

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Hassiba Benbouali de Chlef  
Faculté de Génie Civil et d'Architecture  
Département de Génie Civil



# THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

## DOCTORAT

Domaine : Sciences et Technologie

Filière : Génie civil

Spécialité : génie civil

**KEHLI AHMED**

Thème :

---

## CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE LA STABILITÉ ET DE LA VIBRATION DES POUTRES SUR ASSISES VISCOELASTIQUES

---

Soutenue le 18/10/2025 devant le jury composé de :

HAMRAT Mostefa	Professeur	Université de Chlef	Président
LAZREG Hadji	Professeur	UIK Tiaret	Examineur
AIT AMAR MEZIANE Mohamed	Professeur	UIK Tiaret	Examineur
AIT YAHIA Sihame	MCA	UMB Boumerdès	Examineur
BENNAI Riadh	Professeur	Université de Chlef	Rapporteur
AIT ATMANE Hassen	Professeur	Université de Chlef	Co- Rapporteur
NEBAB Mokhtar	MCA	UMB Boumerdès	Invité

# Dédicace

---

## ***Dédicace***

*To my family, both young and old, and to my beloved parents. Allah, grant them eternal rest in His boundless paradise.*

# *Remerciements*

---

## ***Remerciements***

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse, le Professeur **BENNAI Riadh**. Son encadrement scientifique exigeant, sa disponibilité constante et ses orientations judicieuses ont été des piliers tout au long de l'élaboration de ce travail. Je lui suis particulièrement reconnaissant pour son soutien indéfectible et la pertinence de ses conseils, qui se sont avérés essentiels à la finalisation de cette thèse.

Je tiens également à remercier mon co-directeur de thèse, le professeur **AITATMANE Hassen** pour leur contribution précieuse dans ce travail. Au-delà de son expertise académique, ses qualités humaines et sa bienveillance ont été pour moi une source d'inspiration et m'ont permis de progresser avec confiance dans cette aventure intellectuelle exigeante.

Mes plus vifs remerciements s'adressent tout particulièrement à Monsieur le Président et aux distingués membres du jury qui ont accepté d'évaluer ce travail :

- **M. HAMRAT Mostefa**, Professeur à l'Université de Chlef, pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant ce jury.
- **M. LAZREG Hadji**, Professeur à l'Université de Tiaret, qui a bien voulu examiner cette thèse et enrichir le jury de sa présence.
- **M. AIT AMAR MEZIANE Mohamed**, Professeur à l'Université de Tiaret, pour avoir accepté d'évaluer ces travaux et de siéger au jury.
- **Mme AIT YAHIA Sihame**, Maître de Conférences à l'Université de Boumerdes, qui a généreusement consacré son temps à l'examen de cette thèse

Je tiens également à remercier chaleureusement Docteur **NEBAB Mokhtar**, Maître de conférences à l'Université de Boumerdes, pour sa collaboration précieuse, ses remarques constructives et son accompagnement tout au long de ce travail. Son soutien méthodologique a grandement contribué à enrichir cette recherche.

Ma reconnaissance s'étend à l'ensemble des enseignants- qui, de près ou de loin, ont participé à ma formation universitaire et scientifique. Leurs enseignements, leurs conseils et leurs encouragements ont forgé ma réflexion et m'ont permis d'acquérir les compétences nécessaires à la réalisation de ce projet.

Je n'oublie pas mes collègues et amis, dont le soutien moral et la solidarité ont rendu ce parcours plus enrichissant

À toutes et à tous, merci d'avoir contribué, chacun à votre manière, à l'accomplissement de cette étape décisive de ma vie académique et personnelle.

# Résumé

---

## ***Résumé***

Cette recherche s'articule autour de deux orientations fondamentales visant à analyser les caractéristiques dynamiques et la stabilité des poutres à gradient fonctionnel (FGM) supportées par des fondations viscoélastiques.

Cette étude s'organise premièrement autour d'une démarche de modélisation théorique fondée sur l'application de la théorie de déformation par cisaillement d'ordre élevé (HSDT), avec l'intégration d'un champ de déplacement exprimé à travers des variables intégrales, permettant une analyse analytique approfondie des phénomènes étudiés. Cette formulation permet de réduire le nombre d'inconnues par rapport aux approches conventionnelles. Le modèle développé évalue l'influence des fondations viscoélastiques à trois paramètres sur le comportement vibratoire des poutres FG, en intégrant l'impact des discontinuités structurelles telles que les fissures sur la réponse dynamique globale.

Le deuxième axe développe une investigation portant sur les réponses en vibration libre et les phénomènes d'instabilité par flambement des poutres 2D-FGM (fonctionnellement graduées bidirectionnelles). Ces structures reposent sur des supports viscoélastiques dont la rigidité de Winkler présente une variation spatiale selon l'axe longitudinal, suivant diverses configurations de variation. L'analyse s'appuie sur une théorie de déformation par cisaillement d'ordre élevé quasi-3D, offrant une représentation plus précise des phénomènes de déformation dans l'épaisseur.

La formulation mathématique intègre un modèle de fondation enrichi incorporant les effets d'amortissement, permettant une caractérisation complète de l'interaction sol-structure. Les équations gouvernantes sont établies par application du principe des travaux virtuels, tandis que la résolution analytique exploite des techniques de séparation des variables adaptées aux conditions aux limites considérées.

L'influence des caractéristiques matérielles, des propriétés de la base viscoélastique et des modifications de raideur sur la réponse dynamique et la stabilité est mise en évidence par les calculs numériques effectués sur les poutres étudiées. L'analyse des données obtenues valide la robustesse de la méthodologie développée pour l'investigation détaillée des vibrations libres et du flambement des poutres FG supportées par des substrats viscoélastiques, fournissant un moyen efficace d'examiner leur comportement mécanique complexe.

**Mots clés** : Poutres FG, Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé, Vibration libre, Flambement, Fréquence naturelle, Charges critiques, Fondation viscoélastique, Amortissement.

# Summary

---

## *Summary*

This research focuses on two fundamental orientations aimed at analyzing the dynamic characteristics and stability of functional gradient beams (FGM) supported by viscoelastic foundations.

This research is primarily focused on a theoretical modelling approach based on the application of higher-order shear deformation theory (HSDT), with the integration of a displacement field expressed through integral variables, enabling an advanced analytical analysis of the phenomena studied. This formulation reduces the number of unknowns compared to conventional approaches. The developed model evaluates the influence of three-parameter viscoelastic foundations on the vibrational behavior of FGM beams, incorporating the impact of structural discontinuities such as cracks on the overall dynamic response.

The second axis develops an investigation focusing on free vibration responses and buckling instability phenomena in 2D-FGM (functionally graded bidirectional) beams. These structures rest on viscoelastic supports whose Winkler stiffness exhibits spatial variation along the longitudinal axis, following various variation configurations. The analysis is based on a quasi-three-dimensional higher-order shear deformation theory, providing a more accurate representation of deformation phenomena through the thickness.

The mathematical formulation integrates an enhanced foundation model incorporating viscous damping effects, allowing for a comprehensive characterization of the soil-structure interaction. The governing equations are established by applying the principle of virtual work, while the analytical solution utilizes variable separation techniques adapted to the considered boundary conditions.

The influence of material characteristics, the properties of the viscoelastic base, and stiffness modifications on the dynamic response and stability is highlighted by the numerical calculations performed on the studied beams. The analysis of the obtained data validates the robustness of the developed methodology for the detailed investigation of free vibrations and buckling of FG beams supported by viscoelastic substrates, providing an effective means of examining their complex mechanical behavior.

**Keywords:** FG Beams, Higher-Order Shear Deformation Theories, Free Vibration, Buckling, Natural Frequency, Critical Loads, Viscoelastic Foundation, Damping.

ملخص

---

## ملخص

يتمحور هذا البحث حول اتجاهين أساسيين يهدفان إلى تحليل الخصائص الديناميكية وثبات العوارض ذات التدرج الوظيفي (FGM) المدعومة بالأساسات اللزجة.

تتمحور هذه الدراسة في المقام الأول حول نهج النمذجة النظرية القائم على تطبيق نظرية التشوه القصي من الدرجة العليا (HSDT)، مع دمج مجال الإزاحة المعبر عنه من خلال المتغيرات التكاملية، مما يتيح إجراء تحليل تحليلي متعمق للظواهر المدروسة. تسمح هذه الصياغة بتقليص عدد المتغيرات المجهولة مقارنة بالأساليب التقليدية. يقوم النموذج المطور بتقييم تأثير الأساسات اللزجة ذات الثلاثة معلمات على سلوك العوارض FG الاهتزازي، مع دمج تأثير التقطع البنيوي مثل الشقوق على الاستجابة الديناميكية العامة.

الجانب الثاني يطور تحقيقاً يتعلق بالاستجابات في الاهتزاز الحر وظواهر عدم الاستقرار بواسطة الانبعاج للعوارض D-FGM 2 (التدرج الوظيفي ذو الاتجاهين). تستند هذه الهياكل إلى دعائم لزجة ذات صلابة وينكلر التي تظهر تبايناً مكانياً على طول المحور الطولي، وفقاً لعدة تكوينات للتغير. تعتمد التحليل على نظرية التشوه بواسطة القص من الرتبة العليا شبه ثلاثية الأبعاد، مما يوفر تمثيلاً أكثر دقة لظواهر التشوه عبر السماكة.

تدمج الصياغة الرياضية نموذجاً محسناً للأساس يتضمن تأثيرات التخميد اللزج، مما يسمح بتوصيف شامل لتفاعل التربة مع الهيكل. تم تأسيس المعادلات الحاكمة بتطبيق مبدأ الأعمال الافتراضية، بينما يتم الحل التحليلي باستخدام تقنيات فصل المتغيرات الملائمة للظروف الحدية المعتمدة.

يتم تسليط الضوء على تأثير الخصائص المادية وخصائص الأساس اللزج وتعديلات الصلابة على الاستجابة الديناميكية والثبات من خلال الحسابات الرقمية التي أجريت على العوارض المدروسة. تؤكد تحليل البيانات المستخلصة على قوة المنهجية المطورة للتحقيق التفصيلي في الاهتزازات الحرة والانبعاج للعوارض FG المدعومة بالركائز اللزجة، مما يوفر وسيلة فعالة لفحص سلوكها الميكانيكي المعقد.

**الكلمات المفتاحية:** العوارض المتدرجة وظيفياً، نظريات التشوه القصي من الدرجة الأعلى، الاهتزاز الحر، الانبعاج، التردد الطبيعي، الأحمال الحرجة، الأساس اللزج المرن، التخميد.

# Sommaire

---

Dédicace	III
Remerciements	V
Summary	IX
ملخص	XI
Liste des tableaux	XX
Liste des notations	XXI
Introduction générale	1
Chapitre I	4
Aperçu sur les matériaux composites avancés	4
I.1 Introduction	5
I.2. Évolution historique des matériaux fonctionnellement gradués	6
I.3 Principe des matériaux FGM	7
I.4. Modélisation des caractéristiques des matériaux FGM	8
1.4.1 Propriétés matérielles d'une poutre P-FGM	9
1.4.2 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM	11
1.4.3 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM	12
1.4.4 Loi de Viola-Tornabene	12
1.4.5 Loi de Voigt	13
1.4.6 Loi de Mori-Tanaka	13
I.5 Techniques de fabrication des matériaux FGM	14
I.5.1 Procédés en phase solide	15
I.5.1.1 Métallurgie des poudres	15
I.5.1.2. Frittage par plasma	16
I.5.1.3 Fabrication additive	17
I.5.2 Procédés en phase liquide	18
I.5.2.1 Moulage par centrifugation	18
I.5.2.2 Infiltration	19
I.5.3 Procédés en phase gazeuse	20
I.5.3.1 Dépôt en phase vapeur	20
I.5.3.2 Projection thermique	21
I.5.3.1 Méthode électrochimique :	22
I.5.3.2 Revêtement par laser	23

I.6. Domaines d'application des matériaux FGM	24
I.6.1 Secteur militaire	24
I.6.2 Industrie médicale	24
I.6.3. Aérospatial	25
I.6.4 Industrie automobile	25
I.6.5 Applications marines	25
I.6.6 Applications en génie civil	25
I.7 Défis et innovations récentes dans le domaine des FGM	26
I.8 Conclusion	26
Chapitre II	28
II.1 Introduction	29
II.2 Historique des théories des poutres	29
II.3 Comportement structurel des poutres composites	30
II.4 Les différentes théories des poutres	31
II.4.1 Modèle d'Euler-Bernoulli (CBT)	31
II.4.2 Modèle de Timoshenko (FSDBT)	33
II.4.3 Théorie d'Ordre Elevé	35
II.4.4 Effet des contraintes de déformation normale	37
II.5 Modèles élastiques et viscoélastiques des fondations	38
II 5.1. Modèle de Winkler	40
II 5.2. Modèle de Kelvin–Voigt	41
II 5.3. Modèle de Maxwell	41
II 5.4 Modèle de Zener	42
II.5.5 Modèle de Poynting–Thomson	43
II.5.6 Modèle de Burger	43
II.5.7 Modèle de Filonenko–Borodich	44
II.5.8 Modèle de Hetenyi	45
II.5.9 Modèle de Pasternak	45
II.5.9.1 Modèle élastique de Pasternak	45
II.5.9.2 Modèle viscoélastique de Pasternak	46
II.5.9.3 Modèle de Pasternak généralisé	47
II.5.10. Modèle de Kerr	48
II.5.11. Modèle de demi-espace	48

---

II.5.12. Modèle de Vlasov	49
II.5.13. Modèle de Reissner	50
II.6 Conclusion	51
CHAPITRE III : Caractérisation dynamique des poutres FG supportés par des milieux viscoélastiques	52
III.1. Introduction	53
III.2. Analyse théorique du comportement vibratoire des poutre FGM	53
III.2.1. Configuration géométrique	53
III.2.2. Propriétés des matériaux	54
III.2.3 Fondation viscoélastique	54
III.2.4 Cinématiques et déformations	55
III.2.5 Équations du mouvement	57
III 2.5.1 Énergie de déformation	57
III 2.5.2. Énergie de déformation de la fondation viscoélastique	58
III 2.5.3. Énergie cinétique	58
III.2.6. Modélisation des poutres fissurées	59
III.3. Solutions analytiques	61
III.4 Matériaux choisis pour l'étude numérique	62
III.5. Validation du model analytique	63
III.6 Etude paramétrique	67
III 6.1. Effet de l'indice de puissance	67
III .6.2. Effet des paramètres de la fondation	69
III.6.3 Effet du paramètre d'amortissement	70
III.6.4 Effet du rapport d'élancement ( $L/h$ ) et le paramètre d'amortissement	72
III .6.5 Effet du paramètre d'amortissement sur l'amortissement critique $\xi$	73
III.6.6 Effet du paramètre $cd$ sur le rapport d'amortissement $\xi$	74
III.6.7 Effet de l'amortissement $cd$ et l'indice de matériau $p$	76
III.6.8 Effet de type de fondation et le gradient du matériau $p$	78
III.6.9 Effet de la fissure	78
III 7. Conclusion	82
Chapitre IV	83
IV.1. Introduction	84
IV.2. Formulation du problème	84

IV.3. Domaine cinématique des déplacements	87
IV.4. Fondation à raideur viscoélastique variable	88
IV.5. Équations gouvernantes	89
IV.6. Solutions analytiques	91
IV.7 Présentation et analyse des résultats	93
IV.7. 1 Matériaux choisis pour l'étude numérique	94
IV.7. 2 Validation de la pertinence du modèle analytique suggéré	95
IV.7. 3. Étude paramétrique	99
IV.7.3.1 Vibration libre	99
IV.7.3.2 Comportement au flambement :	109
IV.7. Conclusion	121
Conclusion générale	123

# Listes

---

## Liste des figures

<b>Figure I 1</b>	Protection thermique.	7
<b>Figure I 2</b>	Concept d'un matériau à gradient de propriété.	8
<b>Figure I 3</b>	Géométrie d'une poutre FGM	9
<b>Figure I 4</b>	Variation de la fraction volumique selon la loi de puissance (P-FGM)	10
<b>Figure I 5</b>	Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.	11
<b>Figure I 6</b>	Variation du module de Young dans une poutre E-FGM.	12
<b>Figure I 7</b>	Catégorisation des méthodes de fabrication des matériaux FGM	14
<b>Figure I 8</b>	Matériaux FGM naturels appliqués dans le domaine biomédical.	16
<b>Figure I 9</b>	Méthode de fabrication par frittage de plasma projetée.	17
<b>Figure I 10</b>	Méthode de fabrication par moulage.	19
<b>Figure I 11</b>	Représentation du procédé infiltration sous pression et par infiltration sous pression gazeuse	20
<b>Figure I 12</b>	Représentation schématique des procédés d'élaboration des FGM par techniques de dépôt en phase gazeuse - (a) Évaporation physique sous vide, (b) Synthèse chimique en phase vapeur.	21
<b>Figure I 13</b>	Méthode de fabrication des FGM par diffusion thermiques.	21
<b>Figure I 14</b>	Classification des niveaux d'énergie du procédé de projection thermique.	23
<b>Figure I 15</b>	Gradation électrochimique dans les matériaux à gradient fonctionnel.	23
<b>Figure I 16</b>	Illustration du procédé de revêtement par laser.	23
<b>Figure I 17</b>	Applications des matériaux composites.	24
<b>Figure II 1</b>	Cinématique d'Euler Bernoulli.	32
<b>Figure II 2</b>	Cinématique de Timoshenko.	34
<b>Figure II 3</b>	Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé	36
<b>Figure II 4</b>	Modèle élastique de Winkler.	40
<b>Figure II 5</b>	Modèle de Kelvin–Voigt.	41
<b>Figure II 6</b>	Modèle de Maxwell.	42
<b>Figure II 7</b>	Modèle de Poynting–Thomson type (a) et type (b)	43
<b>Figure II 8</b>	Modèle de Burger.	44
<b>Figure II 9</b>	Modèle de Filonenko–Borodich.	45
<b>Figure II 10</b>	Modèle de Modèle de Hetenyi	45
<b>Figure II 11</b>	Modèle élastique de Pasternak.	46
<b>Figure II 12</b>	Modèle viscoélastique de Pasternak.	47
<b>Figure II 13</b>	Modèle généralisé de Pasternak.	47
<b>Figure II 14</b>	Modèle de Kerr.	48
<b>Figure II 15</b>	Système de fondation en demi-espace	48
<b>Figure II 16</b>	Modèle de Vlasov.	50
<b>Figure II 17</b>	Modèle de continuum simplifié de Reissner.	51
<b>Figure III 1</b>	Configuration d'une poutre FGM reposant sur une fondation viscoélastique.	53
<b>Figure III 2</b>	Configuration d'une poutre FGM fissurée reposant sur une fondation viscoélastique.	60
<b>Figure III 3</b>	Section transversale de la poutre fissurée	60
<b>Figure III 4</b>	Variation de la fréquence naturelle ( $\bar{\omega}$ ) de la poutre FGM sur une fondation élastique en fonction de l'indice de puissance et le paramètre $k_s$ pour ; $L/h=20$ et $k_w =10$ .	68

<b>Figure III 5</b>	Variation de la fréquence naturelle ( $\bar{\omega}$ ) de la poutre FGM sur une fondation élastique en fonction de l'indice de puissance et le paramètre $k_w$ pour $k_s=10$ et $L/h=20$	68
<b>Figure III 6</b>	Variation de la fréquence adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) avec l'indice de puissance pour la partie imaginaire, pour différentes valeurs du paramètre $k_w$ et $k_s$ .	69
<b>Figure III 7</b>	Variation de la fréquence adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) avec l'indice de puissance pour la partie réelle, pour différentes valeurs du paramètre $k_w$ et $k_s$ .	69
<b>Figure III 8</b>	Effet du paramètre d'amortissement $cd$ sur les premières fréquences des poutres FG, reposant sur fondation viscoélastique ( $k_w=k_s=10$ et $L/h=5$ )	71
<b>Figure III 9</b>	Variation de la fréquence en fonction du paramètre d'amortissement $cd$ et le rapport géométrique ( $L/h$ ) de la poutre FG.	73
<b>Figure III 10</b>	Variation du rapport d'amortissement en fonction du coefficient $cd$ et le rapport géométrique $L/h$ , pour $k_w=k_s=100$	74
<b>Figure III 11</b>	Effet du paramètre viscoélastique $cd$ sur la partie réelle de la fréquence d'une poutre non fissurée.	76
<b>Figure III 12</b>	Effet du paramètre viscoélastique $cd$ sur le rapport d'amortissement $\xi$ d'une poutre non fissurée.	76
<b>Figure III 13</b>	Variation du rapport d'amortissement en fonction du paramètre $cd$ et l'indice $p$ pour $k_w=10$ ; $k_s=1$ et $L/h=10$ .	77
<b>Figure III 14</b>	Variation de la partie réelle de fréquence naturelle fonction du paramètre $cd$ et l'indice $p$ pour $k_w=10$ ; $k_s=1$ et $L/h=10$ .	78
<b>Figure III 15</b>	Variation de la partie imaginaire de la fréquence en fonction du paramètre $cd$ pour différentes valeurs de l'indice $p$ pour $k_w=10$ ; $k_s=1$ et $L/h=10$ .	78
<b>Figure III 16</b>	Analyse comparative de la fréquence sans dimension selon le modèle de fondation et l'indice de puissance pour $L/h=5$ et $L/h=20$	79
<b>Figure III 17</b>	Impact combiné de la profondeur de fissure et de l'indice de puissance sur la réponse dynamique d'une poutre FGM sur fondation viscoélastique	82
<b>Figure IV 1</b>	Système de coordonnées et géométrie d'une poutre 2D-FGM soutenue par une assise viscoélastique variable.	86
<b>Figure IV 2</b>	Distribution bidirectionnelle de la fraction volumique dans une poutre FGM selon différents indices de gradation $p_x$ et $p_z$	87
<b>Figure IV 3</b>	Évolution de la partie réelle des fréquences propres non dimensionnelles en fonction de l'amortissement de fondation et de la gradation matérielle $p_z$ selon quatre profils de variation du module de Winkler ( $p_x=0$ , $L/h=10$ , $\zeta=20$ , $k_w=k_s=100$ )	103
<b>Figure IV 4</b>	Évolution de la partie imaginaire des fréquences propres non dimensionnelles en fonction de l'amortissement de fondation et de la gradation matérielle $p_z$ selon quatre profils de variation du module de Winkler ( $p_x=0$ , $L/h=10$ , $\zeta=20$ , $k_w=k_s=100$ )	106
<b>Figure IV 5</b>	Évolution de la fréquence fondamentale d'une poutre FG en fonction de l'indice de puissance $p_z$ pour différents types de fondations ( $p_x=0$ , $L/h=5$ )	109

<b>Figure IV 6</b>	Analyse tridimensionnelle de l'influence des paramètres $k_s$ et $p_z$ sur les charges critiques de flambement d'une poutre 2D-FG pour différentes valeurs l'indice $p_x$ ( $k_w = 10$ , $c_t = \zeta = 20$ , $L/h = 20$ )	111
<b>Figure IV 7</b>	Analyse tridimensionnelle de l'influence des paramètres $k_w$ et $p_z$ sur les charges critiques de flambement d'une poutre 2D-FG pour différentes valeurs l'indice $p_x$ ( $k_s = 10$ , $c_t = \zeta = 20$ , $L/h = 20$ )	114
<b>Figure IV 8</b>	Analyse tridimensionnelle de l'influence des paramètres $\zeta$ et $p_z$ sur les charges critiques de flambement d'une poutre 2D-FG pour différentes valeurs l'indice $p_x$ ( $k_w = k_s = 10$ , $c_t = 30$ , $L/h = 20$ )	116
<b>Figure IV 9</b>	Analyse tridimensionnelle de l'influence des paramètres $c_t$ et $p_z$ sur les charges critiques de flambement d'une poutre 2D-FG pour différentes valeurs l'indice $p_x$ ( $k_w = k_s = 10$ , $\zeta = 20$ , $L/h = 20$ )	119

## Liste des tableaux

<b>Tableau III 1</b>	Propriétés matérielles des poutres à gradient fonctionnel	63
<b>Tableau III 2</b>	Tableau III 2 Comparaison de la fréquence naturelle d'une poutre FG simplement appuyée	64
<b>Tableau III 3</b>	Comparaison de la première fréquence naturelle ) d'une poutre isotrope placée sur un fondement élastique pour différents rapports d'épaisseur	66
<b>Tableau III 4</b>	Comparaison fréquence adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) d'une poutre FG simplement appuyée pour différents rapports d'épaisseur.	67
<b>Tableau III 5</b>	Effet de la position de la fissure sur la fréquence, pour différents indices de puissance, avec une profondeur de fissure de 0,15.	80
<b>Tableau IV 1</b>	Paramètres mécaniques des matériaux utilisés dans les poutres FG bidirectionnelles	95
<b>Tableau IV 2</b>	Analyse comparative des fréquences naturelles adimensionnelles ( $\bar{\omega}$ ) des poutres à gradient fonctionnel (FG)	97
<b>Tableau IV 3</b>	Comparaison du paramètre adimensionnel de la fréquence fondamentale pour des poutres homogènes isotropes reposant sur une fondation élastique.	97
<b>Tableau IV 4</b>	Paramètre de charge critique de flambement ( $N_{cr}$ ) pour une poutre homogène isotrope de rapport portée/hauteur ( $L/h$ ) égal à 20, reposant sur une fondation élastique.	98
<b>Tableau IV 5</b>	Comparaison des charges de flambement pour une poutre homogène isotrope avec un rapport $L/h = 20$ reposant sur une fondation élastique	99
<b>Tableau IV 6</b>	Effet des indices de puissance et de la variation linéaire du paramètre de Winkler sur les fréquences propres d'une poutre 2D-FGM reposant sur une fondation viscoélastique ( $\zeta = 20, c_t = 10$ )	101
<b>Tableau IV 7</b>	Évolution de la fréquence fondamentale d'une poutre homogène sur fondation viscoélastique en fonction du coefficient d'amortissement et des profils de variation du paramètre de Winkler ( $p_x = p_z = 2, L/h = 10, \zeta = 20, k_w = k_s = 10$ )	107
<b>Tableau IV 8</b>	Influence du paramètre $\xi$ sur la fréquence fondamentale d'une poutre FG bidirectionnelle selon différents profils de variation du paramètre de Winkler ( $p_x = p_z = 2, c_t = 20$ et $k_w = k_s = 100$ )	108
<b>Tableau IV 9</b>	Variation des charges du flambement en fonction des différents modèles de variation du paramètre de Winkler ( $p_x = 0, \zeta = 20$ et $k_w = k_s = 10$ )	120

## Liste des notations

$G$	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
$E$	Module de Young suivant x
$E_c$	Module de Young de la céramique
$E_m$	Module de Young du métal
$\nu$	Coefficient de Poisson
$V(z)$	Fraction volumique
$p$	Paramètre du matériau
$u_0, w_0$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la poutre
$u, w$	Les déplacements dans les directions x, y, z.
$\varphi_z, \phi_x$	Les rotations autour des axes x, y et z
$\theta_i$	Rotations autour de l'axe i
$\sigma_x, \sigma_z$	Les éléments de contraintes normales
$\tau_{xz}$	Les éléments de contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_z$	Les éléments de déformations normales
$\gamma_{xz}$	Les éléments de déformations de cisaillement
$x, z$	Les coordonnées cartésiennes rectangulaires
$\delta U$	L'énergie de déformation virtuelle
$\delta U_{ef}$	L'énergie de déformation de fondation élastique
$\delta V$	Le travail virtuel externe
$\delta K$	La variation de l'énergie cinétique
$q$	Les charges transversales appliquées
$\delta u, \delta w, \delta \theta$	Champ virtuel de déplacement
$N_x$	Efforts normaux
$M_x$	Moments de flexion
$S_x$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse

---

$R_{xz}$	Effort de cisaillement
$\partial$	Dérivée partielle
$Q_{ij}$	Coefficient de rigidité
$P_m, P_c$	Les propriétés correspondantes du métal et la céramique
$f(z)$	La fonction de forme
$\rho_i$	Densité matérielle de la structure FGM
$\{\dots\}$	Vecteur colonne
$[\dots]$	Matrice
$A_{ij}, A_{ij}^s, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s$	Les composantes de rigidité
$U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}$	Les coefficients de déplacement maximum inconnus
$\omega$	Fréquence naturelle
FGM	Matériau à gradient de propriétés
Al	L'aluminium
$Al_2O_3$	Oxyde d'aluminium
$Si_3N_4$	Nitride de silicium
$SUS304$	Acier inoxydable
CLPT	La théorie classique de la plaque
FSDT	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre
HSDT	Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé

# Introduction Générale

---

## Introduction générale

L'ambition humaine constitue un puissant moteur de progrès scientifique et technologique. Chaque palier atteint suscite de nouveaux défis, engendrant ainsi une recherche permanente de performances supérieures. Toutefois, cette dynamique se heurte fréquemment aux limites des ressources et des matériaux existants, contraignant l'homme à repousser les frontières de l'innovation. C'est dans ce contexte d'exigences croissantes que se développent des solutions matérielles avancées, capables de réunir des propriétés mécaniques, thermiques ou physiques auparavant incompatibles.

Parmi ces avancées, l'émergence des matériaux à gradient de fonction (Functionally Graded Materials, FGM) marque une rupture paradigmatique dans l'ingénierie des matériaux. Contrairement aux composites traditionnels, où les propriétés varient de manière discontinue, les FGM offrent une transition progressive et contrôlée de leurs caractéristiques, optimisant ainsi leur réponse mécanique sous sollicitations

Ces matériaux composites ont été conçus pour offrir une combinaison de résistance mécanique, de résistance thermique et de légèreté. Il est rare de trouver un matériau unique capable de réunir toutes ces propriétés. Les chercheurs ont donc combiné différents matériaux, optimisant les meilleures caractéristiques de chacun pour former un "matériau composite", tout en maintenant des frontières distinctes entre les composants. Toutefois, ces composites présentent des inconvénients, tels que la concentration des contraintes et le risque de délaminage. L'innovation des FGM repose sur l'intégration progressive des matériaux, atténuant ainsi ces frontières et obtenant des résultats très prometteurs. Cette technologie trouve des applications en médecine, en ingénierie et dans le domaine spatial, ce qui incite à poursuivre les recherches sur ces nouveaux matériaux.

Ce travail de thèse s'articule autour de l'étude approfondie du comportement vibratoire et de la stabilité au flambement des poutres à gradient de propriétés (FGM) reposant sur des fondations viscoélastiques. La première partie est consacrée à l'analyse de l'influence de la fondation viscoélastique sur la réponse vibratoire des poutres FGM, en prenant en considération l'effet de la fissuration. Pour cela, une théorie de la déformation par cisaillement d'ordre élevé, de type quasi 3D, a été adoptée afin de modéliser de manière précise le comportement mécanique des poutres fissurées.

La seconde partie du travail s'intéresse à l'étude du comportement vibratoire ainsi qu'à la stabilité des poutres FGM bidirectionnelles posées sur des assises viscoélastiques caractérisées

par une rigidité de type Winkler spatialement variable le long de la poutre. L'étude tient compte de l'influence de paramètres tels que la géométrie de la poutre, l'indice du gradient de matériau, la rigidité au cisaillement, l'amortissement ainsi que la variation spatiale de la rigidité de la fondation, qui modifient de manière significative la réponse dynamique et la stabilité des poutres considérées.

Ainsi, l'ensemble de ce travail vise à fournir une compréhension détaillée des effets combinés de la fondation viscoélastique, de la fissuration et des variations des propriétés matérielles et d'appui sur la dynamique et la stabilité des poutres FGM, afin d'aboutir à des modèles analytiques fiables, applicables à l'ingénierie des structures avancées.

Le premier chapitre constitue une revue bibliographique de cette nouvelle catégorie de matériaux, appelés « matériaux fonctionnellement gradués » ou « matériaux à gradient de propriété ». Il retrace l'histoire de leur développement, décrit leurs propriétés, présente les modèles d'homogénéisation ainsi que les techniques de fabrication, et évoque également leurs domaines d'application.

Dans le deuxième chapitre, nous examinons diverses théories de déformation des poutres, en commençant par les plus classiques, telles que la théorie classique des poutres (CPT), qui ne prend pas en compte les déformations de cisaillement. Nous abordons ensuite la théorie de déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT), qui considère que le plan moyen reste droit après déformation tout en subissant une rotation. Nous retraçons aussi aux théories les plus avancées, comme celle de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT), pour laquelle plusieurs modèles de fonction de forme ont été proposés afin d'améliorer la représentation des déformations et des contraintes de cisaillement. Enfin, nous présentons différents modèles de fondations, en abordant leur évolution et en se focalisant notre axe de recherche sur les modèles viscoélastiques.

Le troisième chapitre présente la proposition d'un modèle analytique de la vibration libre des poutres sur fondation viscoélastique fondé sur la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre élevé quasi 3D à quatre variables. Les résultats sont également présentés en incluant la variation de la fréquence propre en fonction des caractéristiques de la poutre FGM et de la fondation viscoélastique

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude du comportement dynamique et de la stabilité au flambement des poutres 2D-FGM reposant sur des fondations viscoélastiques à caractéristiques variables. L'analyse porte sur la réponse vibratoire des poutres ainsi que sur leur stabilité face au flambement, en tenant compte de l'influence de divers paramètres. Parmi ceux-ci figurent le paramètre d'élancement, la géométrie de la poutre, l'indice du matériau, ainsi que

les propriétés de la fondation, telles que la rigidité au cisaillement et le coefficient d'amortissement.

Cette thèse se terminera par une conclusion générale mettant en lumière les principaux résultats obtenus concernant le comportement vibratoire et la stabilité des poutres FGM reposant sur des fondations viscoélastiques. Enfin, des axes de recherches seront proposées en perspective.

# **Chapitre I**

---

## **Aperçu sur les matériaux composites avancés**

## I.1 Introduction

Les percées technologiques récentes et l'évolution industrielle permanente génèrent des exigences accrues pour des matériaux aux propriétés optimisées et personnalisées. Cette orientation technique privilégie l'utilisation progressive de systèmes composites face aux solutions matérielles conventionnelles. L'essor technologique contemporain dans les domaines de l'ingénierie des matériaux et des procédés industriels a permis la création d'une classe inédite de composites : les matériaux à gradient de propriété FGM. Ces matériaux représentent la deuxième génération de composites, conçus pour offrir des performances supérieures. Le concept fondamental des FGM repose sur l'idée de graduer l'interface entre deux matériaux distincts, plutôt que de créer une transition abrupte. Cette approche permet de réduire les discontinuités dans les propriétés matérielles, assurant ainsi une transition plus harmonieuse entre les différents composants.

Compte tenu de l'importance des FGM dans de nombreux domaines, de nombreuses recherches sont menées pour approfondir la compréhension de leurs caractéristiques, de leurs comportements, ainsi que des techniques de production, entre autres aspects.

Dans la littérature, plusieurs définitions des matériaux à gradient de fonction (FGM) ont été proposées. Par exemple, Ruys et Sutton [1] définissent ces matériaux comme des composites dont les propriétés varient progressivement selon un ou plusieurs axes au sein de leur volume. Cette variation peut concerner la composition, mais aussi d'autres aspects tels qu'un gradient microstructural (comme une porosité graduelle ou un renforcement par fibres), un gradient à l'échelle atomique, ou toute autre propriété

De leur côté, Besisa et Ewais [2] décrivent les FGM comme une catégorie de matériaux composites caractérisés par une microstructure graduée. Plus précisément, ils soulignent que les FGM sont conçus pour optimiser leurs performances grâce à une variation spatiale de leurs propriétés. Cette variation peut concerner des aspects chimiques, structuraux, la taille des grains, la texture, la densité, ou d'autres propriétés, créant ainsi une transition progressive d'une couche à une autre.

Selon Mantari [3], ces matériaux représentent des composites hétérogènes caractérisés par une évolution progressive et continue de leurs propriétés selon une ou plusieurs orientations spatiales. Ils sont généralement fabriqués en combinant deux ou plusieurs matériaux (par exemple, un métal et une céramique) selon un rapport volumique spécifique, permettant ainsi une transition graduelle entre les propriétés des différents composants.

## **I.2 .Évolution historique des matériaux fonctionnellement gradués**

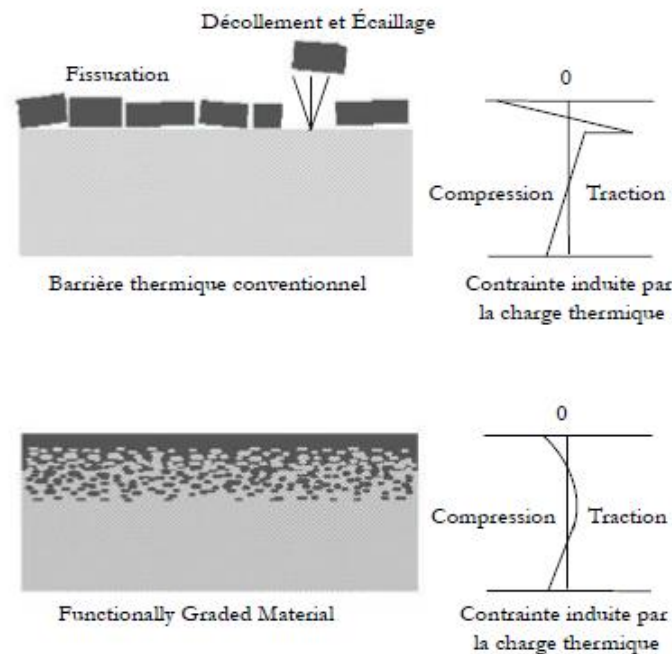
En 1972, Shen et Bever [4] ont exploré le concept de gradation dans les matériaux composites, tandis que Bever et Duwez [5] ont étudié différents types de gradations et examiné certaines de leurs propriétés. Cependant, ces travaux sont restés principalement théoriques.

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) ont fait leur apparition dans l'ingénierie moderne au cours des premières années 1980, suite aux travaux d'une équipe de recherche japonaise confrontée à une problématique complexe : élaborer un composite capable de tolérer des chocs thermiques importants dans le contexte d'un programme de navette spatiale. L'application exigeait un matériau d'une épaisseur de 10 mm, fonctionnant comme une barrière thermique. La face extérieure devait supporter une température d'environ 2000 K, tandis que la face intérieure devait maintenir une température d'environ 1000 K. En d'autres termes, le matériau devait rester stable et résister à une différence de température d'environ 1000 K entre l'extérieur et l'intérieur de l'avion. [6]

Les matériaux composites stratifiés conventionnels ont été soumis à de nombreux tests pour cette application, mais à chaque fois, ils ont échoué au même endroit, avec des modes de défaillance similaires. La rupture était principalement due au délaminage, c'est-à-dire à la séparation des couches du matériau composite au niveau de l'interface où les deux matériaux sont assemblés. Ce phénomène met en évidence une faiblesse structurelle inhérente aux composites stratifiés traditionnels, où la transition abrupte entre les matériaux crée une concentration de contraintes, conduisant à une défaillance prématurée. Les chercheurs ont résolu ce problème en remplaçant l'interface nette par une interface à gradient. Au lieu d'assembler directement 100 % d'un matériau avec 100 % d'un autre matériau (en l'occurrence, une céramique et un métal), ils ont introduit progressivement le deuxième matériau dans le premier. Cette approche a permis de créer une transition graduelle entre les deux matériaux, réduisant ainsi les discontinuités de propriétés et minimisant les concentrations de contraintes à l'interface. Cette innovation a considérablement amélioré la résistance et la durabilité du matériau, évitant les problèmes de délaminage observés avec les matériaux composites traditionnels en stratification. L'illustration I-1 présente les phénomènes d'accumulation de contraintes identifiés dans les interfaces des systèmes de protection thermique traditionnels. Elle montre également comment un matériau à gradient de fonction (FGM) peut atténuer ces concentrations de contraintes en modifiant progressivement les propriétés du matériau sur toute son épaisseur, tout en assurant la fonction de barrière thermique souhaitée. Cette transition graduelle permet de répartir les contraintes de manière plus uniforme, évitant ainsi les points de rupture critiques. En 1987, le gouvernement japonais a lancé son

premier projet national de recherche sur les FGM, intitulé « Recherches sur la technologie de base pour le développement des Matériaux à Gradient de propriétés pour la relaxation des contraintes thermiques », également connu sous le nom de « FGM Partie I ». Cette démarche scientifique avait pour objectif central la création de substances structurales perfectionnées, spécialement adaptées aux exigences de protection thermique des technologies aérospatiales émergentes.

Cette initiative a rassemblé 17 centres de recherche, établissements universitaires et sociétés industrielles, unis dans un effort commun pour développer la technologie des matériaux fonctionnellement gradués [7]. Cette initiative a marqué une étape importante dans le développement et l'application des matériaux à gradient de fonction, ouvrant la voie à des solutions innovantes pour les défis techniques liés aux environnements extrêmes



**Figure I 1** Protection thermique [8]

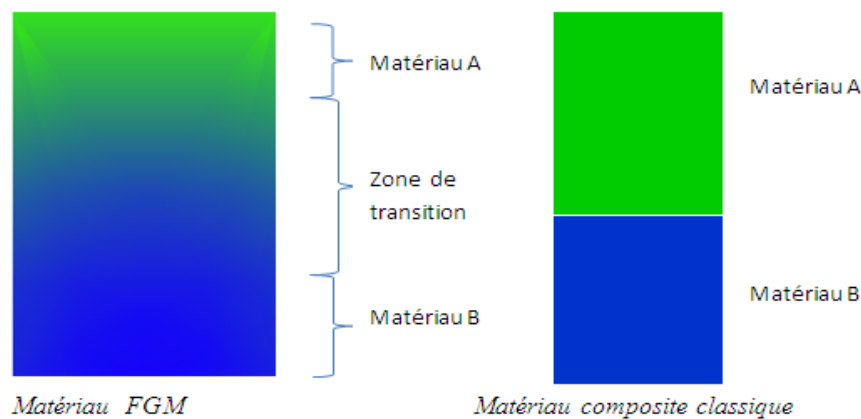
### I.3 Principe des matériaux FGM

Les matériaux composites conventionnels se caractérisent par des frontières distinctes entre les strates ou entre la phase matricielle et les éléments de renforcement. Cette rupture de continuité dans les caractéristiques matérielles génère des accumulations de contraintes significatives, fréquemment responsables de ruptures structurales.

Le principe des matériaux à gradient de fonction (FGM) consiste à éliminer ces frontières macroscopiques en créant un matériau dont les propriétés mécaniques, physiques et chimiques

varient de manière continue, sans discontinuité au sein du matériau (Figure I 2). Cette transition graduelle permet d'obtenir un matériau aux performances supérieures par rapport aux matériaux monolithiques (homogènes) et aux composites traditionnels.

En résumé, le concept des FGM repose sur une distribution spatiale contrôlée des propriétés, suivant une loi définie. Cette approche permet à la fois de tirer parti des caractéristiques optimales de chaque constituant et d'éliminer les changements brutaux de propriétés qui résultent du mélange direct des matériaux. Ainsi, les FGM offrent une solution innovante pour améliorer la durabilité et les performances des matériaux dans des environnements exigeants.



**Figure I 2** Concept d'un matériau à gradient de propriété.

Les matériaux FGM peuvent être conçus sous trois concepts selon leurs emplois désirés ;

- ✓ Matériaux FGM.
- ✓ Revêtement FGM.
- ✓ Liaison FGM.

#### **I.4. Modélisation des caractéristiques des matériaux FGM**

Diverses approches théoriques ont été élaborées afin d'évaluer les caractéristiques effectives des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) et d'améliorer leur rendement dans de multiples domaines d'application. En raison de la nature hétérogène de ces matériaux, les modèles utilisés pour leur analyse sont spécifiques et permettent une analyse approfondie des FGM, en tenant compte de leur complexité structurelle et de leurs propriétés spécifiques. La combinaison d'un métal et d'une céramique est l'une des configurations les plus courantes et les plus étudiées. Cette combinaison permet de profiter des propriétés complémentaires des deux

matériaux, si on considère un matériau FGM à deux phases (métal et céramique), qui varient l'une par rapport à l'autre dans une direction ( $z$ ), la fraction volumique de la phase métal, notée  $V_m$ , et celle de la phase céramique, notée  $V_c$ , satisfont la relation :

$$V_c(z) + V_m(z) = 1 \quad (\text{I.1})$$

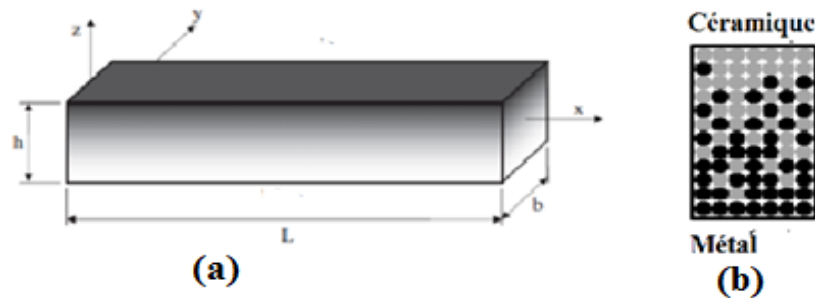


Figure I 3 Géométrie d'une poutre FGM

Une évolution graduelle de la fraction volumique de la phase céramique ou métallique est considérée conforme à la Figure I-3, et la fraction volumique du constituant métallique peut s'exprimer sous forme de fonction dépendante de la coordonnée d'épaisseur  $z$ .

$$V_m(z) = \left( \frac{2Z + h}{2h} \right)^n \quad \text{avec} \quad \frac{-h}{2} \leq Z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{I.2})$$

D'où la fraction volumique à la peau inférieure ( $z = +h/2$ ) est prise égale à 1 et à la peau supérieure ( $z = -h/2$ ) à 0,  $n$  est l'exposant de la fraction volumique ( $0 \leq n \leq \infty$ ) et  $h$  est l'épaisseur totale de la poutre.

Différents modèles d'homogénéisation, tels que Voigt, Mori-Tanaka, Tamura-Tomota-Ozawa (TTO) et le modèle de Viola-Tornabene, ont été recensés par Boggarapu et al [9]. Parmi ces modèles, utilisés pour estimer les propriétés effectives des matériaux FGM, nous pouvons citer :

#### 1.4.1 Propriétés matérielles d'une poutre P-FGM

Dans les travaux de recherche, la modélisation par loi de puissance représente la méthode de référence la plus citée et bénéficiant d'une adhésion générale de la communauté scientifique [9]. Selon ce modèle, les propriétés du matériau varient de manière unidirectionnelle selon une direction spécifique, décrite par l'équation (I 3) :

$$P(z) = (P_c - P_m)V_f + P_m \quad (\text{I.3})$$

$P$  désigne les caractéristiques matérielles, notamment le module d'Young  $E$  ou la masse volumique  $\rho$ .

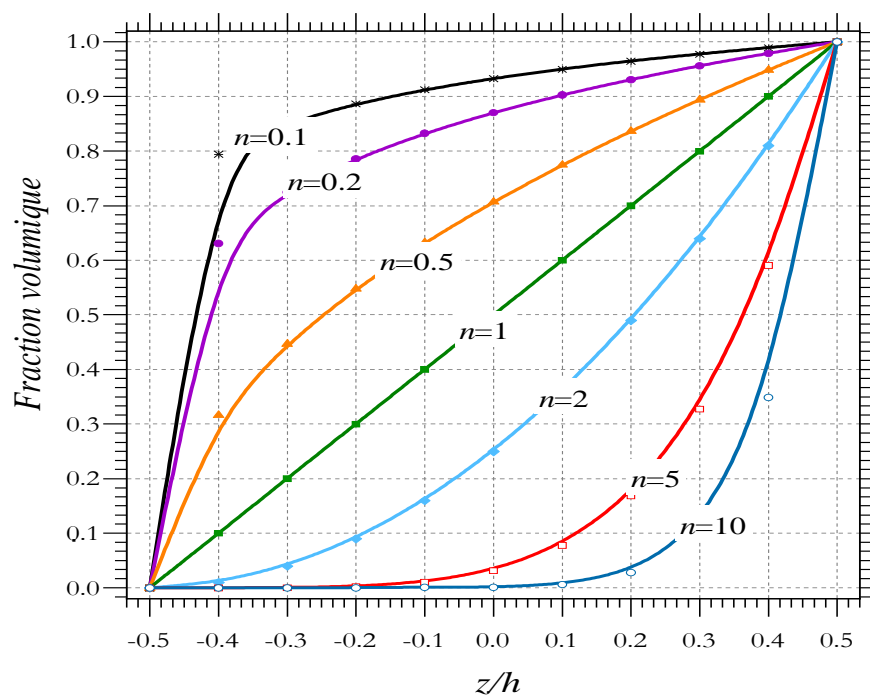
$P_c$  et  $P_m$  désignent respectivement les propriétés des faces céramique et métallique de la structure fonctionnellement graduée, tandis que  $V_f$  correspond à la fraction volumique, définie par l'équation (I-2).

Par conséquent, le module d'élasticité  $E$  et la masse volumique  $\rho$  évoluent de manière progressive dans la direction de l'épaisseur de la structure selon le modèle de distribution en loi de puissance, tel que présenté ci-après :

$$E(z) = (E_c - E_m)V_f + E_m \quad (I.4)$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m)V_f + \rho_m \quad (I.5)$$

Ces équations illustrent comment les propriétés mécaniques et physiques du matériau évoluent progressivement entre les phases céramique et métallique en fonction de la fraction volumique  $V_f$ .



