auto-adjoint.

2. Soit H un espace de Hilbert et soit $T \in L_C(H)$. Alors les opérateurs TT^* et T^*T sont auto-adjoints.

On a d'après la proposition précédente :

$(T^*T)^* = T^*T^{**} = T^*T$ et $(TT^*)^* = T^{**}T^* = TT^*$ puisque $T^{**} = T$. D'où TT^* et T^*T sont auto-adjoints.

2.2.2 Quelques classes d'opérateurs

Soit H un espace de Hilbert.

Définition 2.2.7. (Opérateur positif) Un opérateur $T \in L_C(H)$ est dit positif (**notation** : $T \geq 0$) si T est auto-adjoint et pour tout $x \in H$, $\langle Tx, x \rangle \geq 0$.

Exemple 2.2.8.

1. Id_H est un opérateur positif (car $\langle Id_H x, x \rangle = \langle x, x \rangle \geq 0$).
2. Si $T \in L_C(H)$, alors T^*T est un opérateur positif (car $\langle T^*Tx, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle \geq 0$).

Remarque 2.2.9. Pour tout opérateur borné auto-adjoint $T \in L_C(H)$ on a :

$$\|T\|_{op} = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle| \left(= \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle \text{ si } T \text{ est positif} \right)$$

Définition 2.2.10. (Opérateur unitaire) Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T \in L_C(H_1, H_2)$.

On dit que T est unitaire si $T^*T = Id_{H_1}$ et $TT^* = Id_{H_2}$ **ou encore** si T est inversible et $T^* = T^{-1}$.

Définition 2.2.11. (Opérateur isométrique) Un opérateur $T \in L_C(H)$ est dit isométrique s'il vérifie :

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in H$$

ou encore

$$\|Tx\| = \|x\|, \quad \forall x \in H.$$

Définition 2.2.12. (Opérateur normal) Un opérateur $T \in L_C(H)$ est dit normal s'il vérifie :

$$T^*T = TT^*$$

2.2.3 Exemples d'opérateurs linéaires bornés

Dans cette section, on donne quelques exemples d'opérateurs linéaires bornés (continus) d'un espace de Hilbert dans lui-même.

Opérateurs de multiplication et de translation

Exemple 2.2.13. Prenons $H = l^2(\mathbb{N})$, l'espace des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes de carrés sommables i.e. $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty$, et soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres complexes. Pour une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans H , on pose :

$$Tx = (\lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n, \dots) = (\lambda_n x_n)_{n \geq 0}$$

T est appelé **opérateur de multiplication** par la suite $\lambda = (\lambda_n)$.
On vérifie immédiatement que $T \in L_C(H)$ et

$$\|T\|_{op} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n|$$

Exemple 2.2.14. Prenons $H = L^2(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions réelles f de carrés sommables i.e. $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx < +\infty$.

Pour tout réel a , on désigne par T_a l'opérateur qui, à une fonction f de H , associe la fonction $T_a f$ définie par :

$$T_a f(x) = f(x - a)$$

C'est un opérateur linéaire borné (continu) sur H et sa norme est inférieure ou égale à 1 ; il est appelé **opérateur de translation**.

Exemple 2.2.15. Prenons $H = l^2(\mathbb{Z})$ l'espace des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes de carrés sommables.

Pour un entier relatif p , on désigne par T_p l'opérateur qui, à une suite $x = (x_n)$ de H , fait correspondre la suite :

$$T_p x = (x_{n-p})$$

On a là un opérateur linéaire borné (continu) sur H et de norme inférieure ou égale à 1. Il est de même appelé **opérateur de translation ou le shift**.

Opérateur intégral de Fredholm

Exemple 2.2.16. Soit $H = L^2([a, b])$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ et soit k une fonction continue sur $[a, b] \times [a, b]$ à valeurs dans \mathbb{C} .

A toute fonction f de H , on associe la fonction Tf définie sur $[a, b]$ par :

$$Tf(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy$$

C'est un opérateur linéaire borné (continu) sur H . De plus on a :

$$\|T\|_{op} \leq (b - a) \sup_{x, y \in [a, b]} |k(x, y)|$$

T est appelé opérateur **intégral de Fredholm** et la fonction k est appelée le noyau de l'opérateur T .

Opérateur intégral de Volterra

Exemple 2.2.17. *Sous les mêmes hypothèses de l'exemple 2.2.16, on pose :*

$$Tf(x) = \int_a^x k(x, y) f(y) dy$$

On définit ainsi un opérateur linéaire borné (continu) de H dans lui-même et on vérifie que :

$$\|T\|_{op} \leq \frac{(b-a)}{\sqrt{2}} \sup_{x, y \in [a, b]} |k(x, y)|$$

*Cet opérateur, appelé opérateur **intégral de Volterra**, diffère de l'opérateur intégral de Fredholm.*

Chapitre 3

Sujets d'examens

3.1 Examens 2015-2016

3.1.1 Examen Final 2015-2016

Exercice 3.1.1.

I) Questions issues du cours.

- 1) *Enoncer le Théorème de la projection sur un convexe fermé (dans un espace de Hilbert).*
- 2) *Soient H un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un système orthonormé de H .
Montrer que si $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H , alors $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite totale de H .*
- 3) *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T \in L_C(H_1, H_2)$.
Donner la définition de l'adjoint de T .*

II) Soit H un espace de Hilbert et soit F un sous-espace vectoriel fermé de H .

- 1) *Montrer que $\langle P_F x, y \rangle = \langle x, P_F y \rangle$ pour tout $x, y \in H$;*
- 2) *Montrer que $\text{Ker } P_F = F^\perp$ et $\text{Im } P_F = F$.*

III) Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soient F et G deux sous-espaces de E . Montrer que :

- 1) *$F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$;*
- 2) *$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.*

IV) Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T \in L_C(H_1, H_2)$. Montrer que :

- 1) *$\text{Ker } T = (\text{Im } T^*)^\perp$;*
- 2) *$(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Exercice 3.1.2. Dans cet exercice l^2 désigne l'espace de Hilbert des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes vérifiant $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty$. On considère sur l^2 le produit scalaire défini par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \bar{y}_n, \quad x, y \in l^2$$

Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres complexes.

1) Montrer que si $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in l^2$, alors :

$$y = (0, \alpha_0 x_0, \alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n, \dots) \in l^2$$

2) On pose pour tout $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in l^2$,

$$T x = (0, \alpha_0 x_0, \alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n, \dots)$$

a) Montrer que T est un opérateur linéaire borné (continu) de l^2 dans l^2 ;

b) En déduire que $\|T\|_{op} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|$;

c) Déterminer l'adjoint T^* .

3.1.2 Examen de Rattrapage 2015-2016

Exercice 3.1.3.

I) Soit H un espace de Hilbert et soit F un sous-espace vectoriel fermé de H avec $F \neq \{0\}$. On note P le projecteur orthogonal de H sur F . Montrer que :

1) $P \in L_C(H)$ et $\|P\|_{op} = 1$;

2) $\langle P(x) - P(y), x - y \rangle \geq 0, \forall x, y \in H$;

3) P est un opérateur auto-adjoint et positif.

II) Soit E un espace pré-hilbertien avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soient F et G deux sous-espaces de E . Montrer que :

1) $F \subset (F^\perp)^\perp$;

2) $F \cap (F^\perp)^\perp = \{0\}$;

3) $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$;

4) $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.

III) Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T \in L_C(H_1, H_2)$.

1) Montrer que $\text{Ker } T^* = (\text{Im } T)^\perp$;

2) En déduire que $(\text{Im } T)^\perp \subset (\text{Ker } T^*)^\perp$ (**Indication** : utiliser la propriété **II.1**) ;

3) Montrer que $T^{**} = T$.

Exercice 3.1.4. Dans cet exercice l^2 désigne l'espace de Hilbert des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes vérifiant $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty$.

- 1) Montrer que la relation $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \bar{y}_n$, $x, y \in l^2$ définit un produit scalaire sur l^2 .
- 2) On pose pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$,

$$y = Tx = \left(x_0, \frac{x_1}{2}, \dots, \frac{x_n}{n+1}, \dots \right) = \left(\frac{x_n}{n+1} \right)_{n \geq 0}.$$

- a) Montrer que si $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$, alors la suite $y = \left(\frac{x_n}{n+1} \right)_{n \geq 0} \in l^2$;
- b) Montrer que T est un opérateur linéaire borné (continu) de l^2 dans l^2 ;
- c) En déduire que $\|T\|_{op} \leq 1$;
- d) Déterminer l'adjoint T ;
- e) En déduire que T est auto-adjoint.

3.2 Examens 2016-2017

3.2.1 Examen Final 2016-2017

Exercice 3.2.1.

I) Questions de cours.

- 1) Rappeler les formules suivantes : l'identité de **polarisation**, l'identité du **parallélogramme** et l'inégalité de **Bessel**.
- 2) Rappeler la définition d'un espace de Hilbert.
- 3) Rappeler la définition d'un opérateur inversible.

II) Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T, S \in L_C(H_1, H_2)$. Montrer que :

$$(\lambda T + S)^* = \bar{\lambda} T^* + S^*$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

III) Soit H un espace de Hilbert, F un sous-espace vectoriel fermé de H et soit $T \in L_C(H)$.