**Figure I 4** Variation de la fraction volumique selon la loi de puissance (P-FGM)

La Figure I.4 illustre l'évolution de la proportion volumétrique au sein d'un élément poutre à gradient fonctionnel (P-FGM). La zone à droite de chaque ligne représente la quantité de métal dans le mélange, et la zone à gauche représente la composante céramique du matériau. Il convient de noter que lorsque  $n$  tend vers zéro, le matériau se rapproche d'une céramique homogène, tandis que lorsque  $n$  tend vers l'infini, le matériau devient entièrement métallique. Pour toute valeur

intermédiaire entre zéro et l'infini, le matériau contiendra à la fois du métal et de la céramique. Lorsque  $n$  est égal à un, la distribution est linéaire, contenant des proportions égales de céramique et de métal

### I.4.2 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM

Dans leurs travaux, Chi et al. [10] ont élaboré deux expressions de loi de puissance afin de modéliser la concentration volumique dans les poutres FGM, garantissant par conséquent une distribution homogène des contraintes à travers l'ensemble des surfaces d'interface. Ces deux relations de loi de puissance se présentent sous la forme suivante :

$$V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + Z}{h/2} \right)^n \text{ pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{I.6})$$

$$V_2(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + Z}{h/2} \right)^n \text{ pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{I.7})$$

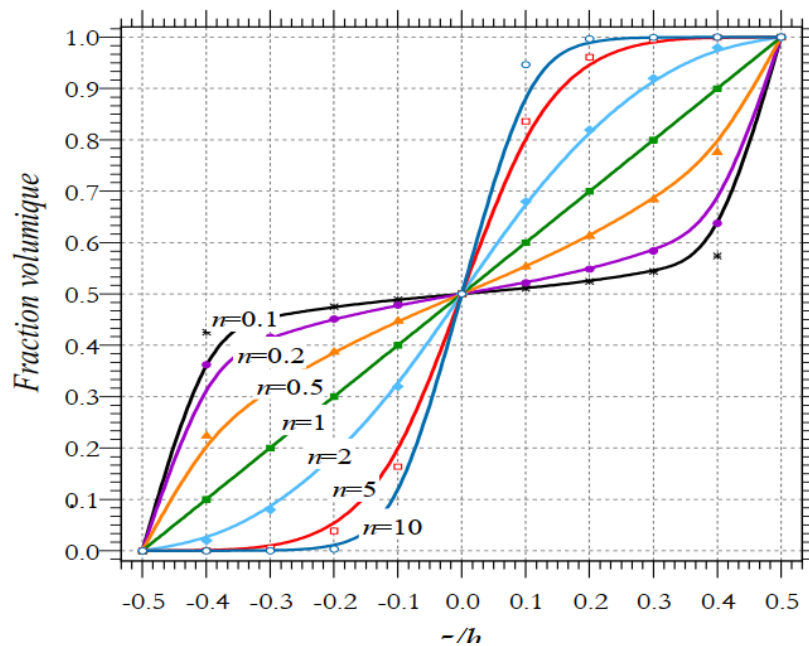


Figure I 5 Variation de la fraction volumique selon la loi S-FGM.

La figure I.5 démontre que l'évolution de la fraction volumique établie par les relations (I.7) correspond aux répartitions de type sigmoïde, et cet élément poutre FGM est désigné sous l'appellation Poutre S-FGM.

Par l'application de la loi des mélanges, les caractéristiques matérielles de la poutre S-FGM sont déterminées au moyen des relations (I.8) et (I.9) :

$$P(z) = (P_c - P_m)V_1(z) + P_m \text{ pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{I.8})$$

$$P(z) = (P_c - P_m)V_2(z) + P_m \text{ pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{I.9})$$

### I.4.3 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM

Une approche exponentielle est couramment adoptée par les spécialistes pour définir les attributs mécaniques des E-FGM [9], cette méthode étant formulée de la manière suivante :

$$P(z) = P_t \cdot e^{B(z+\frac{h}{2})} \quad (\text{I.10})$$

D'où :

$$B = \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{P_b}{P_t}\right) \quad (\text{I.11})$$

Le paramètre  $P(z)$  caractérise la grandeur physique selon la coordonnée  $z$ , alors que  $P_b$  et  $P_t$  correspondent aux caractéristiques de la surface inférieure et de la surface supérieure respectivement. L'évolution du coefficient d'élasticité dans l'épaisseur de la structure poutre E-FGM est présentée par la Figure I.6.

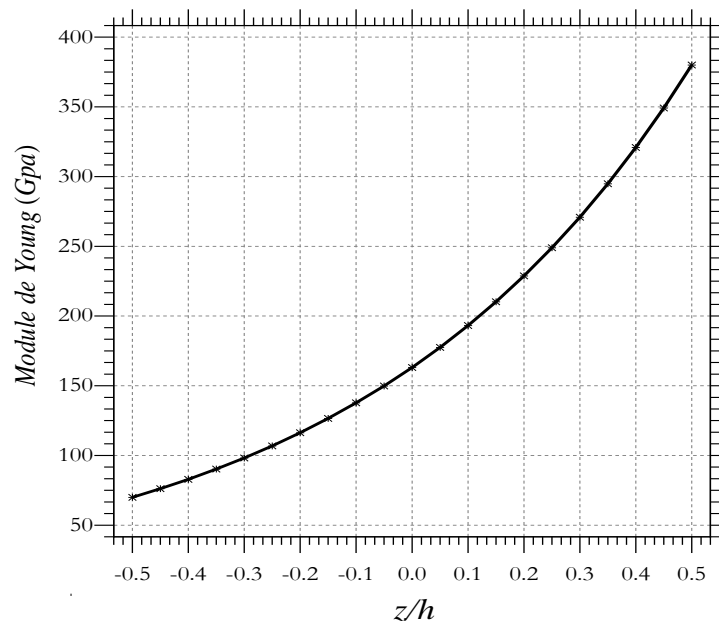


Figure I 6 Variation du module de Young dans une poutre E-FGM.

### I.4.4 Loi de Viola-Tornabene

Ce modèle est principalement employé pour l'analyse des poutres à gradient fonctionnel. Sa formulation offre la possibilité de sélectionner un mélange de matériaux spécifique sur la face inférieure ou supérieure de la poutre. Il se décline en deux catégories : les modèles à trois paramètres et à quatre paramètres, définis respectivement par les équations : (I.11) et (I.12).

$$V_f = \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{h} + b \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^c \right)^p \quad (\text{I.12})$$

$$V_f = \left( \frac{1}{2} - a \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{h} \right) + b \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^c \right)^p \quad (\text{I.13})$$

Les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $p$  définissent la distribution du matériau à travers l'épaisseur de l'élément structural.

#### I.4.5 Loi de Voigt

La règle de mélange de Voigt présente une approche plus directe comparativement à la méthode de Mori-Tanaka. Cette approche théorique facilite la détermination de la propriété (P) des matériaux à gradient de fonction (FGM) en s'appuyant sur les fractions volumiques et les caractéristiques intrinsèques des phases constitutives, tel que démontré par l'équation (I.13).

$$P = \sum_{j=1}^k P_j V_{fj} \quad (\text{I.14})$$

Ce modèle s'applique aux structures FGM unidirectionnelles et multidirectionnelles, mais il ne peut pas être utilisé pour les structures poreuses. La loi de Voigt est largement employée pour décrire les variations spatiales des propriétés thermiques et mécaniques effectives, en raison de sa formulation simple et de sa capacité à fournir rapidement une estimation des modules effectifs pour les FGM.

Cependant, comme la loi de Voigt ne définit pas d'éléments de volume représentatifs dans la structure, elle ne prend pas en compte les interactions entre les inclusions adjacentes [11].

#### I.4.6 Loi de Mori-Tanaka

Contrairement au modèle de Voigt, la méthode de Mori-Tanaka (MTM) prend en compte les interactions entre phases adjacentes à l'échelle microscopique. Ce modèle d'homogénéisation analytique est couramment utilisé pour déterminer les propriétés effectives des composites à gradient fonctionnel biphasés. Ce modèle théorique considère une matrice de base (identifiée par l'indice 1) consolidée par l'incorporation d'inclusions sphériques d'une phase de renforcement (désignée par l'indice 2), réparties de manière aléatoire. Les modules de masse et de cisaillement effectifs du matériau à gradient fonctionnel sont exprimés comme suit :

$$K(z) = K_1 + \frac{V_2(z)(K_2 - K_1)}{1 + (1 - V_2(z)) \frac{3K_2 - 3K_1}{3K_1 + 4K_1}} \quad (\text{I.15})$$

$$G(z) = G_1 + \frac{V_2(z)(G_2 - G_1)}{1 + (1 - V_2(z)) \frac{3G_2 - 3G_1}{3G_1 + f_1}} \quad (\text{I.16}).$$

$$f_1 = \frac{G_1(9K_1 + 8G_1)}{6K_1 12G_1} \quad (\text{I.17})$$

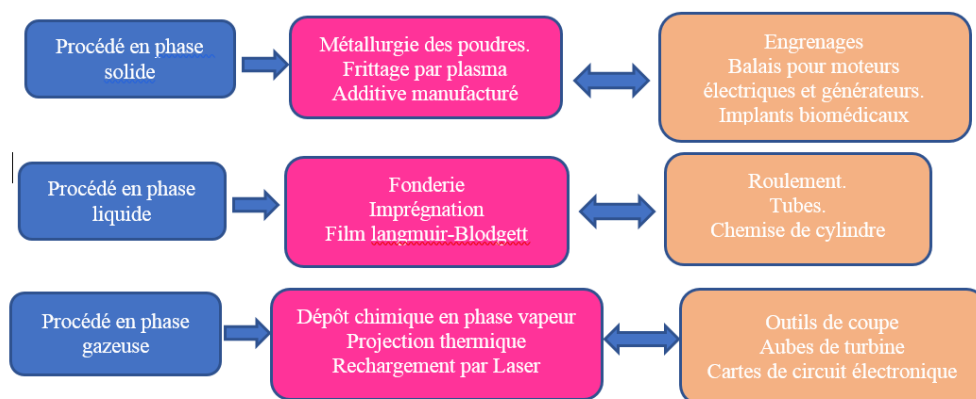
Les paramètres  $K_1$ ,  $G_1$  et  $V_1$  correspondent respectivement au module de masse, le module de cisaillement et la fraction volumique de la matrice de base ; alors que  $K_2$ ,  $G_2$  et  $V_2$  caractérisent les propriétés mécaniques équivalentes et la fraction volumique de la phase de renforcement. Le module d'élasticité longitudinal effectif  $E_f$  ainsi que le coefficient de Poisson  $\nu_f$  peuvent être formulés à l'aide des relations mathématiques (I-18) et (I-19).

$$E_f = \frac{9K(z)G(z)}{3K(z) + G(z)} \quad (\text{I.18})$$

$$\nu_f = \frac{3K(z) - 2G(z)}{3(2K(z) + G(z))} \quad (\text{I.19})$$

## I.5 Techniques de fabrication des matériaux FGM

La pertinence et la viabilité des procédés de fabrication ont été établies selon plusieurs critères déterminants : la nature compositionnelle des matériaux constitutifs, les caractéristiques du gradient fonctionnel recherché et la configuration géométrique des éléments structuraux [12] [13] La Figure I.7 présente une classification systématique des diverses approches technologiques employées dans l'élaboration des matériaux à gradient fonctionnel.



**Figure I.7** Catégorisation des méthodes de fabrication des matériaux FGM [12].[13]

## **I.5.1 Procédés en phase solide**

### **I.5.1.1 Métallurgie des poudres**

La métallurgie des poudres, en tant que méthode de fabrication des matériaux à gradient fonctionnel (FGM), a évolué et a été suivie par diverses techniques d'empilage telles que l'empilage de poudres, la filtration humide, le processus d'empilage par vibration, le processus centrifuge, le processus de formage par pulvérisation de poudre humide, le coulage séquentiel par slip, le coulage par immersion en suspension, etc. La Figure 1.7 illustre de manière synthétique les séquences opératoires caractéristiques du procédé de métallurgie des poudres. Les caractéristiques mécaniques et physiques des matériaux fonctionnellement gradués ont été validées expérimentalement comme étant considérablement dépendantes des variables de traitement, notamment les conditions thermiques, la durée d'exposition et les contraintes mécaniques appliquées [14],[15]. Des défis critiques tels que le gauchissement, l'amorçage et la propagation de fissures, la délamination, etc., ont été abordés lors du processus d'empilage [16]. Une distribution non contrôlée des particules a significativement influencé la défaillance des composants [17].

Le déséquilibre de frittage survenant lors de la métallurgie des poudres a été prévenu grâce à un processus intermédiaire appelé pressage à chaud [18].

La possibilité d'ajuster précisément la constitution matérielle et de contrôler l'architecture microstructurale a établi la technologie de frittage des poudres comme une méthode d'élaboration fondamentale pour la synthèse des matériaux fonctionnellement gradués (FGM). La Figure I.8 présente quelques exemples de FGM naturels et de composites à gradient fonctionnel (FGC) utilisés pour des applications biomédicales via la méthode de métallurgie des poudres. [19]

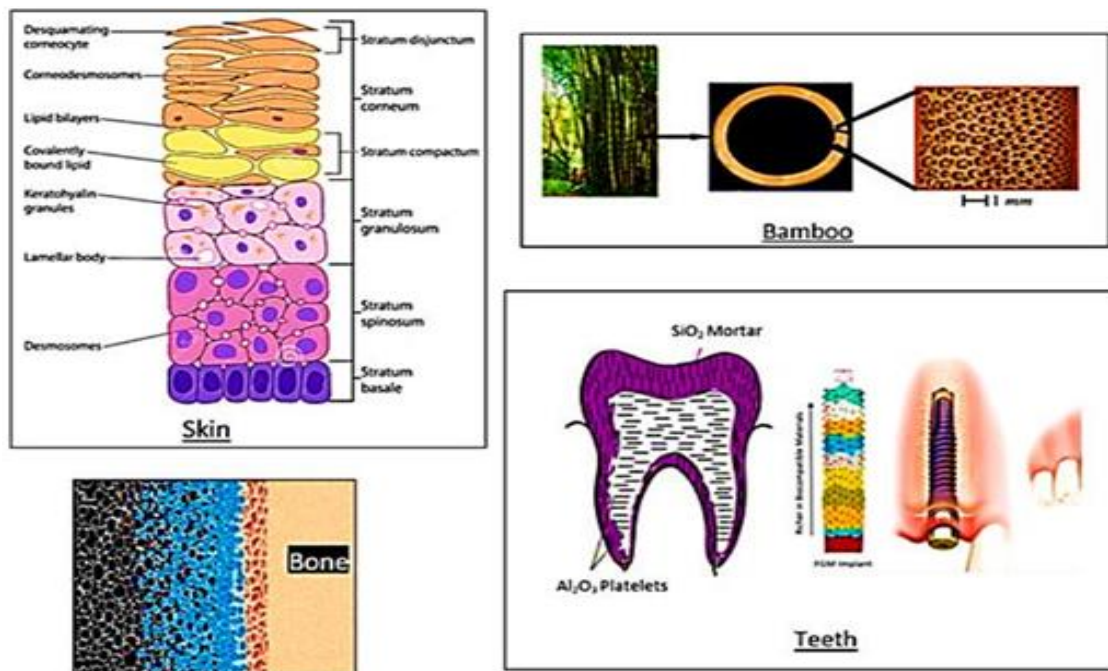


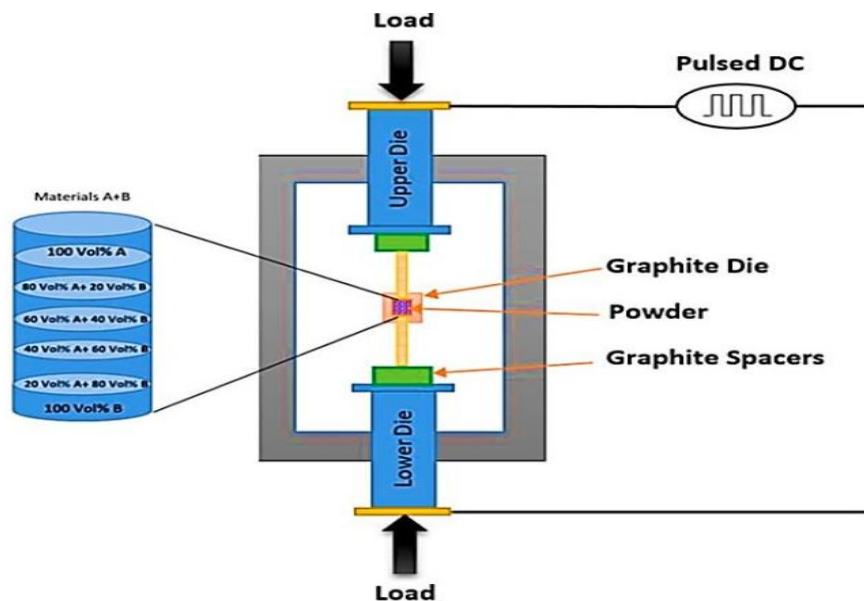
Figure I 8 Matériaux FGM naturels appliqués dans le domaine biomédical.[19]

### I.5.1.2. Frittage par plasma

Le processus de frittage conventionnel a évolué pour donner naissance à une technique de production avancée et performante appelée frittage par plasma projeté, permettant de produire des matériaux à gradient fonctionnel (FGM) de haute qualité. L'activation ionique par mode électrique a favorisé une migration rapide et amélioré le processus de diffusion [20]. La décharge ionique a généré des points locaux de haute température, qui ont ramolli ou fondu la composition pour combler les espaces entre les particules [21]. La figure I.9 représente schématiquement le procédé de fabrication par SPS. La durée de maintien, la vitesse de chauffage, la température et les variations de pression étaient les paramètres les plus influents, impactant directement la mécanique de diffusion lors du frittage [22], [23]. Les études sur les modes de diffusion ont permis de les classer en trois catégories : diffusion surfacique, diffusion en volume massique et diffusion aux joints de grains.

Cette méthode a été largement privilégiée pour fabriquer des matériaux à résistance tribologique et à ténacité améliorées, qui étaient traditionnellement produits par des techniques de production complexes [24]. Ces matériaux obtenus par frittage sont couramment utilisés pour les moules de lentilles de coupe, les buses et les vis de machines. Les systèmes SPS ont permis plusieurs avancées, notamment un frittage rapide, l'utilisation d'additifs limités, un frittage uniforme, une optimisation économique et une meilleure faisabilité par rapport aux méthodes conventionnelles. Ces progrès ont été rendus possibles grâce à des techniques modernes comme

le pressage à chaud et le frittage isostatique à chaud, permettant de développer des matériaux avancés tels que les FGM, les matériaux amorphes et les matériaux cibles.



**Figure I 9** Méthode de fabrication par frittage de plasma projetée [22].

### I.5.1.3 Fabrication additive

La fabrication additive a évolué pour devenir une technique de production efficace pour la fabrication de matériaux à gradient fonctionnel (FGM), bien que les défis liés à leur commercialisation persistent. Ces limitations ont été surmontées grâce à l'utilisation de méthodes hybrides telles que la fabrication additive par friction-malaxage et la fabrication additive par fil et arc [25]. Il a été démontré que cette méthode offre une approche novatrice pour créer des structures hétérogènes et hiérarchiques de matériaux à gradient fonctionnel. Les applications de la FSAM ne se limitent pas à la fabrication additive de métaux, mais s'étendent également à des revêtements hybrides métal-métallique sur des substrats métalliques [26].

Ils sont spécialement utilisés pour des applications d'ingénierie de niche, telles que la réparation structurelle et les opérations d'assemblage pour une large gamme de matériaux comme l'aluminium, le titane, le magnésium, l'acier et les alliages à base de nickel. Ces opérations sont localement confinées à de petites régions pour éliminer les dommages superficiels, les fissures et l'usure. Les principes physiques sous-jacents à l'écoulement et à la déformation des matériaux, à la génération de chaleur, à l'évolution de la température et au couplage thermique restent encore peu explorés. Cependant, leurs excellentes capacités à conférer des propriétés physiques en font une tendance émergente pour les industries aérospatiale, automobile et de défense, où les métaux légers, les matériaux nano structurés, les alliages à haute entropie et les matériaux hétérogènes avec une capacité de charge sont cruciaux.

## **I.5.2 Procédés en phase liquide**

### **I.5.2.1 Moulage par centrifugation**

La fonderie, procédé d'élaboration parmi les plus traditionnels et éprouvés pour la production des matériaux fonctionnellement gradués (FGM), a connu des développements technologiques significatifs afin de satisfaire l'expansion des besoins industriels multisectoriels. Les procédés du moulage ont connu des évolutions technologiques successives et ont engendré un large éventail de techniques d'élaboration, notamment la coulée gravitaire, la centrifugation, la mise en forme par compression, la coulée sous dépression, les procédés composites multicouches, ainsi que les techniques de refonte et de recyclage matière. La polyvalence et la faisabilité commerciale ont établi le moulage par centrifugation comme la technique de moulage de FGM la plus efficace. Les propriétés des composites sont efficacement régulées en contrôlant la composition et la microstructure. Pour les FGM à structures cylindriques, le moulage par centrifugation est principalement privilégié. Ce procédé de moulage peut être classé en deux catégories selon l'axe de rotation : le moulage par centrifugation horizontal et vertical. Les applications des matériaux développés par moulage par centrifugation incluent les tuyaux tubulaires, les rondelles, les bagues, les revêtements cylindriques internes, les coques moulées, etc. Pour fabriquer des composites à matrice métallique en utilisant le procédé de moulage par centrifugation horizontal, la phase de renforcement (particules ou fibres) est mélangée à une matrice métallique en fusion pour obtenir la composition requise (Fig.I.10). Un mélange efficace est assuré par une configuration mécanique appropriée, telle qu'un agitateur mécanique [27]. La gradation souhaitée est obtenue dans l'échantillon composite à l'emplacement requis grâce à une distribution efficace des renforts fonctionnels ou des particules dans les zones concernées. La ségrégation des céramiques ou des particules au sein de la matrice est réalisée par des forces gravitationnelles ou centrifuges [28]. Une autre tactique utilisée pour y parvenir consiste en une sélection appropriée des matériaux, en choisissant des renforts de taille et de densité adaptées [29]. Cela joue un rôle clé, en association avec les forces centrifuges impliquées lors du moulage de composites hybrides ou de la production de FGM doubles, pour obtenir une gradation avantageuse et une solidification contrôlée. Des études approfondies sur la fabrication de FGM par moulage par centrifugation se sont concentrées sur la modélisation numérique avancée du mouvement des particules dans le mélange en fusion et des particules solides en rotation axiale dans le moule [30]. L'impact de la fluidité du milieu matriciel liquide sur la distribution progressive des phases céramiques ou des éléments de renforcement particuliers sous l'action des forces d'inertie rotationnelles a fait l'objet d'investigations approfondies.

La technique de moulage par centrifugation est influencée par des paramètres de production tels que la variance de densité entre la matrice et les particules, l'épaisseur de paroi, le temps de solidification, la taille, la texture et le volume des renforts [31].

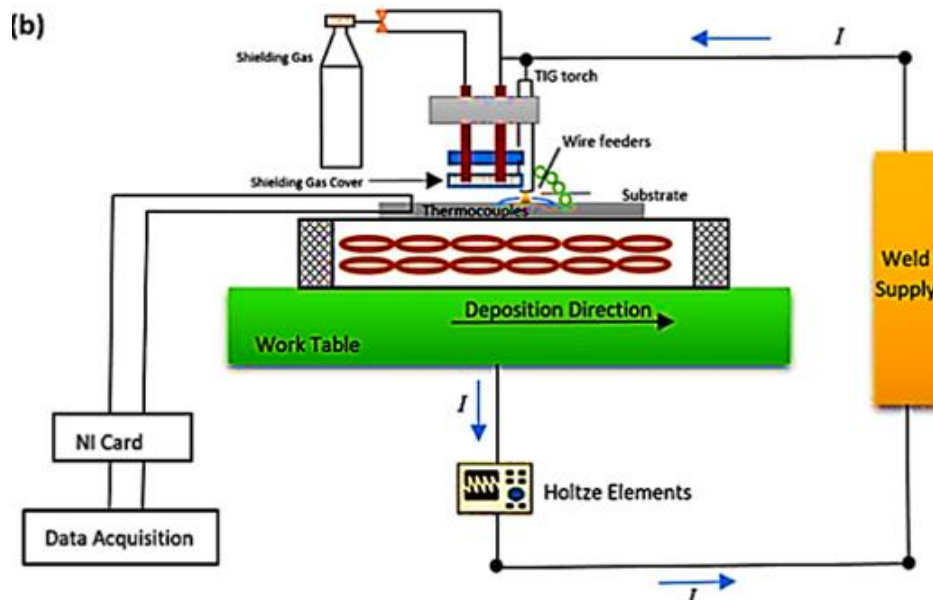
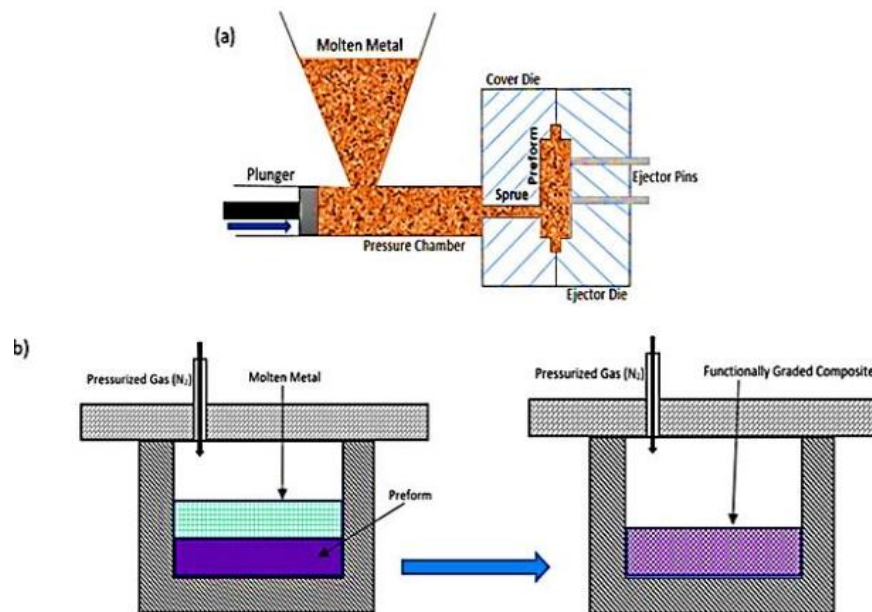


Figure I 10 Méthode de fabrication par moulage. [32]

### I.5.2.2 Infiltration

La technique d'infiltration est un procédé en phase liquide utilisé pour fabriquer des composants à gradient fonctionnel (FGM) moins complexes en termes de taille et de caractéristiques. L'imprégnation efficace de la phase dispersée (céramiques) dans la matrice en fusion pendant le processus de fabrication permet d'obtenir une porosité minimale [33]. La réaction de la préforme avec le milieu du substrat provoque un effet chimique interfacial, en plus de la pression due aux actions capillaires, mécaniques ou gazeuses. Cela aboutit à une structure FGM avec une préparation et une formulation des tailles minimales [34]. La figure I.11 illustre le processus de fabrication par infiltration sous pression et par infiltration sous pression gazeuse.



**Figure I 11** représentation du procédé infiltration sous pression et par infiltration sous pression gazeuse [34]

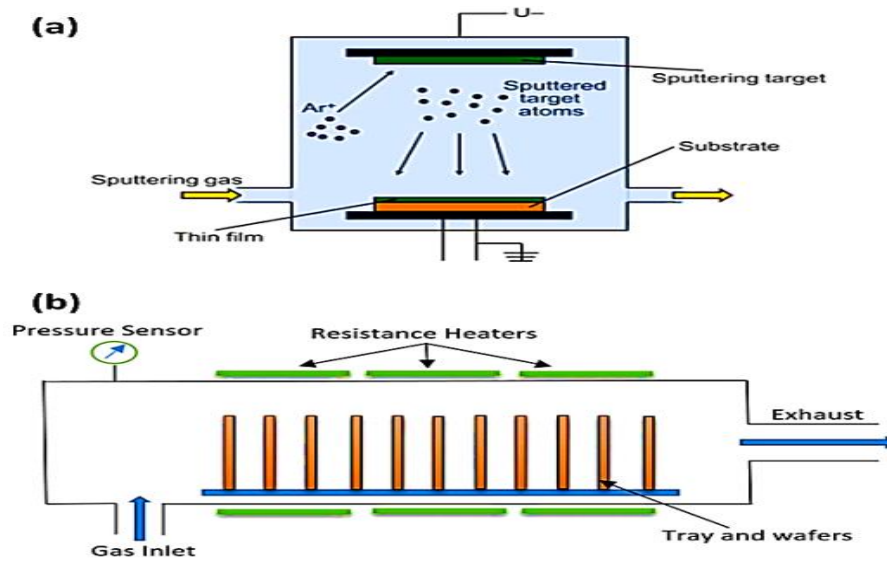
### I.5.3 Procédés en phase gazeuse

#### I.5.3.1 Dépôt en phase vapeur

Les matériaux à gradient fonctionnel FGM fabriqués par la technique de dépôt en phase vapeur explorent principalement l'interaction entre des revêtements céramique-céramique ou céramique-carbone avec des substrats métalliques, produisant ainsi des structures graduées métal-céramique. Les techniques de dépôt en phase vapeur les plus couramment utilisées pour les FGM sont le dépôt physique en phase vapeur (PVD) et le dépôt chimique en phase vapeur (CVD). Ces méthodes consistent à déposer un matériau de revêtement sur un substrat, ce qui permet d'obtenir un excellent affinage de la microstructure et des propriétés graduées efficaces [35].

Le PVD est principalement recommandé pour les applications nécessitant un revêtement de surface mince, car cette méthode est énergivore et coûteuse, notamment en termes de commercialisation [36].

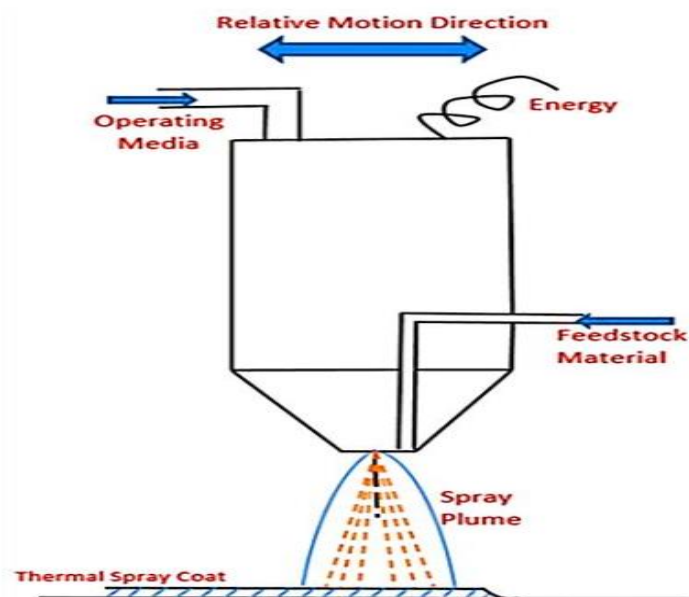
Un FGM métal-céramique a été fabriqué par la technique de PVD réactive en favorisant le dépôt combiné de plus d'un substituant gazeux métallique vaporisé, comme le carbone ou l'azote. Ces atomes gazeux ont réagi avec le substrat métallique en cours de dépôt, entraînant une association contrôlée de métaux avec des carbures ou des nitrures [37]. La figure 12.a illustre schématiquement le processus PVD.



**Figure I 12** Représentation schématique des procédés d'élaboration des FGM par techniques de dépôt en phase gazeuse [38] : (a) Évaporation physique sous vide, (b) Synthèse chimique en phase vapeur.

### I.5.3.2 Projection thermique

La projection thermique a évolué comme une technique de production pour fabriquer des composites à matrice métallique avec des revêtements à gradient fonctionnel. Cette méthode de fabrication offre la possibilité de combiner des phases avec des métaux peu réfractaires à des températures de fusion élevées. Les gouttelettes déposées subissent un étalement superficiel et une solidification rapide pour former des revêtements adhérents. Les propriétés sont largement définies par l'interaction des matériaux d'apport avec le jet de plasma au niveau du substrat [39]



**Figure I 13** Méthode de fabrication des FGM par diffusion thermiques [39]

La qualité du revêtement dépend fortement de nombreux paramètres technologiques, tels que le type de particules déposées, la composition du gaz plasma, le débit, la vitesse de trempe, la distance de décalage de la torche plasma, l'énergie d'entrée, etc. Les techniques de projection thermique les plus couramment utilisées sont la projection plasma et la projection à haute vitesse. La figure 13 illustre le processus de fabrication par projection thermique. La faisabilité des procédés de dépôt et leur flexibilité sont les principaux facteurs qui favorisent le dépôt de revêtements sur une grande variété de matériaux [40].

La figure I.14 présente les différentes classifications des niveaux d'énergie des techniques de projection thermique. Les avancées technologiques, telles que le procédé, la projection plasma en atmosphère inerte et les nouvelles compositions de poudres, ont élargi les possibilités d'application de la projection thermique à la fois aux matériaux monolithiques et aux composites.

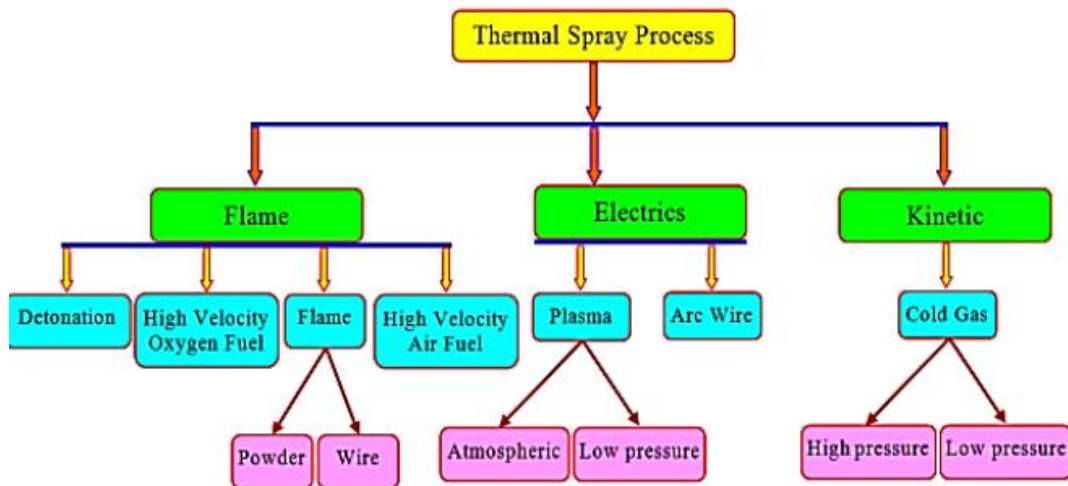


Figure I 14: Classification des niveaux d'énergie du procédé de projection thermique.

### I.5.3.1 Méthode électrochimique :

La méthode de fabrication électrochimique est une technique avancée permettant de créer des gradients chimiques contrôlés pour produire des composants à gradient fonctionnel FGM. Elle repose sur l'optimisation des électrodes et des paramètres expérimentaux, tels que la composition de l'électrolyte et la densité de courant, pour ajuster les propriétés du matériau. Cette méthode permet de surmonter les limitations des revêtements hétérogènes et de produire des composants avec des porosités et des propriétés graduées. Un modèle macroscopique a été développé pour étudier l'impact des paramètres expérimentaux sur les profils de gradation [41]. [42].

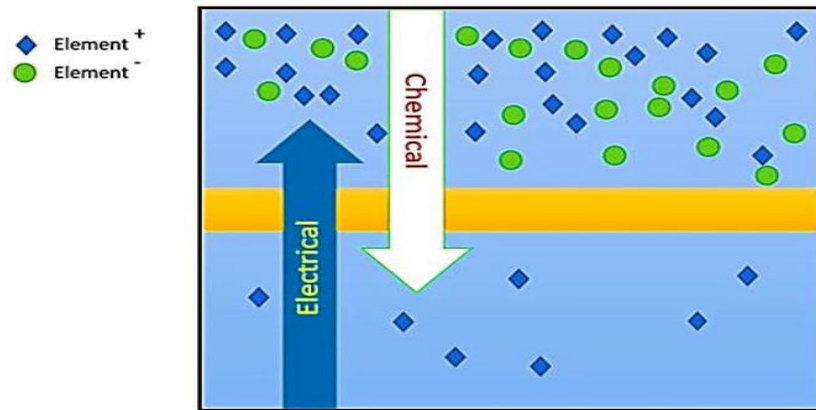


Figure I 15. Gradation électrochimique dans les matériaux à gradient fonctionnel [42].

### I.5.3.2 Revêtement par laser

Le revêtement par laser est une technique moderne utilisée pour fabriquer des matériaux à gradient fonctionnel (FGM) où des matériaux dissimilaires sont fusionnés par l'intermédiaire d'un laser (Fig. I.16).

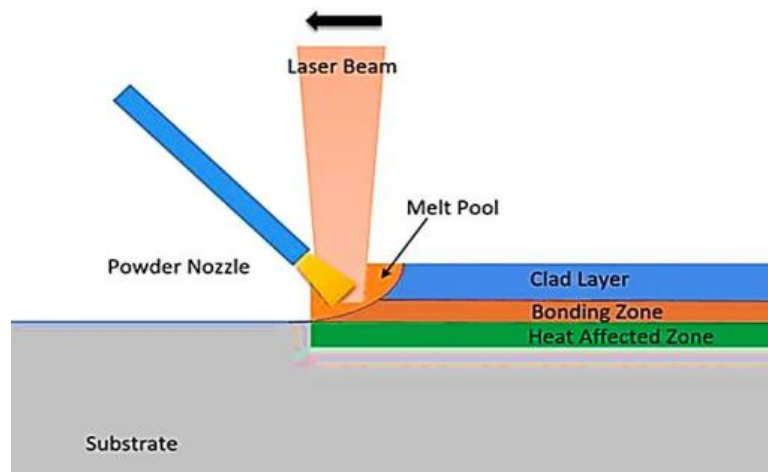


Figure I 16 Illustration du procédé de revêtement par laser [43].

Les structures nécessitant des propriétés mécaniques particulièrement exigeantes privilégient cette technique pour déposer des revêtements épais et denses sur des géométries complexes. Cette méthode est particulièrement efficace lorsqu'il existe une différence significative entre les températures de fusion de la matrice et des matériaux de renforcement.

Cette technique est privilégiée pour appliquer des revêtements gradués sur des formes et structures complexes. Cependant, la méthode de traitement couche par couche présente des limites en raison de son coût de production élevé et des investissements initiaux importants [44]. Cela la rend peu adaptée à la production de masse et moins populaire dans l'industrie.

. Les matériaux FGM fabriqués par cette technique ont élargi leur applicabilité dans les domaines nucléaire et aérospatial [45], principalement grâce à leur élasticité supérieure, leur faible densité et leurs propriétés mécaniques performantes à haute température.

## I.6. Domaines d'application des matériaux FGM

### I.6.1 Secteur militaire

Les matériaux FGM qui réunissent la légèreté, la résistance aux chocs, les rendant idéaux pour les concepts de blindage et les gilets pare-balles. Les FGM à base d'aluminium produits par CVD [46] et les composites fabriqués par métallurgie des poudres sont utilisés pour les roulements haute performance, les composants de réacteurs nucléaires et les outils de coupe grâce à leur dureté, conductivité thermique, résistance chimique et conductivité électrique exceptionnelles [47].



Figure I 17 Applications des matériaux composites.

### I.6.2 Industrie médicale

Les matériaux FGM répondent aux besoins en orthopédie et en dentisterie [48]. Leur biocompatibilité, associée à des performances mécaniques et tribologiques, les rend populaires pour les réparations de cartilage, les prothèses et les vis dentaires. Les composites à base de

titane/zircone fabriqués par métallurgie des poudres sont largement utilisés comme alternatives permanentes aux greffes osseuses [49].

### **I.6.3. Aérospatial**

Les FGM capables de résister à des températures élevées sans compromettre leur résistance mécanique sont utilisés pour les pales de turbine, les fusées et les structures aérospatiales. Les composites en aluminium renforcés avec des céramiques offrent une excellente résistance thermique et à la corrosion, les rendant adaptés aux pièces de moteurs et aux noyaux de fusées [50]. Les aciers inoxydables gradués par fabrication additive sont utilisés pour des applications haut de gamme résistante à la corrosion, comme les tiges de soupapes de moteurs automobiles [51]. De nombreux composants aérospatiaux, notamment les échangeurs de chaleur, les surfaces réfléchissantes, les éléments de revêtement, les aubages et disques de turbomachines, les cônes de pénétration balistique ainsi que les véhicules de rentrée atmosphérique, intègrent massivement les technologies de matériaux fonctionnellement gradués FGM.

### **I.6.4 Industrie automobile**

Certaines entreprises utilisent des FGM renforcés par des céramiques pour les composants de moteurs et autres pièces automobiles, comme les systèmes de freinage et les amortisseurs, en raison de leur excellente endurance et résistance à l'usure [52].

### **I.6.5 Applications marines**

Les mélange acier/aluminium, avec leur résistance mécanique et à la corrosion supérieure, sont utilisés pour les composants marins comme les systèmes de tuyauterie, les colonnes montantes en eau profonde et les bouteilles de plongée [53]. Des composites gradués en acier inoxydable duplex renforcé avec de l'acier au carbone-manganèse, sont utilisés dans des environnements marins corrosifs.

### **I.6.6 Applications en génie civil**

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) trouvent de nombreuses applications prometteuses dans le génie civil, notamment pour la conception de structures intelligentes et durables. Leur composition graduée permet d'adapter localement les propriétés mécaniques, thermiques ou même acoustiques des éléments de construction, ce qui est particulièrement utile pour les ponts, les bâtiments ou les ouvrages d'art soumis à des sollicitations variables. Par exemple, l'utilisation de poutres ou de plaques FGM permet d'optimiser la résistance aux vibrations, au flambement

ou à la fissuration, tout en réduisant le poids des structures. Ces matériaux sont également envisagés pour la protection contre les chocs thermiques ou mécaniques, améliorant ainsi la longévité et la sécurité des infrastructures civiles. Leur capacité à absorber et à dissiper l'énergie fait des FGM des candidats idéaux pour les applications où la résilience et l'adaptabilité sont essentielles.

### **I.7 Défis et innovations récentes dans le domaine des FGM**

Pour la majorité des matériaux à gradient fonctionnel, les caractéristiques mécaniques évoluent principalement selon la direction transversale. Néanmoins, les exigences technologiques contemporaines nécessitent des compositions FGM où les attributs matériels se modifient simultanément selon les orientations transversale et longitudinale. Ces dernières années, des compositions à gradients multidirectionnels ont été conçues et analysées de façon exhaustive. Ces matériaux avancés sont désignés sous l'appellation de matériaux à gradient fonctionnel bidimensionnel (2-D-FGM). La fabrication additive utilisant la fusion laser sélective représente la méthode la plus adaptée pour élaborer ces 2-D-FGM.

Malgré les avancées technologiques considérables accomplies dans le secteur des FGM, plusieurs défis majeurs persistent. L'absence d'une documentation technique complète concernant les paramètres et protocoles d'essais constitue un obstacle important. Les approches d'évaluation traditionnelles s'avèrent inadéquates pour caractériser les performances des FGM contemporains, rendant indispensable l'élaboration de méthodologies d'analyse innovantes.

La majorité des procédés de fabrication des FGM demeurant économiquement prohibitifs, l'établissement de techniques de production économiques permettant la fabrication en série de FGM de dimensions importantes et de géométries complexes représente un enjeu majeur. L'identification des matériaux optimaux correspondant aux applications visées constitue le défi immédiat et prioritaire pour l'évolution technologique future dans ce domaine de recherche.

### **I.8 Conclusion**

Pour conclure, cette section a fourni un aperçu exhaustif des matériaux à gradient fonctionnel (FGM), mettant en évidence leur caractère innovant au sein des matériaux composites de nouvelle génération. Ces structures se caractérisent principalement par leur hétérogénéité intrinsèque et leur aptitude à exhiber des transitions graduelles de caractéristiques physiques dans leur épaisseur, s'opposant ainsi aux matériaux composites traditionnels qui présentent des frontières nettes entre leurs différentes phases. Le parcours historique des FGM

illustre une évolution significative depuis leur conception initiale au Japon durant la décennie 1980, originellement impulsée par les exigences spécifiques du secteur aéronautique nécessitant des matériaux résistants aux variations thermiques importantes. Cette expansion s'est graduellement propagée vers diverses branches industrielles, attestant de la flexibilité et de l'adaptabilité remarquables de ces matériaux novateurs. Les principes de combinaison représentent la base scientifique essentielle pour anticiper et maîtriser les caractéristiques mécaniques des FGM selon la répartition spatiale de leurs composants. Ces formulations mathématiques procurent aux concepteurs les moyens indispensables pour développer des matériaux personnalisés satisfaisant des exigences techniques particulières. La multiplicité des approches de production élaborées, s'étendant de la technologie des poudres métalliques aux méthodes de dépôt par projection thermique, démontre la sophistication technique acquise dans ce secteur. Chaque procédé offre des bénéfices spécifiques en fonction des utilisations envisagées et des performances souhaitées. Pour terminer, la variété des secteurs d'utilisation valide le potentiel remarquable des FGM pour faire face aux enjeux technologiques actuels. Du domaine spatial aux applications médicales, incluant le secteur énergétique et les technologies électroniques, ces matériaux créent de nouveaux horizons pour élaborer des solutions créatives combinant efficacité, résistance et optimisation des fonctionnalités.

# Chapitre II

---

## **Poutres FGM sur fondations de Winkler–Pasternak : théories et modélisation**

## II.1 Introduction

Les poutres occupent une place essentielle dans la conception des structures, car elles assurent la transmission et la répartition des charges, qu'elles soient verticales, horizontales ou mixtes. Pour comprendre leur comportement sous diverses sollicitations, plusieurs modèles théoriques ont vu le jour, chacun reposant sur des hypothèses spécifiques et répondant à des contextes particuliers. Parmi les plus connus, la théorie d'Euler-Bernoulli propose une approche classique, tandis que des modèles plus avancés, comme celui de Timoshenko, tiennent compte des effets de cisaillement, offrant ainsi une analyse plus détaillée.

Parallèlement, les fondations jouent un rôle fondamental en assurant la stabilité des structures en transférant les efforts au sol. Leur comportement est souvent étudié à l'aide de modèles qui simulent la réaction du sol, qu'il soit élastique ou viscoélastique. Le modèle de Winkler, basé sur l'idée que le sol réagit comme une série de ressorts indépendants, est fréquemment utilisé pour les fondations superficielles. Pour des situations où les interactions entre différentes parties du sol sont significatives, le modèle de Pasternak introduit des liaisons supplémentaires entre les ressorts, permettant ainsi une représentation plus fidèle des phénomènes observés.

De plus, l'introduction de modèles viscoélastiques permet de prendre en compte les effets de la viscosité du sol, ce qui s'avère particulièrement pertinent pour étudier les phénomènes de dissipation d'énergie et de relaxation dans les matériaux de fondation. Ces approches sont indispensables pour analyser le comportement des structures soumises à des charges dynamiques ou à des sollicitations prolongées.

Ce chapitre propose donc une analyse des principales théories relatives aux poutres ainsi qu'un examen des différents modèles de fondations, en mettant en lumière leur utilité et leur application dans le contexte de l'ingénierie contemporaine.

## II.2 Historique des théories des poutres

La paternité de la théorie des poutres est généralement attribuée à Galilée, mais des recherches plus récentes suggèrent que Léonard de Vinci l'aurait devancé. De Vinci avait en effet émis l'hypothèse selon laquelle la déformation d'une poutre varie de façon linéaire en s'éloignant

de la fibre neutre. Toutefois, il ne put aboutir à ses calculs, faute de connaître la loi de Hooke. Galilée, de son côté, formula une hypothèse erronée en supposant que la contrainte restait uniformément répartie en flexion. Ce n'est qu'avec Antoine Parent que la répartition correcte des contraintes fut établie.

Ce sont ensuite Leonard Euler et Jacques Bernoulli qui, vers 1750, posèrent les bases de la première théorie véritablement opérationnelle. Daniel Bernoulli, neveu de Jacques, alla plus loin en formulant l'équation différentielle décrivant les vibrations des poutres. À cette époque, le génie mécanique n'était toutefois pas encore reconnu comme une science à part entière, et les travaux des académies mathématiques étaient perçus comme déconnectés des applications concrètes. La construction de ponts et de bâtiments se faisait donc encore de manière empirique. Il fallut attendre le XIX<sup>e</sup> siècle et des réalisations d'envergure comme la Tour Eiffel ou les grandes roues pour démontrer, à grande échelle, la validité de ces théories.

### **II.3 Comportement structurel des poutres composites**

L'étude des structures composites présente des défis considérablement plus importants comparativement à l'analyse des structures réalisées avec des matériaux conventionnels tels que les métaux. Cette complexité provient essentiellement du comportement fortement anisotrope que manifestent ces matériaux au niveau de leurs caractéristiques mécaniques, notamment en termes de rigidité et de résistance, ces propriétés étant principalement orientées selon l'axe des fibres de renforcement. Le développement d'une approche analytique spécifique au comportement des poutres revêt une importance particulière pour deux raisons principales. Premièrement, les poutres constituent des composants structuraux fondamentaux dans l'élaboration de nombreuses constructions et assemblages. Deuxièmement, ces éléments servent d'outils essentiels pour la détermination expérimentale des propriétés mécaniques des matériaux composites, cette caractérisation s'effectuant généralement par le biais d'essais mécaniques réalisés sur des échantillons présentant une géométrie de poutre. Cette double fonction des poutres - en tant qu'éléments structuraux et instruments de caractérisation - justifie pleinement l'attention particulière portée à leur analyse théorique et expérimentale dans le domaine des matériaux composites.