- 1) Montrer que :
 - a) $T(F) \subset F \Rightarrow T^*(F^\perp) \subset F^\perp$;

- b) T est auto-adjoint $\Rightarrow \langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}, \forall x \in H$.
- 2) On suppose que F est fermé. Montrer que $P_F = P_F^*$.
- 3) On suppose que $TT^* = T^*T$ i.e. T est normal.
- a) Montrer que :

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle T^*x, T^*y \rangle, \forall x, y \in H$$

- b) En déduire que :
- $\|Tx\| = \|T^*x\|, \forall x \in H$;
 - $\text{Ker } T = \text{Ker } T^*$.
- 4) Soit $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H .
- a) Montrer que :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, y \rangle, \forall x, y \in H$$

- b) En déduire que :

$$\|x\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle x, e_k \rangle|^2, \forall x \in H$$

Exercice 3.2.2. Dans cet exercice $L^2([-\pi, \pi])$ désigne l'espace de Hilbert des fonctions réelles f vérifiant $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx < +\infty$. On considère sur $L^2([-\pi, \pi])$ le produit scalaire défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx, \quad f, g \in L^2([-\pi, \pi])$$

- I)** Soit $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ une base hilbertienne de $L^2([-\pi, \pi])$. Soit $h(x) = x$ avec $x \in [-\pi, \pi]$.

- a) Montrer que les coefficients (de Fourier) de la fonction h sur la base hilbertienne B sont donnés par :

$$\left\langle h, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = 0, \quad \left\langle h, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = (-1)^{n+1} \frac{2\sqrt{\pi}}{n}, \quad \left\langle h, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = 0$$

- b) Calculer $\|h\|^2$, puis utiliser la question **1)** et l'identité de Parseval pour montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

II) On définit l'opérateur linéaire $T : L^2([-π, π]) \rightarrow L^2([-π, π])$ par :

$$(Tf)(x) = g(x) f(x), \quad x \in [-π, π]$$

avec $f \in L^2([-π, π])$ et g une fonction continue sur $[-π, π]$.

- a) Montrer que T est un opérateur borné (continu);
- b) En déduire que $\|T\|_{op} \leq \sup_{x \in [-π, π]} |g(x)|$;
- c) Montrer que T est auto-adjoint.

3.2.2 Examen de Rattrapage 2016-2017

Exercice 3.2.3. Soient H un espace de Hilbert, F et G deux sous-espaces de H et soit $T \in L_C(H)$.

- 1)
 - a) Montrer que : $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$;
 - b) En déduire que : $(F \cup G)^\perp \subset F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
- 2) On suppose que F est un sous-espace vectoriel fermé de H . Montrer que :
 - a) $\langle P_F x, y \rangle = \langle x, P_F y \rangle$ pour tous x, y de H ;
 - b) $\text{Ker } P_F = F^\perp$.
- 3) Montrer que :
 - a) T est auto-adjoint $\Rightarrow T^2$ est auto-adjoint positif;
 - b) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exercice 3.2.4. Dans cet exercice $L^2([-π, π])$ désigne l'espace des fonctions $f : [-π, π] \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $\int_{-π}^{\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty$.

- 1) Montrer que la relation :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-π}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L^2([-π, π])$$

définit un produit scalaire sur $L^2([-π, π])$.

- 2) Montrer que la famille $(e_n(x))_{n \in \mathbb{Z}} = (e^{i n x})_{n \in \mathbb{Z}}$, $x \in [-π, π]$ est un système orthonormé de $L^2([-π, π])$.

Exercice 3.2.5. Dans cet exercice l^2 désigne l'espace de Hilbert des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes vérifiant $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty$. On considère sur l^2 le produit scalaire défini par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \bar{y}_n, \quad x, y \in l^2$$

On pose pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$, $Tx = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

- 1) Montrer que T est un opérateur linéaire borné (continu) de l^2 dans l^2 ;
- 2) En déduire que $\|T\|_{op} \leq 1$;
- 2) Déterminer l'adjoint T^* .

3.3 Examens 2017-2018

3.3.1 Examen Final 2017-2018

Exercice 3.3.1. Soient H un espace de Hilbert, F et G deux sous-espaces de H et soit $T \in L_C(H)$.

- 1) Montrer que :
 - a) $F \subset (F^\perp)^\perp$
 - b) $T(F) \subset F \Rightarrow T^*(F^\perp) \subset F^\perp$
 - c) $\text{Im}(\lambda I - T)^\perp = \text{Ker}(\bar{\lambda}I - T^*)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ (I est l'opérateur identité sur H).
- 2) On suppose que F est fermé. Montrer que :
 - a) F est complet ;
 - b) $\langle P_F(x), y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in H, \forall y \in F$
 - c) $\|x - P_F(x)\| \leq \|x - y\| \quad \forall x \in H, \forall y \in F$

Exercice 3.3.2. Dans cet exercice $L^2([-\pi, \pi])$ désigne l'espace des fonctions $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty$. On considère sur $L^2([-\pi, \pi])$ le produit scalaire usuel défini par :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L^2([-\pi, \pi])$$

- 1) Montrer que la famille $(e_n(x))_{n \in \mathbb{Z}} = (e^{i n x})_{n \in \mathbb{Z}}$, $x \in [-\pi, \pi]$ est un système orthonormé de $L^2([-\pi, \pi])$.
- 2) On admet que la famille $(e_n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2([-\pi, \pi])$. Soit $f(x) = e^{i a x}$ avec $x \in]-\pi, \pi[$ et $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
 - a) Montrer que les coefficients (de Fourier) de la fonction f sur la base hilbertienne $(e_n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$ sont donnés par :

$$\langle f, e_n \rangle = \frac{(-1)^n \sin(a\pi)}{\pi(a-n)}$$

- b) Calculer $\|f\|^2$, puis utiliser la question 2.a) et l'identité de Parseval pour montrer que :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(a\pi)}$$

Exercice 3.3.3. Dans cet exercice l^2 désigne l'espace de Hilbert des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes vérifiant $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty$. On considère sur l^2 le produit scalaire défini par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \bar{y}_n, \quad x, y \in l^2$$

On pose pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$, $y = Tx = (ix_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

- Montrer que T est bien défini.
- Montrer que T est un opérateur linéaire borné de l^2 dans l^2 .
- En déduire que $\|T\|_{op} \leq 1$.
- Déterminer l'adjoint T^* .
- L'opérateur T est-il auto-adjoint ?

3.3.2 Examen de Rattrapage 2017-2018

Exercice 3.3.4.

- I) A deux polynômes $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ et $Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on associe :

$$\langle P, Q \rangle = (a_0 + a_1) b_0 + (a_0 + 3a_1) b_1 + 3a_2 b_2$$

Montrer que cette application est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

- II) Soient H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de H .

- Montrer que :
 - \bar{F} est complet,
 - F^\perp est fermé de H ,
 - $\bar{F} \subset (F^\perp)^\perp$.
- On suppose que F est fermé. Montrer que :
 - $P \in L_C(H)$,
 - $\|P_F\|_{op} = 1$,
 - $\text{Ker } P_F = F^\perp$,
 - P_F est auto-adjoint et positif.

III) Soit $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ une base hilbertienne d'un espace de Hilbert H .

a) Montrer que : $\langle x, y \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, y \rangle$, $\forall x, y \in H$,

b) En déduire que : $\|x\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle x, e_k \rangle|^2$, $\forall x \in H$.

Exercice 3.3.5. Dans cet exercice l^2 désigne l'espace de Hilbert des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres complexes vérifiant $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty$. On considère sur l^2 le produit scalaire défini par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \bar{y}_n, \quad x, y \in l^2$$

On pose pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l^2$,

$$T x = (x_{n+2})_{n \in \mathbb{N}^*} = (x_3, x_4, \dots, x_{n+2}, \dots)$$

- 1) Montrer que T est bien défini ;
- 2) Montrer que T est un opérateur linéaire borné de l^2 dans l^2 ;
- 3) En déduire que $\|T\|_{op} \leq 1$;
- 4) Déterminer l'adjoint T^* .
- 5) L'opérateur T est-il auto-adjoint ?

Chapitre 4

Corrigés des examens

4.1 Corrigés des examens 2015-2016

4.1.1 Examen Final 2015-2016

Corrigé de l'exercice 3.1.1 :

- I) 1) **Théorème de la projection** : Soit C une partie non vide, convexe et fermée de H . Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y_0 \in C$ tel que :

$$\|x - y_0\| = \text{Min} \{ \|x - y\| , y \in C \}$$

On appelle alors y_0 la projection de x noté $P_C(x)$ sur le convexe C .

- 2) Voir la démonstration du théorème 1.3.36, l'implication 1) \Rightarrow 2).
3) L'adjoint de T est l'opérateur $T^* \in L_C(H_2, H_1)$ défini par la relation :

$$\langle T x, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^* y \rangle_{H_1}$$

pour tout $x \in H_1$ et tout $y \in H_2$.