## II.4 Les différentes théories des poutres

Les théories des poutres constituent un outil fondamental en mécanique des structures, car elles permettent de simplifier considérablement l'analyse des solides élancés, c'est-à-dire des éléments dont la longueur est nettement supérieure à leurs dimensions transversales. En général, un solide est considéré comme une poutre lorsque sa longueur est au moins dix fois plus grande que la plus grande de ses dimensions transversales.

Ces théories reposent essentiellement sur la réduction d'un problème tridimensionnel issu de la théorie de l'élasticité à un problème unidimensionnel, en exploitant les symétries et les caractéristiques géométriques des structures élancées. Ainsi, au lieu de chercher à déterminer les champs de contraintes et de déformations en chaque point du solide en trois dimensions, ce qui est souvent complexe, voire impossible analytiquement, les théories de poutres permettent de modéliser le comportement global de la structure à partir de relations simplifiées.

Dans les situations où la solution exacte aux équations générales de l'élasticité n'est pas accessible, ces théories fournissent des solutions approchées mais suffisamment précises pour la majorité des applications d'ingénierie. Elles permettent notamment de déterminer les efforts internes (moments fléchissant, efforts tranchants, efforts normaux) et les déplacements (flèches, rotations) avec un bon degré de fiabilité [54].

Il existe plusieurs modèles théoriques développés en fonction des hypothèses adoptées sur le comportement cinématique et mécanique de la poutre. Parmi les plus utilisées, on peut citer :

### II.4.1 Modèle d'Euler-Bernoulli (CBT)

La théorie d'Euler-Bernoulli, couramment désignée comme l'approche traditionnelle de l'analyse flexionnelle des éléments structuraux, figure parmi les méthodes pionnières établies pour comprendre le comportement mécanique des structures élancées soumises à la flexion. Cette formulation théorique s'appuie sur des postulats simplifiés qui facilitent grandement la résolution du problème structural, tout en garantissant une précision acceptable dans de multiples situations d'ingénierie courante. Cette approche méthodologique transforme un phénomène tridimensionnel complexe en un modèle unidimensionnel plus accessible, permettant ainsi aux ingénieurs de prédire efficacement les déformations et contraintes dans les structures. Les fondements de cette théorie reposent sur l'hypothèse que les sections transversales conservent leur planéité et restent perpendiculaires à l'axe déformé de la poutre. L'efficacité de ce modèle réside dans sa capacité à

négliger certains effets secondaires, notamment les déformations de cisaillement, ce qui simplifie considérablement les calculs sans compromettre significativement la justesse des résultats pour les structures où le rapport géométrique longueur/hauteur est suffisamment élevé. Bien que cette théorie présente des limitations pour certaines configurations géométriques spécifiques, elle demeure largement adoptée dans la pratique professionnelle grâce à sa simplicité d'application et à la fiabilité de ses prédictions dans son domaine de validité.

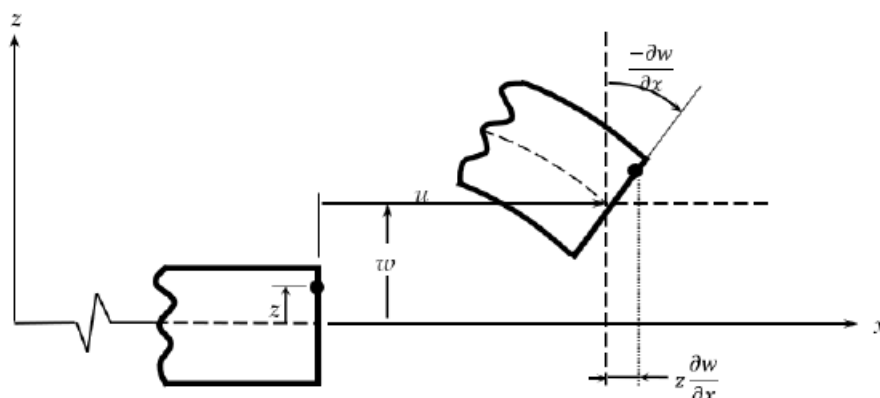
Il est bien établi que cette théorie ne prend pas en compte les effets de la déformation par cisaillement transversal. Par conséquent, elle est principalement applicable aux poutres élancées et minces, où l'effet du cisaillement sur le comportement global est négligeable.

Les hypothèses fondamentales de la théorie d'Euler-Bernoulli peuvent être résumées comme suit :

- Les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées : il n'y a donc pas de variation angulaire entre les sections transversales et l'axe neutre de la poutre lors de la flexion.
- Les sections transversales, qui sont à l'origine perpendiculaires à l'axe central de la poutre, conservent leur planéité et demeurent perpendiculaires à cet axe même après la déformation de la poutre.
- Les sections ne subissent aucune déformation dans leur propre plan : elles conservent leur géométrie plane et intacte.

Sous ces hypothèses, la flexion d'une poutre est gouvernée par une équation différentielle d'ordre quatre, qui relie le moment fléchissant à la courbure de la poutre. Ce modèle est largement utilisé en ingénierie en raison de sa simplicité et de son efficacité pour l'analyse des poutres élancées sous chargements statiques ou dynamiques modérés.

Cependant, lorsque les poutres sont épaisses ou soumises à des sollicitations où les déformations de cisaillement deviennent significatives (comme dans les poutres courtes, composites ou à gradient de propriétés), l'utilisation de théories plus élaborées, comme celle de Timoshenko, devient nécessaire pour obtenir des résultats précis.



**Figure II 1** Cinématique d'Euler Bernoulli.

La fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est :

$$f(z) = 0 \quad (\text{II-1})$$

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres, le déplacement d'un point M est donné par les deux composantes suivantes :

$$U(\mathbf{M}) = \begin{cases} u(x, z) = U^0(x) - z \cdot W^0(z) \\ w(x, z) = W^0(x) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

$U(x, z)$  : représente le déplacement suivant X et  $w(x, z)$  est le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

La rotation autour de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que :

$$W_x^0(x) = \frac{\partial w^0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.3})$$

$u^0(x)$  et  $w^0(x)$  sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z.

Lorsque cette théorie est utilisée pour l'analyse des fréquences naturelles des poutres, les flèches sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de la négligence de la déformation transversale.

#### II.4.2 Modèle de Timoshenko (FSDBT)

La théorie de Timoshenko constitue une extension plus générale et plus complète de la théorie classique des poutres, moyennant l'introduction d'une fonction supplémentaire. Cette approche permet d'obtenir des solutions analytiques plus précises que celles fournies par la théorie élémentaire. Cependant, elle présente encore certaines limites, notamment des

imprécisions localisées au niveau des appuis et dans les zones d’indentation, où des concentrations de contraintes et des champs de déplacements hétérogènes peuvent apparaître.

Ce modèle est particulièrement adapté aux poutres courtes. Il repose sur le principe selon lequel, après déformation, une section plane reste plane, mais n’est plus nécessairement perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre (voir Figure II.2). Cette perte de perpendicularité est attribuée aux effets de cisaillement transversal dans l’épaisseur de la poutre, mis en évidence par Timoshenko. Cette théorie se rapproche d’ailleurs de celle de Reissner- Mindlin pour le cas des plaques épaisses [55].

Lorsque le rapport d’élancement de la poutre est faible, l’effet du cisaillement sur la déformée devient significatif. Dans ce contexte, la fonction associée prend la forme :  $f(z)=z$ .

On considère alors un cisaillement uniforme, et les déformations dues au cisaillement transversal ne peuvent plus être négligées. Cette hypothèse correspond à la théorie de premier ordre, désignée par FSDBT.

Le déplacement selon le modèle de Timoshenko s’écrit ainsi :

$$U(M)= \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - Z. W_x^0(z) + Z. \gamma_{xz}^0(x) \\ W(x, z) = W^0(x) \end{cases} \quad (II.4)$$

$\gamma^0$ :est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre, tel que :

$$\gamma_{xz}^0(x) = w_x^0(x) - \Phi^0(x) \quad (II.5)$$

$\Phi^0(x)$  : Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

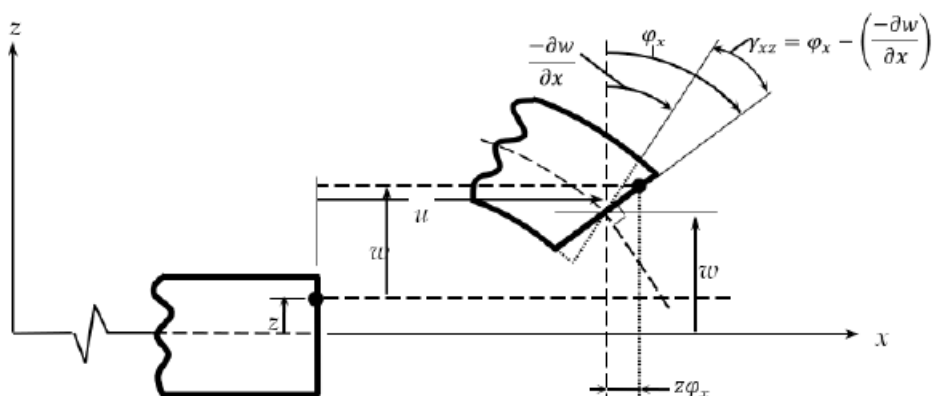


Figure II 2 Cinématique de Timoshenko.

Par définition, la distorsion est exprimée par la relation suivante :

$$\begin{cases} \gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w_x^0(x) + \gamma_{xz}^0(x) + w_x^0(x) \\ \gamma_{xz}(x) = \gamma_{xz}^0(x) \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Sachant que la contrainte du cisaillement vaut :

$$\tau_{xz} = G_{xz} \cdot \gamma_{xz} = G_{xz} \cdot \gamma_{xz}^0 \quad (\text{II.7})$$

Où  $G_{xz}$  représente le module de cisaillement transversal, supposé constant.

Dans ce cadre théorique, les contraintes de cisaillement sont considérées comme uniformes et constantes sur toute l'épaisseur de la poutre. Cela implique qu'elles subsistent même aux bords supérieur et inférieur de la poutre, bien qu'aucune charge extérieure n'y induise directement de cisaillement. Cette incohérence a conduit à l'introduction de coefficients correcteurs destinés à ajuster et maintenir des contraintes et déformations de cisaillement transversales plus réalistes à travers l'épaisseur de la poutre.

Ces coefficients ont été initialement déterminés pour divers types de sections de poutres par Mindlin et Deresiewicz, et de nouvelles expressions ont été proposées par Cowper et Murty pour différentes configurations.

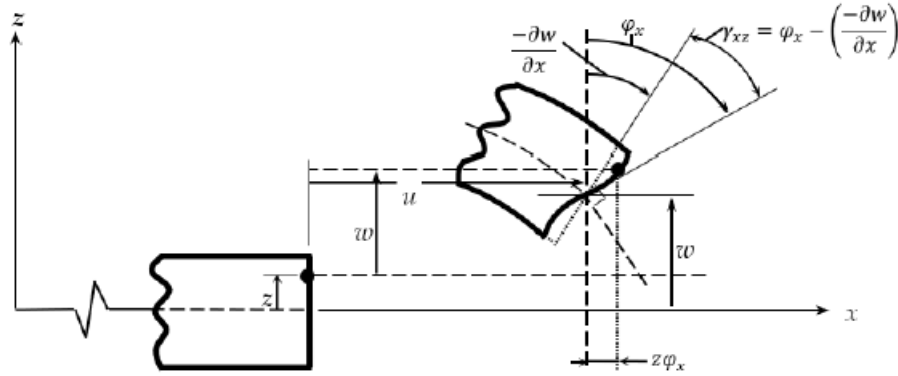
La théorie de Timoshenko se révèle plus complète et plus générale que la théorie classique des poutres, bien qu'elle introduise une fonction supplémentaire. Elle permet de raffiner les solutions analytiques classiques, même si celles-ci demeurent approximatives près des appuis, où apparaissent des concentrations de contraintes et des champs de déplacement hétérogènes.

Enfin, le constat de la présence de contraintes tangentielles non nulles aux bords extrêmes de la poutre, et la nécessité d'utiliser des coefficients correcteurs, ont poussé plusieurs chercheurs à élaborer une nouvelle approche théorique capable d'intégrer ces phénomènes : la théorie d'ordre élevé.

### II.4.3 Théorie d'Ordre Elevé

Dans ce modèle, la répartition des déplacements à travers l'épaisseur de la poutre n'est pas linéaire. Cette approche se révèle plus précise que la théorie du premier ordre, car elle introduit une fonction spécifique permettant de prendre en compte le phénomène de gauchissement. Ce dernier se manifeste lorsque la section transversale de la poutre ne reste plus parfaitement plane après déformation, comme illustré à la figure II.3. La fonction  $f(z)$  sert à

décrire ce gauchissement, tandis que sa dérivée,  $f'(z)$ , correspond à la distribution du cisaillement dans la section.



**Figure II 3** Modélisation cinématique dans la Théorie d'Ordre Élevé

En conséquence, le champ de déplacement prend la forme suivante :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw_x^0(x) + f(z)\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w_x^0 + f'(z)\gamma_{xz}^0(x) + w_x^0(x) \quad (\text{II.9})$$

$$\gamma_{xz} = f'(z)\gamma_{xz}^0(x) \quad (\text{II.10})$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles au niveau des bords extrêmes de la poutre, il est requis que :

$$f'(z)|_{z=\pm h/2} = 0 \quad (\text{II.11})$$

Cette condition essentielle permet, d'une part, d'obtenir une distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre. D'autre part, elle guide le choix approprié de fonctions cubiques qui satisfont la relation (II.10).

L'expression de la fonction de gauchissement  $f(z)$  conduit à plusieurs modèles présentés dans la littérature sur les poutres en FGM :

1) Le modèle Euler-Bernoulli (la théorie des poutres classiques) (CBT):

$$f(z) = 0 \quad (\text{II.12})$$

2) Le modèle de Timoshenko ou bien la théorie du premier ordre (FSDBT):

$$f(z) = z \quad (\text{II.13})$$

3) Le modèle de puissance avec l'approche de (PSDBT) [56], [57], [58] :

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.14})$$

4) Le modèle exponentiel proposé par (ESDBT) [59] :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.15})$$

5) Le modèle trigonométrique (1991) [60] :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.16})$$

6) Le modèle de Mechab (2009) [61], [62] :

$$f(z) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1} \left[ z \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{h}{2} \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad (\text{II.17})$$

7) Le modèle de Panc [63], Kaczkowski [64], Voyiadjis and Shi [65], Shi and Voyiadjis [66]

h : étant l'épaisseur de la poutre.

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.18})$$

#### II.4.4 Effet des contraintes de déformation normale

Dans les différentes théories d'ordre élevé qui comprend les contraintes normales transversales, les termes d'ordre supérieur sont introduits dans les hypothèses cinématiques pour les deux composantes de déplacement.

La modification de la deuxième ligne de l'équation (II-08) permet d'examiner la déformation normale transversale :

$$w(x, z) = w_b(x) + w_s(x, z) + w_{st}(x, z) \quad (\text{II.19})$$

Avec :

- $w_b(x)$  est la composante correspondant à la flexion ;
- $w_s(x)$  est la composante du cisaillement ;
- $w_{st}(x,z)$  est la composante liée à l'effet de déformation.

Les deux premières composantes dépendent uniquement de la coordonnée  $x$ , tandis que la troisième dépend à la fois de  $x$  et  $z$ .

## II.5 Modèles élastiques et viscoélastiques des fondations

Les fondations représentent un élément fondamental des systèmes physiques, en raison de leur utilisation étendue dans de multiples secteurs scientifiques et technologiques, incluant la mécanique structurale, l'ingénierie civile, les technologies électriques, les sciences à l'échelle nanométrique, ainsi que les applications biotechnologiques. Ces éléments attirent considérablement l'attention de la communauté scientifique du fait de leur importance capitale dans de nombreux dispositifs techniques.

L'une des orientations majeures de la recherche consiste à analyser le comportement dynamique de ces systèmes de fondation. En réalité, ces structures jouent un rôle déterminant dans la protection des constructions exposées à des mouvements vibratoires. L'intégration de fondations dans tout assemblage structural s'avère effectivement nécessaire pour prévenir les ruptures mécaniques et garantir la stabilité de l'ensemble.

Cette importance cruciale des fondations dans la préservation de l'intégrité structurelle explique pourquoi leur étude constitue un domaine de recherche particulièrement actif, où les ingénieurs et chercheurs développent continuellement de nouvelles approches pour optimiser leur performance et leur fiabilité dans diverses conditions d'exploitation.

De ce fait, trois critères principaux doivent être évalués par les ingénieurs et les chercheurs lors de la conception d'un système soumis à toutes sortes d'oscillation :

- Un modèle continu pour la structure doit impérativement être développé ;
- Il est également nécessaire de développer un modèle mathématique pour les fondations du système ;
- Enfin, il faut établir un modèle complet du système structurel dans son ensemble, en prenant en compte l'interaction entre la fondation et la structure qui y est posée.

En fonction de l'application du système structurel considéré, plusieurs modèles de fondations ont été proposés par les chercheurs. Le modèle initial, et le plus simple, a été introduit par Winkler [67]. Le principal inconvénient de ce modèle est son incapacité à représenter le comportement viscoélastique des matériaux. Par conséquent, des éléments viscoélastiques ont été ajoutés aux modèles de fondation dérivés du modèle de Winkler. Différentes configurations ont été envisagées pour les éléments élastiques et viscoélastiques des fondations, menant à l'amélioration du modèle initial de Winkler par la proposition de nouveaux modèles tels que ceux de Kelvin–Voigt, Maxwell, Zener, Poynting-Thomson et Burger [68], [69]. Dans ces modèles, les éléments des fondations réagissent de manière indépendante à toute charge externe, et ils réagissent de façon uniforme, que la charge appliquée soit uniforme ou non. De plus, la déformation de la couche supérieure de la fondation  $y$  est discontinue.

Les modèles à deux paramètres relient les extrémités supérieures des éléments de la fondation par une couche de liaison. De ce fait, les fonctions force–déplacement de ces types de fondations sont continuées (car les extrémités supérieures des éléments sont reliées par une couche de cisaillement). Les principaux exemples de ces modèles sont ceux de Filonenko-Borodich [70], Hetenyi [71], Pasternak [72], Vlasov [73], et Reissner [74]. Les modèles de Filonenko–Borodich, Hetenyi et Pasternak sont basés sur celui de Winkler, tandis que ceux de Vlasov et Reissner s'appuient sur la théorie du modèle continu élastique [75].

Selon le type d'étude ou de la structure considérée, tous ces modèles peuvent être vus comme continus ou discrets. Les fondations multicouches ont été proposées pour modéliser des structures à couches multiples. Elles sont particulièrement utilisées dans les études de vibrations de voies ferrées, d'interaction sol-structure, ou de vibrations transmises par le sol. En outre, des modèles de fondations partielles ou discontinues peuvent être utilisés pour les structures qui ne reposent que partiellement sur une fondation. Par ailleurs, certaines approches ont été développées pour renforcer les fondations contre les tassements, en ajoutant des éléments de renforcement. Enfin, les fondations flottantes sont conçues pour isoler les vibrations transmises par le sol.

Les fondations mentionnées ci-dessus présentent un comportement identique en compression et en traction. En réalité, ce n'est pas le comportement observé dans la plupart des cas pratiques. C'est pourquoi des modèles sans traction ou bilinéaires ont été suggérés [76], [77]. Dans ces modèles, des séparations peuvent survenir entre la structure supportée et la fondation, ce qui entraîne une réponse non linéaire même si la nature de la fondation est linéaire. Le

comportement des matériaux soumis à de grandes déformations et à des charges lourdes a poussé les chercheurs à adopter des modèles non linéaires [78]. En général, la réponse des matériaux est non linéaire sous charges de traction ou de compression ; néanmoins, pour les petits déplacements, les modèles linéaires restent suffisamment précis. Le modèle non linéaire est donc plus pratique et plus réaliste [79]. En outre, Les incertitudes liées aux paramètres des fondations (telles que raideur, amortissement) peuvent entraîner des vibrations aléatoires [80]. [81].

Les structures modélisées comprennent des poutres, des cordes, des membranes, des plaques ou des coques posées sur des fondations. Le cas de la poutre sur fondation est souvent utilisé pour modéliser les voies ferrées, les ponts, les chaussées et les pistes d'atterrissage. Parmi ces applications, la voie ferrée est le sujet le plus répandu [82], [83].

### II 5.1. Modèle de Winkler

Winkler a modélisé pour la première fois une poutre d'Euler–Bernoulli sur une fondation élastique, en la représentant comme une voie ferrée. [67] Ce modèle repose sur l'hypothèse que la réaction de chaque point de la fondation est proportionnelle au déplacement de ce point, et que les ressorts sont linéaires et indépendants. La force de réaction de la fondation est donnée par :

$$p(x, t) = k \cdot w(x, t) \quad (\text{II.20})$$

Où  $w(x, t)$  est le déplacement vertical et  $k$  la raideur des ressorts linéaires. Ce modèle donne donc une réponse identique en compression et en traction. Ce comportement mécanique est qualifié de bilatéral (fondation bilatéral)

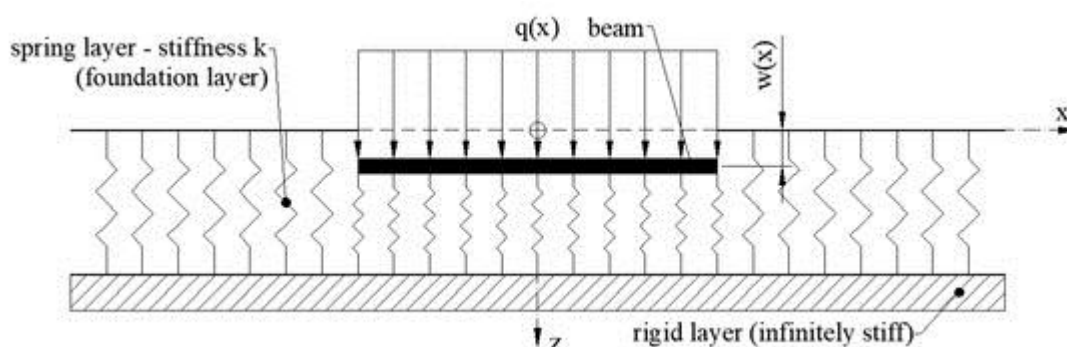


Figure II 4 Modèle élastique de Winkler.

Le modèle à un paramètre de Winkler est le plus simple. Toutefois, en raison de la diversité des matériaux et des sols (sols granulaires, argileux, saturés, sous pression, etc.), des paramètres supplémentaires sont nécessaires pour représenter le comportement réel d'une

fondation. Les modèles suivants sont donc des extensions du modèle de Winkler, obtenues en ajoutant des éléments pour mieux représenter la réalité physique.

### II 5.2. Modèle de Kelvin–Voigt

L'un des défauts majeurs du modèle de Winkler est l'absence d'éléments viscoélastiques [69]. Le modèle de Kelvin–Voigt inclut ce comportement en ajoutant des ressorts en parallèle avec des amortisseurs. Ce modèle introduit donc les effets de viscoélasticité dans le modèle élastique de Winkler. La relation force–déplacement est donnée par :

$$P(x, t) = kw(x, t) + c\dot{w}(x, t) \quad (\text{II.21})$$

Où  $C$  représente l'amortissement visqueux. Ce modèle a été largement utilisé, par exemple pour des analyses non linéaires de fréquences, des formulations d'éléments finis pour poutres infinies, ou encore dans l'étude de la propagation d'ondes. [84], [85].

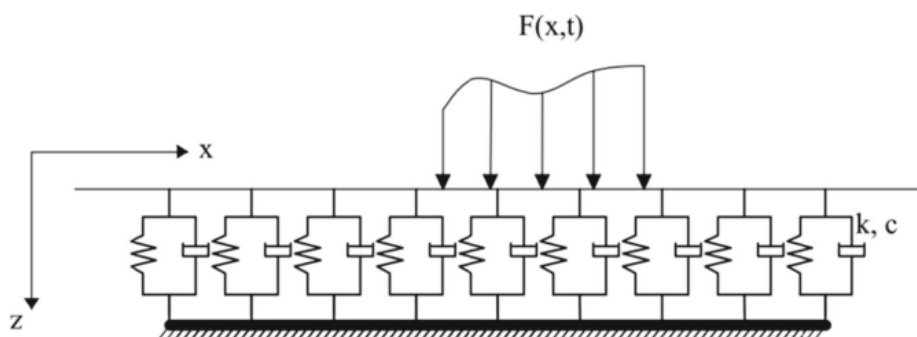


Figure II 5 Modèle de Kelvin–Voigt.

### II 5.3. Modèle de Maxwell

Dans ce modèle, les ressorts et amortisseurs sont disposés en série. La force de réaction peut être obtenue par les relations suivantes : [69]

$$\begin{cases} p(x, t) = k\Delta_1(x, t) = c\dot{\Delta}_2(x, t) \\ w(x, t) = k\Delta_{tot}(x, t) = k\Delta_1(x, t) + c\Delta_2(x, t) \end{cases} \quad (\text{II.22. a})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{k} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{c} p(x, t) \quad (\text{II.22. b})$$

Ce modèle a été utilisé pour représenter des assemblages de contreventements et d’amortisseurs visqueux dans des bâtiments de grande hauteur, ou encore pour modéliser des plaques viscoélastiques. [86]

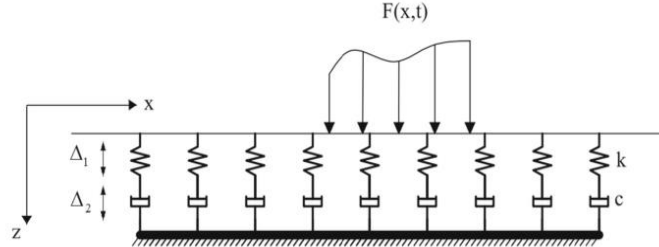


Figure II 6 Modèle de Maxwell.

### II 5.4 Modèle de Zener

Le modèle de Zener combine en parallèle les modèles de Winkler et de Maxwell. [69] La relation force-déplacement est :

$$\begin{cases} p(x, t) = k_2 \Delta_2(x, t) + k_1 \Delta_{S1}(x, t) = k_2 \Delta_2(x, t) + c_1 \dot{\Delta}_{d1}(x, t) \\ w(x, t) = \Delta_{tot}(x, t) = \Delta_{S1}(x, t) + \Delta_{d1}(x, t) = \Delta_2(x, t) \end{cases} \quad (II.23.a)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \frac{\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \frac{k_1}{c_1} p(x, t) - k_1 k_2 w(x, t)}{k_1 + k_2} \quad (OI.23.b)$$

Il est utilisé pour décrire le comportement dynamique de poutres sur fondation, notamment à l’aide de formulations en espace d’état.

Le modèle de Zener combine en parallèle les modèles de Winkler et de Maxwell [69], La relation force-déplacement est exprimée comme suit :

$$\begin{cases} p(x, t) = k_2 \Delta_2(x, t) + k_1 \Delta_{S1}(x, t) = k_2 \Delta_2(x, t) + c_1 \dot{\Delta}_{d1}(x, t) \\ w(x, t) = \Delta_{tot}(x, t) = \Delta_{S1}(x, t) + \Delta_{d1}(x, t) = \Delta_2(x, t) \end{cases} \quad (II.24.a)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \frac{\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \frac{k_1}{c_1} p(x, t) - k_1 k_2 w(x, t)}{k_1 + k_2} \quad (II.24.b)$$

Il est utilisé pour décrire le comportement dynamique de poutres sur fondation, notamment à l’aide de formulations en espace d’état.

**II.5.5 Modèle de Poynting–Thomson**

Ce modèle repose sur l’assemblage de trois éléments ressort/amortisseur. Il existe plusieurs configurations possibles. Deux d’entre elles sont décrites. [87]

- Première configuration :

$$\begin{cases} p(x, t) = k_1\Delta_1(x, t) = k_2\Delta_2(x, t) + c_2\dot{\Delta}_2(x, t) \\ w(x, t) = \Delta_{tot}(x, t) = \Delta_1(x, t) + \Delta_2(x, t) \end{cases} \quad (II.25.a)$$

$$\Rightarrow k_1 \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \frac{k_1 k_2}{c_2} w(x, t) = \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \frac{k_1 + k_2}{c_2} p(x, t) \quad (II.25b)$$

- Deuxième configuration :

$$\begin{cases} p(x, t) = c_1\dot{\Delta}_1(x, t) = k_2\Delta_2(x, t) + c_2\dot{\Delta}_2(x, t) \\ w(x, t) = \Delta_{tot}(x, t) = \Delta_1(x, t) + \Delta_2(x, t) \end{cases} \quad (26.a)$$

$$\Rightarrow k_2 \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + c_2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \frac{c_2}{c_1} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \frac{c_1 + k_2}{c_2} p(x, t) \quad (26.b)$$

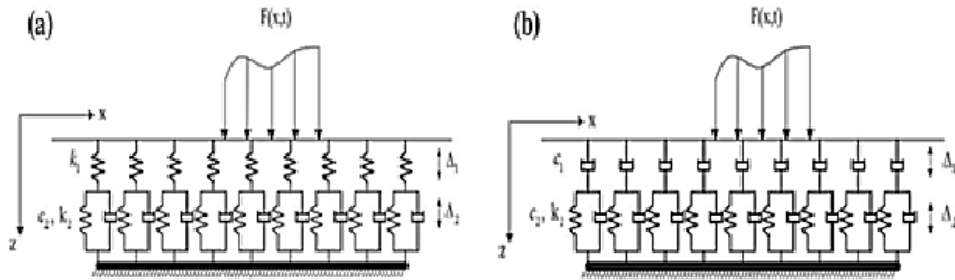


Figure II 7 Modèle de Poynting–Thomson type (a) et type (b).

**II.5.6 Modèle de Burger**

Ce modèle combine quatre éléments (ressorts et amortisseurs), généralement en série-parallèle, en associant un modèle de Kelvin–Voigt avec un modèle de Maxwell [69]. Une relation typique est donnée par la l'équation suivante :

$$\begin{cases} p(x, t) = k_1 \Delta_2(x, t) = c_1 \dot{\Delta}_2(x, t) = k_2 \Delta_3(x, t) + c_2 \dot{\Delta}_3(x, t) \\ w(x, t) = \Delta_{tot}(x, t) = \Delta_1(x, t) + \Delta_2(x, t) + \dot{\Delta}_3(x, t) \end{cases} \quad (\text{II } 27.\text{a})$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left( \frac{k_1}{c_1} + \frac{k_1}{c_2} + \frac{k_2}{c_2} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{k_1 k_2}{c_1 c_2} \right] p(x, t) = \left[ \frac{k_1 k_2}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} + k_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] w(x, t) \quad (\text{II } 27.\text{b})$$

Ce modèle a montré de très bons résultats pour simuler le comportement temps-dépendant des milieux continus soumis à des charges cycliques. [68]

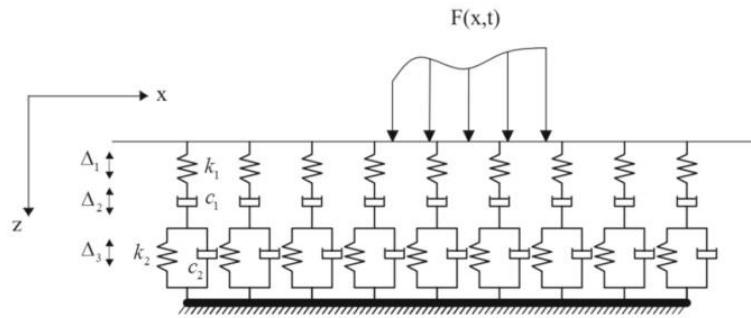


Figure II 8 Modèle de Burger.[68]

Dans les modèles à un seul paramètre (comme ceux de Winkler, Kelvin–Voigt, Maxwell, Zener, Poynting–Thomson et Burger), chaque ressort ou amortisseur réagit indépendamment, ce qui peut produire des résultats peu réalistes en pratique. Pour remédier cette insuffisance, les modèles à deux paramètres ont été introduits, dans lesquels une couche supérieure lie les extrémités des ressorts, assurant ainsi la continuité du déplacement et de la force de réaction sur l’ensemble de la fondation [88].

### II.5.7 Modèle de Filonenko–Borodich

Dans ce modèle, la réaction des ressorts n’est pas indépendante : les extrémités des ressorts sont connectées par une membrane tendue et sans masse [70], L’équation d’équilibre dans la direction verticale z, qui donne la réaction de la fondation, est :

$$p(x, t) = kw(x, t) - T \frac{\partial w(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{II.28})$$

Où T est la tension de la membrane. Ce couplage permet de modéliser la continuité entre les points voisins.

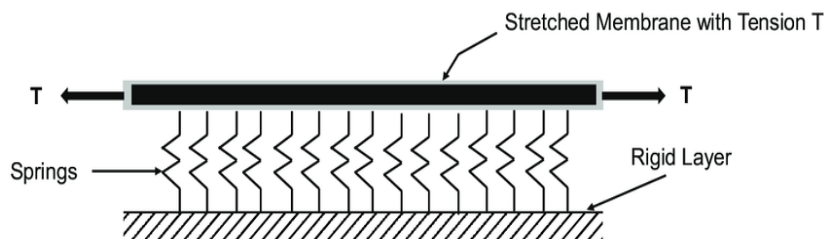


Figure II 9 Modèle de Filonenko–Borodich.

### II.5.8 Modèle de Hetenyi

Dans cette configuration, les ressorts ne réagissent pas de façon indépendante. Une poutre d’Euler–Bernoulli (dans les problèmes 1D) ou une plaque mince (dans les problèmes 2D) relie les extrémités des ressorts du modèle de Winkler. Cette poutre ou plaque est supposée sans masse et réagit uniquement par flexion. [71]

La relation force - déplacement est donnée par l’équation suivante :

$$(x, t) = k \cdot w(x, t) + K_1 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{II.29})$$

Où  $k = EI$  c'est la rigidité en flexion de la poutre ou  $K_1 = D$  est la rigidité en flexion [71]

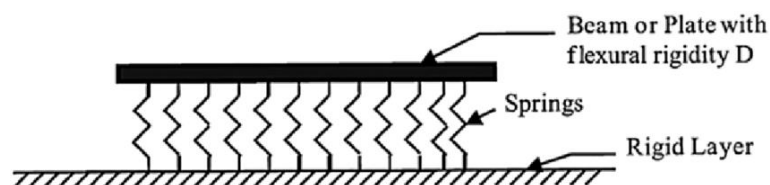


Figure II 10 Modèle de Modèle de Hetenyi.

### II.5.9 Modèle de Pasternak

#### II.5.9.1 Modèle élastique de Pasternak

Dans le modèle de Pasternak, une couche de cisaillement relie les extrémités supérieures des ressorts, voir la figure II.11. Cette couche ne se déforme qu’en cisaillement latéral.

L’équation de réaction de la fondation est donnée par la formule suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xz} = G \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x} \\ \tau_{yz} = g \frac{\partial \omega(x, z)}{\partial y} \end{array} \right. \quad (\text{II.30.a})$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{xz} = G \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x} \\ \tau_{yz} = g \frac{\partial \omega(x, z)}{\partial y} \end{array} \right. \quad (\text{II.30.b})$$

Où  $G$  représente le coefficient de viscosité lié aux déformations de cisaillement.  
L'équation régissant le modèle de Pasternak à deux paramètres est [72] :

$$p(x, t) = kw(x, t) - G\nabla^2 w(x, t) \quad (\text{II-31})$$

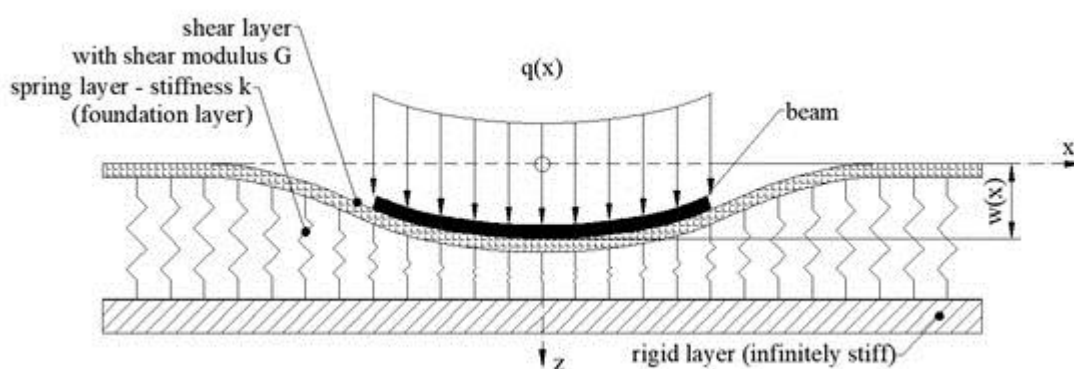


Figure II 11 Modèle élastique de Pasternak.

### II.5.9.2 Modèle viscoélastique de Pasternak

Dans cette modélisation, l'approche de la fondation Pasternak est adaptée pour intégrer des déformations viscoélastiques. Cette extension consiste à associer des composants visqueux linéaires aux éléments élastiques du modèle de fondation, selon des agencements en parallèle et/ou en série [88]. Cette combinaison permet de générer plusieurs configurations, chacune correspondant au comportement mécanique spécifique attendu de la fondation.

L'une de ces configurations est représentée sur la Figure II.12. Elle inclut une couche de cisaillement viscoélastique intégrée aux extrémités supérieures des ressorts et des amortisseurs, illustrant ainsi l'interaction entre élasticité et viscosité.

La relation force-déplacement dans la direction de  $z$  de cette configuration est la suivante [88], [89]

$$p(x, t) = kw(x, t) + c \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} - \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w(x, t) \quad (\text{II.32})$$

$\mu$  : est le coefficient de la viscosité lié aux déformations de cisaillement des éléments verticaux de la fondation.

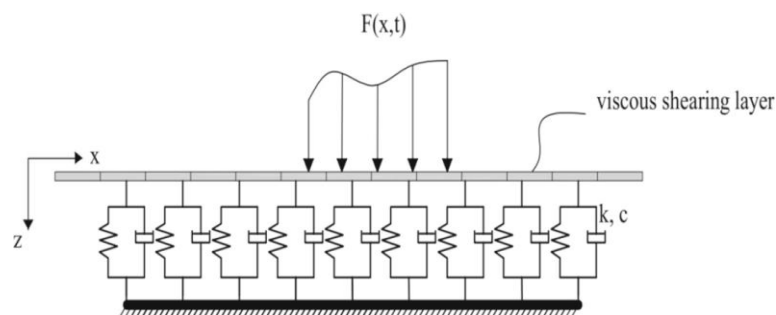


Figure II 12 Modèle viscoélastique de Pasternak.

### II.5.9.3 Modèle de Pasternak généralisé

Kargarnovin et Younesian [90], ont proposé un modèle viscoélastique généralisé de Pasternak, en y ajoutant un moment transmis par la fondation :

$$M(x, t) = K\phi \cdot \phi(x, t) + C\phi \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} \tag{II.33}$$

Où  $k_\phi$  et  $c_\phi$  sont respectivement la raideur et l'amortissement en rotation.

La relation force-déplacement dans la direction de z de cette configuration est la suivante ;

$$p(x, t) = k \cdot w(x, t) + c \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} - \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w(x, t) \tag{II.34}$$

$\mu$ : est le coefficient de la viscosité lié aux déformations de cisaillement des éléments verticaux de la fondation.

Le modèle viscoélastique de Pasternak est très utilisé par les chercheurs dans leurs travaux qui ont pour objet analyser le comportement des plaques reposant sur des fondations déformables, citons par exemple :

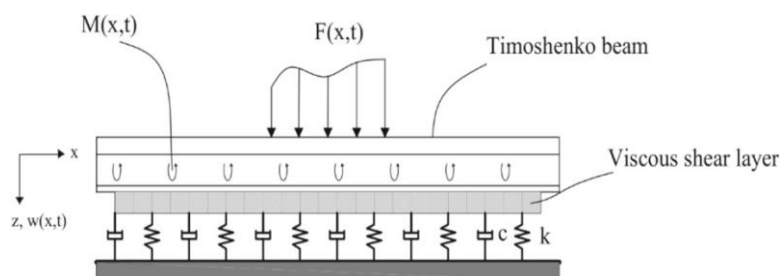


Figure II 13 Modèle généralisé de Pasternak.[90]

### II.5.10. Modèle de Kerr

Le modèle de Kerr [88], proposé comme une évolution du modèle de Pasternak, introduit une poutre encastrée dans un milieu élastique (Fig. II.14). Il utilise trois paramètres indépendants :  $k_1$  et  $k_2$  (raideurs), et  $G$  (rigidité en flexion).

L'équation gouvernante est :

$$\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) p(x, t) - \frac{G}{k_1} \nabla^2 p(x, t) = k_2 w(x, t) - G \nabla^2 w(x, t) \quad (\text{II.35})$$

Ce modèle est souvent utilisé pour représenter le comportement de sols flexibles.

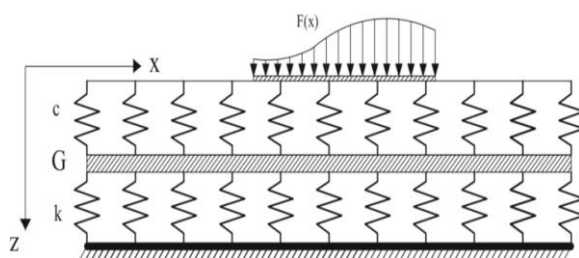


Figure II 14 Modèle de Kerr.[88]

### II.5.11. Modèle de demi-espace

Le modèle de demi-espace est utilisé pour représenter des milieux infinis ou semi-infinis, selon la théorie du contact de Hertz. Il s'applique lorsque la surface de contact est petite par rapport aux dimensions du système. [91]

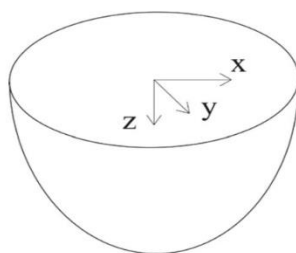


Figure II 15: système de fondation en demi-espace. [91]

L'équation de mouvement dans la direction  $x$ , pour un milieu élastique isotrope, peut-être s'écrit

$$(\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 u_x + F_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (\text{II.36})$$

Avec  $\theta$  la variation volumique relative,  $u_x(x, y, z, t)$  le déplacement,  $\rho$  la densité,  $\lambda$  et  $G$  la constante de Lamé, et le module de cisaillement respectivement.

Ce modèle reste complexe à utiliser, ce qui a conduit au développement d'alternatives plus simples comme les modèles de Vlasov et Reissner.

### II.5.12. Modèle de Vlasov

Il s'agit également d'un modèle à deux paramètres. Il simplifie le modèle continu élastique en imposant certaines contraintes sur la couche supérieure [92]. Le déplacement vertical est modélisé par :

$$u(x, z) = 0, \quad w(x, z) = \omega(x) \cdot h(z) \quad (\text{II.37})$$

Où  $h(z)$  représente la variation du déplacement verticale.

Pour une variation linéaire ; la fonction  $h(z)$  s'écrit :

$$h(z) = 1 - \frac{z}{H} \quad (\text{II.38})$$

Après utilisation des relations de contrainte-déformation et du principe des travaux virtuels, la relation force-déplacement devient :

$$p(x) = kw(x) - k_1 \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \quad (\text{II.39})$$

D'où :

$$k = \frac{E_0}{(1 - \nu_0^2)} \int_0^H \left( \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \right)^2 \partial z \quad \text{et} \quad k_1 = \frac{E_0}{2(1 + \nu_0^2)} \int_0^H (h(z))^2 \partial z \quad (\text{II.40})$$

Et

$$E_0 = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \quad \text{et} \quad \nu_0 = \nu(1 - \nu^2) \quad (\text{II.41})$$

Avec  $k$  et  $k_1$  sont à déterminer par intégration des propriétés du milieu. Ce modèle est particulièrement utile pour modéliser les interactions sol-structure.

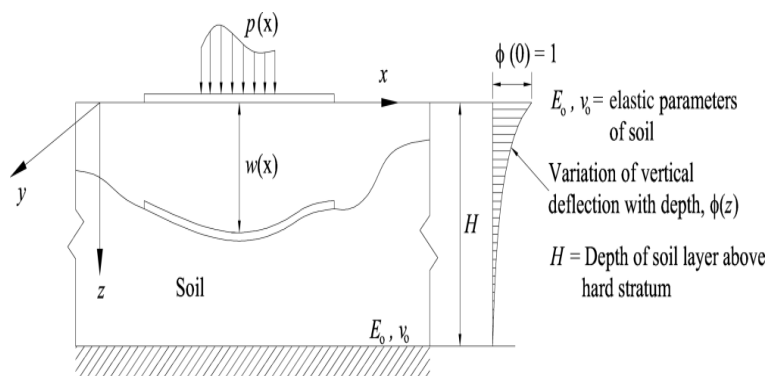


Figure II 16 Modèle de Vlasov.

### II.5.13. Modèle de Reissner

Reissner [93] a proposé un modèle continu de fondation basé sur une couche de matériau élastique isotrope d'une épaisseur  $H$  et d'étendue latérale infinie, reposant sur une base rigide et soumise à une charge de surface normale,  $p(x,y)$ . Pour résoudre la relation entre  $p(x,y)$  et le tassement de surface  $w$ , Reissner a suggéré de négliger les contraintes dans le plan  $xy$  (c'est-à-dire que  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  sont supposés être nuls), et les déplacements horizontaux aux surfaces supérieure et inférieure de la fondation sont nuls [94]

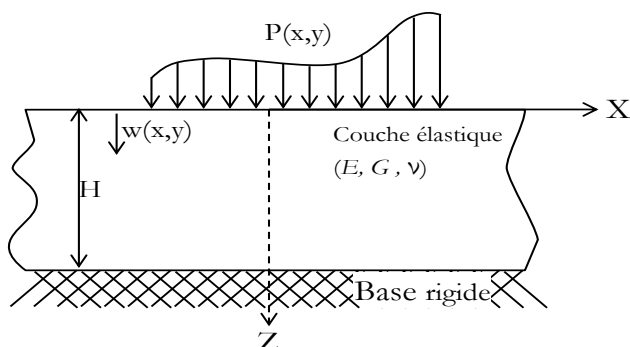
$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (\text{II.42})$$

Après cette simplification mathématique, on obtient la solution analytique du modèle de continuum simplifié de Reissner donnée par ([92]) :

$$p(x, t) - \frac{c_2}{4c_1} \nabla^2 p(x, t) = c_1 w(x, t) - c_2 \nabla^2 w(x, t) \quad (\text{II.43})$$

D'où 
$$c_1 = \frac{E}{H}; \text{ etc } c_2 = \frac{HG}{3} \quad (\text{II-44})$$

$H$  est la profondeur de la fondation,  $E$  et  $G$  sont le module de Young, et le module de cisaillement respectivement.



**Figure II 17** Modèle de continuum simplifié de Reissner.

Une conséquence de l'hypothèse de (II.42), est que les contraintes de cisaillement dans les plans  $zx$  et  $zy$  sont indépendantes de la coordonnée  $z$  et donc ils sont constantes sur toute la profondeur de la fondation pour un point de surface donné  $(x,y)$ . Par conséquent, ce modèle peut être appliqué uniquement pour étudier la réponse près de la zone de contact de chargement et non pas pour étudier les contraintes en profondeur de la fondation [88].

## II.6 Conclusion

Ce chapitre constitue une revue systématique et approfondie des modèles théoriques relatifs aux fondations élastiques et viscoélastiques dans les systèmes oscillants. Il examine de manière détaillée l'évolution des théories d'analyse des poutres, depuis les approches classiques, telles que les modèles d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko, jusqu'aux développements les plus récents, incluant notamment les théories des poutres d'ordre élevé.

Parallèlement, une analyse des modèles de fondation est menée, couvrant un spectre allant des formulations élémentaires (modèle de Winkler) aux configurations les plus sophistiquées (modèles à plusieurs paramètres et les fondations continues).

Cette étude bibliographique exhaustive permet d'établir un cadre théorique rigoureux pour l'analyse des vibrations des poutres sur supports viscoélastiques. Elle offre non seulement une synthèse des connaissances actuelles, mais identifie également les limites des modèles existants et justifie ainsi les approches proposées dans cette thèse.

## **CHAPITRE III**

---

### **Caractérisation dynamique des poutres FG supportés par des milieux viscoélastiques**

### III.1. Introduction

Ce chapitre établit une investigation analytique approfondie du comportement dynamique libre de structures poutre comportant des discontinuités, supportées par une fondation viscoélastique de type Winkler-Pasternak, en exploitant les concepts de la théorie quasi-tridimensionnelle avancée. La variation des caractéristiques matérielles s'effectue perpendiculairement à la longueur de la poutre selon une distribution de type puissance, et la rigidité de l'élément fissuré se quantifie proportionnellement à la perte de surface de sa section droite. Une étude paramétrique détaillée est également réalisée pour montrer l'influence de différents paramètres sur le comportement vibratoire d'une poutre FG fissurée reposant sur une fondation viscoélastique. Cette approche combine efficacement une modélisation théorique perfectionnée quasi-tridimensionnelle et l'étude des conséquences de l'endommagement ainsi que de l'hétérogénéité des caractéristiques physiques, offrant une analyse exhaustive du comportement vibratoire des poutres à variation de propriétés sur supports viscoélastiques.