- II) 1) En effet, pour tous $x_1, x_2 \in F$ et $y_1, y_2 \in F^\perp$, on a :

$$\left\langle P_F \left(\underbrace{x_1 + y_1}_x \right), \underbrace{x_2 + y_2}_y \right\rangle = \langle x_1, x_2 \rangle = \left\langle \underbrace{x_1 + y_1}_x, P_F \left(\underbrace{x_2 + y_2}_y \right) \right\rangle$$

puisque $P_F \left(\underbrace{y_1}_{\in F^\perp} \right) = 0$.

- 2) • $\text{Ker } P_F = F^\perp$?
Soit $x \in F^\perp$, comme $x - P_F(x) \in F^\perp$, alors $P_F(x) \in F^\perp$, donc $P_F(x) \in F \cap F^\perp = \{0\}$, d'où $P_F(x) = 0$. Réciproquement, si $x \in \text{Ker } P_F$, alors $x - 0 \in F^\perp$, d'où $x \in F^\perp$.

- $Im P_F = F$?

On a :

$$x \in F \Leftrightarrow P_F(x) = x \Leftrightarrow x \in Im P_F$$

- III) 1) Si F est inclus dans G , et si x dans G^\perp , alors $\langle xy \rangle = 0$ pour tout y de G , donc $\langle xy \rangle = 0$ pour tout y de F , et donc y est dans F^\perp , d'où $G^\perp \subset F^\perp$.
- 2) Comme $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$, on a déjà, d'après 1, $(F + G)^\perp \subset F^\perp$ et $(F + G)^\perp \subset G^\perp$, d'où $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$. Réciproquement, soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$ i.e. $x \in F^\perp$ et $x \in G^\perp$, donc

$$\left\langle x, \underbrace{y+z}_{\in F+G} \right\rangle = \underbrace{\langle x, y \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle x, z \rangle}_{=0} = 0 \quad , \quad \forall y \in F, \forall z \in G$$

et donc x est dans $(F + G)^\perp$, d'où $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$.

- IV) 1) $Ker T = (Im T^*)^\perp$?

On a :

$$x \in Ker T \Leftrightarrow Tx = 0_{H_2} \Leftrightarrow \langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^*y \rangle_{H_1} = 0, \forall y \in H_2 \Leftrightarrow x \in (Im T^*)^\perp$$

- 2) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$

Pour tous $x \in H_1, y \in H_2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\langle x, (\lambda T)^* y \rangle = \langle (\lambda T) x, y \rangle = \lambda \langle Tx, y \rangle = \lambda \langle x, T^* y \rangle = \langle x, \bar{\lambda} T^* y \rangle$$

d'où la relation désirée.

Corrigé de l'exercice 3.1.2 :

- 1) Montrons que si $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in l^2$, alors :

$$y = (0, \alpha_0 x_0, \alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n, \dots) \in l^2$$

Nous avons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n x_n|^2 \leq \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n| \right)^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2}_{=\|x\|^2} < +\infty \Rightarrow y \in l^2$$

- 2) a) Il est clair que T est un opérateur linéaire.

Montrons que T est borné i.e. il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\|T(x)\|_{l^2} \leq C \|x\|_{l^2}, \forall x \in l^2$$

Nous pouvons écrire :

$$\|y\|_{l^2} = \|T(x)\|_{l^2} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n| \|x\|_{l^2}$$

Il suffit donc de prendre $C = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|$. Ce qui montre que T est borné.

b) En déduire que $\|T\|_{op} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|$.

D'après la question **2.a**, on a :

$$\|T(x)\|_{l^2} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n| \|x\|_{l^2}, \quad \forall x \in l^2$$

Donc :

$$\frac{\|T(x)\|_{l^2}}{\|x\|_{l^2}} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|, \quad \forall x \in l^2 - \{0\}$$

Passant au sup, on obtient :

$$\|T\|_{op} = \sup_{x \in l^2 - \{0\}} \frac{\|T(x)\|_{l^2}}{\|x\|_{l^2}} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|$$

c) Déterminons l'adjoint T^* .

l^2 est de Hilbert, T est borné donc T^* existe par définition. Pour le calcul de l'adjoint on écrit, pour y fixé :

$$\forall x \in l^2, \quad \langle T x, y \rangle = 0 \times \bar{y}_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x_n \bar{y}_{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x_n \bar{y}_{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \overline{\alpha_n y_{n+1}} = \langle x, z \rangle$$

avec $z = (\overline{\alpha_0} y_1, \overline{\alpha_1} y_2, \dots, \overline{\alpha_n} y_{n+1}, \dots)$.

Donc, si $y = (y_0, y_1, \dots, y_n, \dots) \in l^2$ on a :

$$T^* y = (\overline{\alpha_0} y_1, \overline{\alpha_1} y_2, \dots, \overline{\alpha_n} y_{n+1}, \dots)$$

4.1.2 Examen de Rattrapage 2015-2016

Corrigé de l'exercice **3.1.3** :

I) 1) Montrons que $P \in L_C(H)$ et $\|P\|_{op} = 1$.

- $P \in L_C(H)$?

- ▶ P est linéaire puisque $P(x + \lambda y) = P(x) + \lambda P(y), \forall x, y \in H$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$;

- ▶ $P : H \rightarrow F$ est borné (continu) puisque :

$$\begin{aligned} \forall x \in H, \quad x &= P(x) + x - P(x) \Rightarrow \|x\|^2 = \|P(x) + x - P(x)\|^2 \\ & \text{(théorème de Pythagore)} \Rightarrow \|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|x - P(x)\|^2 \\ & \Rightarrow \|P(x)\| \leq \|x\| \end{aligned}$$

- $\|P\|_{op} = 1$ puisque $\forall x \in F, P(x) = x$ i.e. $\|P(x)\| = \|x\|$.

2) En effet, pour tous $x_1, x_2 \in F$ et $y_1, y_2 \in F^\perp$, on a :

$$\begin{aligned} \langle P(x) - P(y), x - y \rangle &= \left\langle P \left(\underbrace{x_1 + y_1}_x \right) - P \left(\underbrace{x_2 + y_2}_y \right), x_1 + y_1 - x_2 - y_2 \right\rangle \\ &= \|x_1\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x_1, x_2 \rangle + \|x_2\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

puisque P est linéaire, $P \left(\underbrace{x_1}_{\in F} \right) = x_1$, $P \left(\underbrace{x_2}_{\in F} \right) = x_2$ et $P \left(\underbrace{y_1}_{\in F^\perp} \right) =$

$$P \left(\underbrace{y_2}_{\in F^\perp} \right) = 0.$$

3) P est un opérateur auto-adjoint et positif.

En effet, pour tous $x_1, x_2 \in F$ et $y_1, y_2 \in F^\perp$, on a :

$$\langle P(x), y \rangle = \langle P(x_1 + y_1), x_2 + y_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_1 + y_1, P(x_2 + y_2) \rangle = \langle x, P(y) \rangle$$

et

$$\langle P(x), x \rangle = \langle P(x_1 + y_1), x_1 + y_1 \rangle = \langle x_1, x_1 \rangle = \|x_1\|^2 \geq 0$$

puisque P est linéaire, $P \left(\underbrace{x_1}_{\in F} \right) = x_1$, $P \left(\underbrace{x_2}_{\in F} \right) = x_2$ et $P \left(\underbrace{y_1}_{\in F^\perp} \right) =$

$$P \left(\underbrace{y_2}_{\in F^\perp} \right) = 0.$$

II) 1) $F \subset (F^\perp)^\perp$?

Soit $x \in F$. Pour tout y de F^\perp on a donc

$$\langle y, x \rangle = 0$$

ce qui signifie que $x \in (F^\perp)^\perp$.

2) $F \cap (F^\perp)^\perp = \{0\}$?

On montre la double inclusion.

\supset : C'est immédiat car $0 \in F$ et $0 \in F^\perp$.

\subset : Si x appartient à $F \cap (F^\perp)^\perp$, on a en particulier

$$\langle x, x \rangle = 0$$

ce qui montre que x est nul.

3) $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$?

Comme $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$, on a :

$$(F + G)^\perp \subset F^\perp$$

et

$$(F + G)^\perp \subset G^\perp$$

Ce qui conduit à $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.

4) $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$?

Soit $x + y \in F^\perp + G^\perp$ et $z \in F \cap G$. On a :

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = 0$$

Donc $x + y \in (F \cap G)^\perp$, d'où le résultat désiré.

III) 1) On a :

$$\begin{aligned} y \in \text{Ker } T^* &\Leftrightarrow T^*y = 0 \Leftrightarrow \forall x \in H_1, \langle T^*y, x \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in H_1, \langle y, Tx \rangle = 0 \Leftrightarrow y \perp \text{Im } T \\ &\Leftrightarrow y \in (\text{Im } T)^\perp \end{aligned}$$

2) D'après 1), on en déduit que :

$$(\text{Ker } T^*)^\perp = \left((\text{Im } T)^\perp \right)^\perp$$

Et comme $\text{Im } T \subset \left((\text{Im } T)^\perp \right)^\perp$ d'après **II.1**), alors : $\text{Im } T \subset (\text{Ker } T^*)^\perp$.

3) Montrons que $T^{**} = T$.