## III.2. Analyse théorique du comportement vibratoire des poutre FGM

### III.2.1. Configuration géométrique

Considérons une poutre à gradation fonctionnelle installée sur une fondation viscoélastique, définie par ses dimensions caractéristiques :  $L$  pour la longueur,  $b$  pour la largeur et  $h$  pour l'épaisseur. Le repère de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  forme la base des développements mathématiques, les axes  $x$  et  $y$  étant alignés sur le centre de la poutre. La poutre FGM est simplement supportée à ses deux extrémités, comme on peut le voir sur la figure III-1

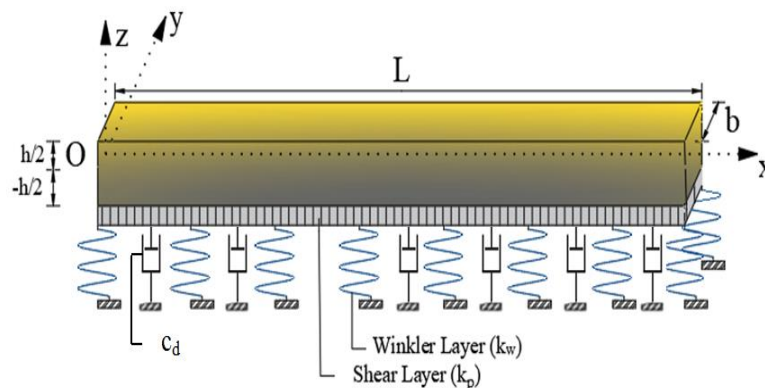


Figure III 1 Configuration d'une poutre FGM reposant sur une fondation viscoélastique.

### III.2.2. Propriétés des matériaux

La poutre FGM se compose d'une combinaison de deux matériaux métalliques et céramiques dont les propriétés varient avec l'épaisseur selon une distribution en loi de puissance des fractions volumétriques des constituants des deux matériaux [95] selon la formulation suivante :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (\text{III.1})$$

Où le coefficient de gradation  $p$  caractérise la transition des propriétés physiques dans le sens de l'épaisseur de l'élément de la poutre FG, incluant le module de rigidité  $E$  et la masse volumique  $\rho$ , avec  $c$  et  $m$  symbolisant les phases céramique et métallique. Il convient de noter que lorsque  $p$  est égal à 0, la poutre est entièrement en céramique ; cependant, lorsque  $p$  est égal à un nombre infini, la poutre est entièrement en métal. Reconnaisant l'influence dominante du module d'Young sur les propriétés mécaniques des poutres à gradient par rapport au coefficient de Poisson, cette investigation considère ce coefficient comme une constante [96], [97]. L'analyse présuppose la constance de la fraction volumique totale des phases métallique et céramique vérifiant  $V_m + V_c = 1$ , et la gradation céramique respecte une fonction puissance caractérisée par l'équation :

$$V_c = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (\text{III.2})$$

Dans ces conditions, la masse volumique ( $\rho$ ) et le module élastique ( $E$ ) de l'élément structural gradué se formulent comme indiqué ci-après :

$$E(z) = (E_c - E_m) \left( 0,5 + \frac{h}{z} \right)^p + E_m \quad (\text{III.3})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left( 0,5 + \frac{h}{z} \right)^p + \rho_m \quad (\text{III.4})$$

### III.2.3 Fondation viscoélastique

La poutre FGM repose sur un support élastique stratifié. La liaison entre les deux strates s'effectue via une interface de cisaillement Pasternak, et la couche primaire comprend des ressorts Winkler découplés accompagnés d'éléments amortisseurs. La modélisation générale des bases viscoélastiques Winkler-Pasternak s'exprime selon [98] :

$$R_e = K_w \cdot w - k_s \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + c_d \frac{\partial w}{\partial t} \quad (\text{III.5})$$

Où  $R_e$  représente la force de réaction du substrat viscoélastique,  $k_w$  symbolise le coefficient de proportionnalité désigné comme module de réaction du milieu,  $k_s$  correspond au paramètre de la strate de cisaillement et  $C_d$  est le coefficient d'amortissement.

### III.2.4 Cinématiques et déformations

Les hypothèses suivantes forment la base du champ de déplacement quasi-3D dans cette investigation :

$$u = u_0 + u_b + u_s \quad (\text{III.6})$$

La composante de déplacement  $u$  (dans la direction  $x$ ) intègre les termes d'extension  $u_0$ , de flexion  $u_b$  et de cisaillement  $u_s$ , où  $u_0$  désignant le déplacement du plan neutre de la structure selon l'axe  $x$  et  $w$  représentant les contributions combinées de cisaillement et de flexion du déplacement transversal.

Le déplacement transversal se décompose en éléments de flexion ( $w_0$ ) et d'étirement selon l'épaisseur ( $g(z)\phi_z(x,t)$ ), Le champ de déplacement vérifiant ces hypothèses s'établit par [99] :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\phi(x, t) \quad (\text{III.7})$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) + g(z)\phi_z(x, t) \quad (\text{III.8})$$

La distribution des contraintes de cisaillement transversal se définit par l'intermédiaire de la fonction de forme  $f(z)$ , choisie de manière à respecter les conditions aux limites de contrainte libre sur les faces externe et interne de la structure ; de ce fait, l'application d'un facteur correctif de cisaillement s'avère inutile.  $\phi_z$  désigne une fonction de déplacement inconnue traduisant l'impact de l'étirement transversal, et  $g(z)$  correspond à une fonction de forme calculée à partir des conditions de contrainte nulle aux surfaces limites supérieure et inférieure de la poutre.

En considérant que  $\phi = k \int \theta(x) dx$ , la représentation du champ de déplacement pour le modèle actuel peut être formulée de manière plus concise par les expressions [61] :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k \cdot f(z) \int \theta(x, t) dx \quad (\text{III.9.a})$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) + g(z)\phi_z(x, t) \quad (\text{III.9.b})$$

Où  $u_0$  est désigné le déplacement du plan médian de la poutre dans la direction  $x$ ,  $w_0$  et  $\theta$  représentant respectivement les contributions de flexion et de cisaillement associées au déplacement dans la direction transversale.

La fonction de forme se construit à partir de l'expression polynomiale donnée par [100] :

$$f(z) = z \left( \frac{5}{4} - \frac{5z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{III.10})$$

L'analyse montre que le système de déplacement défini dans les expressions (III.9a) et (III.9b) comprend exclusivement quatre variables non définies ( $u_0$ ,  $w_0$ ,  $\theta$  et  $\phi_z$ ). Les termes de déformation non négligeables résultant de la formulation du champ de déplacement selon les expressions (III.9a) et (III.9b) correspondent aux relations :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z.k_x^b + f(z).k_x^s, \quad \gamma_{xz} = g(z).\gamma_{xz}^0, \quad \varepsilon_z = g'(z)\varepsilon_z^0 \quad (\text{III.11})$$

Où

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = \frac{-\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad k_x^s = k\theta \quad (\text{III.12})$$

$$\gamma_{xz}^0 = k \int \theta dx + \frac{\partial \phi_z}{\partial x}, \quad \varepsilon_z^0 = \phi_z$$

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III.13})$$

De plus, une approche de type Navier sera utilisée pour résoudre les intégrales énoncées dans les équations susmentionnées, qui peuvent être exprimées comme suit :

$$\int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{III.14})$$

Où les valeurs des coefficients se définissent en fonction de la nature spécifique de la méthode de résolution appliquée au problème. Par suite de cette considération, les variables  $A'$ ,  $k$  s'expriment selon les formulations :

$$A' = \frac{-1}{\alpha^2}, \quad k = \alpha^2 \quad (\text{III.15})$$

Et

$$\alpha = \frac{m\pi}{L} \quad (\text{III.16})$$

Les déformations de cisaillement transversal et normal sont prises en compte dans les relations contrainte-déformation comme suit :

$$\sigma_x = Q_{11}\varepsilon_x, \quad \tau_{xz} = Q_{55}\gamma_{xz} \quad (\text{III.17})$$

Et

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{13} & 0 \\ Q_{13} & Q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

Avec  $(\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{xz})$  désignent les termes de contrainte et de déformation. En appliquant les propriétés constitutives définies par la relation (III.4), les termes de rigidité  $Q_{ij}$  se définissent comme suit :

$$\begin{aligned} Q_{11}(z) = Q_{33}(z) &= \frac{(1-\nu)E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)} ; \\ Q_{13}(z) &= \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)} ; Q_{55}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

### III.2.5 Équations du mouvement

L'utilisation du principe énergétique de Hamilton conduit à la formulation des équations de mouvement régissant les phénomènes vibratoires libres des éléments poutre FGM défectueux installés sur des substrats viscoélastiques. Cette approche se matérialise analytiquement par :

$$\int_0^t (\delta U + \delta U_{ef} - \delta K) dt = 0 \quad (\text{III.20})$$

$\delta U$  Représente la variation énergétique de déformation de la poutre ;  $\delta U_{ef}$  correspond à la variation énergétique de déformation du substrat viscoélastique et  $\delta K$  symbolise la variation de l'énergie cinétique.

#### III 2.5.1 Énergie de déformation

La variation énergétique de déformation de l'élément poutre se caractérise par la formulation :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\ &= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_x^s \delta k_x^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0] dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

Où,  $\sigma$  et  $\varepsilon$  ; définissent les vecteurs contrainte-déformation  $N_i^i$ ,  $M_i^i$  et  $S_i^i$  désignent les solutions intégrales calculées.

$A$  identifie la surface supérieure et les résultantes des contraintes appliquées s'énoncent selon :

$$(N_x, M_x^b, M_x^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_x dz, \quad N_z = \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) \sigma_z dz, \quad S_{xz}^s = \int_{-h/2}^{h/2} g \tau_{xz} dz \quad (\text{III.22})$$

### III 2.5.2. Énergie de déformation de la fondation viscoélastique

La variation de l'énergie de déformation au niveau de la fondation viscoélastique s'établit selon :

$$\delta U_{ef} = \int_A (K_w - k_p \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_d \frac{\partial}{\partial t}) w dA \quad (\text{III.23})$$

### III 2.5.3. Énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique peut être exprimée par :

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \\ &= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] + J_0 (\dot{\phi}_z \delta \dot{w}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{\phi}_z) \right. \\ &\quad - I_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + J_1 \left( (kA') \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) \right) \\ &\quad + I_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + K_2 \left( (kA')^2 \left( \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) \right) \\ &\quad \left. - J_2 \left( (kA') \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) \right) + K_0 (\dot{\phi} \delta \dot{\phi}) \right\} dA \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Le point (.) indique la dérivation par rapport à la variable temps ;  $\rho(z)$  est la densité de masse de la poutre et  $(I_i, J_i, K_i)$  sont les inerties définies par :

$$\begin{aligned} (I_0, I_1, I_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \\ (J_0, J_1, J_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} (g, f, zf) \rho(z) dz \\ (K_0, K_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} (g^2, f^2) \rho(z) dz \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

En utilisant les relations généralisées déplacement-déformation (Éqs.III.9 et III.12) et les relations contrainte-déformation (III.18), et en appliquant la méthode d'intégration par parties et en combinant les coefficients de  $\delta u_0$ ,  $\delta w_0$ ,  $\delta \theta$  et  $\delta \phi$  dans l'équation. (III.20), les équations du mouvement peuvent être exprimées de la manière suivante :

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + J_1 kA' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \quad (\text{III.26a})$$

$$\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + k_w w_0 - k_p \left( \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) + c_d \left( \frac{d^2 w_0}{dt^2} \right) = J_0 \ddot{\phi} - I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \right) - I_2 \left( \frac{d^2 \dot{w}_0}{dx^2} \right) + J_2 \left( kA' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \right) \quad (\text{III.26b})$$

$$\delta \theta : -k_1 M_x^s + kA' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} = -J_1 \left( kA' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \right) - K_2 \left( (kA')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \right) + J_2 \left( kA' \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} \right) \quad (\text{III.26c})$$

$$\delta \phi : \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} - N_z + N g_0 \frac{\partial^2 (w_0 + g_0 \phi_z)}{\partial x^2} = J_0 \ddot{w}_0 + K_3 \ddot{\phi} \quad (\text{III.26d})$$

Après avoir inséré l'équation (III.12) dans (III.17) et intégré les résultats dans (III.18), les résultantes de contrainte peuvent être présentées de façon compacte en fonction des déformations.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x^b \\ M_x^s \\ N_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & B_{11}^s & X_{13} \\ B_{11} & A_{11} & D_{11}^s & Y_{13} \\ B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s & Y_{13}^s \\ X_{13} & Y_{13} & Y_{13}^s & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ k\theta \\ \phi_z \end{Bmatrix}, \quad S_{xz}^s = A_{55}^s \left( k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_z}{\partial x} \right) \quad (\text{III.27})$$

On exprime les composantes de rigidité comme suit :

$$\begin{aligned} (A_{11}, A_{11}^s, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(l, g^2(z), z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) dz \\ (X_{13}, Y_{13}, Y_{13}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{13}(l, z, f(z)) g'(z) dz \\ A_{55}^s &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{55} [g(z)]^2 dz; \quad Z_{33} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{33} [g'(z)]^2 dz \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

### III.2.6. Modélisation des poutres fissurées

D'après la Fig. III.2, « c » est la profondeur de la fissure et « L<sub>c</sub> » son emplacement. L'accroissement de la profondeur de la fissure engendre une diminution de la section transversale de la poutre FGM, ce qui cause une perte de rigidité.

Les équations de l'énergie pour les nouveaux coefficients [101], [102] deviennent :

$$\begin{aligned} (A_{11c}, A_{11c}^s, B_{11c}, D_{11c}, B_{11c}^s, D_{11c}^s, H_{11c}^s) &= \int_{h/2-c}^{h/2} Q_{11}(l, g^2(z), z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) dz \\ (X_{13c}, Y_{13c}, Y_{13c}^s) &= \int_{h/2-c}^{h/2} Q_{13}(l, z, f(z)) g'(z) dz \\ A_{55c}^s &= \int_{h/2-c}^{h/2} Q_{55} [g(z)]^2 dz; \quad Z_{33c} = \int_{h/2-c}^{h/2} Q_{33} [g'(z)]^2 dz \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

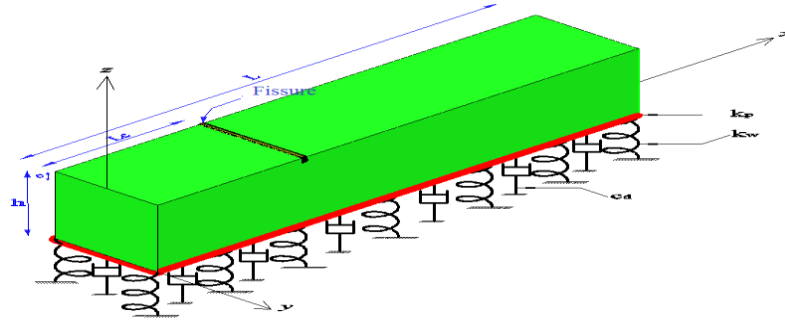


Figure III 2 Configuration d'une poutre FGM fissurée reposant sur une fondation viscoélastique.

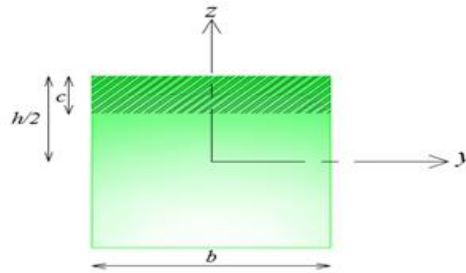


Figure III 3 Section transversale de la poutre fissurée

On peut écrire les équations du mouvement en termes des déplacements  $u_0$ ,  $w_0$ ,  $\theta$  et  $\phi$  en introduisant l'équation (III.27) dans l'équation (III.26). Les équations correspondantes ont la forme suivante :

$$A_{11c} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11c} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + (B_{11c}^s k) \frac{\partial \theta}{\partial x} + X_{13c} \frac{\partial \phi_z}{\partial x} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + J_1 A' k \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x}, \quad (\text{III.30a})$$

$$B_{11c} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11c} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + (D_{11c}^s k) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \left( Y_{13c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + Y_{13c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi_z$$

$$+ k_w w_0 - k_s \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + c_d \left( \frac{d^2 w_0}{dt^2} \right) = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \right) - I_2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} \right) + J_2 \left( k A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \right) \quad (\text{III.30b})$$

$$- (B_{11c}^s k) \frac{\partial u_0}{\partial x} + (D_{11c}^s k) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - H_{11c}^s k^2 \theta + A_{55c}^s (k A')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - Y_{13c}^s =$$

$$- J_1 \left( k A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \right) + J_2 \left( k A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} \right) - K_2 \left( (k A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \right) \quad (\text{III.30c})$$

$$- X_{13c} \frac{\partial u_0}{\partial x} + Y_{13c} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + A_{55c}^s k A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - Y_{13c}^s k \theta + A_{55c}^s \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial x^2} - Z_{33c} \phi_z = J_0 \ddot{w}_0 + K_0 + \ddot{\phi}_z \quad (\text{III.30d})$$

### III.3. Solutions analytiques

Pour résoudre l'équation différentielle régissant la vibration libre d'une poutre FGM posée sur des fondations viscoélastiques, on utilise l'approche analytique de Navier, en considérant que la poutre est simplement appuyée à ses deux extrémités.

Une série de Fourier est considérée comme la base de la solution suivante [103], [104] :

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} U_m \cos(\alpha x) e^{i\omega t} \\
 w_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} W_m \sin(\alpha x) e^{i\omega t} \\
 \theta &= \sum_{m=1}^{\infty} X_m \sin(\alpha x) e^{i\omega t} \\
 \varphi &= \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin(\alpha x) e^{i\omega t}
 \end{aligned} \tag{III.31}$$

On considère U, W, X et Y comme des paramètres inconnus à calculer, et  $\omega$  comme la fréquence naturelle.  $\sqrt{i} = -1$  est l'unité imaginaire.

Après avoir substitué les équations (III.31) dans les équations du mouvement (III.30), qui définissent la vibration libre des poutres FG reposant sur des fondations viscoélastiques, Pour toute valeur de m choisie, les équations aux valeurs propres suivantes peuvent être établies :

$$([K] - \omega^2 [M] + \omega [C]) \{\Delta\} = \{0\} \tag{III.32}$$

Sous formes matricielles :

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & \Gamma_{24} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{23} & \Gamma_{33} & \Gamma_{34} \\ \Gamma_{14} & \Gamma_{24} & \Gamma_{34} & \Gamma_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_m \\ W_m \\ X_m \\ \Phi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{III.33}$$

Dans cette notation, [K] est la matrice de rigidité, [M] la matrice de masse associée aux vibrations libres, et [C] la matrice d'amortissement globale. Les éléments de ces trois matrices sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11} &= -A_{11} \alpha^2, \Gamma_{12} = B_{11} \alpha^3, \Gamma_{13} = \alpha k B_{11}^s, \Gamma_{14} = \alpha X_{13}, \Gamma_{22} = -D_{11} \alpha^4 - k_w - k_p \alpha^2, \\
 \Gamma_{23} &= -k D_{11}^s \alpha^2, \Gamma_{24} = -\alpha^2 Y_{13}, \Gamma_{33} = -k (H_{11}^s k) - (k A')^2 A_{55}^s \alpha^2, \\
 \Gamma_{34} &= -k Y_{13}^s - \alpha^2 k A' A_{55}^s, \Gamma_{44} = -\alpha^2 A_{55}^s - Z_{33}
 \end{aligned} \tag{III.34}$$

Les éléments de la matrice de masse sont donnés par :

$$m_{11} = -I_0, m_{12} = \alpha I_1, m_{13} = -J_1 k A' \alpha, m_{14} = 0, m_{22} = -I_0 - I_2 \alpha^2, m_{23} = J_2 (k A' \alpha^2),$$

$$m_{33} = -K_2 ((k A')^2 \alpha^2), m_{24} = -J_0, m_{44} = -K_0 \quad (\text{III.35})$$

et la matrice d'amortissement s'écrit :

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i.c_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.36})$$

Le déterminant suivants doit s'annuler afin que l'équation (III.33) possède des solutions non triviales :

$$\text{Det}([K] - \omega^2 [M] + \omega [C]) = 0 \quad (\text{III.37})$$

La fréquence naturelle adimensionnelle est :

$$\bar{\omega} = \sqrt[4]{\frac{\rho_c \cdot A \cdot L^4 \cdot \omega^2}{EI}}, \quad \bar{\omega} = \omega L^2 / h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}, \quad \beta = 10^2 \omega a \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$$

$$\omega = -\bar{\omega} (\xi \pm i \sqrt{1 - \xi^2}) \quad (\text{III.38})$$

où  $\xi$  est le rapport d'amortissement.

Les paramètres adimensionnels de la fondation viscoélastique sont donnés comme suit :

$$\bar{k}_w = \frac{k_w L^4}{EI}, \quad \bar{k}_p = \frac{k_p L^2}{EI}, \quad \bar{k}_l = \frac{k_l L^4}{D}, \quad \bar{k}_u = \frac{k_u L^4}{D}, \quad \bar{k}_s = \frac{k_s L^2}{D}, \quad D = \frac{E_c h^3}{12}, \quad C_d = c_d \sqrt{\frac{L^4}{(\rho_c \cdot h \cdot D)}} \quad (\text{III.39})$$

On exprime la position non dimensionnelle ainsi que la profondeur de la fissure de la manière suivante :

$$\bar{L}_c = \frac{L_c}{L}, \quad \bar{h} = \frac{2c}{h} \quad (\text{III.40})$$

Dans la section suivante, une validation numérique du modèle sera d'abord présentée, puis une étude paramétrique sera menée afin d'évaluer l'impact de divers facteurs, tels que l'épaisseur de la poutre, le paramètre d'amortissement, l'indice de la loi de puissance, ainsi que la localisation et la profondeur de la fissure, sur le comportement dynamique des poutres FGM.

### III.4 Matériaux choisis pour l'étude numérique

Dans cette partie, les vibrations naturelles des poutres en matériaux composites avancés sont étudiées simultanément grâce à une théorie basée sur un champ de déplacement à variables

intégrales. La résolution des problèmes s'appuie sur une analyse aux valeurs propres, toutes les analyses ayant été menées à l'aide du logiciel MAPLE.

L'étude porte sur les poutres en matériaux P-FGM, examinées et comparées sous l'angle de la vibration. Ces poutres résultent d'un mélange de métal (aluminium) et de céramique (alumine), avec des caractéristiques détaillées dans le tableau III-1.

**Tableau III 1** Propriétés matérielles des poutres à gradient fonctionnel [105]

Matériau	Propriétés		
	$E$ (GPa)	$\nu$	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>
Aluminum (Al)	70	0.3	2702
Alumina (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	380	0.3	3960

On suppose que le coefficient de Poisson de la poutre reste constant à travers l'épaisseur et vaut 0,3. Par souci de simplicité et afin de permettre la comparaison, les expressions suivantes de la fréquence de vibration sans dimension sont adoptées pour les poutres P-FGM :

$$\begin{aligned}
 D_m &= \frac{E_m h^3}{12(1-\nu^2)} ; & \bar{K}_s &= \frac{K_s D_i}{L^2}, \quad i = m, c & D_c &= \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)} ; \\
 \hat{\omega} &= \omega \left( \frac{L^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} & \beta &= \sqrt[4]{\frac{\rho_c \cdot A \cdot L^4 \cdot \omega^2}{EI}} & \bar{\omega} &= \omega \left( \frac{L^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}
 \end{aligned}
 \tag{III.41}$$

### III.5. Validation du model analytique

Dans le tableau III.2, les résultats numériques relatifs aux fréquences non dimensionnelles de la poutre P-FGM sont confrontés à ceux de Nguyen [106], Nebab et al. [101], Şimşek [107] et Ibnorachid et al [108].

Tableau III 2 Comparaison de la fréquence naturelle ( $\bar{\omega}$ ) d'une poutre FG simplement appuyée

$\frac{L}{h}$	Théorie	Indice de puissance $p$					
		0	0.5	1	2	5	10
5	Nguyen et al. [106]	5.1525	4.4075	3.9902	3.6344	3.4312	3.3135
	Nebab et al. [101]	5.1616	4.4312	4.0238	3.6689	3.4364	3.3039
	Ibnochachid et al. [108]	5.1527	4.4106	3.9904	3.6264	/	/
	Şimşek [107]	5.1525	4.4083	3.9902	3.6344	3.4312	3.3134
	Mellal et al. [97]	5.1531	4.4109	3.9906	3.6263	3.3997	3.2811
	Modèle proposé	5.1616	4.4312	4.0238	3.6689	3.4364	3.3039
20	Nguyen et al. [106]	5.4603	4.6504	4.2051	3.8368	3.6509	3.5416
	Nebab et al. [101]	5.4609	4.6663	4.2356	3.8781	3.6839	3.5599
	Ibnochachid et al. [108]	5.4603	4.6511	4.2050	3.8361	/	/
	Şimşek [107]	5.4603	4.6514	4.2051	3.8368	3.6509	3.5416
	Mellal et al. [97]	5.4603	4.6511	4.2051	3.8361	3.6483	3.5389
	Modèle proposé	5.4609	4.6663	4.2356	3.8781	3.6839	3.5599

Les valeurs de la fréquence naturelle adimensionnelle du premier mode de vibration de la poutre fonctionnellement graduée, obtenues par la présente théorie pour différents rapports d'élanement ( $L/h$ ) et l'indice matériel  $p$ , sont comparées avec celles disponibles dans la littérature ; Nguyen et al. [106], Nebab et al. [101], Ibnochachid et al. [108], Şimşek [107] et Mellal et al. [97], comme présenté dans le Tableau III.2, il est évident que les fréquences fondamentales obtenues dans ce travail sont en bon accord avec les études antérieures, comme une première remarque, l'effet de l'indice de puissance sur la fréquence fondamentale illustré dans le tableau III.2, montre une variation proportionnelle entre la fréquence ( $\bar{\omega}$ ) et l'indice  $p$ , par contre, la variation de la fréquence ( $\bar{\omega}$ ) est inversement proportionnelle avec le rapport d'élanement de la poutre FGM.

On peut conclure que la solution quasi-3D présentée dans cette étude et qui ne comprenait que quatre inconnues, se révèle non seulement précise mais également efficace pour prédire les réponses en vibration libre des poutres FGM.

**III.5.1. Comparaison avec des résultats d'études antérieures**

Afin d'illustrer la précision de la théorie proposée pour prédire la première fréquence naturelle adimensionnelle d'une poutre isotrope reposant sur une fondation élastique, et ce pour différentes valeurs des paramètres de fondation de Winkler, de Pasternak ainsi que du rapport d'épaisseur, les résultats numériques d'un second exemple sont présentés dans le tableau III.3.

Les résultats sont comparés à ceux de Chen et al. [109], Chikh [110], Fahsi et al. [105] et avec Mellal et al. [97] ; une très bonne concordance est observée. Les nouveaux résultats sont en bon accord avec les théories précédentes, en particulier pour les poutres minces, où le rapport  $L/h = 120$ . Nous pouvons également constater que l'effet du paramètre de Pasternak est très considérable pour augmenter la fréquence de vibration de la poutre par rapport à l'effet du paramètre de Winkler et que les fréquences de la poutre FG augmentent lorsque le rapport d'épaisseur augmente, car la poutre devient moins rigide.

D'après le résultat actuel, on peut également observer que la fréquence naturelle a une relation inverse avec le coefficient d'amortissement  $c_d$ . De plus, il est clairement visible que les valeurs les plus basses de la fréquence sont obtenues pour les poutres minces.

**Tableau III 3** Comparaison de la première fréquence naturelle ( $\bar{\omega}$ ) d'une poutre isotrope placée sur un fondement élastique pour différents rapports d'épaisseur

L / h	Théorie	Paramètres de fondations									
		$k_w=0$			$k_w=10^2$			$k_w=10^4$			
		$K_s/\pi^2$			$K_s/\pi^2$			$K_s/\pi^2$			
		0	1	2,5	0	1	2,5	0	1	2,5	
5	Chen et al. [109]	3.04799	3.65802	4.21834	3.67050	4.06636	4.49914	7.34081	7.34095	7.34116	
	Chikh [110]	3.11161	3.70107	4.25717	3.71333	4.10521	4.53999	7.84931	7.84931	7.84931	
	Fahsi et al. [105]	3.07701	3.64655	4.18246	3.68172	4.05578	4.47007	7.76049	7.76049	7.76049	
	Mellal et al. [97]	3.04552	3.66715	4.23953	3.67987	4.08395	4.52797	7.37658	7.37658	7.37658	
	Actuelle	$c_d= 0$	3.0480	3.6595	4.2246	3.6721	4.0709	4.5094	7.55257	7.55257	7.55257
		$c_d= 10$	2.9380	3.6000	4.1874	3.61321	4.02896	4.47943	7.55257	7.55257	7.55257
		$c_d= 20$	2.4462	3.3778	4.0627	3.39440	3.88537	4.38156	7.55257	7.55257	7.55257
15	Chen et al. [109]	3.13025	3.72657	4.28809	3.73895	4.13472	4.57347	9.99582	10.0197	10.0552	
	Chikh [110]	3.13730	3.73165	4.29237	3.74400	4.13915	4.57757	10.0145	10.0386	10.0744	
	Fahsi et al. [105]	3.13421	3.72621	4.28517	3.74080	4.13412	4.57084	10.0045	10.0283	10.0638	
	Mellal et al. [97]	3.1300	3.72741	4.28973	3.73981	4.13615	4.57546	10.0150	10.0390	10.0748	
	Actuelle	$c_d= 0$	3.1302	3.7265	4.2881	3.7389	4.1347	4.5735	10.0065	10.0305	10.0662
		$c_d= 10$	3.0201	3.6643	4.2481	3.67736	4.0898	4.54073	10.0034	10.0275	10.0632
		$c_d= 20$	2.4117	3.4339	4.1146	3.45020	3.93732	4.43411	9.99434	10.0184	10.0542
120	Chen et al. [109]	3.14143	3.73588	4.29687	3.74823	4.14356	4.58227	10.0240	10.0481	10.0839	
	Chikh [110]	3.14028	3.73520	4.29646	3.74757	4.14309	4.58192	10.0241	10.0482	10.0839	
	Fahsi et al. [105]	3.14148	3.73585	4.29683	3.74825	4.14355	4.58222	10.0239	10.0481	10.0839	
	Mellal et al. [97]	3.14141	3.73587	4.29689	3.74823	4.14358	4.58228	10.0241	10.0482	10.0840	
	Actuelle	$c_d= 0$	3.14141	3.7358	4.29687	3.74821	4.14356	4.58225	10.02403	10.04812	10.08393
		$c_d= 10$	3.0312	3.6733	4.2565	3.68636	4.09842	4.5492	10.02092	10.04503	10.08088
		$c_d= 20$	2.4093	3.4419	4.1221	3.45818	3.94499	4.4418	10.01158	10.03576	10.07170

Le Tableau III.4 présente une comparaison des fréquences naturelles pour des poutres ayant un rapport d'épaisseur égal à 100, 10 et 5, obtenues par la théorie développée dans cette étude et celles obtenues par Giunta et al [111]. Ainsi que Mashat et al [112], dont les propriétés des matériaux sont supposées varier uniquement le long de l'axe (z). Les propriétés des matériaux utilisées dans cet exemple sont issues de la référence de Giunta et al [111]

À partir des résultats présentés dans le tableau III.4, il peut être conclu que la méthode proposée dans ce travail est en bon accord avec la formulation unifiée des travaux précédents.

**Tableau III 4** Comparaison de la fréquence adimensionnelle d'une poutre FG simplement appuyée pour différents rapports d'épaisseur.

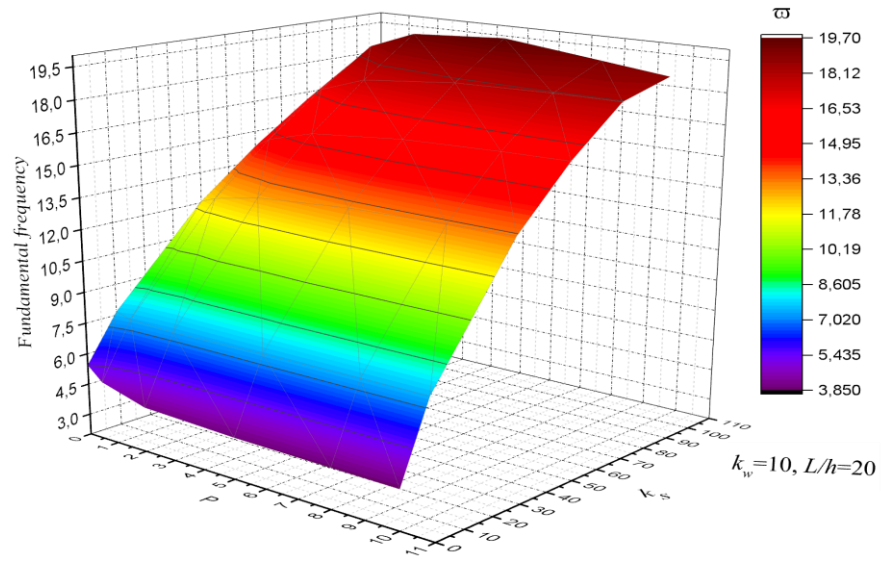
Théorie	$L/h=100$	$L/h=10$	$L/h=5$
	$\beta \cdot 10^2$	$\beta$	$\beta \cdot 10^{-1}$
EBBT [111]	3.8626	3.8455	1.5179
FSDT [111]	3.8622	3.8076	1.4633
TE3 [111]	3.8624	3.8027	1.4564
TE8 [111]	3.8623	3.8026	1.4562
EBBT [112]	3.8626	3.8455	1.5179
FSDT [112]	3.8622	3.8076	1.4633
TE3 [112]	3.8624	3.8026	1.4564
TE8 [112]	3.8623	3.8025	1.4562
Etude actuelle : Quasi 3D-HSDT	3.8630	3.8090	1.4512

### III.6 Etude paramétrique

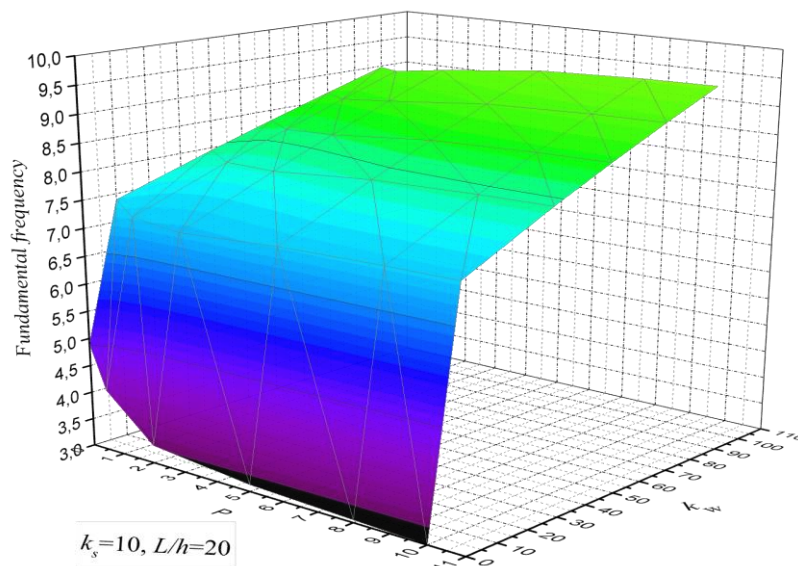
#### III 6.1.Effet de l'indice de puissance

Dans les figures III.4 et III.5, des courbes de surface en 3D sont utilisées pour examiner l'effet combiné de l'indice de puissance  $p$  et des deux paramètres de la fondation élastique ( $k_w$  pour Winkler et  $k_s$  pour Pasternak) sur la première fréquence fondamentale adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) d'une poutre non fissurée posée sur des appuis élastiques.

Il apparaît que les fréquences adimensionnelles diminuent à mesure que l'indice de puissance  $p$  augmente. En outre, les fondations élastiques contribuent à l'élévation des fréquences propres des poutres FGM. On constate ainsi que l'introduction d'une couche de cisaillement au niveau de la fondation provoque une augmentation du paramètre vibratoire de la poutre FGM. Il en résulte une augmentation de la rigidité globale du système en raison de cette incorporation.



**Figure III 4** Variation de la fréquence fondamentale ( $\bar{\omega}$ ) de la poutre FGM sur une fondation élastique en fonction de l'indice de puissance et le paramètre  $k_s$ , pour  $L/h=20$  et  $k_w=10$ .



**Figure III 5** Variation de la fréquence naturelle ( $\bar{\omega}$ ) de la poutre FGM sur une fondation élastique en fonction de l'indice de puissance et le paramètre  $k_w$  pour  $k_s=10$  et  $L/h=20$

III .6.2. Effet des paramètres de la fondation

Dans les figures III.6 et 7, la variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) est représentée en fonction du paramètre de matériau  $p$  et de la fondation  $K_w$ , pour ses composantes réelle et imaginaire. On constate que l'accroissement de l'indice de matériau  $p$  provoque une baisse de la partie réelle de la fréquence, tandis que la partie imaginaire augmente avec  $p$ , et ce, pour différentes valeurs de  $k_w$ .

Par ailleurs, les fréquences les plus basses et les plus élevées correspondent respectivement à des poutres placées sur des fondations viscoélastiques avec un  $k_w$  égal à 0 et 100 pour la partie réelle de la fréquence. À l'inverse, pour la partie imaginaire, les fréquences les plus basses et les plus élevées sont associées respectivement à des poutres reposant sur des bases viscoélastiques avec un  $k_w$  égal à 100 et 0.

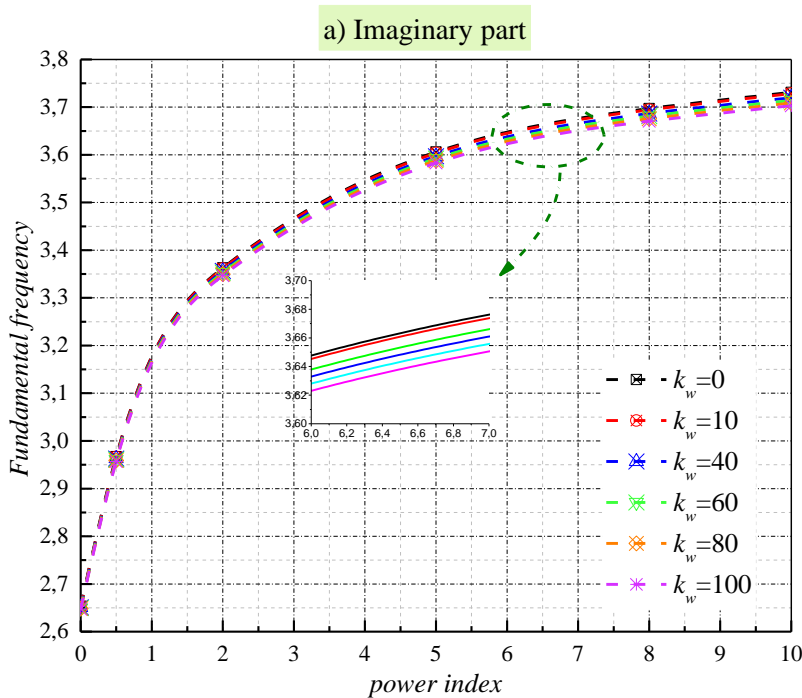


Figure III 6. Variation de la fréquence adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) avec l'indice de puissance pour la partie imaginaire, pour différentes valeurs du paramètre  $k_w$  et  $k_s$

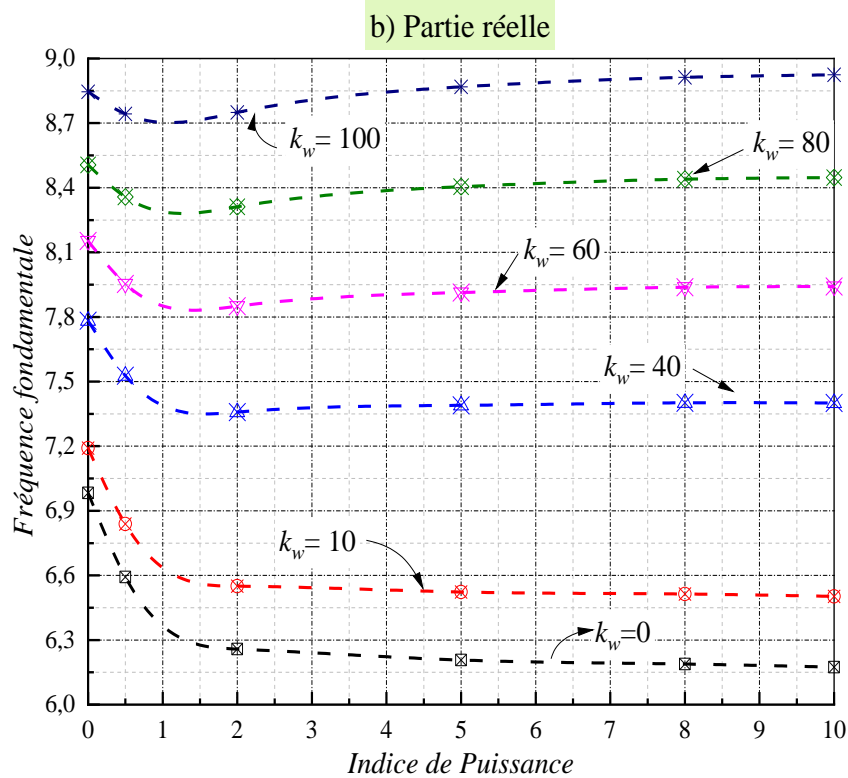


Figure III 7. Variation de la fréquence adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) avec l'indice de puissance pour la partie réelle, pour différentes valeurs du paramètre  $k_w$  et  $k_s$ .

### III.6.3 Effet du paramètre d'amortissement

Les figures III.8 (a) et (b), mettent en évidence l'influence combinée du coefficient d'amortissement  $c_d$  et de l'indice de puissance du gradient de matériaux sur les fréquences fondamentales (parties réelle et imaginaire) d'une poutre FGM simplement appuyée, reposant sur une fondation viscoélastique ( $k_s=k_w=10, L/h=5$ ).

Pour chaque valeur du coefficient d'amortissement  $c_d$  (0 à 20), la partie réelle diminue avec l'augmentation de l'indice de puissance. Cette tendance s'explique par la réduction de rigidité induite par une distribution plus graduelle des propriétés mécaniques dans l'épaisseur de la poutre. L'amortissement amplifie cet effet ; un  $c_d$  élevé atténue davantage la capacité vibratoire, abaissant la fréquence naturelle. Par exemple, à  $c_d=20$ , la fréquence chute de 15 à environ 3 unités lorsque l'indice passe de 0 à 8.

La partie imaginaire, liée au taux d'amortissement, croît systématiquement avec le coefficient d'amortissement  $c_d$ , indépendamment de l'indice de puissance. Cette augmentation reflète une dissipation énergétique plus efficace, réduisant la durée des oscillations. Pour  $c_d=25$ , la valeur atteint 15 unités à indice 8, contre moins de 3 unités pour  $c_d=5$ . Contrairement à la partie

réelle, l'effet de l'indice de puissance reste marginal ici, sauf aux amortissements élevés où une légère hausse est observable.

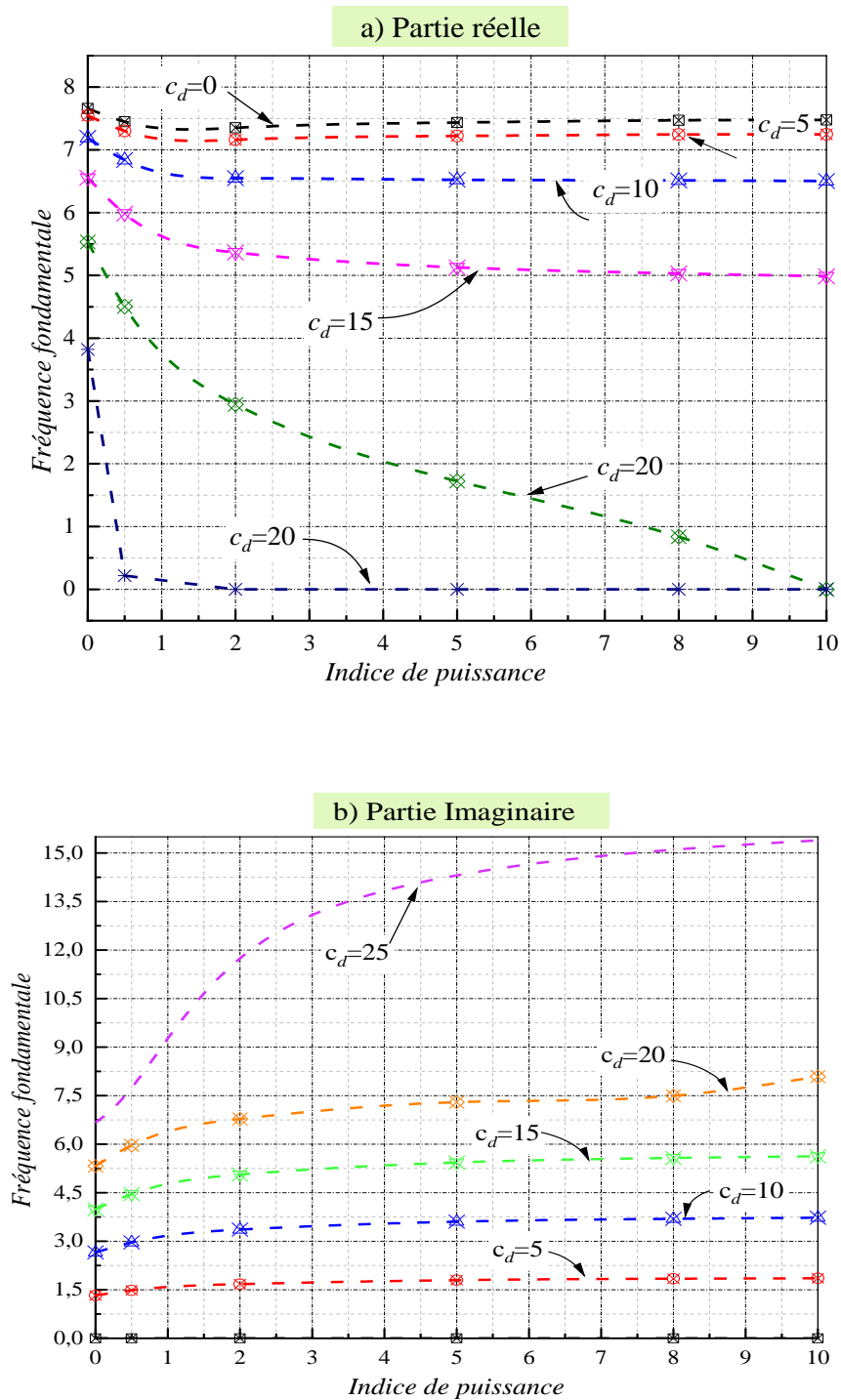


Figure III 8. Effet du paramètre d'amortissement  $c_d$  sur les premières fréquences des poutres FG, reposant sur fondation viscoélastique ( $k_s=k_w=10$  et  $L/h=5$ )

III.6.4 Effet du rapport d'élanement ( $L/h$ ) et le paramètre d'amortissement

Les figures III.9 ; (a) et (b), représentent la variation de la fréquence naturelle adimensionnelle en fonction du paramètre  $c_d$  pour une poutre FGM simplement appuyée non fissurée, pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur  $L/h$ . Il est évident que l'amortissement de la fondation réduit les fréquences de vibration de la poutre (partie réelle), tandis que la partie imaginaire a une relation interdépendante avec le paramètre  $c_d$ . Pour une poutre avec un rapport géométrique supérieur à  $L/h=5$ , les valeurs des fréquences adimensionnées sont très proches. De plus, on peut clairement voir que les fréquences sont respectivement maximales et minimales pour les poutres de taille moyenne (rapport  $L/h=20$ ) et épaisses (rapport  $L/h=5$ )

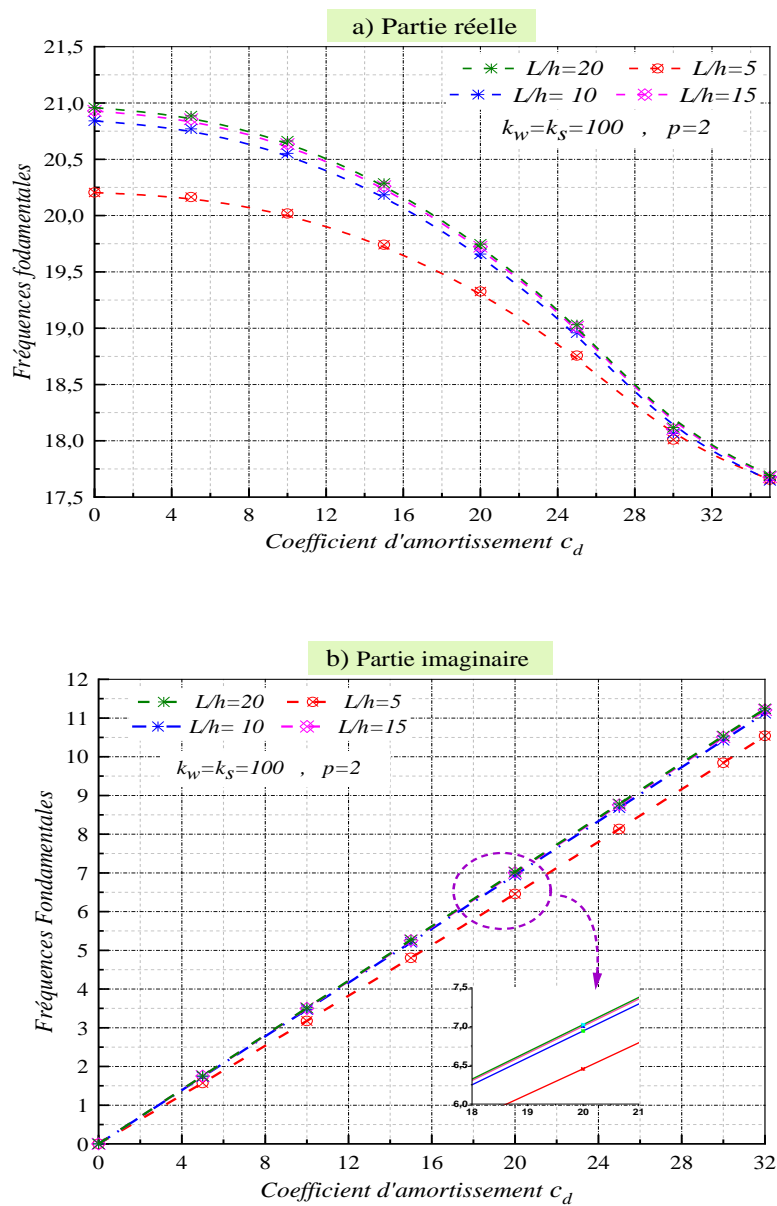


Figure III 9, Variation de la fréquence en fonction du paramètre d'amortissement  $c_d$  et le rapport géométrique ( $L/h$ ) de la poutre FG.

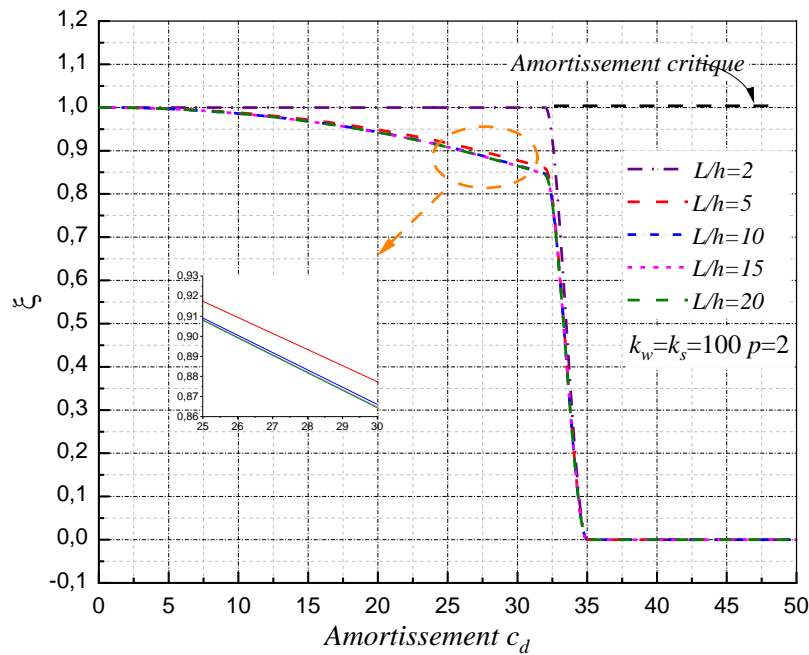
### III .6.5 Effet du paramètre d'amortissement sur l'amortissement critique $\xi$

Les courbes représentées dans la Figure III.10 montrent l'évolution du rapport d'amortissement critique ( $\xi$ ) en fonction du coefficient d'amortissement ( $c_d$ ) en examinant différentes valeurs du rapport géométrique  $L/h$  d'une poutre FGM simplement appuyée, reposant sur une fondation viscoélastique caractérisée par  $k_w=k_s=100$  et un indice de gradient de matériaux  $p=2$ .

Il est évident de constater que pour l'ensemble des rapports  $L/h$  étudiés (2, 5, 10, 15 et 20), le rapport d'amortissement critique  $\xi$  croît de manière monotone avec l'augmentation du coefficient d'amortissement  $c_d$ . Cette tendance confirme le rôle prépondérant de l'amortissement visqueux dans la dissipation de l'énergie vibratoire : plus  $c_d$  est élevé, plus le système tend vers un comportement faiblement oscillatoire, ce qui se traduit par une augmentation progressive de  $\xi$  jusqu'à atteindre un seuil correspondant à l'amortissement critique.

Par ailleurs, la figure III.10 met en évidence l'impact du rapport géométrique  $L/h$ . Pour une valeur donnée de  $c_d$ , les poutres les plus épaisses ( $L/h$  faible) présentent systématiquement un rapport d'amortissement critique inférieur à celui des poutres plus élancées ( $L/h$  plus grand). Cette observation s'explique par le fait qu'une poutre épaisse, plus rigide, nécessite un apport d'amortissement plus important pour atteindre le régime critique, tandis qu'une poutre élancée, plus flexible, atteint ce régime pour des valeurs de  $c_d$  plus faibles.

Il est également notable que, pour des valeurs élevées de  $c_d$  (supérieures à 25), toutes les courbes tendent à converger vers une valeur asymptotique de  $\xi$ , suggérant l'existence d'une limite supérieure au-delà de laquelle l'augmentation de  $c_d$  n'a plus d'effet significatif sur le rapport d'amortissement critique. Ce comportement asymptotique traduit la saturation de la capacité dissipative du système, qui devient alors dominée par l'amortissement imposé, indépendamment de la géométrie



**Figure III 10** Variation du rapport d'amortissement en fonction du coefficient  $c_d$  et le rapport géométrique  $L/h$ , pour  $k_w=k_s=100$

### III.6.6 Effet du paramètre $c_d$ sur le rapport d'amortissement $\xi$

Les figures III.11 et III.12 présentent l'influence du coefficient d'amortissement de la fondation  $c_d$  sur les deux paramètres dynamiques fondamentaux d'une poutre à gradient de matériaux (FGM) simplement appuyée et non fissurée : la partie réelle de la fréquence fondamentale et le rapport d'amortissement  $\xi$ . L'étude est menée pour différentes valeurs de la raideur de Winkler ( $k_w = 0, 40, 60, 80, 100$ ), avec une raideur de cisaillement de la fondation nulle ( $k_s=0$ ), un indice de gradient de matériaux  $p$  fixé 0, 2 pour le rapport d'amortissement, et un rapport géométrique  $L/h=5$ .

Il ressort de l'analyse que l'augmentation de  $c_d$  entraîne une diminution progressive de la partie réelle de la fréquence fondamentale, traduisant une dissipation croissante de l'énergie vibratoire par la fondation viscoélastique. Parallèlement, le rapport d'amortissement  $\xi$  augmente de façon monotone avec  $c_d$ , atteignant une valeur limite correspondant à l'amortissement critique, au-delà de laquelle l'effet du paramètre  $c_d$  se stabilise. Le paramètre de Winkler  $k_w$  accroît la rigidité et donc la fréquence fondamentale, mais son influence devient négligeable lorsque l'amortissement de la fondation est élevé. Ces résultats soulignent l'importance d'optimiser conjointement les paramètres de la fondation pour maîtriser la réponse vibratoire des poutres FGM, en assurant à la fois la stabilité dynamique et performance structurelle.

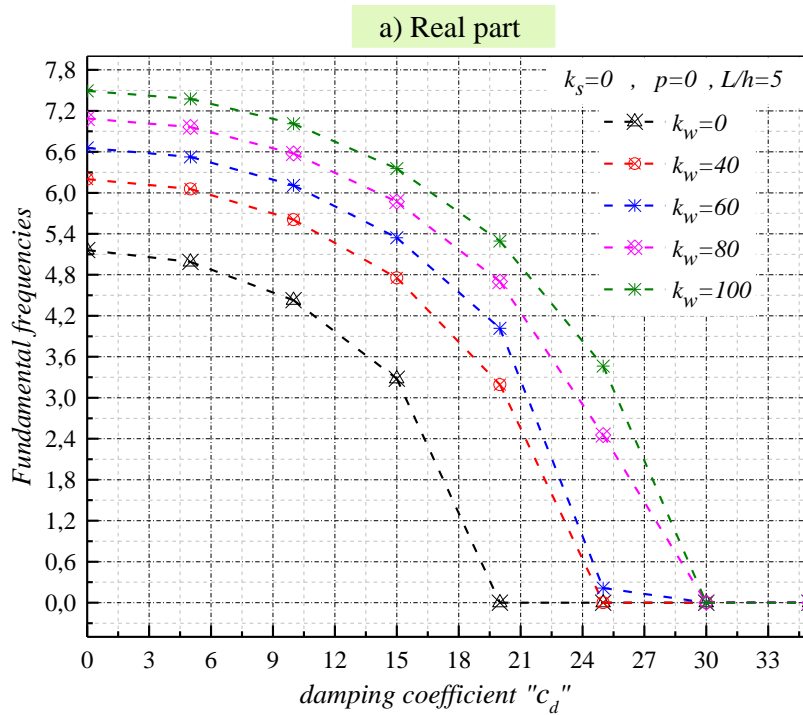


Figure III 11 Effet du paramètre viscoélastique  $c_d$  sur la partie réelle de la fréquence d'une poutre non fissurée.

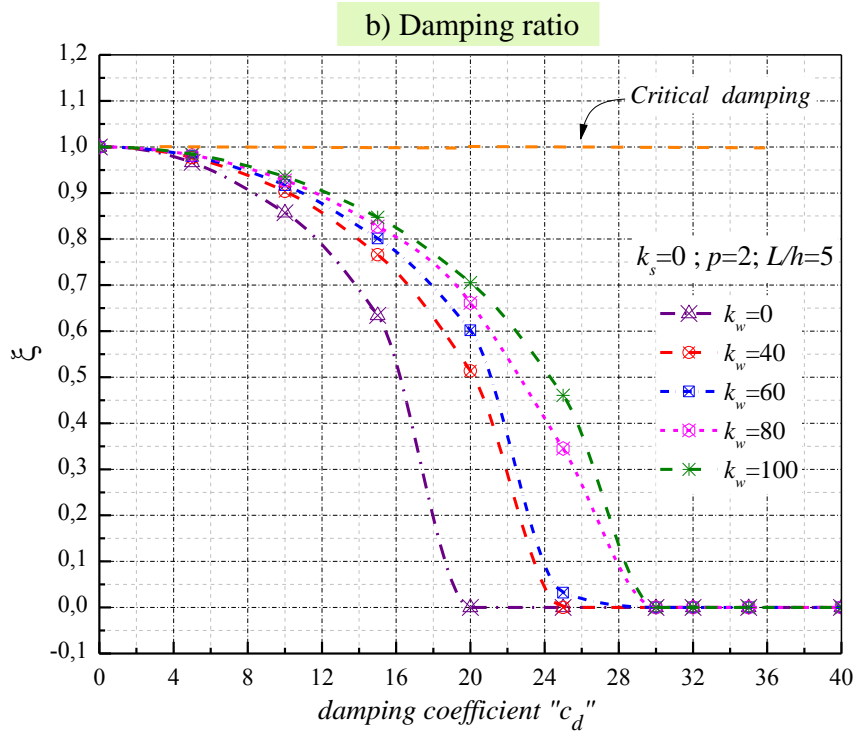
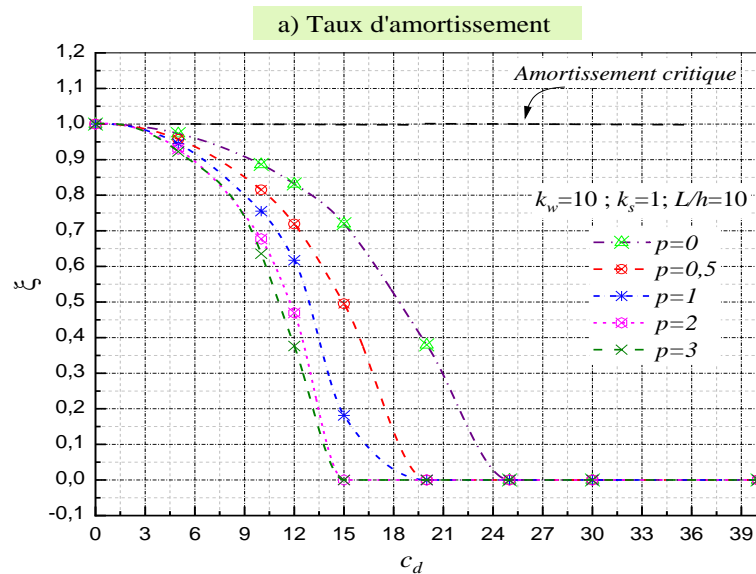


Figure III 12 Effet du paramètre viscoélastique  $c_d$  sur le rapport d'amortissement  $\zeta$  d'une poutre non fissurée.

### III.6.7 Effet de l'amortissement $c_d$ et l'indice de matériau $p$

Les figure III.13, III.14 et III.15 mettent en évidence l'influence conjointe du paramètre d'amortissement de la fondation viscoélastique  $c_d$  et de l'indice de gradient de matériaux  $p$  sur la dynamique d'une poutre FGM simplement appuyée, non fissurée, reposant sur une fondation viscoélastique. Il apparaît que le rapport d'amortissement  $\xi$  augmente de façon uniforme avec  $c_d$ , atteignant une valeur limite correspondant à l'amortissement critique, tandis que l'augmentation de l'indice  $p$  tend à légèrement diminuer cette capacité dissipative. En parallèle, on observe que la partie réelle de la fréquence fondamentale baisse à mesure que  $c_d$  et l'indice  $p$  augmentent, ce qui s'explique par une réduction de la rigidité dynamique de la poutre liée à une dissipation d'énergie renforcée et à un gradient de matériaux plus important. En outre, la partie imaginaire de la fréquence fondamentale, directement liée au taux d'amortissement modal, croît quasi-linéairement avec  $c_d$ , et reste plus élevée pour les faibles valeurs de l'indice  $p$ , ce qui indique une dissipation vibratoire plus efficace pour des gradients de matériaux faibles.



**Figure III 13** Variation du rapport d'amortissement en fonction du paramètre  $c_d$  et l'indice  $p$  pour  $k_w=10 ; k_s=1$  et  $L/h=10$ .

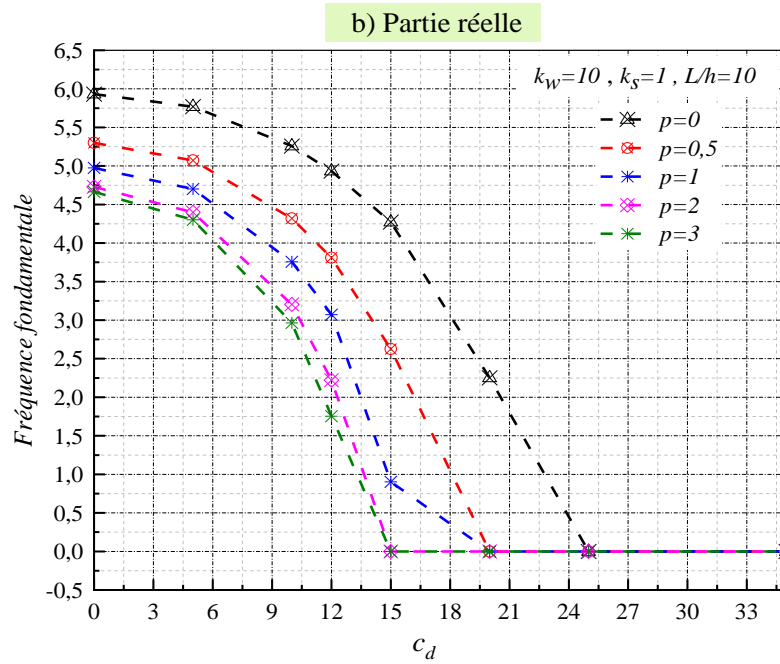


Figure III.14 Variation de la partie réelle de la fréquence en fonction du paramètre  $c_d$  et l'indice  $p$  ( $k_w=10$  ;  $k_s=1$  et  $L/h=10$ ).

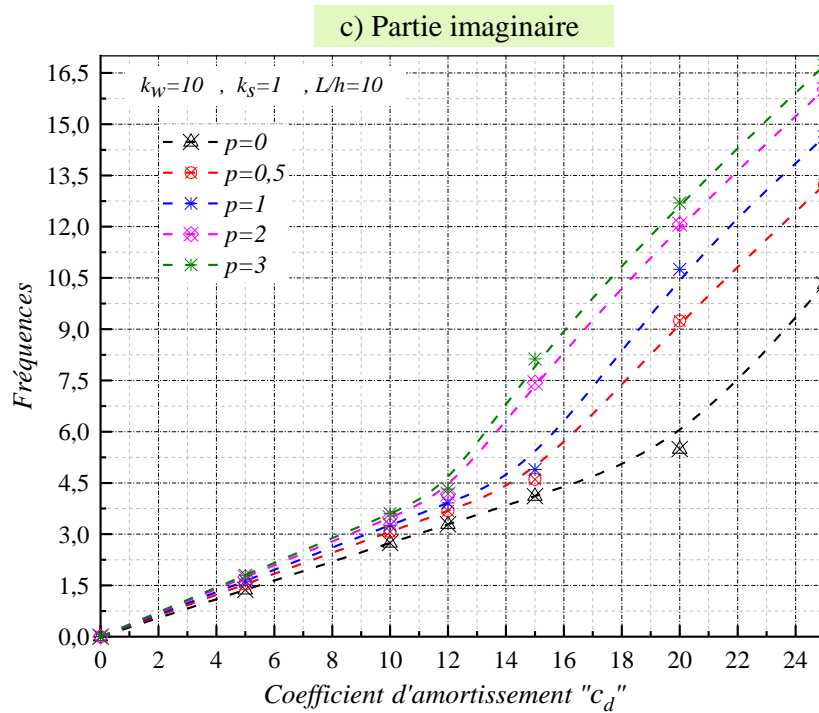


Figure III 15 Variation de la partie imaginaire de la fréquence en fonction du coefficient  $c_d$  pour différentes valeurs de l'indice  $p$  pour  $k_w=10$  ;  $k_s=1$  et  $L/h=10$ .

III.6.8 Effet de type de fondation et le gradient du matériau  $p$

La Figure III.16 met en évidence l’effet du type de fondation et du gradient de matériaux sur la fréquence naturelle adimensionnelle d’une poutre FGM pour deux rapports géométriques ( $L/h=5$  et  $L/h=20$ ). Il apparaît que l’augmentation de l’indice de la loi de puissance entraîne une diminution de la fréquence naturelle, traduisant ainsi une rigidité moindre de la poutre en présence d’un gradient de matériaux plus prononcé. Les fondations Winkler-Pasternak et Winkler procurent les fréquences les plus élevées, tandis que l’introduction d’une composante viscoélastique (Visco-Winkler, Visco-Pasternak) réduit systématiquement la fréquence naturelle en raison de la dissipation d’énergie supplémentaire. Par ailleurs, les poutres épaisses ( $L/h=5$ ) présentent des fréquences supérieures à celles des poutres élancées ( $L/h=20$ ), soulignant l’influence de la géométrie sur la dynamique du système.

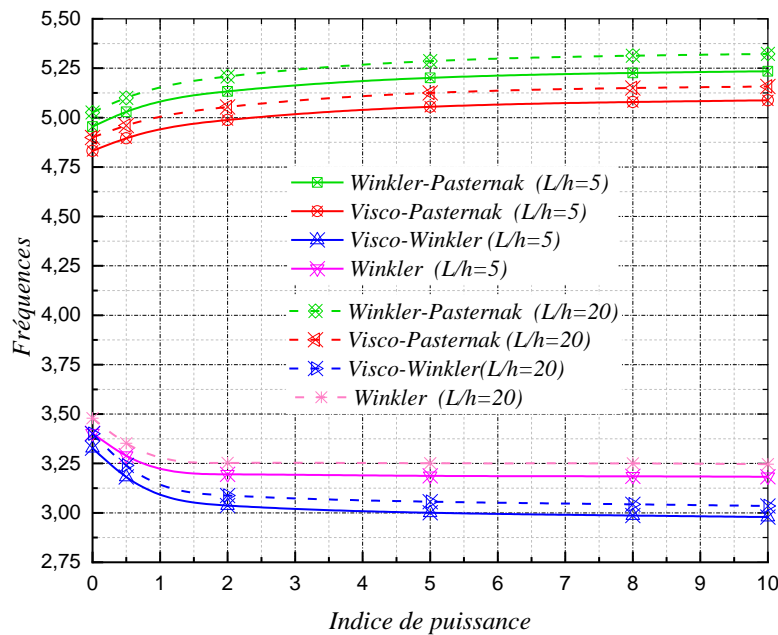


Figure III.16 Analyse comparative de la fréquence sans dimension selon le modèle de fondation et l’indice de puissance pour  $L/h=5$  et  $L/h=20$

III.6.9 Effet de la fissure

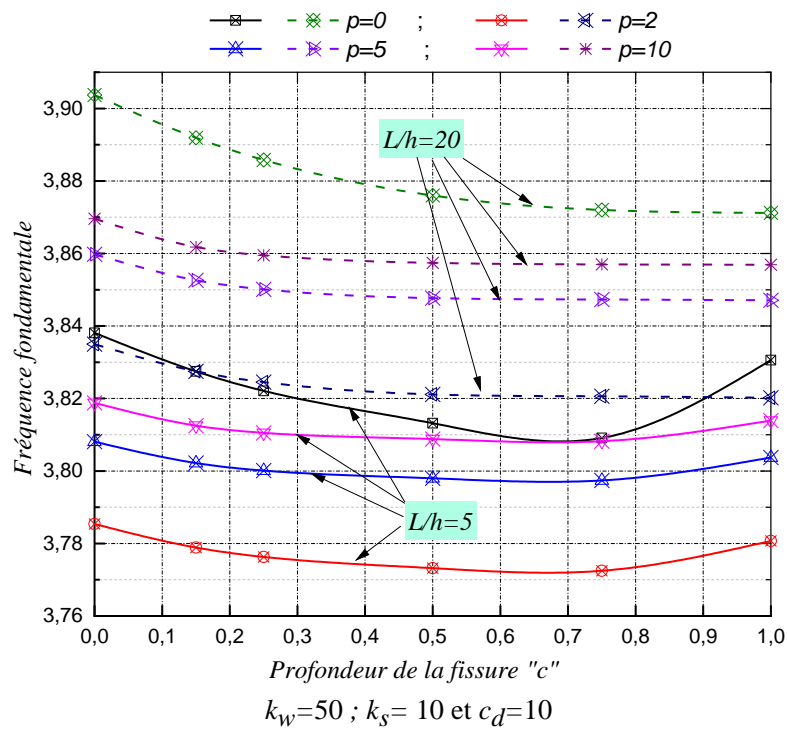
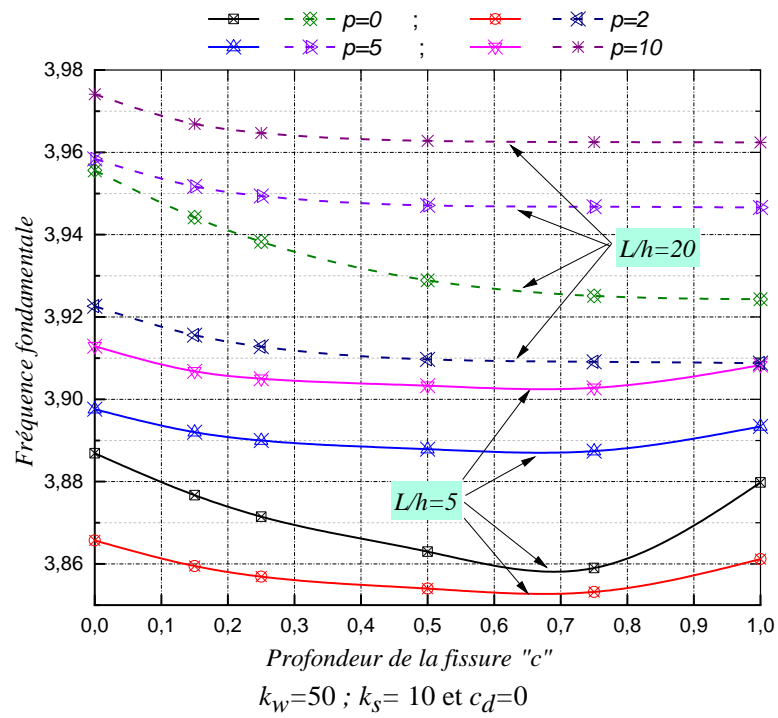
Dans le tableau III.5 et les figures III.17, on expose l’influence de la profondeur et de la position de la fissure sur les fréquences naturelles des poutres FG reposant sur des fondations viscoélastiques à trois paramètres ( $k_w$ ,  $k_s$  et  $c_d$ ).  $L_c$  correspond à la position de la fissure à partir

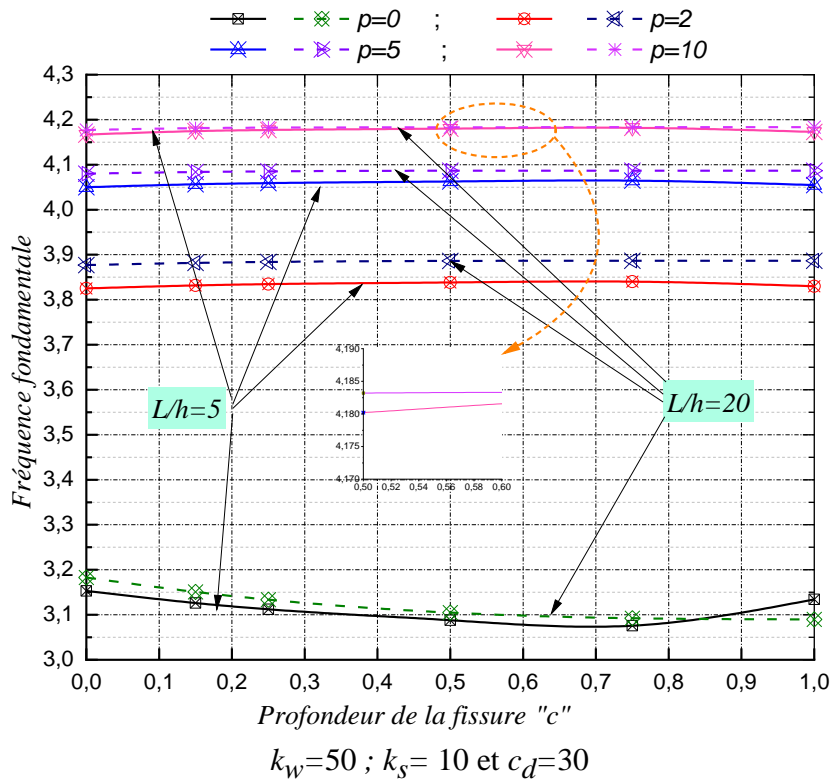
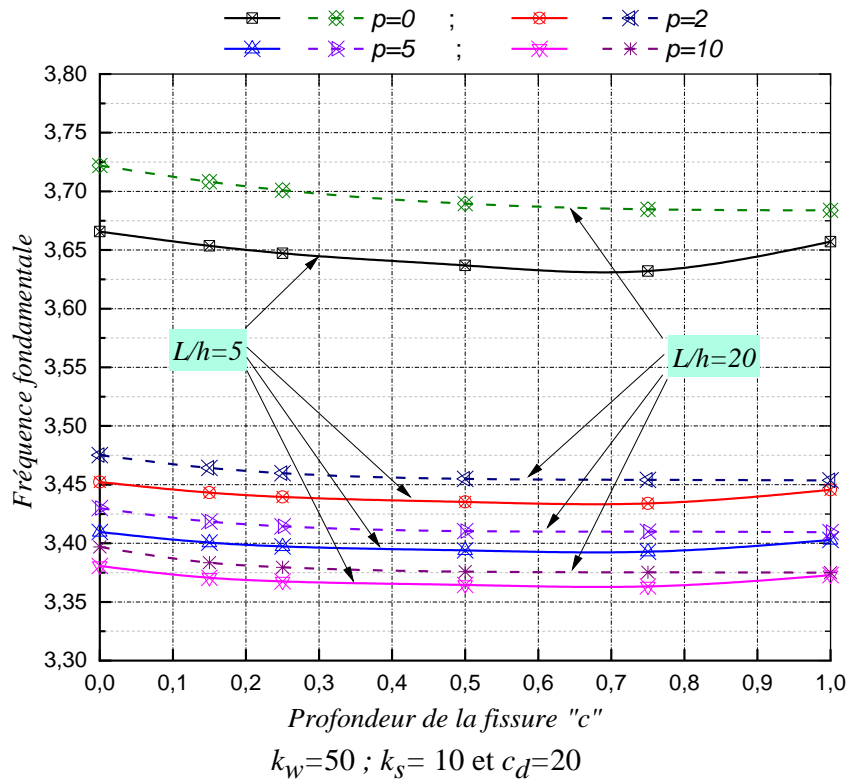
de l'extrémité gauche de la poutre FGM, pour deux rapports d'épaisseur ( $L/h = 5$  et  $L/h = 20$ ). Différentes valeurs des paramètres de fondation sont prises en compte, avec un paramètre de matériau variant de 0 à 10.

Selon les résultats présentés dans les Figures III.17, on observe que la profondeur de la fissure entraîne une réduction de la valeur des fréquences naturelles adimensionnelles, et cette réduction est très marquée pour les fondations ayant un paramètre d'amortissement minimal. Cette diminution s'arrête progressivement lorsque la valeur de la profondeur de la fissure se situe dans la plage de 0,7 à 0,8 ; à partir de cette dernière valeur, les fréquences naturelles remontent. Influencées par la fissure qui réduit la rigidité de la poutre. Ce comportement est similaire pour tous les types de poutres FGM, mais avec des variations relatives. On remarque une diminution significative de la fréquence naturelle dans le cas d'une poutre FGM moyennement épaisse par rapport à une poutre FGM épaisse, et ce, pour toutes les valeurs de l'indice de puissance et les paramètres de la fondation.

**Tableau III 5** Effet de la localisation de la fissure sur la fréquence, en fonction de différents indices de puissance, pour une profondeur de fissure de 0,15.

L/h	p	Paramètres de fondation viscoélastique ( $k_w, k_s, c_d$ )								
		(50, 10 ,0)			(50, 10 ,10)			(50, 10 ,30)		
		$L_c = 0$	$L_c = 0,15$	$L_c = 0,5$	$L_c = 0$	$L_c = 0,15$	$L_c = 0,5$	$L_c = 0$	$L_c = 0,15$	$L_c = 0,5$
5	0	3.8869	3.8767	3.8516	3.8380	3.8275	3.8014	3.1530	3.1263	3.0541
	0,5	3.8612	3.8526	3.8313	3.7986	3.7898	3.7675	3.3429	3.3554	3.3849
	2	3.8657	3.8595	3.8436	3.7854	3.7789	3.7623	3.8251	3.8317	3.8488
	5	3.8976	3.8920	3.8770	3.8081	3.8022	3.7866	4.0499	4.0566	4.0747
	8	3.9097	3.9038	3.8879	3.8168	3.8107	3.7942	4.1337	4.1411	4.1616
	10	3.9129	3.9069	3.8903	3.8188	3.8124	3.7954	4.1669	4.1746	4.1966
20	0	3.9556	3.9442	3.9162	3.9038	3.8919	3.8627	3.1828	3.1508	3.0622
	0,5	3.9208	3.9113	3.8880	3.8535	3.8435	3.8189	3.4137	3.4262	3.4551
	2	3.9226	3.9156	3.8980	3.8350	3.8275	3.8086	3.8770	3.8819	3.8940
	5	3.9584	3.9517	3.9345	3.8598	3.8526	3.8340	4.0799	4.0838	4.0939
	8	3.9711	3.9641	3.9458	3.8683	3.8608	3.8409	4.1502	4.1541	4.1642
	10	3.9740	3.9669	3.9481	3.8696	3.8618	3.8414	4.1771	4.1810	4.1911





**Figure III.17** Impact combiné de la profondeur de la fissure et de l'indice de puissance sur la réponse dynamique d'une poutre FGM sur fondation viscoélastique.

### III 7. Conclusion

Dans cette étude, nous proposons un modèle intégral simplifié pour la déformation par cisaillement des poutres, afin d'analyser la vibration libre des poutres à gradient fonctionnel posées sur des fondations viscoélastiques. L'influence du cisaillement transversal est considérée dans la théorie, sans recours à un facteur de correction du cisaillement. Les caractéristiques matérielles effectives de la poutre FG et les fractions volumiques de ses composants sont considérées comme variant uniquement dans la direction de l'épaisseur, selon le modèle de la loi de puissance. Les équations du mouvement sont formulées grâce au principe de Hamilton et résolues à l'aide des solutions de Navier. La validité et l'efficacité du modèle proposé ont été vérifiées par une analyse dynamique d'une poutre FG fissurée reposant sur un milieu viscoélastique. Les différentes variables influençant la fréquence fondamentale de la poutre FG ont été illustrées par plusieurs études paramétriques examinées et discutées. D'après les résultats obtenus, l'inclusion des paramètres de la fondation viscoélastique permet d'augmenter la rigidité de la poutre FG, ce qui provoque une augmentation de la fréquence fondamentale. L'étude révèle en outre que le coefficient d'amortissement de la fondation exerce une influence importante sur la composante réelle dominante de la fréquence de vibration des poutres FGM. Par ailleurs, il a été observé que l'augmentation du coefficient d'amortissement de la fondation entraîne une diminution de la partie réelle de la fréquence, tandis que sa partie imaginaire s'accroît. La profondeur et la localisation des fissures ont eu un effet important sur la rigidité de la poutre FG. Enfin, il peut être affirmé que les résultats de cette recherche peuvent servir d'exemple pour les analyses futures des poutres FGM supportées par des fondations viscoélastiques.

## **Chapitre IV**

---

**Impact de la gradation matérielle  
bidimensionnelle (FG-2D) sur les  
caractéristiques mécaniques des  
poutres.**

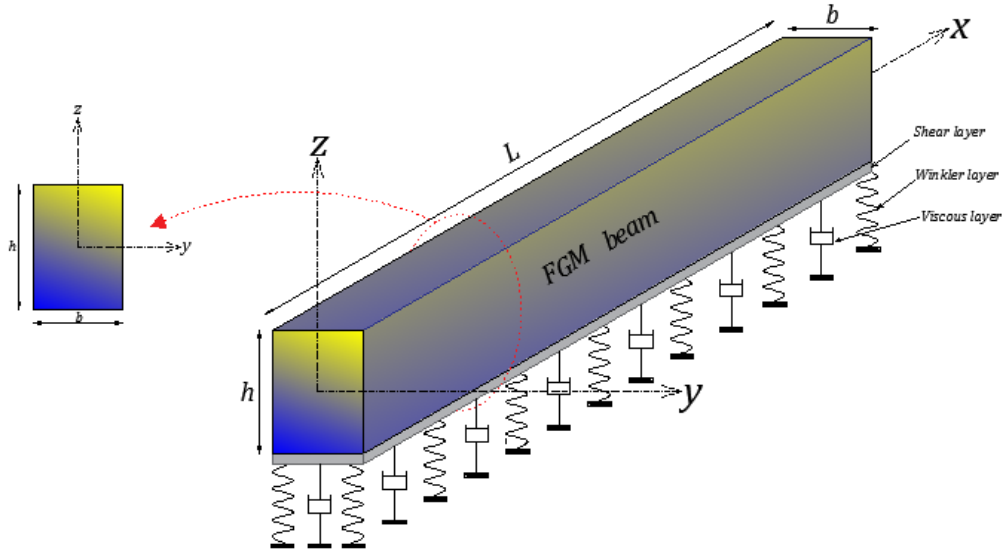
### IV.1. Introduction

Cette partie d'étude explore en profondeur l'impact des fondations viscoélastiques à caractéristiques variables sur la réponse vibratoire et le comportement au flambement des poutres à gradient de propriétés bidirectionnel (FGM-2D), de quelle les propriétés évoluent graduellement le long des axes longitudinaux ( $x$ ) et transversaux ( $z$ ). Les poutres considérées sont simplement appuyées et analysées à l'aide d'une théorie de cisaillement d'ordre élevé quasi 3D, fournissant une prise en compte détaillée des effets de cisaillement transversal, sans nécessiter l'utilisation de facteurs correctifs empiriques.

À travers cette approche, les fondations sont modélisées selon le modèle généralisé de Winkler-Pasternak à coefficients variables, permettant de représenter de manière réaliste l'interaction entre la poutre FGM et son support, y compris les effets d'amortissement viscoélastique. Les équations d'équilibre du système sont rigoureusement dérivées à partir du principe des déplacements virtuels, garantissant la cohérence mécanique du modèle. La solution analytique du problème repose sur la méthode de Navier, qui est particulièrement appropriée pour les poutres simplement appuyées, offrant ainsi des solutions explicites pour les fréquences propres de vibration et les charges critiques de flambement. Des études paramétriques détaillées sont présentées afin d'analyser l'impact des variations bidirectionnelles des propriétés matérielles, des paramètres de la base sur le paramètre de la vibration et la stabilité des poutres FGM-2D. Les résultats obtenus grâce à la nouvelle formulation du cisaillement et à la solution de Navier sont systématiquement comparés à ceux disponibles dans la littérature, montrant une excellente concordance et validant ainsi la robustesse de la méthode proposée. Cette approche offre un outil efficace et fiable pour l'analyse et la conception de structures FGM avancées reposant sur des fondations viscoélastiques complexes.

### IV.2. Formulation du problème

Considérons une poutre en matériau FG, dont les propriétés varient de manière continue avec l'épaisseur ( $z$ ) et la longueur ( $x$ ) selon une loi de puissance. Cette poutre, de longueur  $L$  et d'épaisseur  $h$ , est soutenue par une fondation viscoélastique variable. Le système ainsi que les axes de coordonnées correspondants sont expliqués à la figure VI.1.



**Figure IV 1** Système de coordonnées et géométrie d'une poutre 2D-FGM soutenue par une assise viscoélastique variable.

Les caractéristiques mécaniques de la poutre à gradient de propriétés fonctionnelles bidirectionnelle, constituée d'un alliage céramique-métallique, notamment le module d'élasticité  $E(x,z)$ , la masse volumique  $\rho(x,z)$  ainsi que le coefficient de Poisson  $\nu(x,z)$ , présentent une variation graduelle et continue suivant les directions longitudinale ( $x$ ) et transversale ( $z$ ) de l'élément structural. Cette évolution bidimensionnelle des caractéristiques matérielles obéit à la fonction de puissance (P-FGM), en accord avec le principe fondamental de combinaison des phases, et se formule de la manière suivante [62]:

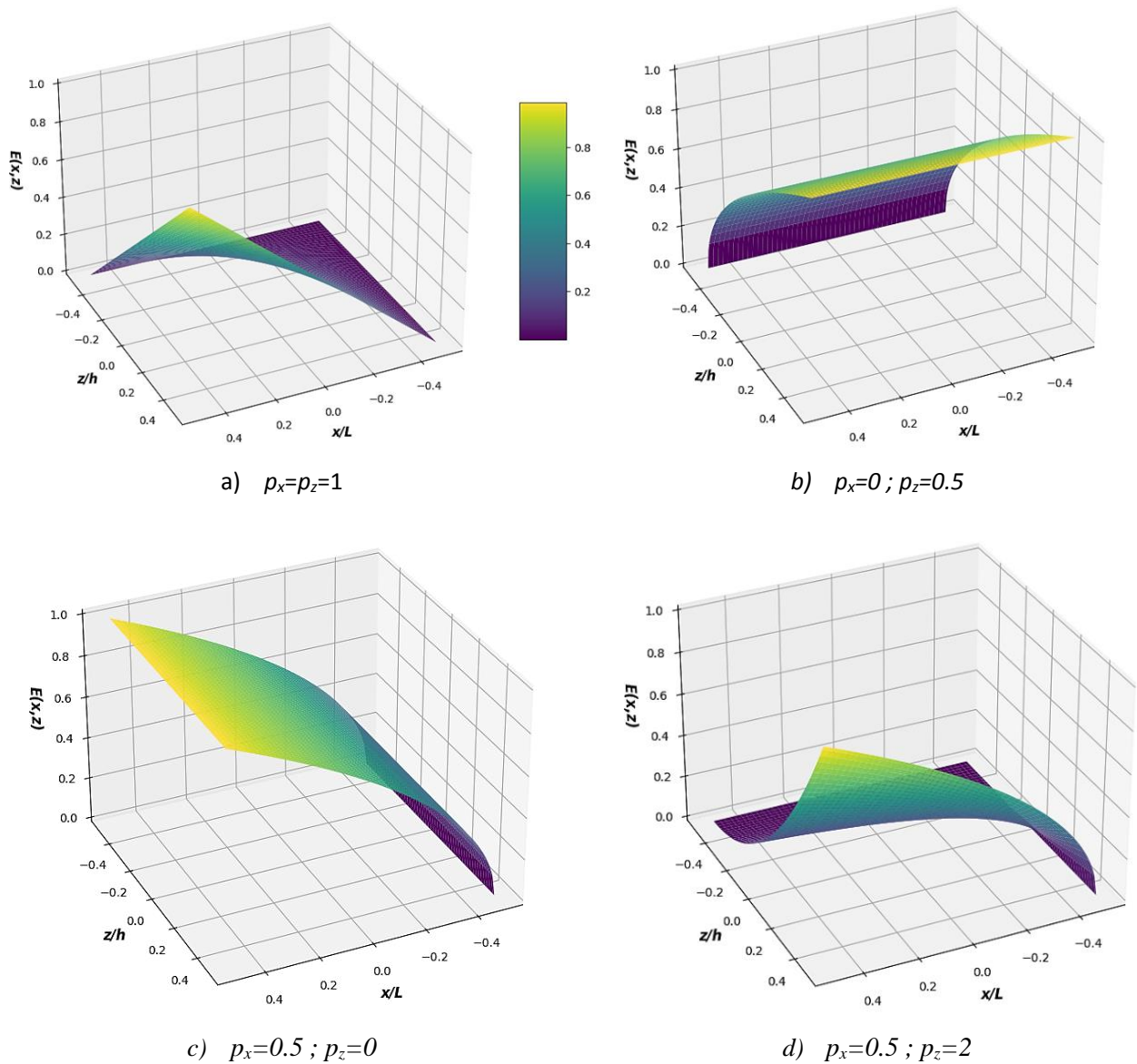
$$P(z) = (P_c - P_m) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^{p_z} \left( \frac{1}{2} + \frac{x}{L} \right)^{p_x} + P_m \quad (\text{IV.1})$$

Les indices  $p_x$  et  $p_z$  représentent les exposants de la fonction puissance caractérisant la poutre, lesquels régissent la distribution des propriétés selon les directions longitudinale et transversale. Les caractéristiques mécaniques de la poutre bidimensionnelle à gradient fonctionnel (2D-FG) s'expriment de la façon suivante :

$$E(z) = (E_c - E_m) \left( 0,5 + \frac{z}{h} \right)^{p_z} \left( 0,5 + \frac{x}{L} \right)^{p_x} + E_m \quad (\text{IV.2})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left( 0,5 + \frac{z}{h} \right)^{p_z} \left( 0,5 + \frac{x}{L} \right)^{p_x} + \rho_m \quad (\text{IV.3})$$

La figure IV. 2 présente une variation du module d'Young dans le sens de l'épaisseur et de la longueur.



**Figure IV 2** Distribution bidirectionnelle de la fraction volumique dans une poutre FGM selon différents indices de gradation  $p_x$  et  $p_z$

Pour une poutre à matériaux FG caractérisée par une évolution bidimensionnelle des propriétés suivant l'épaisseur ( $z$ ) et l'axe longitudinal ( $x$ ), les modules d'élasticité ( $E_c, E_m$ ) ainsi que les masses volumiques ( $\rho_c, \rho_m$ ) se rapportent respectivement aux phases céramique et métallique. La répartition des fractions volumiques obéit à la fonction de puissance P-FGM, dans laquelle les indices de gradation  $p_x$  et  $p_z$  régissent la distribution des composants selon les directions  $x$  et  $z$ . Ces paramètres exponentiels présentent des valeurs positives ou nulles ( $0 \leq p_x,$

$pz < \infty$ ), une valeur zéro traduisant une structure intégralement céramique. Pour cette analyse, le rapport de Poisson demeure invariant.

### IV.3. Domaine cinématique des déplacements

La distribution cinématique établie selon la théorie de cisaillement supérieur (HSDT) décrit les déplacements de tout élément de la poutre à partir des composantes de mouvement moyennes de la fibre neutre, enrichies de contributions supplémentaires traduisant les effets de cisaillement transverse, ce qui se présente sous la forme [Bennai et al., 2022] :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k \cdot f(z) \int \theta(x, t) dx \quad (IV.4a)$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) + g(z) \phi_z(x, t) \quad (IV.4b)$$

On peut voir que la cinématique dans Eqs. (IV.4a et IV.4b) introduit seulement quatre inconnues ( $u_0$ ,  $w_0$ ,  $\theta$  et  $\phi_z$ ) en considérant l'effet d'éirement en épaisseur.

Dans ce travail, la HSDT quasi 3D actuel est obtenu en définissant :

$$f(z) = z \left( \frac{5}{4} - \frac{5z^2}{3h^2} \right) \text{ et } g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (IV.5)$$

Les relations déformation-déplacement, basées sur cette méthode, sont données comme suit:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z.k_x^b + f(z).k_x^s, \quad \gamma_{xz} = g(z).\gamma_{xz}^0, \quad \varepsilon_z = g'(z)\varepsilon_z^0 \quad (IV.6)$$

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = \frac{-\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad k_x^s = k\theta, \quad \gamma_{xz}^0 = k \int \theta dx + \frac{\partial \phi_z}{\partial x}, \quad \varepsilon_z^0 = \phi_z \quad (IV.7)$$

De plus, une méthode de type Navier sera appliquée pour résoudre les intégrales mentionnées dans les équations ci-dessus, qui peuvent être exprimées comme suit :

$$\int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (IV.8)$$

Le coefficient A' est défini en fonction de la méthode de résolution adoptée, ici à travers l'application de l'approche de Navier. Par suite, les expressions de A' et k sont données par :

$$A' = \frac{-1}{\alpha^2}, \quad k = \alpha^2 \text{ et } \alpha = \frac{m\pi}{L} \quad (IV.9)$$

Les relations constitutives linéaires sont données ci-dessous :

$$\sigma_x = Q_{11}\varepsilon_x, \quad \tau_{xz} = Q_{55}\gamma_{xz} \quad (IV.10)$$

et

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{13} & 0 \\ Q_{13} & Q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.11})$$

Les grandeurs  $(\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{xz})$  représentent respectivement les composantes de contrainte et de déformation. À travers les caractéristiques du matériau définies dans l'équation (IV.2 et IV.3), il est possible d'exprimer les coefficients de rigidité de la manière suivante :

$$Q_{11} = Q_{33} = \frac{(1-\nu)E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad Q_{13} = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad Q_{55} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{IV.12})$$

#### IV.4. Fondation à raideur viscoélastique variable

La poutre FGM considérée repose sur une fondation viscoélastique généralisée à trois paramètres :

- La rigidité de Winkler  $k_w(x)$ , qui change selon la direction axiale de la poutre ( $L$ ).
- La rigidité de cisaillement de Pasternak  $k_s$ , dont le  $k_s$  est zéro si la fondation est modélisée comme Visco-Winkler.
- Le terme d'amortissement viscoélastique  $c_d$ .

Dans ce modèle, la réaction de la fondation  $R(x,t)$  appliquée à la poutre en un point  $x$  et à l'instant  $t$  s'exprime comme suit :

$$R(x,t) = K_w(x) \cdot w(x,t) - k_s \left( \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) + c_d \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \quad (\text{IV.13})$$

$k_w(x)$  exprime la rigidité de Winkler se transformant le long de la dimension ( $L$ ) de la poutre à propriétés graduées selon les formes de distribution énoncées :

$$K_w(x) = \chi \cdot \left( \frac{k_0 \cdot D_i}{L^4} \right) \quad (\text{IV.14})$$

La variable  $\chi$  se présente sous la forme :

Formelinéaire	Formeparabolique	Formesinusoidale	Formeexponentielle
$\chi = 1 + \zeta \frac{x}{L}$	$\chi = 1 + \zeta \left( \frac{x}{L} \right)^2$	$\chi = 1 + \zeta \cdot \sin \left( \frac{\pi x}{L} \right)$	$\chi = 1 + \zeta \left( e^{\left( \frac{x}{a} \right)} - e^{\left( \frac{x}{a} \right)^n} \right)$

$k_0$  représente une valeur constante, tandis que  $\zeta$  est un paramètre qui varie. Lorsque  $\zeta$  vaut zéro, la base élastique se transforme en une fondation de type Pasternak uniforme. De plus, si l'on néglige la rigidité de la couche de cisaillement, cela conduit à une fondation de type Winkler.

## IV.5. Équations gouvernantes

Pour dériver les équations régissant l'équilibre d'une poutre FGM posée sur une fondation viscoélastique variable de type Winkler-Pasternak, on peut utiliser le principe du travail virtuel (ou principe de Hamilton), qui s'exprime de la manière suivante :

$$\int_0^t (\delta U + \delta U_{ef} - \delta K + \delta V) dt = 0 \quad (IV.15)$$

Dans cette expression,  $\delta U$  correspond à la variation de l'énergie de déformation de la poutre,  $\delta K$  désigne la variation de l'énergie cinétique, et  $\delta U_{fe}$  représente la variation de l'énergie de déformation de la fondation viscoélastique.