Pour cela on montre que pour tous $x \in H_1$ et $y \in H_2$, on a :

$$\langle Tx, y \rangle = \langle T^{**}x, y \rangle$$

On a :

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = \overline{\langle T^*y, x \rangle} = \overline{\langle y, (T^*)^*x \rangle} = \langle T^{**}x, y \rangle$$

Corrigé de l'exercice 3.1.4 :

1) Il suffit d'utiliser les propriétés des séries à termes complexes.

2) a) On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{x_n}{n+1} \right|^2 \leq \left(\underbrace{\text{Sup}_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{n+1} \right|}_{=1} \right)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2}_{=\|x\|^2} < +\infty$$

ce qui implique que $y \in l^2$.

- b) Il est clair, d'après les propriétés des séries, que T est un opérateur linéaire. Il reste à montrer que cet opérateur est borné i.e. il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\|T(x)\|_{l^2} \leq C \|x\|_{l^2}, \quad \forall x \in l^2$$

On a :

$$\|y\|_{l^2} = \|T(x)\|_{l^2} \leq \underbrace{\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{n+1} \right|}_{=1} \|x\|_{l^2}$$

Il suffit donc de prendre $C = 1$.

- c) D'après la question **2.b**, on a :

$$\|T(x)\|_{l^2} \leq \|x\|_{l^2}, \quad \forall x \in l^2$$

Donc :

$$\frac{\|T(x)\|_{l^2}}{\|x\|_{l^2}} \leq 1, \quad \forall x \in l^2 - \{0\}$$

Passant au sup, on obtient :

$$\|T\|_{op} = \sup_{x \in l^2 - \{0\}} \frac{\|T(x)\|_{l^2}}{\|x\|_{l^2}} \leq 1$$

- d) Il est clair que T^* existe puisque T est borné sur l'espace de Hilbert l^2 . Pour le calcul de l'adjoint on écrit, pour y fixé de l^2 :

$$\forall x \in l^2, \quad \langle T x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{n+1} \bar{y}_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x_n \bar{y}_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \overline{\frac{1}{n+1} y_n} = \langle x, z \rangle$$

avec $z = (y_0, \frac{y_1}{2}, \dots, \frac{y_n}{n+1}, \dots)$.

Donc, si $y = (y_0, y_1, \dots, y_n, \dots) \in l^2$ on a :

$$T^* y = \left(y_0, \frac{y_1}{2}, \dots, \frac{y_n}{n+1}, \dots \right)$$

- e) D'après **d**) on en déduit que :

$$\langle T x, y \rangle = \langle x, T y \rangle, \quad \forall x, y \in l^2$$

Par conséquent $T = T^*$; d'où T est un opérateur auto-adjoint.

4.2 Corrigés des examens 2016-2017

4.2.1 Examen Final 2016-2017

Corrigé de l'exercice 3.2.1 :

I) 1) • L'identité de polarisation :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \quad \forall x, y \in E$$

• L'identité du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 (\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in E$$

• L'inégalité de Bessel :

$$\sum_{n \geq 0} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2, \quad \forall x \in E$$

2) Un espace de Hilbert est un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle x, y \rangle$ et qui est complet pour la norme $\sqrt{\langle x, x \rangle}$.

3) Un opérateur $T \in L_C(E, F)$ est dit inversible s'il existe un opérateur $S \in L_C(F, E)$ vérifiant $ST = I_E$ et $TS = I_F$, et que S est alors unique est noté S^{-1} .

II) Pour tous $x \in H_1, y \in H_2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle x, (\lambda T + S)^* y \rangle &= \langle (\lambda T + S) x, y \rangle = \langle (\lambda T) x + S x, y \rangle = \lambda \langle T x, y \rangle + \langle S x, y \rangle \\ &= \lambda \langle x, T^* y \rangle + \langle x, S^* y \rangle = \langle x, \overline{\lambda} T^* y \rangle + \langle x, S^* y \rangle \\ &= \langle x, \overline{\lambda} T^* y + S^* y \rangle = \langle x, (\overline{\lambda} T^* + S^*) y \rangle \end{aligned}$$

D'où la relation :

$$(\lambda T + S)^* = \overline{\lambda} T^* + S^*$$

III) 1) a) Supposons d'abord que $T(F) \subset F$ et montrons que $T^*(F^\perp) \subset F^\perp$.
Soit $x \in F$ et $y \in F^\perp$.

Alors $\langle T x, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle = 0$ car $T(x) \in F$. Ainsi $T^* y \perp x$, pour tout $x \in F$, ce qui montre que $T^* y \in F^\perp$.

b) On a :

$$\langle T x, x \rangle_H = \langle x, T^* x \rangle_H = \langle x, T x \rangle_H = \overline{\langle T x, x \rangle_H}$$

Donc $\langle T x, x \rangle \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in H$.

2) Voir corrigé de l'exercice 3.1.3.

3) a) Soient $x, y \in H$. On a :

$$\langle T x, T y \rangle = \langle x, T^* T y \rangle = \langle x, T T^* y \rangle = \langle T^* x, T^* y \rangle$$

b) On a :

•

$$\|T x\| = \sqrt{\langle T x, T x \rangle_H} = \sqrt{\langle T^* x, T^* x \rangle_H} = \|T^* x\|$$

•

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } T &\Leftrightarrow T x = 0_H \Leftrightarrow 0_{\mathbb{R}} = \|T x\| = \|T^* x\| \\ &\Leftrightarrow \|T^* x\| = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow T^* x = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x \in \text{Ker } T^* \end{aligned}$$

4) a) Si $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de H , alors $\forall x, y \in H$ on a :

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x, e_k \rangle e_k \text{ et } y = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle y, e_k \rangle e_k$$

Donc :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle y, e_k \rangle e_k \right\rangle \\ &= \langle \dots + \langle x, e_{-1} \rangle e_{-1} + \langle x, e_0 \rangle e_0 + \langle x, e_1 \rangle e_1 + \dots, \dots + \langle y, e_{-1} \rangle e_{-1} + \dots \rangle \\ &= \dots + \langle x, e_{-1} \rangle \overline{\langle y, e_{-1} \rangle} + \langle x, e_0 \rangle \overline{\langle y, e_0 \rangle} + \langle x, e_1 \rangle \overline{\langle y, e_1 \rangle} + \dots \\ &= \dots + \langle x, e_{-1} \rangle \langle e_{-1}, y \rangle + \langle x, e_0 \rangle \langle e_0, y \rangle + \langle x, e_1 \rangle \langle e_1, y \rangle + \dots \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, y \rangle \end{aligned}$$

$$\text{car } \langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & , \quad n = m \\ 0 & , \quad n \neq m \end{cases} .$$

b) Soit $x \in H$. On a :

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle \stackrel{\text{d'après a)}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, x \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

Corrigé de l'exercice 3.2.2 :

I) a) On a :

$$\begin{aligned} \left\langle h, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} dx = 0, \\ \left\langle h, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx \stackrel{I.P.P}{=} (-1)^{n+1} \frac{2\sqrt{\pi}}{n}, \\ \left\langle h, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx \stackrel{I.P.P}{=} 0. \end{aligned}$$

b) On a :

$$\|h\|^2 = \langle h, h \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^3}{3}$$

D'autre part, d'après l'identité de **Parseval** on a :

$$\|h\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left| \left\langle x, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \right|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left| (-1)^{n+1} \frac{2\sqrt{\pi}}{n} \right|^2 = 4\pi \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$$

(puisque la fonction h s'écrit dans la base hilbertienne B , $h(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, \phi_n \rangle \phi_n$

avec $\phi_n \in B$ et tous les $\langle x, \phi_n \rangle$ sont nuls sauf ceux en \sin d'après **1**).

On a donc :

$$\frac{2\pi^3}{3} = 4\pi \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$$

Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

II) a) Pour tout $f \in L^2([-\pi, \pi])$, on a :

$$\begin{aligned} \|T(f)\|^2 &= \langle T(f), T(f) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (Tf)(x) (Tf)(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) f(x) g(x) f(x) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} g^2(x) f^2(x) dx \leq \left(\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |g(x)| \right)^2 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx}_{\|f\|^2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \|T(f)\| \leq \underbrace{\left(\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |g(x)| \right)}_{=C \in \mathbb{R}_+^*} \|f\|.$$

b) d'après la question précédente, on a :

$$\frac{\|T(f)\|}{\|f\|} \leq \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |g(x)|, \quad \forall f \in L^2([-\pi, \pi])$$

Donc :

$$\frac{\|T(f)\|}{\|f\|} \leq \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |g(x)|, \quad \forall f \in L^2([-\pi, \pi]) - \{0\}$$

Passant au sup, on obtient :

$$\|T\|_{op} = \sup_{xf \in L^2 - \{0\}} \frac{\|T(f)\|}{\|f\|} \leq \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |g(x)|$$

c) Pour tout $f, h \in L^2([-\pi, \pi])$, on a :

$$\begin{aligned} \langle T f, h \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} (T f)(x) h(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) f(x) h(x) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) h(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (T h)(x) dx \\ &= \langle f, T h \rangle \end{aligned}$$

Ce qui prouve que T est auto-adjoint.