Le calcul de la variation énergétique de déformation de l'élément structural s'effectue à l'aide de l'expression ci-après :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\ &= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_x^s \delta k_x^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0] dA = 0 \end{aligned} \quad (IV.16)$$

Où  $\sigma$  et  $\varepsilon$  symbolisent respectivement les vecteurs de contrainte et de déformation ;

$N_i^j$ ,  $M_i^j$  et  $S_i^j$  constituent les produits des intégrations effectuées.

A : représente l'aire de la face supérieure, les efforts résultants N et M sont définis selon :

$$(N_x, M_x^b, M_x^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_x dz, \quad N_z = \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) \sigma_z dz, \quad S_{xz}^s = \int_{-h/2}^{h/2} g \tau_{xz} dz \quad (IV.17)$$

L'expression suivante est utilisée pour évaluer la variation de l'énergie de déformation de la fondation viscoélastique :

$$\delta U_{ef} = \int_A (K_w(x) - k_p \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_t \frac{\partial}{\partial t}) w dA \quad (IV.18a)$$

La détermination de la variation du travail produit par les actions externes utilise l'expression mathématique suivante :

$$\delta V = - \int_A \left( N_x^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right) dA \quad (IV.18b)$$

Où,  $N_x^0$  exprime la sollicitation axiale imposée au système.

Pour déterminer l'évolution de l'énergie cinétique, on emploie la formulation suivante :

$$\begin{aligned}
\delta K &= \int_V [\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{w}\delta\dot{w}] \rho(z) dV \\
&= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta\dot{u}_0 + \dot{w}_0 \delta\dot{w}_0] + J_0 (\dot{\phi}_z \delta\dot{w}_0 + \dot{w}_0 \delta\dot{\phi}_z) \right. \\
&\quad - I_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta\dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta\dot{u}_0 \right) + J_1 \left( (kA') \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta\dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta\dot{u}_0 \right) \right) \\
&\quad + I_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta\dot{w}_0}{\partial x} \right) + K_2 \left( (kA')^2 \left( \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta\dot{\theta}}{\partial x} \right) \right) \\
&\quad \left. - J_2 \left( (kA') \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta\dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta\dot{w}_0}{\partial x} \right) \right) + K_0 (\dot{\phi} \delta\dot{\phi}) \right\} dA
\end{aligned} \tag{IV.19}$$

L'indication (.) marque la dérivation temporelle ;  $\rho(z)$  signifie la densité massique de l'élément et  $(I_i, J_i, K_i)$  constituent les termes d'inertie formulés par :

$$\begin{aligned}
(I_0, I_1, I_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \\
(J_0, J_1, J_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} (g, f, zf) \rho(z) dz \\
(K_0, K_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} (g^2, f^2) \rho(z) dz
\end{aligned} \tag{IV.20}$$

En appliquant les relations généralisées entre déplacement et déformation (Éqs. IV.4 a, b et IV.7), ainsi que les relations entre contrainte et déformation (Éq. IV.11), et en procédant à une intégration par parties tout en combinant les coefficients de  $\delta u_0$ ,  $\delta w_0$ ,  $\delta\theta$  et  $\delta\phi$  dans l'Éq. (IV.15), les équations du mouvement se présentent de la manière suivante :

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + J_1 kA' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \tag{IV.21a}$$

$$\begin{aligned}
\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + k_w(x) w_0 - k_p \left( \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) + c_t \left( \frac{d^2 w_0}{dt^2} \right) &= J_0 \ddot{\phi} - I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \right) \\
- I_2 \left( \frac{d^2 \ddot{w}_0}{dx^2} \right) + J_2 \left( kA' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \right) &
\end{aligned} \tag{IV.21b}$$

$$\delta\theta : -k_1 M_x^s + kA' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} = -J_1 \left( kA' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \right) - K_2 \left( (kA')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \right) + J_2 \left( kA' \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} \right) \tag{IV.21c}$$

$$\delta\phi : \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} - N_z + Ng_0 \frac{\partial^2 (w_0 + g_0 \phi_z)}{\partial x^2} = J_0 \ddot{w}_0 + K_3 \ddot{\phi} \tag{IV.21d}$$

En procédant au remplacement de l'équation (IV.7) par la relation (IV.15) et en intégrant les valeurs obtenues dans les expressions (IV.16), les résultantes de contrainte s'établissent selon les déformations sous cette forme compacte :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x^b \\ M_x^s \\ N_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & B_{11}^s & X_{13} \\ B_{11} & A_{11} & D_{11}^s & Y_{13} \\ B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s & Y_{13}^s \\ X_{13} & Y_{13} & Y_{13}^s & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ k\theta \\ \phi_z \end{Bmatrix}, S_{xz}^s = A_{55}^s \left( kA' \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_z}{\partial x} \right) \quad (\text{IV.22})$$

Les termes de rigidité s'expriment de la manière présentée :

$$\begin{aligned} (A_{11}, A_{11}^s, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(1, g^2(z), z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) dz \\ (X_{13}, Y_{13}, Y_{13}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{13}(1, z, f(z)) g'(z) dz \\ A_{55}^s &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{55} [g(z)]^2 dz; Z_{33} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{33} [g'(z)]^2 dz \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

Les équations du mouvement peuvent être exprimées en fonction des déplacements généralisés ( $u_0$ ,  $w_0$ ,  $\theta$  et  $\phi$ ) en substituant l'équation (IV.22) dans la formulation énergétique décrite par l'équation (IV.23). Les équations différentielles gouvernantes obtenues adoptent alors la forme suivante :

$$A_{11c} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11c} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + (B_{11c}^s k) \frac{\partial \theta}{\partial x} + X_{13c} \frac{\partial \phi_z}{\partial x} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + J_1 A' k \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x}, \quad (\text{IV.24a})$$

$$B_{11c} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11c} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + (D_{11c}^s k) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \left( Y_{13c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + Y_{13c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi_z \quad (\text{IV.24b})$$

$$+ k_w w_0 - k_s \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + c_d \left( \frac{d^2 w_0}{dt^2} \right) = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \right) - I_2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} \right) + J_2 \left( kA' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \right) \quad (\text{IV.24c})$$

$$- (B_{11c}^s k) \frac{\partial u_0}{\partial x} + (D_{11c}^s k) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - H_{11c}^s k^2 \theta + A_{55c}^s (kA')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - Y_{13c}^s = - J_1 \left( kA' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \right) + J_2 \left( kA' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} \right) - K_2 \left( (kA')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \right) \quad (\text{IV.24d})$$

$$- X_{13c} \frac{\partial u_0}{\partial x} + Y_{13c} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + A_{55c}^s kA' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - Y_{13c}^s k\theta + A_{55c}^s \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial x^2} - Z_{33c} \phi_z = J_0 \ddot{w}_0 + K_0 + \ddot{\phi}_z \quad (\text{IV.24d})$$

## IV.6. Solutions analytiques

Les équations différentielles gouvernant les vibrations libres de la poutre FGM reposant sur une fondation viscoélastique sont résolues à l'aide de la méthode analytique de Navier, adaptée aux poutres simplement appuyées aux deux extrémités. La solution est développée sous forme d'une série de Fourier (Nabab et al. 2024), dont l'expression générale s'écrit :

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} U_m \cos(\alpha x) e^{i\omega t} \\ W_m \sin(\alpha x) e^{i\omega t} \\ X_m \sin(\alpha x) e^{i\omega t} \\ Y_m \sin(\alpha x) e^{i\omega t} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.25})$$

Les paramètres U, W, X et Y représentent des inconnues à déterminer dans la solution générale, tandis que  $\omega$  désigne la fréquence naturelle du système, dont la partie imaginaire est associée au terme  $\sqrt{i} = -1$  (unité imaginaire).

L'application de la méthode de substitution, consistant à introduire l'expression décrite par l'équation (IV.24) dans le système initial donné par l'équation (IV.25), permet de dériver le problème aux valeurs propres suivant, caractérisant le comportement dynamique du système :

$$([K] - \omega^2 [M] + \omega [C])\{\Delta\} = \{0\} \quad (\text{IV.26})$$

Sous formes matricielles :

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} + \beta & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_m \\ W_m \\ X_m \\ \Phi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.27})$$

Où : les matrices [K] (rigidité), [M] (masse) et [C] (amortissement global) caractérisent respectivement les propriétés mécaniques du système vibrant. Leurs composantes sont définies par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} S_{11} &= -A_{11} \alpha^2, S_{12} = B_{11} \alpha^3, S_{13} = \alpha k B_{11}^s, S_{14} = \alpha X_{13}, S_{22} = -D_{11} \alpha^4 - k_w - k_p \alpha^2, \\ S_{23} &= -k D_{11}^s \alpha^2, S_{24} = -\alpha^2 Y_{13}, S_{33} = -k (H_{11}^s k) - (k A')^2 A_{55}^s \alpha^2, \\ S_{34} &= -k Y_{13}^s - \alpha^2 k A' A_{55}^s, S_{44} = -\alpha^2 A_{55}^s - Z_{33}, \beta = N_{cr} (\gamma \alpha^2) \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

Les éléments matriciels de masse se spécifient de cette manière :

$$\begin{aligned} m_{11} &= -I_0, m_{12} = \alpha I_1, m_{13} = -J_1 k A' \alpha, m_{14} = 0, m_{22} = -I_0 - I_2 \alpha^2, m_{23} = J_2 (k A' \alpha^2), \\ m_{33} &= -K_2 ((k A')^2 \alpha^2), m_{24} = -J_0, m_{44} = -K_0 \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

Alors que la matrice d'amortissement s'exprime selon :

$$[C] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i.c_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.30})$$

Dans le cas des vibrations libres, l'énergie externe  $V$  est nulle, ce qui conduit à un problème aux valeurs propres dont la résolution du système d'équations (IV.27) permet de déterminer les fréquences naturelles de vibration.

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_m \\ W_m \\ X_m \\ \Phi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.31})$$

Lors de l'analyse du flambement, l'annulation de la fréquence propre permet de reformuler l'équation de stabilité sous la forme d'un problème aux valeurs propres, présenté comme suit :

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_m \\ W_m \\ X_m \\ \Phi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.32})$$

Pour obtenir des solutions non triviales aux équations (III.38) et (III.39), il est nécessaire que les déterminants correspondants soient nuls :

Vibration libre  $\rightarrow$  
$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.33a})$$

Flambement  $\rightarrow$  
$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.33b})$$

L'analyse du système d'équations (IV.33) conduit à la détermination des fréquences naturelles et des charges critiques de flambement, qui définissent respectivement les propriétés dynamiques et de stabilité de la poutre FGM considérée.

## IV.7 Présentation et analyse des résultats

Cette recherche vise à analyser la réponse vibratoire et la stabilité des poutres à gradient fonctionnel (2D-FGM) reposant sur des bases viscoélastiques de type Winkler-Pasternak. À cet effet, plusieurs simulations numériques ont été réalisées, portant à la fois sur des poutres homogènes et sur des poutres fonctionnellement graduées, simplement appuyées et reposant sur des fondations viscoélastiques caractérisées par trois paramètres principaux : la raideur de Winkler ( $k_w$ ) qui a été supposée variable selon différentes formes, la raideur de Pasternak ( $k_s$ ) et le coefficient d'amortissement ( $c_d$ ). Ces exemples permettent de valider la précision du modèle

proposé et d'examiner l'influence de différents facteurs tels que les indices de la loi de puissance, la géométrie de la poutre ainsi que le paramètre d'amortissement sur la réponse vibratoire et la stabilité de ces structures. La poutre FG étudiée est composée de deux matériaux distincts, à savoir la céramique ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) et l'aluminium (Al), dont les propriétés mécaniques sont récapitulées dans le tableau 0-1.

#### IV.7.1 Matériaux choisis pour l'étude numérique

Dans cette section, nous présentons une étude approfondie de la vibration libre et du flambement des poutres bidirectionnelles à gradient de fonction (FG), reposant sur des fondations viscoélastiques à raideur variable. L'analyse est menée en appliquant la théorie quasi-3D, qui permet de prendre en compte de manière plus réaliste les effets d'épaisseur et les distributions non linéaires des contraintes et déplacements. Pour résoudre les équations aux valeurs propres associées à ces phénomènes vibratoires et de stabilité, nous utilisons le logiciel MAPLE, reconnu pour sa puissance dans le calcul symbolique et numérique.

Les poutres FGM étudiées sont composées d'un mélange progressif de métal (aluminium) et de céramique (alumine), dont les propriétés matérielles varient selon la direction considérée, comme détaillé dans le tableau IV-1 ci-dessous. Ce modèle permet d'évaluer l'influence de la variation des propriétés matérielles, ainsi que celle de la raideur variable de la fondation, sur les fréquences naturelles de vibration et les charges critiques de flambement des poutres.

**Tableau IV 1** Paramètres mécaniques des matériaux utilisés dans les poutres FG bidirectionnelles

Matériaux	Propriétés		
	$E$ (GPa)	$\nu$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
Céramique ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ )	380	0,3	3800
Métal (Al)	70	0,3	2720

Le coefficient de Poisson des poutres FG bidirectionnelles est supposé constant sur toute l'épaisseur et fixé à 0,3. Afin de faciliter l'analyse comparative et la généralisation des résultats, la fréquence de vibration sans dimension, la charge critique du flambement ainsi que les paramètres adimensionnels de la fondation viscoélastique à raideur variable sont adoptées dans l'ensemble des études numériques portant sur la vibration libre et le flambement des poutres FG. Ces paramètres permettent d'uniformiser la présentation des résultats et d'assurer leur pertinence pour différentes configurations de fondation et de matériau.

$$\begin{aligned}
D_m &= \frac{E_m h^3}{12(1-\nu^2)} ; \bar{K}_p = \frac{k L^2}{D_i}, \quad i = m, c ; D_c = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \bar{K}_w = \frac{k_w L^4}{D_i}, \quad i = m, c \\
\hat{\omega} &= \omega \left( \frac{L^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} ; \beta = \sqrt[4]{\frac{\rho_c \cdot A \cdot L^4 \cdot \omega^2}{EI}} ; \bar{\omega} = \omega \left( \frac{L^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}} ; \bar{N} = N_{cr} \frac{12L^2}{h^3 E_m}
\end{aligned} \tag{IV.1}$$

Ici,  $D$  désigne la rigidité de flexion de référence de la poutre à gradient fonctionnel.

#### IV.7.2 Validation de la pertinence du modèle analytique suggéré

Afin d'évaluer la précision du modèle proposé dans cette étude, une analyse comparative a été menée. Celle-ci concerne une poutre à gradient fonctionnel (FG) reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak. Les résultats obtenus ont été confrontés à ceux disponibles dans la littérature scientifique. Les comparaisons correspondantes sont présentées dans les Tableaux IV.2, IV.3 et IV.4.

**Tableau IV 2** Analyse comparative des fréquences naturelles adimensionnelles des poutres à gradient fonctionnel (FG)

L/h	Théorie	$P_z$					
		0	0.5	1	2	5	10
5	Nguyen et al. [113]	5,1528	4,4102	3,9904	3,6264	3,4009	3,2815
	Nguyen et al. [106]	5,1525	4,4075	3,9902	3,6344	3,4312	3,3135
	Thai et al. [114]	5,1527	4,4107	3,9904	3,6264	3,4012	3,2816
	Modèle proposé ( $p_x=0$ )	5.1358	4.4124	4.0065	3.6503	3.4139	3.2799
20	Nguyen et al. [113]	5,4603	4,6506	4,2051	3,8386	3,6485	3,5396
	Nguyen et al. [106]	5,4603	4,6504	4,2051	3,8386	3,6509	3,5416
	Thai et al. [114]	5,4603	4,6511	4,2051	3,8386	3,6485	3,539
	Modèle proposé ( $p_x=0$ )	5.4633	4.6686	4.2372	3.8785	3.6851	3.5621

**Tableau IV 3** Comparaison du paramètre adimensionnel de la fréquence fondamentale pour des poutres homogènes isotropes reposant sur une fondation élastique

L/h	Théorie	$(k_w, k_s/\pi^2)$								
		(0,0)	(0,1)	(0, 2.5)	(10 <sup>2</sup> ,0)	(10 <sup>2</sup> ,1)	(10 <sup>2</sup> , 2.5)	(10 <sup>4</sup> ,0)	(10 <sup>4</sup> ,1)	(10 <sup>4</sup> , 2.5)
5	Chen et al. [109]	3.04799	3.65802	4.21834	3.67050	4.06636	4.49914	7.34081	7.34095	7.34116
	Chikh [110]	3.11161	3.70107	4.25717	3.71333	4.10521	4.53999	7.84931	7.84931	7.84931
	Fahsi et al. [105]	3.07701	3.64655	4.18246	3.68172	4.05578	4.47007	7.76049	7.76049	7.76049
	Mellal et al. [97]	3.04552	3.66715	4.23953	3.67987	4.08395	4.52797	7.37658	7.37658	7.37658
	Modèle proposé ( $p_x=0$ )	$C_d=0$	3.04041	3.65048	4.21442	3.66300	4.06105	4.49878	7.55257	7.55257
	$C_d=5$	3.01513	3.63619	4.20533	3.64886	4.05082	4.49140	7.55257	7.55257	7.55257
	$C_d=10$	2.93179	3.59143	4.17737	3.60461	4.01927	4.46883	7.55257	7.55257	7.55257
15	Chen et al. [109]	3.13025	3.72657	4.28809	3.73895	4.13472	4.57347	9.99582	10.0197	10.0552
	Chikh [110]	3.13730	3.73165	4.29237	3.74400	4.13915	4.57757	10.0145	10.0386	10.0744
	Fahsi et al. [105]	3.13421	3.72621	4.28517	3.74080	4.13412	4.57084	10.0045	10.0283	10.0638
	Mellal et al. [97]	3.1300	3.72741	4.28973	3.73981	4.13615	4.57546	10.0150	10.0390	10.0748
	Modèle proposé ( $p_x=0$ )	$C_d=0$	3.13081	3.72686	4.28829	3.73924	4.13493	4.57366	10.0064	10.0304
	$C_d=5$	3.10513	3.71180	4.27845	3.72433	4.12394	4.56556	10.0056	10.0296	10.0653
	$C_d=10$	3.02078	3.66464	4.24821	3.67768	4.09005	4.54082	10.0033	10.0274	10.0631
120	Chen et al. [109]	3.14143	3.73588	4.29687	3.74823	4.14356	4.58227	10.0240	10.0481	10.0839
	Chikh [110]	3.14028	3.73520	4.29646	3.74757	4.14309	4.58192	10.0241	10.0482	10.0839
	Fahsi et al. [105]	3.14148	3.73585	4.29683	3.74825	4.14355	4.58222	10.0239	10.0481	10.0839
	Mellal et al. [97]	3.14141	3.73587	4.29689	3.74823	4.14358	4.58228	10.0241	10.0482	10.0840
	Modèle proposé ( $p_x=0$ )	$C_d=0$	3.14214	3.73628	4.29716	3.74864	4.14388	4.58249	10.0241	10.0481
	$C_d=5$	3.11644	3.72116	4.28726	3.73366	4.13283	4.57434	10.0233	10.0474	10.0832
	$C_d=10$	3.03205	3.67381	4.25684	3.68681	4.09875	4.54943	10.0209	10.0451	10.0809

Les tableaux IV 2 et IV 3 présentent une comparaison détaillée des fréquences naturelles non dimensionnelles pour des poutres homogènes isotropes reposant sur des fondations élastiques, avec différentes valeurs du rapport d'épaisseur L/h et des paramètres de fondation.

L'analyse des résultats montre une excellente concordance entre la théorie proposée et les données de référence issues de la littérature scientifique antérieure. Pour le tableau IV 2, comparant les fréquences des poutres FG à différents rapports d'épaisseur (L/h = 5 et 20), la théorie actuelle produit des valeurs très proches de celles obtenues par Nguyen et al. [106],[113]

et Thai et al.[114], avec des écarts généralement inférieurs à 1%. Cette concordance est particulièrement remarquable pour les différentes valeurs du paramètre de  $p_z$ .

Dans le tableau IV 3, qui présente une comparaison plus extensive pour des rapports L/h variant de 5 à 120 avec différentes configurations des paramètres de fondation, on observe également une très bonne correspondance avec les résultats de Chen et al. [109], Chikh [110], Fahsi et al. [105], et Mellal et al [97]. Les données confirment que l'augmentation du paramètre de Winkler ( $k_w$ ) entraîne une augmentation des fréquences fondamentales non dimensionnelles, tandis que le facteur d'amortissement ( $c_d$ ) a l'effet inverse, réduisant légèrement ces fréquences. On remarque également que l'influence des paramètres de fondation ( $k_w$  et  $k_s$ ) est plus prononcée pour les poutres élancées (grands rapports L/h), ce qui souligne l'importance d'une modélisation précise des conditions de fondation pour les structures minces. Ces résultats valident la robustesse et la précision de l'approche théorique développée, démontrant sa capacité à prédire avec fiabilité le comportement vibratoire des poutres sur fondations élastiques pour une large gamme de paramètres structurels et de fondation.

**Tableau IV 4** Paramètre de charge critique de flambement ( $N_{cr}$ ) pour une poutre homogène isotrope de rapport portée/hauteur (L/h) égal à 20, reposant sur une fondation élastique.

$k_w$	$K_s/\pi^2$	Rao <i>et al.</i> (2019)	Chikh [110]	Nebab <i>et al.</i> [101]	Modèle Propose ( $p_x=p_z=0$ )
0	0	9.8696	9.8538	9.8298	9.8211
	0.5	14.8040	14.7886	14.7646	14.7559
	1	19.7390	19.7234	19.6994	19.6907
	2.5	34.5440	29.5930	34.5038	34.4951
1	0	9.9709	9.9551	9.9311	9.9224
	0.5	14.9070	14.8899	14.8659	14.8572
	1	19.8410	19.8247	19.8007	19.7920
	2.5	34.6450	29.6943	34.6051	34.5964
$10^2$	0	20.0020	19.9859	19.9619	19.9532
	0.5	24.9370	24.9207	24.8967	24.8880
	1	29.8710	29.8555	29.8315	29.8228
	2.5	44.6760	39.7251	44.6359	44.6272
$10^4$	0	1023.1000	1023.0656	1023.0416	1023.0329
	0.5	1028.0000	1028.0004	1027.9764	1027.9677
	1	1032.9000	1032.9352	1032.9112	1032.9025
	2.5	1047.7000	1042.804	1047.7156	1047.7069

**Tableau IV 5** Comparaison des charges de flambement pour une poutre homogène isotrope avec un rapport  $L/h = 20$  reposant sur une fondation élastique

$k_w$	Théorie	$K_s/\pi^2$			
		0	0,5	1	2,5
0	Venkateswara [116]	9,8696	14,804	19,739	34,544
	Ait Atmane [115]	9,81258	14,73869	19,66476	34,44275
	Fahsi et al, [105]	9,8289	14,73743	19,6458	34,37
	Modèle proposé $C_d=0$	9,82108	14,75588	19,69068	34,49509
	Modèle proposé $C_d=5$	9,81929	14,75409	19,68890	34,49330
	Modèle proposé $C_d=10$	9,81750	14,75230	19,68711	34,49151
1	Venkateswara [116]	9,9709	14,907	19,841	34,645
	Ait Atmane [115]	9,91372	14,83983	19,76591	34,54388
	Fahsi et al, [105]	9,92996	14,83848	19,74685	34,47105
	Modèle proposé $C_d=0$	9,9224	14,85721	19,79201	34,59641
	Modèle proposé $C_d=5$	9,92061	14,85542	19,79022	34,59462
	Modèle proposé $C_d=10$	9,91882	14,85362	19,78843	34,59283
$10^2$	Venkateswara [116]	20,002	24,937	29,871	44,676
	Ait Atmane [115]	19,92681	24,85284	29,77884	44,55658
	Fahsi et al, [105]	19,93403	24,8424	29,75062	44,47435
	Modèle proposé $C_d=0$	19,9532	24,888	29,82281	44,62721
	Modèle proposé $C_d=5$	19,95141	24,88621	29,82101	44,62542
	Modèle proposé $C_d=10$	19,94962	24,88442	29,81922	44,62363
$10^4$	Venkateswara [116]	1023,1	1028	1032,9	1047,7
	Ait Atmane [115]	1020,41776	1025,33582	1030,25385	1045,00769
	Fahsi et al, [105]	1019,55088	1024,44386	1029,33669	1044,01427
	Modèle proposé $C_d=0$	1023,03292	1027,96772	1032,90252	1047,70693
	Modèle proposé $C_d=5$	1023,03113	1027,96593	1032,90073	1047,70514
	Modèle proposé $C_d=10$	1023,02934	1027,96414	1032,89894	1047,70335

Les tableaux IV 4 et IV 5 présentent une analyse comparative détaillée des paramètres de charge critique de flambement ( $N_{cr}$ ) pour des poutres homogènes isotropes avec un rapport longueur-hauteur ( $L/h$ ) de 20, reposant sur des fondations élastiques sous diverses conditions paramétriques. L'examen approfondi des résultats révèle une excellente corrélation entre la théorie proposée et les données de référence issues de la littérature scientifique. Pour le tableau IV 4, les valeurs obtenues montrent une concordance remarquable avec les travaux antérieurs de Rao et al. (2019), Chikh [110] et Nebab et al. [101], avec des écarts typiquement inférieurs à 1%. Cette précision se maintient à travers différentes combinaisons de paramètres de fondation, notamment pour les variations du paramètre de Winkler ( $k_w$ ) allant de 0 à  $10^4$  et du paramètre de Pasternak normalisé ( $k_s/\pi^2$ ) variant de 0 à 2,5.

Le tableau IV .5 confirme cette tendance en comparant les résultats avec les travaux de Ventakatswara [116], Ait Atmane et al. [115] et Fahsi et al. [105]. On observe que l'augmentation du paramètre de Winkler induit une augmentation significative de la charge critique de flambement, particulièrement notable pour les valeurs élevées ( $k_w = 10^4$ ), où  $N_{cr}$  atteint des valeurs supérieures à 1000. De façon similaire, l'augmentation du paramètre de Pasternak renforce considérablement la résistance au flambement de la poutre, avec des effets plus prononcés pour les valeurs plus élevées de  $k_s/\pi^2$ .

Un aspect novateur de l'étude actuelle réside dans l'incorporation du facteur d'amortissement ( $c_d$ ), dont l'influence est systématiquement quantifiée pour différentes valeurs ( $c_d = 0, 5$  et  $10$ ). Les résultats montrent qu'une augmentation du facteur d'amortissement entraîne une légère diminution de la charge critique de flambement, un phénomène cohérent à travers toutes les configurations paramétriques. Cette observation souligne l'importance de considérer les effets dissipatifs dans l'analyse de stabilité des structures sur fondations élastiques.

### **IV.7.3. Étude paramétrique**

Une investigation paramétrique approfondie portant sur l'influence de multiples variables, notamment les caractéristiques matérielles, les dimensions géométriques et la configuration structurelle de la poutre, les propriétés du support de fondation ainsi que le facteur d'atténuation visqueuse, a été menée concernant le comportement dynamique et les charges critiques du flambement d'une poutre à gradient fonctionnel avec conditions d'appui simple, reposant sur un substrat viscoélastique variable, les résultats de cette investigation sont détaillés dans ce qui suit.

#### **IV.7.3.1 Vibration libre**

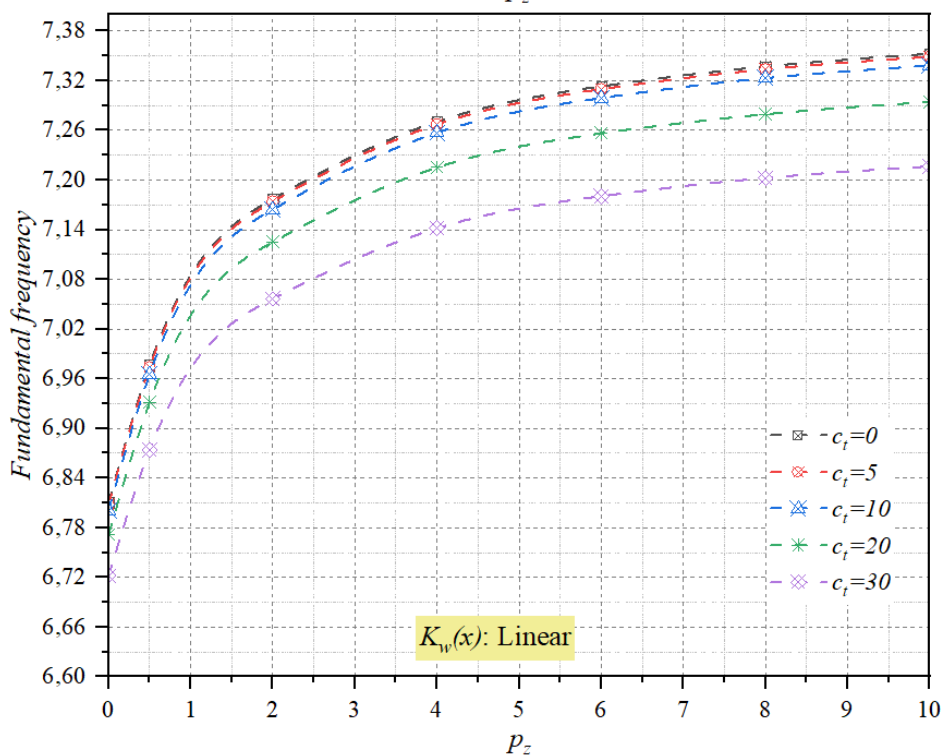
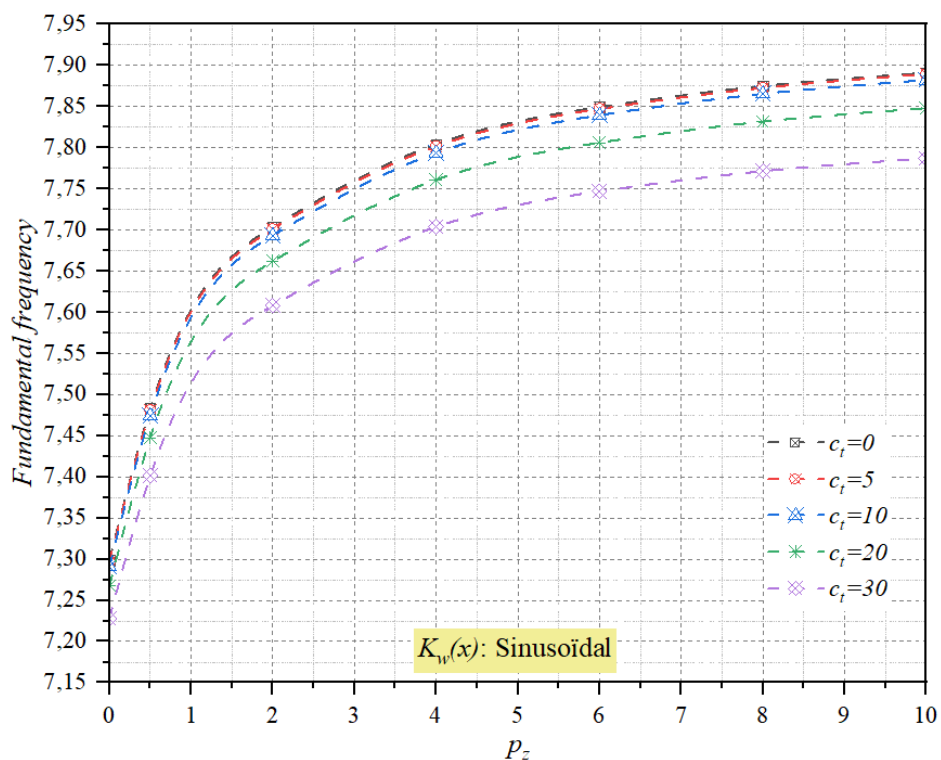
Le tableau IV 6 présente l'évolution des fréquences propres d'une poutre à gradient fonctionnel bidirectionnel (2D-FGM) simplement appuyée, soumise à une variation linéaire du paramètre de Winkler, pour différents rapports d'aspect ( $L/h$ ) et combinaisons d'indices de puissance ( $p_x, p_z$ ). Les paramètres de la fondation sont fixés avec un facteur d'amortissement  $c_d$  égal à 10 et un facteur  $\zeta$  fixé à 20.

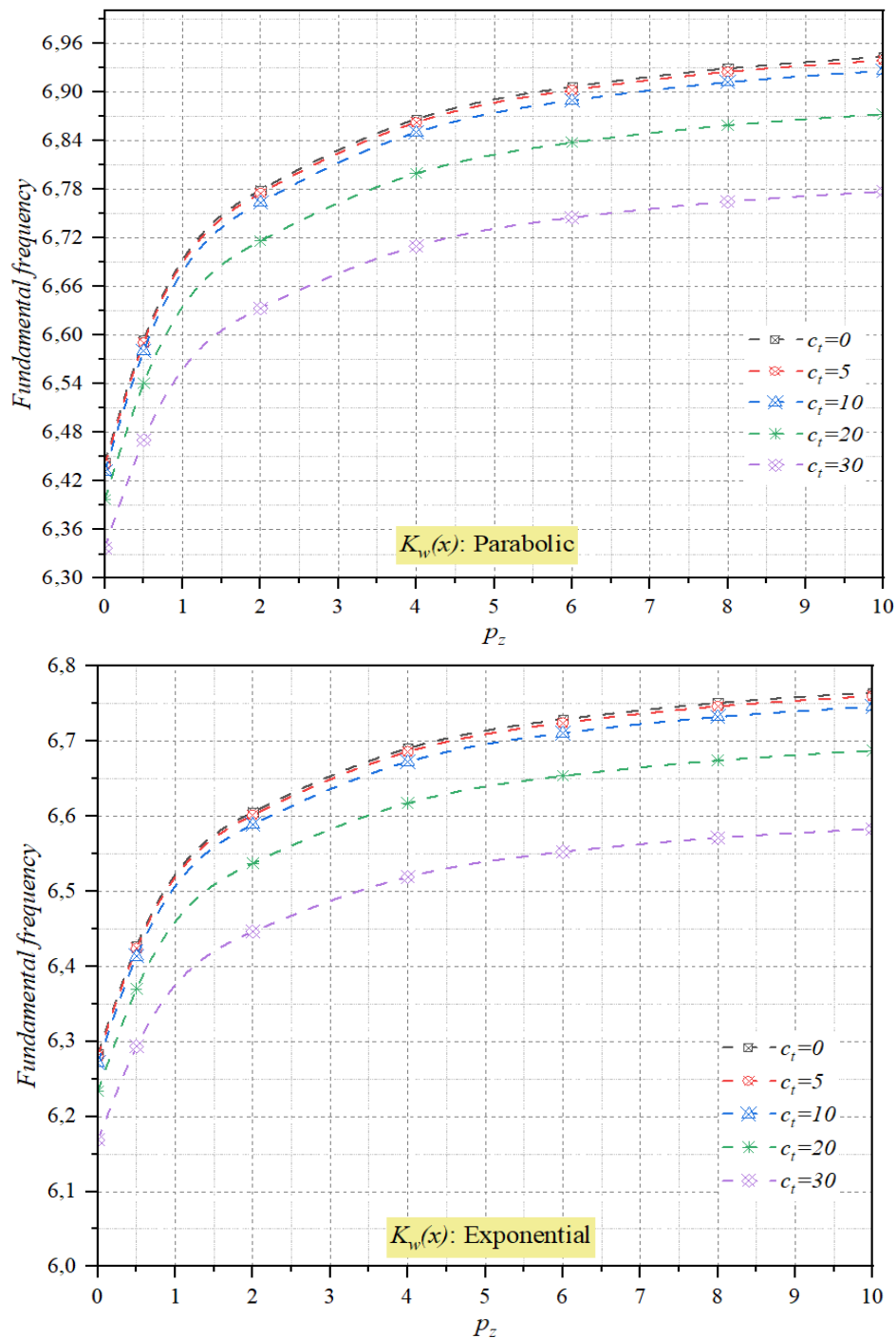
**Tableau IV 6** Effet des indices de puissance et de la variation linéaire du paramètre de Winkler sur les fréquences propres d'une poutre 2D-FGM reposant sur une fondation viscoélastique ( $\zeta = 20$ ,  $c_d = 10$ )

L/h	$(k_w, k_s)$	$p_x$	$p_z$					
			0	0,5	2	5	8	10
5	0	0	2,93179	2,63268	2,14857	2,03877	2,15983	2,20267
		0,5	2,92626	2,62694	2,14189	2,04467	2,16324	2,20547
		2	2,97152	2,67395	2,19483	1,98988	2,13341	2,18114
		5	3,22581	2,94251	2,45841	2,14985	1,96848	1,89306
	(0,100)	0	5,62526	5,73772	5,87674	5,96157	5,89851	5,82832
		0,5	5,62895	5,74062	5,87847	5,96251	5,89456	5,82491
		2	5,59773	5,71594	5,86365	5,95431	5,92810	5,85391
		5	5,37118	5,52728	5,74205	5,88304	5,93860	5,96034
	(100,0)	0	5,76740	5,88637	6,03199	6,07743	5,89763	5,82785
		0,5	5,77128	5,88940	6,03379	6,07217	5,89371	5,82445
		2	5,73844	5,86364	6,01842	6,11406	5,92698	5,85328
		5	5,49950	5,66615	5,89259	6,03927	6,09850	6,07176
(100,100)	0	6,69978	6,85256	6,52815	6,07628	5,89825	5,82855	
	0,5	6,70470	6,85625	6,52033	6,07112	5,89433	5,82515	
	2	6,66296	6,82476	6,58600	6,11473	5,92749	5,85401	
	5	6,35421	6,57903	6,87136	6,43129	6,17343	6,07029	
20	0	0	3,02578	2,71027	2,22942	2,02082	2,16702	2,21724
		0,5	3,02011	2,70445	2,22305	2,02951	2,17135	2,22072
		2	3,06655	2,75216	2,27384	1,93501	2,13263	2,19009
		5	3,32786	3,02533	2,53196	2,26431	2,14779	2,06526
	(0,100)	0	5,71658	5,83002	5,97743	6,07113	6,10434	6,11621
		0,5	5,72034	5,83307	5,97934	6,07214	6,10500	6,11674
		2	5,68850	5,80716	5,96305	6,06341	6,09932	6,11220
		5	5,45967	5,61184	5,83171	5,98908	6,04967	6,07215
	(100,0)	0	5,86172	5,98288	6,13814	6,23548	6,26999	6,28238
		0,5	5,86571	5,98609	6,14013	6,23655	6,27069	6,28293
		2	5,83205	5,95886	6,12314	6,22742	6,26470	6,27813
		5	5,58969	5,75345	5,98629	6,14995	6,21270	6,23602
(100,100)	0	6,82064	6,98567	7,18651	7,30597	7,34831	7,36377	
	0,5	6,82587	6,98978	7,18898	7,30731	7,34920	7,36450	
	2	6,78163	6,95486	7,16783	7,29583	7,34148	7,35820	
	5	6,46041	6,69026	6,99789	7,19962	7,27563	7,30413	

A partir des résultats présentés dans ce tableau, on observe que, pour chaque configuration, l'augmentation du rapport L/h entraîne une hausse notable des valeurs de la fréquence, traduisant une plus grande rigidité globale de la poutre à mesure que sa longueur augmente par rapport à son épaisseur. De plus, les fréquences propres augmentent systématiquement avec la croissance des valeurs de  $k_w$ , ce qui indique que le renforcement progressif de la fondation viscoélastique améliore la stabilité dynamique de la structure. L'analyse comparative pour différentes valeurs des indices de puissance ( $p_x$ ,  $p_z$ ) révèle que la distribution des matériaux dans les directions x et z influence sensiblement la réponse vibratoire. Les combinaisons d'indices élevés, en particulier (100,100), conduisent à des fréquences plus

élevées, ce qui s'explique par une répartition plus optimale des propriétés mécaniques dans la poutre.





**Figure IV 3:**Évolution de la partie réelle des fréquences propres non dimensionnelles en fonction de l'amortissement de fondation et de la gradation matérielle  $p_z$  selon quatre profils de variation du module de Winkler ( $p_x=0, L/h=10, \zeta=20, k_w=k_s=100$ )

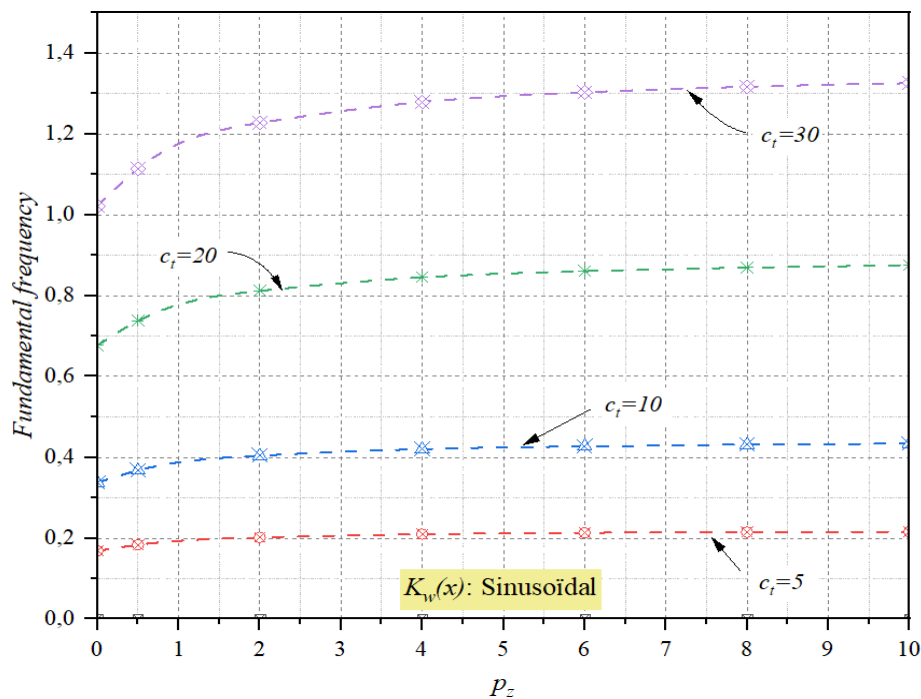
Les figures IV.3 illustrent l'évolution de la partie réelle de la première fréquence fondamentale non dimensionnelle d'une poutre fonctionnellement graduée (FGM) en fonction de l'indice de la loi de puissance  $p_z$ . Cette évolution est analysée pour diverses formes de variation du paramètre

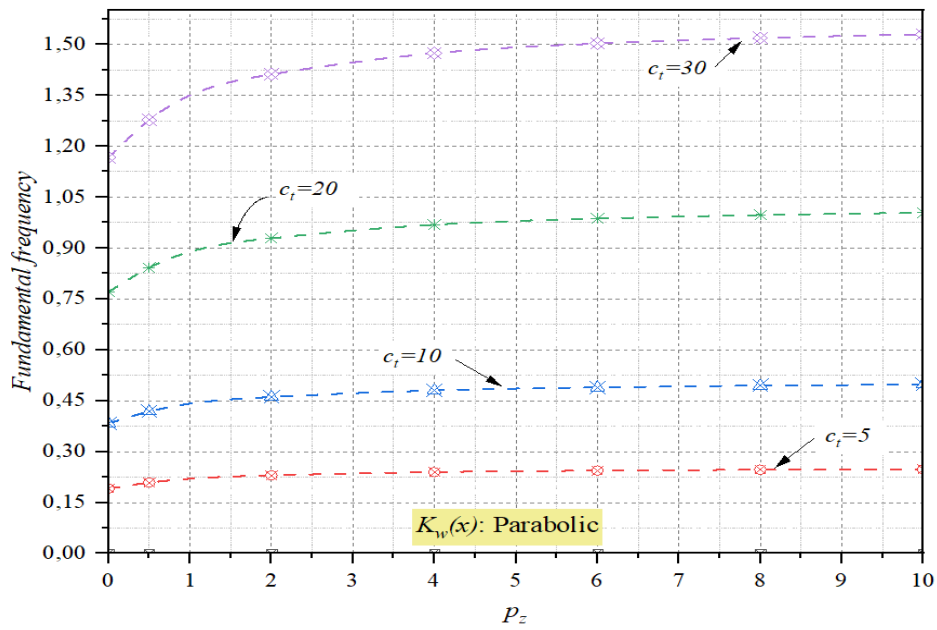
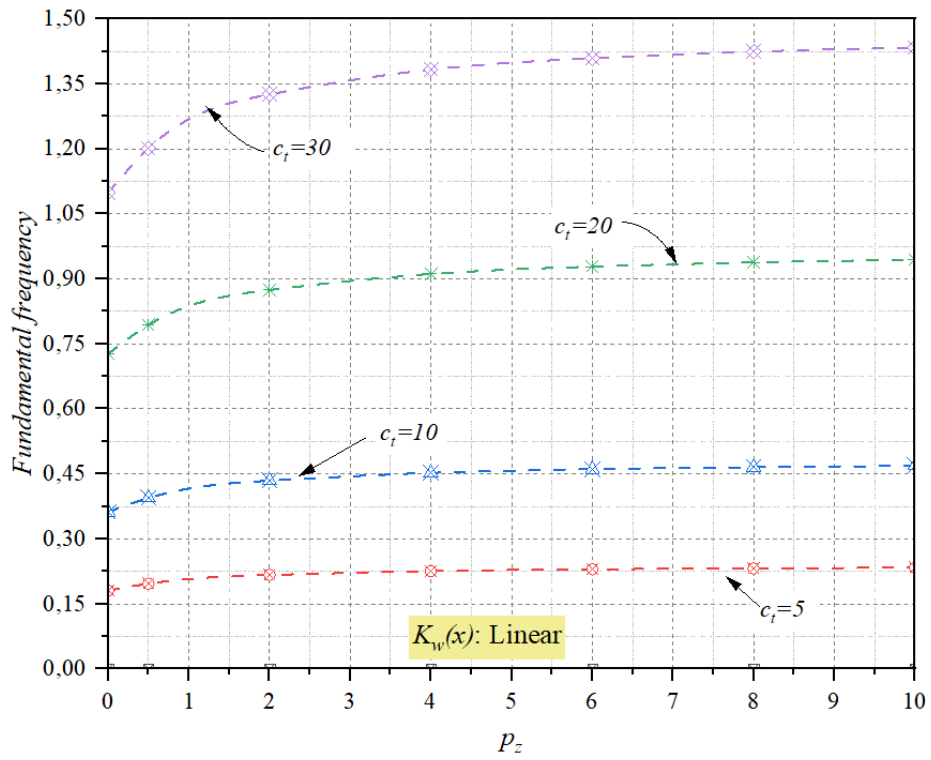
de Winkler  $k_w(x)$  (sinusoïdale, linéaire, parabolique, exponentielle) et pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement de la fondation  $c_d$ , avec  $p_x = 0$ ,  $L/h = 10$ ,  $\zeta = 20$  et  $k_w = k_s = 100$ .

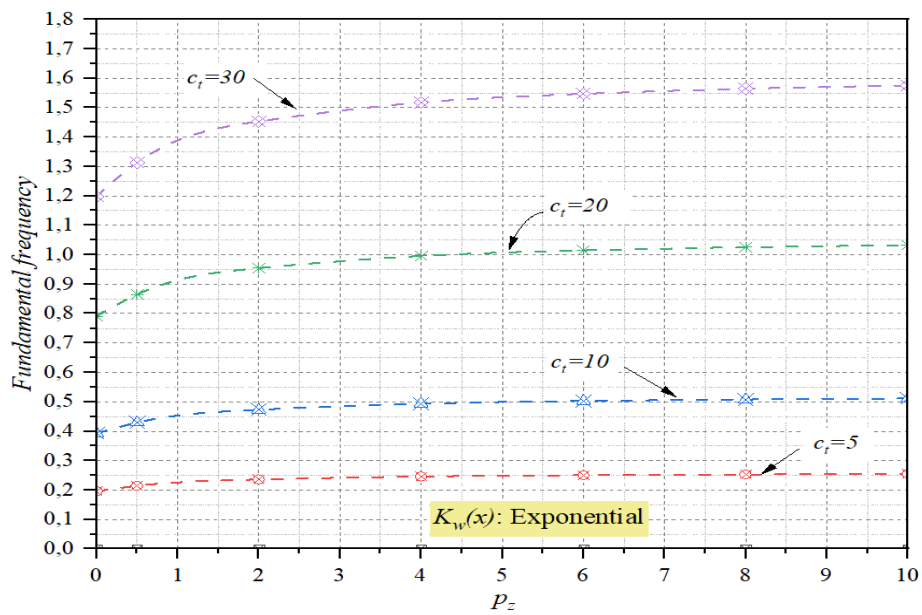
Il ressort de l'analyse que, indépendamment du profil de variation de  $k_w(x)$ , une augmentation de l'indice de puissance  $p_z$  conduit à une élévation rapide, suivie d'une stabilisation progressive de la fréquence fondamentale. Ce phénomène peut être attribué à l'augmentation de la proportion du matériau le plus rigide dans la direction de l'épaisseur, ce qui renforce la rigidité globale de la poutre et, par conséquent, ses fréquences propres.

L'effet du coefficient d'amortissement  $c_d$  est également notable. En effet, plus  $c_d$  augmente, plus la fréquence fondamentale diminue, illustrant ainsi l'impact dissipatif de la fondation viscoélastique sur le comportement vibratoire de la poutre. Cette diminution est particulièrement marquée pour les faibles valeurs de  $p_z$ , puis tend à se stabiliser lorsque l'indice de puissance devient élevé, où la rigidité du matériau devient dominante par rapport à l'effet d'amortissement.

Enfin, une comparaison entre les différentes formes de variation de  $k_w$  montre qu'à coefficient d'amortissement  $c_d$  et indice de puissance  $p_z$  égaux, la fréquence fondamentale est toujours plus élevée pour une distribution sinusoïdale de  $k_w$ , suivie par les distributions linéaires, parabolique et exponentielle. Cela suggère que la façon dont la rigidité de la fondation varie spatialement a un impact significatif sur la réponse dynamique de la poutre FG : plus la distribution de  $k_w$  favorise une rigidité accrue dans les zones sollicitées, plus la structure présente une fréquence fondamentale élevée.







**Figure IV 4** Évolution de la partie imaginaire des fréquences propres non dimensionnelles en fonction de l'amortissement de fondation et de la gradation matérielle  $p_z$  selon quatre profils de variation du module de Winkler ( $p_x = 0$ ,  $L/h = 10$ ,  $\zeta = 20$ ,  $k_w = k_s = 100$ )

Les figures IV.4 montrent l'évolution de la partie imaginaire de la première fréquence fondamentale non dimensionnelle d'une poutre fonctionnellement graduée (FG) soutenue par une fondation viscoélastique selon quatre profils de variation du paramètre de Winkler : exponentiel, parabolique, linéaire et sinusoïdal. Le facteur d'amortissement de la fondation  $c_d$  varie de 5 à 30, et l'indice de loi de puissance  $p_z$  variant sur l'intervalle  $[0, 10]$ .

Pour l'ensemble des configurations étudiées, on constate que l'augmentation du coefficient d'amortissement  $c_d$  de 5 à 30 entraîne systématiquement une élévation significative des valeurs de fréquence fondamentale. Cette observation contre-intuitive s'explique par le fait que l'amortissement de la fondation viscoélastique modifie la rigidité effective du système, créant un couplage complexe entre les propriétés dissipatives et les caractéristiques dynamiques de la poutre.

L'évolution en fonction de l'indice de puissance  $p_z$  présente un comportement caractéristique : une croissance rapide pour les faibles valeurs de  $p_z$  ( $0 \leq p_z \leq 2$ ), suivie d'une stabilisation progressive vers des valeurs asymptotiques pour  $p_z > 4$ . Cette tendance reflète l'influence de la gradation matérielle dans la direction de l'épaisseur, où l'augmentation de  $p_z$  favorise la concentration du matériau le plus rigide, améliorant ainsi les propriétés vibratoires globales de la structure.

La comparaison entre les différents profils de variation du paramètre de Winkler révèle une hiérarchie claire : le profil exponentiel génère les fréquences les plus élevées, suivi des profils paraboliques, linéaire et sinusoïdal. Cette classification indique que la distribution spatiale de la rigidité de fondation influence considérablement la réponse dynamique, les profils concentrant la rigidité de manière plus prononcée étant plus favorables à l'obtention de fréquences élevées.

**Tableau IV 7** Évolution de la fréquence fondamentale d'une poutre homogène sur fondation viscoélastique en fonction du coefficient d'amortissement et des profils de variation du paramètre de Winkler ( $p_x = p_z = 2$ ,  $L/h = 10$ ,  $\zeta = 20$ ,  $k_w = k_s = 10$ )

$L/h$	$C_d$	Fréquence fondamentale			
		exp	Sinusoïdal	Parabolique	Linéaire
5	0	6,46232	6,58684	6,55999	6,58373
	5	6,47557	6,58691	6,58520	6,58455
	10	6,47069	6,58710	6,58818	6,58600
	15	6,45654	6,58735	6,58869	6,58708
	20	6,43526	6,58761	6,60757	6,58774
	25	6,40654	6,58785	6,58199	6,58815
	30	6,36946	6,58806	6,54926	6,58840
20	0	6,60833	7,70877	6,78220	7,18107
	5	6,60410	7,70610	6,77828	7,17777
	10	6,59131	7,69809	6,76647	7,16783
	15	6,56972	7,68464	6,74654	7,15112
	20	6,53887	7,66560	6,71813	7,12738
	25	6,49808	7,64076	6,68068	7,09625
	30	6,44637	7,60984	6,63338	7,05723

Le tableau IV -7 présente l'analyse comparative de la première fréquence fondamentale non dimensionnelle pour une poutre homogène ( $p_x = p_z = 2$ ) reposant sur une fondation viscoélastique, selon quatre profils de distribution du paramètre de Winkler : exponentiel, sinusoïdal, parabolique et linéaire.

L'analyse du Tableau IV-7 révèle des tendances significatives concernant l'évolution de la fréquence fondamentale d'une poutre à gradient fonctionnel bidirectionnel ( $p_x = p_z = 2$ ) reposant sur une fondation viscoélastique à rigidité variable. Les résultats démontrent que l'augmentation du rapport d'élanement  $L/h$  de 5 à 20 entraîne une élévation notable des fréquences pour tous les profils de variation du paramètre de Winkler étudiés, traduisant l'influence directe de la géométrie sur la rigidité structurelle. Paradoxalement, l'accroissement du coefficient d'amortissement  $c_d$  induit une diminution progressive des valeurs de fréquence, particulièrement marquée pour le profil exponentiel qui passe de 6,46232 à 6,36946 pour  $L/h = 5$ , illustrant l'effet dissipatif de la fondation viscoélastique sur les caractéristiques vibratoires.

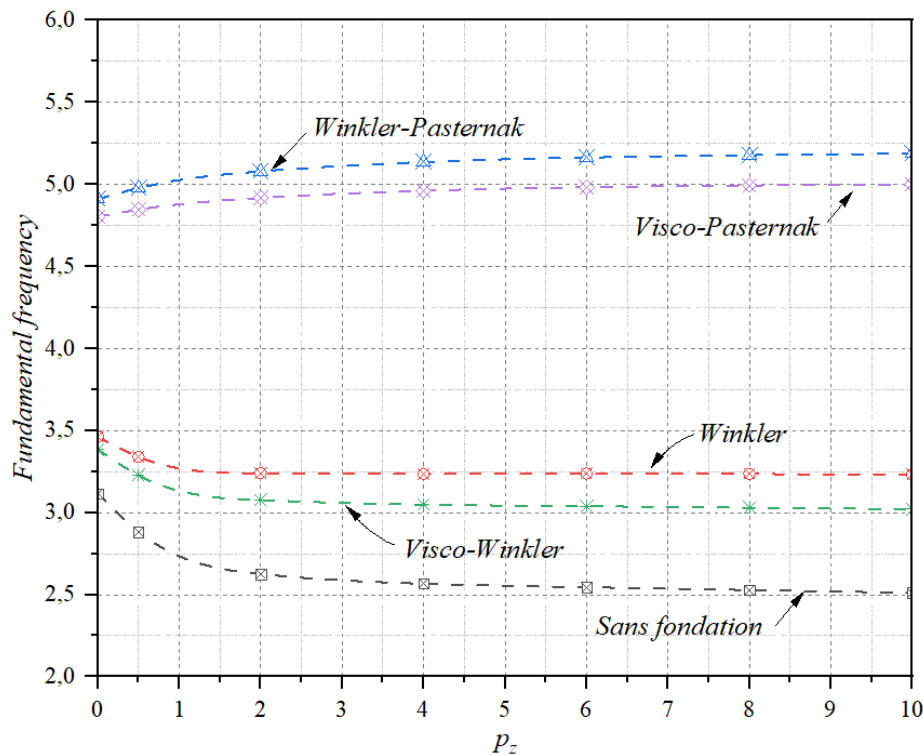
La hiérarchie observée entre les différents profils - avec le profil sinusoïdal présentant systématiquement les valeurs les plus élevées, suivi des profils linéaire, parabolique et exponentiel - souligne l'importance cruciale de la distribution spatiale de la rigidité de fondation dans l'optimisation des performances dynamiques.

**Tableau IV 8** Influence du paramètre  $\zeta$  sur la fréquence fondamentale d'une poutre FG bidirectionnelle selon différents profils de variation du paramètre de Winkler ( $p_x = p_z = 2$ ,  $c_d = 20$ ,  $k_w = k_s = 100$ )

$\zeta$	L/h=5				L/h=20			
	Linéaire	Sinusoïdal	Parabolique	Exp	Linéaire	Sinusoïdal	Parabolique	Exp
0	5,95221	5,95221	5,95221	5,95221	6,03868	6,03868	6,03868	6,03868
10	6,54186	6,58802	6,30669	6,20849	6,64970	6,99310	6,40543	6,30367
20	6,58774	6,58761	6,60757	6,43526	7,12738	7,66560	6,71813	6,53887
30	6,58755	6,58798	6,58802	6,63919	7,52460	8,19674	6,99236	6,75109
40	6,58774	6,58824	6,58761	6,58814	7,86729	8,64094	7,23763	6,94497
50	6,58796	6,58841	6,58754	6,58775	8,17024	9,02553	7,23763	7,12384
60	6,58813	6,58853	6,58761	6,58757	8,44278	9,36639	7,66448	7,29016

Dans le tableau IV -8, l'effet du paramètre  $\zeta$  sur la variation de la fréquence d'une poutre FG bidirectionnelle selon différents profils de variation du paramètre de Winkler, dont les indices de puissances  $p_x$  et  $p_z$  sont pris égale à 2, tandis que les autres paramètres de la fondation  $k_w$ ,  $k_s$  et  $c_d$  sont fixés à 100, 100 et 20, respectivement. L'examen du tableau révèle plusieurs tendances remarquables concernant l'effet du paramètre  $\zeta$  sur le comportement vibratoire des poutres à gradient fonctionnel bidirectionnel. Pour les poutres courtes ( $L/h = 5$ ), on constate que l'effet du paramètre  $\zeta$  reste relativement modéré, avec une augmentation progressive des fréquences qui tend vers une stabilisation autour de 6,588 pour tous les profils de variation du paramètre de Winkler. Cette convergence suggère que pour les structures peu élancées, l'influence du paramètre  $\zeta$  atteint rapidement un seuil d'efficacité au-delà duquel les gains deviennent marginaux.

En revanche, pour un rapport d'élancement élevé ( $L/h = 20$ ), l'influence du paramètre  $\zeta$  devient beaucoup plus prononcée, particulièrement pour les profils sinusoïdal et parabolique qui montrent des augmentations significatives des fréquences avec l'accroissement de  $\zeta$ . Cette sensibilité accrue s'explique par le fait que les poutres élancées sont plus sensibles aux variations des propriétés de la fondation viscoélastique. Il est également notable que pour  $L/h = 20$ , la hiérarchie entre les profils change : le profil sinusoïdal devient dominant avec des valeurs atteignant 9,36639 pour  $\zeta = 60$ , tandis que le profil exponentiel reste le plus conservateur.



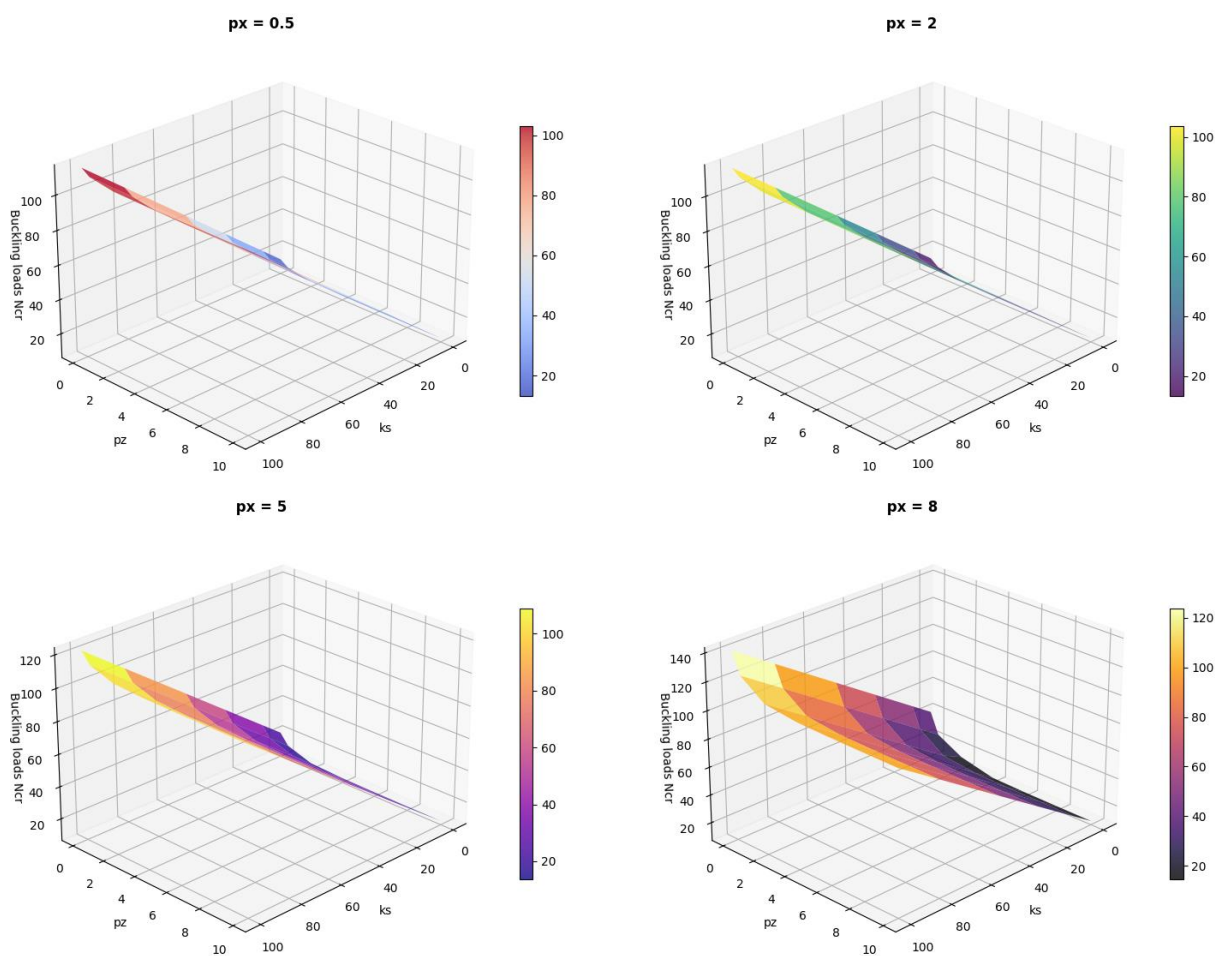
**Figure IV 5** Évolution de la fréquence fondamentale d'une poutre FG en fonction de l'indice de puissance  $p_z$  pour différents types de fondations ( $p_x=0$ ,  $L/h=5$ )

La figure IV. 5 présente une évolution de la fréquence fondamentale d'une poutre FG en fonction de l'indice de puissance  $p_z$  pour différents types de fondations, dont le rapport d'épaisseur et l'indice  $p_x$  est pris égale à 5 et 0, respectivement.

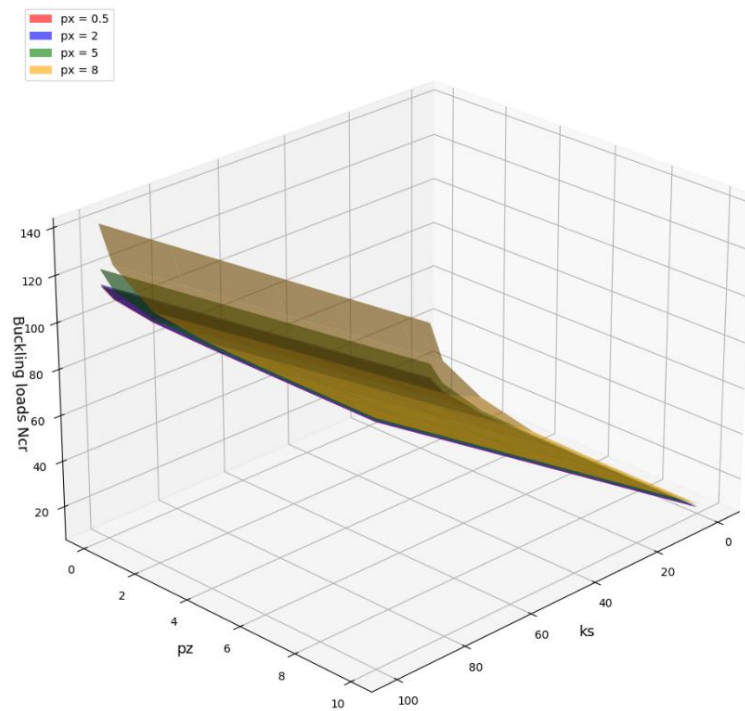
L'analyse de la Figure IV.5 révèle des comportements distincts selon le type de fondation considéré et met en évidence l'influence significative de l'indice de puissance  $p_z$  sur les caractéristiques vibratoires de la poutre fonctionnellement graduée. On observe que la configuration sans fondation présente les valeurs de fréquence les plus faibles, avec une décroissance progressive de 3,5 à environ 2,5 lorsque  $p_z$  augmente de 0 à 10, traduisant l'effet de la gradation matérielle sur la rigidité globale de la structure. L'introduction d'une fondation Winkler simple génère une amélioration notable des fréquences, qui se stabilisent autour de 3,2 indépendamment de la valeur de  $p_z$ , démontrant l'effet bénéfique du support élastique. La fondation visco-Winkler présente un comportement similaire mais avec des valeurs légèrement inférieures (environ 3,0), illustrant l'influence de l'amortissement visqueux qui tend à réduire les fréquences propres tout en apportant des capacités de dissipation énergétique. Les configurations Winkler-Pasternak et Visco-Pasternak offrent les performances les plus élevées, avec des fréquences atteignant respectivement 5,2 et 5,0. Cette supériorité s'explique par l'effet combiné

du support élastique de Winkler et de la rigidité de cisaillement de Pasternak, qui confère une rigidité supplémentaire au système. Il est particulièrement remarquable que ces deux configurations présentent une insensibilité quasi-totale à la variation de  $p_z$ , suggérant que l'effet de la fondation bicouche domine largement l'influence de la gradation matérielle sur le comportement vibratoire de la poutre.

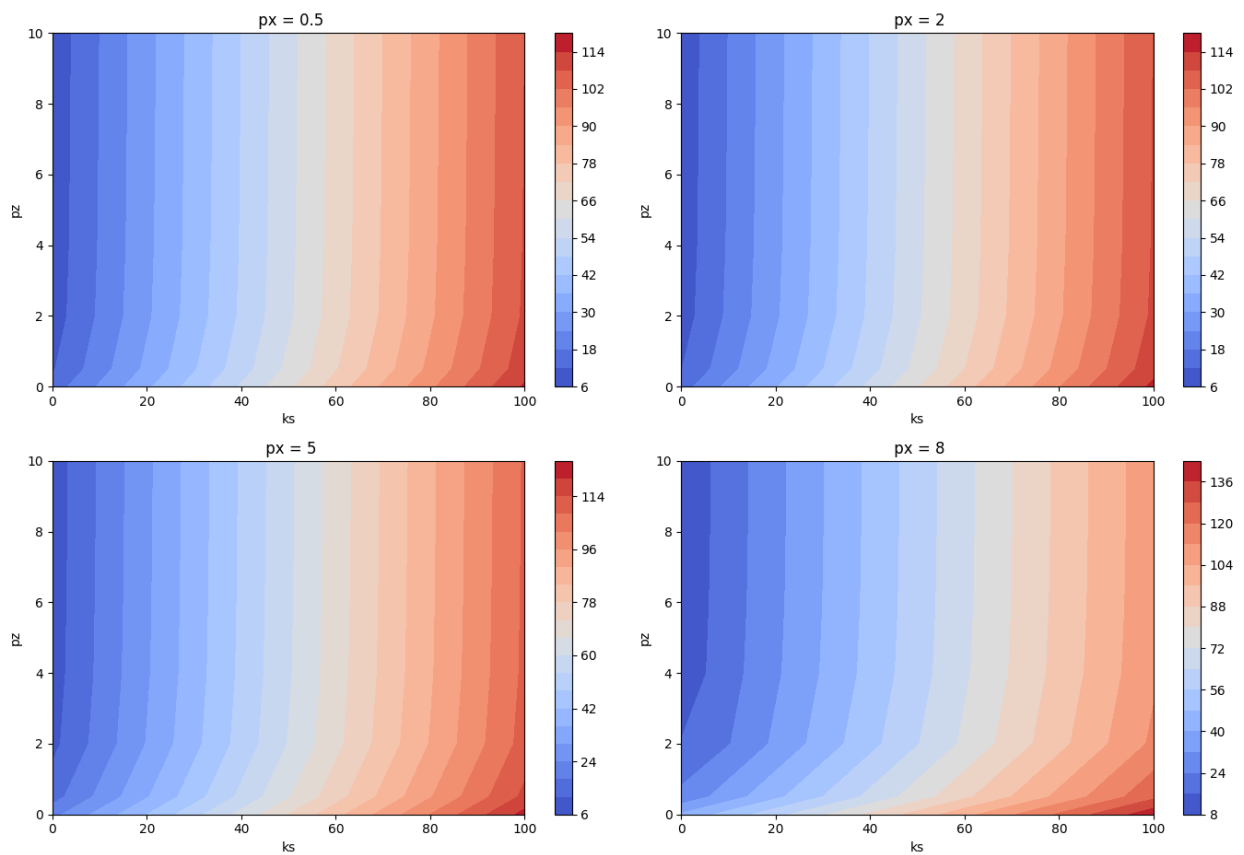
**IV.7.3.2 Comportement au flambement :**



a- Variation de charge critique de flambement pour différentes valeurs de  $p_x$



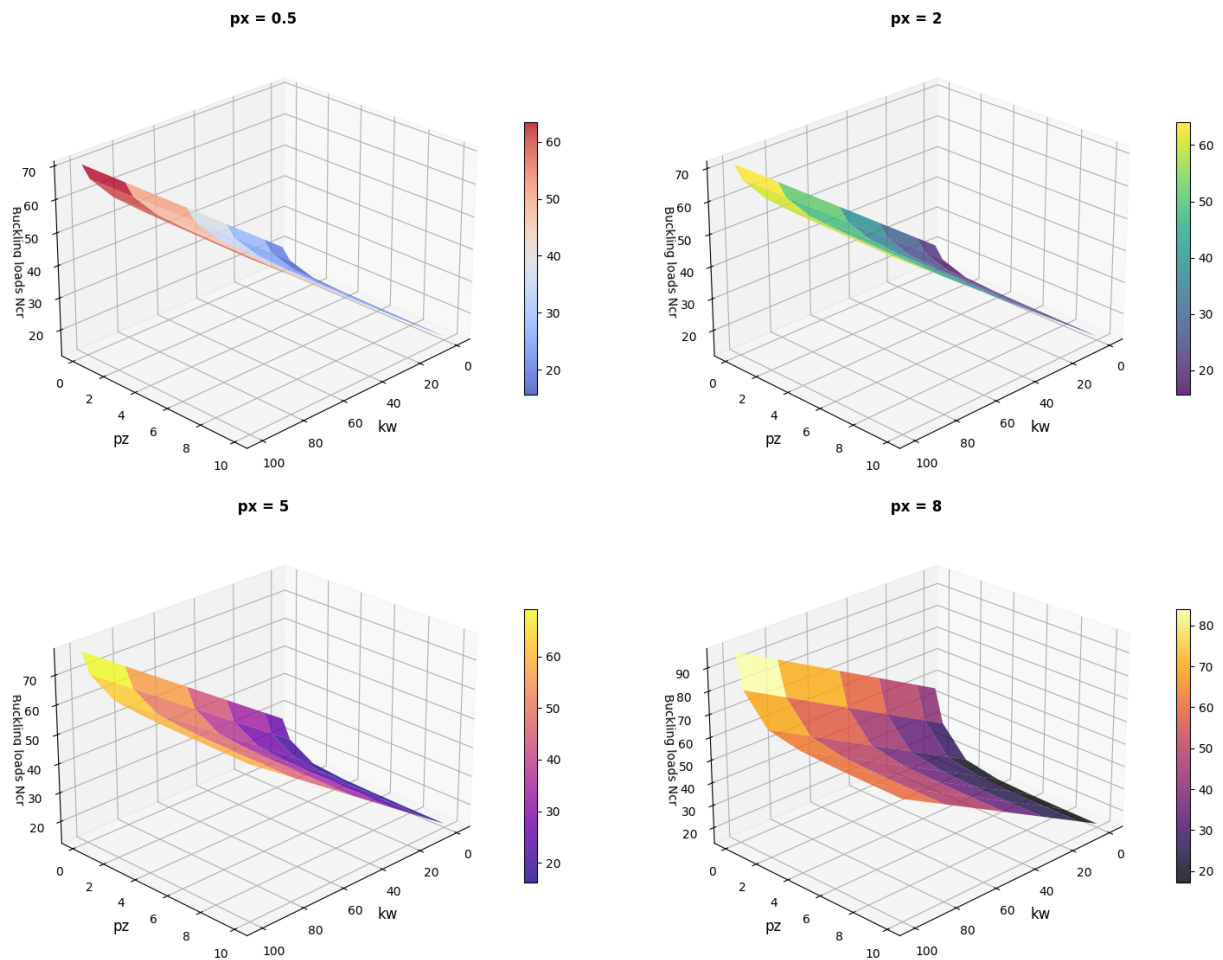
b- Comparaison des variations



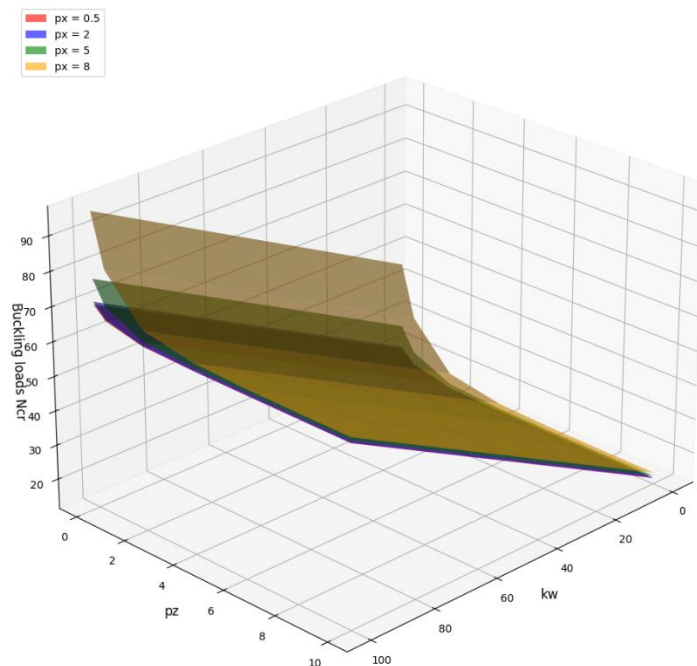
c- Cartes de contour  $N_{cr}$

Figure IV 6 Analyse tridimensionnelle de l'influence des paramètres  $k_s$  et  $p_z$  sur les charges critiques de flambement d'une poutre 2D-FG pour différentes valeurs l'indice  $p_x$  ( $k_w= 10$ ,  $c_d= \zeta= 20$ ,  $L/h = 20$ )

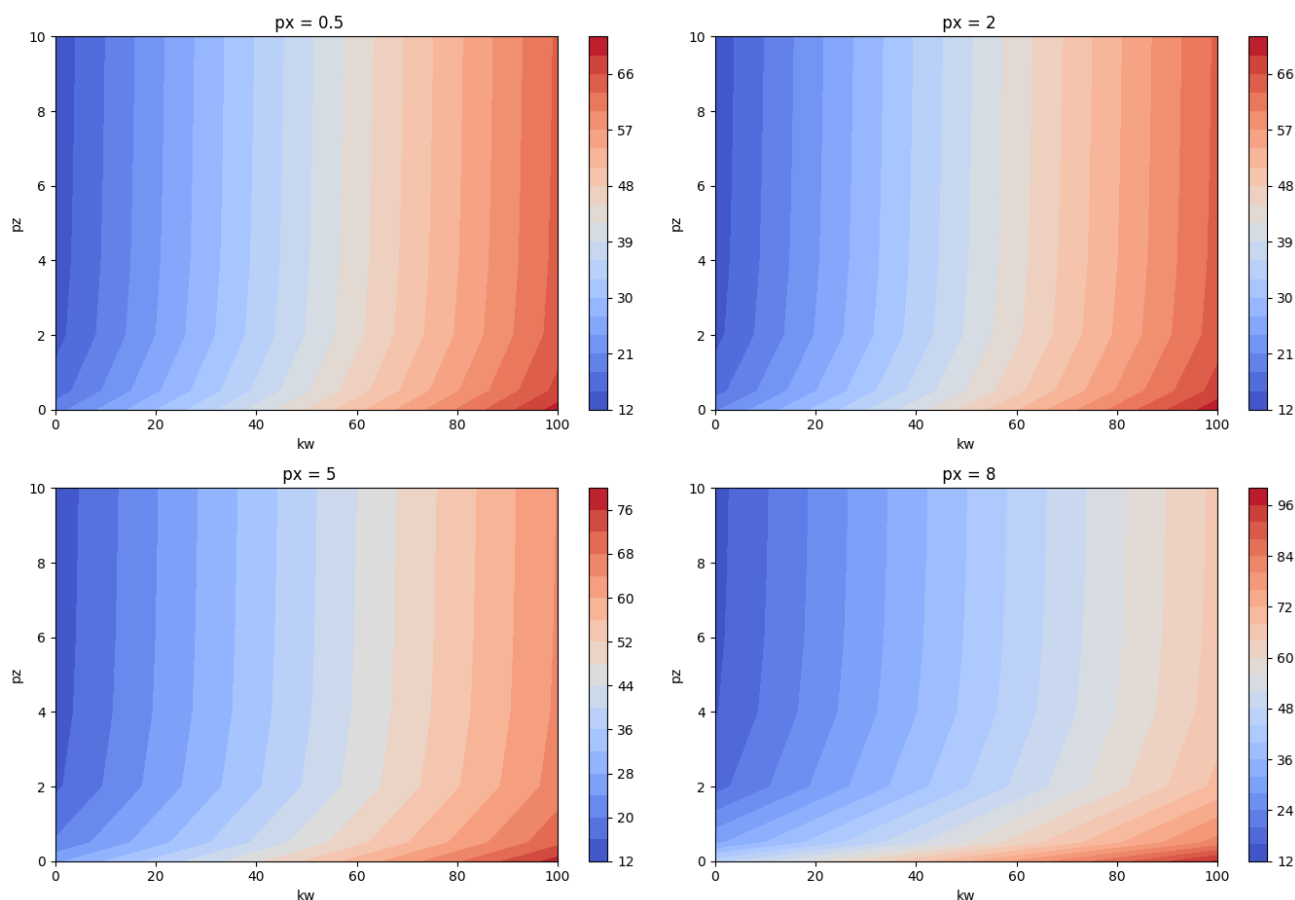
Les figures IV.6 illustrent l'analyse tridimensionnelle de l'influence des paramètres  $k_s$  et  $p_z$  sur les charges critiques de flambement d'une poutre 2D-FG, en fonction des différentes valeurs de l'indice  $p_x$ , avec  $k_w=10$ ,  $c_d=\zeta=20$  et  $L/h=20$ . L'analyse des figures met en évidence des comportements complexes et fortement interdépendants entre les paramètres  $k_s$ ,  $p_z$  et les valeurs variées de l'indice  $p_x$  sur les charges critiques de flambage des poutres fonctionnellement graduées. Les représentations tridimensionnelles montrent clairement une tendance générale selon laquelle l'augmentation du paramètre  $k_s$  (représentant la rigidité de cisaillement de la fondation) entraîne une élévation significative des charges critiques de flambage. Cet effet est particulièrement marqué pour les valeurs élevées de  $p_x$ , soulignant ainsi l'impact bénéfique du renforcement de la fondation sur la stabilité globale de la structure. Une fondation plus rigide offre donc une résistance accrue aux déformations, ce qui se traduit par des charges critiques de flambage plus élevées. L'effet de l'indice de puissance  $p_z$  présente un comportement non-linéaire et sophistiqué. Pour les faibles valeurs de  $p_x$  (0,5 et 2), une tendance claire de diminution progressive des charges critiques est observée avec l'augmentation de  $p_z$ . Ce phénomène peut être attribué à une redistribution du matériau au sein de la structure, où les zones de faible rigidité sont privilégiées, ce qui conduit à une dégradation de la performance de la poutre. Toutefois, cette tendance s'inverse partiellement pour des valeurs plus élevées de  $p_x$  (5 et 8). Dans ces configurations, des zones de stabilisation, voire d'amélioration des performances, apparaissent, suggérant la présence de configurations optimales de gradation bidirectionnelle qui maximisent l'efficacité des matériaux dans les zones critiques. En comparant les quatre configurations étudiées, une hiérarchie claire des charges critiques se dégage :  $p_x=8$  génère les charges critiques les plus élevées, atteignant des valeurs proches de 140, suivi de  $p_x=5$ ,  $p_x=2$  et enfin  $p_x=0,5$ . Cette progression souligne l'importance primordiale de l'optimisation de la distribution du matériau dans la direction longitudinale pour maximiser la résistance au flambage. Les cartes de contour viennent corroborer ces résultats en montrant des gradients de performance bien définis, avec des zones d'efficacité maximale situées dans les régions caractérisées par une forte rigidité de fondation (valeurs élevées de  $k_s$ ) et une gradation matérielle optimisée. Ces observations ouvrent ainsi de nouvelles perspectives pour la conception de structures composites avancées, en particulier pour les applications nécessitant une résistance élevée aux phénomènes de flambage, tout en maximisant l'efficacité des matériaux utilisés.



a) Variation de charge critique de flambement pour différentes valeurs de  $p_x$



b) Comparaison des variations

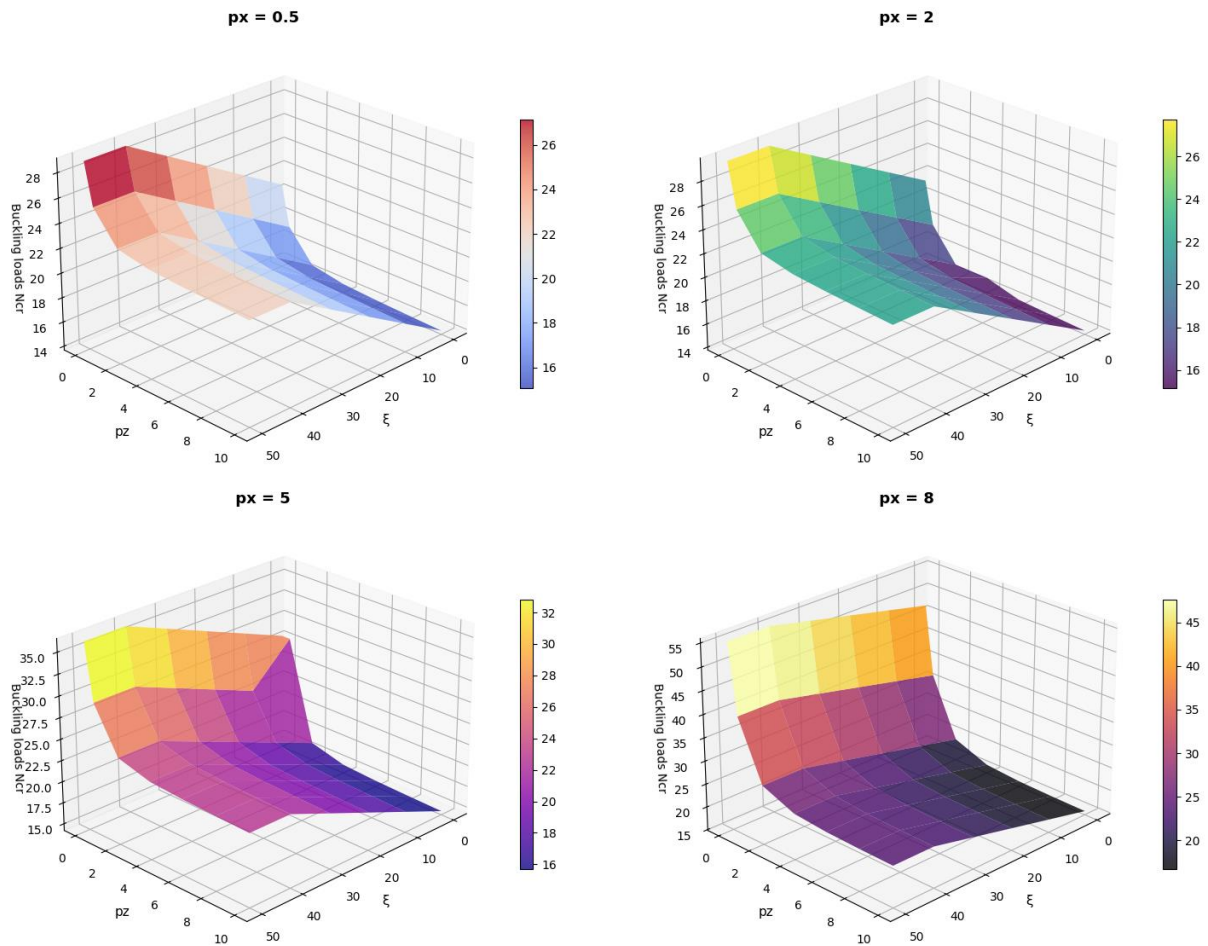
c) Cartes de contour de  $N_{cr}$ 

**Figure IV 7** Analyse tridimensionnelle de l'influence des paramètres  $k_w$  et  $p_z$  sur les charges critiques de flambement d'une poutre 2D-FG pour différentes valeurs l'indice  $p_x$  ( $k_s = 10$ ,  $c_d = \zeta = 20$ ,  $L/h = 20$ )

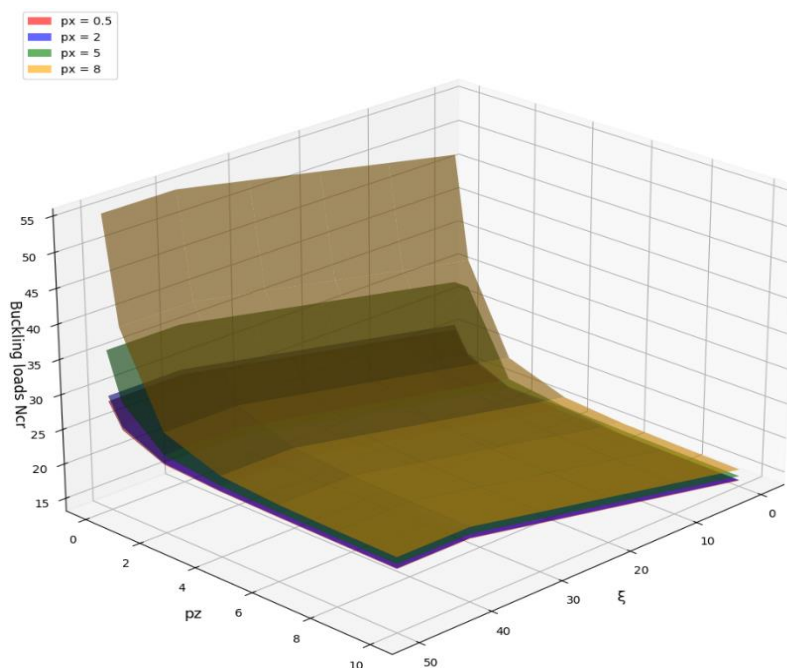
Les figures IV 7 offrent une vue détaillée de l'effet des paramètres  $k_w$  et  $p_z$  sur les charges critiques de flambement d'une poutre fonctionnellement graduée 2D (2D-FG) en fonction de différentes valeurs de l'indice  $p_x$ , pour des valeurs constantes de  $k_s = 10$ ,  $c_d = \zeta = 20$  et  $L/h = 20$ . En examinant les représentations tridimensionnelles, plusieurs tendances marquantes se dégagent. Tout d'abord, on observe une évolution générale des charges critiques de flambement à mesure que  $k_w$  (rigidité de la fondation) et  $p_z$  (indice de puissance) varient. Pour toutes les valeurs  $p_x$ , l'augmentation de  $k_w$  entraîne une augmentation notable de la charge critique. Au contraire, une hausse de  $p_z$  conduit également à une réduction progressive des charges critiques, reflétant probablement une redistribution des matériaux, avec une tendance vers une plus grande souplesse dans les zones de faible  $p_z$ .

À mesure que l'indice  $p_x$  augmente (par exemple, pour  $p_x = 8$ ), les charges critiques de flambement augmentent de manière significative, en particulier pour les valeurs basses de  $p_z$  et  $k_w$  élevées. Cette tendance suggère qu'une plus grande flexibilité dans la distribution du matériau (via  $p_x$ ) augmente la résistance à l'instabilité. Les cartes de contour présentent des gradients de

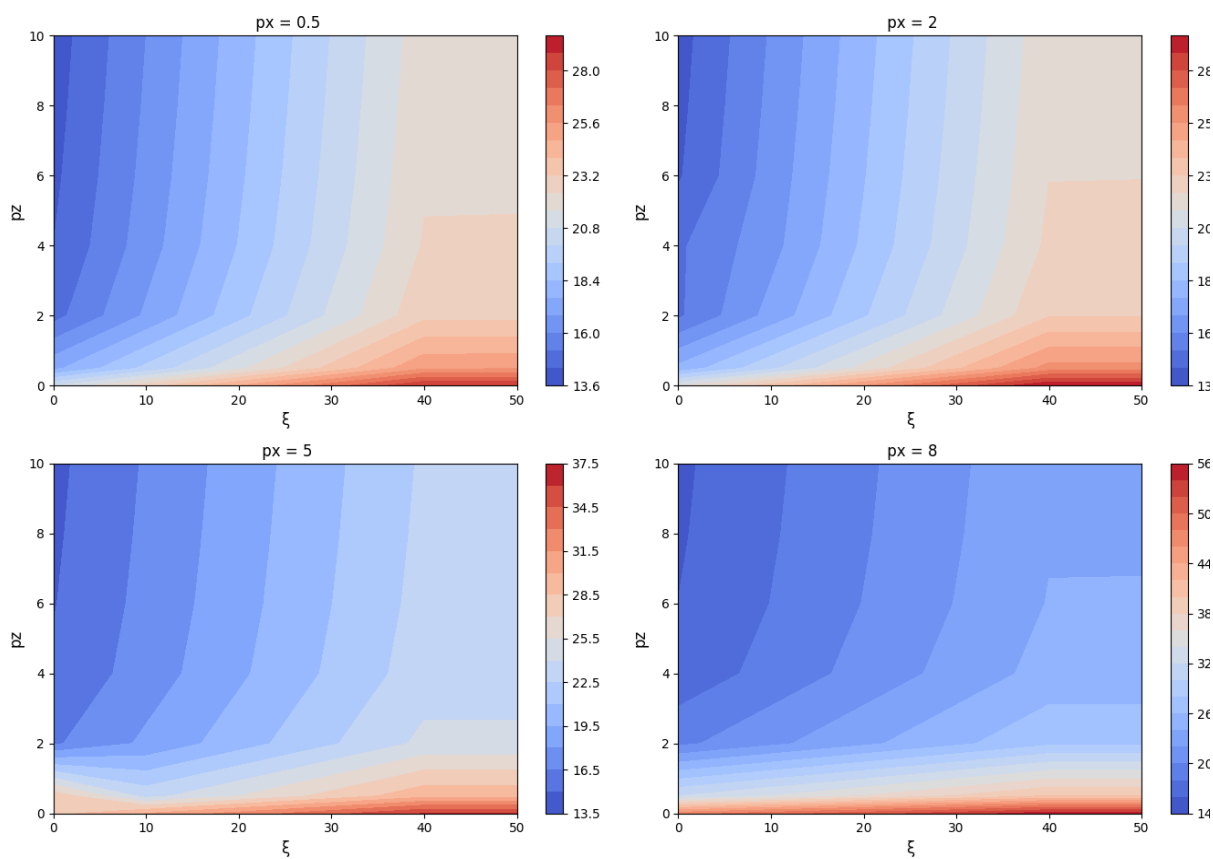
performance plus nets, illustrant clairement les zones optimisées où les charges critiques de flambement sont maximisées. Ces zones se trouvent généralement dans les régions où  $k_w$  est élevé et  $p_z$  faible. L'analyse met en évidence la nécessité de contrôler étroitement ces deux paramètres afin d'optimiser la stabilité des poutres FG, en particulier dans les applications où la résistance au flambement est primordiale.



a) Variation de charge critique de flambement pour différentes valeurs de  $p_x$



b) Comparaison des variations

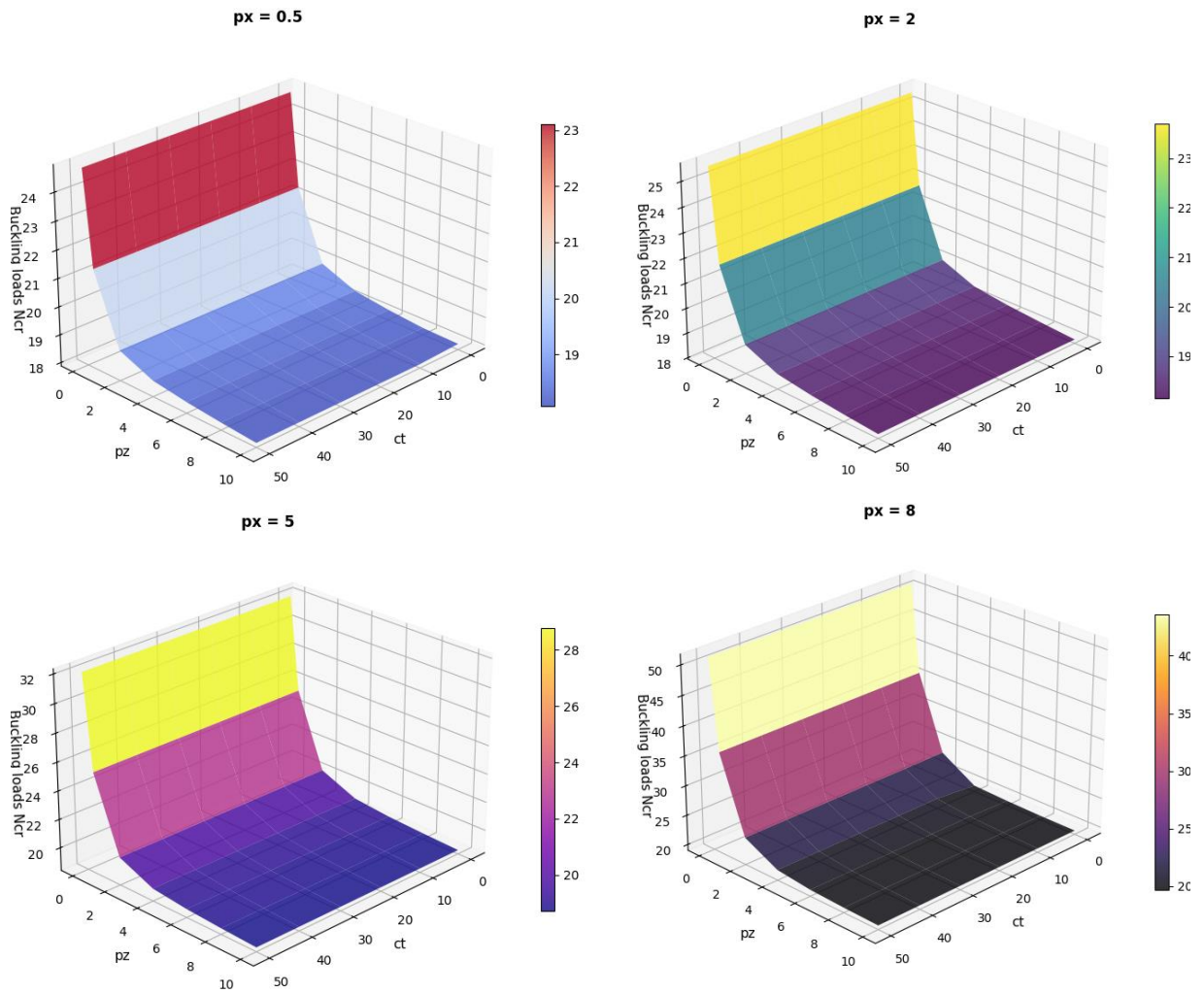


c) Cartes de contour de  $N_{cr}$

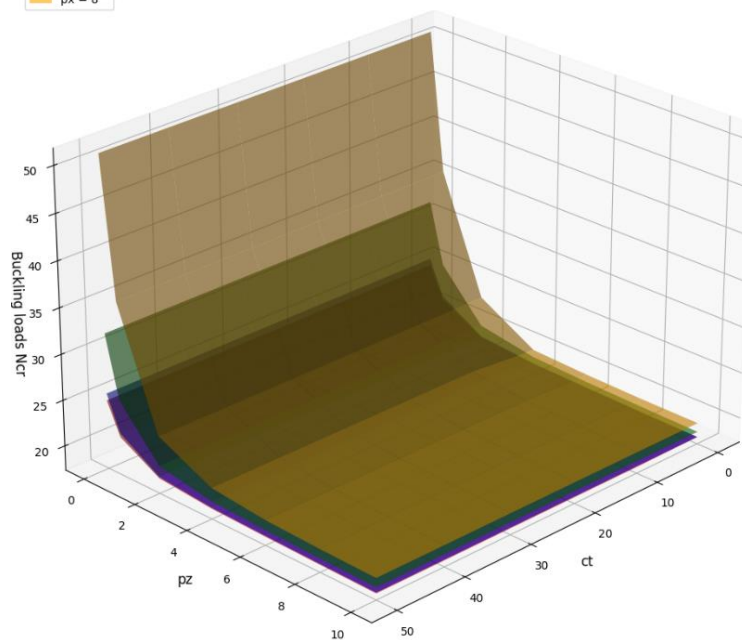
**Figure IV 8** Analyse tridimensionnelle de l'influence des paramètres  $\zeta$  et  $p_z$  sur les charges critiques de flambement d'une poutre 2D-FG pour différentes valeurs l'indice  $p_x$  ( $k_w=k_s= 10$ ,  $c_d= 30$ ,  $L/h = 20$ )

Les figures IV. 8 présentent une analyse tridimensionnelle de l'influence des paramètres  $\zeta$  et  $p_z$  (indice de puissance) sur les charges critiques de flambement d'une poutre 2D-FG pour différentes valeurs de l'indice  $p_x$ , avec des paramètres fixes de  $k_w=k_s=10$ ,  $c_d=30$  et  $L/h=20$ . La variation du paramètre de Winkler suit une forme linéaire. Les résultats montrent des tendances intéressantes et diverses selon les valeurs de  $p_x$ , avec des effets marqués des indices de puissance  $p_z$  et  $\zeta$ . Les courbes 3D et les cartes de contour révèlent une diminution générale des charges critiques de flambement à mesure que  $p_z$  et  $\zeta$  augmentent, particulièrement pour les faibles valeurs de  $p_x$  (0 et 2). Par exemple, pour  $p_z=0$ , les charges critiques de flambement augmentent progressivement avec  $\zeta$ , ce qui suggère une plus grande stabilité de la structure lorsqu'une fondation rigide est employée. Cependant, à mesure que  $p_x$  augmente, on observe une inversion de cette tendance : les charges critiques de flambement diminuent nettement pour les grandes valeurs de  $\zeta$  (valeurs proches de 50), ce qui peut indiquer une redistribution de la matière ou une interaction plus complexe entre les paramètres, impactant la performance des poutres. Les valeurs maximales des charges critiques atteignent 55,13 pour  $p_x=8$  et  $\zeta=50$ , ce qui montre que des configurations spécifiques de  $p_z$  et  $\zeta$  peuvent significativement améliorer la résistance au flambement.