4.2.2 Examen de Rattrapage 2016-2017

Corrigé de l'exercice 3.2.3 :

1) a) Voir corrigé de l'exercice 3.1.1(III.1).

b) On a :

$$\left. \begin{array}{l} F \subset F \cup G \Rightarrow (F \cup G)^\perp \subset F^\perp \\ F \cap G \subset F \Rightarrow F^\perp \subset (F \cap G)^\perp \end{array} \right\} \Rightarrow (F \cup G)^\perp \subset F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$$

2) Voir corrigé de l'exercice 3.1.1(III.1,2).

3) a) On a :

$$\langle T^2 x, y \rangle = \langle T x, T y \rangle = \langle x, T^2 y \rangle$$

b) Même idée que l'exercice 3.2.1(II).

Corrigé de l'exercice 3.2.4 :

1) Clair d'après la définition d'un produit scalaire.

2) On a, pour $k, n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \langle e_k, e_n \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_k(x) \overline{e_n(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i k x} e^{-i n x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x} dx \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx, & k = n \\ \frac{1}{2\pi i(k-n)} \left[e^{i(k-n)x} \right]_{-\pi}^{\pi}, & k \neq n \end{cases} = \begin{cases} 1, & k = n \\ \frac{1}{2\pi i(k-n)} \underbrace{\left[(-1)^{k-n} - (-1)^{k-n} \right]}_{=0}, & k \neq n \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3.2.5 :

1) Il est clair que T est un opérateur linéaire.

Montrons que T est borné i.e. il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\|T(x)\|_{l^2} \leq C \|x\|_{l^2}$$

On a :

$$\|T(x)\|_{l^2}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_{n+1}|^2 \leq \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2}_{=\|x\|_{l^2}^2}$$

Il suffit de prendre $C = 1$.

2) Même idée que l'exercice **3.1.4(2.c)**.

3) Pour y fixé de l^2 , on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in l^2, \quad \langle T x, y \rangle &= \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n+1} \bar{y}_n = x_1 \bar{y}_0 + x_2 \bar{y}_1 + \dots + x_{n+1} \bar{y}_n + \dots \\ &= x_0 \times \bar{0} + x_1 \bar{y}_0 + x_2 \bar{y}_1 + \dots + x_{n+1} \bar{y}_n + \dots \\ &= \langle x, z \rangle \end{aligned}$$

avec $z = (0, y_0, y_1, \dots, y_n, \dots)$. Donc si $y = (y_0, y_1, \dots, y_n, \dots) \in l^2$, alors :

$$T^* y = (0, y_0, y_1, \dots, y_n, \dots)$$

4.3 Corrigés des examens 2017-2018

4.3.1 Examen Final 2017-2018

Corrigé de l'exercice **3.3.1** :

1) a) $F \stackrel{?}{\subset} (F^\perp)^\perp$.

Soit $x \in F$. Pour tout y de F^\perp on a donc $\langle y, x \rangle = 0$, ce qui signifie que $x \in (F^\perp)^\perp$.

b) $T(F) \subset F \stackrel{?}{\Rightarrow} T^*(F^\perp) \subset F^\perp$.

Supposons que $T(F) \subset F$ et montrons que $T^*(F^\perp) \subset F^\perp$. Soit $x \in F$ et $y \in F^\perp$. Alors $\langle T x, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle = 0$ car $T(x) \in F$. Ainsi $T^* y \perp x$, pour tout $x \in F$, ce qui montre que $T^* y \in F^\perp$.

c) $\text{Im}(\lambda I - T)^\perp \stackrel{?}{=} \text{Ker}(\bar{\lambda} I - T^*)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} y \in \text{Im}(\lambda I - T)^\perp &\Leftrightarrow \langle y, z \rangle = 0, \quad \forall z \in \text{Im}(\lambda I - T) \\ &\Leftrightarrow \langle y, (\lambda I - T)x \rangle = 0, \quad \forall x \in H \\ &\Leftrightarrow \langle (\bar{\lambda} I - T^*)y, x \rangle = 0, \quad \forall x \in H \\ &\Leftrightarrow y \in \text{Ker}(\bar{\lambda} I - T^*) \end{aligned}$$

- 2) a) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans F . Montrons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans F , i.e., $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x \in F$.

Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F et $F \subset H$, alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H .

Donc $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x \in H$ (puisque H est complet).

D'où $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x \in F$ (puisque F est fermé).

- b) On sait que :

$$\langle P_F(x), y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in H, \forall y \in F$$

Donc :

$$x - P_F(x) \in F^\perp, \quad \forall x \in H$$

D'où :

$$\langle P_F(x), y \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x \in H, \forall y \in F$$

- c) Soit $x, y \in H$. On a :

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \left\| \underbrace{x - P_F(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{P_F(x) - y}_F \right\|^2 \\ &= \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x) - y\|^2 \quad (\text{Théorème de Pythagore}) \end{aligned}$$

(puisque $x - P_F(x)$ et $P_F(x) - y$ sont orthogonaux).

Ce qui montre que :

$$\|x - y\|^2 \geq \|x - P_F(x)\|^2$$

Donc

$$\|x - P_F(x)\| \leq \|x - y\|$$

Corrigé de l'exercice 3.3.2 :

- 1) Montrons que la famille $(e^{i n x})_{n \in \mathbb{Z}}$ est un système orthonormé de $L^2([-\pi, \pi])$.

On a, pour $k, n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \langle e_k, e_n \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_k(x) \overline{e_n(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i k x} e^{-i n x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x} dx \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx & , \quad k = n \\ \frac{1}{2\pi i(k-n)} \left[e^{i(k-n)x} \right]_{-\pi}^{\pi} & , \quad k \neq n \end{cases} = \begin{cases} 1 & , \quad k = n \\ \frac{1}{2\pi i(k-n)} \underbrace{\left[(-1)^{k-n} - (-1)^{k-n} \right]}_{=0} & , \quad k \neq n \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & , \quad k = n \\ 0 & , \quad k \neq n \end{cases} \end{aligned}$$

2) a) $\langle f, e_n \rangle \stackrel{?}{=} \frac{(-1)^n \sin(a\pi)}{\pi(a-n)}$

On a :

$$\begin{aligned} \langle f, e_n \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{e_n(x)} dx, = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i a x} e^{-i n x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(a-n)x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i(a-n)} [e^{i(a-n)x}]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi i(a-n)} \underbrace{(e^{i(a-n)\pi} - e^{-i(a-n)\pi})}_{2i \operatorname{Im}(e^{i(a-n)\pi})} \\ &= \frac{2i \sin((a-n)\pi)}{2\pi i(a-n)} = \frac{\sin((a-n)\pi)}{\pi(a-n)} = \frac{(-1)^n \sin(a\pi)}{\pi(a-n)} \end{aligned}$$

b) $\|f\|^2 = ?$

On a :

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i a x} e^{-i a x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 1$$

D'autre part, d'après l'identité de **Parseval** on a :

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2$$

(puisque la fonction f s'écrit dans la base hilbertienne $(e_n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$, $f(x) =$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle e_n(x)).$$

On a donc :

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(a\pi)}{\pi^2(a-n)^2}$$

Ainsi :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(a\pi)}$$

Corrigé de l'exercice 3.3.3 :

1) Montrons que T est bien défini, i.e., si $x \in l^2$, alors $(ix_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$. On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |ix_{n+1}|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_{n+1}|^2 \leq \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2}_{=\|x\|^2} < +\infty \Rightarrow (ix_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$$

2) Il est évident que T est un opérateur linéaire.

Montrons que T est borné i.e. il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\|T(x)\|_{l^2} \leq C \|x\|_{l^2}, \forall x \in l^2$$

On a :

$$\|T(x)\|_{l^2}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |ix_{n+1}|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_{n+1}|^2 \leq \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2}_{=\|x\|^2}$$

Il suffit donc de prendre $C = 1$.

- 3) Il suffit d'utiliser la même idée que dans la démonstration de **(2.c)** (voir corrigé l'exercice 3.1.4).
- 4) Comme T est borné sur l'espace de Hilbert l^2 , alors on a l'existence et l'unicité de T^* .

Pour le calcul de T^* on écrit, pour y fixé de l^2 :

$$\begin{aligned} \forall x \in l^2, \quad \langle Tx, y \rangle &= \sum_{n=0}^{+\infty} ix_{n+1} \bar{y}_n = ix_1 \bar{y}_0 + ix_2 \bar{y}_1 + \dots + ix_{n+1} \bar{y}_n + \dots \\ &= x_0 \times \overline{i \cdot 0} + x_1 \overline{i \cdot y_0} + x_2 \overline{i \cdot y_1} + \dots + x_{n+1} \overline{i \cdot y_n} + \dots \\ &= x_0 \times \overline{(-i \times 0)} + x_1 \overline{(-i y_0)} + x_2 \overline{(-i y_1)} + \dots + x_{n+1} \overline{(-i y_n)} + \dots \\ &= \langle x, z \rangle \end{aligned}$$

avec $z = (0, -iy_0, -iy_1, \dots, -iy_n, \dots)$.

Donc, si $y = (y_0, y_1, \dots, y_n, \dots) \in l^2$, on a :

$$T^*y = (0, -iy_0, -iy_1, \dots, -iy_n, \dots)$$

- 5) L'opérateur T n'est auto-adjoint puisque $T \neq T^*$.