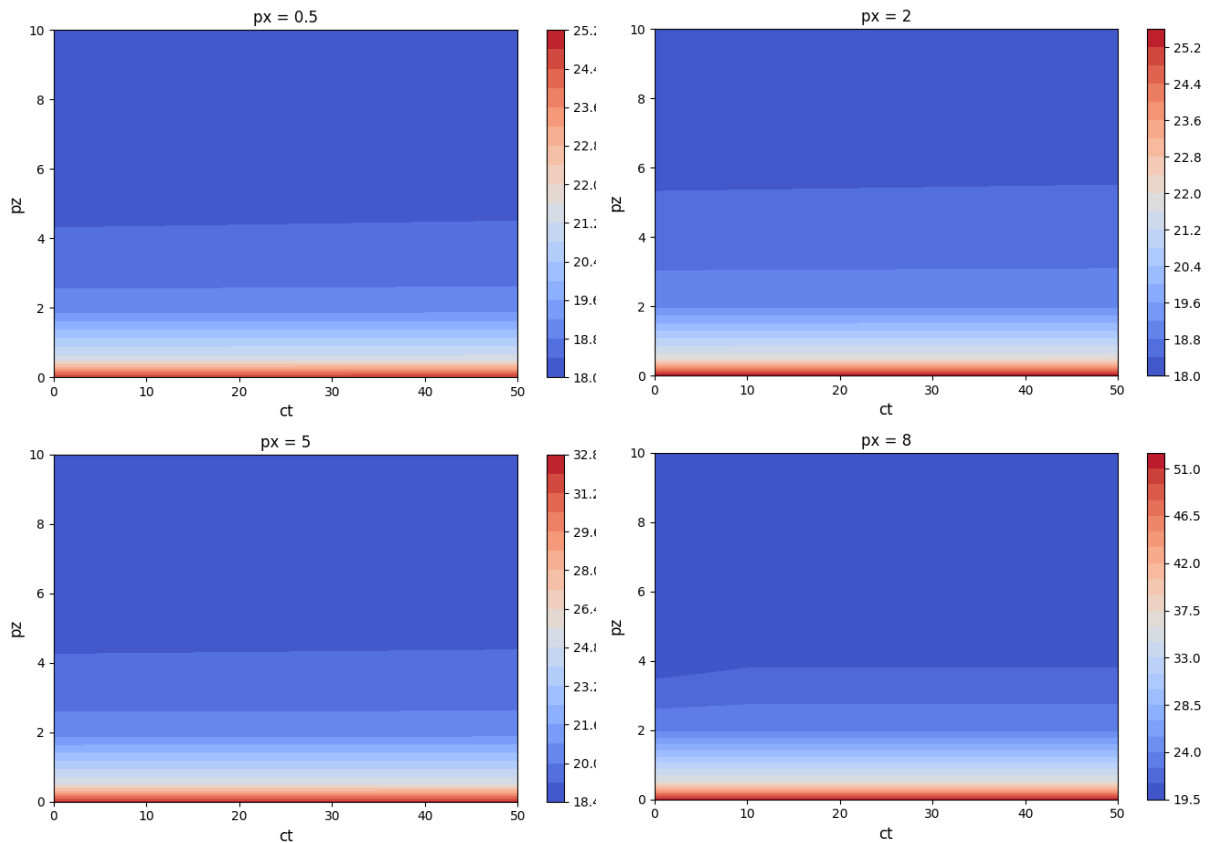
Les résultats montrent également une forte dépendance entre  $p_z$  et  $\zeta$ , avec des charges critiques plus élevées lorsque les deux paramètres sont optimisés, soulignant l'importance de bien ajuster ces variables pour maximiser la stabilité des structures. Les gradients de couleur sur les cartes de contour confirment cette relation, avec des zones d'efficacité maximale dans les régions de faible  $p_z$  et des valeurs élevées de  $\zeta$ .



a) Variation de charge critique de flambement pour différentes valeurs de  $p_x$



b) Comparaison des variations

c) Cartes de contour de  $N_{cr}$ 

**Figure IV 9** Analyse tridimensionnelle de l'influence des paramètres  $c_d$  et  $p_z$  sur les charges critiques de flambement d'une poutre 2D-FG pour différentes valeurs l'indice  $p_x$  ( $k_w=k_s=10$ ,  $\zeta=20$ ,  $L/h=20$ )

La figure IV. 9 présente une analyse tridimensionnelle de l'influence des paramètres  $c_d$  et  $p_z$  sur les charges critiques de flambement d'une poutre 2D-FG pour différentes valeurs de l'indice  $p_x$  (avec  $k_w=k_s=10$ ,  $\zeta=20$  et  $L/h=20$ , incluant : la variation de la fréquence pour différentes valeurs de  $p_x$ , la comparaison des variations, et les cartes de contour des charges critiques  $N_{cr}$ ).

L'examen des figures révèle des comportements remarquablement distincts selon la valeur de l'indice de matériau  $p_x$ , mettant en évidence l'influence prépondérante de ce paramètre sur la stabilité au flambement des poutres fonctionnellement graduées. Pour les faibles valeurs de  $p_x$  (0,5 et 2), on observe une décroissance prononcée des charges critiques avec l'augmentation de l'indice de puissance  $p_z$ , particulièrement marquée pour  $p_z$  compris entre 0 et 2, où les charges passent respectivement de 25 à environ 18 pour  $p_x = 0,5$  et de 25 à 18 pour  $p_x = 2$ . Cette diminution s'explique par la redistribution matérielle qui concentre le matériau le moins rigide dans certaines zones critiques de la structure.

L'effet du coefficient d'amortissement  $c_d$  présente une tendance inverse selon la configuration étudiée : pour  $p_x = 0,5$  et  $p_x = 2$ , l'augmentation de  $c_d$  entraîne une légère amélioration des charges critiques, particulièrement visible pour les valeurs élevées de  $p_z$  où la stabilisation s'effectue autour de 20. En revanche, pour  $p_x= 5$  et  $p_x= 8$ , l'influence de  $c_d$  devient négligeable, avec des charges critiques qui se stabilisent respectivement autour de 32 et 50, démontrant que la distribution de porosité domine largement l'effet d'amortissement pour ces configurations.

La hiérarchie claire observée entre les différentes valeurs de  $p_x$  confirme l'importance cruciale de l'optimisation de la distribution du matériau selon la longueur de la poutre :  $p_x = 8$  génère les charges critiques les plus élevées (jusqu'à 50), suivi de  $p_x= 5$  (32),  $p_x=2$  (20) et  $p_x = 0,5$  (18). Cette progression souligne que l'augmentation contrôlée de la distribution du matériau dans la direction longitudinale peut considérablement améliorer la résistance au flambement, offrant ainsi des perspectives intéressantes pour la conception de structures composites optimisées où la stabilité structurelle constitue un critère déterminant.

**Tableau IV 9** Variation des charges du flambement en fonction des différents modèles de variation du paramètre de Winkler ( $p_x = 0$ ,  $\zeta = 20$  et  $k_w = k_s = 10$ )

	$p_z$	$L/h=5$					$L/h=20$				
		$C_d=0$	$C_d=5$	$C_d=10$	$C_d=20$	$C_d=30$	$C_d=0$	$C_d=5$	$C_d=10$	$C_d=20$	$C_d=30$
Sinusoïdal	0	37,3491	37,3496	37,3500	37,3509	37,3518	38,0351	38,0369	38,0387	38,0423	38,0459
	0,5	34,2332	34,2337	34,2341	34,2350	34,2359	34,6251	34,6269	34,6286	34,6322	34,6358
	2	31,8538	31,8543	31,8547	31,8556	31,8565	32,1181	32,1199	32,1217	32,1253	32,1288
	4	31,3076	31,3081	31,3086	31,3095	31,3104	31,6038	31,6055	31,6073	31,6109	31,6145
	6	31,1039	31,1044	31,1048	31,1057	31,1066	31,4210	31,4228	31,4246	31,4281	31,4317
	8	30,9729	30,9734	30,9739	30,9748	30,9756	31,2911	31,2929	31,2947	31,2983	31,3019
	10	30,8729	30,8734	30,8738	30,8747	30,8756	31,1826	31,1844	31,1862	31,1898	31,1934
Linéaire	0	30,2804	30,2809	30,2813	30,2822	30,2831	30,9664	30,9682	30,9700	30,9736	30,9772
	0,5	27,1645	27,1650	27,1654	27,1663	27,1672	27,5564	27,5582	27,5599	27,5635	27,5671
	2	24,7851	24,7856	24,7860	24,7869	24,7878	25,0494	25,0512	25,0530	25,0566	25,0601
	4	24,2389	24,2394	24,2399	24,2408	24,2417	24,5351	24,5368	24,5386	24,5422	24,5458
	6	24,0352	24,0357	24,0361	24,0370	24,0379	24,3523	24,3541	24,3559	24,3594	24,3630
	8	23,9042	23,9047	23,9052	23,9061	23,9069	24,2224	24,2242	24,2260	24,2296	24,2332
	10	23,8042	23,8047	23,8051	23,8060	23,8069	24,1139	24,1157	24,1175	24,1211	24,1247
Parabolique	0	25,8765	25,8769	25,8774	25,8783	25,8792	26,5624	26,5642	26,5660	26,5696	26,5732
	0,5	22,7605	22,7610	22,7614	22,7623	22,7632	23,1524	23,1542	23,1560	23,1596	23,1631
	2	20,3812	20,3816	20,3821	20,3830	20,3839	20,6454	20,6472	20,6490	20,6526	20,6562
	4	19,8350	19,8354	19,8359	19,8368	19,8377	20,1311	20,1329	20,1347	20,1383	20,1418
	6	19,6313	19,6317	19,6322	19,6331	19,6340	19,9483	19,9501	19,9519	19,9555	19,9590
	8	19,5003	19,5007	19,5012	19,5021	19,5030	19,8185	19,8202	19,8220	19,8256	19,8292
	10	19,4003	19,4007	19,4012	19,4021	19,4030	19,7099	19,7117	19,7135	19,7171	19,7207

	$p_z$	$L/h=5$					$L/h=20$				
		$C_d=0$	$C_d=5$	$C_d=10$	$C_d=20$	$C_d=30$	$C_d=0$	$C_d=5$	$C_d=10$	$C_d=20$	$C_d=30$
Exponentiel	0	24,1846	24,1850	24,1855	24,1864	24,1873	24,8705	24,8723	24,8741	24,8777	24,8813
	0,5	21,0686	21,0691	21,0695	21,0704	21,0713	21,4605	21,4623	21,4641	21,4677	21,4712
	2	18,6893	18,6897	18,6902	18,6911	18,6920	18,9535	18,9553	18,9571	18,9607	18,9643
	4	18,1431	18,1435	18,1440	18,1449	18,1458	18,4392	18,4410	18,4428	18,4464	18,4499
	6	17,9394	17,9398	17,9403	17,9412	17,9421	18,2564	18,2582	18,2600	18,2636	18,2672
	8	17,8084	17,8088	17,8093	17,8102	17,8111	18,1266	18,1284	18,1301	18,1337	18,1373
	10	17,7083	17,7088	17,7093	17,7102	17,7111	18,0180	18,0198	18,0216	18,0252	18,0288

Le tableau **IV 9** présente une analyse comparative des charges critiques du flambement d'une poutre fonctionnellement graduée bidirectionnelle, en fonction de quatre profils de variation du paramètre de Winkler (sinusoïdal, linéaire, parabolique et exponentiel), en tenant compte de l'indice de puissance  $p_z$  et du coefficient d'amortissement  $c_d$ , pour deux rapports d'élanement distincts ( $L/h = 5$  et  $L/h = 20$ ). L'examen des résultats met en évidence des comportements distincts en fonction du profil de distribution adopté. Pour le profil sinusoïdal, les valeurs de  $N_{cr}$  sont les plus élevées, surtout pour  $L/h=5$ , où elles oscillent entre 37,35 et 30,87 selon la valeur de  $p_z$ . Cette configuration présente une sensibilité modérée au coefficient d'amortissement, avec des variations maximales de 0,01 unité. Le profil linéaire génère des, avec une décroissance progressive en fonction de l'augmentation de  $p_z$ ; pour  $L/h=5$ , les valeurs varient de 30,28 à 23,80, et pour  $L/h=20$ , elles évoluent de 30,97 à 24,12. Ce profil montre une stabilité remarquable face aux variations d'amortissement. L'augmentation du rapport d'élanement de 5 à 20 engendre des changements contrastés selon le profil adopté. Pour les profils parabolique et exponentiel, les performances s'améliorent pour  $L/h=20$ , avec des fréquences atteignant respectivement 26,56 et 24,87 pour  $p_z=0$ . Toutefois, cette tendance s'inverse progressivement avec l'augmentation de  $p_z$ , rendant les configurations plus élancées moins performantes. L'effet du coefficient d'amortissement reste globalement faible pour toutes les configurations, avec des variations inférieures à 0,05 unité, suggérant que l'influence de l'amortissement de la fondation est secondaire par rapport aux effets de la gradation matérielle et de la distribution de rigidité de la fondation. Enfin, la hiérarchie des performances des profils est cohérente, le profil sinusoïdal dominant systématiquement, suivi du profil linéaire, puis du profil parabolique et enfin du profil exponentiel. Cette classification reflète l'efficacité relative de chaque distribution spatiale de rigidité pour optimiser les caractéristiques vibratoires des poutres fonctionnellement graduées sur fondations viscoélastiques.

## IV.7. Conclusion

Ce chapitre propose une analyse approfondie du comportement vibratoire et de la stabilité au flambement des poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) bidirectionnelles reposant sur des fondations viscoélastiques. L'étude s'appuie sur une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé quasi-3D à quatre variables intégrales pour modéliser les vibrations libres et le flambement. Les résultats ont mis en évidence l'impact des paramètres viscoélastiques, tels que les paramètres de Winkler et de Pasternak, ainsi que le facteur d'amortissement, sur les performances des poutres FGM.

Les variations des raideurs viscoélastiques ont été analysées en détail, en prenant en compte différentes formes de variation du paramètre de Winkler, telles que linéaire, parabolique, sinusoïdale et exponentielle, ainsi que leur influence sur les fréquences et la stabilité des poutres. L'étude paramétrique a révélé l'effet des constantes de fondation viscoélastiques, des indices de gradient de matériau et du rapport hauteur/longueur sur les réponses vibratoires et la stabilité au flambement.

En outre, les résultats ont montré que ces paramètres, en particulier lorsque les raideurs viscoélastiques varient, peuvent être utilisés pour prédire les fréquences naturelles des poutres FGM dans des conditions de flambement. Cette étude ouvre la voie à une meilleure compréhension du comportement complexe des structures FGM bidirectionnelles, en offrant des outils analytiques permettant de prédire leur comportement vibratoire et leur stabilité dans divers scénarios d'application.

# **Conclusion générale**

---

## Conclusion générale

La première partie de cette thèse a permis de développer un modèle analytique pour l'évaluation des fréquences propres de vibration libre d'une poutre FGM reposant sur des fondations viscoélastiques Winkler–Pasternak. L'effet du cisaillement transversal est intégré dans la théorie, sans qu'un facteur de correction soit requis. L'élaboration des équations du mouvement s'appuie sur le principe de Hamilton, leur résolution étant assurée par les solutions de Navier. La validité et l'efficacité du modèle ont été confirmées en le comparant à diverses études antérieures. Plusieurs analyses paramétriques ont permis d'illustrer et de discuter l'influence des variables sur la fréquence fondamentale de la poutre FG. Les résultats obtenus montrent que l'ajout des paramètres de la fondation viscoélastique renforce la rigidité de la poutre FG, ce qui entraîne une augmentation de la fréquence fondamentale. Les résultats obtenus indiquent aussi que la majeure partie de la composante réelle de la fréquence de vibration des poutres FGM est fortement affectée par le coefficient d'amortissement de la fondation. De plus, l'augmentation de ce coefficient entraîne une baisse de la partie réelle de la fréquence et une hausse de sa partie imaginaire. Enfin, la rigidité de la poutre FG diminue sensiblement avec l'augmentation de la profondeur et le déplacement de la fissure.

Dans la seconde partie de ce travail, on a étudié la vibration et la stabilité d'une poutre FG bidirectionnelle (2D), dont les propriétés matérielles varient suivant deux directions, longitudinales  $x$  et selon l'épaisseur  $z$ , reposant sur une fondation viscoélastique de type Winkler–Pasternak. L'étude s'appuie sur une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé quasi-3D à quatre variables intégrales pour modéliser les vibrations libres et le flambement. Les résultats obtenus démontrent que les paramètres viscoélastiques, y compris les paramètres de Winkler, de Pasternak et le facteur d'amortissement, exercent une influence majeure sur les performances des poutres FGM. Les variations des raideurs viscoélastiques ont été analysées en détail, en prenant en compte différentes formes de variation du paramètre de Winkler, telles que linéaire, parabolique, sinusoïdale et exponentielle, ainsi que leur influence sur les fréquences et la stabilité des poutres. L'étude paramétrique a révélé l'effet des paramètres de fondations viscoélastiques, des indices de gradient de matériau et du rapport hauteur/longueur sur les réponses vibratoires et la stabilité au flambement.

En outre, les résultats ont montré que ces paramètres, en particulier lorsque les raideurs viscoélastiques varient, peuvent être utilisés pour prédire les fréquences naturelles des poutres FGM dans des conditions de flambement.

Voici quelques-unes des conclusions spécifiques de cette thèse :

- Les FGM présentent une résistance au flambement accrue par rapport aux matériaux homogènes. Cette résistance accrue est due à la distribution non uniforme des propriétés dans les FGM.
- La fréquence adimensionnelle augmente lorsque le rapport ( $L/h$ ) de la poutre FGM augmente.
- En présence d'une fondation élastique, la rigidité de la poutre FGM augmente, ce qui conduit à une augmentation significative de la fréquence propre de la vibration.
- Les résultats de l'étude indiquent que la partie réelle prédominante de la fréquence de vibration des structures FGM est significativement influencée par le coefficient d'amortissement de la fondation. En outre, il a été constaté que la partie réelle de la fréquence diminue lorsque les valeurs d'amortissement de la fondation augmente par contre la partie imaginaire de la fréquence augmente.
- Les raideurs de fondation renforcent systématiquement la réponse dynamique et la stabilité au flambement des poutres FGM : l'augmentation de  $k_w$  et  $k_s$  élève la fréquence fondamentale et accroît notablement la charge critique  $N_{cr}$  pour toutes les gradations et rapports  $L/h$  examinés, avec des gains plus marqués aux faibles  $p_z$  et pour des profils de Winkler non constants.
- Le coefficient d'amortissement viscoélastique  $c_d$  réduit la partie réelle des fréquences environ et élève la partie imaginaire, ce qui confirme un amortissement dissipatif effectif ; la tendance est monotone et devient plus sensible quand  $k_w$  est modéré et  $L/h$  élevé, tandis que le rapport d'amortissement s'approche d'un seuil critique pour de grands  $c_d$ .
- La gradation bidirectionnelle accroît la rigidité efficace : des indices matériels plus élevés côté épaisseur  $p_z$  et le long de la portée  $p_x$  rehaussent conjointement la fréquence fondamentale et  $N_{cr}$  ; l'effet de  $p_x$  est plus prononcé lorsque la fondation est raide, alors que l'effet de  $p_z$  domine pour des fondations plus souples.
- Les profils spatiaux de Winkler gouvernent finement la dynamique : pour un même niveau moyen de raideur, les distributions sinusoïdales et paraboliques produisent des fréquences et des charges de flambement supérieures aux profils linéaires et exponentiels, surtout à grand  $L/h$ ; ce levier de conception permet d'optimiser localement la raideur sans augmenter la masse.
- Les cartes de contours 3D confirment une synergie  $k_w - p_z$  et  $\zeta - p_z$  qui étend les domaines de stabilité : les crêtes de  $N_{cr}$  se déplacent vers de plus grands  $p_z$  quand  $k_w$  ou  $\zeta$  croissent,

indiquant des trajectoires d'optimisation où la distribution matérielle accompagne la rigidification du support.

- La présence et l'évolution d'une fissure dégradent la rigidité effective et abaissent la fréquence : l'influence est plus sévère pour des fissures profondes situées près du milieu de la portée, et reste partiellement compensable par l'augmentation de  $k_w$ ,  $k_s$  et par des indices de gradation plus élevés.
- Le passage de poutres FG 1D à 2D confirme le gain de prédictibilité : la prise en compte conjointe de  $p_x$  et  $p_z$  explique les écarts entre courbes et surfaces 3D, et justifie l'usage de distributions spatiales de raideur de fondation comme variable de conception pour figer la réponse vibratoire et repousser le flambement.

Bien que cette thèse ait permis d'approfondir la compréhension des vibrations et de la stabilité des poutres FGM sur fondations viscoélastiques, plusieurs pistes de recherche méritent d'être explorées :

- Modélisation avancée de l'amortissement en introduisant de lois d'amortissement non linéaires ou dépendantes de la fréquence permettrait une meilleure caractérisation des dissipations d'énergie dans les matériaux hétérogènes.
- Proposition d'une approche pour déterminer les distributions optimales des paramètres de Winkler-Pasternak qui offre une stabilité meilleure et diminue les vibrations.
- Modélisation plus fine des interactions entre les poutres FGM et le milieu viscoélastique, incluant des effets de propagation d'ondes, constituerait une avancée significative.

Ces perspectives ouvrent des voies prometteuses pour des travaux ultérieurs en dynamique des structures et en mécanique des matériaux avancés.

## Références Bibliographiques

---

## Références Bibliographiques

### Références Bibliographiques

---

- [1] Ruys, A. J., & Sutton, B. A. (2021). 9 - Metal-ceramic functionally graded materials (FGMs). In A. J. Ruys (Ed.), *Metal-Reinforced Ceramics* (pp. 327-359). Woodhead Publishing.
- [2] Besisa, D., & Ewais, E. (2016). Advances in Functionally Graded Materials and Structures. *Advances in Functionally Graded Ceramics—Processing, Sintering Properties and Applications*, 1, 1-31.
- [3] Mantari, J. (2015). A refined theory with stretching effect for the dynamics analysis of advanced composites on elastic foundation. *Mechanics of Materials*, 86, 31-43
- [4] Shen, M., & Bever, M. (1972). Gradients in polymeric materials. *Journal of Materials science*, 7(7), 741- 746.
- [5] Bever, M., & Duwez, P. (1972). Gradients in composite materials. *Materials Science and Engineering*, 10, 1-8
- [6] Mahamood, R. M., & Akinlabi, E. T. (2017). Introduction to functionally graded materials. In *Functionally Graded Materials* (pp. 1-8). Springer.
- [7] Koizumi, M. (1997). FGM activities in Japan. *Composites Part B: Engineering*, 28(1-2), 1-4
- [8] Cooley, W. G. (2005). Application of functionally graded materials in aircraft structures [Air Force Institute of Technology]
- [9] Boggarapu, V., Gujjala, R., Ojha, S., Acharya, S., Venkateswara babu, P., Chowdary, S., & kumar Gara, D. (2021). State of the art in functionally graded materials. *Composite Structures*, 262, 113596. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113596>
- [10] Chi, S.-H., & Chung, Y.-L. (2006). Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 43(13), 3657-3674. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.04.011>
- [11] Lee, C.-Y., & Kim, J.-H. (2015). Evaluation of homogenized effective properties for FGM panels in aero-thermal environments. *Composite Structures*, 120, 442-450. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.10.017>
- [12] Sam M, Jojith R, Radhika N. Progression in manufacturing of functionally graded materials and impact of thermal treatment—A critical review. *Journal of Manufacturing Processes*. 2021 Aug 1; 68:1339-1377.
- [13] Prasad PH, Radhika N. Comparative study of microstructure, mechanical and reciprocating wear properties of unmodified and Sr-modified A383 alloy and composite. *Transactions of the Indian Institute of Metals*. 2020 Jul; 73:1939-1950. <https://doi.org/10.1007/s12666-020-02009-4>
- [14] Chauhan PK, Khan S. Microstructural examination of aluminium-copper functionally graded material developed by powder metallurgy route. *Materials Today: Proceedings*. 2020 Jan 1; 25:833-837. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2019.10.007>
- [15] Cherian RP, Smith LN, Midha PS. A neural network approach for selection of powder metallurgy materials and process parameters. *Artificial Intelligence in Engineering*. 2000 Jan 1;14(1):39-44. [https://doi.org/10.1016/S0954-1810\(99\)00026-6](https://doi.org/10.1016/S0954-1810(99)00026-6)

## Références Bibliographiques

- [16] Vijaya Kumar P, Jebakani D, Velmurugan C, Senthilkumar V. Effect of SiC on mechanical and microstructural characteristics of Al based functionally graded material. *Silicon*. 2022 Feb 1; 14:1247-1252. <https://doi.org/10.1007/s12633-020-00933-0>
- [17] Kawasaki A, Watanabe R. Evaluation of thermomechanical performance for thermal barrier type of sintered functionally graded materials. *Composites Part B: Engineering*. 1997 Jan 1;28(1- 2):29-35. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(96\)00017-0](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00017-0)
- [18] Kawasaki A, and Watanabe R. Microstructural designing and fabrication of disc shaped Functionally gradient materials by powder metallurgy. *Journal of Japan society of power and powder metallurgy* 1990; 37:253-258. <https://doi.org/10.2497/jjspm.37.253>
- [19] Mishina H, Inumaru Y, Kaitoku K. Fabrication of ZrO<sub>2</sub>/AlSi316L functionally graded materials for joint prostheses. *Materials Science and Engineering A*. 2008 Feb 25;475(1-2):141-147. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2007.05.004>
- [20] Yu JH, Wang CB, Shen Q, Zhang LM. Preparation and properties of SiP/Al composites by spark plasma sintering. *Materials & Design*. 2012 Oct 1; 41:198-202. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2012.05.007>
- [21] Lee SH, Tanaka H, Kagawa Y. Spark plasma sintering and pressureless sintering of SiC using aluminum borocarbide additives. *Journal of the European Ceramic Society*. 2009 Jul 1;29(10):2087- 2095. <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2008.12.006>
- [22] Feng H, Meng Q, Zhou Y, Jia D. Spark plasma sintering of functionally graded material in the Ti– TiB<sub>2</sub>–B system. *Materials Science and Engineering A*. 2005 Apr 25;397(1-2):92-97. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2005.02.003>
- [23] Watanabe Y, Iwasa Y, Sato H, Teramoto A, Abe K, Miura-Fujiwara E. Microstructures and mechanical properties of titanium/biodegradable polymer FGM for bone tissue fabricated by spark plasma sintering method. *Journal of Materials Processing Technology*. 2011 Dec 1;211(12):1919- 19. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2011.05.024>
- [24] Hulbert DM, Jiang D, Anselmi-Tamburini U, Unuvar C, Mukherjee AK. Continuous functionally graded boron carbide-aluminum nanocomposites by spark plasma sintering. *Materials Science and Engineering A*. 2008 Oct 15;493(1-2):251-255. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2007.05.124>
- [25] Kambe M, Shikata H. Intensive energy density thermoelectric energy conversion system by using FGM compliant pads. *Acta Astronautica*. 2002 Jul 1;51(1-9):161-171. [https://doi.org/10.1016/S0094-5765\(02\)00071-1](https://doi.org/10.1016/S0094-5765(02)00071-1)
- [26] Srivastava AK, Kumar N, Dixit AR. Friction stir additive manufacturing—An innovative tool to enhance mechanical and microstructural properties. *Materials Science and Engineering B*. 2021 Jan 1; 263:114832. <https://doi.org/10.1016/j.mseb.2020.114832>
- [27] Manu S, Radhika N. Wear and friction study of centrifugally cast functionally graded Cu-Ni-Si alloy and composite. *Tribology in Industry*. 2020;42(2):268. <https://doi.org/10.24874/ti.754.08.19.03>
- [28] Radhika N, Sam M. Tribological and wear performance of centrifuge cast functional graded copper-based composite at dry sliding conditions. *J. Cent. South Univ*. 2019;26, 2961–2973 <https://doi.org/10.1007/s11771-019-4228-y>
- [29] Swaminathan K, Sangeetha DM. Thermal analysis of FGM plates – A critical review of various modeling techniques and solution methods. *Compos Struct*. 2017 Jan 15; 160:43-60. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.047>

## Références Bibliographiques

- [30] Nastac L. Numerical modeling of fluid flow and solidification characteristics of ultrasonically processed A356 alloys. *ISIJ International*. 2014 Aug 15;54(8):1830-1835. <https://doi.org/10.2355/isijinternational.54.1830>.
- [31] Ogawa T, Watanabe Y, Sato H, Kim I, Fukui Y. Theoretical study on fabrication of functionally graded material with density gradient by a centrifugal solid-particle method. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2006;37(12):2194-2200. <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2005.10.002>.
- [32] Chandrasekaran S, Hari S, Amirthalangam M. Wire arc additive manufacturing of functionally graded material for marine risers. *Materials Science and Engineering A*. 2020 Aug 5; 792:139530. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2020.139530>
- [33] Chmielewski M, Pietrzak K. Metal–ceramic functionally graded materials: manufacturing, characterization, application. *Bull Polish Acad Sci Tech Sci*. 2016; 64:151–160. <https://doi.org/10.1515/bpasts-2016-0017>
- [34] Rajan TPD, Pai BC, Formation of solidification microstructures in centrifugal cast functionally graded aluminium composites. *Trans Indian Inst Met*. 2009; 62:383–389. <https://doi.org/10.1007/s12666-009-0067-0>
- [35] Nallusamy S. Investigations on silicon nitride superimposed nanocoated cutting tool by physical vapor deposition and atomic force microscopy. *Applied Nanoscience*. 2021;11(4):1107-1115. <https://doi.org/10.1007/s13204-021-01668-z>.
- [36] Rao GM, Gopal AV. Effect of physical vapour deposition coated and uncoated carbide tools in turning aluminium alloy-AA6063. *Materials Today: Proceedings*. 2021;41(5):1212-1219. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.11.752>.
- [37] Mortensen A, Suresh S. Functionally graded metals and metal-ceramic composites: Part 1 Processing, *International Materials Reviews*. (1995);40(6):239-265. <https://doi.org/10.1179/imr.1995.40.6.239>
- [38] Faraji G, Seop KH, Kashi H. Severe plastic deformation: methods, processing and properties. Elsevier, 2018.
- [39] Pierlot C, Pawlowski L, Bigan M, Chagnon P. Design of experiments in thermal spraying: A review. *Surface and Coatings technology*. 2008;202(18):4483-4490.
- [40] Rajesh P, Muraleedharan CV, Komath M. Pulsed laser deposition of hydroxyapatite on titanium substrate with titania interlayer. *Journal of Materials Science: Medicine*. 2011; 22:497-505. <https://doi.org/10.1007/s10856-011-4230-x>
- [41] Xiong HP, Kawasaki A, Kang YS, Watanabe R, Experimental study on heat insulation performance of functionally graded metal/ceramic coatings and their fracture behavior at high surface temperatures. *Surf.Coat. Technol*. 2005;194(2- 3):203-214. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2004.07.069>
- [42] Jedamzik, R., Neubrand, A. Rödel J. Functionally graded materials by electrochemical processing and infiltration: application to tungsten/copper composites. *Journal of Materials Science*. 2000; 35:477–486. <https://doi.org/10.1023/A:1004735904984>
- [43] Bostani B, Parvini Ahmadi N, Yazdani S. Synthesis and Characterization of Functionally Gradient Ni-ZrO<sub>2</sub> Composite Coating. *Prot Met Phys Chem Surf*. 2018; 54:222–229. <https://doi.org/10.1134/S2070205118020156>.
- [44] Mumtaz KA, Hopkinson N. Laser melting functionally graded composition of Waspaloy® and Zirconia powders. *Journal of materials science*. 2007; 42:7647-7656. <https://doi.org/10.1007/s10853-007-1661-3>

## Références Bibliographiques

- [45] Rajesh P, Muraleedharan CV, Komath M. Pulsed laser deposition of hydroxyapatite on titanium substrate with titania interlayer. *Journal of Materials Science: Medicine*. 2011; 22:497-505.  
<https://doi.org/10.1007/s10856-011-4230-x>
- [46] Rajesh P, Muraleedharan CV, Komath M. Pulsed laser deposition of hydroxyapatite on titanium substrate with titania interlayer. *Journal of Materials Science: Medicine*. 2011; 22:497-505.  
<https://doi.org/10.1007/s10856-011-4230-x>
- [47] Naebe M, Shirvanimoghadam K. Functionally graded materials: A review of fabrication and properties. *Applied materials today*. 2016; 5:223- 245.  
<https://doi.org/10.1016/j.apmt.2016.10.001>
- [48] Wang Y, Tan Q, Pu F, Boone D, Zhang M. A review of the application of additive manufacturing in prosthetic and orthotic clinics from a biomechanical perspective. *Engineering*. 2020;6(11):1258-1266. <https://doi.org/10.1016/j.eng.2020.07.019>.
- [49] Jiang X, Yao Y, Tang W, Han D, Zhang L, Zhao K, Wang S, Meng Y. Design of dental implants at materials level: An overview. *Journal of biomedical Materials Research Part A*, 2020;108(8):1634-1661. <https://doi.org/10.1002/jbm.a.36931>
- [50] Karbalaei Akbari M, Baharvandi HR, Mirzaee O. Fabrication of nano-sized Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> reinforced casting aluminum composite focusing on preparation process of reinforcement powders and evaluation of its properties. *Composites Part B: Engineering*, 2013;55:426-432.
- [51] Carroll BE, Otis RA, Borgonia JP, Suh J, Dillon RP, Shapiro AA, Hofmann DC, Liu ZK, Beese AM. Functionally graded material of 304L stainless steel and 15 inconel 625 fabricated by directed energy deposition: Characterization and thermodynamic modeling. *Acta Mater*. 2016; 108:46-54.  
<https://doi.org/10.1016/j.actamat.2016.02.019>
- [52] Saleh B, Jiang J, Fathi R, Al-hababi T, Xu Q, Wang L, Song D, Ma A, 30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, Applications and Future Challenges. *Composites Part B: Engineering*. 2020; 201:108376.  
<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2020.108376>
- [53] Mao L, Zeng S, Liu Q, Wang G, He Y. Dynamical mechanics behavior and safety analysis of deep-water riser considering the normal drilling condition and hang-off condition. *Ocean Engineering*, 2020 ;199:106996. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.106996>
- [54] Sallai ben-Oumrane, « Etude et analyse des structures en FGM ; comparaison entre E-FGM, P-FGM et S-FGM. » Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2011.
- [55] Timoshenko. 1972, Department of Mechanical Engineering, University of Nottingham, Nottingham NG7 2RD, England Received 20 March 1972, Available online 24 July 2003.
- [56] Levinson. 1980 *The Journal of Philosophy* Vol. 77, No. 1 (Jan., 1980), pp. 5-28 (24 pages) Published By: Journal of Philosophy, Inc. <https://doi.org/10.2307/2025596>
- [57] Murthy. 1981; Departments of Biological Sciences and Biochemistry Purdue University, West Lafayette, Ind. 47907, U.S.A. Received 5 May 1981, Available online 9 March 2005.
- [58] Reddy, J.N., 1984. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J Appl Mech* 51(4), 745–52.
- [59] Karama, M., Afaq, K.S., Mistou, S. (2003), “Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with

## Références Bibliographiques

- transverse shear stress continuity”, *Int. J. Solids Struct.*, 40(6), 1525–1546.
- [60] Touratier, M. (1991), “An efficient standard plate theory”, *Int. J. Eng. Sci.*, 29(8), 901–916.
- [61] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., and Adda Bedia, E. A. (2010). Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory.” *Int. J. Mech. Mater. Des.*, Vol. 6, No. 2, pp. 113-121.
- [62] El Meiche A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate 53 (4), 2011,237-247
- [63] Kaczkowski, On Kinematical Assumptions of Refined Theories of Plates: A Survey, 57(4): 1088-1091.
- [64] Reissner March 1975 <https://doi.org/10.1002/sapm19755411>.
- [65] Voyiadjis and Shi, 1991; Simple and efficient shear flexible two-node arch/beam and four-node cylindrical shell/plate finite elements.
- [66] Shi, Voyiadjis, 2011; A Sixth-Order Theory of Shear Deformable Beams With Variational Consistent Boundary Conditions *J. Appl. Mech.* Mar 2011, 78(2): 021019.
- [67] Winkler, E.: *Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkei.*, Dominicus (1867)
- [68] Dey, A., Basudhar, P.: Applicability of Burger model, in predicting the response of viscoelastic soil beds. In: *GeoFlorida 2010: Advances in Analysis, Modeling and Design*, vol 2010, pp. 2611–2620. (2010)
- [69] Findley, W.N., Lai, J.S., Onaran, K.: *Creep and relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials*. Dover Publications, INC., New York (1976)
- [70] Filonenko-Borodich, M.: Some approximate theories of elastic foundation. *Uchenyie Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta Mekhanika*, Moscow **46**, 3–18 (1940)
- [71] Hetényi, M.: *Beams on Elastic Foundation: Theory with Applications in the Fields of Civil and Mechanical Engineering*. University of Michigan, Michigan (1971)
- [72] Pasternak, P.: On a new method of an elastic foundation by means of two foundation constants. *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstve i Arkhitekture*, (1954)
- [73] Vlasov, V.: *Structural Mechanics of Thin-Walled ThreeDimensional Systems*. Stroizdat, Moscow (1949)
- [74] Reissner, E.: A note on deflections of plates on a viscoelastic foundation. *J. Appl. Mech.* ASME 25, 144–145 (1958)
- [75] Razaqpur, A.G., Shah, K.: Exact analysis of beams on two parameter elastic foundations. *Int. J. Solids Struct.* **27**(4), 435–454 (1991)
- [76] Celep, Z., Malaika, A., Abu-Hussein, M.: Forced vibrations of a beam on a tensionless foundation. *J. Sound Vib.* 128(2), 235–246 (1989)
- [77] Farshad, M., Shahinpoor, M.: Beams on bilinear elastic foundations. *Int. J. Mech. Sci.* 14(7), 441–445 (1972)
- [78] Jain, R., Nath, Y.: Effect of foundation nonlinearity on the nonlinear transient response of orthotropic shallow spherical shells. *Ing. Arch.* **56**(4), 295–300 (1986)
- [79] Yankelevsky, D.Z., Eisenberger, M., Adin, M.A.: Analysis of beams on nonlinear winkler foundation. *Comput. Struct.* **31**(2), 287–292 (1989)
- [80] Mehrali, M., Mohammadzadeh, S., Esmaeili, M., Nouri, M.: Investigating vehicle-slab track interaction considering random track bed stiffness. *Sci. Iran. Trans. A, Civ. Eng.*

## Références Bibliographiques

---

- 21(1), 82 (2014)
- [81] Zhu, S., Cai, C., Spanos, P.D.: A nonlinear and fractional derivative viscoelastic model for rail pads in the dynamic analysis of coupled vehicle-slab track systems. *J. Sound Vib.* **335**, 304–320 (2015)
- [82] Knothe, K., Grassie, S.: Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies. *Veh. Sys. Dyn.* 22(3–4), 209–262 (1993)
- [83] Vostroukhov, A., Metrikine, A.: Periodically supported beam on a visco-elastic layer as a model for dynamic analysis of a high-speed railway track. *Int. J. Solids Struct.* **40** (21), 5723–5752 (2003)
- [84] Ansari, M., Esmailzadeh, E., Younesian, D.: Frequency analysis of finite beams on nonlinear Kelvin–Voight foundation under moving loads. *J. Sound Vib.* **330**(7), 1455–1471 (2011)
- [85] Hardy, M.: The generation of waves in infinite structures by moving harmonic loads. *J. Sound Vib.* **180**(4), 637–644 (1995)
- [86] Hatada, T., Kobori, T., Ishida, M., Niwa, N.: Dynamic analysis of structures with Maxwell model. *Earthq. Eng. Struct. Dyn.* **29**(2), 159–176 (2000)
- [87] Saksa, T., Jeronen, J.: Dynamic analysis for axially moving viscoelastic Poynting-Thomson beams. *Math. Model. Optim. Complex Struct.* **40**, 131–151 (2016)
- [88] Kerr, A.D.: A study of a new foundation model. *Acta Mech.* **1**(2), 135–147 (1965)
- [89] Younesian, D., Hosseinkhani, A., Askari, H., & Esmailzadeh, E. (2019). Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications. *Nonlinear Dynamics*, *97*(1), 853-895. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-04977-9>
- [90] Kargarnovin, M., Younesian, D.: Dynamic response analysis of Timoshenko beam on viscoelastic foundation under an arbitrary distributed harmonic moving load. In: Proceedings of the 4th International Conference on Structural Dynamics, Germany, p. 875. (2002)
- [91] Frýba, L.: *Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads*. Springer, Berlin (2013)
- [92] Selvadurai, A.P.: *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*. Elsevier, Amsterdam (2013)
- [93] Reissner, E. (1958). A Note on Deflections of Plates on a Viscoelastic Foundation. *Journal of Applied Mechanics*, *25*(1), 144-145. <https://doi.org/10.1115/1.4011704>
- [94] Teodoru, I.-B. (2009). Beams on Elastic Foundation. The Simplified Continuum Approach. Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassy, CONSTRUCTIONS. ARCHITECTURE Section, Tomme LV (LIX), Fascicle 4, pages 37-46 (2009), LV (LIX).
- [95] R. Bennai, F. Mellal, M. Nebab, H. Fourn, M. Benadouda, H.A. Atmane, A. Tounsi, and M. Hussain, on wave dispersion properties of functionally graded plates resting on elastic foundations using quasi-3D and 2D HSDT, *Earthq. Struct.*, vol. 22, no. 5, pp. 447–460, 2022. DOI: 10.12989/eas.2022.22.5.447.
- [96] M. Dahmane, M. Benadouda, A. Fellah, A. Saimi, A.A. Hassen, and I. Bensaid, Porosities-dependent wave propagation in bi- directional functionally graded cantilever

## Références Bibliographiques

- 
- beam with higher- order shear model, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, pp. 1–11, 2023. DOI: 10.1080/15376494.2023.2253546.
- [97] F. Mellal, R. Bennai, M. Avcar, M. Nebab, and H.A. Atmane, On the vibration and buckling behaviors of porous FG beams resting on variable elastic foundation utilizing higher-order shear deformation theory, *Acta Mech.*, vol. 234, no. 9, pp. 3955–3977, 2023. DOI: 10.1007/s00707-023-03603-5.
- [98] H. Frahlia, R. Bennai, M. Nebab, H. Ait Atmane, and A. Tounsi, Assessing effects of parameters of viscoelastic foundation on the dynamic response of functionally graded plates using a novel HSDT theory, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, vol. 30, no. 13, pp. 2765–2779, 2023. DOI: 10.1080/15376494.2022.2062632
- [99] A. Saimi, I. Bensaid, and A. Fellah, Effect of crack presence on the dynamic and buckling responses of bidirectional functionally graded beams based on quasi-3D beam model and differential quadrature finite element method, *Arch. Appl. Mech.*, vol. 93, no. 8, pp. 3131–3151, 2023. DOI: 10.1007/s00419-023-02429-w
- [100] E. Reissner, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J. Appl. Mech.*, vol. 12, no. 2, pp. A69–A77, 2021. DOI: 10.1115/1.4009435
- [101] M. Nebab, M. Dahmane, A. Belqassim, H.A. Atmane, F. Bernard, M. Benadouda, R. Bennai, and L. Hadji, Fundamental frequencies of cracked FGM beams with influence of porosity and Winkler/ Pasternak/Kerr foundation support using a new quasi-3D HSDT, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, pp. 1–13, 2023. DOI: 10.1080/ 15376494.2023.2294371.
- [102] N. Latroch, M. Dahmane, A.S. Benosman, R. Bennai, H.A. Atmane, and M. Benadouda, Inclined crack identification in bidirectional FG beams on an elastic foundation using the h- version of the finite element method, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, pp. 1–7, 2023. DOI: 10.1080/15376494.2023.2290226
- [103] K. Bouafia, M.M. Selim, F. Bourada, A.A. Bousahla, M. Bourada, A. Tounsi, E.A.A. Bedia, and A. Tounsi, Bending and free vibration characteristics of various compositions of FG plates on elastic foundation via quasi 3D HSDT model, *Steel Compos. Struct.*, vol. 41, no. 4, pp. 487–503, 2021. DOI: 10. 12989/scs.2021.41.4.487
- [104] A. Tounsi, A.A. Bousahla, S.I. Tahir, A.H. Mostefa, F. Bourada, M.A. Al-Osta, and A. Tounsi, Influences of different boundary conditions and hygro-thermal environment on the free vibration responses of FGM sandwich plates resting on viscoelastic foundation, *Int. J. Str. Stab. Dyn.*, vol. 0, no. 0, pp. 2450117, 2023. DOI: 10.1142/S0219455424501177.
- [105] B. Fahsi, R.B. Bouiadjra, A. Mahmoudi, S. Benyoucef, and A. Tounsi, Assessing the effects of porosity on the bending, buckling, and vibrations of functionally graded beams resting on an elastic foundation by using a new refined quasi-3D theory, *Mech. Compos. Mater.*, vol. 55, no. 2, pp. 219–230, 2019. DOI: 10.1007/s11029-019-09805-0.
- [106] T.-K. Nguyen, T.P. Vo, and H.-T. Thai, Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory, *Compos. B Eng.*, vol. 55, pp. 147–157, 2013. DOI: 10.1016/j.compositesb.2013.06.011.
- [107] M. Şims\_ek, Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories, *Nucl. Eng. Des.*, vol. 240, no. 4, pp. 697–705, 2010. DOI: 10. 1016/j.nucengdes.2009.12.013.
- [108] Z. Ibnorachid, L. Boutahar, K. EL Bikri, and R. Benamar. Buckling temperature and natural frequencies of thick porous functionally graded beams resting on elastic foundation in a thermal environment, *Adv. Acoust. Vib.*, vol. 2019, pp. 1–17, 2019. DOI: 10.1155/2019/7986569

## Références Bibliographiques

---

- [109] W.Q. Chen, C.F. L  u, and Z.G. Bian, A mixed method for bending and free vibration of beams resting on a Pasternak elastic foundation, *Appl. Math. Modell.*, vol. 28, no. 10, pp. 877–890, 2004. DOI: 10.1016/j.apm.2004.04.001.
- [110] A. Chikh, Investigations in static response and free vibration of a functionally graded beam resting on elastic foundations, *Frat. Integr. Strut.*, vol. 14, no. 51, pp. 115–126, 2019. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.51.09.
- [111] G. Giunta, D. Crisafulli, S. Belouettar, and E. Carrera, Hierarchical theories for the free vibration analysis of functionally graded beams, *Compos. Struct.*, vol. 94, no. 1, pp. 68–74, 2011. DOI: 10.1016/j.compstruct.2011.07.016.
- [112] D.S. Mashat, E. Carrera, A.M. Zenkour, S.A. Al Khateeb, and M. Filippi, Free vibration of FGM layered beams by various theories and finite elements, *Compos. B Eng.*, vol. 59, pp. 269–278, 2014. DOI: 10.1016/j.compositesb.2013.12.008.
- [113] Nguyen, T. K., Nguyen, T. T. P., Vo, T. P., & Thai, H. T. (2015). Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 76, 273-285.
- [114] H. T. Thai, T. P. Vo, Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories, *International Journal of Mechanical Sciences* 62 (1) (2012) 57–66.
- [115] Ait Atmane, A. Tounsi, I. Belkorissat, S.R. Mahmoud, *Nonlocal elasticity theory* for thermal buckling of nanoplates embedded in an elastic medium with uncertain material properties, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 63, No. 1, 2017.
- [116] S. Venkateswara Rao, Raju Kanaka Raju : Finite element modeling of buckling and vibration of functionally graded plates, proceedings of an international conference on aerospace science and technology (ICAST 2002), à Bangalore, en Inde.