4.3.2 Examen de Rattrapage 2017-2018

Corrigé de l'exercice 3.3.4 :

- I) Soient $P, Q, S \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ et $S(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$. L'application :

$$\langle P, Q \rangle = (a_0 + a_1) b_0 + (a_0 + 3a_1) b_1 + 3a_2 b_2$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$. En effet :

-) On a :

$$\begin{aligned} \langle P + Q, S \rangle &= (a_0 + b_0 + a_1 + b_1) c_0 + (a_0 + b_0 + 3(a_1 + b_1)) c_1 + 3(a_2 + b_2) c_2 \\ &= a_0 c_0 + b_0 c_0 + a_1 c_0 + b_1 c_0 + a_0 c_1 + b_0 c_1 + 3a_1 c_1 + 3b_1 c_1 + 3a_2 c_2 \\ &\quad + 3b_2 c_2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle P, S \rangle + \langle Q, S \rangle &= (a_0 + a_1) c_0 + (a_0 + 3a_1) c_1 + 3a_2 c_2 + (b_0 + b_1) c_0 + (b_0 + 3b_1) c_1 \\ &\quad + 3b_2 c_2 \\ &= a_0 c_0 + a_1 c_0 + a_0 c_1 + 3a_1 c_1 + 3a_2 c_2 + b_0 c_0 + b_1 c_0 + b_0 c_1 + 3b_1 c_1 \\ &\quad + 3b_2 c_2 \\ &= a_0 c_0 + b_0 c_0 + a_1 c_0 + b_1 c_0 + a_0 c_1 + b_0 c_1 + 3a_1 c_1 + 3b_1 c_1 + 3a_2 c_2 \\ &\quad + 3b_2 c_2 \end{aligned}$$

ce qui montre que $\langle P + Q, S \rangle = \langle P, S \rangle + \langle Q, S \rangle \quad \forall P, Q, S \in \mathbb{R}_2[X]$.

•) On a :

$$\begin{aligned} \langle \lambda P, Q \rangle &= (\lambda a_0 + \lambda a_1) b_0 + (\lambda a_0 + 3 \lambda a_1) b_1 + 3 \lambda a_2 b_2 \\ &= \lambda [(a_0 + a_1) b_0 + (a_0 + 3 a_1) b_1 + 3 a_2 b_2] = \lambda \langle P, Q \rangle \end{aligned}$$

Donc :

$$\langle \lambda P, Q \rangle = \lambda \langle P, Q \rangle \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X], \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

•) On a :

$$\begin{aligned} \langle P, Q \rangle &= (a_0 + a_1) b_0 + (a_0 + 3 a_1) b_1 + 3 a_2 b_2 \\ &= (b_0 + b_1) a_0 + (b_0 + 3 b_1) a_1 + 3 b_2 a_2 \\ &= \langle Q, P \rangle \end{aligned}$$

et comme $\overline{\langle Q, P \rangle} = \langle Q, P \rangle$ (car $\langle P, Q \rangle \in \mathbb{R}$), alors

$$\langle P, Q \rangle = \overline{\langle Q, P \rangle} \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$$

•) On a :

$$\begin{aligned} \langle P, P \rangle &= (a_0 + a_1) a_0 + (a_0 + 3 a_1) a_1 + 3 a_2 a_2 \\ &= a_0^2 + a_1 a_0 + a_0 a_1 + 3 a_1^2 + 3 a_2^2 \\ &= (a_0 + a_1)^2 + 2 a_1^2 + 3 a_2^2 \geq 0 \end{aligned}$$

•) On a :

$$\begin{aligned} \langle P, P \rangle = 0 &\Leftrightarrow (a_0 + a_1)^2 + 2 a_1^2 + 3 a_2^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow P = 0 \end{aligned}$$

II) 1) a) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans \overline{F} . Montrons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans \overline{F} , i.e., $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in \overline{F}$.

Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\overline{F} \subset H$, alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H .

Donc $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in H$ (puisque H est complet).

D'où $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in \overline{F}$ (puisque \overline{F} est fermé).

b) Soit (x_n) une suite d'éléments de F^\perp et soit x sa limite avec $x \in H$.

Pour tout y dans F , on a :

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \langle x, y \rangle - \underbrace{\langle x_n, y \rangle}_{=0} \right| = |\langle x - x_n, y \rangle| \underset{C.S}{\leq} \|x - x_n\| \|y\|$$

Le membre de droite de cette inégalité tend vers zéro quand n tend vers l'infini et donc $\langle x, y \rangle = 0$. Ceci étant pour tout y dans F , on en déduit que $x \in F^\perp$ et donc F^\perp est un fermé de H .

- c) Soit $x \in \overline{F}$. Donc il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. Pour tout y de F^\perp on a donc $\langle x_n, y \rangle = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Ainsi, par passage à la limite, on trouve que $\langle x, y \rangle = 0$.
Ce qui signifie que $x \in (F^\perp)^\perp$.

2) Voir corrigé de l'exercice **3.1.1** et l'exercice **3.1.3**.

III) Voir corrigé de l'exercice **3.2.1**.

Corrigé de l'exercice 3.3.5 :

Même idée que l'exercice **3.2.5**.

Chapitre 5

Exercices supplémentaires

5.1 E.v.n et espaces pre-hilbertiens

Exercice 5.1.1.

1) Montrer que les applications suivantes de \mathbb{C}^n dans \mathbb{R} sont des normes sur \mathbb{C}^n :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| ; \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2} ; \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

où $x = (x_k)_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$.

Indication : Pour l'application $\|\cdot\|_2$, on peut utiliser l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n (a_k)^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n (b_k)^p \right)^{1/p} ; \quad a_k, b_k \geq 0, p \in [1, +\infty[$$

2) Montrer que ces normes sont équivalentes sur \mathbb{C}^n

Exercice 5.1.2. Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} .

Pour $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx ; \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} ; \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

1) Montrer que les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur E .

2) Montrer que pour tout $f \in E$, on a :

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$$

- 3) En déduire que toute suite convergente de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est convergente dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
- 4) Considérons la suite (f_n) d'éléments de E telle que $f_n(x) = x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, 1]$.
- Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|f_n\|_\infty$.
 - En déduire que la suite (f_n) converge vers la fonction nulle pour la norme $\|\cdot\|_1$, mais ne converge pas vers la fonction nulle pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
 - Est-ce que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes ?
- 5) On considère la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ de E définie par :

$$g_n(x) = 1 - e^{-nx}$$

- Montrer que la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
- Montrer que la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ converge dans $(E, \|\cdot\|_1)$ vers g avec $g(x) = 1, \forall x \in [0, 1]$.

Exercice 5.1.3. Les applications suivantes sont-elles des produits scalaires sur $\mathbb{R}[X]$?
Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$:

- $\langle P, Q \rangle = P(1) Q'(0) + P'(0) Q(1)$;
- $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x) Q(x) dx$.

Exercice 5.1.4. Soit $E = M_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On définit les applications :

$$\begin{aligned} tr : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto tr(A) = a + d \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{transposée} : E &\rightarrow E \\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : (A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = tr(A^T B)$ est un produit scalaire sur E .
- Montrer que la norme associée à ce produit scalaire vérifie :

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \forall A, B \in E$$

- En déduire que : $\|A^p\| \leq \|A\|^p, \forall A \in E, \forall p \in \mathbb{N}^*$

Exercice 5.1.5. Soit E un espace pré-hilbertien avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Montrer que :

- 1) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \quad \forall x, y \in E$ (**Identité de polarisation**);
- 2) $\|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Im}\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \quad \forall x, y \in E$;
- 3) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (**Identité du parallélogramme**);
- 4) $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2) \quad \forall x, y \in E$.

Exercice 5.1.6. On note l^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres complexes vérifiant $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty$.

- 1) Montrer que la relation :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \bar{y}_n, \quad x, y \in l^2$$

définit un produit scalaire sur l^2 .

- 2) Montrer que $(l^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert.

5.2 Espaces de Hilbert et systèmes orthogonaux

Exercice 5.2.1.

I) Soit H un espace de Hilbert et soit F un sous-espace vectoriel de H .

- 1) Montrer que :
 - a) $H^\perp = \{0_H\}$;
 - b) F^\perp est un sous-espace vectoriel fermé de H .
- 2) Montrer que $F^\perp = \overline{F}^\perp$.
- 3) On suppose que F est fermé. Montrer que :
 - a) F est un espace de Hilbert;
 - b) $(F^\perp)^\perp = F$.
- 4) En déduire que :
 - a) $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$;
 - b) F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0_E\}$.

II) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de Hilbert H tels que $F \perp G$. Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel fermé de H .

III) 1) On suppose que F est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H . Montrer que :

$$\langle P_F(x_1), x_2 \rangle = \langle x_1, P_F(x_2) \rangle, \quad \forall x_1, x_2 \in H$$

2) Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de Hilbert H tels que $F_2 \subset F_1$. Montrer que $P_{F_2} \circ P_{F_1} = P_{F_2}$.

Exercice 5.2.2. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de parties de H . Montrer que :

$$\left(\bigcup_{i \in I} F_i \right)^\perp = \bigcap_{i \in I} F_i^\perp$$

Exercice 5.2.3. Les familles suivantes sont-elles des systèmes orthonormés ?

1) $E = \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ et

$$(e_k)_{k=1, \dots, n} = \left(\left(0, \dots, 0, \underset{\uparrow k}{1}, 0, \dots, 0 \right) \right);$$

2) $E = C^0([-1, 1], \mathbb{R}), \langle f, g \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t) \times g(t) dt$ et

$$(e_n(x))_{n \in \mathbb{N}} = (\cos(n \operatorname{Arc} \cos x))_{n \in \mathbb{N}} \quad x \in [-1, 1];$$

3) $E = C^0([0, 1], \mathbb{C}), \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \times \overline{g(t)} dt$ et

$$(e_n(x))_{n \in \mathbb{Z}} = (e^{2i\pi n x})_{n \in \mathbb{Z}}, \quad x \in [0, 1].$$

Exercice 5.2.4. Soit $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite orthonormée dans un espace de Hilbert H . On pose :

$$F_n = \operatorname{Vect} \{e_k\}_{1 \leq k \leq n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

1) Montrer que :

$$\forall x \in H, \quad P_n(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$$

2) Montrer que :

$$\forall x \in H, \quad \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 + \|x - P_n(x)\|^2 = \|x\|^2$$

3) En déduire l'inégalité de **Bessel** :

$$\forall x \in H, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Exercice 5.2.5. Soit H un espace de Hilbert ayant une base hilbertienne $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. On pose $v_0 = e_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{e_n + e_{-n}}{\sqrt{2}}, \quad w_n = \frac{e_n - e_{-n}}{i\sqrt{2}}$$

Montrer que la famille de vecteurs $\{v_0, v_n, w_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est une base hilbertienne de H .

Exercice 5.2.6. Soit $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne d'un espace de Hilbert H . Pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$x_n = e_{2n} \text{ et } y_n = \sqrt{1 - 4^{-n}} e_{2n} + 2^{-n} e_{2n+1}$$

On désigne par X le sous- espace vectoriel fermé de H engendré par la suite de vecteurs $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (i.e. $X = \text{Vect} \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$) et par Y le sous- espace vectoriel fermé de H engendré par la suite de vecteurs $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (i.e. $Y = \text{Vect} \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$).

- 1) Vérifier que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont des bases hilbertiennes de X et Y respectivement.
- 2) Montrer que :
 - a) $X \cap Y = \{0_H\}$;
 - b) $\overline{X + Y} = H$.

5.3 Opérateurs linéaires bornés

Exercice 5.3.1. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $T : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) T est continu sur E ;
- 2) T est continu à l'origine 0 de E ;
- 3) Il existe un $C > 0$ tel que $\|T(x)\|_F \leq C \|x\|_E$, $\forall x \in E$ (i.e. T est borné).

Exercice 5.3.2. Soit H un espace de Hilbert.

Les opérateurs suivants sont-ils linéaires, bornés, auto-adjoints (hermitiens), positifs ?

1)

$$T : H \rightarrow H \\ x \mapsto Tx = \langle x, a \rangle a$$

2)

$$P_F : H \rightarrow H \\ x \mapsto P_F x$$

Exercice 5.3.3. On considère l'espace de Hilbert l^2 des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes telles que $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty$. On suppose donnée une suite bornée $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de scalaires et on pose pour tout $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in l^2$,

$$y = Tx = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_{n+1} x_{n+1}, \dots) = (\lambda_{n+1} x_{n+1})_{n \geq 0}$$

- 1) Montrer que T définit un opérateur linéaire borné de l^2 dans l^2 si et seulement si la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.
- 2) Déterminer l'adjoint T^* .

5.4 Corrigés de certains exercices

Corrigé de l'exercice 5.1.1 :

- 1) il suffit d'appliquer la définition d'une norme et de vérifier les quatre propriétés essentielles.
- 2) Il est facile de vérifier que :
 $\|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty, \|x\|_\infty \leq \|x\|_1, \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty, \|x\|_\infty \leq \|x\|_2, \forall x \in C^n.$

Corrigé de l'exercice 5.1.2 :

Démontrons **3)**, **4)** et **5)**.

- 3) Soit (f_n) une suite convergente de limite f dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. On a :

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc d'après l'inégalité précédente :

$$\|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi toute suite convergente de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est convergente dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

- 4) a) On a :

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

et

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |x^n| = \sup_{x \in [0,1]} x^n = 1$$

- b) La suite (f_n) converge vers la fonction nulle pour la norme $\|\cdot\|_1$, mais ne converge pas vers la fonction nulle pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. En effet, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - 0\|_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - 0\|_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \neq 0$$

c) Quand deux normes sont équivalentes, la convergence et la limite des suites sont identiques pour l'une et l'autre. Comme la suite précédente converge vers la fonction nulle pour la norme $\| \cdot \|_1$, mais ne converge pas vers la fonction nulle pour la norme $\| \cdot \|_\infty$, alors les normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

5) a) On a :

$(g_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans $(E, \| \cdot \|_1) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \forall p, q \in \mathbb{N}^*, p \geq q \geq n_0 \Rightarrow \|g_p - g_q\|_1 \leq \varepsilon$.

Pour $p \geq q$, on a :

$$\|g_p - g_q\|_1 = \int_0^1 |e^{-px} - e^{-qx}| dx = \int_0^1 e^{-qx} |e^{-(p-q)x} - 1| dx \leq 2 \int_0^1 e^{-qx} dx \leq \frac{2}{q}$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, posons $n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 1$. Alors :

$$p \geq q \geq \left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 1 \Rightarrow \|g_p - g_q\|_1 \leq \varepsilon$$

Ceci prouve que la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans $(E, \| \cdot \|_1)$.

b) On a :

$$\|g_n - 1\|_1 = \int_0^1 e^{-nx} dx = \frac{1 - e^{-n}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ converge dans $(E, \| \cdot \|_1)$ vers 1.

Corrigé de l'exercice 5.1.3 :

- 1) Cette application n'est pas un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ puisque pour $P \in \mathbb{R}[X]$ la quantité $\langle P, P \rangle = P(1)P'(0) + P'(0)P(1) = 2P(1)P'(0)$ n'est pas nécessairement positive (prendre $P(x) = 2 - x$ par exemple).
- 2) Cette application est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Pour cela, il suffit d'appliquer la définition d'un produit scalaire et de vérifier les cinq propriétés essentielles.

Corrigé de l'exercice 5.2.1 :

I) 1) a) Clair.

b) **Première méthode :** $F^\perp = \bigcap_{x \in F} x^\perp$ (voir le cours : **chapitre 1**) ;

Deuxième méthode : Il est clair que F^\perp est un sous-espace vectoriel de H . Donc il reste à montrer que F^\perp est fermé de H . Soit (x_n) une suite d'éléments de F^\perp et soit $x \in H$ sa limite.

Pour tout y dans F , on a :

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \langle x, y \rangle - \underbrace{\langle x_n, y \rangle}_{=0} \right| = |\langle x - x_n, y \rangle| \underset{C.S.}{\leq} \|x - x_n\| \|y\|$$

Le membre de droite de cette inégalité tend vers zéro quand n tend vers l'infini et donc $\langle x, y \rangle = 0$. Ceci étant pour tout $y \in F$, on en déduit que x appartient à F^\perp et donc F^\perp est fermé de H .

- 2) Puisque $F \subset \overline{F}$ on a l'inclusion $\overline{F}^\perp \subset F^\perp$.
 Soit alors x un élément de F^\perp et y un élément de \overline{F} , il existe une suite (y_n) d'éléments de F telle que $\|y_n - y\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. On a alors :

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \langle x, y \rangle - \underbrace{\langle x, y_n \rangle}_{=0} \right| = |\langle x, y - y_n \rangle| \underset{C.S}{\leq} \|x\| \|y - y_n\|$$

Le membre de droite tend vers zéro quand n tend vers l'infini et il en résulte $\langle x, y \rangle = 0$.

Ainsi F^\perp est inclus dans \overline{F}^\perp .

- 3) a) Clair d'après la définition d'un espace de Hilbert.
 b) **Première méthode** : On a toujours $F \subset (F^\perp)^\perp$. Inversement si $x \in (F^\perp)^\perp$, alors x se décompose en $x = p + z$ avec $p \in F$ et $z \in F^\perp$. Mais alors $z = x - p \in (F^\perp)^\perp$ et est donc orthogonal à lui-même, c'est-à-dire que $z = 0$ et $x = p \in F$.

Deuxième méthode :

• Soit $y \in F$ alors $\forall z \in F^\perp$, on a $\langle y, z \rangle = 0$. Donc $y \in (F^\perp)^\perp$, d'où $F \subset (F^\perp)^\perp$.

• Montrons l'inclusion inverse. Soit $z \in (F^\perp)^\perp$.

Comme $H = F \oplus F^\perp$, donc

$$z = P_F(z) + P_{F^\perp}(z) \dots\dots\dots (*)$$

Mais dans la somme directe $H = F^\perp \oplus F^{\perp\perp}$, s'écrit

$$z = P_{F^\perp}(z) + P_{F^{\perp\perp}}(z) \dots\dots\dots (**)$$

Mais $P_{F^{\perp\perp}}(z) = z$ (car $z \in (F^\perp)^\perp$), d'où $P_{F^\perp}(z) = 0$ d'après (**). On déduit alors de (*) que $z = P_F(z) \in F$.

- 4) a) Conséquence directe des questions 2 et 3.b.
 b) D'après la question 2, on a $F^\perp = \overline{F}^\perp$, le résultat s'en déduit.

II) Il est clair que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de H .

Soit (z_n) une suite d'éléments de $F + G$ et soit $z \in H$ sa limite, donc (z_n) est de Cauchy dans H et il existe une suite (x_n) d'éléments de F et une suite (y_n) d'éléments de G telle que $z_n = x_n + y_n$ et on a :

$$\|z_n - z_m\|^2 = \|x_n - x_m + y_n - y_m\|^2 \underset{Pythagore}{=} \|x_n - x_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2$$

Ce qui conduit à :

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq \|z_n - z_m\|^2$$

et

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq \|z_n - z_m\|^2$$

Donc (x_n) et (y_n) sont des suites de Cauchy dans F et G respectivement. Comme F et G sont fermés (donc complets), (x_n) converge vers un élément x de F et (y_n) converge vers un élément y de G et par suite :

$$z_n = x_n + y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x + y = z \in F + G$$

- III) 1) Pour x_1 et x_2 dans H , les éléments $P_F(x_1)$ et $x_2 - P_F(x_2)$ sont orthogonaux et il en résulte que :

$$\langle P_F(x_1), x_2 \rangle = \langle P_F(x_1), P_F(x_2) \rangle$$

et

$$\langle x_1, P_F(x_2) \rangle = \langle P_F(x_1), P_F(x_2) \rangle$$

D'où :

$$\langle P_F(x_1), x_2 \rangle = \langle x_1, P_F(x_2) \rangle$$

- 2) Puisque F_1 et F_2 sont des sous-espaces fermés de l'espace de Hilbert H , on peut appliquer le **théorème de la projection orthogonale** sur un sous-espace fermé. Pour tout x dans H , on pose : $x_1 = P_{F_1}(x)$, $x_{12} = P_{F_2}(x_1)$ et $x_2 = P_{F_2}(x)$.

Le théorème de la projection affirme que x_1 est l'**unique** élément de F_1 tel que $x - x_1 \perp F_1$ i.e. $x - x_1 \in F_1^\perp$, x_{12} est l'**unique** élément de F_2 tel que $x_1 - x_{12} \perp F_2$ i.e. $x_1 - x_{12} \in F_2^\perp$ et x_2 est l'**unique** élément de F_2 tel que $x - x_2 \perp F_2$ i.e. $x - x_2 \in F_2^\perp$.

Comme on a l'inclusion $F_2 \subset F_1$, $x - x_1$ étant orthogonal à F_1 , est aussi orthogonal à F_2 . Il en résulte que $(x - x_1) + (x_1 - x_{12}) = x - x_{12}$ est aussi orthogonal à F_2 . L'unicité montre alors que $x_2 = x_{12}$, c'est-à-dire que :

$$P_{F_2} \circ P_{F_1} = P_{F_2}(x) = P_{F_2} \circ P_{F_1}(x)$$

Corrigé de l'exercice 5.2.3 :

- 1) Un calcul simple montre que :

$$\langle e_n, e_m \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

Ainsi $\{e_n\}_{k=1, \dots, n}$ est une famille orthonormée de \mathbb{R}^n .

2) Pour $n \neq m$, on a :

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_m \rangle &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} e_n(t) \times e_m(t) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cos(n \operatorname{Arc} \cos t) \times \cos(m \operatorname{Arc} \cos t) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(nx) \times \cos(mx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nx + mx) + \cos(nx - mx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos((n+m)x) + \cos((n-m)x) dx = 0 \end{aligned}$$

Et pour $n = m$, on a :

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_n \rangle &= \|e_n\|^2 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} e_n^2(t) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cos^2(n \operatorname{Arc} \cos t) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos^2(nx) dx = 1 \end{aligned}$$

Donc $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $C^0([-1, 1], \mathbb{R})$.

3) Un calcul rapide montre que :

$$\begin{cases} \|e_n\| = 1 & \text{si } n \in \mathbb{Z} \\ \langle e_n, e_m \rangle = 0 & \text{si } n, m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \neq m \end{cases}$$

Ainsi $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $C^0([0, 1], \mathbb{C})$.

Corrigé de l'exercice 5.2.4 :

1) **Première méthode** : Il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $P_n(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$. Mais $P_n(x)$ est caractérisé par le fait que $x - P_n(x) \in F_n^\perp$, c'est-à-dire que pour tout entier $j \in [1, n]$, $\langle x - P_n(x), e_j \rangle = 0$. Cette relation implique que :

$$\langle x, e_j \rangle = \langle P_n(x), e_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k, e_j \right\rangle = \lambda_j$$

car la famille $\{e_k\}_{1 \leq k \leq n}$ est orthonormale. On a donc $P_n(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$.

Deuxième méthode : On a bien sûr $P_n(x) \in F_n$ et pour tout $y \in F_n$, un calcul rapide montre que :

$$x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \perp y$$

ce qui caractérise bien le projeté de x sur F_n .

- 2) Les vecteurs $P_n(x)$ et $x - P_n(x)$ sont orthogonaux, donc d'après le **théorème de Pythagore**,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|P_n(x) + (x - P_n(x))\|^2 = \|P_n(x)\|^2 + \|x - P_n(x)\|^2 \\ &= \left\| \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \|x - P_n(x)\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 + \|x - P_n(x)\|^2 \end{aligned}$$

car la famille $\{e_k\}_{1 \leq k \leq n}$ est orthonormale.

- 3) D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

La série à termes positifs $\sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$ est donc convergente (ses sommes partielles sont majorées) et sa somme vérifie :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Corrigé de l'exercice 5.2.5 :

Il est clair que la famille de vecteurs $\{v_0, v_n, w_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est orthonormée.

Il reste à vérifier que le sous-espace $\text{vect} \{v_0, v_n, w_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans H i.e.

$$\overline{\text{vect} \{v_0, v_n, w_n, n \in \mathbb{N}^*\}} = H$$

D'après la définition de la famille de vecteurs $\{v_0, v_n, w_n, n \in \mathbb{N}^*\}$, on a :

$$\text{vect} \{v_0, v_n, w_n, n \in \mathbb{N}^*\} \subset \text{vect} \{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$$

D'autre part, on a $e_0 = v_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$e_n = \frac{v_n + i w_n}{\sqrt{2}} \text{ et } e_{-n} = \frac{v_n - i w_n}{\sqrt{2}}$$

Donc : $\text{vect} \{e_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset \text{vect} \{v_0, v_n, w_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ D'où :

$$\text{vect} \{v_0, v_n, w_n, n \in \mathbb{N}^*\} = \text{vect} \{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$$

Comme $\text{vect} \{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans H , alors :

$$\overline{\text{vect} \{v_0, v_n, w_n, n \in \mathbb{N}^*\}} = \overline{\text{vect} \{e_n, n \in \mathbb{Z}\}} = H$$

Corrigé de l'exercice 5.3.1 :

Il suffit de montrer que **(2)** entraîne **(3)**, les autres propriétés étant immédiates.

Il résulte de la continuité en 0, qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\|x\|_E \leq \delta \Rightarrow \|T(x)\|_F \leq 1$$

Maintenant pour $x \neq 0$ on applique l'inégalité précédente à $y = \frac{x}{\|x\|_E} \delta$ et on obtient

(3) avec $C = \frac{1}{\delta}$.

Corrigé de l'exercice 5.3.2 :

1) Il est clair que $T \in L_C(H)$.

De plus :

$$\begin{aligned} \langle Tx, y \rangle &= \langle \langle x, a \rangle a, y \rangle = \langle x, a \rangle \langle a, y \rangle = \langle a, y \rangle \langle x, a \rangle \\ &= \overline{\langle y, a \rangle} \langle x, a \rangle = \langle x, \langle y, a \rangle a \rangle = \langle x, Ty \rangle \end{aligned}$$

Donc T est auto-adjoint.

D'autre part, on a :

$$\langle Tx, x \rangle = \langle \langle x, a \rangle a, x \rangle = \langle x, a \rangle \langle a, x \rangle = \overline{\langle x, a \rangle} \langle x, a \rangle = |\langle x, a \rangle|^2 \geq 0$$

ce qui montre que T est positif.

2) Voir corrigé de l'exercice **3.1.3**.

Corrigé de l'exercice 5.3.3 :

Même idée que l'exercice **3.1.2**.

Bibliographie

- [1] H. Brézis. Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983.
- [2] A. Gichardet. Intégration, Analyse Hilbertienne, 1989.
- [3] G. Lacombe & P. Massat. Analyse Fonctionnelle. Exercices corrigés DUNOT.
- [4] F. Riesz & B. Nagy. Lecons d'analyse fonctionnelle.
- [5] Y. Sonntag. Topologie et Analyse Fonctionnelle, Cours et exercices,. Ellipses, 1997, Gauthier & Villars.